М. Я. ВЫГОДСКИЙ

ОСНОВЫ
ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО-МАЛЫХ

Издание третье, дополненное и исправленное

СЕКТОРОМ НАУКИ НАРКОМПРОСА РСФСР КНИГА ПРЕМИРОВАНА В 1932 Г.

Комитетом по высшему техническому образованию при ЦИК СССР допущено на 1933/34 учебный год в качестве учебного пособия для втузов всех типов с предоставлением кафедрам втузов права пользоваться ею в качестве учебника

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933 — ЛЕНИНГРАД

21—5—2

Редакционную работу по этой книге провела *В. И. Контовт.* Издание оформил *А. И. Архангельский.* Корректуру держал *Б. Я. Беркман.* Наблюдал за выпуском *Л. М. Волкович.* Рукопись сдана в производство 4/III 1933 г., листы подписаны к печати 13/VII 1933 г., книга вышла в свет в августе, в количестве 25.000 экз., на бумаге формата 62×94 в $^1/_{16}$, печатных знаков в листе 54.400, листов 29. Заказ № 556, ГТТИ № 40. Ленгорлит № 16201.

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

Это издание отличается от предшествующих двух немногими, но существенными дополнениями и изменениями, обещанными мною в предисловии ко второму изданию. При этом мною были учтены и те замечания, которые мне были сделаны рядом товарищей и за которые я приношу им благодарность. Однако, должен оговориться, далеко не со всеми указаниями мог я согласиться и, разумеется, только те из них, которые казались мне справедливыми, были учтены мною. Я не оставил впрочем без внимания и тех возражений, которые я считал неосновательными. На некоторые из них я ответил в примечаниях к соответствующим местам текста; я старался по возможности точнее сформулировать эти возражения и противопоставить им свою точку зрения. Хочу надеяться, что приведенные мною аргументы смогут повлиять, по крайней мере, на часть моих оппонентов. Надеюсь также, что при этом будет учтен и почти двухгодичный опыт использования этой книги в качестве учебного пособия в руках десятков тысяч учащихся.

Я далек от мысли считать, что теми изменениями и дополнениями, которые внесены мной в это издание, исчерпываются все те улучшения, которые были бы желательны. Напротив, для меня сейчас совершенно ясна картина той переработки, которая должна быть еще произведена. Она связана с некоторой перепланировкой материала и с значительным его расширением. Однако эта переработка требует времени, которым я за срок, протекший от выхода второго издания, не имел возможности располагать. Надеюсь, что следующее издание я смогу дать уже в переработанном виде.

В заключение я хочу с признательностью подчеркнуть, как многим я обязан тем товарищам, которые в своей практической преподавательской работе помогали мне создавать эту книгу. Теперь, когда она напечатана и находится в руках студента, когда она получила оценку общественных смотров и премирована Наркомпросом, теперь каждый преподаватель может без особого риска сделать попытку применить на практике излагаемый здесь метод. Но четыре года назад, имея в руках только рукописные наброски ее текста, нужно было иметь мужество порвать с традицией и, не взирая на иногда резкие возражения со стороны вольных и невольных защитников укоренившихся методов, взять на себя риск следовать новым принципам. Этим товарищам — И. Н. Бронштейну, В. А. Гуковской, П. Е. Дюбюку, С. А. Линскому, П. А. Новикову, И. И. Никитину и С. Н. Соболеву — я приношу глубокую признательность за их помощь.

М. Выгодский.

Ленинград,
18 апреля 1933 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

> В теории познания, как и во всех других областях науки, следует рассуждать диалектически, т. е. не предполагать готовым и неизменным наше познание, а разбирать, каким образом из незнания является знание, каким образом неполное, неточное знание становится более полным и точным.
>
> *ЛЕНИН.*
>
> („Материализм и эмпириокритицизм").

Среди теоретических дисциплин, лежащих в основе технических построений и расчетов, высшая математика занимает одно из первых мест, и потому задача овладения техникой — эта важнейшая задача, стоящая перед рабочим классом нашей страны, — включает в себя задачу овладения математикой, как мощным теоретическим орудием техники.

Между тем большинство наших курсов высшей математики совершенно не ставит задачу выяснить роль математики для техники и естествознания. Авторы игнорируют „презренную практику" или, в лучшем случае, полагают, что в курсе математики нужно дать учащемуся тот объем знаний и навыков, на который сможет опереться изучение технических дисциплин и естествознания.

Эта установка влечет за собой печальные результаты, хорошо известные каждому инженеру, испытавшему их на себе: интерес учащихся к математике понижается, проходимый материал усваивается формально, без глубокого понимания, и когда в технических расчетах инженер встречается с математическими методами, он чувствует себя беспомощным, несмотря на то, что формально прежде он изучал эти методы. Но он изучал их в отрыве от практики, и в практической задаче он не узнает абстрактных математических понятий. Отрыв теории от практики, так часто наблюдаемый и поныне в преподавании математики, есть яркое проявление идеалистических установок, свивших себе в математике, благодаря специфическому характеру этой науки, особенно прочное гнездо.

Передовая педагогическая мысль наша уже довольно давно начала искать выхода из создавшегося положения, и сейчас мы имеем ряд учебников, в которых вопросы практики не игнорируются авторами. И однако, по моему убеждению, эти учебники не решают задачи реконструкции преподавания математики в советском высшем учебном заведении. Здесь нет нужды говорить о тенденции изгнания теории; эта тенденция, разрывающая с другого конца связь теории с практикой, подверглась заслуженному резкому осуждению партии и ее Центрального комитета. Но нужно сказать, что не решают задачи реконструкции и те учебники,

которые, не изгоняя теории, стремятся учесть потребности практики. Основным их недостатком является отсутствие органической связи между теорией и практикой. Учащийся знакомится с тем, как применяется теория к решению практических задач, но он не видит, как эта теория возникает из практики. Приложимость математических методов к конкретной действительности получает в глазах учащегося случайный характер, и это затрудняет ему возможность сформулировать конкретную задачу на математическом языке.

Происходит это потому, что основные понятия высшей математики раскрываются перед учащимся сразу в их наиболее развитой форме, в той форме, которая явилась продуктом длительного исторического и логического развития. Понятно, чем вызывается стремление преподнести учащемуся основные понятия в этой их форме: она является более совершенной, имеет бо́льшее поле применения и логически безупречнее.

Классическая форма этих понятий не имеет этих преимуществ, но она имеет другие; она, хотя и в грубой форме, вскрывает те реальные отношения, из которых заимствованы основные понятия высшей математики; и именно поэтому, знакомясь с ней, учащийся сразу видит, *почему математика приложима к действительности.*

Пример, который я приведу, пояснит эти общие положения. Спросите инженера или физика, пользуется ли он на практике тем дифференциалом, который он изучал в курсе математики. Вы получите, вероятно, ответ, что его дифференциал — это не главная часть приращения функции, а практически ничтожное изменение исследуемой величины. Почему он применяет к „своему" дифференциалу те операции, которые были установлены для „математического" дифференциала, — на этот вопрос лишь немногие дадут ответ, и тогда они скажут вам, какие усилия они затратили, чтобы понять эту связь; для большинства же этот вопрос так и остался неясным: теория — сама по себе, практика — сама по себе. И кто знает, сколько есть у нас инженеров, питающих к высшей математике чувство почтения и... страха.

Не вина инженера, если автор учебника, по которому учился инженер математике, не счел возможным показать, что в математике дифференциал появился впервые именно в той форме, в которой он служит инженеру в повседневной его практике. А это нужно показать, не смущаясь тем, что при этом не достигается строгость изложения. Но строгость придет позднее, на последующем концентре обучения. И, скажу больше, только тогда и будет понятно, зачем нужна эта строгость и почему основные понятия на более высокой ступени развития выступают в форме, по внешности не похожей на первоначальную. Таким образом органическая связь теории с практикой может быть достигнута лишь тогда, когда основные понятия теории даются не в их готовом виде, не в их застывшем бытии, а в их развитии.

В этом и состоит основная мысль, из которой я исходил при построении книги и которая отличает эту книгу от всех других курсов анализа: я стараюсь раскрыть перед учащимся основные понятия высшей математики в той грубой форме, в которой сразу обнаруживается живая их связь с конкретными процессами природы.

В дальнейшем учащийся должен знакомиться с более абстрактными

определениями. С этой высшей точки зрения он взглянет на пройденный ранее путь и осмыслит, почему, несмотря на грубость прежних методов, они дают строгие результаты. Он увидит, каковы границы применимости этих старых методов, и, что особенно важно, он сознательно отнесется к применению новых методов, потому что он поймет, зачем они нужны, чему служит тяжеловесная артиллерия „эпсилонов и дельт", из которой учащегося заставляют стрелять по воробьям.

Я думаю, что изложенная выше установка, определяющая лицо этой книги, является правильной с точки зрения методологии марксизма-ленинизма.

С первого взгляда может, однако, показаться, что эта точка зрения не согласуется с одним из принципиальных высказываний Маркса. Я имею в виду известное место третьей главы „Введения к критике политической экономии". Маркс в ней говорит так о методе политической экономии:

„Казалось бы наиболее правильным начинать с реального и конкретного, с действительных предпосылок, следовательно, например, в политической экономии с населения, которое является основой и субъектом всего общественного производства. Но при ближайшем рассмотрении это оказывается ошибочным. Население — это абстракция, если я упускаю из вида классы, из которых оно состоит. Эти классы опять-таки — пустой звук, если я не знаю элементов, на которых они покоятся, например наемный труд, капитал и т. д.... Если бы я таким образом начал с населения, то я дал бы хаотическое представление о целом, и только путем более частичных определений я аналитически подошел бы к все более и более простым понятиям: от конкретного, данного в представлении, к все более и более тощим абстракциям, пока не достиг бы простейших определений. И тогда я должен был бы пуститься в обратный путь, пока снова не подошел бы к населению, но уже не как к хаотическому представлению о целом, а как к богатой совокупности, с многочисленными определениями и отношениями. Экономисты XVII столетия, например, всегда начинают с живого целого, с населения, государства, нескольких государств и т. д., но они всегда заканчивают тем, что путем анализа выделяют некоторые определяющие общие отношения, как разделение труда, деньги, стоимость и т. д.

Как только эти отдельные моменты были более или менее абстрагированы и зафиксированы, экономические системы стали восходить от простейшего, как труд, разделение труда, потребность, меновая стоимость,— к государству, международному обмену и мировому рынку. Последний метод, очевидно, является правильным в научном отношении".

Легко видеть, что лишь в кажущемся противоречии находится здесь приведенная мысль Маркса с изложенной выше моей точкой зрения на метод преподавания анализа. В самом деле, Маркс оговаривает, что последний из двух методов изложения является правильным в научном отношении. Исторически люди шли обратным путем, и только поэтому, как это показывает Маркс, оказалось возможным абстрагировать и зафиксировать общие отношения науки.

Но будет ли правильным строить начальный учебник так, как строится научный труд? И не будет ли тогда казаться учащемуся, что общие понятия и отношения науки свалились с неба? Вопрос этот нужно решать для каждой отдельной дисциплины. В отношении высшей математики к отрицательному ответу на первый вопрос я пришел впервые после многолетних неудачных попыток популяризировать основные ее понятия на современной научной базе. Затем мне стала ясна и причина

этих неудач: вследствие специфического характера математики от ее „наиболее тощих абстракций" до ее конкретизации „с многочисленными определениями и отношениями" ведет длинный путь, на котором легко теряется перспектива движения; по этому пути гораздо легче пойти после того, как вскрыты те реальные отношения, из которых заимствованы основные понятия высшей математики. А эти реальные отношения вскрываются как раз в той классической форме, в которой дифференциал рассматривается как ничтожно малое изменение величины (а не как главная часть приращения функции). Из рассмотрения этих реальных отношений становится понятным, почему над дифференциалом производят определенные математические операции (в частности пренебрегают высшими степенями дифференциала), почему, несмотря на противоречия с правилами арифметики, этот метод применяется к естествознанию и технике.

Интересно, что как раз по вопросу о дифференциале мы имеем очень подробно развитое рассуждение Энгельса, который подчеркивает, что математические свойства бесконечно-малых (в частности дифференциала) могут быть поняты только из действительности, а не из самой математики. Этому вопросу посвящено большое примечание к „Анти-Дюрингу", — „О прообразах математического бесконечного в действительном мире" (Маркс и Энгельс, т. XIV, стр. 343 — 348).

„Согласно господствующим теперь в физике и химии взглядам, — говорит Энгельс, — земные массы, тела, служащие объектом механики, состоят из молекул, из мельчайших частиц, которые нельзя делить дальше, не уничтожая физического и химического тожества рассматриваемого теля. Согласно вычислениям В. Томсона диаметр наименьшей из молекул не может быть менее одной пятидесятимиллионной доли миллиметра. Допустим также, что наибольшая молекула имеет диаметр в одну двадцатипятимиллионную долю миллиметра. В таком случае это все еще ничтожно малая величина по сравнению с теми массами, которыми оперируют механика, физика и даже химия. Между тем она обладает всеми присущими данной массе свойствами; она может замещать в физическом и химическом отношении эту массу и действительно замещает ее во всех химических уравнениях. Короче говоря, она обладает по отношению к соответствующей массе теми же свойствами, какими обладает математический дифференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае дифференциала в математической абстракции кажется нам таинственным и непонятным [1]), здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным.

Природа оперирует этими дифференциалами-молекулами точно так же и по точно таким законам, как математика оперирует своими абстрактными дифференциалами. Так, например, дифференциал от x^3 будет $3x^2\,dx$, причем мы пренебрегаем $3x\,dx^2$ и dx^3".

Дальше Энгельс конкретизирует процесс дифференцирования функции x^3 на примере возрастания объема куба. Я могу не цитировать этого места, ограничившись указанием, что на стр. 146 моей книги читатель найдет аналогичное рассуждение, проведенное на примере роста квадрата.

В конце цитируемого примечания Энгельс обращает внимание на то, что, лишь исходя из конкретных прообразов бесконечности, могут быть поняты операции математики бесконечного:

---

[1]) Энгельс имеет в виду, как ясно из последующего, операцию пренебрежения бесконечно-малыми высшего порядка.

„Математическая бесконечность заимствована из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому она может быть объяснена только из действительности, а не из самой себя, не из математической абстракции".

Этим стремлением объяснить из действительности „таинственные и непонятные" операции исчисления бесконечно-малых и проникнута моя книга.

Это стремление отнюдь не отрицает, а, напротив, чрезвычайно облегчает обратный путь, которым, по Марксу, должна строиться всякая наука: путь, правильный в научном отношении.

Как известно, сам Маркс пошел по этому пути, предприняв работу по научному обоснованию анализа. К сожалению, эта работа еще не опубликована. О содержании математических рукописей Маркса мы пока знаем сравнительно немного: это то, что содержится в двух письмах Энгельса к Марксу (от 18/VIII 1881 г. и от 21/XI 1882 г.), опубликованных недавно в XXIV томе сочинений Маркса и Энгельса (стр. 531—532 и 589—590). Из них, однако, видно, что Маркс предлагает новый метод построения анализа, начиная от его простейших понятий. Энгельс восторженно отзывается о методе Маркса и особенным преимуществом этого метода считает то, „что здесь доказано, что обычный метод с опущением dx, dy и т. д. положительно неправилен".

Может показаться, что Энгельс здесь противоречит самому себе, но после всего вышесказанного ясно, что противоречия здесь нет никакого: в предисловии к „Анти-Дюрингу" Энгельс говорит о том, как понятие дифференциала выкристаллизовывается из его „действительных предпосылок"; здесь же, очевидно, речь идет о том, каким является дифференциал в научной системе, восходящей от простейших абстракций к богатой конкретной совокупности.

Рассмотрим один простой пример, разъясняющий дело и одновременно способствующий выяснению точки зрения, положенной в основу этой книги. С точки зрения современной физики обычное представление о прямолинейном распространении света „положительно неправильно". Мы знаем, что пучок света огибает экран, размеры которого имеют порядок малости длины световой волны. Тем не менее мы знакомимся со световыми явлениями, начиная с представления о прямолинейном распространении света. На нем основаны, например, элементарное учение о тенях и вся геометрическая оптика. Правильно ли было бы с самого начала изучения физики предлагать учащемуся стать на высшую точку зрения? Далеко ли он мог бы пойти с ней на этой первой стадии обучения? И не следовало ли бы тогда начинать с электромагнитной теории света, а может быть и с квантовой механики?

Мы видим, что подчас нужно, прежде чем итти по правильному в научном отношении пути, проделать педагогически известные исторические этапы, являющиеся с высшей точки зрения „положительно неправильными": „Познание, притязающее на безусловную истину, осуществляется в ряде относительных заблуждений", — говорит Энгельс в „Анти-Дюринге".

Всякую мысль можно довести до абсурда; можно, как делают некоторые, заключить, что с изложенной точки зрения следовало бы начинать изучение химии с теории флогистона. Эта демагогическая аргумен-

тация упускает из виду, что теории флогистона нет места в современной науке и что ни в одной химической лаборатории с теорией флогистона нечего делать. Геометрическая оптика, напротив, остается относительно истинной в очень широких пределах, и на ней основывается ряд научных и технических построений.

Так же дело обстоит и с классической концепцией дифференциала. В свете современного научного обоснования она „положительно неправильна". Но в очень широких пределах (можно указать, в каких именно) она остается относительно истинной. Опираясь на многочисленные факты окружающей действительности, она, как и геометрическая оптика, не обладает полной достоверностью, но зато свойства дифференциала становятся „сами собою разумеющимися и, так сказать, очевидными".

—

Из изложенной выше установки вытекают следующие особенности этой книги:

1) Конкретные задачи составляют органическую часть курса. Они служат не только приложением теории, но и источником постановки теоретических вопросов.

2) Основные понятия анализа выступают в их развитии. Это значит, что на первом этапе изучения я ввожу основные понятия анализа в их грубой форме, в которой они заимствуются из изучения простейших фактов естествознания и техники. Таким образом я отказываюсь от традиции основывать изложение на теории пределов. Теории пределов должно быть уделено должное место там, где она действительно необходима не только как формализующий аппарат, но и как база для развития новых — более сильных — методов. Эта книга охватывает лишь небольшой концентр сведений, и для большинства втузов материал, в ней содержащийся, недостаточен. Я надеюсь продолжить эту работу. При развертывании фактического материала, естественно, встает задача углубления теоретической базы.

3) Я отказываюсь от резкого разграничения анализа на дифференциальное и интегральное исчисление. Обе операции анализа рассматриваются сначала как самостоятельные проблемы, затем устанавливается связь между ними, и в дальнейшем изучаются обе эти операции слитно.

4) Отправной точкой является не задача дифференцирования, а задача интегрирования, так как при этом раскрывается сразу гораздо более широкое поле исследования конкретных вопросов. Именно поэтому задача интегрирования и исторически возникла прежде задачи дифференцирования.

5) Я не избегаю постановки принципиальных вопросов, неразрывно связанных с излагаемым материалом. Центральным вопросом является конечно вопрос об отношении математических абстракций к действительности.

Это второе издание книги печатается стереотипно. Поэтому я не имел возможности внести в нее ряд существенных изменений, несмотря на то, что уже теперь я вижу ряд недочетов, которые я надеюсь исправить в следующем издании.

Важнейшим из них я считаю нечеткость и недостаточность ряда формулировок. В книге, например, не подчеркнута мысль, что высшая математика, математика переменных величин, имеет своим главным предметом количественную сторону движения, что она, говоря словами Энгельса, „относится к математике постоянных величин, как диалектическое мышление к метафизическому“. Эту мысль легко иллюстрировать на многочисленных примерах, рассматриваемых в этой книге, но в явной форме это мною не сделано.

Точно так же недостаточно четко говорится о роли теории пределов. В предисловии к первому изданию я писал, что на первых этапах развития анализа она не порождает новых методов, а лишь оправдывает их. Однако читатель мог и не обратить внимания на выражение „на первых этапах“, которое не было подчеркнуто, и истолковать это место, а также ряд других мест в тексте (стр. 5, 39, 156, 158 старого издания) как отрицание за теорией пределов действенной роли в математике. Этого я не хотел утверждать, но читатель, по моей вине, мог составить такое представление о моей точке зрения.

Можно было бы указать еще ряд примеров неточных формулировок, но я ограничусь этими двумя. По поводу второго из них я считаю, однако, необходимым еще раз подчеркнуть, что на первом этапе изучения анализа необходимо ознакомить учащегося с классической концепцией исчисления бесконечно-малых, менее строгой, но более простой. Я повторяю, что даже на высших ступенях математического исследования зачастую первая разведка проблемы делается методом бесконечно-малых, и лишь позднее, при уточненной разработке, вступает в силу метод пределов. Тем более необходимо дать учащемуся в руки этот мощный аппарат для овладения техническими проблемами, стоящими в центре его внимания. В процессе применения этого аппарата учащийся его оценит, поймет необходимость его усовершенствования и изучит с высшей точки зрения.

М. Выгодский.

Москва, 25 февраля 1932 г.

Глава I.

Основные понятия интегрального исчисления.

§ 1. Основной задачей элементарной геометрии, задачей, которой она обязана своим возникновением, является вычисление площадей, поверхностей и объемов. Но в рамках элементарной геометрии эта задача получает лишь ограниченное разрешение. Лишь для простейших тел и фигур объемы и площади могут быть получены средствами элементарной геометрии. Так, зная некоторые линейные величины (например, основание и высоту), мы можем найти площадь прямоугольника, параллелограма, треугольника, трапеции, многоугольника, круга.

Вообще, если площадь ограничена ломаной линией или отрезками прямой и дугами окружности, тогда, и только тогда, мы можем методами элементарной геометрии выразить ее через линейные размеры „абсолютно точно“ или по крайней мере с любой степенью точности (площадь s круга через его радиус r выражается формулой $s = \pi r^2$, где π есть число, которое можно найти с любой степенью точности).

Интегральное исчисление возникло из потребности вычислять площади, поверхности и объемы *произвольных* тел и фигур. Его метод дает возможность, по крайней мере принципиальную, *единообразными приемами* разрешить задачу вычисления площади (или объема), как только задана линия, ее ограничивающая. К частным вопросам этот метод применялся еще древнегреческими математиками. Архимед (III в. до нашей эры) оставил нам ряд блестящих приложений его к ряду проблем геометрии и механики. Но лишь сравнительно недавно, в XVII—XVIII вв., метод интегрального исчисления (метод бесконечно-малых) был разработан систематически и был применен не только к сравнительно простой и частной задаче — определению площадей и объемов, но и к ряду других проблем. Этот метод стал основным методом всего математического естествознания и техники, и именно потребности техники и связанных с ней тесно теоретических дисциплин вызвали его к жизни.

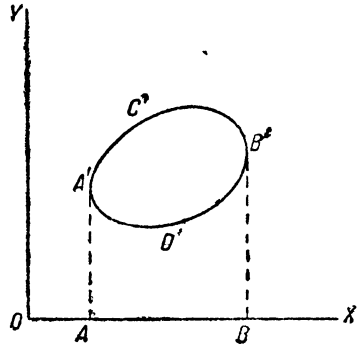
Мы не можем излагать здесь историю развития метода интегрального исчисления, но в самом изложении считаем целесообразным начать с той проблемы, из которой возникло интегральное исчисление, и по мере возможности следовать, по крайней мере в общих чертах, историческому ходу развития его идей. Мы начнем с проблемы измерения площадей.

§ 2. Чтобы определить площадь какой-либо фигуры, нам прежде всего нужно знать, какой линией она ограничена. Эту линию — границу площади — можно задать чисто геометрически, указав геометрическое свойство, принадлежащее всем ее точкам. Но можно задать линию и „аналитически“, выбрав некоторую систему координат (скажем, прямо-

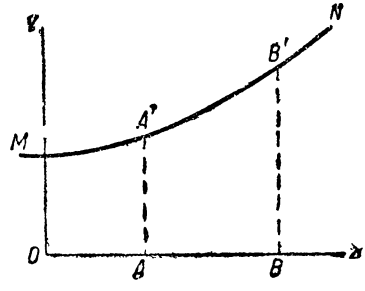
угольную) и задав уравнение, связывающее абсциссу и ординату любой точки линии.

Оба способа задания линии для каждой отдельной линии вполне эквивалентны, т. е. по данному геометрическому свойству линии мы всегда можем составить ее уравнение относительно некоторой системы координат и, обратно, из данного уравнения линии можно вывести все ее геометрические свойства.

Но аналитический способ задания линии вносит единообразие в решение всех геометрических задач. Вот почему, стремясь к возможно более общей постановке вопроса об измерении площади фигуры, мы будем считать, что площадь, которую мы хотим вычислить, ограничена такой линией или такими линиями, которые заданы нам своими уравнениями в прямоугольной системе координат.



Черт. 1.



Черт. 2.

§ 3. Если мы взглянем на черт. 1, то увидим, что для определения площади, ограниченной линией $A'C'B'D'$, отнесенной к произвольно выбранной системе координат XOY, мы можем воспользоваться таким простым приемом: из „крайних" точек A' и B' нашей линии (т. е. из точек, имеющих наибольшую и наименьшую абсциссы) мы проведем ординаты $A'A$ и $B'B$. Тогда искомая площадь будет разностью площадей $A'C'B'BA$ и $A'D'B'BA$, и — значит — достаточно научиться вычислять площадь такого типа, как эти последние.

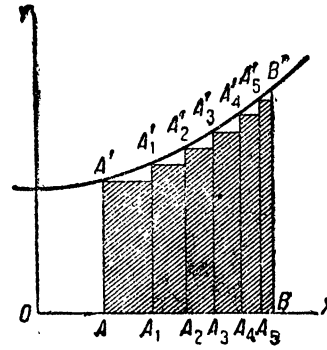
Таким образом задача вычисления произвольной площади будет решена, если мы научимся решать такую задачу: дана линия MN (своим уравнением); на ней выбраны две точки (т. е. заданы их координаты) A' и B'. Определить площадь $A'B'BA$, ограниченную дугой нашей линии, двумя ординатами $A'A$ и $B'B$ и отрезком оси абсцисс AB, заключенным между этими ординатами (черт. 2).

Эту задачу мы и рассмотрим теперь более подробно.

§ 4. К общему решению сформулированной нами задачи мы подойдем таким образом. Разобьем отрезок AB оси абсцисс на некоторое число n частей ($n = 6$, черт. 3). Эти части не должны быть непременно равны друг другу. Мы получим таким образом $n - 1$ точек деления: $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$. Через них проведем ординаты $A_1A'_1$, $A_2A'_2$ и т. д.

Наша фигура разбилась на n полосок, и площадь ее равна сумме площадей этих полосок.

Теперь проведем через точки A', A_1', $A_2'\ldots A_{n-1}'$ прямые, параллельные оси абсцисс. Тогда из каждой полоски выделится прямоугольник, площадь которого несколько отличается от площади полоски [1]).



Черт. 3.

Сумма площадей этих прямоугольников дает площадь „ступенчатой фигуры", заштрихованной на чертеже. Площадь ступенчатой фигуры несколько отличается от площади фигуры $A'B'BA$, но это отличие, как легко видеть из чертежа, сглаживается по мере того, как число полосок возрастает, а каждая из них становится все тоньше и тоньше. Поэтому мы можем для приближенного вычисления площади $A'B'BA$ заменить ее площадью ступенчатой фигуры. Эту последнюю очень легко вычислить.

Обозначим через x_1, $x_2\ldots x_{n-1}$ абсциссы точек A_1', $A_2'\ldots A_{n-1}'$ а через y_1, $y_2\ldots y_{n-1}$ их ординаты. Абсциссы точек A' и B' мы будем обозначать через a и b. Кроме того для единообразия мы будем вместо a и b пользоваться также обозначениями x_0 и x_n. Через y_0 и y_n будем обозначать ординаты точек A' и B'.

Таким образом

$$\left.\begin{array}{ll} OA = x_0 = a, & AA' = y_0, \\ OA_1 = x_1, & A_1A'_1 = y_1, \\ OA_2 = x_2, & A_2A'_2 = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ OA_{n-1} = x_{n-1}, & A_{n-1}A'_{n-1} = y_{n-1}, \\ OB = x_n = b, & BB' = y_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Чтобы вычислить площадь ступенчатой фигуры, нужно сложить площади всех ее ступенек, каждая из которых имеет форму прямоугольника. Площадь первой ступеньки равна:

$$AA' \cdot AA_1 = AA'(OA_1 - OA) = y_0(x_1 - x_0).$$

Площадь второй ступеньки равна:

$$A_1A_1' \cdot A_1A_2 = A_1A_1'(OA_2 - OA_1) = y_1(x_2 - x_1).$$

---

1) На нашем чертеже все прямоугольники имеют меньшую площадь, чем соответствующие полоски. Если бы кривая $A'B'$ шла книзу, то меньшую площадь имели бы полоски. В целях краткости изложения мы будем рассматривать в дальнейшем лишь первый случай; от этого рассуждения нисколько не теряют своей общности. Они могут быть буквально повторены (с соответствующими изменениями) и для второго случая.

Аналогично вычисляются площади остальных ступенек, и для площади ступенчатой фигуры с n ступеньками (мы будем ее обозначать через s_n) мы получим выражение:.

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_3 - x_2) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \quad (2)$$

Эта формула является основной для всех дальнейших рассуждений.

§ 5. Выведенная нами формула (2) не дает возможности непосредственно ответить на вопрос о величине площади $A'B'BA$. Она дает лишь приближенную ее величину. Но с увеличением числа n степень приближения увеличивается, и — что особенно важно — увеличивается неограниченно. Любая требуемая степень точности может быть достигнута. Для этого нужно только взять число n достаточно большим. Так, если требуется, чтобы ошибка, получаемая от вычисления площади $A'B'BA$ по формуле (2), не превышала 0,001 *мм*^{2}, то можно будет взять столь большое число n, чтобы этому требованию удовлетворить. Какое именно число n придется взять — это зависит, конечно, от размеров фигуры $A'B'BA$ и формы линии $A'B'$.

Эти простые соображения привели математиков XVII в. и — еще раньше — мыслителей античного мира к смелой идее, оказавшейся чрезвычайно плодотворной. Идея эта может быть выражена следующим образом: если с увеличением числа n точность формулы (2) неограниченно возрастает, то теоретически точную величину площади $A'B'BA$ формула

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

даст в том случае, когда число n будет взято бесконечно-большим. Мы назвали эту идею смелой потому, что она немедленно порождает ряд возражений против существования бесконечно-больших чисел. Но все эти возражения исходят из логической, формальной постановки вопроса. Практически всегда можно взять число n настолько большим, чтобы ступенчатая площадь и площадь $A'B'BA$ стали практически равными.

Но математика издавна заслужила себе славу точной науки; ее не может удовлетворить ссылка на „грубую“ практику. И против идеи введения бесконечно-больших величин в математику раздались резкие возражения с самого появления этой идеи на свет. Однако долгое время эта критика оставалась непродуктивной. Лишь в XIX в. удалось блестящие открытия, сделанные в течение двух предшествующих веков, изложить так, что бесконечно-большие и бесконечно-малые величины оказались фактически изгнанными (в терминологии они сохранились и до настоящего времени).

Столь позднее положительное оформление критики не было исторической случайностью. Наука должна была пройти через предшествующую стадию накопления материала, а накопить этот материал возможно было лишь теми методами, которыми пользовались математики XVII и XVIII вв. Их рассуждения были конечно несовершенны с формальной стороны, но они обладали, несмотря на это (лучше сказать — именно поэтому), большой наглядностью и простотой.

Существо всякого дела выясняется лучше всего тогда, когда с основной идеей мы знакомимся в ее общей, по необходимости грубой форме. Поэтому и мы, оставляя пока в стороне формальные возражения, не побрезгуем бесконечными величинами и введем их в рассмотрение. Попутно мы будем знакомить читателя и с теми идеями, которые легли в основу позднейших логических построений.

§ 6. Возвратимся к нашей задаче — вычислению площади $A'B'BA$. Мы сказали, что эта площадь может быть теоретически точно определена, если в формуле

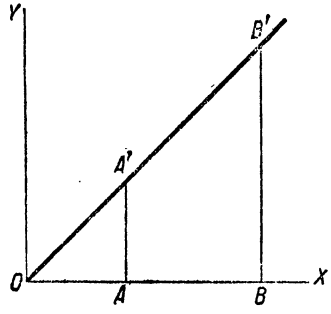
$$s_n = y_0 (x_1 - x_0) + y_1 (x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1} (x_n - x_{n-1}) \qquad (2)$$

положить n равным бесконечности.

Разумеется, для фактического вычисления площади нужно знать форму линии $A'B'$, т. е. нужно знать уравнение, связывающее абсциссу x и ординату y произвольной ее точки.

Для начала мы выберем простейшее уравнение: $y = x$. В этом случае линия $A'B'$ имеет форму прямой; прямая эта проходит через начало координат O и наклонена к горизонту (к оси абсцисс) под углом 45° (черт. 4). Очевидно, что фигура $A'B'BA$ является трапецией с основаниями BB' и AA' и высотой AB. Площадь ее поэтому может быть вычислена по формуле элементарной геометрии:

$$s = \frac{(BB' + AA')\,AB}{2}. \qquad (3)$$



Черт. 4.

Входящие в эту формулу величины легко выражаются через величины a и b, которые, как выше условлено, представляют абсциссы OA и OB точек A' и B'. Именно из уравнения $y = x$ (или — еще проще — из треугольников OAA' и OBB') следует что:

$$AA' = OA = a,$$
$$BB' = OB = b.$$

Линия же AB есть разность абсцисс точек B' и A':

$$AB = OB - OA = b - a.$$

Формула (3) таким образом принимает вид:

$$s = \frac{(b + a)\,(b - a)}{2}$$

или

$$s = \frac{b^2 - a^2}{2}. \qquad (4)$$

Теперь мы вычислим ту же площадь $A'B'BA$ общим методом интегрального исчисления, идея которого была выше сформулирована. С пер-

вого раза он может представиться слишком громоздким; но, во-первых, мы подвергнем его обработке, которая чрезвычайно упростит вычисления, во-вторых, не забудем, что это общий метод, который применим и тогда, когда элементарная геометрия оказывается бессильной.

§ 7. Так как уравнение линии $A'B'$ мы задали в виде $y = x$, то в формуле

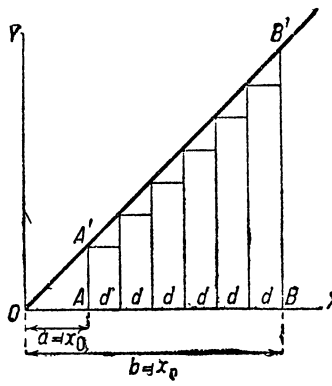
$$s_n = y_0 (x_1 - x_0) + y_1 (x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1} (x_n - x_{n-1}) \qquad (2)$$

мы можем все величины y_0, $y_1 \ldots y_{n-1}$ заменить через величины x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$. Мы получим:

$$s_n = x_0 (x_1 - x_0) + x_1 (x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1} (x_n - x_{n-1}). \qquad (5)$$

В этой формуле $x_0 = a$, $x_n = b$, числа же x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ — промежуточные числа, вставленные между a и b. Их значения зависят от того, каким образом отрезок AB поделен на n частей. Остановимся пока на наиболее простом способе деления и положим, что все n частей отрезка AB равны между собой (черт. 5). Тогда длина d каждой части будет:

$$d = \frac{AB}{n} = \frac{b - a}{n}.$$



Черт. 5.

Легко видеть, что абсциссы x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$ образуют в этом случае арифметическую прогрессию с разностью d, именно:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + d, \\ x_2 &= a + 2d, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= a + (n-1)\,d, \\ x_n &= a + nd = b. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Эти значения подставим в формулу (5), получим:

$$s_n = ad + (a + d)\ d + (a + 2d)\ d + \ldots + [a + (n-1)\,d]\ d.$$

В этой сумме n слагаемых. Открывая скобки, собирая вместе слагаемые вида ad и вынося за скобку d^2 в остальных слагаемых, имеем:

$$s_n = nad + d^2[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)].$$

В квадратных скобках имеем арифметическую прогрессию; суммируем ее:

$$s_n = nad + d^2 \frac{n(n-1)}{2}.$$

Подставляя, наконец, вместо величины d ее значение

$$d = \frac{b-a}{n}, \tag{7}$$

получаем:

$$s_n = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n},$$

или окончательно:

$$s_n = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Таково выражение площади ступенчатой фигуры с n ступеньками равной ширины. Оно дает, как мы говорили, приближенное значение площади трапеции $A'B'BA$. Степень приближения тем больше, чем больше число n.

Мы уже говорили, что идея интегрального исчисления в той ее грубоватой форме, в которой она высказывалась основоположниками исчисления бесконечно-малых, состоит в том, что точное значение площади трапеции мы найдем, полагая в формуле (8) число n бесконечно-большим: $n = \infty$.

Действительно, в правую часть формулы (8) входит дробь $\frac{1}{n}$. Эта дробь по мере увеличения числа n уменьшается, приближаясь к нулю. При $n = \infty$ дробь $\frac{1}{n}$ должна равняться нулю:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Подставляя в формулу (8) вместо дроби $\frac{1}{n}$ величину 0, мы получаем:

$$s_\infty = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

или, после простых алгебраических преобразований:

$$s_\infty = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Сравнивая это выражение с формулой площади трапеции, выведенной выше:

$$s = \frac{b^2 - a^2}{2}, \tag{4}$$

мы видим, что результат получается действительно теоретически точный.

§ 8. Предыдущее вычисление исходило из предположения, что абсциссы x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$ образуют арифметическую прогрессию; но это предположение совершенно несущественно, если мы имеем в виду определить s_n для б е с к о н е ч н о - б о л ь ш о г о n, так как в результате

мы должны получить одну и ту же величину — площадь трапеции. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять абсциссы x_0, $x_1 \ldots x_n$ растущими по любому другому закону. Проще всего будет взять рост абсцисс в геометрической прогрессии. Обозначая через h знаменатель этой прогрессии, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= ah, \\ x_2 &= ah^2, \\ &\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= ah^{n-1}, \\ x_n &= ah^n = b. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Из последнего равенства можно определить знаменатель прогрессии h

$$h = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}. \qquad (7')$$

Формула

$$s_n = x_0(x_1 - x_0) + x_1(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \qquad (5)$$

принимает теперь вид:

$$s_n = a(ah - a) + ah(ah^2 - ah) + ah^2(ah^3 - ah^2) + \ldots$$
$$\ldots + ah^{n-1}(ah^n - ah^{n-1}).$$

Вынося за скобки a в первом слагаемом, ah — во втором и т. д., получаем:

$$s_n = a^2(h-1) + (ah)^2(h-1) + (ah^2)^2(h-1) + \ldots + (ah^{n-1})^2(h-1).$$

Слагаемые этой суммы представляют собой очевидно геометрическую прогрессию, имеющую n членов. Знаменатель этой прогрессии $q = h^2$. Первый член $u_1 = a^2(h-1)$; последний член

$$u_n = (ah^{n-1})^2(h-1).$$

Вставляя в формулу для суммы s_n геометрической прогрессии

$$s_n = \frac{qu_n - u_1}{q-1}$$

соответствующие значения u_1, u_n и q, получаем:

$$s_n = \frac{h^2(ah^{n-1})^2(h-1) - a^2(h-1)}{h^2-1}.$$

Вынося за скобку $(h-1)$ в числителе и сокращая с знаменателем, имеем:

$$s_n = \frac{h^2(ah^{n-1})^2 - a^2}{h+1} = \frac{(h \cdot ah^{n-1})^2 - a^2}{h+1}$$

или

$$s_n = \frac{(ah^n)^2 - a^2}{h+1}. \qquad (8')$$

На основании последнего из равенств (6′) мы можем заменить выражение ah^n через b и окончательно получаем:

$$s_n = \frac{b^2 - a^2}{h+1}. \qquad (8'')$$

Это выражение отличается от соответствующего выражения (4), вычисленного в предположении, что абсциссы образуют арифметическую прогрессию. Тем не менее оно дает тот же результат для s_∞. В самом деле, величина h есть знаменатель геометрической прогрессии $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$. Его величина есть отношение двух последовательных абсцисс, например $\frac{x_1}{x_0}$, или $\frac{x_2}{x_1}$, или $\frac{x_3}{x_2}$ и т. д. С увеличением числа n, т. е. с увеличением числа точек $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$, эти точки все более сближаются друг с другом, и отношение их абсцисс h приближается к единице. Поэтому, считая n бесконечно-большим числом, мы должны считать n равным единице.

Подставляя $h = 1$ в формулу (8″), мы получаем:

$$s_\infty = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

т. е. ту же величину площади трапеции, что и раньше [1]).

§ 9. Все изложенное нами в предшествующих параграфах имело целью выяснить основную идею интегрального исчисления на такой

---

[1]) Здесь может возникнуть тонкий вопрос, который мне не хотелось бы оставить без ответа. В тексте мы подставили $n = 1$ в формулу (8″). Что, если бы мы произвели такую же подстановку в предыдущую формулу (8′)? Вероятно, многие из читателей склонны ответить, что мы получили бы в числителе правой части этой формулы нуль, и, значит, результат будет $S_\infty = 0$. Результат этот, однако, явно абсурден, так как он означает, что площадь всякой трапеции равна нулю! Где же здесь ошибка? Ошибка в том, что при бесконечно-большом n можно считать единицей h но не h^n. В самом деле, по мере увеличения n, приближается к единице h, приближаются также и h^2, и h^3 и т. д., т. е. любая определенная заранее степень величины h. Но выражение h^n, в котором число сомножителей (степень) растет одновременно с приближением h к единице, отнюдь не обязано приближаться к единице. В этом нетрудно убедиться посредством простой арифметической выкладки: как бы близким к единице мы ни взяли число h, несколько большее единицы, всегда можно возвести его в такую степень n, чтобы h^n стало числом, много большим единицы. Итак, выражение h^n мы не можем просто положить равным единице. Чему же оно тогда равно? Ясно, что это зависит от сравнительной быстроты темпов изменения величин h и n, т. е., иначе говоря, от характера зависимости между n и h. Эта зависимость в нашем случае дана формулой (7′), и из нее легко видеть, что величина h^n всегда равна отношению $\frac{b}{a}$. Это значение она сохраняет для всех значений n, значит и для $n = \infty$. Подставляя же это значение в формулу (8′), мы снова придем к формуле (8″), которую мы уже использовали в тексте для получения результата.

задаче, решение которой в сущности заранее известно. Совпадение полученного нами результата с результатом элементарного решения свидетельствует о правильности нового метода решения. Теперь покажем силу этого метода в применении к задаче, которая элементарным путем уже не может быть разрешена.

Пусть линия MN (черт. 6) задана уравнением

$$y = x^2\ ^{1}).$$

Попрежнему возьмем на ней две точки A' и B' с абсциссами $OA = a$ и $OB = b$ и поставим себе задачу определения площади $AA'B'B$. Повторяя ход рассуждений § 4 и сохраняя обозначения, введенные формулами (1), мы получим для площади ступенчатой фигуры с n ступеньками прежнюю формулу:

$$s_n = y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \qquad (2)$$

Но формула (5) § 7, выведенная в предположении, что $y = x$, теперь не годится. Вместо нее, принимая во внимание данное уравнение

$$y = x^2$$

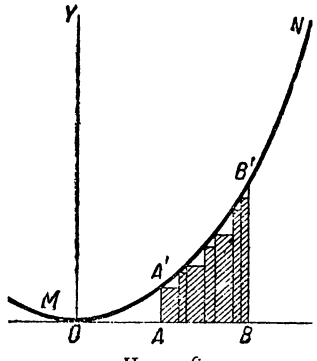
и вытекающие отсюда равенства

$$y_0 = x_0^2;\quad y_1 = x_1^2;\quad \ldots\ y_{n-1} = x_{n-1}^2;\quad y_n = x_n^2,$$

мы получим формулу:

$$s_n = x_0^2(x_1 - x_0) + x_1^2(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-2}^2(x_n - x_{n-1}). \qquad (9)$$

Нам остается теперь сделать какое-нибудь (произвольное) предположение о законе, по которому растут абсциссы $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n$, с тем чтобы подсчитать площадь ступенчатой фигуры с произвольным числом n ступенек, а затем использовать полученный результат для определения площади $AA'B'B$, для чего придется взять число n бесконечно-большим.



Черт. 6.

Казалось бы, что проще всего предположить абсциссы $x_0, x_1 \ldots x_n$ растущими в арифметической прогрессии (т. е. разделить AB на n равных частей). Однако выкладки в этом случае будут очень громоздкими. Наиболее легкими они окажутся в том случае, если мы заставим абсциссы расти не в арифметической, а в геометрической прогрессии, как это мы сделали в предыдущем параграфе для случая

$$y = x.$$

Равенства (6′) предыдущего параграфа, очевидно, сохраняют свою силу, но мы должны их вставить теперь в формулу (9).

---

[1]) Эта линия есть парабола; фигуру $ABB'A'$ можно назвать „параболической трапецией".

Тогда получим:

$$s_n = a^2(ah - a) + (ah)^2(ah^2 - ah) + (ah^2)^2(ah^3 - ah^2) + \ldots + \\ + (ah^{n-1})^2(ah^n - ah^{n-1}).$$

Как и в предыдущем параграфе, вынесем за скобки в первом слагаемом a, во втором ah и т. д.; в последнем слагаемом за скобки выйдет ah^{n-1}. Тогда можно написать:

$$s_n = a^3(h-1) + (ah)^3(h-1) + (ah^2)^3(h-1) + \ldots + (ah^{n-1})^3(h-1).$$

Снова получаем сумму геометрической прогрессии, знаменатель которой теперь равен h^3.

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$s_n = \frac{qu_n - u_1}{q-1}$$

получим теперь

$$s_n = \frac{h^3(ah^{n-1})^3(h-1) - a^3(h-1)}{h^3-1} = \frac{(ah^n)^3(h-1) - a^3(h-1)}{h^3-1}.$$

Знаменатель $h^3 - 1$ может быть разложен на множители по формуле:

$$h^3 - 1 = (h-1)(h^2 + h + 1),$$

представляющей частный случай известной из элементарной алгебры формулы

$$h^m - 1 = (h-1)(h^{m-1} + h^{m-2} + \ldots + h + 1), \qquad (10)$$

которою нам придется еще пользоваться.

Разложив знаменатель на множители, можно будет сократить нашу дробь на $h - 1$; мы получим:

$$s_n = \frac{(ah^n)^3 - a^3}{h^2 + h + 1}. \qquad (10')$$

Так как в силу последнего из равенств (6′) ah^n равно b, то мы получаем окончательно:

$$s_n = \frac{b^3 - a^3}{h^2 + h + 1}. \qquad (10'')$$

Так выражается площадь ступенчатой фигуры с n ступеньками.

Чтобы вычислить площадь $AA'.B'B$, мы должны взять n бесконечно-большим. Рассуждением, аналогичным рассуждению предшествующего параграфа, мы получим, что для бесконечно-большого n величина h равна единице. Подставляя

$$h = 1$$

в формулу площади ступенчатой фигуры (10″), получим [1]):

$$s_\infty = \frac{b^3 - a^3}{1+1+1} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Отсюда заключаем, что площадь s „криволинейной трапеции“ $AA'B'B$ равна

$$s = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

§ 10. В предшествующих двух параграфах мы получили два результата (один — уже известный из элементарной геометрии, другой — существенно новый) одним и тем же приемом, и уже сейчас можно предвидеть, что тот же прием даст возможность решать еще многие другие задачи. Поэтому представляется необходимым по возможности сократить те громоздкие вычисления и обозначения, которыми мы до сих пор пользовались.

В обеих решенных задачах мы находили площадь из одного и того же выражения

$$y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \qquad (2)$$

Только в одном случае мы заменяли величины $y_0, y_1 \ldots y_{n-1}$ величинами $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$ на основании уравнения $y = x$, в другом же случае величинами $x_0^2, x_1^2 \ldots x_{n-1}^2$ на основании уравнения $y = x^2$.

В обоих случаях через x_0 и x_n обозначались данные числа a и b (абсциссы точек A' и B'), а через $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ — промежуточные числа, вставленные между ними (абсциссы промежуточных точек). Наконец, в обоих случаях значение суммы (2) вычислялось для бесконечно-большого значения n, т. е. для бесконечно-большого числа слагаемых в ней.

Мы можем теперь обобщить процесс составления формулы (2) и представить его в чисто арифметической форме, не зависимой от задачи вычисления площади.

Именно, пусть между двумя величинами y и x задана некоторая зависимость (она выражалась в наших примерах формулами $y = x$ и $y = x^2$). Пусть далее заданы два числа a и b. Тогда мы будем давать величине x бесконечное множество значений $x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n$, промежуточных между a и b (первое — x_0 — совпадает с a; последнее — x_n — с b). Величина y будет получать бесконечно-большое число значений $y_0, y_1 \ldots y_n$ (эти значения определяются зависимостью, заданной между y и x). Наконец, составляем сумму:

$$y_0(x_1 - x_0) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}), \qquad (2)$$

каждое слагаемое которой составлено по одному и тому же образцу. Именно берутся два последовательных значения величины x (например x_6 и x_7), и разность их умножается на значение величины y, соответ-

[1]) Если мы хотели бы воспользоваться не формулой (10″), а формулой (10′), то нужно было бы принять во внимание замечание, сделанное в сноске предыдущего параграфа.

ствующее первому из них (на y_0). Таким образом общий вид отдельного слагаемого суммы (2) будет:

$$y_i(x_{i+1} - x_i)$$

(число i принимает все значения от нуля до $n-1$; при $i=0$ получаем первый член, при $i=1$ — второй член суммы и т. д.).

Таких слагаемых в сумме (2) будет n. Это число мы считаем бесконечно-большим, а разность $x_{i+1} - x_i$ двух соседних значений x — бесконечно-малой.

Ввиду единообразия структуры каждого члена суммы (2) мы можем теперь избавиться от необходимости выписывать все члены. Достаточно оставить одно типичное выражение. Таковым могло бы служить выражение

$$y_i(x_{i+1} - x_i).$$

Но оно еще довольно громоздко благодаря присутствию значков i и $i+1$. В обозначении y_i мы можем значок i просто откинуть. Выражение же $x_{i+1} - x_i$ неудобно было бы лишить значков. Поэтому мы запишем сокращенно, что это выражение есть разность последовательных значений величины x, и вместо $x_{i+1} - x_i$ будем писать dx. Буква d есть начальная буква слова „differentia“ — разность, так что dx символизирует „разность иксов“. Выражение dx читается: дифференциал икс или, для краткости, „дэ икс“.

Итак, dx есть бесконечно-малая разность последовательных значений величины x [1]). Типичный член суммы (2) принимает вид: $y\,dx$.

Чтобы показать, что берется сумма слагаемых вида $y\,dx$, спереди ставят знак $\int$ — удлиненное начертание буквы s (summa). Снизу возле этого знака пишут начальное значение величины x, а сверху конечное. Таким образом сумма (2) представляется символически:

$$\int_{x=a}^{x=b} y\,dx$$

или еще короче:

$$\int_a^b y\,dx.$$

Сумма (2) получает также сокращенное наименование. Ее называют „интегралом“ (integer — целый). Сообразно с этим символ

$$\int_a^b y\,dx$$

прочитывается: „интеграл от a до b игрек диференциал икс“.

[1]) Таким образом ясно, что символ d неотделим от буквы x и что поэтому грубейшей ошибкой будет рассматривать его как множитель и писать например dyx вместо $y\,dx$.

Числа a и b называют „нижним“ и „верхним“ пределами интегрирования, выражение $y\,dx$ — подъинтегральным выражением, а функцию y — подъинтегральной функцией.

Числовое значение интеграла существенно зависит от того, какую функцию переменной x представляет переменная y, и конечно от значения величин a и b.

Вычислим, например, интеграл

$$\int_a^b x\,dx.$$

Согласно сказанному выше этот интеграл есть не что иное, как значение суммы

$$x_0(x_1 - x_0) + x_1(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

при бесконечно-большом n.

Мы уже вычисляли эту сумму в § 7 и 8 и нашли, что она равна

$$\frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Таким образом

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}. \tag{11}$$

Точно так же, на основании вычислений предыдущего параграфа, мы можем написать:

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}. \tag{12}$$

Следующие числовые примеры иллюстрируют эти формулы.

$$\int_1^3 x\,dx = 4; \quad \int_5^{12} x\,dx = 59\tfrac{1}{2};$$

$$\int_1^3 x^2\,dx = 8\tfrac{2}{3}; \quad \int_2^5 x^2\,dx = 39;$$

$$\int_2^5 x\,dx = 10\tfrac{1}{2}; \quad \int_3^6 x^2\,dx = 63.$$

К сказанному мы должны присоединить еще два важных замечания

Во-первых, совершенно не имеет значения, какое обозначение выбрано для переменной величины. Вместо x можно взять любое другое обо-

значение. Например интегралы $\int_1^3 z\,dz$; $\int_1^3 t\,dt$; $\int_1^3 r\,dr$ и т. д. (более подробно $\int_{z=1}^{z=3} z\,dz$ и т. д.) дают одно и то же число 4.

Второе замечание относится к выбору значений пределов интегрирования a и b. Они могут быть взяты совершенно произвольно. Число b может быть больше или меньше числа a; каждое из чисел a и b может быть положительным и отрицательным, а также нулем. Формулы (11) и (12) сохраняют во всех случаях свою силу. Более подробно все эти случаи будут разобраны в дальнейшем.

Упражнения.

1) $\int_4^5 x\,dx = 4^1/_2$.

2) $\int_2^5 t^2\,dt = 39$.

3) $\int_0^5 x^2\,dx = 41^2/_3$.

4) $\int_0^2 y\,dy = 2$.

5) $\int_{-2}^0 x\,dx = -2$.

6) $\int_{-3}^0 x^2\,dx = 9$.

7) $\int_{-3}^3 x^2\,dx = 18$.

8) $\int_{-2}^2 x\,dx = 0$.

9) $\int_{-2}^3 t\,dt = 2^1/_2$.

10) $\int_4^2 s\,ds = -6$.

11) $\int_5^2 u^2\,du = -39$.

12) $\int_2^{-3} z\,dz = 2^1/_2$.

§ 11. После всего сказанного в предыдущем параграфе очевидно, что перед нами стоит ближайшая задача: научиться вычислять интеграл

$$\int_a^b y\,dx$$

не только для случаев $y = x$ и $y = x^2$, но и для других функциональных зависимостей между y и x. Мы ограничимся пока небольшим продвижением в этом направлении.

Вычислим интеграл

$$\int_a^b y\,dx$$

для случая $y = 3x$, т. е. интеграл

$$\int_a^b 3x\,dx.$$

Этот интеграл, согласно сказанному в предыдущем параграфе, есть сумма бесконечно-большого числа слагаемых вида

$$3x_i\,(x_{i+1} - x_i)$$

или, в развернутой форме,

$$3x_0\,(x_1 - x_0) + 3x_i\,(x_2 - x_1) + \ldots + 3x_{n-1}\,(x_n - x_{n-1}).$$

Вынося за скобку множитель 3, мы получим для нашей суммы выражение

$$3\,[x_0\,(x_1 - x_0) + x_1\,(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}\,(x_n - x_{n-1})]. \qquad (13)$$

Но сумма, стоящая в квадратных скобках, была уже вычислена нами в § 7 и 8. Она равна:

$$\frac{b^2 - a^2}{2},$$

и, значит, наш интеграл равен

$$\frac{3}{2}\,(b^2 - a^2).$$

Принимая во внимание, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (13), есть интеграл

$$\int_a^b x\,dx,$$

мы можем кратко представить ход выкладки так:

$$\int_a^b 3x\,dx = 3\int_a^b x\,dx = \frac{3}{2}\,(b^2 - a^2).$$

Тем же приемом мы вычислим интегралы:

$$\int_a^b 7x\,dx = \frac{7}{2}\,(b^2 - a^2),$$

$$\int_a^b 4x^2\,dx = \frac{4}{3}(b^3 - a^3);$$

$$\int_a^b 6x^2\,dx = 2(b^3 - a^3).$$

Вообще мы можем написать общую формулу:

$$\int_a^b py\,dx = p\int_a^b y\,dx, \qquad (14)$$

где p — некоторая постоянная величина. Словами скажем так: **постоянный множитель может быть вынесен за знак интеграла.** Вынесение постоянного множителя за знак интеграла есть не что иное, как вынесение этого множителя за скобки в сумме бесконечно-большого числа слагаемых.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) $\int_2^5 4x\,dx = 42.$

2) $\int_1^4 0{,}2x^2\,dx = 4{,}2.$

3) $\int_0^{3{,}2} 0{,}4z\,dz \approx 2{,}05.$

4) $\int_{-1}^{0} 6{,}2u\,du = -3{,}1.$

5) $\int_0^m 3t\,dt = \frac{3}{2}m^2.$

6) $\int_0^m at\,dt = \frac{am^2}{2}$

(a — постоянная величина).

7) $\int_0^a \pi r^2\,dr = \frac{\pi a^3}{3}.$

8) $\int_a^b \frac{m^2}{n}s\,ds = \frac{m^2(b^2 - a^2)}{2n}$

(m и n — постоянные числа).

9) $\int_3^2 -2t\,dt = 5.$

10) $\int_4^1 -0{,}2u^2\,au = 4{,}2.$

11) $\int_{-2}^{2} kz\,dz = 0$ (k — постоянное число).

12) $\int_{-2}^{2} kz^2\,dz = \frac{16k}{3}$

(k — постоянное число).

13) $\int_0^{} \frac{n}{m}t\,dt = \frac{1}{2}mn$

(m и n — постоянные числа).

14) $\int_0^l \frac{\pi a^2}{l^2}t^2\,dt = \frac{1}{3}\pi a^2 l.$

§ 12. Запас наших знаний в области вычисления интегралов еще очень скуден, но уже теперь мы в состоянии применить приобретенные сведения к решению ряда разнообразных вопросов. Задача вычисления площадей, которая дала нам повод ввести понятие интеграла, есть лишь одна (и притом далеко не самая интересная) из тех задач, которые мы можем теперь поставить и разрешить.

Однако прежде вернемся еще раз к вычислению площади, с тем чтобы ввести в наши рассуждения одно упрощение, чрезвычайно важное для дальнейшего.

Пусть требуется вычислить площадь $A'B'BA$, ограниченную дугой параболы $y=\frac{1}{3}x^2$, ординатами $x=1$, $x=4$ и осью абсцисс. Мы можем построить ступенчатую фигуру, как делали это в § 7—9, и, вычисляя ее площадь, найдем выражение:

$$\frac{1}{3}x_0^2\,(x_1-x_0)=\frac{1}{3}x_1^2(x_2-x_1)+\ldots+\frac{1}{3}x_{n-1}^2\,(x_n-x_{n-1}), \quad (15)$$

которое при бесконечно-большом n дает интеграл

$$\int_1^4 \frac{1}{3}x^2\,dx=7.$$

Но точно так же, как нет нужды выписывать длинное выражение (15), нет нужды и в пользовании всей ступенчатой фигурой. Достаточно построить лишь одну ее ступеньку $a'cba$ (черт. 7). Площадь этой ступеньки представляется выражением $\frac{1}{3}x^2\,dx$, причем множитель $\frac{1}{3}x^2$ этого выражения дает высоту aa' ступеньки, а множитель dx — основание ее ab (вспомним, что ab есть бесконечно-малая разность $Ob-Oa$ двух последовательных значений абсциссы x).

Итак, каждое бесконечно-малое слагаемое интеграла выражает площадь соответствующей ступеньки.

Но интеграл $\int_1^4 \frac{1}{3}x^2\,dx$ дает теоретически точное значение площади $A'B'BA$. Это дает нам право сказать, что каждое его слагаемое $\frac{1}{3}x^2\,dx$ дает площадь всей полоски $a'b'ba$. Другими словами, мы можем отождествить площади бесконечно-тонкой полоски $a'b'ba$ и соответствующей ступеньки $a'cba$. Это отождествление чрезвычайно существенно, потому что мы можем при вычислении площади $A'B'BA$ обойтись без процесса построения ступенек.

Мы будем поступать так: разбиваем фигуру $A'B'BA$ на бесконечно-тонкие полоски вида $a'b'ba$; каждую полоску, ввиду ее бесконечной тонкости, считаем прямоугольником. Высотой является $y=\frac{1}{3}x^2$, осно-

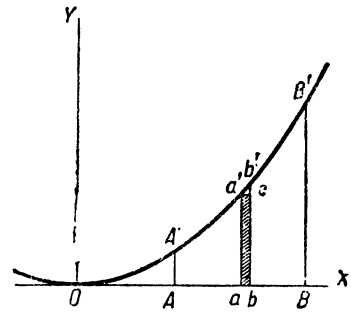
ванием $-dx$. Поэтому площадь полоски равна $y\,dx = \frac{1}{3}x^2\,dx$. Площадь же всей фигуры равна сумме площадей бесконечно-большого числа таких полосок, т. е. интегралу

$$\int_1^4 \frac{1}{3}x^2\,dx.$$

Пределами этого интеграла служат числа 1 и 4, потому что величина x (абсцисса точки, лежащей на линии $A'B'$) изменяется по условию задачи от значения $x=1$ до значения $x=4$. Вычисление интеграла дает:

$$\int_1^4 \frac{1}{3}x^2\,dx = 7.$$

Таким образом искомая площадь равна 7 квадратным единицам.



Черт. 7.

В вышеприведенном рассуждении один только пункт может вызвать беспокойство: имеем ли мы право считать прямоугольником бесконечно-тонкую полоску $a'b'ba$? Беспокойство это вполне законно, потому что во всякой полоске конечной толщины происходит непрерывный рост ординат, так что площадь ее мы не можем вычислять просто, как площадь прямоугольника.

Но будем представлять себе полоску утоньшающейся. Тогда при вычислении ее площади изменение ее ординат от aa' до bb' будет иметь все меньшее и меньшее значение, так как это изменение вызывает появление „треугольника“ $a'cb'$, площадь которого ничтожно мала по сравнению с площадью всей полоски. Если представить себе, что ширина полоски стала нечувствительно малой, т. е. что полоска обратилась в „линию“ (кавычками мы хотим подчеркнуть, что слово „линия“ употреблено здесь не в том смысле, в каком его обычно в геометрии употребляют), то треугольник $a'cb'$ обратится в точку. Поэтому при вычислении площади полоски, чем меньше ее ширина, тем меньшую роль играет треугольник $a'cb'$ и тем меньше ошибаемся мы, принимая полоску за прямоугольник, т. е. приписывая ей всюду одинаковую высоту. В этом смысле можно сказать, что „идеальная“ бесконечно-тонкая полоска должна была бы иметь всюду одинаковую высоту.

Этот аргумент может вызвать возражение. Могут сказать, что идеальных бесконечно-тонких полосок в природе не существует вовсе. На это мы ответим, что всякое математическое предложение имеет дело с „идеальными“ объектами. „Идеальными“ не в том смысле, что они имеют самостоятельное существование за пределами мира вещей и явлений, а в том смысле, что в математике мы разрешаем себе отвлекаться от ряда обстоятельств, в действительности не отделимых от изучаемых объектов. Так, мы оперируем с „идеальными“ линиями, не имеющими толщины.

хотя в действительности всякое тело имеет толщину, хотя бы и не чувствительную для глаза и инструмента.

В нашем случае мы при измерении площади отвлекаемся от изменения ординаты кривой линии на ее участке $a'b'$. В действительности это изменение имеет место, но если участок $a'b'$ очень мал, то практической ошибки мы не получим. Точно так же мы считаем линию на хорошем чертеже геометрической линией, хотя она и имеет некоторую толщину, но столь малую, что допущение наше не дает практической ошибки.

Итак, понятие бесконечно-тонкой полоски с точки зрения соответствия этого понятия действительности является легальным в той же мере, как и понятие геометрической линии.

Но мы не хотим скрыть от читателя, что с логической точки зрения понятие бесконечно-тонкой полоски находится в положении менее выгодном.

Дело в том, что в геометрии линии никогда не приписывается толщина, и таким образом основное свойство линии в самой геометрии не подвергается отрицанию. С бесконечно-тонкой полоской дело обстоит иначе. В самом деле, если линия $A'B'$ есть кривая линия, то ни в одной полосе фигуры $A'B'BA$ ординаты не остаются неизменными.

Отвлекаясь от изменения ординат внутри бесконечно-тонкой полоски, мы попадаем в формальное противоречие с исходными предпосылками.

Это — одно из тех противоречий, которые характерны для классиков математической мысли XVII и XVIII вв. Их можно избежать, если пользоваться позднейшими, более строгими, понятиями и методами. Мы вскоре (§ 17) покажем, как этого можно достигнуть и почему на первой ступени ознакомления с предметом мы не хотим следовать этим методам (изложению их будет посвящена другая работа, являющаяся продолжением этой книги).

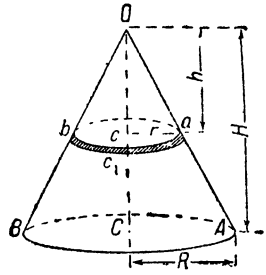
Пока мы ограничимся замечанием, что понятие бесконечно-тонкой полоски (и ему аналогичные, с которыми мы в дальнейшем встретимся), несмотря на вышеуказанные логические дефекты, отнюдь не утратило своего практического значения. Всякий, применяющий математический анализ к изучению проблем техники, естествознания и общественных явлений, должен уметь пользоваться именно этим логически несовершенным, но практически чрезвычайно ценным аппаратом. Более того, лишь научившись понимать грубый язык классического исчисления бесконечно-малых, можно в полной мере оценить те преимущества, которые дает пользование тонким аппаратом математики XIX в. Вот почему в этой книге мы будем говорить о бесконечно-тонких полосках, бесконечно-тонких пластинках, бесконечно-малых промежутках времени и т. д., словом — будем говорить по преимуществу языком классической математики. Лишь иногда, по вопросам особо принципиального характера, мы будем знакомить читателя с позднейшими взглядами.

§ 13. Как было указано в начале предыдущего параграфа, поле применимости интегрального исчисления отнюдь не ограничивается вычислением площадей. Всюду, где искомую величину можно рассматривать как сумму бесконечно-большого числа бесконечно-малых ее частей, применение метода интегрального исчисления дает наиболее простой, а часто и един-

ственный способ решения. В подтверждение этого мы разберем сейчас несколько задач.

Задача 1. Вычислить объем v конуса, высота которого — H, а радиус основания — R.

Разобьем конус на бесконечно-большое число бесконечно-тонких пластинок плоскостями, параллельными основанию конуса. Одна такая пластинка изображена на черт. 8. Через h будем обозначать расстояние произвольного сечения конуса до его вершины, а через r — радиус этого сечения.



Черт. 8.

Найдем выражение для объема бесконечно-тонкой пластинки. Совершенно аналогично тому, как в предыдущем параграфе мы принимали бесконечно-тонкую полоску за прямоугольник, игнорируя изменение ординат внутри полоски, точно так же примем теперь нашу бесконечно-тонкую полоску за цилиндр бесконечно-малой высоты, т. е. будем игнорировать изменение сечения конуса внутри пластинки. Основанием этого бесконечно-низкого цилиндра служит круг радиуса r, так что площадь его основания равна πr^2. Высота же этого цилиндра cc_1 представляет собой разность $Oc_1 - Oc$, т. е. разность двух бесконечно-близких значений величины h, иначе говоря — диференциал величины h dh.

Таким образом объем бесконечно-тонкой пластинки выразится:

$$\pi r^2\, dh.$$

Объем конуса равен сумме объемов бесконечно-большого числа таких пластинок, т. е. интегралу выражения $\pi r^2\, dh$. Каковы пределы этого интеграла, т. е. каковы пределы изменения величины h? Так как на пластинки нужно разбить весь конус AOB, то переменная величина h должна получать значения, лежащие между нулем и величиной H. Так, для объема конуса получаем выражение:

$$v = \int_0^H \pi r^2\, dh. \tag{16}$$

Подъинтегральное выражение содержит кроме переменной h переменную r, но последнюю легко выразить через h. Именно: из подобия треугольников Oac и OAC находим:

$$r = \frac{R}{H} h.$$

Подставляя это выражение в (16), получаем:

$$v = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} h^2\, dh.$$

В подъинтегральном выражении множитель $\frac{\pi R^2}{H^2}$ есть постоянная величина. Вынося его за знак интеграла (§ 11), получаем:

$$v = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H h^2\, dh = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3};$$

$$v = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Мы получили известную из элементарной геометрии формулу объема конуса.

§ 13а. Перед тем как перейти к решению следующей задачи, мы остановимся на одном вопросе принципиального характера, именно на вопросе о том, какие особенности решаемых нами задач порождают необходимость в создании новых математических методов--методов интегрального исчисления и вообще методов так называемой высшей математики. Этот вопрос является вместе с тем вопросом о том, что является характерным для самих методов высшей математики.

Хотя мы рассматривали до сих пор лишь наиболее простые задачи, носящие чисто геометрический характер, однако уже на этом материале мы можем разобрать интересующий нас вопрос, более полное освещение которого будет достигнуто на материале более широком.

Основной задачей измерения площадей, изучаемых в элементарной геометрии, является задача измерения площади прямоугольника; к ней сводятся задачи определения площади параллелограма, трапеции и т. д. Но у прямоугольника высота остается все время неизменной. Это именно и позволяет вычислять его площадь одним простым арифметическим действием—умножением. Вычисление площади ступенчатой фигуры (черт. 3 § 4) уже несколько осложняется необходимостью сложения площадей нескольких прямоугольников. Это осложнение вызывается тем, что высота уже не остается неизменной, а меняется от ступеньки к ступеньке. Но изменяется она ограниченное число раз (на нашем чертеже пять раз). Благодаря этому здесь еще достаточны средства элементарной математики. Они, однако, становятся уже недостаточными, когда вместо ступенчатой фигуры мы рассматриваем „криволинейную трапецию", в которой изменение высоты происходит непрестанно. Здесь нам приходится разбивать площадь на бесконечно-большое число полосок, и тогда мы приходим к задаче интегрального исчисления.

Таким образом, если говорить о задаче измерения площадей, то характерной особенностью, вызывающей необходимость в методах высшей математики, является непрестанная изменяемость высоты. Вообще же всюду, где мы имеем дело с величинами, непрестанно изменяющимися, появляется неизбежная необходимость пользования методами высшей математики; методы элементарной математики становятся недостаточными. Это можно иллюстрировать и на задаче, только что нами рассмотренной: задаче об объеме конуса. Здесь мы имеем дело с непрестанно изменяющейся величиной площади поперечного сечения. Бла-

годаря этому и здесь возникает потребность в методе интегрального исчисления [1]).

Итак, характерной особенностью метода высшей математики является то, что она рассматривает величины, непрестанно изменяющиеся, или, употребляя математический термин, величины переменные. Напротив, элементарная математика имеет дело по преимуществу с величинами постоянными (мы говорим: по преимуществу, потому что, конечно, и в элементарной математике можно найти рассмотрение переменных величин, но там оно находится, так сказать, лишь в зародышевом состоянии). Выражая эту же мысль образными словами Энгельса, мы можем сказать: „математика переменных величин относится к математике постоянных величин, как диалектическое мышление к метафизическому".

§ 14. Отмеченная в предыдущем параграфе характерная черта метода высшей математики была проиллюстрирована на задачах, носивших, как было указано, чисто геометрический характер. Теперь мы рассмотрим задачу физического содержания, разбор которой снова покажет нам справедливость высказанных нами общих положений.

Выбрав за начало отсчета некоторый момент времени, мы будем обозначать через t промежуток времени, протекший от этого начального момента, и поставим себе задачей найти длину s пути, пройденного прямолинейно движущимся телом за промежуток времени от момента $t = t_0$ до момента $t = T$ (t_0 и T — заданные величины).

Если в течение всего этого промежутка времени скорость v движения оставалась неизменной, то решение поставленной нами задачи дается простой формулой элементарной математики

$$s = v(T - t_0).$$

Дело несколько осложняется, если в течение этого промежутка времени тело несколько раз меняло скорость своего движения, но и в этом случае (если скорость меняется ограниченное число раз) задача решается элементарно. Положим, что скорость движения оставалась неизменной от момента t_0 до момента t_1 и имела величину v_1; с момента же t_1 она изменилась, став равной величине v_2, и эта скорость сохранялась до момента t_2; от момента t_2 до момента t_3 тело имело скорость v_3 и т. д. Положим, что таким образом скорость имела n значений:

---

[1]) Может показаться, что этому утверждению противоречит тот факт, что задача об объеме конуса обычно включается в курс элементарной геометрии. Однако настоящее ее место именно в интегральном исчислении, а не в элементарной математике. В интегральном исчислении она, как читатель мог убедиться, решается гораздо более простым и в то же время более общим методом, тогда как в курсе элементарной геометрии для решения ее приходится применять метод, прямо подавляющий своей искусственностью и в конце концов сводящийся к замаскированному пользованию методами высшей математики. Эта маскировка и создает впечатление искусственности. Читателю, успевшему уже забыть это ощущение, напомню, что вычисление объема конуса основывается в элементарной геометрии на предварительном вычислении объема пирамиды, а объем последней вычисляется при помощи поистине головокружительного доказательства (так называемая „чортова лестница"), которое сострадательные авторы иногда опускают вовсе, заменяя каким-нибудь „наглядным" убеждением. Но тогда, разумеется, предложение остается по существу недоказанным.

$v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$, так что последнее значение она имела в промежутке времени от момента t_{n-1} до момента T; для симметрии обозначений мы можем вместо T писать также t_n.

Тогда, как нетрудно видеть, длина s пути, пройденного телом за время от момента t_0 до момента $t_n = T$, представится формулой

$$s = v_0(t_1 - t_0) + v_1(t_2 - t_1), + \ldots + v_{n-1}(t_n - t_{n-1}). \qquad (17)$$

Здесь, как и в предыдущих геометрических задачах, изменение (скорости), происходящее ограниченное число раз, приводит к необходимости рассматривать, вместо произведения двух величин (v и $T - t_0$), сумму n аналогично построенных произведений. Решение осложняется, но остается элементарным.

Если же теперь мы будем рассматривать движение с непрестанно изменяющейся скоростью, то элементарный метод окажется недостаточным, так как теперь нельзя будет разбить промежуток времени от момента t_0 до момента T на ограниченное число участков с неизменной скоростью движения на каждом таком участке. Как и в предыдущих задачах, мы должны прибегнуть теперь к методу интегрального исчисления, т. е. представить себе, что промежуток времени от момента t_0 до момента T разбит на бесконечно-большое число бесконечно-малых участков, на каждом из которых величину скорости можно считать неизменной.

Соответственно с этим вместо суммы (17) мы получим интеграл, подъинтегральное выражение которого (см. § 10) имеет вид

$$v\,dt$$

(dt — бесконечно-малый промежуток времени, v — скорость движения в течение этого промежутка). Пределами интегрирования будут величины t_0 и T — начальное и конечное значения величины t. Таким образом вместо формулы (17) мы получим формулу

$$s = \int_{t_0}^{T} v\,dt. \qquad (17')$$

Для того чтобы придать этой формуле вид, непосредственно пригодный для расчета, необходимо еще знать закон изменения скорости v.

Задача 2. Рассмотрим в качестве примера задачу о свободном падении тела в пустоте. Как известно из физики, скорость движения в этом случае возрастает пропорционально времени, протекшему с момента начала падения. Если мы за начальный момент отсчета времени выберем тот момент, когда скорость движения равнялась нулю, то скорость v, которую тело приобретает в момент t, представится формулой

$$v = gt$$

(g — постоянная для данного пункта земной поверхности величина; ее можно принять равной $980 \frac{см}{сек^2}$). Подставив в формулу (17') это вы-

ражение скорости и приняв во внимание, что при нашем выборе начало отсчета времени $t_0 = 0$, мы получим

$$s = \int_t^T gt\, dt.$$

Вычислив интеграл, мы найдем

$$s = \frac{1}{2} gT^2.$$

Эта формула приводится во всех элементарных курсах физики. Если ее выводить „элементарно", то вывод окажется очень громоздким и по существу будет представлять замаскированное употребление метода интегрального исчисления [1]).

---

[1]) В связи с только что решенной задачей, пожалуй, уместно будет упомянуть о некоторых возражениях, делавшихся против принципов, положенных в основу построения этой книги и выше мною достаточно очерченных. Именно, некоторые товарищи, считающие своей специальностью методологию математики, утверждали, что принятый мною метод изложения изгоняет из математики движение. В доказательство этого утверждения приводился обыкновенно „критический" разбор решения задачи о вычислении площади криволинейной трапеции. Цитируя рассуждения § 12 этой книги, критики обличили меня в том, что раз в бесконечно-тонкой полоске ордината считается неизменной, то, значит, изменение ординаты на всем участке (в примере § 12 на участке от $x = 1$ до $x = 4$) сведено к совокупности неизменных состояний ординаты (на отдельных бесконечно-малых частях участка). На философском языке это утверждение гласит: „движение сводится к простой совокупности состояний покоя". Такова точная формулировка предъявлявшегося мне обвинения.

На задаче, которую мы разобрали только что и решение которой, как было показано, по методу совпадает с решением задачи о площади криволинейной трапеции, несостоятельность этого утверждения выступает с полной очевидностью. Всякому вдумчивому читателю ясно, что здесь не только нет речи о *сведении* движения к покою, но вообще нет речи ни о каком покое. В этой задаче мы разрешили себе движение, являющееся вообще *неравномерным*, на бесконечно-малом участке пути считать движением равномерным.

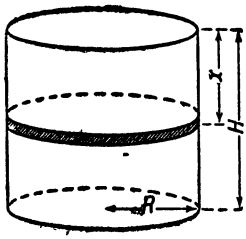
С соответствующими изменениями этот же ответ можно дать и на возражения против содержания § 12. Неравномерное изменение площади, на всем участке от $x = 1$ до $x = 4$, мы разрешили себе считать равномерным на бесконечно-малом участке (иными словами, площадь бесконечно-тонкой полоски мы вычисляем, как площадь прямоугольника).

Однако я предвижу здесь возражение, на которое хочу заранее ответить. Мне могут сказать: почему вы говорите об изменении площади, когда вас спрашивают об изменении *ординаты*? Это последнее вы и сводите к совокупности неизменных состояний. На *это* отвечу: об изменении площади я говорю не зря, потому что именно *площадь* есть та величина, которая меня в задаче интересует, и если бы, изучая изменение этой величины, я мог обойтись без изучения изменений ординаты, то в этом я не видел бы ничего зазорного. Но на самом деле не приходится отвлекаться и от изменения ординаты. Мои критики упускают из виду то обстоятельство, что если на протяжении одной бесконечно-тонкой полоски мы отвлекаемся от изменения ординаты внутри ее (о преимуществах и о дефектах этого приема мы выше говорили подробно), то ордината изменяется скачкообразно от одной бесконечно-тонкой полоски к другой, причем сам скачок, конечно, имеет бесконечно-малую величину. Бесконечно-большое число таких бесконечно-малых скачков и порождает полную величину изменения ординаты на всем участке. Может быть, моим критикам не нравится скачко-

§ 15. *Задача 3.* Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $H=5$ *м*, имеющий в основании круг радиуса $R=3$ *м* (черт. 9).

Величина работы, потребной для поднятия некоторого тела, находится, как известно, умножением веса этого тела на высоту его поднятия. Если бы требовалось приподнять весь резервуар с водой на некоторую высоту, то вычисление работы было бы совершенно элементарной задачей.

В нашей задаче дело усложняется тем, что разные слои воды в резервуаре находятся на различной глубине, так что высота поднятия различна для различных слоев. Но если мы из всей массы воды выделим бесконечно-тонкий горизонтальный слой, то можно будет считать, что вся вода этого слоя находится на одной и той же глубине. Обозначим эту глубину через x. Толщина бесконечно-тонкого слоя является разностью двух бесконечно-близких глубин, т. е. выражается величиной dx. Площадь основания слоя равна πR^2.



Черт. 9.

Следовательно, объем бесконечно-тонкого слоя равен $\pi R^2\,dx$ ($м^3$), и значит вес его в килограммах равен $1000\,\pi R^2\,dx$. Этот вес должен быть поднят на высоту x; работа (в килограммометрах), потребная для этого, представляется выражением:

$$1000\,\pi R^2 x\,dx.$$

Работа, затрачиваемая на выкачивание всей воды из резервуара, представится суммой бесконечно-большого числа таких выражений, причем величина x — глубина слоя — меняется от значения $x=0$ до значения $x=H$. Итак, искомая работа представится интегралом:

$$\int_0^H 1000\,\pi R^2 x\,dx = \frac{1000\,\pi R^2 H^2}{2} = 353\,250\ кгм.$$

образность изменения. Но это уже другой вопрос: я сам достаточно оговорил, что с строгой точки зрения эта концепция недостаточна, и мотивировал, почему все же мы ею пользуемся, но никак нельзя уразуметь, почему при наличии скачкообразных изменений, да еще бесконечно-большого числа их, усматривается сведение изменения к совокупности состояний покоя. Да и почему так бояться скачков: или мои критики вместе с Лейбницем думают, что „природа не делает скачков"? Не имеем ли, напротив, оснований полагать, что в природе такие скачки существуют? И разве не правда, что в кинематографе, например, мы довольно хорошо воспроизводим движение, комбинируя его из состояний покоя и скачкообразных изменений. Ведь, если так рассуждать, то выходит, что движение „изгоняется" не только мною из математики, но и кинооператором из фильмы. Анекдотично, но факт, что в одном большом собрании в ответ на реплику один методолог, не смущаясь, ответил, что, конечно, в кинематографе движения действительно нет, и когда аудитория разразилась смехом, этот оратор пояснил, что в кинематографе не движение, а механическое перемещение.

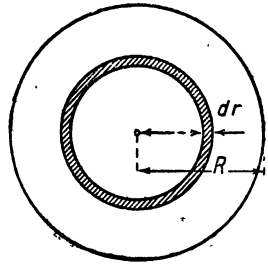
§ 16. Рассмотрим еще две геометрические задачи, решение которых уже известно читателю из элементарной геометрии.

Задача 4. Зная, что длина l окружности выражается через радиус ее r формулой

$$l = 2\pi r,$$

найти выражение площади круга радиуса R.

Разобьём круг радиуса R концентрическими окружностями на бесконечно-большое число колечек бесконечно-малой толщины (черт. 10). Через r мы обозначим переменный радиус концентрической окружности, а через l — длину этой окружности.



Черт. 10.

Найдем площадь одного из колечек. Так как ограничивающие его окружности ввиду бесконечной тонкости колечка могут считаться равными, то площадь эта равна произведению длины l колечка на его толщину [1]). Последняя представится выражением dr. Итак, $l\,dr$ есть площадь колечка.

Площадь круга s есть сумма площадей таких колечек, причем величина r меняется в этой сумме от $r = 0$ до $r = R$. Поэтому можем написать:

$$s = \int_0^R l\,dr.$$

Вставляем сюда выражение l через r:

$$l = 2\pi r;$$

$$s = \int_0^R 2\pi r\,dr.$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$s = \pi R^2.$$

Задача 5. Зная, что поверхность шара s выражается через его радиус r формулой

$$s = 4\pi r^2,$$

найти объем v шара радиуса R.

Решение этой задачи протекает совершенно аналогично решению предыдущей. Шар разбивается на бесконечно-большое число бесконечно-тонких концентрических слоев (наподобие листьев капустного кочана). Объем каждого из этих слоев равен произведению его поверхности s на толщину (различие между внешней и внутренней поверхностью мы игнорируем). Толщина представляется выражением dr. Итак, объем беско-

[1]) Для большей ясности представьте себе это колечко растянутым по прямой линии.

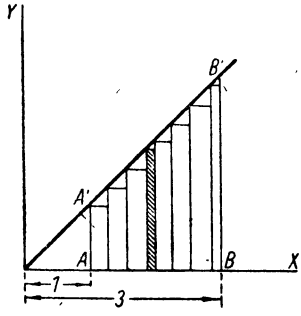
нечно-тонкого слоя — $s\,dr$. Объем шара v есть сумма объемов всех его слоев. Он представляется интегралом

$$v = \int_0^R s\,dr.$$

Подставляя вместо s его выражение, получаем:

$$v = \int_0^R 4\pi r^2\,dr, \qquad v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 17. Мы разобрали уже несколько задач, решив их методом интегрального исчисления. Несмотря на формальные противоречия, на которые мы обратили внимание читателя, прежде чем приступить к решению задач, — результаты, как мы видим, получились теоретически строгие и совпадают с результатами, получаемыми элементарным путем (объем конуса, расстояние, пройденное падающим телом, площадь круга, объем шара).



Черт. 11.

Мы уже указали в § 12, что формальные противоречия классического исчисления бесконечно-малых были устранены позднейшим развитием математического анализа, и обещали показать, каким образом этого удалось достигнуть. Сейчас мы уже можем выполнить это обещание.

Для большей ясности мы начнем с примера.

Пусть требуется вычислить площадь трапеции, ограниченной прямой $y = x$, ординатами $x = 1$, $x = 3$ и осью абсцисс.

Следуя изложенному в § 12 методу, мы решаем эту задачу так: разбиваем трапецию $A'B'BA$ на бесконечно-большое число бесконечно-тонких полосок (одна из них заштрихована на черт. 11); каждую из них считаем прямоугольником. Высотой этого прямоугольника служит y; основанием — бесконечно-малая разность абсцисс, т. е. dx. Площадь полоски оказывается равной $y\,dx$. Площадь трапеции мы рассматриваем как сумму бесконечно-большого числа бесконечно-тонких полосок. Она выражается интегралом:

$$\int_1^3 x\,dx = 4.$$

Сущность этого рассуждения заключается в том, что площадь бесконечно-тонкой полоски отождествляется с площадью бесконечно-тонкого прямоугольника; другими словами, площадь трапеции отождествляется с площадью ступенчатой фигуры с бесконечно-большим числом ступенек. Мы уже говорили (§ 12), что при допущении существования бесконечно-тонких полосок такое отождествление вполне законно с точки зрения соответствия математи-

ческих абстракций с действительностью, но что при этом мы приходим к формальным противоречиям. Вот почему уже во второй половине XVIII в. вопросы логического обоснования исчисления бесконечно-малых привлекают особое внимание математиков и философов, и уже в это время всплывает новая точка зрения, завоевавшая господство в XIX в., особенно после работ французского математика Коши (1789—1857), систематически изложившего материал, накопленный за два века, с новой точки зрения.

Став на эту точку зрения, мы должны отказаться от рассмотрения бесконечно-тонких полосок и ступенек, отказаться от отождествления первых и вторых. Мы должны с этой точки зрения строго различать площадь трапеции от площади ступенчатой фигуры. Ни в каком случае мы не должны считать эти площади равными. Мала ли или велика разница между ними — она всегда порождает неравенство, а неравенство формально исключает равенство. Такова принципиальная установка математики XIX в.

Итак, строя ступенчатую фигуру, мы никогда не сделаем ее равной трапеции по площади. Но, чем больше ступенек будет построено, тем меньше будет различие между площадью трапеции и ступенчатой площадью. Разность этих площадей может быть (теоретически) сделана так мала, как это будет потребовано. Для этого лишь понадобится взять достаточно большое число ступенек, сделав каждую из них достаточно тонкой.

Чтобы короче формулировать это положение, вводится понятие предела; с этим понятием читатель вероятно уже знаком. Оно может быть определено так: если переменная величина, изменяясь, неограниченно приближается к некоторой постоянной величине, то эта постоянная величина называется пределом переменной величины. „Неограниченно“ — это значит, что разность между постоянной и переменной величинами может быть сделана так мала, как потребуется.

Пользуясь введенным термином, мы скажем: площадь трапеции $A'B'BA$ есть предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры при увеличении числа ступенек и утонышении каждой из них.

Мы знаем, что площадь ступенчатой фигуры представляется суммой:

$$s_n = x_0(x_1 - x_0) + x_1(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \qquad (5)$$

Прежде мы говорили, что эта сумма при бесконечно-большом n дает теоретически точно площадь трапеции. Теперь мы скажем иначе: площадь трапеции равна тому пределу, к которому стремится сумма s_n при возрастании n. Вот этот предел суммы (5) и получает теперь название интеграла. Итак, интеграл

$$\int_a^b x\,dx$$

можно определить как предел, к которому стремится сумма (5) при увеличении числа n.

В нашей задаче мы должны вычислить интеграл:

$$\int_1^3 x\,dx.$$

Мы знаем, что этот интеграл равен 4. Но теперь равенство

$$\int_1^3 x\,dx = 4$$

толкуется несколько иначе, чем прежде. Прежде мы говорили, что сумма (5) при бесконечно-большом числе слагаемых дает число 4 (если $x_0 = a = 1$; $x_n = b = 3$). Теперь мы скажем, что число 4 является пределом, к которому стремится сумма (5) (при $a = 1$; $b = 3$), когда число n возрастает.

Покажем, что число 4 действительно можно рассматривать как предел суммы (5). Положим например, что числа x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, x_n растут в арифметической прогрессии. Тогда, как мы показали в § 7, сумма (5) представляется выражением:

$$s_n = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

т. е., так как $a = 1$, $b = 3$,

$$s_n = 2 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 4 - \frac{2}{n}.$$

С увеличением n сумма s_n изменяется: при $n = 10$, $s_n = 3{,}8$; при $n = 100$, $s_n = 3{,}98$; при $n = 1000$, $s_n = 3{,}998$ и т. д. Мы видим, что с увеличением n сумма s_n неограниченно приближается к числу 4, т. е. может подойти к числу 4 так близко, как потребуется.

Другими словами, число 4 есть предел, к которому стремится s_n при увеличении n.

Таким же образом строится определение интеграла для общего случая. Пусть y есть заданная функция переменной x (например $y = x^2$), a и b — два заданных числа.

Интегралом $\int_a^b y\,dx$ называется тот предел, к которому стремится сумма

$$y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \qquad (2)$$

при увеличении числа n (x_1, x_2 ... x_{n-1} — промежуточные числа, вставляемые между a и b так, что все разности $x_{i+1} - x_i$ неограниченно уменьшаются с увеличением числа n).

При этом определении интеграла число n уже не приходится предполагать бесконечно-большим, а разности $x_{i+1} - x_i$ бесконечно-малыми.

и самый интеграл рассматривается не как сумма, а лишь как предел суммы (2).

Выражение $\int_a^b y\,dx$ приобретает таким образом чисто символическое значение; в частности выражение dx нельзя рассматривать как разность значений величины x. Символ $\int_a^b y\,dx$ в этой трактовке служит как бы напоминанием о том выражении, пределом которого является интеграл.

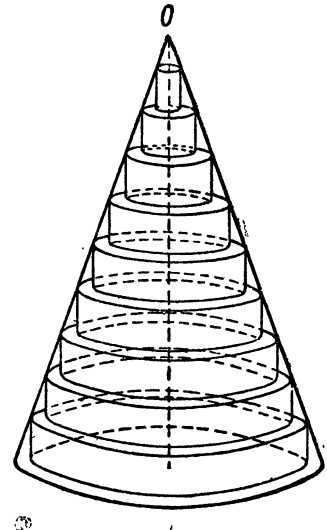
§ 18. Посмотрим, как теперь, при новом определении интеграла, будет обстоять дело с решением задач.

Возьмем задачу об определении площади трапеции $A'B'BA$, с которой мы начали изложение предыдущего параграфа. Мы отказываемся от рассмотрения ступенчатой фигуры с бесконечно-большим числом ступенек и, следовательно, не имеем никакого права отождествлять площадь трапеции с площадью ступенчатой фигуры. Мы строим теперь ступенчатую фигуру для того, чтобы показать, что искомая площадь трапеции является пределом площади ступенчатой фигуры. Убедившись в этом, мы составляем выражение площади s_n ступенчатой фигуры:

$$s_n = x_0(x_1 - x_0) + \ldots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \qquad (5)$$

и разыскиваем предел, к которому это выражение стремится при увеличении n. Этот предел, согласно новому определению, и есть интеграл

$$\int_1^3 x\,dx = 4.$$



Черт. 12.

Число 4 рассматривается теперь не как значение суммы (5), а как предел, к которому эта сумма стремится при возрастании n. Таким образом это число дает не площадь ступенчатой фигуры, а искомую площадь трапеции.

Рассмотрим еще задачу об определении объема конуса с этой точки зрения. Мы уже не будем разбивать его на бесконечно-большое число бесконечно-тонких пластинок и каждую считать цилиндром. Действуя с большей осторожностью, мы поступим теперь так. В конус мы впишем „ступенчатое тело“ (черт. 12). Это ступенчатое тело состоит из цилиндров, верхними основаниями которых служат сечения конуса „горизонтальными“ плоскостями (верхушка конуса остается вне этого тела). Из черт. 12 мы видим, что объем ступенчатого тела меньше объема

конуса, но при увеличении числа ступеней и утончении каждой из них [1]) разность объемов конуса и ступенчатого тела неограниченно уменьшается [2]). Другими словами: объем конуса является пределом объема ступенчатого тела.

Мы составляем поэтому выражение для объема ступенчатого тела с тем, чтобы затем вычислить предел, к которому он стремится.

Обозначим через h_1, h_2, h_3 ... h_{n-1} расстояния последовательных сечений конуса до его вершины. Высоту H конуса естественно обозначить через h_n, а за h_0 примем число 0 („расстояние" точки O до самой себя). Площади сечений конуса представятся выражениями

$$\frac{\pi R^2}{H^2} h_0^2 = 0 \text{ (сечение через вершину)}; \frac{\pi R^2}{H^2} h_1^2; \frac{\pi R^2}{H^2} h_2^2 \ldots \frac{\pi R^2}{H^2} h_{n-1}^2,$$

а объем ступенчатого тела — выражением

$$\frac{\pi R^2}{H^2} h_0^2 (h_1 - h_0) + \frac{\pi R^2}{H^2} h_1^2 (h_2 - h_1) + \ldots + \frac{\pi R^2}{H^2} h_{n-1}^2 (h_n - h_{n-1}). \quad (18)$$

Первое слагаемое равно нулю; мы его выписываем, чтобы не терять из виду закона составления суммы. Как указано, для вычисления объема конуса нужно разыскать предел, к которому эта сумма стремится с возрастанием числа n и с уменьшением каждого слагаемого, т. е., согласно новому определению интеграла, нужно вычислить интеграл

$$\int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} h^2 \, dh.$$

Это тот самый интеграл, к которому мы пришли в § 13.

На разобранных примерах читатель, надеемся, уяснил себе принципиальную сторону новой точки зрения. Более детальное ее выяснение не входит в нашу задачу, потому что, в отличие от традиционного стиля, мы не кладем эту точку зрения в основу изложения. Основанием для этого служит то, что, будучи более строгими, новые методы являются, естественно, и более громоздкими. Чтобы пользоваться ими, необходимо оперировать более отвлеченными понятиями, и внимание, устремляемое на это, особенно при отсутствии соответствующих навыков, естественно не направляется со всей силой на конкретную сторону дела. В этом смысле новая точка зрения является менее действенной; правда, более строгие методы, разумеется, в большей мере гарантируют от ошибок в рассуждениях, но существенное значение эта гарантия имеет только в более тонких математических вопросах, здесь не рассматриваемых. Но даже, и в этих более тонких вопросах методы, здесь излагаемые, несмотря на свою „грубость", играют чрезвычайно важную роль. Эти

---

1) Одновременно должна уменьшаться и вышина верхушки.

2) Последнее положение, строго говоря, нуждается в доказательстве, как и соответствующее положение в задаче о площади трапеции. Мы опускаем доказательство, которое сильно усложнило бы дело.

методы часто служат для получения нового результата; более же строгие методы служат тогда для оправдания его, т. е. они позволяют гарантировать, что результат, уже полученный без их помощи, действительно, неоспоримо правилен. В особенности же важную, действенную роль наши менее строгие методы играют в тех элементарных вопросах, которые в этой книге разбираются. Здесь они во всяком случае служат простейшим средством получения новых результатов, и без их помощи получение новых результатов представляло бы очень большие трудности.

Приведенные в этом параграфе два примера как будто не оправдывают последнего утверждения. Но эти примеры были специально выбраны для того, чтобы уяснить принципиальную установку „предельной" точки зрения.

В этих примерах можно было конкретизировать ту сумму, пределом которой является интеграл.

В первом примере мы построили ступенчатую площадь, и было очевидно, что площадь трапеции является ее пределом. Сумма

$$x_0(x_1 - x_0) + \ldots + x_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

давала выражение этой ступенчатой площади, так что площадь трапеции совершенно естественно искать, вычисляя интеграл

$$\int_1^3 x\,dx.$$

Во втором примере легко было построить ступенчатое тело, объем которого стремился к объему конуса как к пределу. Отсюда — задача отыскания предела суммы:

$$\frac{\pi R^2}{H^2} h_0^2 (h_1 - h_0) + \ldots + \frac{\pi R^2}{H^2} h_{n-1}^2 (h_n - h_{n-1}),$$

т. е. вычисления интеграла

$$\int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} h^2\,dh.$$

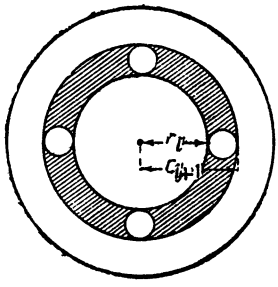
Но такие задачи представляют счастливое исключение. В огромном большинстве задач, возникающих из потребностей практики и теории, конкретизация суммы, пределом которой является искомая величина, является делом весьма затруднительным. За примерами далеко ходить не приходится. Возьмем задачу о нахождении площади круга. Пользуясь методом бесконечно-малых в его классической форме, мы можем разбить круг на бесконечно-тонкие колечки и, рассматривая интеграл как сумму площадей колечек (§ 16), немедленно написать для площади круга выражение:

$$\int_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2.$$

Будем теперь смотреть на интеграл $\int_0^R 2\pi r\,dr$ с новой точки зрения, т. е. будем рассматривать его как предел суммы:

$$2\pi r_0(r_1 - r_0) + 2\pi r_1(r_2 - r_1) + \ldots + 2\pi r_{n-1}(r_n - r_{n-1}).$$

Каков геометрический смысл последнего выражения? Разбивая круг на n (n — не бесконечно-большое число!) концентрических колец, мы видим, что каждое слагаемое этой суммы есть произведение толщины одного из колец на длину меньшей окружности, ограничивающей кольцо. Это произведение представляет некоторую площадь, меньшую чем площадь кольца. Но как выделить из кольца эту площадь? Ответить на этот вопрос совсем не так легко, и уж во всяком случае для ответа на него необходимо было бы предварительно решить задачу о площади круга [1]).



Черт. 12-а.

Таким образом, если отказаться от рассмотрения бесконечно-тонких колечек и от составления сумм бесконечно-большого числа слагаемых, то чрезвычайно трудно (если не невозможно) притти к догадке, что площадь круга можно найти вычислением интеграла

$$\int_0^R 2\pi r\,dr.$$

То же самое можно повторить и относительно представления объема шара интегралом

$$\int_0^R 4\pi r^2\,dr.$$

Еще в большей мере сказанное относится к задачам, не носящим чисто геометрического содержания.

Там дело осложняется еще одним обстоятельством. В задачах механики, физики, химии, еще в большей степени в математических проблемах техники и общественных наук, величины, значение которых находится вычислением интегралов, по самой своей природе не могут быть рассматриваемы как пределы соответствующих сумм, ибо слагаемые, на которые можно разбивать эти величины, не обладают способностью безгранично увеличиваться в числе. Чрезвычайно затруднительно, решая эти задачи, представлять себе интеграл как предел соответствующей

---

[1]) Если считать известным выражение площади круга, то нетрудно показать, что величина $2\pi r_i(r_{i+1} - r_i)$ есть площадь „проштампованного" кольца, изображенного на черт. 12а, т. е. площадь, остающаяся от кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов r_i и r_{i+1} за вычетом площади четырех кругов диаметра $r_{i+1} - r_i$.

суммы. Этим обстоятельством и объясняется тот общеизвестный факт (факт, приводящий в благородное негодование некоторых ревнителей математической строгости), что люди, применяющие математику к решению задач техники и естествознания, оперируют бесконечно-малыми величинами, представляя себе интеграл как сумму бесконечно-большого их числа. Более того, математик-теоретик в поисках решения задачи обычно исходит из той же „грубой" концепции. Разумеется, найдя ключ к ее решению, он стремится к тому, чтобы более строгими методами проверить правильность решения и дать строгое доказательство найденных результатов. Эта вторая стадия исследования имеет чрезвычайно большое значение, но не меньшее значение имеет и первая, представляющая как бы разведку, предшествующую разработке новых месторождений. К сожалению, у математиков стало правилом хорошего тона скрывать от посторонних глаз те пути, которыми они шли к решению той или иной проблемы. Если язык бесконечно-малых есть тот язык, на котором думает математик в процессе решения проблемы, то язык пределов есть тот язык, на котором он изъясняется, излагая найденное решение.

Это обстоятельство обычно совершенно игнорируется авторами руководств по исчислению бесконечно-малых. Стремясь к большей или меньшей строгости изложения, они не считают нужным посвящать учащихся в „закулисную" сторону дела.

Эта книга преследует иные цели. Она стремится научить читателя понимать тот язык, на котором не гнушались говорить классики математической мысли, тот язык, на котором мыслит физик и инженер; тот язык, употребление которого предпочитают скрывать современные представители теоретической математики.

§ 19. Спускаясь с принципиальных высот на почву будничной прозы исчисления бесконечно-малых, мы должны прежде всего констатировать, что техника этого исчисления изучена нами еще очень слабо. Интеграл

$$\int_a^b y\,dx$$

мы умеем вычислять пока лишь в тех случаях, когда y есть функция переменной x, определенная уравнением $y = px$ или уравнением $y = px^2$ (p — постоянная величина).

Естественно, что для решения конкретных задач этого совершенно недостаточно. Поэтому ближайшей нашей задачей будет научиться вычислять интегралы, зависящие от функций, несколько более сложных. Мы начнем со случая, когда переменная y есть степенная функция аргумента x:

$$y = x^k;$$

число k мы будем пока считать целым положительным.

Выведенные нами формулы

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \tag{11}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \tag{12}$$

наводят нас на мысль, что для произвольной степени k (k — целое положительное число) будет справедлива формула

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \tag{19}$$

Действительно, эта формула может быть получена тем же методом, каким были получены частные формулы (11) и (12).

Положим сначала, что a и b — числа положительные.

Чтобы вычислить интеграл $\int_a^b x^k\,dx$, мы, согласно определению интеграла, должны прежде всего вычислить значение суммы

$$s_n = x_0^k(x_1 - x_0) + x_1^k(x_2 - x_1) + \ldots + x_{n-1}^k(x_n - x_{n-1}).$$

Проще всего взять числа x_0, x_1, x_2 ... x_n растущими в геометрической прогрессии. Если, как предположено, оба предела a и b положительны, то такой выбор промежуточных чисел всегда возможен [1]).

Тогда, сохраняя обозначение § 8 и 9, мы получим для s_n выражение:

$$s_n = a^k(ah - a) + (ah)^k(ah^2 - ah) + (ah^2)^k(ah^3 - ah^2) + \\ + \ldots + (ah^{n-1})^k(ah^n - ah^{n-1}).$$

Вынося за скобки a, ah, ah^2 ... и т. д. в первом, втором и т. д. слагаемом, получаем:

$$s_n = a^{k+1}(h-1) + (ah)^{k+1}(h-1) + (ah^2)^{k+1}(h-1) + \\ + \ldots + (ah^{n-1})^{k+1}(h-1). \tag{20}$$

Мы видим, что члены этой суммы образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой h^{k+1}. Суммируя прогрессию по общей формуле

$$s_n = \frac{qu_n - u_1}{q-1}$$

(q — знаменатель прогрессии), мы получим:

---

1) Знаменателем прогрессии нужно взять число $h = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$; промежуточные числа будут:

$$x_1 = a\sqrt[n]{\frac{b}{a}};\quad x_2 = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^2;\quad \ldots\ x_{n-1} = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{n-1}.$$

$$s_n = \frac{h^{k+1}(ah^{n-1})^{k+1}(h-1) - a^{k+1}(h-1)}{h^{k+1}-1} =$$

$$= \frac{[(ah^n)^{k+1} - a^{k+1}](h-1)}{h^{k+1}-1} = \frac{(b^{k+1}-a^{k+1})(h-1)}{h^{k+1}-1}. \qquad (21)$$

Знаменатель выражения (21) $h^{k+1}-1$ может быть разложен на множители [см. формулу (10) § 9]:

$$h^{k+1}-1 = (h-1)(h^k + h^{k-1} + h^{k-2} + \ldots + h^2 + h + 1).$$

Сокращая на $(h-1)$ выражение (21), мы получим:

$$s_n = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{h^k + h^{k-1} + \ldots + h + 1}. \qquad (22)$$

Таково выражение для суммы s_n при любом n. Интеграл $\int_a^b x^k dx$ есть значение этой суммы для бесконечно-большого n, т. е. (см. § 8) для значения h, равного единице. Тогда в знаменателе (22) мы будем иметь $k+1$ слагаемых, каждое из которых равно единице, и, значит, получаем:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Если мы станем на формально более строгую точку зрения и будем исходить из определения интеграла, приведенного в § 17, мы должны будем рассуждать так: при неограниченном возрастании n число h неограниченно приближается к единице, а вместе с ним неограниченно приближаются к единице числа h^2, h^3 ... и т. д. Поэтому знаменатель (22) неограниченно приближается к $k+1$, а, следовательно, вся сумма s_n неограниченно приближается к $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Последнее число является таким образом пределом, к которому стремится сумма s_n, т. е., согласно § 17, интеграл $\int_a^b x^k dx$ равен числу

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Остановимся особо еще на случае $k=0$. В этом случае формула (19) дает:

$$\int_a^b x^0 dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a. \qquad (23)$$

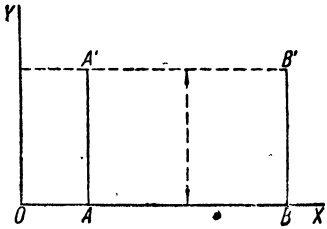
Этот чрезвычайно важный для дальнейшего изложения результат можно формулировать так: интеграл дифференциала равен разности пределов интегрирования. Ввиду важности формулы (23) дадим ей другой вывод.

Если интеграл $\int_a^b dx$ мы будем рассматривать как сумму бесконечно-большого числа n слагаемых, то каждое слагаемое этой суммы будет дифференциалом величины x, т. е. бесконечно-малой разностью вида $x_{i+1} - x_i$. Произведя сложение, получим:

$$s_n = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ + (x_n - x_{n-1}).$$

В этом выражении уничтожаются все члены кроме второго и предпоследнего, и мы имеем:

$$s_n = x_n - x_0 = b - a.$$



Черт. 13.

Это равенство имеет место для всякого n, например для $n = 3, 4, 5 \ldots$ Оно, следовательно, справедливо и для бесконечно-большого n, и мы получаем:

$$\int_a^b dx = b - a. \qquad (23)$$

Можно дать также геометрическое доказательство формулы (23), рассматривая интеграл $\int_a^b y\,dx$ (в котором $y = 1$) как площадь $ABB'A'$ (черт. 13); линия, уравнение которой $y = 1$, есть прямая, параллельная оси абсцисс, и, следовательно, $ABB'A'$ есть прямоугольник с основанием $AB = b - a$ и высотой $AA' = 1$.

Упражнения.

1) $\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$.

2) $\int_a^b x^4 x d = \frac{b^5 - a^5}{5}$.

3) $\int_m^n t^6\,dt = \frac{n^7 - m^7}{7}$.

4) $\int_1^2 4s^3\,ds = 15$.

5) $\int_1^3 0{,}5\,s^4\,ds = 24{,}2$.

6) $\int_8^{11} 2\,dx = 6$.

7) $\int\limits_{6,6}^{4,2} 8\,dx = -19{,}2.$

8) $\int\limits_{\frac{m}{2}}^{m} m\,dx = \frac{m^2}{2}.$

9) $\int\limits_{m}^{2m} m^2x^3\,dx = \frac{15\,m^6}{4}.$

10) $\int\limits_{2a}^{a} as^4\,ds = -\frac{31\,a^6}{5}.$

§ 20. До сих пор подъинтегральной функцией у нас всегда был одночлен; теперь мы покажем, как вычислять интегралы с многочленными подинтегральными выражениями. Начнем с примера. Пусть требуется найти $\int\limits_1^2 (x^2+x^3)\,dx$. Мы знаем, что $\int\limits_1^2 x^2\,dx = 2\frac{1}{3}$ и $\int\limits_1^2 x^3\,dx = 3\frac{3}{4}$.

Напрашивается предположение, что искомый интеграл равен $2\frac{1}{3}+3\frac{3}{4}=6\frac{1}{12}$.

Что это предположение верно, легко показать. Искомый интеграл, согласно определению, получается из суммы

$$(x_0^2+x_0^3)(x_1-x_0)+(x_1^2+x_1^3)(x_2-x_1)+\ldots+(x_{n-1}^2+x_{n-1})(x_n-x_{n-1}),$$

которую можно разбить на две суммы, разбивая каждый ее член на два члена, так что получим:

$$[x_0^2(x_1-x_0)+x_1^2(x_2-x_1)+\ldots]+[x_0^3(x_1-x_0)+x_1^3(x_2-x_1)+\ldots],$$

а выражения, стоящие в скобках, дают (при $n=\infty$) интегралы

$$\int\limits_1^2 x^2\,dx \text{ и } \int\limits_1^2 x^3\,dx.$$

Полученный результат можно обобщить и совершенно аналогично доказать справедливость формулы

$$\int\limits_a^b (y+z)\,dx = \int\limits_a^b y\,dx + \int\limits_a^b z\,dx, \tag{24}$$

где y и z — две произвольные функции величины x.

Словесно формула (24) читается так: интеграл суммы равен сумме интегралов.

Очевидно, что формула (24) легко обобщается на случай, когда число слагаемых больше двух.

УПРАЖНЕНИЯ.

1) $\int_1^3 (2x + x^2)\,dx = 16\frac{2}{3}$.

2) $\int_1^2 (3 + 2x)\,dx = 6$.

3) $\int_2^3 (3x^2 - 6x)\,dx = 4$.

4) $\int_{2,2}^{3,7} (4v - 1)\,dv = 16{,}2$.

5) $\int_1^2 (3 - x)\,dx = 1{,}5$.

6) $\int_1^2 (u - 2)^2 du =$

$= \int_1^2 (u^2 - 4u + 4)\,du = \frac{1}{3}$.

7) $\int_{\frac{a}{2}}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{5}{24}a^3$.

8) $\int_{\frac{a}{2}}^{a} (a - x)^2 dx = \frac{1}{24}a^3$.

§ 21. Когда в § 19 мы доказывали формулу

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

то мы оговорили, что оба числа a и b предполагаются положительными. В этом предположении всегда возможно между числами a и b вставить промежуточные числа x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ так, чтобы ряд чисел x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$ представлял геометрическую прогрессию. В дальнейшем ходе рассуждения нам не приходилось более ссылаться на положительность чисел a и b. Поэтому доказательство остается в силе и для тех случаев, когда оба предела отрицательны, ибо и тогда возможно построение промежуточных чисел x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ так, чтобы ряд x_0, x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$, x_n представлял геометрическую прогрессию. Точно так же для хода рассуждений безразлично, какое из чисел a и b больше другого. Но если один из пределов, например нижний, отрицателен, а другой положителен, то оказывается невозможным вставить между числами a и b промежуточные числа x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ так, чтобы ряд x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, x_n был геометрической прогрессией. Пусть, например, $a = -1$, $b = 64$. Прогрессию с нечетным числом членов построить вообще нельзя, потому что всякая прогрессия с нечетным числом членов при отрицательности первого члена имеет отрицательным и последний член. Прогрессию с четным числом членов построить можно, но числа x_1, $x_2 \ldots$ не будут промежуточными между a и b. Так, прогрессия с четырьмя членами будет: -1; 4; -16; $+64$. Число -16 не является промежуточным между $a = -1$ и $b = 64$.

Итак, если числа a и b имеют разные знаки, то доказательство § 19 теряет уже силу. Более того, оно теряет силу и для того случая, когда один из пределов, например нижний, равен нулю. В самом деле, при любом знаменателе прогрессии q все числа $x_0 = a$, $x_1 = aq$, $x_2 = aq^2$ и т. д. равны нулю, так что никаких промежуточных между a и b чисел мы не получим.

Из этого, однако, отнюдь не следует, что формула

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{19}$$

теряет свою силу в указанных случаях. Ведь числа x_0, $x_1 \ldots x_n$ не должны расти обязательно в геометрической прогрессии. Они могут расти, например, в арифметической прогрессии или по другому закону. Таким образом из невозможности построения геометрической прогрессии x_0, $x_1 \ldots x_n$ вовсе не следует непригодность формулы (19).

Напротив, мы покажем сейчас, что если k есть число целое и положительное то формула

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{19}$$

справедлива при любых значениях чисел a и b.

Сначала мы рассмотрим случай, когда один из пределов, например нижний, равен нулю. Для большей ясности мы рассмотрим числовой пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^3 x^2\,dx.$$

Мы будем вычислять интегралы

$$\int_{0,1}^3 x^2\,dx; \quad \int_{0,01}^3 x^2\,dx; \quad \int_{0,001}^3 x^2\,dx \text{ и т. д.}$$

К этим интегралам формула (19) заведомо применима.

Вычисление дает:

$$\int_{0,1}^3 x^2\,dx = 9 - \frac{0{,}001}{3},$$

$$\int_{0,01}^3 x^2\,dx = 9 - \frac{0{,}000001}{3}$$

и т. д.

Мы видим, что с приближением нижнего предела к нулю величина интеграла приближается к числу 9, так что, когда нижний предел до-

стигнет значения нуль, интеграл будет равен 9. Это согласуется с формулой (19), которая дает:

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{3^3 - 0^3}{3} = 9.$$

Для общего случая, когда мы имеем интеграл

$$\int_0^b x^k\,dx,$$

рассуждения, приведенные нами на числовом примере, буквально повторяются, и мы получим:

$$\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} \tag{25}$$

в полном согласии с формулой (19).

Аналогично докажем формулу

$$\int_a^0 x^k dx = -\frac{a^{k+1}}{k+1}. \tag{26}$$

Теперь нетрудно доказать, что формула (19) справедлива и для случаев, когда один из пределов, например нижний, отрицателен, а другой положителен. В самом деле, интеграл

$$\int_a^b x^k dx$$

представляет собой сумму слагаемых вида $x^k dx$, причем первое значение x есть a, а последнее b. Эту сумму можно разбить на две части: в первую войдут слагаемые, в которых значения x изменяются от $x = a$ до $x = 0$; во вторую — слагаемые, в которых значения x изменяются от $x = 0$ до $x = b$. Слагаемые первой части дают в сумме интеграл $\int_a^0 x^k dx$, а слагаемые второй части — интеграл $\int_0^b x^k dx$. Таким образом можно написать:

$$\int_a^b x^k dx = \int_a^0 x^k dx + \int_0^b x^k dx.$$

Заменяя на основании формул (25) и (26) интегралы в правой части их значениями, получаем:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \tag{19}$$

Таким образом мы убеждаемся, что формула (19) справедлива для произвольных значений a и b.

Отметим здесь одно следствие, вытекающее из формулы (19). Если в интеграле $\int_a^b x^k dx$ переместить пределы, то новый интеграл $\int_b^a x^k dx$ равен первому по абсолютной величине, но отличается от его знаком, так что

$$\int_a^b x^k dx = -\int_b^a x^k dx.$$

Этим свойством можно пользоваться, если желательно, чтобы в интеграле верхний предел оказался больше нижнего. Например:

$$\int_3^1 x\,dx = -\int_1^3 x\,dx = 4,$$

$$\int_0^{-2} dx = -\int_{-2}^0 dx = -2.$$

Упражнения.

1) $\int_{-3}^{-2} x^2\,dx = 6\frac{2}{3}$.

2) $\int_{-3}^{2} (2x - 3x^2)\,dx = -40$.

3) $\int_{-1}^{2} (2-t)\,dt = 4\frac{1}{2}$.

4) $\int_{-2}^{+2} x\,dx = 0$.

5) $\int_{-2}^{+2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$.

6) $\int_{-2}^{-1} x\,dx = -\frac{3}{2}$.

7) $\int_{-1}^{-2} x^2\,dx = -\frac{7}{3}$.

8) $\int_{-1,5}^{-0,5} (3{,}2 - 0{,}2\,z)\,dz = 3{,}4$.

9) $\int_0^1 (x+2)^3\,dx = 16\frac{1}{4}$.

10) $\int_0^{-1} (3v-1)^2\,dv = -7$.

11) $\int_{-a}^{a} (x^2-a^2)\,dx = -\frac{2}{3}a^3.$

12) $\int_{-a}^{+a} (a^2-s^2)\,ds = \frac{4}{3}a^3.$

13) $\int_{-a}^{+a} (a-s)^2\,ds = \frac{8}{3}a^3.$

14) $\int_{0}^{a} [(m-n)x+na]\,dx = \frac{(m+n)a^2}{2}.$

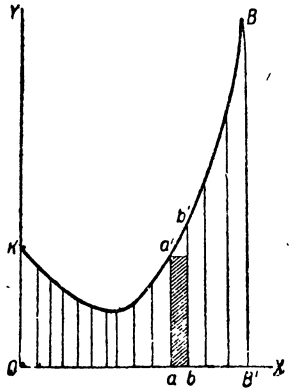
15) $\int_{0}^{3} (x^3-12x-4)\,dx = -45{,}75.$

16) $\int_{0}^{2} (3+2x)\,dx = 10.$

17) $\int_{0}^{3} (x-3x^2)\,dx = -22{,}5.$

§ 22. После того как мы познакомились с техникой вычисления интегралов простейшего типа (подъинтегральная функция — многочлен, каждый член которого имеет вид px^k), мы можем перейти к решению задач. Мы начнем с задач на вычисление площадей.

Задача 6. Найти площадь, ограниченную линией $y=\frac{1}{2}x^3-x+1$, осями координат и ординатой [$x=2$ (черт. 14)].



Черт. 14.

Площадь бесконечно-тонкой полоски $abb'a'$ есть $y\,dx$ ($y=aa'$, $dx=ab$). Искомая площадь $kOB'B$ есть сумма бесконечно-большого числа таких полосок, т. е. интеграл $\int_0^2 y\,dx$; пределы интегрирования 0 и 2 дают те границы, в которых изменяется величина x. Вычисление дает:

$$\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3-x+1\right)dx = 2.$$

Задача 7. Найти площадь, ограниченную линией $y=x-x^2$ и осью абсцисс (черт. 15).

Решая систему уравнений $y=x-x^2$ и $y=0$ (ось абсцисс), находим абсциссы точек пересечения нашей линии с Ox: $x=0$ и $x=1$. Искомая площадь (см. предыдущую задачу) выражается интегралом

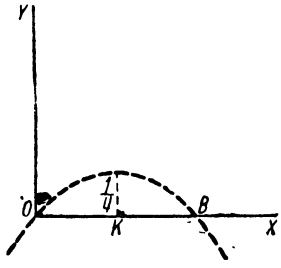
$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Если аналогичную задачу мы будем решать для линии $y = x^2 - x$, получим:

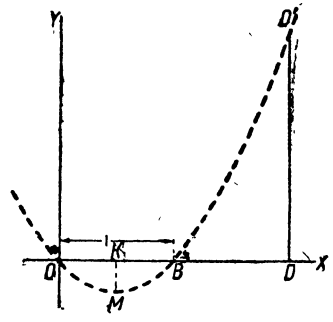
$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = -\frac{1}{6}.$$

Отрицательный знак результата объясняется тем, что площадь $OMBK$ образована движением ординаты, все время остающейся отрицательной. Искомая площадь как величина абсолютная составляет $\frac{1}{6}$.

Если требуется определить площадь, описываемую ординатой линии, уравнение которой дано, то следует посмотреть, не пересекает ли эта



Черт. 15.



Черт. 16.

линия оси абсцисс, и если пересекает, то вычислить отдельно интегралы вида $\int_a^b y\,dx$ для тех частей кривой, где она идет н а д осью абсцисс, и тех частей, где она идет п о д осью абсцисс, а затем сложить абсолютные значения полученных интегралов.

Задача 8. Какую площадь описывает ордината линии $y = x^2 - x$, передвигаясь из положения $x = 0$ в положение $x = 2$ (черт. 16)?

Между точками $x = 0$ и $x = 2$ линия $y = x^2 - x$ один раз, в точке $x = 1$, переходит снизу наверх. Поэтому нужно вычислить интегралы

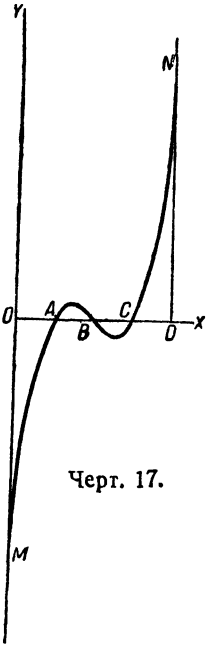
$$\int_0^1 y\,dx = -\frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \int_1^2 y\,dx = \frac{5}{6}$$

и сложить абсолютные значения $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$. Такова величина искомой площади. Непосредственное вычисление интеграла $\int_0^2 y\,dx = \frac{2}{3}$ не дало бы правильного результата.

Задача 9. Какую площадь описывает ордината линии $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, перемещаясь из положения $x=0$ в положение $x=4$ (черт. 17)?

Чтобы узнать, не переходит ли наша линия через ось абсцисс, найдем точки пересечения ее с Ox; для этого нужно решить сумму уравнений $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ и $y=0$. Очевидно всех решений будет три:

$$x=1,\quad x=2,\quad x=3.$$



Черт. 17.

Все эти три точки лежат между 0 и 4. Поэтому нам придется вычислить четыре интеграла:

$$\int_0^1 y\,dx;\quad \int_1^2 y\,dx;\quad \int_2^3 y\,dx;\quad \int_3^4 y\,dx.$$

Вычисление дает:

$$\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 (x^3-6x^2+11x-6)\,dx=-2\frac{1}{4};$$

$$\int_1^2 y\,dx=+\frac{1}{4};\quad \int_2^3 y\,dx=-\frac{1}{4};$$

$$\int_3^4 y\,dx=+2\frac{1}{4}.$$

Искомая площадь равна:

$$2\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}=5.$$

Вычисление интеграла $\int_0^4 y\,dx$ дало бы:

$$\int_0^4 y\,dx=0.$$

Задача 10. Определить площадь, ограниченную осями координат и линией $y=2-\frac{1}{4}x^3$ (черт. 18).

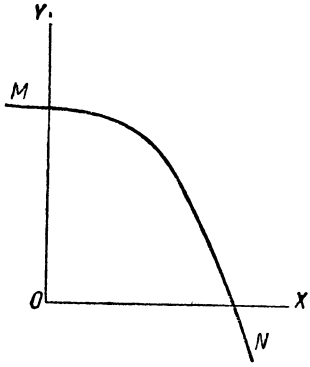
Нижний предел интеграла $\int_a^b y\,dx$ в данном случае равен нулю, так как ось Y-ов есть начальное положение ординаты, образующей своим

движением площадь. Верхний предел интеграла равен абсциссе точки пересечения линии $y = 2 - \frac{1}{4}x^3$ с осью абсцисс. Его мы находим из уравнения $2 - \frac{1}{4}x^3 = 0$, которое дает $x = 2$.

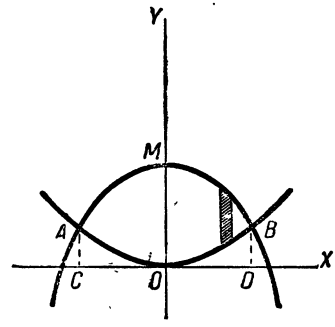
Искомая площадь будет:

$$\int_0^2 \left(2 - \frac{1}{4}x^3\right) dx = 3.$$

Задача 11. Найти площадь, заключенную между линиями $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 1 - x^2$ (черт. 19).



Черт. 18.



Черт. 19.

Абсциссы точек пересечения A и B данных линий получаются из решения системы их уравнений; мы получаем два решения: $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x = +\sqrt{\frac{2}{3}}$. Искомую площадь можно рассматривать как разность площадей $ACDBMA$ и $ACDBOA$, которые представляются интегралами

$$\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}} (1 - x^2)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2}x^2\,dx.$$

Поэтому она равна

$$\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}} (1 - x^2)\,dx - \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2}x^2\,dx = \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{3}{2}x^2\right) dx$$

(см. § 20).

Вычисление дает для искомой площади величину $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Можно было бы рассуждать и так: разобьем искомую площадь на бесконечно-тонкие полоски, одна из которых заштрихована на черт. 19. Каждая такая полоска имеет основанием dx, а высотой разность ординат линий $y=1-x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$; высота полоски таким образом равна $1-\frac{3}{2}x^2$, а площадь $\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)dx$. Искомая площадь есть сумма бесконечно-большого числа бесконечно-тонких полосок и потому представляется интегралом

$$\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{+\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)dx.$$

Задача 12. Найти площадь, отсекаемую прямой $y=x+1$ от параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ (чертеж предлагается построить).

Абсциссы точек пересечения параболы и прямой будут $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{3}$. Как и в предыдущей задаче, найдем, что искомая площадь равна:

$$\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}(x+1)\,dx-\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2\,dx=\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\left(x+1-\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

Вычисление дает:

$$2\sqrt{3}\approx 3{,}4.$$

§ 23. От задач на вычисление площадей мы перейдем к задачам на вычисление объемов.

Задача 13. Найти объем v пирамиды, площадь основания которой S, а высота H (черт. 20).

Мы будем через h обозначать отрезок Om от вершины пирамиды до произвольной точки m ее высоты OM. Очевидно величина h изменяется в пределах от O до H. Через s мы будем обозначать площадь сечения abc пирамиды, параллельного основанию ABC. Величина s связана с переменной h уравнением:

$$\frac{s}{S}=\frac{h^2}{H^2}. \tag{27}$$

Будем рассматривать объем пирамиды как сумму объемов бесконечно-тонких пластинок, на которые пирамида разбивается сечениями, подобными abc. Каждую пластинку можно ввиду ее бесконечной тонкости считать призмой; высотой этой призмы является бесконечно-малая

часть высоты OM, т. е. разность dh двух бесконечно-близких значений величины h.

Основанием призмы является сечение, площадь которого мы обозначили через s. Таким образом объем бесконечно-тонкой пластинки будет $s\,dh$; объем всей пирамиды равен сумме выражений $s\,dh$; в первом слагаемом этой суммы величина h имеет значение $h = 0$; в последнем $h = H$. Следовательно объем пирамиды представится интегралом:

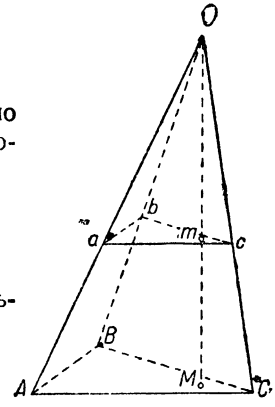
$$\int_0^H s\,dh.$$

Для вычисления этого интеграла необходимо выразить s через h. Это можно сделать при помощи уравнения (27), которое дает:

$$s = \frac{S}{H^2}h^2.$$

Подставляя это выражение вместо s в подынтегральное выражение, имеем:

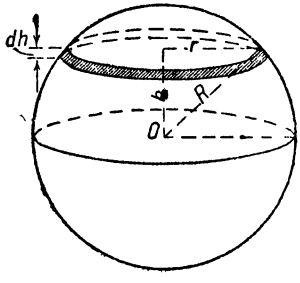
$$v = \int_0^H \frac{S}{H^2}h^2\,dh.$$



Черт. 20.

Величину $\frac{S}{H^2}$ как постоянную можно вынести за знаки интеграла, и мы получаем:

$$v = \frac{S}{H^2}\int_0^H h^2\,dh = \frac{S}{H^2}\,\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$



Черт. 21.

Мы получили известный результат, гласящий, что объем пирамиды равен одной трети произведения основания на высоту.

Задача 14. Вычислить объем шара радиуса R.

В § 16 мы уже решили эту задачу, разбив шар на бесконечно-большое число концентрических слоев и предположив известною формулу поверхности шара. Теперь мы разобьем шар на бесконечно-большое число пластинок, параллельных экватору (черт. 21).

Через h мы обозначим расстояние параллельного круга до центра шара и через r — радиус этого параллельного круга. Величины r и h связаны соотношением:

$$r^2 + h^2 = R^2. \qquad (28)$$

Каждую пластинку, ввиду ее бесконечной тонкости, мы можем считать цилиндром. Площадь основания этого цилиндра представляется выражением πr^2. Высота его есть бесконечно-малая разность двух значений величины h, т. е. диференциал dh. Объем бесконечно-тонкой пластинки представится, следовательно, выражением $\pi r^2\, dh$. Объем шара равен сумме выражений $\pi r^2\, dh$. Величина h имеет своими крайними значениями $h = -R$ и $h = +R$ (бесконечно-тонкие пластинки у полюсов шара). Поэтому объем v шара представится интегралом:

$$\int_{-R}^{+R} \pi r^2\, dh.$$

Для вычисления этого интеграла нужно заменить величину r^2 ее выражением через h. Из формулы (28) находим:

$$r^2 = R^2 - h^2.$$

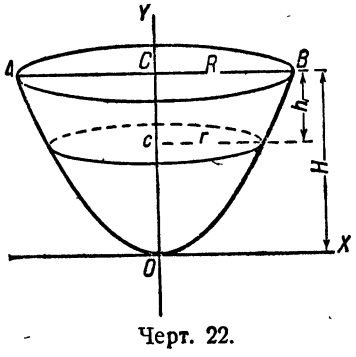
Подставляя это выражение в подъинтегральное выражение, получим:

$$v = \int_{-R}^{+R} \pi\,(R^2 - h^2)\, dh = \pi R^2 \int_{-R}^{+R} dh - \pi \int_{-R}^{+R} h^2\, dh,$$

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Тот же результат могли бы мы получить, вычислив объем полушария, т. е. интеграл $\int_0^R \pi\,(R^2 - h^2)\, dh$, и удвоив его.

§ 24. В двух предыдущих задачах мы получили результаты, известные из элементарной геометрии. Две следующие задачи дают новые результаты.



Черт. 22.

Задача 15. Пусть линия AOB (черт. 22) будет **парабола** с осью OC. Проведем хорду AB, перпендикулярную к оси параболы, и фигуру $AOBC$ будем вращать около оси параболы. Требуется вычислить объем этого нового тела (параболоид вращения), зная его высоту $OC = H$ и радиус основания $BC = R$.

Если параболу AOB мы отнесем к прямоугольной системе координат, приняв ось параболы за ось ординат OY, а касательную в вершине — за ось абсцисс OX, то координаты x и y любой точки параболы будут связаны уравнением вида:

$$y = mx^2, \qquad (29)$$

где m — какая-то постоянная величина. Эту постоянную легко выразить через данные величины R и H. В самом деле точка B имеет своими координатами как раз R и H, и потому эти величины должны удовлетворить уравнению (29), так что

$$H = mR^2.$$

Отсюда определяется m через H и R:

$$m = \frac{H}{R^2}.$$

Следовательно, уравнение (29) можно представить в виде:

$$y = \frac{H}{R^2} x^2. \tag{30}$$

Если теперь мы, как и в предыдущей задаче, разобьем наше тело на бесконечно-тонкие пластинки плоскостями, параллельными основанию, то в сечениях получим круги, один из которых представлен на чертеже. Очевидно, что радиус такого круга bc есть переменная x, и, значит, площадь его s выражается формулой:

$$s = \pi x^2.$$

Расстояние Oc центра круга от вершины параболы O есть переменная y; значит высотой бесконечно-тонкой пластинки будет дифференциал dy. Объем бесконечно-тонкой пластинки будет:

$$\pi x^2\, dy,$$

а объем всего параболоида v будет суммой объемов бесконечно-большого числа бесконечно-тонких пластинок, т. е. представится интегралом

$$v = \int_0^H \pi x^2\, dy,$$

пределами которого служат числа 0 и H, так как величина y изменяется от первого из них до второго.

Чтобы вычислить этот интеграл, мы должны выразить переменную x через переменную интеграции y. Формула (30) показывает, что величину x^2 можно заменить выражением $\frac{R^2}{H} y$, и мы получаем:

$$v = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H} y\, dy = \pi \frac{R^2}{H} \int_0^H y\, dy = \pi \frac{R^2}{H} \frac{H^2}{2},$$

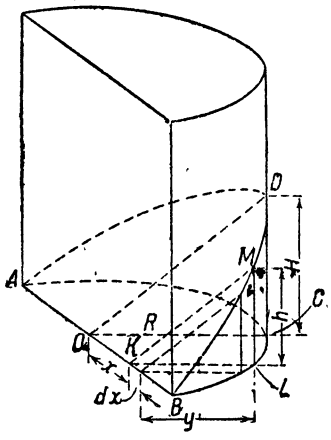
$$v = \frac{1}{2} \pi R^2 H.$$

Итак, мы получаем, что объем нашего параболоида равен полупроизведению площади его основания на высоту; другими словами, его объем

вдвое меньше, чем объем цилиндра с тем же основанием и той же высотой.

§ 25. *Задача 16.* Определить объем тела, отсеченного от круглого полуцилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания („цилиндрический отрезок").

Полученное тело ограничено двумя плоскостями ADB и ACB и частью боковой поверхности цилиндра. Через R мы обозначим радиус OC полукруга ACB; через H мы обозначим „высоту" DC тела. Проводя прямую OD, получаем прямоугольный треугольник ODC, катеты которого — R и H.



Черт. 23.

Мы разобьем наше тело на бесконечно-тонкие пластинки плоскостями, параллельными плоскости ODC; в сечениях получим прямоугольные треугольники, подобные треугольнику ODC, как, например, треугольник KML на черт. 23 [1]).

Обозначим через x расстояние OK сечения до центра O; толщина пластинки будет тогда dx. Через y обозначим катет KL и через h катет LM. Тогда площадь сечения KLM будет $\frac{1}{2}yh$, а объем пластинки (которую ввиду ее бесконечной тонкости можно считать призмой с основанием KLM и высотой dx) $\frac{2}{1}yh\,dx$. Объем всего тела равен:

$$\int_{-R}^{+R}\frac{1}{2}yh\,dx.$$

Так как плоскость OCD разбивает наше тело на две равные по объему части, то можно вместо интеграла $\int_{-R}^{+R}\frac{1}{2}yh\,dx$ взять двойную величину интеграла $\int_{0}^{R}\frac{1}{2}yh\,dx$.

Чтобы вычислить этот интеграл, необходимо выразить yh через x. Из подобия треугольников KLM и OCD имеем:

$$\frac{h}{y}=\frac{H}{R},\quad h=\frac{H}{R}y.$$

Таким образом подъинтегральная функция примет вид:

---

[1]) Подобие прямоугольных треугольников MLK и OCD следует из того, что углы K и O равны как линейные углы одного и того же двугранного угла, образованного плоскостями ADB и ACB.

$$\frac{1}{2}\,yh = \frac{1}{2}\,\frac{H}{R}\,y^2.$$

Но y и x связаны уравнением

$$x^2 + y^2 = OL = R^2.$$

(см. черт. 23, на котором радиус OL во избежание усложнения чертежа не нанесен).

Поэтому искомый объем будет:

$$v = 2\int_0^R \frac{1}{2}\,yh\,dx = 2\int_0^R \frac{1}{2}\,\frac{H}{R}\,y^2\,dx = 2\int_0^R \frac{1}{2}\,\frac{H}{R}\,(R^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}\,HR^2.$$

Полученный результат можно истолковать геометрически так. Если вписать в основание цилиндра квадрат, то его сторона будет равна $R\sqrt{2}$, а площадь $2R^2$. Если теперь построить пирамиду, основанием которой является этот квадрат, а вершиной которой служит точка D, то высотой этой пирамиды будет линия $DC = H$, и объем пирамиды будет равен $\frac{2}{3}\,R^2H$; таким образом объем нашего тела равен объему пирамиды с той же высотой, основанием которой служит квадрат, вписанный в основание цилиндра. Этот замечательный результат был получен еще Архимедом в III в. до нашей эры методом, по существу совпадающим с методом интегрального исчисления.

§ 26. От задач чисто геометрического содержания мы перейдем теперь к задачам из области механики и физики.

Задача 17. Скорость v тела, брошенного вниз с начальной скоростью v_0, выражается через время t, протекшее от начала падения, формулой:

$$v = x_0 + gt. \tag{31}$$

Найти расстояние s, пройденное телом за T секунд от начала падения (ср. задачу 2).

Как показывает формула (31), скорость падения изменяется в течение всего времени падения, т. е. от момента $t = 0$ до момента $t = T$. Однако, разбивая все время падения на бесконечно-малые промежутки, мы можем считать, что в каждом из этих промежутков скорость v остается неизменной.

Величина бесконечно-малого промежутка представляется бесконечно-малой разностью между значениями t в конце и в начале его, т. е. дифференциалом dt. Расстояние, пройденное телом в течение промежутка dt, представится выражением $v\,dt$. Расстояние s, пройденное за все время падения, есть сумма выражений $v\,dt$, в первом и последнем слагаемом которой величина t имеет значения $t = 0$ и $t = T$. Поэтому величина s представится интегралом:

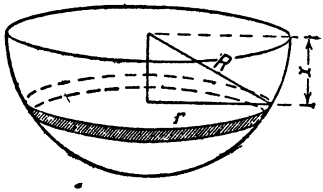
$$s = \int_0^T v\,dt.$$

Вставляя вместо v его выражение через t из формулы (31) мы получаем:

$$s = \int_0^T (v_0 + gt)\, dt;$$

$$s = v_0 T + \frac{gT^2}{2}.$$

§ 27. *Задача 18.* Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую котел, имеющий форму полушария радиуса $R = 0{,}6$ *м* (черт. 24).



Черт. 24.

В этой задаче, как и в задаче 3 § 15, непосредственное вычисление работы затрудняется тем, что различные слои воды находятся на различной глубине. Поэтому мы должны сначала вычислить работу, необходимую для поднятия бесконечно-тонкого горизонтального слоя. Каждый такой слой можно считать цилиндрическим. Через x мы обозначим глубину слоя, а через r — радиус его основания. Выражая x и r в метрах, мы найдем, рассуждая как в задаче 3, что работа, необходимая для поднятия слоя на высоту x, представится в килограммометрах выражением:

$$1000\,\pi r^2 x\, dx.$$

Работа A, затрачиваемая на выкачивание всей воды из котла, выразится интегралом, пределами которого служат крайние значения величины x. Верхний слой воды имеет глубину $x = 0$, нижний — глубину $x = R$. Поэтому

$$A = \int_0^R 1000\,\pi r^2 x\, dx.$$

В подъинтегральном выражении множитель r^2 есть величина переменная. Она связана с величиной x соотношением (черт. 24):

$$r^2 + x^2 = R^2.$$

Заменяя в подъинтегральном выражении величину r^2 выражением

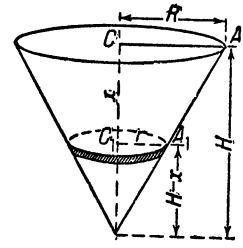
$$r^2 = R^2 - x^2,$$

мы получаем:

$$A = \int_0^R 1000\pi\,(R^2 - x^2)\, x\, dx,$$

$$A = 1000\,\pi \frac{R^4}{4} \approx 101{,}8 \text{ кгм}.$$

§ 28. *Задача 19.* Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H, а радиус основания R (черт. 25).



Черт. 25.

Как и в предыдущей задаче, мы должны вычислить сначала работу, необходимую для поднятия бесконечно-тонкого горизонтального слоя воды. Через x обозначим попрежнему глубину слоя, через r — радиус основания этого слоя. Если величины x и r выражены в дециметрах, то работа, необходимая для поднятия слоя, представится в килограммометрах выражением

$$\pi r^2 x\,dx,$$

а работа, необходимая для выкачивания всей воды, — интегралом

$$A = \int_0^H \pi r^2 x\,dx.$$

Переменная величина r^2 в подъинтегральном выражении должна быть выражена через переменную x. Из подобия треугольников OAC и OA_1C_1 находим (черт. 25):

$$\frac{r}{H-x} = \frac{R}{H}; \quad r = \frac{R}{H}(H-x).$$

Поэтому

$$A = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2}(H-x)^2 x\,dx = \pi R^2 \int_0^H x\,dx - \frac{2\pi R^2}{H}\int_0^H x^2\,dx + \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^3\,dx,$$

$$A = \frac{1}{12}\pi R^2 H^2.$$

Тот же результат мы могли бы получить иначе с несколько меньшей вычислительной работой. Именно, если бы вместо глубины x ввели расстояние y слоя до вершины конуса (которое прежде выражалось через $H-x$), то глубина слоя представилась бы выражением $H-y$, так что работа, необходимая для поднятия бесконечно-тонкого слоя, представится выражением:

$$\pi r^2 (H-y)\,dy.$$

Переменная величина y (как прежде переменная x) изменяется от $y=0$ (нижний слой) до $y=H$ (верхний слой).

Поэтому вся работа A представится интегралом

$$A = \int_0^H \pi r^2 (H-y)\,dy.$$

Величина r связана с величиной y уравнением (из подобия треугольников OAC и OA_1C_1):

$$r = \frac{R}{H} y.$$

Подставляя в подъинтегральное выражение вместо r выражение $\frac{R}{H} y$, получаем:

$$A = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} y^2 (H - y)\, dy = \frac{\pi R^2}{H} \int_0^H y^2\, dy - \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H y^3\, dy;$$

$$A = \frac{1}{13} \pi R^2 H^2.$$

§ 29. Прежде чем приступить к решению следующих задач, мы напомним некоторые сведения из физики.

Если какое-нибудь упругое тело (пружина, металлическая проволока) подвергается продольному растяжению или сжатию, то по мере увеличения деформации (т. е. растяжения или сжатия) увеличивается и сила упругости, которую необходимо преодолевать. Зависимость между деформацией и силой упругости, вообще говоря, очень сложна, но при небольших (сравнительно с длиной деформирующихся тел) растяжениях и сжатиях можно считать, что сила упругости пропорциональна деформации (закон Гука). При одной и той же деформации сила упругости кроме того пропорциональна площади поперечного сечения тела и обратно пропорциональна его длине. Таким образом, обозначая через F силу упругости, через L — длину тела, через S — площадь поперечного сечения и через x — величину деформации, мы можем написать формулу:

$$F = E \cdot \frac{Sx}{L}, \tag{32}$$

где E — величина, постоянная для данного вещества. Числовое значение E зависит от выбора единиц силы и длины. Обычно силу измеряют в килограммах, а длину — в миллиметрах. Соответствующее значение постоянной E носит название „модуль Юнга".

Задача 20. Вычислить работу, которая должна быть произведена для растяжения на 1 *мм* медной проволоки длиной 1 *м*, поперечное сечение которой есть круг с диаметром 4 *мм*. Модуль Юнга для меди можно принять равным

$$E = 10\,000 \frac{кг}{мм^2}.$$

Работа, производимая при растяжении, затрачивается на преодоление силы упругости проволоки. Но эта последняя не остается неизменной по мере растяжения проволоки. Поэтому всю деформацию мы расчленим

на бесконечно-малые деформации. Если через x мы обозначим удлинение проволоки, имеющее место в одном из промежуточных состояний, то бесконечно-малое удлинение, следующее за этим состоянием, представится бесконечно-малой разностью значений x, т. е. диференциалом dx. На протяжении этой бесконечно-малой деформации мы можем считать величину F неизменной, так что работа, затрачиваемая на бесконечно-малое расширение, представится выражением $F\,dx$, а вся работа A растяжения проволоки на длину l — интегралом

$$A = \int_0^l F\,dx.$$

Величина F выражается через переменную x формулой (32). Поэтому искомая работа

$$A = \int_0^l F\,dx = \int_0^l \frac{ES}{L}\,x\,dx; \quad A = \frac{ES\,l^2}{2L}.$$

Согласно условию задачи $E = 10\,000$; $L = 1000$; $l = 1$; $S = \pi r^2 = 4\pi$. Следовательно,

$$A = \frac{10\,000 \cdot 4\pi \cdot 1}{2000} = 62{,}8\ кгмм = 0{,}0628\ кгм.$$

§ 30. *Задача 21.* Медная проволока длиной в $L = 1$ *м*, поперечное сечение которой имеет площадь $S = 10$ *мм*^{2}, подвешена за один из своих концов. Под действием силы собственного веса она начинает удлиняться; через некоторое время удлинение достигает своей предельной величины x, которую требуется определить (удельный вес меди $\delta = 8{,}9$).

Зная удельный вес меди, нетрудно вычислить вес всей проволоки. Но было бы неправильным думать, что величину x можно определить непосредственно из уравнения (32), которое дало бы:

$$x = \frac{LF}{ES},$$

где F — вес проволоки, L — ее длина, S — площадь поперечного сечения. Дело в том, что лишь в той точке, где проволока подвешена, растягивающая сила равна весу всей проволоки. У нижнего конца проволоки эта сила равна нулю, а в других точках растягивающая сила имеет величину, промежуточную между величинами 0 и F.

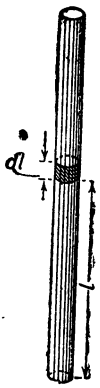
Поэтому мы должны разбить всю длину проволоки на бесконечно-малые участки, на протяжении каждого из которых растягивающую силу можно считать постоянной, и вычислить бесконечно-малое удлинение каждого такого участка. Сумма этих удлинений даст удлинение всей проволоки.

Обозначим через l расстояние такого участка до нижнего конца проволоки (до того, как проволока подверглась растяжению). Тогда dl есть длина этого участка (черт. 26).

Растягивающая сила F равна весу нижележащей проволоки. Так как эту силу мы должны выразить в килограммах, а длину в миллиметрах, то величина F представится выражением

$$F = \frac{\delta S l}{10^6}.$$ [1]

Так как можно считать, что эта сила одна и та же на всем участке, то величина бесконечно-малого удлинения может быть определена по формуле (33); только вместо длины L всей проволоки нужно вставить величину dl (длина участка). Таким образом удлинение x' бесконечно-малого участка представится выражением:



Черт. 26.

$$x' = \frac{F\,dl}{ES} = \frac{\delta S l\,dl}{10^6 ES} = \frac{\delta l\,dl}{10^6 E}.$$

Удлинение же всей проволоки равно сумме удлинений всех ее участков, причем величина l изменяется от $l = 0$ (нижний участок) до $l = L$ (верхний участок).

Итак искомое удлинение x равно интегралу:

$$x = \int_0^L \frac{\delta l\,dl}{10^6 E} = \frac{\delta L^2}{2 \cdot 10^6 E}.$$

Подставляя $\delta = 8{,}9$; $E = 10\,000$; $L = 1000$, получаем

$$x = \frac{8{,}8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 \cdot 10^4} \approx 0{,}00045 \text{ мм}.$$

§ 31. При решении следующих задач нужно иметь в виду, что давление, оказываемое жидкостью на поверхность сосуда, ее заключающего, в случае если жидкость находится в покое, направлено всюду перпендикулярно к поверхности сосуда. Величина этого давления зависит только от глубины соответствующей части поверхности и не зависит ни от формы сосуда, ни от направления поверхности его. Давление на горизонтальную площадку равно весу столба жидкости, имеющего основанием эту площадку, а высотой — глубину этой площадки под уровнем жидкости.

Задача 22. Определить давление, производимое водой, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющую в длину $a = 60$ *см*, а в высоту $b = 25$ *см* (черт. 27).

---

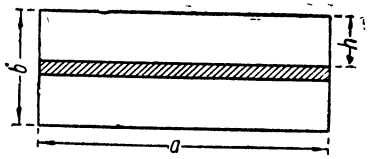
[1] S предполагается выраженным в *мм*^{2}; l — в *мм*; таким образом Sl есть объем, выраженный в *мм*^{3}, и, следовательно, δSl есть вес, выраженный в миллиграммах. Выражая этот вес в килограммах, получаем $\frac{\delta Sl}{10^6}$.

Так как давление воды меняется с изменением глубины, то мы должны разбить всю поверхность стенки на бесконечно-тонкие горизонтальные полоски (черт. 27), вдоль которых величину давления можно считать неизменной. Если глубину полоски обозначим через h, то ее толщина представится диференциалом dh, а площадь — выражением $a\,dh$.

Давление на эту полоску мы рассчитаем так: если бы эта полоска, оставаясь на той же глубине h, была повернута в горизонтальное положение, то давление на нее равнялось бы весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, а высотой — глубину h. Объем этого столба равен $ah\,dh$ ($см^3$), вес же выражается (в граммах) тем же числом. Так как давление на данной глубине одинаково по всем направлениям, то давление на бесконечно-тонкую полоску вертикальной стенки также равно $ah\,dh$. Давление P на всю стенку представится интегралом:

$$P=\int_0^b ah\,dh;$$

$$P=\frac{ab^2}{2}=18\,750\ г=18{,}75\ кг.$$



Черт. 27.

Задача 23. На какой глубине нужно провести горизонтальную линию на стенке аквариума (см. задачу 22) так, чтобы давления на нижележащую и на вышележащую части стенки были равны?

Обозначим искомую глубину через x. Давление на вышележащую часть стенки представится интегралом

$$\int_0^x ah\,dx.$$

Давление на нижележащую часть стенки представится интегралом

$$\int_x^b ah\,dh.$$

Согласно условию задачи, эти интегралы должны быть равны. Отсюда получаем уравнение:

$$\int_x^b ah\,dh=\int_0^x ah\,dx.$$

Вычисляя интегралы и деля обе части равенства на $\frac{a}{2}$, получаем:

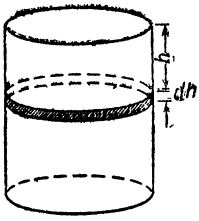
$$b^2-x^2=x^2,$$

откуда

$$x=\frac{b}{\sqrt{2}}\approx 17{,}7\ см.$$

Задача 24. Вычислить давление ртути, наполняющей стакан, на боковую поверхность стакана. Высота стакана $H = 8$ *см*, радиус основания $R = 3{,}5$ *см* (удельный вес ртути $\delta = 13{,}6$).

Разделим поверхность стакана на бесконечно-тонкие горизонтальные полоски (черт. 28) и обозначим через h глубину этой полоски. Ширина этой полоски представится диференциалом dh, поверхность ее — $2\pi R\,dh$. Давление, испытываемое этой полоской, равно весу столба ртути, имеющего высотой глубину полоски под уровнем ртути, а основанием — горизонтальную полоску той же площади. Этот вес представляется выражением



Черт. 28.

$$2\pi R\delta h\,dh$$

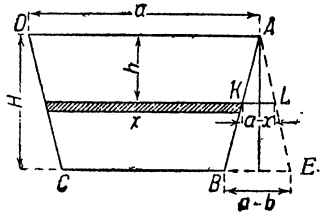
и дает величину давления ртути на бесконечно-тонкую полоску. Давление P ртути на всю поверхность стакана представится интегралом

$$P = \int_0^H 2\pi R\delta h\,dh;$$

$$P = \pi R H^2 \delta = 3{,}14 \cdot 3{,}5 \cdot 64 \cdot 13{,}6 \approx 9565{,}7\ г \approx 9{,}56\ кг.$$

Задача 25. Вычислить давление воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой $a = 6{,}4$ *м*, нижнее $b = 4{,}2$ *м*, а высота $H = 3$ *м* (черт. 29).

Как и в предыдущих задачах, разбиваем поверхность плотины на бесконечно-тонкие горизонтальные полоски. Глубину полоски обозначим через h, длину ее — через x. Давление воды на плотину представится интегралом $\int_0^H xh\,dh$.



Черт. 29.

Для вычисления этого интеграла мы должны выразить переменную x через переменную h. Проведем вспомогательную прямую AE, параллельную боковой стороне трапеции DC (черт. 29). В треугольнике ABE основание и высота соответственно равны $a - b$ и H, а в треугольнике AKL, подобном первому, основание и высота равны $a - x$ и h. Отсюда имеем пропорцию

$$\frac{a-x}{a-b} = \frac{h}{H}$$

из которой находим x:

$$x = a - \frac{h}{H}(a-b).$$

Подставляя это выражение в подъинтегральное, получаем

$$P = \int_0^H \left[a - \frac{h}{H}(a-b)\right] h\,dh = a\int_0^H h\,dh - \frac{(a-b)}{H}\int_0^H h^2\,dh;$$

$$P = \frac{H^2(a+2b)}{6} = 22{,}2\ m.$$

Глава II.

Интегрирование отрицательных и дробных степеней. Интегралы с переменным пределом.

§ 1. Основная формула интегрирования

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{1}$$

была выведена нами в предположении, что k — целое положительное число (или нуль); в этом случае, как мы показали, числа a и b могут быть совершенно произвольными.

Возникает вопрос, можно ли пользоваться этой формулой в тех случаях, когда число k — отрицательное или дробное. Если можно, то мы значительно расширим поле деятельности нашего математического аппарата и, следовательно, сможем решать ряд новых задач конкретного содержания.

Так, например, если бы справедливость формулы (1) была доказана для отрицательного показателя, мы могли бы находить интегралы такого вида:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2},$$

так как, представив подъинтегральное выражение в виде $x^{-2}\,dx$, мы могли бы применить формулу (1) и, полагая в ней $k = -2$, написать:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \int_a^b x^{-2}\,dx = \frac{b^{-1} - a^{-1}}{-1} = -(b^{-1} - a^{-1}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Точно так же, если бы формула (1) сохраняла силу для дробного показателя, мы могли бы найти интеграл вида:

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx,$$

так как, представив подъинтегральное выражение в виде $x^{\frac{1}{2}}\,dx$, мы могли бы применить формулу (1) и, полагая в ней $k = \frac{1}{2}$, написать:

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \int_a^b x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}).$$

Можно доказать, что, с некоторыми оговорками, формула (1) остается справедливой и в тех случаях, когда k — отрицательное или дробное число.

Важнейшая из этих оговорок состоит в том, что число k не должно равняться отрицательной единице.

Что в случае $k = -1$ формула (1) безусловно неприменима, показывает простой пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_2^3 x^{-1}\,dx.$$

Применяя формулу (1), мы получили бы

$$\int_2^3 x^{-1}\,dx = \frac{3^{-1+1} - 2^{-1+1}}{-1+1} = \frac{3^0 - 2^0}{0};$$

но так как

$$3^0 = 1 \quad \text{и} \quad 2^0 = 1,$$

то мы приходим к выражению $\frac{0}{0}$, неопределенность которого не дает возможности найти числовое значение нашего интеграла.

Итак, формула (1) заведомо неприменима к случаю $k = -1$. Этот случай требует особого рассмотрения, которое мы откладываем до следующей главы.

Для всех же других значений числа k формула (1) оказывается верной всегда, когда оба предела интеграла имеют одинаковые знаки, т. е. либо оба положительны, либо оба отрицательны. Почему при разных знаках пределов формула (1) может оказаться неверной и в каких именно случаях она теряет свою силу — это выяснится в ближайшем будущем. Пока мы ограничиваемся теми случаями, практически наиболее важными, когда числа a и b имеют одинаковые знаки, и утверждаем, что для всех значений k, кроме $k = -1$, остается правильной формула:

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Доказательство этого утверждения мы приводим ниже. Оно не содержит ничего принципиально нового, но несколько громоздко. Поэтому при первом чтении можно опустить текст двух следующих параграфов и перейти прямо к упражнениям.

§ 2. Доказательство придется расчленить на две части: сначала мы рассмотрим случай, когда k является целым отрицательным числом,

$k = -2, -3, -4 \ldots$, и затем случай, когда k есть положительная или отрицательная дробь.

1-й случай: k — целое отрицательное число, меньшее -1.

Как и в § 19 предыдущей главы, мы вставим между числами a и b промежуточные числа $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, растущие в геометрической прогрессии (если бы a и b имели разные знаки, этого нельзя было бы сделать). Знаменатель прогрессии снова обозначим через h. Затем составляем сумму s_n:

$$s_n = a^k(ah - a) + (ah)^k(ah^2 - ah) + (ah^2)^k(ah^3 - ah^2) + \ldots + (ah^{n-1})^k(ah^n - ah^{n-1}).$$

Снова мы убеждаемся, что s_n есть сумма геометрической прогрессии; знаменатель этой последней есть h^{k+1}.

Суммируя эту прогрессию, как и в § 19 гл. I, мы получаем формулу [1])

$$s_n = \frac{(b^{k+1} - a^{k+1})(h-1)}{h^{k+1} - 1}. \qquad (2)$$

В § 19 гл. I дальнейший ход рассуждений был таков: знаменатель выражения (2) мы разлагали на множители по формуле:

$$h^{k+1} - 1 = (h-1)(h^k + h^{k-1} + \ldots + h + 1) \qquad (3)$$

и производили сокращение на $h - 1$. После этого, полагая $h = 1$, мы получали в правой части формулы (2) выражение:

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Так как теперь $k+1$ есть целое отрицательное число, то непосредственно нельзя разложить знаменатель по формуле (3). Предварительно нужно освободить его от отрицательной степени h^{k+1}. Это делается так же, как обычно поступают в элементарной алгебре. Именно, положим, что $k = -k_1$ [2]); величина k_1 будет, очевидно, положительным числом, бо́льшим единицы:

$$k_1 = 2, 3, 4 \ldots$$

---

[1]) Заметим, что если бы величина k была отрицательной единицей, то формула суммы прогрессии была бы неприменима, так как знаменатель прогрессии h^{k+1} был бы равен $h^0 = 1$, т. е. прогрессия состояла бы из равных членов. Таким образом формула (2) дала бы для случая $k = -1$ неопределенное выражение $s_n = \frac{0}{0}$.

[2]) Рекомендуем провести выкладку на числовом примере, например для интеграла $\int_a^b \frac{dx}{x^3}$. Здесь $k = -3$ (так что $k_1 = 3$).

Знаменатель дроби (2) получит после этой замены вид:

$$h^{-k_1+1}-1=h^{k_1-1}-1=\frac{1-h^{k_1-1}}{h^{k_1-1}}=\frac{h^{k_1-1}-1}{h^{k_1-1}},$$

а дробь $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$ можно будет представить так:

$$\frac{h-1}{h^{k+1}-1}=-\frac{h^{k_1-1}(h-1)}{h^{k_1-1}-1}.$$

Теперь знаменатель дроби можно разложить на множители, так как показатель k_1-1 есть целое положительное число [1]): $k_1-1=1, 2, 3\ldots$ Мы получаем:

$$h^{k_1-1}-1=(h-1)(h^{k_1-2}+h^{k_1-3}+\ldots+h+1),$$

и, следовательно, по сокращении на $h-1$ мы получим

$$\frac{h-1}{h^{k+1}-1}=-\frac{h^{k_1-1}}{h^{k_1-2}+h^{k_1-3}+\ldots+h+1}.$$

В знаменателе полученного выражения мы имеем k_1-1 слагаемых. При $h=1$ каждое из них обращается в единицу; числитель также обращается в единицу при $h=1$.

Таким образом при $h=1$ дробь $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$ имеет значение $-\frac{1}{k_1-1}$; точнее говоря, при приближении величины h к единице эта дробь стремится к пределу, равному $-\frac{1}{k_1-1}$.

Если теперь мы вновь заменим k_1 на $-k$, то получим выражение:

$$-\frac{1}{k_1-1}=\frac{1}{-(k_1-1)}=\frac{1}{-k_1+1}=\frac{1}{k+1}.$$

Таково при $h=1$ значение дроби $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$. Поэтому, на основании формулы (2), мы приходим к окончательному результату:

$$s_\infty=\int_a^b x^k\,dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}. \qquad (1)$$

И мы видим, что для целых отрицательных k (кроме $k=-1$) формула (1) сохраняет свою силу.

Рассмотрим теперь случай дробного k.

---

1) Для случая $k=-2$ разлагать на множители не требуется.

§ 3. *2-й случай*: k — дробное число, положительное или отрицательное. Для доказательства справедливости формулы (1) нам нужно, как и в первом случае, показать, что дробь $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$ при $h=1$ имеет значение $\frac{1}{k+1}$, а для этого нужно предварительно избавить эту дробь от дробных степеней. С этой целью представим число k в виде $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, причем m может быть как положительным числом, так и отрицательным. Число же n, очевидно, всегда можно считать положительным.

Знаменатель дроби $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$ представится в виде

$$h^{k+1}-1=h^{\frac{m}{n}+1}-1=h^{\frac{m+n}{n}}-1=(\sqrt[n]{h})^{m+n}-1.$$

Числитель же этой дроби можно преобразовать так:

$$h-1=(\sqrt[n]{h})^{n}-1.$$

Если мы для сокращения письма введем обозначение $\sqrt[n]{h}=p$, то представим нашу дробь в виде:

$$\frac{h-1}{h^{k+1}-1}=\frac{p^{n}-1}{p^{m+n}-1}.$$

Число n по нашему предположению положительно; число же $m+n$ может быть и положительным и отрицательным (последнее будет в случае, когда m отрицательное число, большее чем n по абсолютному значению) [1]).

Положим сначала, что $m+n$ — положительное (конечно целое) число. Тогда и числитель и знаменатель могут быть разложены на множители:

$$p^{n}-1=(p-1)(p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1);$$

$$p^{m+n}-1=(p-1)(p^{m+n-1}+p^{m+n-2}+\ldots+p+1).$$

По сокращении на $p-1$ дробь наша приведется к виду

$$\frac{h-1}{h^{k+1}-1}=\frac{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}{p^{m+n-1}+p^{m+n-2}+\ldots+p+1}.$$

---

[1]) Равным n по абсолютному значению оно не может быть, так как в этом случае

$$k=\frac{m}{n}=-1.$$

В числителе имеем n, а в знаменателе $m+n$ слагаемых. Каждое из них обращается в единицу при $h=1$ (так как $p=\sqrt[n]{h}$). Следовательно, при $h=1$ дробь $\frac{h-1}{h^{k+1}-1}$ получает значение

$$\frac{n}{m+n}=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}=\frac{1}{k+1}.$$

Отсюда, как выше, заключаем, что формула

$$\int_a^b x^k\,dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \tag{1}$$

сохраняет свою силу.

Так обстоит дело в случае положительности числа $m+n$; если же оно отрицательно, то нужно предварительно освободить знаменатель дроби

$$\frac{p^n-1}{p^{m+n}-1}$$

от отрицательной степени. Выкладка протекает совершенно аналогично рассмотренной для первого случая.

Выводы этого параграфа и § 17 гл. I могут быть объединены в следующем предложении: при одинаковых знаках чисел a и b формула

$$\int_a^b x^k\,dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

справедлива для любых значений числа k, кроме значения $k=-1$.

Упражнения.

1) $$\int_1^3\frac{dx}{x^3}=\int_1^3 x^{-3}\,dx=\frac{(3)^{-2}-(1)^{-2}}{-2}=\frac{4}{9}.$$

2) $$\int_1^2\sqrt{x}\,dx=\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\approx 1{,}21\ ^1).$$

---

1) Обращаем внимание читателя, что если мы хотим иметь дело только с действительными числами, то в этом интеграле пределы должны быть непременно положительными, так как, если бы пределы были отрицательны, величина x принимала бы отрицательные значения, величина $\sqrt{x}$ была бы мнимой и, следовательно, интеграл имел бы мнимое значение. В последнем можно убедиться,

3) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = 11{,}25.$

4) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^2} = 0{,}25.$

5) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^3} \approx -0{,}09.$

6) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

7) $\int_{-8}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -4{,}5.$

8) $\int_2^3 x\sqrt{x}\,dx = 3{,}97.$

9) $\int_{1{,}4}^{2{,}2} \frac{3dx}{x^4} \approx 0{,}27.$

10) $\int_{2{,}5}^{3{,}5} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \approx 0{,}20.$

11) $\int_2^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 2{,}75.$

12) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\right)^2 dx \approx 2{,}45.$

§ 4 [1]). До сих пор мы предполагали, что в интеграле

$$\int_a^b x^k\,dx$$

(где k — дробное или отрицательное число) пределы a и b либо оба положительны, либо оба отрицательны. Нам предстоит рассмотреть вопрос о том, остается ли справедливой формула

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \qquad (1)$$

в том случае, когда пределы a и b являются числами разных знаков.

В § 21 гл. I мы показали, что при целом положительном числе k формула (1) свою силу сохраняет и при пределах разных знаков.

Напомним ход наших рассуждений.

Прежде всего мы показали, что формула (1) сохраняет свою силу в тех случаях, когда один из пределов равен нулю. Применив формулу (1) к этим случаям, мы получаем формулы

применяя, например, к интегралу $\int_{-4}^{-9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ формулу (1). Сказанное относится ко всякому интегралу, содержащему корень четной степени. Напротив, при корне нечетной степени пределы интегрирования могут быть и отрицательными.

[1]) Этот параграф при первом чтении может быть опущен.

$$\int_0^a x^k\,dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}, \tag{4}$$

$$\int_b^0 x^k\,dx = -\frac{b^{k+1}}{k+1}. \tag{5}$$

Если затем требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b x^k\,dx,$$

где числа a и b имеют разные знаки, например a отрицательно, а b положительно, то мы можем разбить этот интеграл на сумму двух интегралов таким образом:

$$\int_a^b x^k\,dx = \int_a^0 x^k\,dx + \int_0^b x^k\,dx,$$

и, пользуясь формулами (4) и (5), получаем окончательно

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1},$$

чем и доказана справедливость формулы (1) при пределах разного знака.

Спрашивается, применимо ли это доказательство и для тех случаев, когда число k не является целым и положительным? На первый взгляд может показаться, что применимо. На самом деле, однако, оно применимо далеко не всегда, и мы увидим сейчас, в каких случаях формула (1) остается верной при пределах разного знака и в каких случаях она становится неприменимой.

Все дело сводится к вопросу о правильности формул (4) и (5). Если они остаются верными, то остается верной и формула (1).

Итак, мы рассмотрим тот случай, когда один из пределов, например нижний, обращается в нуль. Применяя формулу (1) к этому случаю, мы получаем:

$$\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - 0^{k+1}}{k+1}.$$

Отсюда как будто бы вытекает справедливость формулы (4), так как кажется, что нуль во всякой степени (в нашем случае в степени $k+1$) дает нуль. Последнее положение, однако, неверно. Лишь положительная степень нуля есть нуль; отрицательная же степень нуля есть бесконечно-большое число.

Например, минус вторая степень нуля (0^{-2}) равняется единице, деленной на вторую степень нуля:

$$0^{-2} = \frac{1}{0^2}$$

и значит,

$$0^{-2} = \infty.$$

Отсюда вытекает, что формула (4) верна лишь в том случае, когда $k+1$ есть положительное число; в том же случае, когда $k+1$ есть число отрицательное, интеграл

$$\int_0^b x^k\,dx$$

имеет бесконечно-большое значение.

То же самое можно сказать и о формуле (5).

Чтобы дело было совершенно ясным, рассмотрим числовой пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Применение формулы (4) дало бы для него значение $-\frac{1}{2}$; уже из этого результата ясна его абсурдность, так как сумма бесконечно-большого числа положительных слагаемых никак не может дать отрицательное число. Корень ошибки обнаружится немедленно, если мы будем брать за нижний предел не нуль, а малые числа, все менее отличающиеся от нуля, например числа: 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Для этих чисел мы можем применить формулу (4) с полным правом. Производя вычисление, получим:

$$\int_{0,1}^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{0,1} = -\frac{1}{2} + 10 = 9\frac{1}{2},$$

$$\int_{0,01}^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{0,01} = -\frac{1}{2} + 100 = 99\frac{1}{2}.$$

При нижнем пределе 0,001 интеграл будет равен $999\frac{1}{2}$ и т. д. Мы видим, что второе слагаемое не стремится к нулю (как было всегда в случае положительного k), а, напротив, растет безгранично, так что при нижнем пределе, равном нулю, интеграл получает бесконечно-большое значение [1]).

---

[1]) Физический смысл интеграла, имеющего бесконечно-большое значение, будет выяснен в задачах этой и следующих глав.

Не следует думать, что формулы (4) и (5) справедливы только для положительных значений k; они справедливы и для всех отрицательных значений k, больших чем -1, ибо, если $k > -1$, то $k+1 > 0$, т. е. $k+1$ положительное число.

Напротив, при отрицательных k, меньших чем -1, формулы (4) и (5) неверны [1]).

Из сказанного вытекает, что и формула

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{1}$$

для пределов разных знаков верна в том и только в том случае, когда число k больше чем -1. В противном случае этой формулой пользоваться мы не имеем права [2]).

Упражнения.

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82.$

2) $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0.$

3) $\int_{-8}^{+8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 12.$

4) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \approx 0{,}87.$

5) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \infty.$

6) $\int_{-1}^{+1} x\sqrt[3]{x}\,dx \approx 0{,}86.$

7) $\int_0^{2,3} \sqrt{x}\,dx \approx 2{,}33.$

§ 5. *Задача 26.* Вычислить площадь OAC, ограниченную осью ординат, прямой $y = y_0$, параллельной оси абсцисс, и дугой линии $x^3 = ay^2$; эту линию называют полукубической параболой или параболой Нейля.

Разобьем площадь OAC на бесконечно-тонкие полоски, параллельные оси абсцисс (черт. 30); длина такой полоски есть абсцисса x переменной точки кривой M, ширина — диференциал ординаты dy. Площадь OAC представится интегралом

$$\int x\,dy.$$

---

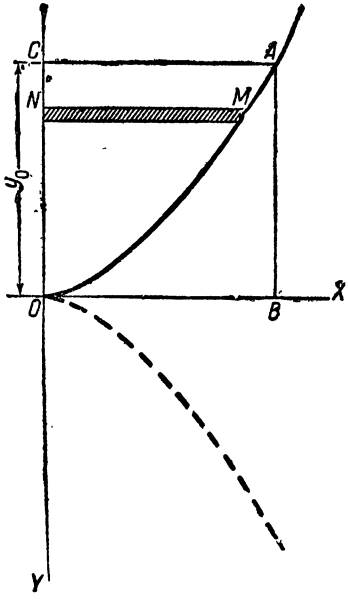
[1]) Для случая $k = -1$, как мы знаем, формула (1) вообще непригодна.

[2]) По крайней мере без дополнительных соглашений относительно смысла интеграла $\int_a^b x^k\,dx$ при пределах разного знака.

Переменной интеграции служит величина y. Поэтому пределами интеграла будут крайние значения ординаты, т. е. нуль и y_0.

$$\int_0^{y_0} x\,dy.$$

Выражая x через y с помощью уравнения параболы Нейля, имеем:



Черт. 30.

$$x = \sqrt[3]{ay^2} = \sqrt[3]{a}\, y^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно искомый интеграл равен:

$$\int_0^{y_0} x\,dy = \sqrt[3]{a}\int_0^{y_0} y^{\frac{2}{3}}dy = \sqrt[3]{a}\,\frac{3}{5}y_0^{\frac{5}{3}}.$$

Геометрически этот результат можно истолковать так: построим прямоугольник $ABOC$; его площадь равна x_0y_0 (через x_0 обозначена абсцисса точки A).

Так как

$$x_0 = \sqrt[3]{a}\, y_0^{\frac{2}{3}},$$

то площадь прямоугольника $ABOC$ равна

$$\sqrt[3]{a}\, y_0^{\frac{5}{3}}.$$

Мы видим, что площадь криволинейного треугольника AOC составляет $\frac{3}{5}$ площади прямоугольника $CABO$.

Задача 27. Определить площадь „криволинейной трапеции“ $AA'B'B$, ограниченной кривой $x^2y^3 = 1$, ординатами $x = -4$ и $x = +4$ и отрезком $A'B'$ оси абсцисс, вырезаемым этими ординатами (черт. 31).

Искомая площадь представляется интегралом

$$\int_{-4}^{+4} y\,dx.$$

Из уравнения

$$x^2y^3 = 1$$

мы получим выражение величины y через x:

$$y = x^{-\frac{2}{3}},$$

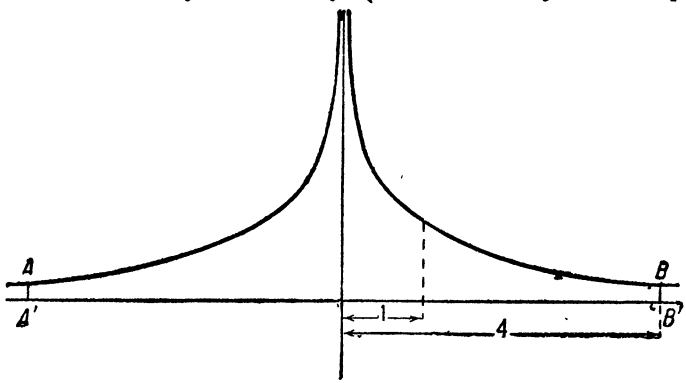
так что придется вычислить интеграл

$$\int_{-4}^{+4} x^{-\frac{2}{3}}\,dx.$$

Так как показатель степени $-\frac{2}{3}$ больше, чем -1, то основная формула интегрирования может быть применена, несмотря на то, что пределы интеграла имеют разные знаки, и мы получаем площадь

$$AA'B'B = \int_{-4}^{+4} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 6\sqrt[3]{4} \approx 9{,}5.$$

В этой задаче обращает на себя внимание то, что площадь нашей трапеции имеет конечную величину (во всяком случае не превышающую 9,6), тогда как фигура наша имеет „шпиль", подымающийся бесконечно-высоко (так как при $x = 0$ величина $y = \infty$). Дело, однако, в том, что шпиль не только тянется ввысь, но одновременно и суживается, так что его бесконечно-большая высота компенсируется бесконечной малостью его ширины. В более строгой форме можно представить дело таким образом.



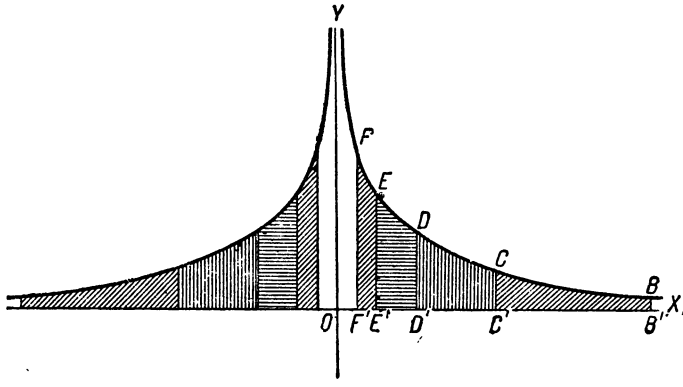
Черт. 31.

Возьмем на оси X-ов (черт. 32) ряд точек B', C', D', E' и т. д., абсциссы которых OB', OC', OD', OE' и т. д. образуют геометрическую прогрессию. Знаменателем этой прогрессии можно взять любую правильную дробь (неправильная дробь дала бы нам ряд точек, удаляющихся от начала координат, мы же хотим иметь ряд точек, приближающихся к началу координат).

Возьмем, например, знаменателем прогрессии дробь $\frac{1}{2}$, так что точки B', C', D', E', F' и т. д. будут иметь абсциссы 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ и т. д.

Проведя ординаты BB', CC', DD' и т. д., мы получим ряд суживающихся криволинейных трапеций, заштрихованных на чертеже.

Аналогичное построение можно проделать и в левой части графика. Таким образом справа и слева мы получим бесконечно-большое число суживающихся криволинейных трапеций. Если действительно площадь заштрихованной на черт. 32 фигуры имеет конечную величину $6\sqrt[3]{4}$, то сумма площадей суживающихся трапеций, сколько бы их ни построили, не может превзойти этой величины. Эта величина $6\sqrt[3]{4}$ должна



Черт. 32.

служить пределом суммы площадей заштрихованных трапеций при бесконечном увеличении их числа.

Посмотрим теперь, как выражаются эти площади и их сумма. Рассмотрим первую справа криволинейную трапецию $BB'C'C$. Ее площадь выражается интегралом

$$\int_2^4 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\,(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2}-1).$$

Площадь следующей трапеции $CC'D'D$ представится интегралом

$$\int_1^2 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\,(\sqrt[3]{2}-1).$$

Площадь трапеций $D'E'E$, $EE'F'F$ и т. д. представится аналогично интегралами

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\,(\sqrt[3]{2}-1),$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = \frac{3}{(\sqrt[3]{2})^2}\,(\sqrt[3]{2}-1)$$

и т. д.

Легко видеть, что величины площадей

$$3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2}-1);\quad 3\,(\sqrt[3]{2}-1);$$
$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\,(\sqrt[3]{2}-1);\quad \frac{3}{(\sqrt[3]{2})^2}\,(\sqrt[3]{2}-1)\ldots$$

образуют убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Отсюда ясно, что сумма бесконечно-большого числа трапеций, лежащих справа от оси ординат, дает конечную величину, которую можно вычислить по общей формуле для суммы s бесконечной геометрической прогрессии:

$$s=\frac{a}{1-q},$$

где a есть первый член прогрессии (в нашем случае $a=3\sqrt[3]{2}\,[(\sqrt[3]{2}-1)]$, а q — знаменатель прогрессии $\left(q=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Итак, находим:

$$s=\frac{3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{2}-1)}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=3\sqrt[3]{4}.$$

Той же величине равняется и сумма площадей бесконечного числа криволинейных трапеций, лежащих слева от оси ординат, так что сумма бесконечно-большого числа всех заштрихованных трапеций равна

$$2\cdot 3\sqrt[3]{4}=6\sqrt[3]{4}.$$

Это та самая величина, которую мы получили прежде для площади $AA'B'B$.

Замечание. Может быть, не лишним будет предупредить, что отнюдь не для всякой кривой, уходящей в бесконечность, площадь криволинейной трапеции имеет конечную величину. Так, если имеем линию $y=\frac{1}{x^2}$, по форме напоминающую линию $x^2y^3=1$, то площадь шпилеобразной трапеции вновь складывается из суммы двух равных половин (левой и правой). Но каждая такая половина бесконечно-велика. В самом деле интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2},$$

где a — некоторое конечное число (например $a=4$), имеет бесконечно-большое значение (§ 4).

Таким образом бесконечное утончение шпиля здесь не компенсирует его бесконечно-большой высоты.

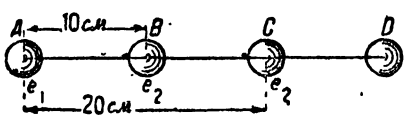
§ 6. *Задача 28.* Два электрических заряда: $e_1 = +20$ электростатических единиц и $e_2 = +30$ электростатических единиц находятся на расстоянии 10 *см* друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух. Сначала оба заряда закреплены неподвижно, затем заряд e_2 освобождается. Тогда под действием силы отталкивания заряд e_2 начинает перемещаться, удаляясь от заряда e_1. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд e_2 удалится на расстояние 20 *см*, 30 *см*, 40 *см* от заряда e_1?

Согласно закону Кулона, сила отталкивания F, действующая на перемещающийся заряд e_2, равна (в динах)

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{20 \cdot 30}{r^2},$$

где r есть выраженное в сантиметрах расстояние между зарядами.

При удалении заряда e_2 эта сила непрерывно уменьшается, и потому искомая работа не может быть найдена простым умножением силы $\frac{20 \cdot 30}{r^2} = \frac{20 \cdot 30}{10^2} = 6$ (дин) на пройденный зарядом путь (10 *см*). Для вычисления этой работы мы должны разбить путь 1 *см* на бесконечно-малые участки, на протяжении которых можно считать силу отталкивания неизменной [1]).



Черт. 33.

Так как через r мы обозначили расстояние движущегося заряда e_2 от заряда e_1, то dr есть бесконечно-малое изменение расстояния, т. е. одна из бесконечно-малых частей пути BC (черт. 33).

На протяжении пути dr силу отталкивания можно считать неизменной. Поэтому работа на бесконечно-малом пути dr выразится произведением

$$F \cdot dr = \frac{20 \cdot 30}{r^2}\, dr = \frac{600}{r^2}\, dr.$$

Теперь, чтобы найти работу A на пути BC, нам нужно взять сумму работ, производимых силой отталкивания на бесконечно-малых участках пути BC.

Следовательно, работа A представится интегралом:

$$\int_{10}^{20} \frac{600}{r^2}\, dr.$$

---

[1]) Впрочем, можно элементарным путем оценить величину работы, произведенной силой отталкивания: так, при наличном положении заряда сила равна 6 динам, а затем становится все меньше и меньше. Значит, работа на пути длиной 10 *см* во всяком случае не больше $6 \times 10 = 60$ (эргов). Далее на расстоя-

Пределами интеграла служат начальное и конечное значения переменной величины r. Итак,

$$A = \int_{10}^{20} \frac{600}{r^2}\, dr = 600\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right) = 30 \text{ эргов.}$$

Аналогично найдем, что работа, произведенная силой отталкивания на пути от точки B до точки D, отстоящей от заряда e_1 на 30 *см*, равна

$$\int_{10}^{30} \frac{600}{r^2}\, dr = 40 \text{ эргов,}$$

а на пути от точки B до точки, отстоящей от заряда e_1 на 40 *см*, —

$$\int_{10}^{40} \frac{600}{r^2}\, dr = 45 \text{ эргов.}$$

Если заряд e_2 не будет остановлен в своем движении, он должен теоретически продолжать свое движение бесконечно. Интересно узнать, как будет расти при этом совершаемая силой отталкивания работа. Будет ли она (теоретически) бесконечно увеличиваться? Ответ на этот вопрос дает простое вычисление. Положим, что расстояние между зарядами стало бесконечно-велико; тогда работа должна представиться интегралом

$$\int_{10}^{\infty} \frac{600}{r^2}\, dr.$$

Каким числом выразится этот интеграл? На первый взгляд может показаться, что бесконечно-большим. На самом деле вычисление дает

$$\int_{10}^{\infty} \frac{600}{r^2}\, dr = 600 \int_{10}^{\infty} r^{-2}\, dr = 600\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{\infty}\right).$$

Но $\frac{1}{\infty}$ есть нуль, так что искомая работа равна

$$600 \cdot \frac{1}{10} = 60 \text{ эргам.}$$

Итак работа, производимая силой отталкивания на бесконечно-большом пути, равна „только" 60 эргам. Это есть так называемый „потен-

---

нии 20 *см* друг от друга заряды отталкиваются с силой $\frac{20 \cdot 30}{20^2} = 1{,}5$ (дин), а до этого сила отталкивания была все время больше. Следовательно, искомая работа не меньше, чем $1{,}5 \times 10 = 15$ (эргов). Итак, она заключена между 15 и 60 эргами.

циал" системы зарядов e_1 и e_2. Читателю предоставляется показать, что в общем случае, когда начальное расстояние зарядов e_1 и e_2 AB есть R *см*, то потенциал будет равен $\frac{e_1 e_2}{R}$. Вычисление будет протекать точно так же, как мы его проделали в нашем частном случае.

Разумеется, зарядов, находящихся на бесконечно-большом расстоянии, никто никогда не наблюдал. Но физику приходится иметь дело с расстояниями достаточно большими. Это те расстояния, на которых взаимодействие зарядов e_1 и e_2 уже настолько ничтожно, что их можно считать не действующими друг на друга. И вот наш результат означает, что работа, совершенная силой отталкивания, удалившей заряды на такое расстояние, на котором она уже практически перестает действовать, — что эта работа практически равна 60 эргам (во всяком случае не больше чем 60 эргов).

Таким образом интеграл

$$\int_{10}^{\infty} \frac{600\,dr}{r^2}$$

имеет двоякое значение для практики. С одной стороны, он приближенно дает величину фактической работы на достаточно длинном пути. С другой стороны, он дает предельную величину работы (60 эргов), которую может дать система. Это, так сказать, запас работы, имеющийся в системе. Отсюда и термин „потенциал" (potentia — возможность, способность).

§ 7. Если в сосуде, содержащем жидкость, сделано небольшое отверстие, то жидкость будет вытекать со скоростью, величина которой зависит от глубины этого отверстия под уровнем жидкости в сосуде. Если отвлечься от действия трения (которое замедляет скорость истечения), то можно считать, что жидкость вытекает из сосуда с той скоростью, какую имело бы тело, упавшее с высоты уровня жидкости в сосуде до высоты отверстия, так что если обозначить через h глубину отверстия под уровнем жидкости, то скорость v будет равна (закон Торричелли)

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (6)$$

$$(g = 980\ см/сек^2).$$

Исходя из этого, решим нижеследующую задачу.

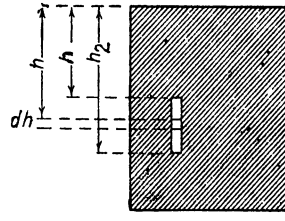
Задача 29. В вертикальной стенке сосуда сделано отверстие (черт. 34), имеющее форму прямоугольника. Ширина отверстия 0,5 *см*. Верхняя часть отверстия находится на глубине $h_1 = 8$ *см*, а нижняя — на глубине $h_2 = 12$ *см* под уровнем жидкости. Жидкость в сосуде не меняет своего уровня (вместимость сосуда очень велика по сравнению с количеством вытекающей жидкости, или в сосуд вливается сверху такое же количество воды, которое вытекает через отверстие). Какое количество жидкости вытекает из отверстия в 7 сек.?

Для большей ясности положим сначала, что отверстие сделано не в вертикальной стенке, а в горизонтальном дне сосуда, находящемся на глубине $h_2 = 12$ *см* под уровнем жидкости. Тогда, чтобы найти,

какое количество жидкости вытечет через 3 сек., мы рассуждали бы так: скорость истечения жидкости v согласно формуле (6) будет:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 12} \approx 153{,}3.$$

Это значит, что столб воды, протекающий за 1 сек. через отверстие, имеет длину 153,3 *см*; так как поперечное сечение столба имеет площадь $0{,}5 \times 4 = 2$ *см*^{2}, то объем вытекающей в 1 сек. воды будет $153{,}3 \times 2 = 306{,}6$ *см*^{3}; за 3 сек. вытечет $3 \times 306{,}6 \approx 920$ *см*^{3} жидкости (т. е. около 1 *л*).



Черт. 34.

Но в нашей задаче вследствие того, что отверстие сделано в вертикальной стенке, такое рассуждение не годится, так как скорость истечения жидкости не одинакова в разных местах отверстия. В самом низу скорость будет $\sqrt{2gh_2} \approx 153{,}3$ *см/сек*, но наверху отверстии она будет $\sqrt{2gh_1} = 125{,}2$ *см/сек*, так что количество вытекшей жидкости будет заведомо меньше чем 920 *см*^{3}. Аналогично заключаем, что оно больше чем 751 *см*^{3}. Наша задача состоит в более точном определении количества вытекшей жидкости.

С этой целью мы разобьем высоту отверстия на бесконечно-малые части. Через h мы обозначаем переменную глубину жидкости под уровнем ее. Тогда из отверстия выделяется бесконечно-тонкая полоска шириной 0,5 *см* и высотой dh, которую можно считать расположенной на глубине h под уровнем жидкости. Скорость истечения жидкости через эту полоску равна $\sqrt{2gh}$; площадь полоски равна $0{,}5dh$, и, следовательно, в 1 сек. через нее протекает $0{,}5\sqrt{2gh}\,dh$, а в 3 сек. $1{,}5\sqrt{2gh}\,dh$ *см*^{3} жидкости. Складывая количества жидкости, протекшие через бесконечно-малые полоски отверстия, мы получаем, что искомое количество воды равно

$$\int_8^{12} 1{,}5\sqrt{2gh}\,dh \approx 838 \text{ см}^3.$$

§ 8. *Задача 30.* За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд, площадь дна которого $s = 120$ *см*^{2}, а высота $H = 20$ *см*, выльется через отверстие в дне площадью $s = 0{,}4$ *см*^{2}?

Обозначив искомое время через T, решим задачу, исходя сначала из предположения, что по мере истечения воды такое же количество ее подливается сверху, так что сосуд остается все время полным (первоначально находившуюся в сосуде воду можно, скажем, подкрасить, так что требуется вычислить, через сколько времени в сосуде не останется подкрашенной воды).

В этом предположении задача решается совершенно элементарно. Именно скорость v истечения жидкости остается постоянной и равна $\sqrt{2gH}$,

так что в каждую единицу времени (секунду) через отверстие в дне протекает объем воды, равный

$$sv = s\sqrt{2gH}\ см^3.$$

За время T сек. из сосуда вытечет количество воды

$$svT = s\sqrt{2gH}\ T\ см^3.$$

Это количество должно равняться объему нашего сосуда, т. е. SH. Отсюда для определения T получаем уравнение:

$$s\sqrt{2gH}\ T = SH, \tag{7}$$

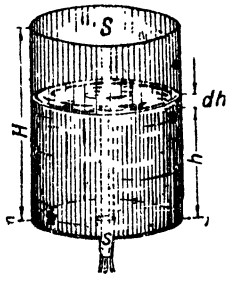
решение которого дает

$$T = \frac{SH}{s\sqrt{2gH}} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{H}{2g}}. \tag{8}$$

Подставляя значения $H = 20$; $g = 980$, находим

$$T = \frac{120}{0{,}4}\sqrt{\frac{20}{2 \cdot 980}} \approx 30{,}3 \text{ сек.}$$

Теперь решим нашу задачу, предполагая, что в сосуде вода не пополняется. Тогда мы не имеем права написать уравнение (7), потому что при составлении его предполагалось постоянство скорости истечения. Теперь эта скорость будет величиной переменной, если рассматривать процесс в целом. Но, если разбить его на бесконечно-малые части, то для каждой из них можно считать скорость истечения неизменной, и это дает возможность написать уравнение, аналогичное уравнению (7), но содержащее бесконечно-малые величины. Именно вместо постоянной высоты H уровня воды в сосуде мы будем иметь переменную высоту; обозначим ее через h. Дифференциал этой величины dh (черт. 35) представит ее бесконечно-малое изменение, т. е. бесконечно-малое понижение уровня воды. Точно так же вместо постоянной величины T мы должны будем ввести в рассмотрение переменную величину t, представляющую время, протекшее от начала истечения до того момента, когда уровень жидкости опустится до высоты h. Дифференциал dt представит бесконечно-малое время, потребное для опускания уровня на бесконечно-малую величину dh.



Черт. 35.

Теперь будем рассуждать так же, как при составлении уравнения (7). При высоте уровня h из отверстия вытекает в 1 сек. количество воды

$$sv = s\sqrt{2gh}.$$

Но так как за секунду скорость успеет измениться значительно, мы должны взять бесконечно-малый промежуток времени dt, в течение

которого скорость истечения можно считать неизменной. За это время из отверстия вытечет количество воды, равное

$$sv\,dt = s\sqrt{2gh}\,dt.$$

Это количество воды должно равняться объему той части сосуда, которая опорожнилась за это время, т. е. объему бесконечно-тонкого слоя воды, площадь основания которого S, а высота dh. Таким образом количество вытекшей воды представится также выражением $S\,dh$.

Отсюда получаем уравнение

$$s\sqrt{2gh}\,dt = S\,dh, \tag{9}$$

которое заменяет теперь уравнение (7).

Из уравнения (9) мы можем найти выражение для бесконечно-малого промежутка времени dt:

$$dt = \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{9'}$$

Искомую же величину T мы можем рассматривать как сумму бесконечно-большого числа бесконечно-малых промежутков времени dt, т. е. как интеграл

$$\int_0^T dt,$$

пределы которого соответствуют начальному и конечному моментам истечения жидкости. Уравнение (9') показывает, что эта сумма должна равняться сумме бесконечно-большого числа слагаемых вида

$$\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

т. е. интегралу

$$\int \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

пределами которого должны служить крайние значения величины h — высоты уровня воды в сосуде. В начале истечения величина h была равна $H = 20$; в конце $H = 0$. Поэтому мы получаем

$$\int_0^T dt = \int_0^H \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{10}$$

При вычислении интеграла в правой части формулы (10) будем помнить, что S, s и g — постоянные величины.

$$T = \frac{S}{s\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{11}$$

Подставляя значения $S=120$; $s=0{,}4$; $H=20$; $g=980$, получаем

$$T=\frac{120}{0{,}4}\sqrt{\frac{2\cdot 20}{980}}\approx 60{,}6 \text{ сек.}$$

Сопоставляя этот результат с предыдущим, мы видим, что истечение продолжается вдвое дольше, чем в том случае, когда вода подливается в сосуд. Сравнение формул (8) и (11) показывает, что это соотношение носит общий характер.

Мы должны теперь обратить внимание читателя на одну важную деталь, которую мы нарочно оставили без рассмотрения, чтобы не усложнять решения задачи. Речь идет о расстановке пределов интеграла в правой части равенства (10).

В этом равенстве за нижний предел величины t мы взяли нуль, т. е. тот момент, когда истечение жидкости началось. В этот момент высота h имела свое крайнее значение $H=20$ *см*. Таким образом в качестве нижнего предела для величины h следовало бы взять не нуль, а $H=20$; аналогично заключаем, что верхним пределом величины h служит нуль. Таким образом казалось бы правильным записать уравнение (10) так:

$$\int_0^T dt=\int_H^0 \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{10'}$$

От перестановки пределов изменился бы лишь знак результата (§ 21, гл. I), и мы получили бы:

$$T=-\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{11'}$$

Но по самому смыслу задачи T не должно быть отрицательной величиной. В чем же причина такой неувязки?

Причина та, что, внеся в предыдущие наши рассуждения одну поправку, касающуюся расстановки пределов, мы не внесли другой поправки, относящейся к знаку подъинтегрального выражения. В самом деле, беря в качестве нижнего предела H, а в качестве верхнего нуль, мы рассматриваем величину h в процессе ее уменьшения. Отсюда следует, что величина dh, т. е. разность двух последовательных значений h, есть величина отрицательная. Поэтому объем бесконечно-тонкого слоя воды представится теперь не в виде

$$S\,dh \text{ (эта величина отрицательна!),}$$

а в виде

$$-S\,dh \text{ (эта величина положительна).}$$

Учтя это обстоятельство, мы вместо уравнения

$$dt=\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

получим уравнение

$$dt=-\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

а отсюда

$$T=\int_H^0 -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}=\int_0^H \frac{S}{s}\frac{dh}{\sqrt{2gh}}=\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Этот результат совпадает с прежде полученным, и мы видим, что для вычисления времени T можно с равным правом взять любую расстановку пределов, но соответственно учесть знак подъинтегрального выражения. Это и понятно, ибо перестановка пределов есть не что иное, как перемена порядка слагаемых в сумме.

§ 9. *Задача 31.* Через сколько времени после начала истечения воды из цилиндрического сосуда (площадь дна $S=120$ *см*^{2}, высота $H=20$ *см*, площадь отверстия в дне $s=0{,}4$ *см*^{2}) сосуд опорожнится наполовину? на три четверти?

Через h, как в предыдущей задаче, обозначим переменную высоту воды в сосуде, а через t время, протекающее от начала истечения до того момента, когда высота становится равной h.

Как и прежде, найдем, что за бесконечно-малое время dt через отверстие проходит количество воды

$$sv\,dt=s\sqrt{2gh}\,dt,$$

а объем опорожнившейся за это время части сосуда равен

$$-S\,dh.$$

Приравнивая эти количества и определяя из этого уравнения dt, находим:

$$dt=-\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{12}$$

Обозначим через t_1 время, протекшее от начала процесса до того момента, когда сосуд опорожнился наполовину. Чтобы вычислить значение t_1, нужно найти сумму всех бесконечно-малых промежутков времени dt от момента $t=0$ до $t=t_1$, т. е. интеграл

$$\int_0^{t_1} dt=t_1.$$

Численное значение величины t найдем, приняв во внимание уравнение (12). Оно показывает, что для вычисления суммы величин dt нужно найти сумму выражений

$$-\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

т. е. интеграл

$$\int -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

Пределами интеграла служат крайние значения величины h. Именно, нижним пределом (соответствующим нижнему пределу $t=0$) служит $H=20$

(так как в начале процесса $h = H$). Верхним пределом служит $\frac{H}{2} = 10$, так как по прошествии времени t_1 высота воды должна уменьшиться вдвое. Итак, из равенства (12), интегрируя его почленно, мы должны получить

$$\int_0^{t_1} dt = \int_H^{\frac{H}{2}} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

Это равенство можно переписать (изменяя знак и переставляя пределы) еще так:

$$\int_0^{t_1} dt = \int_{\frac{H}{2}}^{H} \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

В обоих случаях после выполнения интегрирования мы получаем:

$$t_1 = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{g}}\right);$$

подставляя $H = 20$; $S = 120$; $s = 0{,}4$; $g = 980$, находим:

$$t_1 = \frac{120}{0{,}4}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 20}{980}} - \sqrt{\frac{20}{980}}\right) \approx 18{,}0 \text{ сек.}$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, нужно повторить предшествующие рассуждения с той разницей, что за верхний предел для величины h придется взять не $\frac{H}{2}$, а $\frac{H}{4}$. Обозначая через t_2 время, в течение которого вода опускается до высоты $\frac{H}{4}$, получаем:

$$\int_0^{t_2} dt = \int_H^{\frac{H}{4}} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

$$t_2 = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{2g}}\right) = \frac{1}{2}\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 30{,}3 \text{ сек.}$$

Сравнивая эти результаты с результатом предыдущей задачи, мы видим, что для опорожнения сосуда на три четверти затрачивается только половина времени, потребного для полного опорожнения; остальная половина уходит на истечение оставшейся четвертой части.

Возникает вопрос об установлении зависимости между временем, протекшим с начала процесса, и высотой жидкости, оставшейся в сосуде. Решение его приведет нас и к новым теоретическим положениям исчисления бесконечно-малых.

Итак, мы поставим себе целью вывести общую формулу, связывающую время, протекшее от начала процесса, с высотой жидкости, оставшейся в сосуде.

Сформулируем эту задачу так: через какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд (площадь дна $S = 120$ *см*^{2}; высота $H = 20$ *см*), опустится до высоты H_1 (считая от дна сосуда). Искомое время обозначим через T_1.

Через h попрежнему будем обозначать переменную высоту жидкости, через t — время, протекающее от начала процесса до момента, когда высота равна h. Подчеркнем еще раз, что h и t — переменные величины. Величины же H_1 и T_1 рассматриваем пока как постоянные, из которых первая задана (например в предыдущей задаче было $H_1 = \frac{H}{2} = 10$ *см*), а другая ищется. Рассуждение, аналогичное приведенному в предыдущей задаче, дает

$$dt = -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{12}$$

Интегрируя почленно это уравнение, мы должны пределы выбирать так: в начале процесса $t = 0$, $h = H$; эти величины возьмем за нижние пределы соответствующих интегралов. В конце изучаемого процесса $t = T_1$, $h = H_1$; эти величины будут верхними пределами.

Итак, имеем:

$$\int_0^{T_1} dt = \int_H^{H_1} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{13}$$

Интеграция дает

$$T_1 = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H_1}{g}}\right). \tag{14}$$

Эта формула дает общее решение нашей задачи. Из нее как частные случаи $\left(H_1 = 0;\ H_1 = \frac{H}{2};\ H_1 = \frac{H}{4}\right)$ получаются формулы двух предыдущих задач.

Вдумаемся теперь глубже в ее смысл. Величины S, s, H и g являются в ней величинами постоянными по самому условию задачи. Конечно, можно придавать им различные значения и этим сделать их переменными, но это означало бы изменение условий опыта, в котором предполагаются один и тот же сосуд, одно и то же отверстие в нем и одно и то же географическое положение (от которого зависит величина g).

Совсем иначе обстоит дело с величинами T_1 и H_1. Мы предположили их постоянными, т. е. зафиксировали ту высоту, до которой должна опуститься вода в сосуде, а тем самым и время, протекающее от начала процесса. Но ведь это фиксирование носит совершенно искусственный характер. Оно совершенно не связано с протеканием процесса, изучаемого нами. Более того, формула

$$T_1 = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H_1}{g}}\right)$$

для того и была выведена, чтобы давать величине H_1 различные значения ($H_1 = 20$; $H_1 = 10$; $H_1 = 5$ и т. д.), т. е. чтобы в конце концов рассматривать ее как переменную величину.

§ 10. Отсюда мы должны прежде всего сделать такой вывод: до сих пор мы смотрели на пределы интеграла как на постоянные величины, так что, например, в интеграле

$$\int_H^{H_1} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

величины H и H_1 мы считали некоторыми постоянными числами. Теперь мы видим, что на одно из них (или даже на оба, смотря по характеру вопроса) мы имеем право смотреть, как на переменную величину. От этого конечно совершенно не меняются известные нам правила интегрирования. Меняется только смысл тех величин, которые служат пределами; для определенности мы будем в дальнейшем считать, что нижний предел есть величина постоянная, верхний же предел — переменная величина.

Посмотрим теперь, какая внутренняя связь существует между верхним пределом, рассматриваемым как переменная величина, и переменным интеграции. Для большей конкретности возьмем интеграл

$$\int_H^{H_1} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}},$$

дающий время, протекающее до достижения водой в сосуде высоты H_1. Эту высоту мы, согласно ходу процесса, должны считать переменной величиной. Но под знаком интеграла мы имеем еще величину h и ее дифференциал. Она тоже представляет переменную высоту воды в сосуде.

Возникает вопрос, в чем же разница между H_1 и h? Различие это проявляется в различии функций, выполняемых этими величинами в процессе интегрирования. Величина H_1 меняется, и в каждый момент ее изменения между ней и постоянной величиной $H = 20$ лежит бесконечное множество значений. Переменная h пробегает все эти значения. С уменьшением H_1 величине h приходится пробегать все большее число этих значений. Таким образом процесс изменения величины h по отношению к процессу изменения H_1 является вторичным, например: H_1 получило значение 19, h_1 пробегает значения от 20 до 19; H_1 получило значение 18, h_1 пробегает значения от 20 до 18 и т. д.

Мы видим, что все значения, пробегаемые h в данный момент, прежде принимались величиной H_1 (тогда h изменялось в более скромных пределах). С другой стороны, в каждый данный момент H_1 служит последним значением величины h.

Такова связь между переменными h и H_1. Их различие проявляется только в процессе интеграции. Вне этого процесса они имеют один и тот же смысл и могут вполне замещать друг друга. Все сказанное выше относительно величины h и H_1 можно повторить и по отношению к величинам t и T_1, так что вместо

$$T_1 = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H_1}{g}}\right) \tag{14}$$

мы вправе, совершенно не меняя смысла принятых обозначений, написать равенство

$$t = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right), \tag{14'}$$

которое даст нам время опускания жидкости до переменной высоты h?

Ведь поскольку закончен процесс интегрирования, различение H_1 от h теряет всякий смысл, ибо обе эти величины дают высоту воды в сосуде; обе они рассматриваются как переменные величины; точно также теряет смысл различение величин t и T_1.

Более того, мы должны отдать выражению (14′) предпочтение хотя бы по следующей причине: при решении нашей задачи мы исходили из закона изменения скорости истечения воды, выражаемого формулой

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{6}$$

Сопоставим ее с формулой (14′). Та дает выражение времени истечения через переменную высоту h, эта - -выражение скорости истечения через ту же величину. Поэтому мы могли бы, например, вычислить скорость истечения, зная время, протекшее от начала его. Для этого достаточно в формулу (6) подставить выражение h через t, находимое из уравнения (14′). Мы получим (14)

$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t,$$

и, подставляя в (6),

$$v = \sqrt{2gH} - \frac{s}{S}\,gt.$$

Так как $\sqrt{2gH}$ есть величина скорости в начальный момент (когда $h = H$), то, обозначая ее через v_0, мы получаем замечательный результат:

$$v = v_0 - \frac{s}{S}\,gt,$$

физический смысл которого такой: скорость истечения замедляется равномерно, аналогично тому, как замедляется скорость тела, брошенного вверх.

Этот результат мы получили благодаря исключению величины h из уравнений (6) и (14′). Но, если бы вместо последней мы имели формулу (14), в которую вместо h входит H_1, то возможность исключения

переменной высоты из уравнений (14′) и (6) не вытекала бы из внешнего вида формулы.

Таким образом мы можем сделать такой вывод: переменный верхний предел лишь в процессе интегрирования выполняет роль, отличную от роли переменной интеграции. Вне этого процесса, в частности по окончании его, не только можно, но и полезно отождествить его с переменной интеграции.

Отсюда естественно вытекает идея замены переменного верхнего предела переменной интеграции еще до окончания процесса интегрирования.

Именно, вместо того чтобы писать

$$t=\int_{H}^{H_1}-\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

и уже после вычисления интеграла заменять H_1 на h, можно написать

$$t=\int_{H}^{h}-\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

и, вычисляя по обычным правилам, в качестве верхнего предела брать переменную интеграции h. Таким образом получим

$$T_1=\frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Такая подмена верхних пределов переменными интеграции будет вполне законной, если мы не будем упускать из виду сделанные выше замечания о взаимной связи переменного верхнего предела и переменной интеграции.

§ 11. Для лучшего уяснения процесса интегрирования при переменном верхнем пределе рассмотрим еще ряд задач.

Пусть нам известна зависимость между длиной окружности l и ее радиусом r:

$$l=2\pi r, \tag{15}$$

а требуется найти зависимость между площадью круга s и его радиусом r.

Будем считать r и s переменными величинами и составим уравнение, связывающее диференциалы этих величин.

Черт. 36 показывает, что, при увеличении радиуса r на бесконечно-малую величину dr, площадь круга s возрастает на бесконечно-малую величину площади заштрихованного колечка. Эта последняя представляет, следовательно, диференциал ds. Распрямив колечко ds, мы получим бесконечно-тонкую полоску, которую можно считать прямоугольником длиной l и шириной dr.

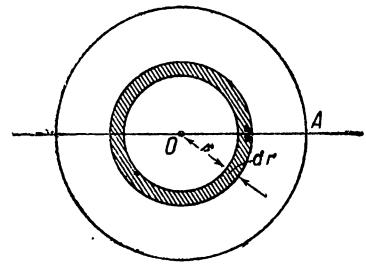
Отсюда получаем уравнение, связывающее ds и dr.

$$ds = l\,dr,$$

или, в силу формулы (15),

$$ds = 2\pi r\,dr. \qquad (16)$$

Чтобы получить теперь уравнение, связывающее s и r, мы должны почленно проинтегрировать уравнение (16). При этом величину r мы будем считать пробегающей все значения, начиная от нуля. Следовательно, величина площади круга s начнет свое изменение также с нуля. Значит, нижними пределами интегрирования в обеих частях равенства будут нули. Верхние пределы будем считать переменными, и для их обозначения, согласно сказанному в предыдущем параграфе, воспользуемся теми же буквами s и r, которые обозначают переменные интеграции. Итак, интегрируя формулу (16), получаем:



Черт. 36.

$$\int_0^s ds = \int_0^r 2\pi r\,dr.$$

Выполняя интеграцию, получаем:

$$s = \pi r^2. \qquad (17)$$

Если бы мы для радиуса OA окружности, ограничивающей круг, вели обозначение R, то для площади круга получили бы величину

$$\int_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2.$$

Здесь верхний предел строго различался бы от переменной интеграции, но зато площадь круга выражалась бы не через ту же величину r, через которую была выражена длина окружности.

Рассмотрим теперь такую задачу: скорость v, приобретенная телом через время t после начала движения, выражается формулой

$$v = gt$$

(равномерно-ускоренное движение).

Найти выражение пути s, пройденного телом за время t. Составим сначала уравнение между диференциалами ds и dt (ds — бесконечно-малый участок пути, dt — бесконечно-малое время).

Так как скорость v на бесконечно-малом участке можно считать неизменной, то между ds и dt существует зависимость:

$$ds = v\,dt,$$

или

$$ds = gt\,dt.$$

Интегрируя это уравнение почленно, будем помнить, что в начале движения величины s и t равны нулю. Это определяет величины нижних пределов. Верхние пределы переменны; для обозначения их используем те же обозначения s и t.

$$\int_0^s ds = \int_0^t gt\,dt.$$

Выполняя интеграцию, получаем:

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Благодаря принятым обозначениям, мы получили выражение пути s через ту же переменную t, через которую выражалась скорость v. Если бы нужно было найти зависимость между путем, пройденным телом, и приобретенной им скоростью, достаточно было бы из уравнения

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

определить t и подставить в уравнение

$$v = gt.$$

Мы получим

$$v = \sqrt{2gs}.$$

При других обозначениях верхних пределов возможность исключения переменного времени не была бы очевидной из формы записи.

В качестве последнего примера найдем зависимость между работой A, произведенной силой F отталкивания электрических зарядов e_1 и e_2, и расстоянием r между зарядами (задача 28). Начальное расстояние зарядов друг от друга обозначим через R. Составим уравнение, связывающее dA и dr.

Так как на бесконечно-малом участке dr силу отталкивания можно считать постоянной, то

$$dA = F\,dr,$$

или

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2}\,dr.$$

Интегрируя почленно, примем во внимание, что в начале процесса, когда работа A была равна нулю, расстояние r равнялось R. Поэтому нижними пределами интегралов будут нуль (для A) и R (для r):

$$\int_0^A dA = \int_R^r \frac{e_1 e_2}{r^2}\,dr.$$

Интеграция дает

$$A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

Это и есть искомая зависимость между переменными A и r. В частности, когда $r = \infty$, величина A равна

$$A = \frac{e_1 e_2}{R}.$$

Таков полный запас работы нашей системы зарядов (потенциал).

§ 12. Во всех разобранных нами задачах мы получали уравнение между переменными величинами, исходя из уравнения, связывающего их дифференциалы. Так, уравнение $s = \pi r^2$ было получено из уравнения $ds = 2\pi r\, dr$; уравнение $s = \frac{1}{2} g t^2$ из уравнения $ds = gt\, dt$ и т. д.

Уравнение, связывающее дифференциалы переменных, называют для краткости дифференциальным уравнением. Решить дифференциальное уравнение — значит найти уравнение между теми переменными, дифференциалы которых входят в дифференциальное уравнение.

Чтобы решить дифференциальное уравнение, его нужно „проинтегрировать", т. е. вычислить интегралы его правой и левой частей. Но для того, чтобы вычисление это могло быть выполнено, нужно, чтобы в каждую из двух частей дифференциального уравнения входила только одна переменная величина. Так, уравнение $ds = 2\pi r\, dr$ можно представить в различных формах, например в форме $dr = \frac{ds}{2\pi r}$.

В этой форме почленная интеграция дифференциального уравнения не даст нам никаких результатов. Конечно, мы имеем полное право написать:

$$\int_0^r dr = \int_0^s \frac{ds}{2\pi r},$$

но для вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства, нужно в подъинтегральном выражении переменную r заменить выражением ее через s. Для этого необходимо знать зависимость между r и s, а она-то и разыскивается нами. Вот почему такая интеграция не решает задачи.

Если в каждую часть дифференциального уравнения входит только одна переменная, то говорят, что переменные в этом уравнении „разделены". Если переменные в дифференциальном уравнении не разделены, то, прежде чем интегрировать это уравнение, нужно „разделить переменные", т. е. представить уравнение в таком виде, чтобы в каждую часть его входила только одна переменная.

С разделением переменных мы уже имели дело в задаче об истечении жидкости из цилиндрического сосуда (§ 8). Там мы получили дифференциальное уравнение

$$s\sqrt{2gh}\,dt = -S\,dh$$

(S — площадь дна судна; s — площадь отверстия; h — переменная высота воды; t — время, протекшее от начала истечения). В начале процесса величины t и h равны 0 и H. Поэтому мы имели бы право написать:

$$\int_0^t s\sqrt{2gh}\,dt = \int_H^h S\,dh.$$

Но тогда для вычисления интеграла в левой части равенства мы должны были бы знать выражение h через t, т. е. мы должны были бы знать, как изменяется во времени высота воды в сосуде. Но решение этого вопроса и является нашей целью. Поэтому мы нисколько не продвигаемся вперед.

Иное дело будет, если мы в уравнении

$$s\sqrt{2gh}\,dt = -S\,dh$$

предварительно разделим переменные, например представим его в форме

$$dt = -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, мы получим

$$\int_0^t dt = -\int_H^h \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

и, выполняя интеграцию,

$$t = \frac{S}{s}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

§ 13. До сих пор мы брали интегралы, у которых переменным был верхний предел, нижний же предел был постоянной величиной. Но ничто не мешает рассматривать и такие интегралы, у которых переменным является нижний предел, верхний же предел — постоянная величина. Это ясно хотя бы из того, что всегда можно переставить пределы интеграла, меняя знак подъинтегрального выражения [1]).

Так, только что рассмотренный интеграл

$$\int_H^h -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

[1]) Если из двух пределов интеграла один рассматривается как переменная величина, а другой как постоянная, то обычно пишут интеграл так, чтобы переменный предел был верхним пределом, а постоянный — нижним.

можно представить в виде

$$\int_h^H \frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

Здесь переменная высота воды в сосуде h фигурирует в качестве нижнего предела интеграла. Верхним пределом является постоянная высота сосуда H.

Разумеется, можно оба предела считать переменными, но в таком случае отождествление пределов и переменной интеграции теряет свой смысл.

Так, например, время, в течение которого вода в цилиндрическом сосуде опускается от уровня H до уровня H_1, представляется интегралом

$$\int_H^{H_1} -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

Мы можем считать переменными обе величины H и H_1, т. е. менять в опыте как начальную, так и конечную высоту воды в сосуде. Но обозначать о б е эти величины через h мы не можем, если хотим, чтобы эти высоты были р а з л и ч н ы м и, т. е. чтобы некоторое количество воды действительно вылилось из сосуда.

С формальной стороны интеграл

$$\int_h^h -\frac{S\,dh}{s\sqrt{2gh}}$$

(как и всякий интеграл с равными пределами) дает величину нуль. Физический смысл этого результата: если после начала истечения не прошло еще никакого промежутка времени, то высота воды не успела измениться.

В заключение мы даем примеры для упражнения в вычислении интегралов с переменным пределом.

Упражнения.

1) $\int_1^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$.

2) $\int_x^6 x\,dx = 18 - \frac{x^2}{2}$.

3) $\int_0^t 4t^3\,dt = t^4$.

4) $\int_0^t at\,dt = \frac{1}{2}at^2$.

5) $\int_0^h \sqrt{h}\,dh = \frac{2}{3}\sqrt{h^3}$.

6) $\int_h^0 \frac{dh}{\sqrt[3]{h}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{h^2}$.

7) $\int_h^\infty \frac{dh}{h^2} = \frac{1}{h}$.

8) $\int_h^\infty \frac{dh}{h\sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{h}}$.

9) $\int_3^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{s} - 4$.

10) $\int_3^t \left(\frac{1}{t^2} - 2\right) dt = 6\frac{1}{3} - \frac{1}{t} - 2t$.

11) $\int_a^t dt = t - a$.

12) $\int_a^t at^3\, dt = \frac{at^4 - a^5}{4}$.

§ 14. *Задача 32.* Вода наполняет коническую воронку высотой $H = 20$ *см*. Радиус верхнего отверстия $r_1 = 12$ *см*; нижнее отверстие, через которое вода вытекает из воронки, имеет радиус $r_2 = 0{,}3$ *см*.

В течение какого времени высота воды в воронке понизится до уровня 15, 10, 5 *см*?

Через сколько времени воронка опорожнится?

Пусть через t сек. высота воды в воронке h *см*. Через dt сек. после этого уровень понижается на dh *см*. Обозначая через r радиус сечения конуса (переменный), мы можем сказать, что из сосуда вытек объем воды, равный (в $см^3$)

$$-\pi r^2\, dh \tag{18}$$

(знак минус по тем же соображениям, что и в задаче 30).

С другой стороны, через отверстие площадью πr_2^2 вода вытекала со скоростью

$$v = \sqrt{2gh},$$

так что вытекшая за промежуток времени dt вода имеет объем

$$\pi r_2^2 \sqrt{2gh}\, dt. \tag{19}$$

Приравнивая величины (18) и (19), мы получаем диференциальное уравнение

$$-\pi r^2\, dh = \pi r_2^2 \sqrt{2gh}\, dt.$$

В нем переменные не разделены, ибо в правой части мы имеем, наряду с переменной h, диференциал dt переменной t. Разделяя переменные, мы получаем:

$$dt = -\frac{r^2\, dh}{r_2^2 \sqrt{2gh}}. \tag{20}$$

Теперь в правую часть входят только одна переменная величина h и ее диференциал, так как переменная величина r может быть выражена через переменную h. Чтобы найти это выражение r через h, мы можем для упрощения последующих выкладок считать, что H и h представляют собой не высоты Oc и Nc усеченных конусов, а высоты OC и NC конусов, полученных от мысленного продолжения поверхности воронки

за края отверстия. Легко видеть, что ошибка, совершаемая при таком определении высоты, составляет всего 0,5 *см* (длина cC).

Зависимость между h и r дается пропорцией

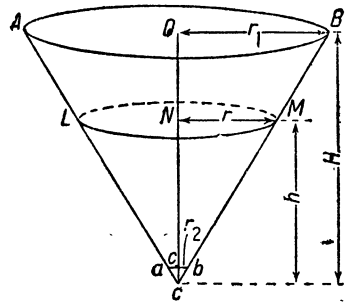
$$\frac{r}{h} = \frac{r_1}{H},$$

из которой

$$r = \frac{r_1}{H} h. \tag{21}$$

Подставляя это выражение величины r в уравнение (20), мы получаем

$$dt = -\frac{r_1^2}{r_2^2 H^2} \frac{h^2\, dh}{\sqrt{2gh}}.$$



Черт. 37.

Интегрируем, беря за нижние пределы t и h их значения в начале процесса:

$$\int_0^t dt = -\frac{r_1^2}{r_2^2 H^2 \sqrt{2g}} \int_H^h h\sqrt{h}\, dh.$$

Выполняя интеграцию, получаем зависимость между переменными h и t:

$$t = \frac{2_1^2}{5r_2^2 H^2 \sqrt{2g}} (H^2\sqrt{H} - h^2\sqrt{h}).$$

При данных числовых значениях r_1, r_2 и H ($g = 980$ *см/сек*^{2}), мы получаем:

$$t = 64{,}65 - 0{,}036\, h^{\frac{5}{2}}.$$

Округляя результаты, мы получаем следующий ответ на вопросы задачи:

h *см*	15	10	5	0
t *сек.*	33,2	53,3	62,6	64,6

Воронка опорожнится через 64,6 сек.

Общий вид выражения, дающего время опорожнения воронки, будет:

$$\frac{2r_1^2}{5r_2^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}. \tag{22}$$

§ 15. *Задача 33.* В дне котла, имеющего форму полушария радиуса $R = 43$ *см*, образовалась пробоина площадью $s = 0{,}2$ *см*^{2}. Через сколько времени вода, наполняющая котел, вытечет из него?

Через h обозначим переменную высоту воды в котле; через t — время, протекшее с момента образования пробоины, через r — радиус горизонтального сечения полушария на высоте h над дном котла. Диференциальное уравнение, связывающее dt и dh, будет (задача 32)

$$-\pi r^2\,dh = s\sqrt{2gh}\,dt.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$dt = -\frac{\pi r^2\,dh}{s\sqrt{2gh}}. \tag{23}$$

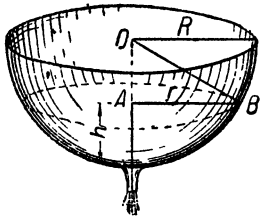
В правую часть уравнения фактически входит только одна переменная h, ибо переменная r может быть через нее выражена.

Именно из треугольника OAB (черт. 38) находим:

$$r^2 + (R-h)^2 = R^2,$$

откуда

$$r^2 = 2Rh - h^2.$$



Черт. 38.

Подставляя это значение в уравнение (23), получаем:

$$dt = -\frac{\pi(2Rh-h^2)\,dh}{s\sqrt{2gh}}.$$

В начале процесса $t=0$ высота воды в котле была равна радиусу R полушария. Поэтому, интегрируя, мы должны взять в качестве нижних пределов 0 (для t) и R (для h). Мы получим

$$t = \int_R^h -\frac{\pi(2Rh-h^2)\,dh}{s\sqrt{2gh}} = \frac{\pi}{s\sqrt{2g}}\int_h^R (2Rh^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})\,dh.$$

Интеграция дает:

$$t = \frac{\pi}{s\sqrt{2g}}\left(2R\,\frac{R^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{R^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right);$$

$$t = \frac{2\pi}{15s\sqrt{2g}}\,(7R^2\sqrt{R} - 10Rh\sqrt{h} + 3h^2\sqrt{h}).$$

Такова зависимость между t и h. Чтобы ответить на вопрос задачи, мы должны в это уравнение подставить $h=0$. Мы получим

$$t = \frac{14\pi R^2}{15s}\sqrt{\frac{R}{2g}}.$$

Подставляя значения $R=43$; $s=0{,}2$; $g=980$; $\pi=3{,}14$, найдем, что вода вытечет из котла через 1 час 6 мин. 53 сек. после образования пробоины.

§ 16. Для решения дальнейших задач необходимо предпослать следующие сведения из физики.

Если объем газа v_0 подвергается расширению или сжатию, то давление его изменяется. Если при этом температура газа не изменяется, то между переменными величинами объема и давления существует зависимость (закон Бойля-Мариотта):

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} \tag{24}$$

(v — переменный объем газа; p — переменное давление газа на единицу поверхности сосуда, его заключающего; p_0 — начальное давление на единицу поверхности).

Существенно отметить, что закон Бойля-Мариотта верен (приближенно) лишь в случае постоянства температуры газа. В этом случае мы имеем дело с так называемым изотермическим процессом расширения или сжатия газа. Для того чтобы осуществить на опыте изотермическое расширение (или сжатие), необходимо газ подогревать (или охлаждать), потому что без этого он, расширяясь, охлаждается (или, сжимаясь, нагревается).

Если же извне тепло не сообщается газу и не отнимается от него (например газ помещен в сосуде, сделанном из вещества, не проводящего тепла), то температура газа не остается постоянной, и зависимость между давлением и объемом не представляется уже законом Бойля-Мариотта. В этом случае процесс носит название адиабатного, и для него связь между p и v выражается так называемым уравнением Пуассона, имеющим вид

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^k. \tag{25}$$

В этом уравнении k есть постоянная для данного газа величина. Для всех газов она больше единицы. Для воздуха ее можно принять равной

$$k = 1{,}4 \text{ (точнее } k = 1{,}41).$$

Теперь мы можем решить следующую задачу.

Задача 34. В цилиндрическом сосуде объема $v_0 = 0{,}1$ $м^3$ заключен атмосферный воздух, который подвергается сжатию вдвиганием поршня. Какую работу необходимо затратить, чтобы сжать воздух в сосуде до объема 0,03; 0,02; 0,01 $м^3$? Атмосферное давление будем считать равным 10 330 $кг/м^2$.

На первый взгляд может показаться, что в этой задаче недостаточно данных для решения, именно неизвестны в отдельности высота H цилиндра и площадь S его основания. Мы увидим, однако, что искомый результат не зависит от формы сосуда.

Обозначим через h переменное расстояние поршня до дна цилиндра и через A работу, совершаемую при вдвигании поршня, и составим уравнение, связывающее дифференциалы этих переменных.

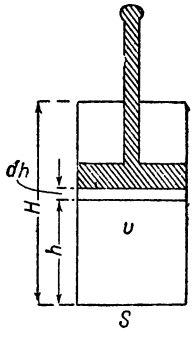
Чтобы вычислить работу dA, затрачиваемую на бесконечно-малом участке пути поршня, мы должны помножить давление, испытываемое поршнем, на пройденный им под этим давлением бесконечно-малый путь. Последний равен по абсолютному значению величине dh, но так как

при сжатии величина h уменьшается и, значит, dh есть отрицательная величина, то путь, пройденный поршнем, равен $-dh$.

Что касается давления сжатого воздуха на поршень, то оно получается умножением величины p (давление на единицу поверхности) на площадь S поршня. Таким образом мы получаем диференциальное уравнение

$$dA = -pS\,dh. \tag{26}$$

Дальнейшее решение значительно упрощается, если мы обратим внимание на то, что (черт. 39) произведение $S\,dh$ равно бесконечно-малому изменению объема v сжатого воздуха, т. е.



Черт. 39.

$$S\,dh = dv.$$

Вследствие этого уравнению (26) можно придать более простой вид:

$$dA = -p\,dv. \tag{27}$$

Остается выразить переменную p через переменную v. Из уравнения Пуассона мы получаем

$$p = \frac{p_0 v_0^k}{v^k}$$

и окончательно получаем диференциальное уравнение

$$dA = -\frac{p_0 v_0^k}{v^k}\,dv. \tag{28}$$

Интегрируя это уравнение, примем во внимание начальные условия, ($A = 0$, $v = v_0$).

Мы получаем

$$A = -p_0 v_0^k \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^k} = p_0 v_0^k \int_{v}^{v_0} \frac{dv}{v^k}.$$

После выполнения интеграции получим уравнение

$$A = \frac{p_0 v_0^k}{k-1}\left(\frac{1}{v^{k-1}} - \frac{1}{v_0^{k-1}}\right),$$

которое можно еще представить в виде

$$A = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1} - 1\right]. \tag{29}$$

В нашей задаче $p_0 = 10\,330$ *кг/м*^{2}; $v_0 = 0{,}1$ *м*^{3}; $k = 1{,}4$, и потому уравнение (29) принимает вид:

$$A = \frac{10\,330 \cdot 0{,}1}{0{,}4}\left[\left(\frac{0{,}1}{v}\right)^{0{,}4} - 1\right].$$

Подставляя сюда $v = 0{,}03;\ 0{,}02;\ 0{,}01$, получаем следующие результаты:

v м³	0,03	0,02	0,01
A кгм	1 598	2 334	3 905

Задача 35. В цилиндрическом сосуде с поршнем заключен объем $v_0 = 0{,}1$ м³ атмосферного воздуха. Цилиндр помещен в не проводящую тепло среду меньшей плотности (например под колпак воздушного насоса). Воздух под поршнем расширяется и выталкивает поршень. Вычислить работу, совершаемую воздухом при расширении до объема 0,2 м³.

Может ли безгранично увеличиваться эта работа при неограниченном расширении воздуха (представим себе, что поршень очень большой длины помещен в пустоте)?

Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, мы составим дифференциальное уравнение

$$dA = \frac{p_0 v_0^k}{v^k}\, dv, \tag{28'}$$

которое отличается от уравнения (28) только знаком (величина dh теперь, когда поршень выдвигается, положительна).

После интеграции получаем

$$A = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1}\right]. \tag{29'}$$

Для нашей задачи

$$A = \frac{10\,330 \cdot 0{,}1}{0{,}4}\left[1 - \left(\frac{0{,}1}{v}\right)^{0{,}4}\right].$$

Подставляя сюда $v = 0{,}2$, находим:

$$A \approx 625 \text{ кгм}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос, положим в формуле (29′) $v = \infty$. Величина $\frac{v_0}{v}$ будет равна нулю, а так как k больше единицы и, следовательно, $k - 1$ положительное число, то и величина $\left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1}$ равна нулю. Поэтому, обозначая через A_∞ работу, совершаемую при бесконечно-большом расширении воздуха, мы получаем:

$$A_\infty = \frac{p_0 v_0}{k-1}.$$

В нашей задаче

$$A_\infty \approx 2582{,}5 \text{ кгм}.$$

Ни при каком расширении воздуха работа, им производимая, не может превзойти этой величины. При очень значительном расширении работа практически равна этой величине. Величина $\frac{p_0 v_0}{k-1}$ представляет таким образом запас работы, которым обладает объем v_0 атмосферного воздуха.

Глава III.

Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$

§ 1. В предшествующих главах мы показали, что формула

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \tag{1}$$

может быть (с известными ограничениями, относящимися к пределам интегрирования) применена к любому значению показателя степени k за единственным исключением, когда

$$k = -1.$$

В этом случае, как было показано (§ 2 гл. II), формула (1) теряет всякий смысл.

Мы постараемся теперь найти такую формулу, которая давала бы возможность вычислять интеграл

$$\int_a^b x^k dx$$

и в том исключительном случае, когда $k = -1$; перед нами, следовательно, стоит задача вычисления интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{x}. \tag{2}$$

В решении этой задачи мы пойдем тем же путем, который в § 19 гл. I привел нас к формуле (1); вместе с этим мы увидим, в каком пункте этого пути мы должны будем остановиться и свернуть на другую дорогу, другими словами, мы увидим, в чем коренится причина негодности формулы (1) в случае $k = -1$.

Числа a и b мы для начала будем считать положительными. Тогда мы можем взять $n-1$ промежуточных чисел $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ таким образом, чтобы ряд чисел

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, \quad x_n = b$$

образовал геометрическую прогрессию.

Как и в § 8 гл. I, мы можем написать ряд равенств

$$x = a;\ x_1 = ah;\ x_2 = ah^2 \ldots\ x_{n-1} = ah^{n-1};\ x_n = ah^n = b. \quad (3)$$

Далее мы должны, как в § 17 гл. I, составить сумму

$$S_n = \frac{x_1 - x_0}{x_0} + \frac{x_2 - x_1}{x_1} + \ldots + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}. \quad (4)$$

Подставляя в формулу (4) значения x_1, x_2, $x_3 \ldots$ из уравнения (3), мы получаем:

$$S_n = \frac{ah - a}{a} + \frac{ah^2 - ah}{ah} + \frac{ah^3 - ah^2}{ah^2} + \ldots + \frac{ah^n - ah^{n-1}}{ah^{n-1}}.$$

Сокращая каждую дробь, имеем:

$$S_n = (h-1) + (h-1) + (h-1) + \ldots + (h-1). \quad (5)$$

Мы видим, что все слагаемые равны между собой, число их равно n, поэтому

$$S_n = n(h-1). \quad (6)$$

Таково значение суммы S_n для любого значения n.

Обратим внимание читателя на то, что при переходе от формулы (5) к формуле (6) мы сошли с того пути, по которому нас вел общий метод. Дело в том, что в общем случае S_n представляет сумму геометрической прогрессии со знаменателем h^{k+1} (§ 19 гл. I). В нашем случае $k = -1$, и потому знаменатель прогрессии равен $h^0 = 1$. Иными словами, все члены прогрессии должны быть между собой равны.

Это, действительно, и имеет место в формуле (5).

Но в случае, когда знаменатель прогрессии равен единице, общая формула суммы членов геометрической прогрессии теряет свою силу, точнее говоря, она приводит к неопределенности [1]). Вот почему и общая формула $\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$, при выводе которой мы суммировали прогрессию по общей формуле, дает для случая $k = -1$ неопределенное выражение $\frac{0}{0}$.

§ 2. Для вычисления интеграла $\int_a^b \frac{dx}{x}$ мы должны вычислить значение выражения

$$S_n = n(h-1) \quad (6)$$

---

1) Если в геометрической прогрессии u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ все члены имеют одну и ту же величину c и, следовательно, знаменатель прогрессии $h = 1$, то формула

$$S_n = \frac{u_n h - u_1}{h-1} \text{ дает } S_n = \frac{c \cdot 1 - c}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

В этом случае сумма членов прогрессии находится простым умножением величины c на число членов n.

при бесконечно-большом значении числа n, точнее говоря, найти предел, к которому это выражение стремится, когда n безгранично увеличивается. Здесь прежде всего необходимо предостеречь от поспешного и ошибочного заключения, которое может быть сделано, если, положив $n=\infty$, мы скажем, что и выражение $n(h-1)$ есть бесконечно-большое число. Дело в том, что величина h с ростом n приближается к единице (§ 8 гл. I), и, следовательно, $h-1$ приближается к нулю. При бесконечно-большом n величина $h-1$ бесконечно-мала, так что выражение (6) представляет сумму бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых. Значение этой суммы мы и должны отыскать.

Для этого мы прежде всего преобразуем выражение $n(h-1)$ так, чтобы одна из величин n и h выразилась через другую. Удобнее всего выразить n через h.

Последнее из равенств (3) $ah^n=b$ дает

$$h^n=\frac{b}{a}. \tag{7}$$

Логарифмируем равенство (7):

$$n\log h=\log\frac{b}{a}. \tag{8}$$

В качестве основания логарифмов может быть взято любое число, но мы нарочно не фиксируем определенного основания с тем, чтобы выбрать его позднее наиболее целесообразно. Поэтому мы и пишем символ log, а не lg, который сохраняем для обозначения десятичного логарифма.

Из равенства (8) находим выражение n через h:

$$n=\frac{\log\frac{b}{a}}{\log h}. \tag{9}$$

Это выражение подставим в формулу (6), и находим

$$S_n=\frac{\operatorname{Log}\frac{b}{a}}{\operatorname{Log}h}(h-1). \tag{10}$$

Чтобы найти предел, к которому стремится выражение (10) при возрастании числа n, мы должны давать числу h значения, приближающиеся к единице, и определить то число, к которому при этом приближается дробь $\frac{h-1}{\log h}$. Этот процесс вычисления станет, однако, несколько более наглядным, если мы введем новое обозначение. Именно, так как число $h-1$ при h, близком к единице, есть очень маленькая дробь, то мы обозначим величину $h-1$ через $\frac{1}{N}$; число N очевидно будет очень большим и при приближении h к единице будет неограниченно возрастать.

Из равенства

$$h-1=\frac{1}{N}$$

находим

$$h=1+\frac{1}{N},$$

и формула (10) перепишется теперь так:

$$S_n=\frac{\log\frac{b}{a}}{N\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}, \tag{11}$$

или, после простого преобразования знаменателя:

$$S_n=\frac{\log\frac{b}{a}}{\log\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}. \tag{12}$$

Теперь все сводится к тому, чтобы найти предел, к которому стремится выражение

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \tag{13}$$

при неограниченно возрастающем числе N.

Здесь вновь нужно предостеречь читателя от ошибочных заключений. При неограниченном возрастании N в выражении (13) неограниченно увеличивается показатель степени, но отсюда не следует, что выражение (13) само неограниченно растет; точно так же основание $1+\frac{1}{N}$ стремится к единице, но из этого не следует, что выражение (13) стремится к единице (хотя единица в любой конечной степени дает единицу). Дело в том, что здесь одновременно происходят приближение основания к единице и возрастание показателя степени. Что при этом делается с выражением (13) — нуждается в более пристальном изучении. Не исключена заранее возможность того, что число $1+\frac{1}{N}$ стремится к единице так быстро, что не помогает и возвышение в растущую степень N; не исключена и возможность, что оно стремится так медленно, что не может удержать роста выражения (13) до беспредельности. Но возможен и третий случай, случай компромисса между стремлением к единице и беспредельным возрастанием. В этом случае выражение (13) будет стремиться к некоторому конечному числу (большему единицы). Мы сейчас увидим, что именно этот случай и имеет место на самом деле.

§ 3. Будем давать N значения 1, 2, 3... и т. д. и посмотрим, какое значение получает число

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N.$$

При $N=1$ имеем $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2,$

„ $N=2$ „ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2\frac{1}{4}=2{,}25,$

„ $N=3$ „ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2\frac{10}{27}=2{,}37,$

„ $N=4$ „ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2\frac{113}{256}=2{,}44.$

„ $N=5$ „ $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=2\frac{1526}{3125}=2{,}48.$

Как мы видим, число $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ все время растет при увеличении N. Таким образом к единице оно во всяком случае не стремится. Растет ли оно безгранично? Пока еще трудно сказать, да или нет. Во всяком случае мы видим, что рост числа $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ замедляется. Более того, до сих пор увеличение не касается цифры целых чисел; она остается равной 2. Спрашивается, будет ли достигнуто или превзойдено когда-нибудь, например, число 3? Проследим далее рост числа $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, причем, так как непосредственные вычисления становятся затруднительными, прибегнем к помощи таблицы логарифмов[1]).

$N=6\lg\left(1+\frac{1}{6}\right)^6=6\lg\frac{7}{6}=0{,}4017\ldots\quad\left(1+\frac{1}{6}\right)^6=2{,}521\ldots$

$N=7\lg\left(1+\frac{1}{7}\right)^7=7\lg\frac{8}{7}=0{,}4059\ldots\quad\left(1+\frac{1}{7}\right)^7=2{,}546\ldots$

$N=8\lg\left(1+\frac{1}{8}\right)^8=8\lg\frac{9}{8}=0{,}4092\ldots\quad\left(1+\frac{1}{8}\right)^8=2{,}565\ldots$

$N=9\lg\left(1+\frac{1}{9}\right)^9=9\lg\frac{10}{9}=0{,}4118\ldots\quad\left(1+\frac{1}{9}\right)^9=2{,}581\ldots$

$N=10\lg\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=10\lg 1{,}1=0{,}4139\ldots\quad\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2{,}594\ldots$

---

[1]) Пользуясь пятизначной таблицей логарифмов, мы должны помнить, что каждый логарифм дан в ней с точностью до половины единицы пятого знака, так что, например, при умножении на 6 ошибка увеличивается в 6 раз и может достигнуть 3 единиц пятого знака. Поэтому единицы пятого знака отброшены. Числа 2,521; 2,546 и т. д. взяты все с недостатком.

Эта таблица вновь показывает постепенное замедление роста чисел $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$. Число единиц все время остается равным двум, число десятых же приближается уже к 6. Очевидно, что 2,6 будет превзойдено уже при $N=11$.

Предоставляя читателю проделать выкладки для $N=20$, 30, 40, ограничимся результатом для $N=50$ и для $N=100$. При $N=50$ имеем:

$$\lg\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}=50\lg 1{,}02=50\cdot 0{,}00860;$$

так как 0,00860 есть лишь приближенное значение логарифма, причем ошибка лежит в пределах половины пятого знака, то результат умножения 0,43000 верен лишь с точностью до 25 единиц пятого знака, так что истинный логарифм лежит где-то между 0,42975 и 0,43025. Из таблиц видим, что искомое число лежит между 2,690 и 2,693. Итак, с точностью до 0,01

$$\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}=2{,}69.$$

При $N=100$ находим

$$\lg(1+0{,}01)^{100}=100\lg 1{,}01=100\cdot 0{,}00432=0{,}43200;$$

результат верен с точностью до 50 единиц пятого знака, так что истинный логарифм заключен между 0,43150 и 0,43250. Число $(1+0{,}01)^{100}$ заключено, следовательно, между 2,701 и 2,707 и, следовательно, с точностью до 0,01, равно 2,70 или лучше 2,71 (с избытком).

Дальнейшее вычисление с помощью пятизначных таблиц вскоре теряет смысл, так как уже при $N=500$ мы получаем для числа $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ границы 2,707 и 2,738, т. е. точность результата уже несколько меньше, а для $N=1000$ мы получаем границы 2,661 и 2,723, т. е. уже за сотые доли результата нельзя поручиться. Но во всяком случае при $N=1000$ число $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ заведомо не превосходит числа 2,723.

Все вышеприведенные выкладки показывают, что выражение

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \tag{13}$$

с ростом числа N хотя и возрастает, но отнюдь не обнаруживает тенденции к безграничному росту, ибо при росте N от 1 до 10 выражение (13) выросло от значения 2 до значения 2,59...; при дальнейшем росте N до значения 100 оно дорастает до значения 2,70, при росте же N до 1000 оно заведомо не дорастает до 2,73.

Более детальные рассуждения, которые мы опускаем ввиду их сложности, показывают, что значения 2,73 выражение (13) не может достигнуть ни при каком значении числа N.

Таким образом предел, к которому стремится выражение (13) при безграничном возрастании N, представляет собой число, во всяком случае не превосходящее 2,73. Это число можно вычислить более тонкими методами с любой степенью точности. Так, с точностью до пятого знака оно равно

$$2{,}71828\ldots$$

„Абсолютно точное" значение этого числа нельзя написать, ибо это числе иррациональное. Совершенно также нельзя написать абсолютно точное значение чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, lg 2 и т. д. Это не мешает нам утверждать, что число, служащее пределом выражения $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, существует, как утверждаем мы существование чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и lg 2. Для обозначения этого числа принято употреблять символ e.

§ 4. Итак, мы видим, что при бесконечно-большом N выражение $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ имеет конечное значение

$$e=2{,}71828\ldots$$

Таким образом мы можем считать задачу о вычислении интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{x}$$

решенной.

Мы видели (§ 1), что этот интеграл получается как значение величины

$$n(q-1) \tag{6}$$

при бесконечно-большом n.

Затем (§ 2) мы преобразовали это выражение (6) к виду:

$$\frac{\log\frac{b}{a}}{\log\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}, \tag{12}$$

где N — бесконечно-большое число, и теперь следовательно мы можем написать, что искомый интеграл равен:

$$\int_a^b \frac{dx}{x}=\frac{\log\frac{b}{a}}{\log e}=\frac{\log\frac{b}{a}}{\log 2{,}71828} \tag{14}$$

Напоминаем, что основание логарифмов остается совершенно произвольным, лишь бы и в числителе и в знаменателе оно было одно и то же. Возникает вопрос, как целесообразнее выбрать это осно-

вание? Здесь могут быть два особо выгодных выбора. Один из них напрашивается: взять за основание число 10. Преимущества этого выбора очевидны. Тогда, обозначая знаком lg десятичный логарифм какого-нибудь числа, мы перепишем формулу (14):

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{\lg e} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{\lg 2{,}71828}.$$

Приближенные значения $\log e$ мы уже получали в предыдущем параграфе, вычисляя $\lg \left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ для $N=100$, 500 и т. д. С точностью до пятого знака этот логарифм (его обозначают буквой M), будет равен:

$$M = \lg e = \log 2{,}71828 = 0{,}43429.$$

Для практических целей часто бывает достаточным положить

$$M = \lg e = 0{,}43\ldots$$

Это число легко запоминается. Не трудно запомнить также число

$$M = \lg e = 0{,}4343.$$

Итак, формулу (14) можно переписать в виде

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{M} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{0{,}4343}. \tag{15}$$

Еще удобнее заранее вычислить число $\frac{1}{M}$ (с точностью до пятого знака оно равно 2,30258) и написать:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{1}{M} \lg \frac{b}{a} = 2{,}30258 \lg \frac{b}{a}. \tag{15'}$$

На практике часто достаточно ограничиться двумя десятичными знаками числа $\frac{1}{M}$. Тогда будем иметь:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{1}{M} \lg \frac{b}{a} = 2{,}30 \lg \frac{b}{a}. \tag{16}$$

Упражнения.

1) $\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \frac{1}{M} \lg \frac{10}{1} = 2{,}30 \cdot 1 = 2{,}30$ [1]).

2) $\int_2^4 \frac{dx}{x} = 230 \lg 2 = 2{,}30 \cdot 0{,}30 = 0{,}69.$

3) $\int_{12{,}8}^{16{,}5} \frac{dx}{x} = 2{,}30 (\lg 16{,}5 - \lg 12{,}8) = 2{,}30 \cdot 0{,}11 = 0{,}25.$

4) $\int_{324}^{85} \frac{dt}{t} = 2{,}30 (1{,}93 - 2{,}51) = 2{,}30 - 0{,}58 = -1{,}33.$

5) $\int_{0{,}2}^{0{,}8} \frac{ds}{s} = 1{,}38.$

6) $\int_{0{,}8}^{0{,}2} \frac{du}{u} = -1{,}38.$

7) $\int_{10}^{1000} \frac{dx}{x} = 2{,}30 \cdot 2 = 4{,}60.$

8) $\int_2^3 \frac{dx}{5x} = \frac{1}{5} \int_2^3 \frac{dx}{x} = 0{,}08.$

9) $\int_{820}^{60} \frac{4dz}{z} = 4 \int_{820}^{60} \frac{dz}{z} = -10{,}4.$

10) $\int_2^4 \left(\frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}\right) dx = 3{,}57.$

11) $\int_a^{2a} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{2a^2+1}{2a} - \frac{2 \lg 2}{M} = \frac{2a^2+1}{2a} - 1{,}38.$

§ 5. Для вычислительных целей выбор числа 10 за основание логарифмов в формуле (14) не оставляет желать ничего лучше. Но для теоретических целей полезно бывает при выборе основания руководство-

---

[1]) В этом и в следующих примерах результаты даны с точностью до второго десятичного знака.

ваться другим соображением: простотой формулы. Поэтому посмотрим, нельзя ли надлежащим выбором основания привести формулу

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\log \frac{b}{a}}{\log e} \tag{17}$$

к более простому виду.

Легко видеть, что вид формулы (17) упрощается в том случае, когда мы за основание примем число e, ибо тогда в знаменателе получим единицу.

Итак, для упрощения формулы (17) возьмем за основание логарифмов число $e = 2{,}71828\ldots$, и тогда формула (17) примет вид:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log_e \frac{b}{a}. \tag{18}$$

Несмотря на кажущуюся „дикость" такого выбора, при котором основание является иррациональным числом, в теоретических выкладках достигается значительное упрощение. Поэтому в литературе формула (18) встречается гораздо чаще, чем (17). Логарифм какого-нибудь числа по основанию e принято называть „натуральным" его логарифмом, и вместо обозначения $\mathrm{Log}_e x$ пишут $\ln x$.

Итак, формулу (17) перепишем в виде

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}. \tag{18'}$$

Чтобы пользоваться формулой (18′) для вычисления интегралов, необходимо было бы иметь таблицу логарифмов, составленную по основанию e. Такие таблицы мало употребительны, и на практике пользуются формулой

$$\int_a^b \frac{ax}{x} = \frac{1}{M} \lg \frac{b}{a}. \tag{16}$$

Для облегчения умножения величины $\frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots$ на находимый по таблице десятичный логарифм $\lg \frac{b}{a}$, можно пользоваться особыми таблицами умножения числа $\frac{1}{M}$ на числа 1, 2, 3, 4, 5..., обычно помещаемыми в приложениях к таблицам логарифмов. Так, в распространенных пятизначных таблицах Пржевальского такая таблица дана под номером IX. Ее устройство не нуждается в описании, а способ пользования разъяснен во введении к таблицам.

С введением натуральных логарифмов возникает вопрос о связи натуральных и десятичных логарифмов одного и того же числа. Эта связь может быть легко установлена. Уже сравнение формул

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{M} \qquad (M = \lg e = 0{,}43429)$$

и

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$$

приводит к соотношению

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{\lg \frac{b}{a}}{M}.$$

Обозначая $\frac{b}{a}$ через x (x — произвольное положительное число), получаем

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x. \tag{19}$$

Это соотношение легко получить и непосредственно. Обозначим через z величину $\ln x$, так что

$$z = \ln x$$

или

$$e^z = x.$$

Логарифмируя это равенство по основанию 10, получаем:

$$z \lg e = \lg x,$$

откуда

$$\ln x = z = \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{\lg x}{M}. \tag{19}$$

Итак, мы можем сказать, что натуральный логарифм любого числа получается из десятичного его логарифма умножением на число $\frac{1}{M} = 2{,}30258$ (M — десятичный логарифм числа e) [1].

---

[1]) Число $\frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e}$ само имеет очень простой смысл; именно оно является натуральным логарифмом числа 10, т. е. логарифмом числа 10 по основанию e. Для доказательства достаточно представить равенство $10^M = e$ в виде

$$e^{\frac{1}{M}} = 10.$$

Из формулы (19) сейчас же получается формула для перевода натурального логарифма в десятичный:

$$\lg x = M \ln x. \tag{20}$$

Итак, десятичный логарифм любого числа получается из натурального его логарифма умножением на число $M = 0{,}43429$.

Для облегчения умножения числа $\ln x$ на множитель $M = 0{,}43429$ составляются так же, как и для умножения на $\frac{1}{M}$, особые таблицы (они помещены у Пржевальского под номером X). Следующие примеры иллюстрируют употребление этих таблиц.

Примеры.

1) Найти натуральный логарифм числа 15.

По таблице десятичных логарифмов находим:

$$\lg 15 = 1{,}17609.$$

Для перехода к натуральным логарифмам умножаем найденный логарифм на $\frac{1}{M} = 2{,}30258\ldots$ Умножение $\frac{1}{M} \cdot 1{,}17609$ выполняем, пользуясь табл. IX, так: находим по таблице числа $\frac{1}{M} \cdot 1{,}1$; $\frac{1}{M} \cdot 0{,}076$; $\frac{1}{M} \cdot 0{,}00009$ и складываем их. Собственно говоря, в таблице мы найдем $\frac{1}{M} \cdot 11$; $\frac{1}{M} \cdot 76$ и $\frac{1}{M} \cdot 9$, но, перенося запятую на один, три, пять знаков налево, найдем нужные произведения, которые выпишем до шестого знака:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{M} \cdot 1{,}1 \;\ldots\ldots\; 2{,}532843\\
&\tfrac{1}{M} \cdot 0{,}076 \;\ldots\ldots\; 0{,}174996\\
&\tfrac{1}{M} \cdot 0{,}00009 \;\ldots\ldots\; 0{,}000207\\
&\hline
\ln 15 = \tfrac{1}{M} \cdot \lg 15 \;\ldots\ldots\; &2{,}708046
\end{aligned}$$

Отбрасывая последний знак, как заведомо неверный [1]), получаем:

$$\ln 15 = 2{,}70805.$$

2) Найти число, натуральный логарифм которого равен 2,70805.

Найдем сначала десятичный логарифм этого числа. Обозначая его через x, имеем:

$$\lg x = M \ln x = M \cdot 2{,}70805.$$

[1]) Ибо множитель 1,17609 дает log 15 с точностью лишь до пятого десятичного знака.

С помощью табл. X мы найдем:

$$\begin{array}{l} M\cdot 2{,}7 \ldots\ldots 1{,}172593 \\ M\cdot 0{,}008 \ldots\ldots 0{,}003474 \\ M\cdot 0{,}00005 \ldots\ldots 0{,}000021 \\ \hline M\cdot 2{,}70805 \ldots\ldots 1{,}176090 \end{array}$$

Итак, $\lg x = 1{,}17609$.
И по табл. I находим:

$$x = 15{,}000.$$

Упражнения.

1) Найти $\lg x$, если $\ln x = 3{,}45218$.

$$\lg x = 1{,}49926.$$

2) Найти $\ln x$, если $\lg x = 0{,}56326$.

$$\ln x = 1{,}29695.$$

3) Найти $\ln 0{,}04$.

$$\ln 0{,}04 = -3{,}21887.$$

4) Найти число x, если $\ln x = -2{,}13765$.

$$x = 0{,}11793.$$

§ 6. Формула

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a} \qquad (18')$$

была выведена в том предположении, что числа a и b оба положительны Посмотрим, можно ли ее применять в других случаях. Начнем со случая когда оба числа a и b отрицательны [так что числа $(-a)$ и $(-b)$ положительны].

В этом случае между числами a и b можно вставить $(n-1)$ чисел

$$x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$$

так, чтобы ряд чисел

$$x_0 = a, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n = b$$

образовал геометрическую прогрессию; знаменатель q этой прогрессии будет положительным числом и попрежнему равен

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Повторяя рассуждения § 1—3, мы придем к тем же выводам, которые были нами получены, и таким образом формула (18′) применима и тогда, когда a и b оба отрицательные числа.

Но она теряет смысл, если один из пределов, например a, отрицателен, а другой — положителен. Это видно уже из того, что число $\frac{b}{a}$ в этом случае отрицательно и, следовательно, вовсе не имеет логарифма (действительного) при каком-либо положительном основании.

Причина непригодности формулы (18′) здесь, как и в случае интеграла $\int_a^b x^k\,dx$ при k, меньшем -1 (§ 4 гл. II), лежит в том, что при $a=0$ интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$ имеет бесконечно-большое значение. В самом деле, когда a приближается к нулю, число $\frac{b}{a}$, а значит и его логарифм, беспредельно растет.

Таким образом интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$$

имеют бесконечно-большие значения: первый — положительное, второй — отрицательное.

Поэтому интегралу

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$$

нельзя приписать (по крайней мере без дополнительных соглашений) никакого определенного значения, ибо разность двух бесконечно-больших величин, ничем не связанных между собой, есть совершенно неопределенная величина (отнюдь не обязательно нуль или бесконечность).

Упражнения.

1) $\int_{-2}^{-30} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{-30}{-2}\right) = \ln 15 = 2{,}7081$ [1]).

2) $\int_{-30}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{-2}{-30}\right) = \ln\frac{1}{15} = -2{,}7081$

[1]) В этом и следующих примерах ответ дан с точностью до четвертого десятичного знака.

3) $\int_{-2}^{-4} \frac{dx}{x} = 0{,}6931.$

4) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = -0{,}6931.$

5) $\int_{-1}^{-6} \frac{3\,dx}{x} = 5{,}3753.$

6) $\int_{-2}^{-5} \frac{dx}{6x} = 0{,}1527.$

§ 7. *Задача 36.* В цилиндрическом сосуде объема $v_0 = 0{,}1$ $м^3$ заключен атмосферный воздух, который подвергается сжатию вдвиганием поршня. Какую работу необходимо затратить, чтобы сжать воздух в сосуде до объема 0,03; 0,02; 0,01 $м^3$, если температура сжимаемого воздуха поддерживается постоянной (изотермическое сжатие). Атмосферное давление считаем равным 10 330 $кг/м^2$.

Мы уже решали задачу (§ 16 гл. II), отличающуюся от этой только тем, что вместо изотермического сжатия предполагалось адиабатное. Рассуждая так же, как прежде, мы вновь получим диференциальное уравнение

$$dA = -p\,dv \tag{21}$$

(A — работа, затрачиваемая на сжатие, p — давление, v — объем газа).

Только теперь давление и объем связаны не формулой Пуассона, а формулой

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} \tag{22}$$

(закон Бойля-Мариотта).

Подставляя в уравнение (21) выражение переменной p через переменную v, получаемое из формулы (22), мы получаем

$$dA = \frac{-p_0 v_0\,dv}{v}. \tag{23}$$

Интегрируя это уравнение, принимаем во внимание начальные условия ($A = 0$, $v = v_0$)

$$A = -p_0 v_0 \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \int_{v}^{v_0} \frac{dv}{v},$$

$$A = p_0 v_0 \ln \frac{v_0}{v}. \tag{24}$$

В нашей задаче $p_0 = 10\,330$ $кг/м^2$; $v_0 = 0{,}1$ $м^3$, и потому уравнение (24) принимает вид:

$$A = 10\,330 \cdot 0{,}1 \ln \frac{0{,}1}{v},$$

или

$$A = 10\,330 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}3 \lg \frac{0{,}1}{v}.$$

Подставляя сюда $v = 0{,}03;\ 0{,}02;\ 0{,}01$, получаем следующие результаты:

v $м^3$	0,03	0,02	0,01
A $кгм$	1241	1661	2376

§ 8. *Задача 37.* В цилиндрическом сосуде заключен объем 0,1 $м^3$ атмосферного воздуха, температура которого поддерживается постоянной. Цилиндр помещен в среду меньшей плотности, благодаря чему воздух в цилиндре расширяется, выталкивая поршень. Вычислить работу, совершаемую воздухом в цилиндре при расширении его до объема 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 $м^3$. Может ли эта работа при неограниченном расширении неограниченно увеличиваться?

Диференциальное уравнение этой задачи составляется так же, как и для предыдущей. Отличие только в знаке:

$$dA = p\,dv, \tag{21'}$$

$$dA = \frac{p_0 v_0\,dv}{v}, \tag{23'}$$

$$A = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v},$$

$$A = p_0 v_0 \ln \frac{v}{v_0}. \tag{24'}$$

Ответим сначала на второй вопрос задачи. Для этого положим в формуле (24') $v = \infty$. Соответствующее значение A будет $A_\infty = \infty$.

Решая аналогичную задачу для адиабатного расширения, мы видели, что величина A_∞ имела конечную величину, т. е. что запас работы, которую можно получить при адиабатном расширении, конечен. Возникает вопрос: откуда берется неисчерпаемый источник работы в данном случае? Ответ очень прост: за счет сообщаемой извне тепловой энергии, которая необходима для поддержания постоянной температуры (иначе газ охладился бы при расширении).

Что касается первого вопроса задачи, то ответ на него получается из формулы (24'), в которой нужно положить $p_0 = 10\,330$, $v_0 = 0{,}1$, после чего она примет вид:

$$A = 10\,330 \cdot 0{,}1 \ln \frac{v}{0{,}1}$$

или

$$A = 10\,330 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}3 \lg \frac{v}{0{,}1}.$$

Сюда будем подставлять значения $v = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5$.

Интересно отметить, что еще до вычисления можно предвидеть, что величина работы будет больше, чем при соответствующем расширении

воздуха в адиабатном процессе (так как давление больше благодаря сообщению энергии извне). Предлагаем читателю произвести соответствующие расчеты по формуле (29′) гл. II. Результаты представятся следующей таблицей:

Объем в $м^3$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	∞
Работа при изотермическом расширении в *кгм*	0	715	1134	1430	1661	∞
Работа при адиабатном расширении в *кгм*	0	625	918	1099	1226	2582,5

Задача 38. До какого объема должен расшириться изотермически объем 0,1 $м^3$ воздуха, чтобы произведенная работа равнялась 2600 *кгм*?

Для решения этой задачи нам нужно выразить объем v через работу A. Формула (24′) предыдущей задачи дает

$$p_0 v_0 \ln \frac{v}{v_0} = A, \tag{24′}$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = \frac{A}{p_0 v_0}; \tag{25}$$

так как натуральный логарифм имеет основанием число $e = 2{,}71828\ldots$, то

$$\frac{v}{v_0} = e^{\frac{A}{p_0 v_0}}$$

и

$$v = v_0 e^{\frac{A}{p_0 v_0}}. \tag{26}$$

Остается только подставить $v_0 = 0{,}1$; $p_0 = 10\,330$; $A = 2600$. Практически для вычисления v приходится логарифмировать формулу (26) по табличному основанию, т. е. по основанию 10.

$$\lg v = \lg v_0 + \frac{A}{p_0 v_0} \lg e$$

$$\lg v = \lg v_0 + \frac{AM}{p_0 v_0}. \tag{27}$$

Наши числовые данные дают:

$$\lg v = -1 + \frac{2600 \cdot M}{1033} \approx 0{,}0931,$$

$$v = 1{,}242$$

$$v \approx 1{,}2\ м^3.$$

Таким образом уже при двенадцатикратном расширении в изотермическом процессе совершается работа, большая чем весь запас работы в адиабатном процессе.

Заметим, что формулу (27) мы могли бы получить более коротким путем из (25), применяя правило перехода от натуральных логарифмов к десятичным (§ 5).

§ 9. *Задача 39.* Половина начального количества $a = 1$ *г* радия B распадается (образуя радий C) в течение 26,7 мин. Зная, что скорость распада радия B пропорциональна его наличному количеству, вычислить: 1) через какое время останется нераспавшимся 0,8 радия B; 2) какая часть первоначального количества радия B оставалась нераспавшейся по прошествии 10 мин.

Напомним прежде всего, что скорость распада измеряется тем количеством радия B, которое распалось бы в течение единицы времени (минуты), если бы его наличное количество при этом оставалось без изменения (например, если бы по мере распада радия B запас его пополнялся извне). В действительности, в единицу времени распадается меньшее количество радия B, потому что с уменьшением наличного его количества уменьшается и скорость распада (см. условие задачи).

Из этого ясно, что мы должны составить уравнение, связывающее бесконечно-малое изменение количества радия B с бесконечно-малым промежутком протекшего времени, так как за этот промежуток времени скорость распада можно считать неизменной. Обозначая через t время, протекшее от начала опыта, через x количество радия B, имевшееся по истечении этого времени, и через v — скорость реакции, мы можем написать диференциальное уравнение

$$dx = -v\,dt. \tag{28}$$

Знак минус в правой части уравнения поставлен потому, что наличное количество радия за время dt уменьшилось, так что dx есть величина отрицательная (скорость v распада мы считаем величиной положительной).

Уравнение (28) мы не можем проинтегрировать до тех пор, пока нам неизвестно выражение скорости v. Согласно условию задачи, эта скорость пропорциональна наличному количеству радия B. Поэтому мы можем написать

$$v = kx. \tag{29}$$

Здесь k есть некоторая постоянная величина. Она пока неизвестна, но мы ее сможем вычислить, используя данные опыта, приведенные в задаче (именно, что через 26,7 мин. от начального количества 1 *г* радия B осталась его половина). Подставляя выражение v из (29) в диференциальное уравнение (28), мы перепишем его так:

$$dx = -kx\,dt. \tag{30}$$

В этом уравнении мы должны еще разделить переменные

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt. \tag{31}$$

Интегрируя последнее уравнение, примем во внимание начальные условия ($t = 0$; $x = a$)

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = -k \int_0^t dt,$$

откуда

$$t = -\frac{1}{k} \ln \frac{x}{a}. \tag{32}$$

Это уравнение давало бы уже возможность ответить на первый вопрос задачи, если бы было известно значение постоянной k.

Оно же позволило бы ответить и на второй вопрос задачи, в котором по данной величине t требуется найти соответственное значение x. Впрочем можно преобразовать уравнение (32) так, чтобы зависимость величины x от величины t была представлена в явной форме. Именно, поступая, как в предыдущей задаче, найдем:

$$x = ae^{-kt}. \tag{33}$$

Займемся теперь определением величины k.

Согласно условию задачи, при $t = 26{,}7$ мин. мы имеем $x = 0{,}5$ г. Подставляя эти значения в формулу (32), мы получаем:

$$26{,}7 = -\frac{1}{k} \ln 0{,}5. \tag{34}$$

Отсюда мы можем найти величину постоянной k:

$$k = -\frac{\ln 0{,}5}{26{,}7} = -\frac{2{,}3 \lg 0{,}5}{26{,}7} = 0{,}026.$$

Вставим найденное значение k в уравнение (32). Оно примет вид

$$t = -\frac{1}{0{,}026} \ln \frac{x}{a}$$

или

$$t = -\frac{2{,}3}{0{,}026} \lg \frac{x}{a}. \tag{32'}$$

Подставляя сюда значения $a = 1$, $x = 0{,}8$, находим

$$t = -\frac{2{,}3}{0{,}026} \lg 0{,}8 \approx 8{,}6 \text{ мин.}$$

Таков ответ на первый вопрос задачи. Ответ на второй вопрос можно получить как из формулы (32'), так и из формулы (33). В последнюю нужно, конечно, также вставить значение

$$k = 0{,}026,$$

$$x = ae^{-0{,}026t}. \tag{33'}$$

Подставляя сюда $a = 1$, $t = 10$, мы получаем:

$$x = e^{-0{,}026 \cdot 10}.$$

Для фактического вычисления значения x придется логарифмировать это равенство:

$$\lg x = -0{,}026 \cdot 10 \lg e = -0{,}026 \cdot 10 \cdot M.$$

То же выражение мы получили бы непосредственно из (32′), подставляя туда $t = 10$; $a = 1$.

Продолжая вычисление, получим:

$$\log x \approx -0{,}113,$$

$$x \approx 0{,}77 \text{ г}.$$

Для того чтобы сделать возможно более ясным ход решения задачи, мы не пользовались искусственными приемами, которые могли бы облегчить выкладки. Именно, мы могли бы решить задачу так:

Интегрируя уравнение

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt,$$

мы получим, как прежде, формулу

$$t = -\frac{1}{k} \ln \frac{x}{a} = -\frac{1}{k} \ln x. \tag{32}$$

В эту формулу подставляем значения $t = 26{,}7$, $x = 0{,}5$; получаем

$$26{,}7 = -\frac{1}{k} \ln 0{,}5. \tag{34}$$

Вместо того чтобы вычислять значение k из последнего равенства и подставлять его в первое, разделим почленно эти равенства:

$$\frac{t}{26{,}7} = \frac{\ln x}{\ln 0{,}5}. \tag{35}$$

Этим мы исключили постоянную k и получили очень простое уравнение t и x, из которого по данному значению одной из этих переменных можно вычислить значение другой.

Процесс вычисления облегчается еще больше, если мы выразим натуральные логарифмы, входящие в числитель и знаменатель правой части (35′), через десятичные логарифмы соответствующих чисел:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

$$\ln 0{,}5 = \frac{1}{M} \log 0{,}5.$$

Уравнение (35) принимает вид

$$\frac{t}{26{,}7} = \frac{\log x}{\log 0{,}5}. \tag{36}$$

Короче говоря, когда в числитель и знаменатель входят множителями натуральные логарифмы, мы можем вместо них написать десятичные [1]).

Уравнение (36) и служит для ответа на оба вопроса задачи: именно подставляя в него $x = 0{,}8$, мы получим

$$t = 26{,}7 \frac{\lg 0{,}8}{\lg 0{,}5} \approx 8{,}6 \text{ мин.}$$

Подставляя $t = 10$, находим:

$$\lg x = \frac{10}{26{,}7} \lg 0{,}5 \approx -0{,}113,$$

откуда

$$x \approx 0{,}77 \text{ г.}$$

§ 10. *Задача 40.* Металлический шар, имеющий в начале опыта температуру $x_0 = 12{,}9°$, охлаждается струей воды температуры 0°. По прошествии времени $t_1 = 8$ мин. 16 сек. шар охладился до температуры $x_1 = 9{,}9°$.

Принимая, что скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды, найти: 1) через какое время шар охладится до температуры 6,9°; 2) какова будет температура шара через полчаса после начала охлаждения.

Обозначим через x температуру шара, через t — время, протекшее от начала опыта, и через v — скорость охлаждения шара. Скорость охлаждения измеряется величиной понижения температуры в единицу времени, но, как и в предыдущей задаче, здесь нужно иметь в виду, что фактически за единицу времени (в минуту) величина охлаждения будет меньше, чем величина скорости в начале этой минуты, так как по мере охлаждения уменьшается разность температуры шара и охлаждающей среды, а значит уменьшается и скорость охлаждения. Величина охлаждения в единицу времени лишь тогда соответствовала бы скорости, если бы разность температур оставалась неизменной (например, если бы температура охлаждающей шар воды понижалась по мере охлаждения шара).

Ввиду этого мы должны для нахождения связи между величинами x и t взять бесконечно-малый промежуток времени dt, в течение которого скорость охлаждения v остается неизменной, так что температура понижается на величину $v\,dt$. Отсюда получаем диференциальное уравнение

$$dx = -v\,dt. \tag{37}$$

Чтобы его интегрировать, нужно знать выражение величины v. Согласно условию, мы принимаем ее пропорциональной разности между температу

---

[1]) И вообще логарифмы по любому основанию.

рой шара и температурой воды 0°, т. е. пропорциональной величине x,

$$v = kx.$$

Величина постоянной k пока остается неизвестной; она будет определена из данных опыта. Подставляя это выражение в (37), получаем:

$$dx = -kx\,dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln\frac{x}{x_0} = -kt. \tag{38}$$

Подставляя в это уравнение значения $x = x_1$ и $t = t_1$, получаем:

$$\ln\frac{x_1}{x_0} = -kt_1. \tag{39}$$

Деля почленно (38) и (39), исключаем величину k:

$$\frac{\ln\dfrac{x}{x_0}}{\ln\dfrac{x_1}{x_0}} = \frac{t}{t_1}$$

или, выражая натуральные логарифмы через десятичные,

$$\frac{\lg\dfrac{x}{x_0}}{\lg\dfrac{x_1}{x_0}} = \frac{t}{t_1}. \tag{40}$$

Для определения величины t по данному значению x получаем отсюда формулу

$$t = \frac{t_1\lg\dfrac{x}{x_0}}{\lg\dfrac{x_1}{x_0}} = \frac{t_1(\lg x - \lg x_0)}{\lg x_1 - \lg x_0}.$$

Подставляя сюда $x_0 = 12{,}9$; $x_1 = 9{,}9$; $x = 6{,}9$; $t_1 = 496$ сек., находим

$$t \approx 1172{,}5 \text{ сек.} = 19 \text{ мин. } 32 \text{ сек.}$$

Для определения величины x по данному значению t можно пользоваться тем же уравнением (40), которое дает

$$\lg x = \lg x_0 + \frac{t}{t_1}(\lg x_1 - \lg x_0).$$

Подставляя сюда $x_0 = 12{,}9$; $x_1 = 9{,}9$; $t_1 = 496$; $t = 1800$, находим

$$\lg x \approx 0{,}693.$$

$$x \approx 4{,}9°.$$

§ 11. *Задача 41.* При температуре 0° и при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10\,330$ *кг/м²* плотность воздуха у поверхности земли $k_0 = 0{,}00129$. Вычислить величину давления воздуха на высоте 1 *км* над поверхностью земли, предполагая, что все промежуточные слои воздуха имеют температуру 0°.

Если бы плотность воздуха не менялась с высотой, то задача разрешалась бы элементарно; именно мы вычислили бы вес столба воздуха, основание которого имеет площадь $s = 1$ *м²*, а высота равна $H = 1$ *км*. Этот вес равнялся бы

$$k_0 sH = 0{,}00129 \cdot 1000 \cdot 1 \; m = 1290 \; кг.$$

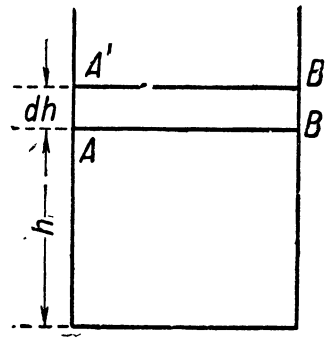
Давление воздуха на 1 *м²* на высоте 1 *км* было бы меньше, чем у земли, как раз на эту величину, т. е. равнялось бы 9040 *кг/м²*.

На самом деле это давление будет больше, потому что плотность воздуха уменьшается с поднятием над землей.

Чтобы вычислить величину этого давления, мы должны рассмотреть изменение его не на всем протяжении 1 *км*, а на таком участке высоты, на котором плотность воздуха остается неизменной.

Обозначим через h высоту поднятия над землей, через k — плотность воздуха на этой высоте и через p — величину атмосферного давления на этой высоте.

Выделим из столба воздуха, находящегося над 1 *м²* поверхности земли, бесконечно-тонкий слой. Высота этого слоя dh, площадь основания 1 *м²*; объем $1 \cdot dh$, вес $k\,dh$. На величину этого веса уменьшается давление при переходе от слоя AB к бесконечно-близкому слою $A'B'$ (черт. 40). Мы можем поэтому написать:



Черт. 40.

$$dp = -k\,dh. \tag{41}$$

Мы получили диференциальное уравнение, для интегрирования которого необходимо еще найти выражение переменной плотности k через одну из величин p и h (или, может быть, через обе эти величины).

Так как по предположению температура воздуха во всех слоях одинакова, то между плотностью воздуха k и его давлением существует (согласно закону Бойля-Мариотта) пропорциональная зависимость, так что

$$\frac{k}{k_0} = \frac{p}{p_0} \tag{42}$$

(k_0 и p_0 — плотность воздуха и давление у поверхности земли). Находим выражение k из (42) и подставляем в (41); получаем

$$dp = -\frac{k_0 p\, dh}{p_0}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{k_0}{p_0} dh.$$

При интегрировании примем во внимание начальные данные $h = 0$, $p = p_0$. Получим

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{k_0}{p_0} h \tag{43}$$

„барометрическая" формула).

Если желаем представить давление p в функции высоты h, то, разрешая (43) относительно p, получим:

$$p = p_0 e^{-\frac{k_0}{p_0} h}. \tag{44}$$

Для вычислений удобнее пользоваться формулой (43)

Переходя к десятичным логарифмам, получаем:

$$\lg \frac{p}{p_0} = -M \frac{k_0}{p_0} h. \tag{43'}$$

Сюда мы должны подставить значения k_0, h и p_0, причем следует иметь в виду, что выбор единицы давления связан с выбором единицы длины, так как, составляя уравнение (41), мы записали, что вес слоя воздуха равен плотности, умноженной на объем. Если за единицу длины примем 1 *м*, то давление должно быть выражено в тоннах на 1 $м^2$ (а не в $кг/м^2$). Поэтому в формулу (43′) следует вставить:

$$h = 1000; \quad p_0 = 10{,}33; \quad k_0 = 0{,}00129.$$

Мы получим

$$\lg p = \lg\ 10{,}33 - \frac{M \cdot 0{,}00129 \cdot 1000}{10{,}33}.$$

Вычисление дает:

$$\lg\ 10{,}33 = 1{,}01410,$$

$$\frac{M \cdot 0{,}00129 \cdot 1000}{10{,}33} = 0{,}05424,$$

$$\lg p = 0{,}95986,$$

$$p = 9{,}117\ т/м^2 = 9117\ кг/м^2.$$

Если бы требовалось выразить давление в атмосферах, т. е. вычислить величину $\frac{p}{p_0}$, то формула (43′) дала бы

$$\lg \frac{p}{p_0} = -0{,}05424,$$

$$\frac{p}{p_0} \approx 0{,}883,$$

$$p \approx 0{,}883 \ atm.$$

Глава IV.

Основные понятия диференциального исчисления.

§ 1. Интегральное исчисление дает нам возможность по уравнению, связывающему диференциалы двух переменных величин (т. е. по диференциальному уравнению), найти уравнение, связывающее эти переменные величины.

Так, когда мы хотим найти зависимость между путем s, пройденным телом при равномерно-ускоренном движении, и временем t, протекшим от начала движения, то мы исходим (§ 11 гл. II) из диференциального уравнения

$$ds = gt\,dt \tag{1}$$

(где gt выражает скорость движения), интеграция которого дает:

$$s = \frac{1}{2}\,gt^2 \quad (g = 980\ см/сек^2). \tag{2}$$

Последнее уравнение дает искомую зависимость. Точно так же, зная, что сила отталкивания двух наэлектризованных тел представляется выражением $\frac{e_1 e_2}{r^2}$ (r — переменное расстояние; e_1 и e_2 — постоянные заряды), и желая найти зависимость между переменной величиной r и переменной величиной A, обозначающей работу силы отталкивания наэлектризованных тел, мы исходим из уравнения:

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2}\,dr, \tag{3}$$

интеграция которого дает зависимость между A и r:

$$A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \tag{4}$$

Величина R есть начальное расстояние отталкивающихся тел.

Число таких примеров, уже разобранных нами, можно было бы увеличить, но приведенных достаточно, чтобы иллюстрировать наше основное положение: интегральное исчисление дает возможность по уравнению между диференциалами переменных величин найти уравнение, связывающее эти переменные.

Предметом диференциального исчисления служит задача обратного характера: по данному уравнению между переменными величинами найти уравнение между их диференциалами.

Так, пусть нам известно, что с изменением расстояния r между зарядами e_1 и e_2 (исходное расстояние которых было R) меняется величина работы A, произведенной силой отталкивания, и что переменные величины A и r связаны уравнением

$$A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \tag{4}$$

Задачей диференциального исчисления является по этому уравнению найти уравнение, связывающее диференциалы dA и dr.

Разумеется, мы еще не знаем, как это сделать, и нашей ближайшей задачей будет вывести правила, по которым уравнение между диференциалами получается из уравнения между переменными.

Но в данном случае мы можем „догадаться", что должно получиться то уравнение (3), из которого мы исходили только что при выводе уравнения (4), т. е. что искомое уравнение между диференциалами будет иметь вид

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2} dr. \tag{3}$$

§ 2. Практическая ценность решения такой задачи будет очевидна из следующих соображений. Пусть нам не удалось непосредственно установить закон взаимодействия двух зарядов, но зато удалось теоретически или из опытов найти формулу

$$A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), \tag{4}$$

дающую зависимость между работой A силы отталкивания и расстоянием r, на которое удалились заряды e_1 и e_2 друг от друга.

Тогда, умея находить диференциальное уравнение по данному уравнению между переменными, мы из (4) выведем уравнение

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2} dr, \tag{3}$$

а это последнее немедленно даст нам закон взаимодействия зарядов e_1 и e_2.

В самом деле, dA есть бесконечно-малая работа, совершенная на бесконечно-малом пути dr. Так как на этом пути силу F взаимодействия можно считать неизменной, то произведенная на пути dr работа dA должна равняться

$$dA = F\,dr. \tag{5}$$

Сравнение (5) и (3) дает нам

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

т. е. закон Кулона.

По существу одинаково с предыдущим будет такое рассуждение:

чтобы найти (постоянную) силу F, действующую на пути dr, нужно работу dA на этом пути разделить на длину пути dr:

$$F = \frac{dA}{dr}. \tag{6}$$

Подставляя в это равенство выражение dA из (3), получаем

$$F = \frac{e_1 e_2\, dr}{r^2\, dr} = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

§ 3. Чтобы еще лучше уяснить практическое значение дифференциального исчисления, рассмотрим еще задачу о равномерно-ускоренном движении.

Положим, что, изучая свободное падение тела, мы установили зависимость между путем s, пройденным им от начала падения, и временем t, протекшим от начального момента

$$s = \frac{1}{2} gt^2. \tag{2}$$

Что же касается скорости падения, то нам не удалось найти из опыта закон ее изменения (действительно, опытное установление этого закона значительно труднее).

Если мы умеем решать задачи дифференциального исчисления, то закон изменения скорости мы получим моментально.

В самом деле, чтобы найти скорость движения, если она неизменна, нам нужно пройденный путь разделить на время, потребовавшееся для его прохождения. Но так как падающее тело не обладает постоянной скоростью, то мы не можем просто разделить величину s на величину t (что дало бы $\frac{s}{t} = \frac{\frac{1}{2} gt^2}{t} = \frac{1}{2} gt$).

Однако, чтобы найти скорость движения падающего тела, мы можем и должны взять бесконечно-малый путь, на протяжении которого скорость можно считать неизменной, и разделить его на время (бесконечно-малое), потребовавшееся для его прохождения. Бесконечно-малая часть пути s есть ds; бесконечно-малый промежуток времени есть dt, таким образом искомая скорость v выразится частным

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Если мы теперь умеем по данному уравнению между s и t

$$s = \frac{1}{2} gt^2 \tag{2}$$

найти уравнение между ds и dt, то формула (7) даст выражение для скорости v.

К сожалению мы еще не знаем правил дифференцирования; поэтому

приходится опять исходить из „догадки", что в результате получится диференциальное уравнение:

$$ds = gt\,dt. \tag{1}$$

т. е. то самое, из которого мы прежде исходили, выводя формулу (2). Мы убедимся вскоре, что этот результат действительно явится следствием правил диференциального исчисления.

Имея этот результат, мы можем подставить полученное выражение для ds в формулу (7); она дает тогда

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{gt\,dt}{dt} = gt,$$

и мы видим, что скорость свободного падения тела растет пропорционально времени, т. е. что движение свободного падения есть движение равномерно-ускоренное.

§ 4. Предыдущие параграфы имели целью дать читателю представление об основной задаче диференциального исчисления и о практическом смысле этой задачи. Мы переходим теперь к методическому ее решению и начнем с исследования простейшего уравнения между двумя переменными величинами, которые мы назовем буквами x и y.

Пусть имеем уравнение

$$y = mx, \tag{8}$$

где m — некоторая постоянная величина.

Требуется найти уравнение, связывающее dy и dx. Напрашивается такой ответ:

$$dy = m\,dx. \tag{9}$$

Этот ответ можно получить следующим простым рассуждением: dy есть бесконечно-малая разность значений величины y; она вызывается бесконечно-малым изменением dx величины x. Пусть величина x увеличилась на dx; вместо x будем иметь $x + dx$. Так как y получается умножением числа m на x, то новое значение величины y будет $m(x + dx)$. Насколько же увеличилась величина y? Очевидно на разность

$$m(x + dx) - mx.$$

Это и есть изменение величины y, т. е. dy. Итак,

$$dy = m(x + dx) - mx.$$

Открывая скобки, получаем

$$dy = m\,dx. \tag{9}$$

Примеры.

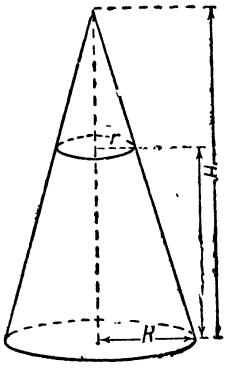
Если	$y = 2x,$	то	$dy = 2dx;$
„	$y = 4{,}4x,$	„	$dy = 4{,}4dx;$
„	$y = 0{,}6x,$	„	$dy = 0{,}6dx;$
„	$y = -0{,}3x,$	„	$dy = -0{,}3dx;$
„	$y = -\frac{1}{3}x,$	„	$dy = -\frac{1}{3}dx.$

Замечание. Величина dx может быть положительной или отрицательной; величина dy тогда будет иметь тот же знак, что dx при положительном m (как в первых трех примерах), или обратный знак при отрицательном m (как в двух последних примерах).

§ 5. Как ни элементарны полученные пока результаты, но мы можем уже использовать их практически, как показывает следующая задача.

Пусть требуется найти объем конуса с радиусом основания R и высотой H (черт. 41).

Эту задачу мы уже решили в гл. I (задача 1). Мы видели, что, разбивая конус плоскостями, параллельными основанию, на бесконечно-тонкие пластинки, мы объем его можем представить интегралом



Черт. 41.

$$\int_0^H \pi r^2\, dh.$$

В задаче 1 мы выражали величину r через величину h, пользуясь уравнением

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}. \tag{10}$$

Теперь же мы попробуем, наоборот, величину h выразить через величину r (в данном случае это столь же просто, но часто бывает, что уравнение, связывающее две переменных величины, гораздо проще решается относительно одной из них, чем относительно другой).

Мы получаем:

$$h = \frac{H}{R} r. \tag{11}$$

Чтобы подъинтегральное выражение (т. е. объем бесконечно-тонкой пластинки) содержало только переменную r, нужно выразить dh через dr. Из уравнения (11), на основании предыдущего параграфа, мы получаем

$$dh = \frac{H}{R} dr.$$

Подъинтегральное выражение теперь имеет вид:

$$\frac{\pi H}{R} r^2\, dr.$$

Следует не забывать, что пределы интеграла теперь должны давать крайние значения величины r (а не h), и потому пределы интеграла будут уже не 0 и H, как прежде, а 0 и R.

Итак, искомый объем будет:

$$\pi H \int_0^R r^2\, dr = \frac{\pi H}{R} \frac{R^3}{3} = \frac{\pi H R^2}{3}.$$

§ 6. Рассмотрим теперь уравнение

$$y=mx+n, \tag{12}$$

где m и n — постоянные величины (уравнение $y=mx$, рассмотренное в § 4, представляет его частный случай, когда $n=0$), и постараемся найти уравнение между величинами dy и dx.

Воспользуемся тем же приемом, который мы применили в § 4 и который является о б щ и м приемом получения основных формул дифференциального исчисления.

Пусть величина x увеличилась на dx (это „увеличение" может быть и отрицательным; это нужно иметь в виду и в дальнейшем). Новое значение величины x будет $x+dx$. Величина y, которая представлялась прежде выражением $mx+n$, представится теперь выражением $m(x+dx)+n$.

Таким образом „увеличение" величины y, т. е. dy представится разностью

$$dy=[m(x+dx)+n]-(mx+n).$$

Открывая скобки, получаем

$$dy=m\,dx. \tag{13}$$

Примеры

1)	$y=4x+2;$	$dy=4dx.$
2)	$y=4x-3;$	$dy=4dx.$
3)	$y=4x-0{,}6;$	$dy=4dx.$
4)	$y=-4x+2;$	$dy=-4dx.$
5)	$y=-4x-7;$	$dy=-4dx.$
6)	$s=10t+60;$	$ds=10dt.$
7)	$s=10t+30;$	$ds=10dt.$
8)	$s=10t-30;$	$ds=10dt.$

Обращает на себя внимание тот факт, что вид диференциального уравнения совершенно не зависит от величины постоянного слагаемого n, которое исчезает бесследно; так, например, в первых трех примерах мы получили одно и то же диференциальное уравнение $dy=4dx$, а в последних трех одно и то же диференциальное уравнение $ds=10dt$.

Чтобы этот факт не казался странным, мы разберем вывод нашего правила на конкретном примере. Для большей наглядности мы возьмем числовые значения m и n, хотя буквально такие же рассуждения можно повторить и для общего случая.

Пусть поезд движется, удаляясь к северу от станции A со скоростью 10 $\frac{км}{час}$; в начальный момент (скажем, в полдень) он находится к северу от A на расстоянии 60 *км*. Тогда через t часов расстояние s поезда до станции A выразится через t так:

$$s=10t+60.$$

Это уравнение мы имели в шестом примере,

Как же выразится ds через dt? Величина ds есть бесконечно-малое изменение расстояния поезда от станции, т. е. путь, пройденный поездом в бесконечно-малое время dt. А так как скорость поезда постоянна и равна 10 $\frac{км}{час}$, то очевидно ds и dt связаны уравнением:

$$ds = 10dt.$$

Легко видеть, что уравнения

$$s = 10t + 30,$$
$$s = 10t - 30$$

могут быть истолкованы точно так же, с той разницей, что в начальный момент поезд должен находиться на расстоянии 30 $км$ от станции A к северу или к югу; так как скорость остается той же, 10 $\frac{км}{час}$, то и дифференциальное уравнение сохраняет свой вид:

$$ds = 10dt.$$

§ 7. Дифференциальное уравнение, полученное нами для уравнения

$$y = mx + n \tag{12}$$

и имеющее, как мы показали, вид

$$dy = m\,dx, \tag{13}$$

может быть, очевидно, представлено в форме

$$\frac{dy}{dx} = m. \tag{13'}$$

Такая форма часто бывает предпочтительной, ввиду того что отношение дифференциалов двух переменных величин имеет важное физическое значение, и притом не только тогда, когда уравнение между ними имеет простой вид (12), но и для случая произвольной связи между переменными величинами. Так, если переменная величина x обозначает время, а y — путь, пройденный телом, то при произвольной связи между ними, т. е. при произвольном законе движения, мы для нахождения скорости не можем взять частное $\frac{y}{x}$ (см. § 3), но должны рассматривать частное $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, когда y и x выражают длину пути и соответственный промежуток времени, частное $\frac{dy}{dx}$ выражает скорость движения.

Мы видели также (§ 1—2), что если x выражает длину пути, а y — величину работы силы (действующей по направлению перемещения), то частное $\frac{dy}{dx}$ дает величину этой силы.

Чтобы рассмотреть еще новый пример, положим, что x выражает

время, а y количество воды, вытекшее из сосуда. Если разделить y на x, то частное $\frac{y}{x}$ выразит количество воды, вытекавшее „в среднем“ за единицу времени. Но так как, вообще говоря, скорость истечения воды изменяется по мере опорожнения сосуда, то эта „средняя“ величина не имеет большого практического значения, поэтому мы должны взять бесконечно-малый промежуток времени (dx), в течение которого скорость истечения можно считать неизменной. Количество воды, вытекшей за этот промежуток времени, будет тоже бесконечно-мало (dy). Чтобы вычислить значение скорости истечения, мы должны подсчитать, какое количество воды вытекло бы за единицу времени, если бы скорость истечения сохраняла постоянную величину, которую она имела в течение бесконечно-малого промежутка времени dx. Обозначая искомое количество через v, имеем пропорцию:

$$\frac{v}{dy} = \frac{1}{dx},$$

откуда

$$v = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом в нашем примере отношение $\frac{dy}{dx}$ выражает **скорость истечения воды.**

Таким образом отношение диференциалов двух переменных, связанных между собой величин, или, для краткости скажем, диференциальное отношение, имеет важное физическое значение.

Поэтому задача диференциального исчисления может быть сформулирована также следующим образом: **по данному уравнению между двумя переменными величинами x и y найти их диференциальное отношение** $\frac{dy}{dx}$ [1]).

Для случая уравнения

$$y = mx + n$$

искомое диференциальное отношение имеет, как мы показали, вид

$$\frac{dy}{dx} = m,$$

т. е. для случая, когда переменные связаны уравнением первой степени, диференциальное отношение имеет постоянное значение.

Замечание. Постоянство диференциального отношения, разумеется, не может иметь места при всяком уравнении между переменными. Чтобы это стало совершенно очевидным, достаточно вспомнить то, что было сказано только что о физическом смысле диференциального отношения.

---

[1]) Или $\frac{dx}{dy}$; зная одно из них, легко найдем другое.

Скорость движения тела, сила, действующая на тело, скорость истечения воды — все это величины, которые вовсе не должны оставаться постоянными. Напротив, по большей части их значение зависит от значения одной из переменных величин, входящих в уравнение [1]). Можно даже показать, что постоянство диференциального отношения имеет место только для уравнения вида

$$y = mx + h$$

и его частных случаев; на этом мы пока останавливаться не будем.

§ 8. Мы возьмем теперь простейшее уравнение второй степени между двумя переменными

$$y = x^2. \tag{14}$$

Так как заранее можно ожидать, что диференциальное отношение не будет иметь постоянного значения, то, чтобы проследить характер его изменения, мы будем давать переменным y и x определенные числовые значения.

Для начала положим, что x имеет значение 2; y будет тогда иметь значение $2^2 = 4$. Найдем теперь диференциальное уравнение, или, что то же, определим диференциальное отношение для данных значений x и y ($x = 2$, $y = 4$).

Снова применим прием, употребленный в § 4 и 6. Пусть величина x увеличилась на dx; новое значение величины x будет $2 + dx$; величина y, прежде равная 2^2, получила значение $(2 + dx)^2$; увеличение величины y, т. е. dy, представляется так:

$$dy = (2 + dx)^2 - 4,$$

откуда

$$dy = 4dx + (dx)^2. \tag{15}$$

Такой вид имеет искомое диференциальное уравнение.

Диференциальное же отношение $\frac{dy}{dx}$ отсюда определяется

$$\frac{dy}{dx} = 4 + dx. \tag{15'}$$

Формулы (15) и (15') получают еще более простой вид, если мы примем во внимание бесконечную малость величины dx. Обратимся, например, к формуле (15); предположим, что dx есть некоторое небольшое число, например 0,01. Тогда в выражении $4dx + (dx)^2$ первое слагаемое $4dx = 0{,}04$ велико по сравнению со вторым $(dx)^2 = 0{,}0001$. Чем меньшее значение мы дадим величине dx, тем резче сказывается различие величин слагаемых. Так, при $dx = 0{,}00001$ первое слагаемое равно 0,00004, а второе 0,0000000001, т. е. второе слагаемое меньше первого в четыреста тысяч раз!

---

[1]) От какой именно из двух переменных считать зависящей величину диференциального отношения — безразлично, так как сами эти переменные связаны между собой так, что если известна зависимость от одной из них, то этим уже дана зависимость и от другой.

Уже при таком положении дела, находя dy, мы вправе пожертвовать вторым слагаемым и вместо

$$dy = 0{,}0000400001$$

написать

$$dy = 0{,}00004.$$

Если же величину dx мы считаем бесконечно-малой, то слагаемое $(dx)^2$ меньше слагаемого $4dx$ в бесконечно-большое число раз, и мы без всякого вреда для дела можем отбросить его.

Таким образом вместо формулы (15) мы получим

$$dy = 4dx, \tag{16}$$

так что диференциальное отношение при данных значениях x и y ($x = 2$; $y = 4$) равно:

$$\frac{dy}{dx} = 4. \tag{16'}$$

Последнее равенство можно получить непосредственно из формулы

$$\frac{dy}{dx} = 4 + dx, \tag{15'}$$

замечая, что прибавление бесконечно-малой величины dx не изменяет величины 4.

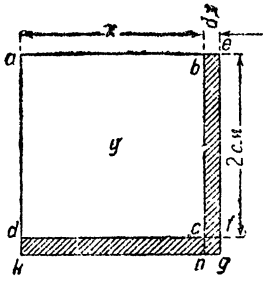
§ 9. Мы отнюдь не хотим скрыть от читателя, что наши предыдущие рассуждения с формально-арифметической точки зрения содержат противоречие. В самом деле, с этой точки зрения величина dx есть или нуль или не нуль. В первом случае величина dx есть „абсолютное" ничто, и, значит, ни значение x ни, следовательно, значение y не изменяются вовсе. Тогда, конечно, нет никакого смысла составлять диференциальное уравнение, а диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ мы и писать не имеем права, ибо деление на нуль строго запрещается. Во втором же случае (т. е. если dx не нуль) мы не можем отбросить слагаемое $(dx)^2$ в формуле (15) или слагаемое dx в формуле (15'), ибо тогда нарушилось бы равенство.

В такое противоречие с арифметикой мы попадаем не впервые. Аналогичное явление имело место в области интегрального исчисления. Мы видели, что это противоречие может быть устранено ценою изгнания понятия бесконечно-малой величины и введения понятия предела (§ 17 гл. I). Аналогичное „очищение" может быть произведено и в настоящем случае, и мы покажем ниже, как оно производится. Но на целом ряде задач, решенных в предыдущих главах, мы убедились, что именно это понятие бесконечно-малой величины придает языку математических символов живость; именно оно позволяет отобразить ряд процессов, в которых бесконечно-малые величины находят конкретное истолкование и становятся, так сказать, наглядными.

Вот почему мы и теперь не побрезгуем формально-противоречивым

понятием бесконечно-малой величины и постараемся показать, какой конкретный смысл имеют полученные нами результаты.

С этой целью рассмотрим квадрат $abcd$ со стороной $x = 2$ *см* (черт. 42). Площадь его $y = 4$ *см*^{2}. Пусть сторона квадрата увеличилась на величину dx, изображаемую отрезками be и dk [1]).



Черт. 42.

Величина dy изобразится, очевидно, площадью бесконечно-тонкой каемки, заштрихованной на чертеже. Она состоит из двух прямоугольников (площадь каждого из них $2dx$) и квадратика $cfgn$ (площадь его $(dx)^2$). Наш чертеж показывает, что, чем тоньше каемка, тем незначительнее площадь квадратика не только сама по себе, но и по сравнению с площадью остальной части каемки. Вот почему в бесконечно-тонкой каемке площадь квадратика исчезает, и следовательно:

$$dy = 2 \cdot 2dx = 4dx.$$

Если на чертеже площадь квадратика не исчезает, то лишь потому, что наша каемка лишь изображает бесконечно-тонкую, не будучи таковой в действительности.

Еще лучше выясняется дело, если мы рассмотрим геометрический смысл диференциального отношения $\frac{dy}{dx}$. Если мы вытянем каемку в прямоугольную полоску (отрежем прямоугольник $bcfe$ и приставим его к остальной части каемки), то dy будет площадью прямоугольной полоски, dx ее шириной и, значит, диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ даст длину полоски. Эта длина есть сумма длин двух сторон квадрата 4 *см* и стороны квадратика dx. По мере уменьшения величины dx длина полоски все меньше отличается от 4 *см*. При бесконечной тонкости полоски длина ее, следовательно, будет равна 4 *см*.

Мы уже говорили, что подлинно бесконечно-тонких полосок в природе нет; они представляют лишь абстракцию. Но, с одной стороны, вся математика есть не что иное, как абстрактная наука, имеющая абстрактные объекты исследования; с другой стороны, мы неоднократно имели случай убедиться в том, что это абстрактное понятие (бесконечно-тонкой полоски) представляет ценный инструмент познания конкретных процессов, и в этом отношении оно ничуть не хуже, чем все другие математические абстракции.

§ 10. Вернемся теперь к изучению уравнения,

$$y = x^2. \qquad (14)$$

---

[1]) Разумеется, невозможно начертить бесконечно-малый отрезок так же, как невозможно начертить геометрическую линию без толщины. Это не мешает нам говорить о стороне квадрата как о геометрической линии. Точно так же мы говорим об отрезке be, как о бесконечно-малом, о каемке, заштрихованной на чертеже, как о бесконечно-тонкой и т. д.

Как мы видели, для случая $x=2$, $y=4$ дифференциальное уравнение имело вид:

$$dy=4dx,$$

а дифференциальное отношение равнялось числу 4.

Будем давать числу x другие значения: 3, 4 и т. д. и рассуждать так же, как в § 8. Мы получим тогда для $x=3$, $y=9$

$$dy=(3+dx)^2-9=6dx+(dx)^2.$$

Отбрасывая слагаемое $(dx)^2$ как бесконечно-малое в сравнении с $6dx$, мы получим:

$$dy=6dx.$$

Аналогично получим для $x=4$, $y=16$

$$dy=8dx$$

и т. д.

Для дифференциальных отношений получим следующую таблицу:

x	2	3	4	5
y	4	9	16	25
$\frac{dy}{dx}$	4	6	8	10

Нетрудно усмотреть закономерность: дифференциальное отношение всегда вдвое больше соответствующего значения x.

Доказательство также не представляет затруднений. При произвольном значении переменной x имеем:

$$dy=(x+dx)^2-x^2.$$

Отсюда

$$dy=2x\,dx+(dx)^2.$$

Отбрасывая второе слагаемое, получаем:

$$dy=2x\,dx, \tag{17}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{17'}$$

§ 11. Из двух переменных величин x и y, связанных зависимостью

$$y=x^2, \tag{14}$$

мы можем, как известно, любую считать „независимой“ переменной, или, иначе, „аргументом“; другая будет „функцией“ [1]).

Если мы условимся величину x считать аргументом, а y функцией, то результат предыдущего параграфа мы можем сформулировать так:

---

1) Это значит, что любой из переменной мы можем придавать произвольные значения, и тогда из уравнения (14) находить соответствующие значения другой.

диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ (т. е. отношение диференциала функции к диференциалу аргумента) для функциональной зависимости $y = x^2$ не является постоянной величиной. Значение его зависит от значения аргумента (именно равно двойному значению аргумента). Иными словами, диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ в свою очередь является функцией аргумента x.

Эту функцию $(2x)$ мы нашли, исходя из вида функции y $(y = x^2)$; она, так сказать, „произведена" функцией x^2. Отсюда термин „производная функция", очень употребительный в литературе, хотя он далеко не столь выразителен, как термин „диференциальное отношение".

Производной функцией (еще короче: „производной") мы будем называть ту функцию, которая выражает отношение диференциала данной функции к диференциалу ее аргумента. Таким образом вид производной функции зависит от вида исходной функции. Так, мы показали, что для фунции x^2 производной будет функция $2x$.

§ 12. Перейдем к уравнению

$$y = x^3, \tag{18}$$

в котором снова x будем считать аргументом, а y функцией. Найдем диференциальное уравнение способом, уже трижды примененным (§ 6, 8, 10).

Мы получим:

$$dy = (x + dx)^3 - x^3,$$

$$dy = 3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3.$$

Последние два слагаемых мы можем откинуть. В самом деле, второе слагаемое содержит множителем величину $(dx)^2$, которою, как мы видели, можно пренебречь при наличии первого слагаемого. Третье же слагаемое еще меньше, ибо оно содержит еще более высокую степень величины dx (или, как говорят, является бесконечно-малой величиной более высокого порядка [1]).

Таким образом получаем:

$$dy = 3x^2\,dx. \tag{19}$$

Отсюда мы видим, что диференциальное отношение является снова не постоянной величиной, но функцией аргумента x.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2. \tag{19'}$$

Другими словами, если дана функция x^3, то производная функция будет $3x^2$.

---

[1]) На числовых примерах убедитесь, что, чем меньше dx, тем незначительнее $(dx)^3$ по отношению к $(dx)^2$ и тем более по отношению к dx (ср. стр. 141).

§ 13. Полезным упражнением для читателя будет тем же методом доказать, что для уравнения

$$y = x^4$$

дифференциальное уравнение будет:

$$dy = 4x^3\,dx,$$

и, следовательно, для функции x^4 производная будет $4x^3$.

Теперь напрашивается обобщение, что для уравнения вида

$$y = x^n \tag{20}$$

дифференциальное уравнение будет:

$$dy = nx^{n-1}\,dx. \tag{21}$$

и следовательно для функции x^n производная будет:

$$nx^{n-1}. \tag{22}$$

Для целых положительных значений числа n формула (21) легко доказывается тем же методом, которым мы до сих пор пользовались.

Именно мы имеем:

$$dy = (x+dx)^n - x^n.$$

Если мы, пользуясь формулой бинома Ньютона, раскроем скобки в выражении $(x+dx)^n$, то первый член полученной суммы x^n уничтожится благодаря присутствию выражения $(-x^n)$, и мы получим:

$$dy = nx^{n-1}\,dx + \ldots$$

Многоточием заменены остальные члены, которые содержат множителями вторую, третью и т. д. степени бесконечно-малой величины dx и потому могут быть отброшены. Так доказывается формула (21) для целых положительных значений числа n.

Но она верна и для любых значений числа n без единого исключения. Мы сейчас не будем это доказывать [1].

Упражнения.

1) Диференцировать уравнение: $y = x^{12}$.

По формуле (21) находим:

$$dy = 12x^{11}\,dx.$$

2) Диференцировать уравнение: $y = x^7$.

$$dy = 7x^6\,dx.$$

3) Найти производную функции: $y = x^5$.

---

[1]) Доказательство будет дано в гл. VI.

Производная функция (т. е. функция, представляющая дифференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$) будет $5x^4$.

4) Найти производную функции: $y = x^{10}$.

$$\frac{dy}{dx} = 10x^9.$$

5) Найти значение производной функции $y = x^6$ для значения $x = 2$. Производная будет $6x^5$; ее значение при $x = 2$ будет 192.

6) Чему равно диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ функции $y = x^3$ при $y = 8$?

Находим $\frac{dy}{dx} = 3x^2$; при $y = 8$ значение x будет $x = 2$.

Отсюда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=8} = 12.$$

7) Найти значение производной функции $y = x^3$ для значения $y = a$.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$; значение переменной x находим из уравнения $a = x^3$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=a} = 3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2.$$

8) Найти значение $\frac{dy}{dx}$ для функции $y = x^4$ при $x = a$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = (4x^3)_{x=a} = 4a^3.$$

9) Диференцировать уравнение: $y = \sqrt{x}$.

Представляем это уравнение в виде $y = x^{\frac{1}{2}}$ и применим формулу (21): $dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$. Заменяя степень $x^{-\frac{1}{2}}$ ее выражением $\frac{1}{\sqrt{x}}$, мы получаем: $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Замечание. Мы могли бы получить тот же результат, не прибегая к диференцированию дробной степени. Именно уравнение $y = \sqrt{x}$ может быть представлено также в виде $x = y^2$; диференцируя это уравнение, получим $dx = 2y\, dy$.

Отсюда

$$dy = \frac{dx}{2y} \text{ или } dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

10) Дифференцировать уравнение:

$$y=\sqrt[3]{x};\ y=x^{\frac{1}{3}};\ dy=\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}dx;\ dy=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Можно также преобразовать предварительно уравнение к виду $x=y^3$ и получить (см. замечание к предыдущему примеру)

$$dx=3y^2\,dy;\ dy=\frac{dx}{3y^2};\ dy=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

11) Дифференцировать уравнение: $s=\sqrt{t^3}$.

Представляя уравнение в виде $s=t^{\frac{3}{2}}$, получаем:

$$ds=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt \text{ или } ds=\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt.$$

Получить тот же результат, освобождая уравнение $s=\sqrt{t^3}$ от иррациональности.

12) Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z=\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Имеем $z=t^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}.$$

13) Найти значение производной функции $z=\frac{1}{\sqrt{t}}$ при значении $t=4$; $\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{2\sqrt{4^3}}=\pm\frac{1}{16}$; двойной знак обусловлен двойным значением $\sqrt{4}=\pm 2$.

14) Найти значение производной $\frac{dz}{dt}$ функции $z=\frac{1}{\sqrt{t}}$ при значении $z=\frac{1}{2}$; $\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}$; значение $t=4$; следовательно $\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{16}$; двойного знака нет, потому что известно, что $z=\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}$, а не $-\frac{1}{2}$.

15) Найти производную $\frac{du}{dv}$ функции $u=\frac{1}{v^2}$.

$$u=v^{-2};\ \frac{du}{dv}=-2v^{-3};\ \frac{du}{dv}=-\frac{2}{v^3}.$$

16) Дифференцировать уравнение: $u=\frac{1}{v^3}$.

$$u=v^{-3};\ du=-3v^{-4}\,dv;\ du=-\frac{3dv}{v^4}.$$

17) Дифференцировать уравнение: $v=\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$.

$$v=u^{-\frac{1}{3}};\ dv=-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\,du;\ dv=-\frac{du}{3u\sqrt[3]{u}}.$$

Замечание. В последних двух примерах мы дифференцировали одно и то же уравнение, только в различных формах.

$$\left(u=\frac{1}{v^3}\text{ и }v=\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\right).$$

Результаты различаются также лишь по внешнему виду. Так, например, результат примера 17 может быть представлен в форме

$$du=-3u\sqrt[3]{u}\,dv.$$

Заменяя переменное u его выражением через v $\left(u=\frac{1}{v^3}\right)$, получаем: $du=-\frac{3dv}{v^4}$, т. е. результат примера 16.

18) Найти значение производной $\frac{ds}{dt}$ функции $s=\frac{1}{t^4}$ при $t=2$.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2}=(-4t^{-5})_{t=2}=\left(-\frac{4}{t^5}\right)_{t=2}=-\frac{1}{8}.$$

19) Найти производную функции $\sqrt{u^5}$.

$\sqrt{u^5}=u^{\frac{5}{2}}$, производная функция будет

$$\frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{u^3}.$$

20) Найти значение производной функции $\sqrt{u^3}$ для $u=9$.

Производная функция будет: $\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{u}$; искомое значение будет: $\left(\frac{3}{2}\sqrt{u}\right)_{u=9}=\pm 4\frac{1}{2}$.

Замечание. Ввиду того, что функция $y=\sqrt{x}$ часто встречается

в задачах, полезно запомнить, что ее производная $\frac{dy}{dx}$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а дифференциальное уравнение имеет вид

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Точно так же полезно заметить особо, что дифференциальное уравнение для уравнения $y = \frac{1}{x^n}$ имеет вид

$$dy = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}}.$$

В частности, для уравнения $y = \frac{1}{x}$ дифференциальное уравнение имеет вид

$$dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

21) $y = \frac{1}{x^4}$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^5}.$$

22) Чему равно дифференциальное отношение для уравнения $y = \frac{1}{x^2}$ при $x = -3$?

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-3} = \left(-\frac{2}{x^3}\right)_{x=-3} = \frac{2}{27}.$$

23) Найти значение производной функции $\frac{1}{x}$ при $x = -3$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-3} = -\frac{1}{9}.$$

§ 14. Рассмотрим особо два простейших случая уравнения $y = x^n$, именно: 1) случай $n = 1$, 2) случай $n = 0$.

1) $n = 1$, т. е. $y = x^1$; по общей формуле получаем:

$$dy = 1 \cdot x^0\,dx, \text{ т. е. (так как } x^0 = 1)\ dy = dx.$$

Результат можно проверить непосредственно, так как из равенства переменных y и x следует равенство их дифференциалов.

2) $n = 0$, т. е. $y = x^0$; по общей формуле получаем:

$$dy = 0 \cdot x^{-1}\,dx, \text{ т. е. } dy = 0.$$

Результат можно объяснить так: уравнение $y = x^0$ есть не что иное, как „уравнение“ $y = 1$; оно показывает, следовательно, что величина y сохраняет постоянную величину, т. е. что величина y не изменяется, не растет вовсе. Ее приращение должно, следовательно, равняться нулю: $dy = 0$.

Следует обратить внимание на то, что такое же рассуждение применимо и к случаю $y = c$, где c — некоторая постоянная величина. Итак, если $y = c$, то $dy = 0$.

Что касается производной, то в первом случае ($y = x$) она равна единице, во втором же случае ($y = c$, в частности $y = 1$) равна нулю [1]).

§ 15. Прежде чем мы перейдем к дифференцированию более сложных уравнений, введем еще некоторые новые обозначения, которые будут полезны в дальнейшем.

Пусть мы имеем ряд уравнений:

$$y = x^2,\ z = x^2,\ t = x^2,\ u = x^2 \text{ и т. д.}$$

Дифференцируя их, мы получаем: $dy = 2x\,dx$; $dz = 2x\,dx$; $dt = 2x\,dx$; $du = 2x\,dx$ и т. д.

Мы замечаем, что по существу во всех этих случаях мы решаем одну и ту же задачу: именно, находим дифференциал одной и той же функции (x^2), которая только обозначается нами то через y, то через z, то через t и т. д. Так как совершенно несущественно, какой буквой обозначена функция, то желательно вообще избавиться от этого обозначения. Это достигается тем, что мы пишем:

$$d(x^2) = 2x\,dx.$$

Такая запись имеет двойную выгоду: во-первых, она заменяет наши четыре записи одновременно и освобождает нас от произвола в обозначении; во-вторых, она короче, чем, например, запись: $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$. Следует помнить, что символы $d(x^2)$ и $(dx)^2$ представляют совершенно различные вещи. Мы видели (§ 10), что величина $d(x^2)$ равна $2x\,dx + (dx)^2$ и что величина $(dx)^2$ может быть отброшена как бесконечно-малая высшего порядка малости, так что получаем:

$$d(x^2) = 2x\,dx.$$

Упражнения.

1) $d(x^3) = 3x^2\,dx$.

2) $d(x^5) = 5x^4\,dx$.

3) $d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

4) $d\dfrac{1}{x} = -\dfrac{dx}{x^2}$.

5) $d\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\dfrac{dx}{2\sqrt{x^3}}$.

6) $d5 = 0$.

7) $d1 = 0$.

8) $d(mx + n) = m\,dx$ (см. § 6).

9) $d(t^5) = 5t^4\,dt$.

10) $d\sqrt{s} = \dfrac{ds}{2\sqrt{s}}$.

11) $d\dfrac{1}{v^3} = -\dfrac{3dv}{v^4}$.

12) $d\dfrac{1}{u^2} = -\dfrac{2du}{u^3}$.

---

[1]) Собственно говоря, в обоих этих случаях дифференциальное отношение $\dfrac{dy}{dx}$ уже не является функцией: оно представляет постоянную величину, но ради общности и в этом случае говорят о производной „функции".

Сообразно с таким обозначением мы получаем новое обозначение диференциального отношения. Вместо того чтобы писать $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, мы напишем:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

Само получение производной функции облегчается благодаря такому обозначению. Так, желая вычислить производную от функции x^2, мы пишем $\frac{d(x^2)}{dx}$, вычисляем диференциал числителя $d(x^2) = 2x\,dx$, после чего происходит сокращение дроби на dx.

Упражнения.

1) $\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{3x^2\,dx}{dx} = 3x^2.$

2) $\frac{d(x^7)}{dx} = \frac{7x^6\,dx}{dx} = 7x^6.$

3) $\frac{d(x^{12})}{dx} = 12x^{11}.$

4) $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

5) $\frac{dc}{dx} = 0$, если c постоянная величина.

6) $\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$

7) $\frac{d\left(\frac{1}{x^3}\right)}{dx} = -\frac{3}{x^4}.$

8) $\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

9) $\frac{d(mx+n)}{dx} = m$ (см. § 7).

Для сокращения письма для обозначения производной функции часто употребляется еще один символ, впрочем мало выразительный. Именно, вместо $\frac{d(x^2)}{dx}$ пишут $(x^2)'$; вместо $\frac{d(x^3)}{dx}$ пишут $(x^3)'$ и т. д.

Упражнения.

1) $(x^2)' = 2x.$

2) $(x^3)' = 3x^2.$

3) $(x^4)' = 4x^3.$

4) $(x)' = 1.$

5) $(3)' = 0.$

6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

7) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

8) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = -\frac{5}{x^6}.$

9) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

10) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Тот же значок употребляется и при развернутой записи уравнения.

Например, вместо $y=x^2$, $\frac{dy}{dx}=2x$, пишут: $y=x^2$, $y'=2x$. Вместо $y=x^3$, найти $\frac{dy}{dx}$, пишут: $y=x^3$, найти y'.

Упражнения.

1) $y=x^3$; $y'=3x^2$.

2) $y=\frac{1}{x}$; $y'=-\frac{1}{x^2}$.

3) $y=\frac{1}{x^7}$; $y'=-\frac{7}{x^8}$.

4) $y=\sqrt{x}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) $y=\sqrt[4]{x}$; $y'=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

6) $y=\sqrt[3]{x^2}$; $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

7) $y=mx+n$; $y'=m$.

§ 16. Пусть теперь требуется найти дифференциал функции $3x^2$. Мы знаем, что $d(x^2)=2x\,dx$; напрашивается вывод, что $d(3x^2)=3\cdot 2x\,dx=6x\,dx$.

Этот вывод легко доказать; мы знаем, что если m — постоянная величина, то $d(mu)=m\,du$ (§ 4).

Если мы теперь под буквой u будем разуметь выражение x^2, то получим:

$$d(mx^2)=m\,d(x^2)=m\cdot 2x\,dx.$$

В нашем примере m было взято равным 3.

Совершенно очевидно, что приведенное доказательство может быть повторено для функции u совершенно произвольного вида. Мы получаем важное предложение, которое можно формулировать так: **постоянный сомножитель может быть вынесен за знак дифференциала.**

Это предложение позволяет значительно расширить число функций, которые мы можем дифференцировать.

Упражнения.

1) $d(2x^4)=2d(x^4)=8x^3\,dx$.

2) $d\left(\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{1}{3}d(x^3)=x^2\,dx$.

3) $d\left(\frac{2}{3}t^5\right)=\frac{2}{3}d(t^5)=\frac{10}{3}t^4\,dt$.

4) $d(2\sqrt{s})=\frac{ds}{\sqrt{s}}$.

5) $d\left(\frac{2}{3\sqrt{s}}\right)=-\frac{ds}{3\sqrt{s^3}}$.

6) $d(5t)=5dt$.

7) $d\left(-\frac{1}{2t^2}\right)=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{dt}{t^3}$.

8) $d(-4\sqrt[4]{s})=-\frac{ds}{\sqrt[4]{s^3}}$.

9) $\frac{d(2t^4)}{dt}=8t^3$.

10) $\frac{d\left(\frac{4}{x}\right)}{dx}=-\frac{4}{x^2}$.

11) $d(as^6) = 6as^5\,ds$ [1]).

12) $d(ax^4) = 4ax^3\,dx$ [1]).

13) $y = \frac{x^3}{5}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x^2$.

14) $y = \frac{1}{5x^3}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5x^4}$.

15) $y = a\sqrt{x}$; $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$.

§ 17. Пусть требуется найти дифференциал функции $x^2 + x^3$. Напрашивается ответ:

$$d(x^2 + x^3) = 2x\,dx + 3x^2\,dx.$$

Справедливость его вытекает из общего предложения; если u и v какие-нибудь две функции, то

$$d(u + v) = du + dv.$$

Это предложение почти очевидно; оно выражает, что бесконечно-малое приращение суммы составляется из суммы приращений слагаемых.

Если это кажется недостаточным, то следующее простое доказательство подтверждает справедливость предложения. По общему методу (§ 4, 6, 8, 10, 12) находим:

$$d(u + v) = [(u + du) + (v + dv)] - (u + v) = du + dv.$$

Доказанное предложение формулируется так: д и ф е р е н ц и а л с у м м ы р а в е н с у м м е д и ф е р е н ц и а л о в.

Разумеется, оно распространяется как на случай многих слагаемых, так и на случай разности, которую можно рассматривать всегда как алгебраическую сумму.

Примеры.

1) $d(x^2 + x^4) = 2x\,dx = 4x^3\,dx = (2x + 4x^3)\,dx$.

В подобной форме, вынося дифференциал аргумента за скобки, полезно научиться представлять дифференциал суммы сразу без промежуточной выкладки. Легко видеть, что в скобках будет стоять сумма производных.

2) $d(x - x^3) = (1 - 3x^2)\,dx$.

3) $d(2x^2 - 3x^4) = (4x - 12x^3)\,dx$.

4) $d\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{x^3}\right)dx$.

5) $d\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{3} - x^2\right) = \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{3} - 2x\right)dx$.

6) $d(4x^3 + 5) = 12x^2\,dx$.

Легко заметить, что постоянное слагаемое 5 не влияет на результат, так как дифференциал постоянной величины есть нуль (ср. § 6).

---

[1]) a — постоянная величина.

7) $d\left(3x^2-\frac{3}{x^2}-3\right)=\left(6x+\frac{6}{x^3}\right)dx.$

8) $d(12t^2-6t+4)=(24t-6)\,dt.$

9) $d\left(\frac{3}{\sqrt[3]{s}}-\frac{2}{\sqrt{s}}\right)=\left(-\frac{1}{s\sqrt[3]{s}}+\frac{1}{s\sqrt{s}}\right)ds.$

10) $d\left(\frac{1}{4u^2}-\frac{3}{u}+1\right)=\left(-\frac{1}{2u^3}+\frac{3}{u^2}\right)du.$

11) $\frac{d\left(-\frac{1}{2}x^3+x+1\right)}{dx}=-x+1.$

12) $\frac{d(14x-3x^2)}{dx}=14-6x.$

13) $\frac{d(2t-3t^2)}{dt}=2-6t.$

14) $\frac{d(1+2t+\sqrt{t})}{dt}=2-\frac{1}{2\sqrt{t}}.$

15) $y=4x+2-\sqrt[3]{x};\ y'=4-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

§ 18. Изложенные выше теоретические сведения позволяют уже применить полученные результаты к решению задач конкретного содержания. Однако прежде этого мы хотели бы выполнить обещание, данное в § 9, и показать, каким образом можно достигнуть логического очищения дифференциального исчисления от противоречия, порождаемого пренебрежением бесконечно-малыми величинами.

Мы уже сказали, что это очищение покупается ценой отказа от рассмотрения бесконечно-малых величин вообще и дифференциалов в частности.

За основное понятие приходится взять не понятие дифференциала, а понятие производной функции. Ее конечно не приходится определять как функцию, выражающую отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$. Она определяется как предел, к которому стремится отношение приращений переменных величин.

Пусть например (ср. § 8) переменные y и x связаны уравнением $y=x^2$ и пусть взято значение величины $x=2$, и следовательно

$$y=4.$$

Пусть далее величина x получила приращение Δx [греческой буквой „дельта“ (Δ) мы заменяем латинскую букву d, чтобы подчеркнуть, что приращение это не является дифференциалом, т. е. бесконечно-малым].

Обозначая приращение, получаемое величиной y, через Δy, мы как в § 8, найдем:

$$\Delta y = 4\,\Delta x + (\Delta x)^2. \tag{22}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + \Delta x. \tag{23}$$

Исходным пунктом теперь служит не равенство (22), а равенство (23). Оно дает отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращений Δy и Δx переменных величин (y и x).

Это отношение равно $4 + \Delta x$ (но не 4). Но что делается с этим отношением, когда приращение Δx уменьшается неограниченно? Оно приближается к числу 4. Так, при $\Delta x = 0{,}1$, оно равно 4,1; при $\Delta x = 0{,}01$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}01$; при $\Delta x = 0{,}001$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}001$ и т. д.

Таким образом число 4 является пределом, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (когда Δx неограниченно уменьшается), но отнюдь не значением отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ никогда не принимает значения 4, но лишь стремится к нему.

Совершенно аналогично можно доказать, что при $x = 3$ ($y = 9$) отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет пределом число 6; при $x = 4$ — число 8 и т. д. Вообще отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет пределом число $2x$. Это обстоятельство записывают так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad (\lim = \text{limes} — \text{предел}).$$

Вот этот-то предел и получает теперь название производной функции, и дифференциальное исчисление становится исчислением пределов выражений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для различного вида зависимостей между переменными y и x.

С чисто логической точки зрения такая постановка вопроса представляет неоспоримые преимущества. Теперь не приходится иметь дело с бесконечно-малыми величинами, которыми мы пренебрегаем, но которые в то же время не являются „чистыми“ нулями. Определяя производную функцию как предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю, мы устраняем из рассмотрения дифференциалы как таковые, т. е. как величины бесконечно-малые. От выражения $\frac{dy}{dx}$ для производной функции можно либо отказаться вовсе (например,

обозначая производную через y'), либо сохранить обозначение $\frac{dy}{dx}$, но смотреть на него не как на дробь с числителем dy и знаменателем dx, а как на нераздельный символ, своим видом напоминающий о том выражении, пределом которого является производная функция.

Если бы дело шло только о создании логического аппарата, который работал бы сам по себе и сам для себя, то, устранив из рассмотрения бесконечно-малые величины и изгнав дифференциалы из математики, можно было бы праздновать победу над теми затруднениями, которые доставляли столько хлопот математикам и философам в течение двух веков. Но исчисление бесконечно-малых возникло из потребностей практики, и с течением времени его связь с естествознанием и техникой (а в позднейшее время и с социальными науками) все более и более укреплялась и становилась все более и более плодотворной. Между тем полное изгнание бесконечно-малых величин сделало бы эту связь если не невозможной, то чрезвычайно затруднительной. В этом состоит истинная причина того, что авторы большинства руководств и трактатов формально сохраняют бесконечно-малые величины и дифференциалы, что дает им и формальное право сохранить за исчислением производных название „дифференциальное исчисление".

Говоря о формальном сохранении бесконечно-малых величин и дифференциалов, мы имеем в виду следующее: исторически бесконечно-малая величина появилась в математике как величина, которою при известных обстоятельствах можно в вычислениях пренебрегать, получая однако теоретически точный результат. На этом свойстве ее основывались правила операций с бесконечно-малыми величинами, в частности правила вычисления дифференциалов. Эти-то правила и нужно было сохранить, но сохранить их лишь по форме, потому что по содержанию классическая концепция бесконечно-малой величины оказалась совершенно неприемлемой для математики XIX века.

Понятия бесконечно-малой величины и дифференциала и поныне играют в математике очень важную роль, но в них вкладывают теперь совсем иное содержание, чем то, которое они имели при своем возникновении и на первых этапах своего развития.

Бесконечно-малая величина определяется обыкновенно как переменная величина, имеющая своим пределом нуль [1]). Конечно термин „бесконечно-малая" не соответствует этому определению, и правы те авторы, которые, стоя на точке зрения теории пределов, считают, что лучше было бы пользоваться термином „бесконечно-уменьшающаяся" величина [2]). Если все же термин „бесконечно-малая величина" удерживается в литературе, то не столько (как думают иные) в силу исторической традиции, сколько в силу того, что бесконечно-уменьшающаяся величина призвана заместить бесконечно-малую величину; в силу того, что правила операций над бесконечно-уменьшающимися величинами формально

---

1) Мы не вдаемся в критику этого определения, потому что это отвело бы нас слишком далеко от предмета изложения.

2) См. например Грэнвиль В. и Лузин Н. Н., Элементы дифференциального и интегрального исчисления, ч. I, стр. 99, изд. 8, Гиз, 1930.

совпадают с правилами операций над бесконечно-малыми величинами классической математики.

Что касается понятия диференциала, то его определение дается поразному разными авторами. Все эти определения, однако, страдают крайней искусственностью [1]). Вот наиболее простой по идее и, так сказать, наиболее откровенный способ формального введения диференциала: под диференциалами dy и dx разумеют две величины, которые должны удовлетворять единственному требованию, чтобы их отношение равнялось величине производной от данной функции. Так, пусть дана функция $y = x^2$. Ее производная определяется как предел отношения, к которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю. Этот предел равен $2x$. Пусть, например, $x = 3$, так что производная имеет значение $2x = 6$. За диференциалы dx и dy мы можем, согласно этому определению, принять, например, величины 1 и 6 или 1000 и 6000 или 1 000 000 000 и 6 000 000 000.

Искусственность этого определения бьет в глаза. Но оно дает формальную возможность написать вместо производной функции отношение $\frac{dy}{dx}$ и рассматривать выражение $\frac{dy}{dx}$ не как голый символ, а как дробь с числителем dy и знаменателем dx. Благодаря этому все формулы диференциального исчисления приобретают гораздо большую простоту и симметричную структуру. Этим обстоятельством и мотивируется обычно введение диференциалов. Но эта мотивировка не может удовлетворить учащегося, который не мирится с тем, что простота и симметрия формул достигаются ценой введения совершенно произвольно определяемых понятий. Он стремится разгадать, какова природа этих понятий, что соответствует им в действительном мире. То, что сообщается ему о диференциале, не дает ему этой разгадки, ибо от него остается скрытой историческая эволюция, которую проделало понятие диференциала, а значит, остаются скрытыми и те побуждения, которыми руководились авторы современного определения диференциала. Вот почему обычно ни одно понятие математики не усваивается с таким трудом, как понятие диференциала.

Беда усугубляется тем, что, когда учащемуся, наконец, начинает казаться, что он уяснил себе понятие диференциала, тогда на него надвигаются новые неприятности: вступая в соприкосновение с приложениями диференциального исчисления к естествознанию или к технике, он должен разучиваться тому, чему с таким трудом научился. Он должен теперь представлять себе диференциал как ничтожно-малую величину, и притом отнюдь не бесконечно-уменьшающуюся переменную величину, а как

[1]) Ощущая эту искусственность, многие авторы неоднократно делали попытку „честно" отказаться вовсе от рассмотрения бесконечно-малых величин и диференциалов. Начало этих попыток датируется еще концом XVIII в. (Лагранж). В недавнее время появился курс германского математика Л. Бибербаха (есть русский перевод: Л. Бибербах, Диференциальное и интегральное исчисление, Гиз., 1923, 2 части), в котором нет ни бесконечно-малых величин, ни диференциалов.

величину постоянную, но столь малую, что пренебрежение ею не влечет за собой ошибки.

Такое понимание диференциала совершенно не вяжется со всем тем, что говорилось о диференциале в диференциальном исчислении, и сколько бы ни старались авторы руководств сгладить это противоречие—старания их не достигают своей цели [1]).

Во избежание недоразумений подчеркнем, что сказанным выше отнюдь не отрицается необходимость логического обоснования исчисления анализа бесконечно-малых. Но каково бы оно ни было (а обоснование, даваемое современной математикой, на наш взгляд, не является удовлетворительным), во всяком случае при изложении основных понятий исчисления бесконечно-малых необходимо, чтобы перед учащимся эти поня-

---

1) Для того чтобы научить читателя свободно пользоваться диференциалом в технических приложениях математики, мы и должны были с самого начала рассматривать диференциал как бесконечно-малую, а не как бесконечно-умаляющуюся величину. Вот почему мы и приведены были к необходимости в основу всего изложения положить не концепцию предела, а концепцию бесконечно-малой величины. Это и дало нам возможность ввести диференциал с самых первых страниц этой книги. Без этого столь раннее введение диференциала (с § 10 1-й главы) и, более того, диференциальных уравнений (с § 12 2-й главы) было бы невозможным. Это почти очевидное обстоятельство приходится, однако, оговаривать, потому что странным образом оно ускользнуло от внимания некоторых критиков, которые отмечают как большое достижение то, что в моей книге учащийся научается владеть диференциалом и оперировать с ним как с малой величиной, высшими степенями которой можно пренебрегать (проф. Я. Н. Шпильрейн в „Успехах физических наук“ № 5—6 за 1932 г., стр. 747), но которые вместе с тем считают, что введение бесконечно-малых величин взамен предельных операций, с которых обычно начинают изложение анализа, — составляет недостаток книги (там же, стр. 748).

Я, естественно, не могу согласиться с такой оценкой так же, как и вообще не могу согласиться с утверждением Я. Н. Шпильрейна, что понятие предела легко доступно даже ребенку. Однако его недовольство, которое мне кажется неосновательным, я все же могу понять, так как оно исходит из определенной, хотя и неверной, с моей точки зрения, позиции: он считает, что к операциям с диференциалом нетрудно подойти с точки зрения теории пределов. Короче говоря, он считает, что принципиально традиционный путь изложения отнюдь не плох. Но я не могу понять того критика, который явно не удовлетворен этим традиционным путем и который вместе с тем отвергает путь, мною предлагаемый, хотя не указывает никакого иного пути выхода из положения. Я имею в виду т. С. А. Яновскую („Книга и пролетарская революция“ № 9—10 за 1932 г., стр. 76—87), которая, считая, что моя книга является, может быть, наилучшим из всех учебников (стр. 77), вместе с тем не жалеет слов, чтобы выразить свое негодование по поводу основного принципа, на котором она построена: „полный разрыв теории и практики“ (стр. 83), „мистификация читателя“ (стр. 84), „просто поверил буржуазным математикам“ (стр. 84), „никаких действительных изменений не рассматривает“ (стр. 85), „разложение изменения в совокупность неизменных состояний“ (стр. 85) и т. д. и т. п. Вместе с тем т. Яновская не одобряет и того способа изложения, который принят в современных учебниках, ибо, говорит она, современная математика утеряла те преимущества, которые связаны с употреблением диференциала (стр. 85). Но ни слова о том, по какому же пути нужно итти, чтобы избежать ее неодобрения, С. А. Яновская в своей большой статье не говорит. Считая, что добросовестный критик может осуждать явления, кажущиеся ему отрицательными, лишь в том случае, если он имеет некоторые положительные идеалы, я жду от т. Яновской ясного и по возможности простого ответа на совсем простой и вполне законный вопрос: как нужно впервые объяснить студенту понятие диференциала?

тия выступали в их развитии. Игнорирование этого требования приводит к тому, что исчисление бесконечно-малых в той его форме, которая явилась необходимым продуктом исторического развития, воспринимается учащимся как произвольное хитросплетение затейливой фантазии.

После сделанных в этом параграфе разъяснений, касающихся логической стороны дела, мы можем, продолжая изложение, перейти к решению задач, в которых выведенные нами правила диференциального исчисления найдут себе применение.

§ 19. *Задача 42.* Зная, что путь s (в метрах), пройденный свободно падающим телом, не имевшим начальной скорости, выражается через время t (в секундах) уравнением:

$$s = \frac{1}{2} gt^2, \quad (g = 9{,}8), \tag{24}$$

найти закон изменения скорости v падения.

В § 3 мы показали, что скорость всякого движения может быть представлена как диференциальное отношение $\frac{ds}{dt}$.

Вычисляя производную функцию $\frac{ds}{dt}$ по формуле (24), получаем:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt. \tag{25}$$

Скорость падения, таким образом, пропорциональна времени падения.

Если мы хотим найти зависимость скорости от пройденного пути, то должны в формулу (25) подставить выражение t через s, даваемое уравнениями движения (24)

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Мы получаем:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gs}. \tag{26}$$

Мы указали в начале этой главы (§ 1), что задачи диференциального и интегрального исчислений являются задачами обратного характера. В данном случае мы можем использовать это обстоятельство для проверки полученных результатов.

Именно, если известно, что скорость движения v выражается через время t уравнением:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt, \tag{25}$$

то получаемое отсюда диференциальное уравнение

$$ds = gt\,dt$$

после интеграции дает:

$$\int_0^s ds = \int_0^t gt\,dt,$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2. \qquad \text{(§ 11 гл. II)}$$

Точно так же если известно, что скорость выражается через пройденный путь формулой:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gs}, \qquad (26)$$

то мы получаем диференциальное уравнение

$$ds = \sqrt{2gs}\,dt$$

(выражающее, что бесконечно-малый путь равен произведению скорости на бесконечно-малый промежуток времени).

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{ds}{\sqrt{2gs}} = dt$$

(это уравнение можно получить из (26) непосредственно; оно выражает, что бесконечно-малое время получается делением бесконечно-малого пути на скорость).

Интеграция дает:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gs}} = \int_0^t dt.$$

Выполняя интегрирование, имеем:

$$\sqrt{\frac{2s}{g}} = t.$$

Разрешая полученное уравнение относительно s, мы представим его в исходном виде:

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

§ 20. *Задача 43.* Зная, что площадь круга s выражается через радиус его r формулой

$$s = \pi r^2, \qquad (27)$$

найти выражение длины окружности C через радиус.

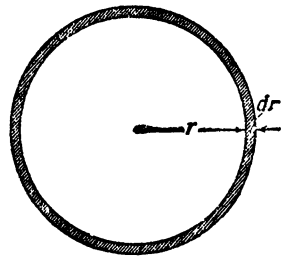
Пусть радиус окружности r увеличился на бесконечно-малую длину dr (см. черт. 43), тогда увеличение ds площади круга представится площадью бесконечно-тонкого колечка, заштрихованного на чертеже. Если вытянуть это колечко по прямой линии, получим бесконечно-тонкую

полоску, которую можно считать прямоугольником. Длина окружности будет основанием этого прямоугольника; величина dr — высотой. Деля площадь прямоугольника ds на высоту dr, мы должны получить длину основания, т. е. длину окружности. Итак, искомая длина окружности равна $\frac{ds}{dr}$. Находя это диференциальное отношение из формулы (27), получаем:

$$C = \frac{ds}{dr} = 2\pi r. \tag{28}$$

Обратно, мы могли бы получить формулу (27), зная, что длина окружности C выражается через радиус формулой:

$$C = 2\pi r.$$



Черт. 43.

Именно, мы нашли бы прежде всего, что площадь колечка выражается произведением $C\,dr$; эта площадь дает бесконечно-малое увеличение ds площади круга s. Поэтому

$$ds = C\,dr = 2\pi r\,dr. \tag{28'}$$

Легко видеть, что полученное уравнение равносильно уравнению (28). Интегрируя его нужно иметь в виду, что при нулевой длине радиуса площадь круга тоже равна нулю. Беря соответственно этому нижние пределы интегралов, получаем:

$$\int_0^s ds = \int_0^r 2\pi r\,dr,$$

откуда

$$s = \pi r^2.$$

Задача 43а. Зная, что объем шара v выражается через его радиус r формулой

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3, \tag{29}$$

найти выражение поверхности шара s через радиус его.

Рассуждение, аналогичное проведенному в предыдущей задаче, показывает, что поверхность шара s представится диференциальным отношением $\frac{dv}{dr}$, и, пользуясь уравнением (29), находим

$$s = \frac{dv}{dr} = 4\pi r^2. \tag{30}$$

Обратно, зная, что поверхность шара s равна $4\pi r^2$, можем найти объем его v, исходя из диференциального уравнения

$$dv = s\,dr = 4\pi r^2\,dr.$$

Интеграция его (нижние пределы — нули, как в предыдущей задаче) дает снова:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

§ 21. *Задача 44.* При растяжении медной проволоки (длиной в 1 *м* с поперечным сечением 1 *мм*^{2}) на x метров затрачивается работа A *кгм*, причем величина A связана с величиной x зависимостью:

$$A = 5000\,x^2\ ^{1}). \tag{31}$$

Как велика сила растяжения F, если она удлиняет нашу проволоку на $x = 0{,}2$ *мм*?

Если бы в продолжение всего времени удлинения проволоки сила ее натяжения оставалась постоянной, то величина силы получилась бы простым делением работы A (*кгм*) на величину удлинения x (*м*). Мы получили бы:

$$F = \frac{5000x^2}{x} = 5000x = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1 \text{ кгм}. \tag{32}$$

Но этот результат не отвечает истине, потому что сила натяжения проволоки не оставалась постоянной при растяжении. Она увеличивалась по мере удлинения проволоки. Если мы хотим знать величину F, мы должны найти силу натяжения в тот момент, когда удлинение достигло величины 0,2 *мм*. Для этого мы должны взять бесконечно-малое удлинение dx проволоки, имевшее место в конце процесса (при $x = 0{,}2$ *мм*), и на него разделить бесконечно-малую работу dA, затраченную для этого растяжения. Мы получим:

$$F = \frac{dA}{dx} = 10\,000x = 10\,000 \cdot 0{,}0002 = 2 \text{ кгм}. \tag{33}$$

Формула (33) показывает, что сила натяжения пропорциональна удлинению (закон Гука). Таким образом в начале процесса она равна нулю, в конце процесса равна 2 *кгм*. Полученный нами в формуле (32) результат 1 *кгм* дает, таким образом, лишь среднюю величину силы натяжения.

И в этой задаче мы можем с помощью формулы (33) снова найти исходное уравнение (31). Именно, мы можем, зная величину силы $F = 10\,000\,x$, найти работу dA бесконечно-малого удлинения dx:

$$dA = 10\,000x\,dx.$$

Интеграция даст исходное уравнение задачи.

§ 22. *Задача 45.* Работа A (эрг), совершаемая силой отталкивания (одноименных) зарядов e_1 и e_2 при их удалении на расстояние r *см* друг от друга, если исходное расстояние их было R *см*, выражается формулой:

$$A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \tag{34}$$

---

[1]) Эта зависимость остается верной, да и то приближенно, лишь для небольших растяжений; коэфициент при x^2 округлен.

Найти зависимость силы отталкивания зарядов F от величины r.

Мы уже показали (§ 2 этой главы), что диференциальное отношение $\frac{dA}{dr}$ дает величину искомой силы (в динах). Мы только не умели прежде непосредственно вычислить это отношение. Теперь мы в состоянии это сделать. Помня, что величины e_1e_2 и R являются постоянными величинами, мы получаем:

$$dA = e_1e_2\, d\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = e_1e_2\, d\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{e_1e_2\,dr}{r^2}.$$

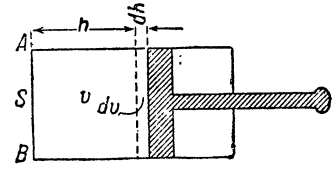
Отсюда:

$$F = \frac{dA}{dr} = \frac{e_1e_2}{r^2}. \qquad (35)$$

Мы получили закон Кулона. В § 11 гл. II мы видели, как решается задача, обратная рассмотренной, и из формулы (35) получается формула (34).

§ 23. *Задача 46.* Зная, что работа A, затрачиваемая на сжатие воздуха до объема v при адиабатном процессе, выражается формулой:

$$A = \frac{p_0v_0}{0{,}4}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{0{,}4} - 1\right], \qquad (36)$$



Черт. 44.

где v_0 есть начальный объем газа, а p_0 — начальное давление его на единицу поверхности, найти зависимость давления p воздуха на единицу поверхности от объема, занимаемого воздухом.

Представим себе, что воздух сжимается в цилиндре (черт. 44) с поперечным сечением S, и обозначим через h расстояние поршня до основания AB цилиндра.

Тогда давление воздуха на поршень площадью S выразится частным от деления бесконечно-малой работы dA на длину бесконечно-малого пути, пройденного поршнем. Эта длина представится как $(-dh)$; знак минус стоит потому, что, производя работу сжатия, мы уменьшаем величину h, так что dh есть величина отрицательная.

Итак, величина $-\frac{dA}{dh}$ представит давление на поршень площадью S и, значит, давление p на единицу площади будет:

$$p = -\frac{dA}{S\,dh}. \qquad (37)$$

Черт. 44 показывает, что величина $S\,dh$ есть не что иное, как величина dv бесконечно-малого объема воздуха. Поэтому формула (37) может быть переписана так:

$$p = -\frac{dA}{dv}. \qquad (38)$$

Диференциальное отношение $\frac{dA}{dv}$ может быть найдено из формулы (36); мы получаем:

$$dA = -\frac{p_0 v_0}{0{,}4} d\left[\frac{v_0^{0,4}}{v^{0,4}} - 1\right] = \frac{p_0 v_0}{0{,}4} d\left[\frac{v_0^{0,4}}{v^{0,4}}\right] =$$

$$= \frac{p_0 v_0}{0{,}4} v_0^{0,4}\, d(v^{-0,4}) = \frac{p_0 v_0^{1,4}}{0{,}4} \cdot -0{,}4 v^{-1,4} dv =$$

$$= -\frac{p_0 v_0^{1,4}}{v^{1,4}} dv.$$

Отсюда

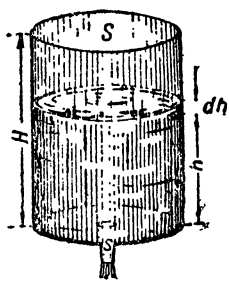
$$p = -\frac{dA}{dv} = \frac{p_0 v_0^{1,4}}{v^{1,4}}.$$

Последнее уравнение может быть представлено в форме:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1,4}. \tag{39}$$

В § 16 гл. II мы видели, как из этого уравнения (формула Пуассона) получается исходное уравнение нашей задачи.

§ 24. *Задача 47.* Вода наполняет цилиндрический сосуд высотой H и с поперечным сечением S. По открытии крана она начинает вытекать из отверстия площадью s; зная уровень воды в сосуде h, мы можем определить время t, протекшее от начала истечения, по формуле:



Черт. 45.

$$t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{H} - \sqrt{h}). \tag{40}$$

Найти выражение для скорости истечения воды из сосуда.

Скорость истечения есть количество воды, протекающее через единицу площади в единицу времени. Так как скорость эта все время изменяется, то необходимо разделить бесконечно-малое количество воды, протекающее через единицу площади, на бесконечно-малое время dt.

Требуемое количество воды можно исчислить так: через бесконечно-малый промежуток времени уровень воды понизится; величина $-dh$ (почему знак минус?) представит высоту бесконечно-тонкого слоя воды, вытекшего из сосуда. Следовательно, объем вытекшего слоя равен $-S\,dh$. Это количество воды прошло (за время dt) через отверстие площадью s; значит, через единицу площади проходит (за время dt)

количество воды, равное $-\frac{S\,dh}{s}$; деля это выражение на dt, мы получаем скорость v

$$v=-\frac{S\,dh}{s\,dt}. \tag{41}$$

Уравнение (40) дает возможность выразить dt через dh, мы получаем

$$dt=\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\,d(\sqrt{H}-\sqrt{h})=-\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\,d\sqrt{h}=$$

$$=-\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{dh}{2\sqrt{h}}. \tag{42}$$

Подставляя найденное выражение dt в формулу (41), находим:

$$v=-\frac{S\,dh}{s\,dt}=2\sqrt{\frac{g}{2}}\sqrt{h}=\sqrt{2gh}. \tag{43}$$

Мы получили уравнение, исходя из которого, мы решили ряд задач в гл. II.

§ 25. *Задача 48.* Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 *кг* воды от температуры $14^1/_2°$ до температуры $15^1/_2°$ Ц, выбирается обычно в качестве единицы для измерения количества теплоты и называется большой калорией.

Опыт показывает, что количество тепла Q, необходимое для нагревания 1 *кг* железа от температуры 0° Ц до температуры $t°$ Ц, связано с величиной t следующей зависимостью:

$$Q=0{,}1053t+0{,}000071t^2. \tag{44}$$

(Формула эта является приближенной, но для значений t, меньших чем 200° Ц, она доставляет практически вполне удовлетворительные результаты.)

Требуется найти теплоемкость железа при температурах 10, 20, 50, 100° Ц.

Напомним, что теплоемкостью называется обычно то количество теплоты, которое необходимо для нагревания 1 *кг* вещества на 1° Ц. Такое определение предполагает, однако, что для нагревания, например, железа с 20 до 21° Ц требуется то же количество тепла, что для нагревания с 21 до 22° Ц, с 22 до 23° Ц и т. д. Если бы это было так, то, обозначая через c теплоемкость железа, мы получили бы между Q и t пропорциональную зависимость

$$Q=ct \tag{45}$$

и величина c могла бы быть вычислена как частное

$$c=\frac{Q}{t},$$

если из опыта найдена пара соответствующих значений t и Q.

Мы видим однако, что вид формулы (44) не совсем таков, каков вид формулы (45), и что количество теплоты Q, потребное для нагревания 1 *кг* железа с температуры 0° Ц до температуры t° Ц растет непропорционально величине t.

Это значит, что величина теплоемкости не остается постоянной, и следовательно, разделив на величину t соответствующее значение величины Q, мы найдем лишь среднее количество теплоты, повышающее температуру железа на 1°. Чтобы характеризовать теплоемкость железа при данной температуре (например при $t = 20°$), мы должны взять не частное $\frac{Q}{t}$, а частное $\frac{dQ}{dt}$, где dQ и dt, как обычно, обозначают бесконечно малые изменения величины t и Q. В самом деле, если частное $\frac{Q}{t}$ не может дать истинную теплоемкость, потому что при изменении температуры на t° Ц изменялась теплоемкость железа, то при бесконечномалом изменении температуры теплоемкость можно считать неизменной.

Таким образом под величиной теплоемкости железа при 20° Ц мы должны теперь понимать, собственно говоря, не количество тепла, необходимое для нагревания 1 *кг* его с 20 до 21°, а то количество тепла, которое было бы необходимо для этого, если бы между 20 и 21° теплоемкость не изменялась.

Итак, теплоемкость c выразится формулой

$$c = \frac{dQ}{dt} = 0{,}1053 + 0{,}000142t. \qquad (46)$$

Ответ на вопрос задачи представится следующей таблицей.

Температура °С	0°	10°	20°	50°	100°
Теплоемкость железа	0,1053	0,1067	0,1081	0,1124	0,1195

Замечание. Если бы мы хотели определить, какое количество теплоты требуется для нагревания 1 *кг* железа, скажем с 20 до 21°, то мы могли бы воспользоваться непосредственно формулой (44), рассуждая так: для нагревания от 0 до 20° Ц требуется количество теплоты, равное

$$Q_{20} = 0{,}1053 \cdot 20 + 0{,}000071 \cdot 20^2 \text{ больших калорий.}$$

Для нагревания от 0 до 21° Ц требуется

$$Q_{21} = 0{,}1053 \cdot 21 + 0{,}000071 \cdot 21^2 \text{ больших калорий.}$$

Значит, при нагревании от 20 до 21° израсходовано

$$Q_{21} - Q_{20} = 0{,}1053 + 0{,}000071\,(21^2 - 20^2) =$$
$$= 0{,}108211 \text{ больших калорий.}$$

Мы видим, что искомое количество оказалось несколько (хотя и незначительно) больше, чем величина теплоемкости при 20°, и это естественно, ибо, как показывает формула (46), теплоемкость увеличивается с повышением температуры. Но можно заранее сказать, что по той же причине найденная величина $Q_{21} - Q_{20}$ должна оказаться меньше, чем теплоемкость при температуре 21°.

Заметим, наконец, что мы могли бы получить тот же результат, исходя из формулы

$$c = \frac{dQ}{dt} = 0{,}1053 + 0{,}000142t. \tag{46}$$

В самом деле, она дает:

$$dQ = (0{,}1053 + 0{,}000142t)\,dt. \tag{47}$$

Это диференциальное уравнение выражает, что при бесконечно-малом повышении температуры (dt), когда теплоемкость можно считать постоянной, количество тепла dQ, необходимое для такого повышения, получается умножением теплоемкости c на dt. Желая найти количество тепла, повышающее температуру с 20 до 21°, мы должны проинтегрировать правую часть равенства (47) в пределах от $t = 20°$ до $t = 21°$.

Мы получаем, что искомое количество тепла $Q_{21} - Q_{20}$ будет

$$\int_{20}^{21} (0{,}1053 + 0{,}000142t)\,dt =$$

$$= (0{,}1053 \cdot 21 + 0{,}000071 \cdot 21^2) - (0{,}1053 \cdot 20 + 0{,}000071 \cdot 20^2) =$$

$$= 0{,}108211 \text{ больших калорий.}$$

Задача 49. Найти теплоемкость алмаза при температуре 100, 200, 300° Ц, зная, что количество тепла Q (малых калорий), необходимое для нагревания 1 *г* алмаза от температуры 0° до t° Ц, выражается формулой:

$$Q = 0{,}0947\,t + 0{,}000947\,t^2 - 0{,}00000012t^3. \tag{48}$$

Очевидно, что для вычисления теплоемкости можно искать количество тепла в малых калориях, нагревающее на 1° Ц 1 *г* вещества, вместо того чтобы брать большие калории и 1 *кг* вещества. Поэтому, как и в предыдущей задаче, теплоемкость c алмаза определится по формуле:

$$c = \frac{dQ}{dt} = 0{,}0947 + 0{,}000994t - 0{,}00000036t^2. \tag{49}$$

Отсюда получим

Температура °Ц	100°	200°	300°
Теплоемкость алмаза c	0,1905	0,2791	0,3605

Формулу (48) мы могли бы получить из формулы (49), решая обратную задачу: какое количество тепла (в малых калориях) Q потребно для нагревания 1 $г$ алмаза от температуры 0° до температуры t° Ц? Решение протекает следующим образом (сравнить замечание к предыдущей задаче).

Бесконечно-малое количество dQ, потребное для нагревания 1 $г$ алмаза на (dt)° Ц, получается умножением теплоемкости c на величину dt

$$dQ = c\,dt.$$

Подставляя из (49) выражение c и интегрируя, получаем:

$$Q = \int_0^t c\,dt = \int_0^t (0{,}0947 + 0{,}000994t - 0{,}00000036t^2)\,dt =$$

$$= 0{,}0947t + 0{,}000497t^2 - 0{,}00000012t^3.$$

§ 26. *Задача 50.* Если платиновый куб, сторона которого при 0° Ц имеет длину l_0, подвергать нагреванию, то сторона куба при температуре t° Ц будет иметь длину l, которую можно определить по формуле

$$l = l_0\,(1 + 0{,}000008806t + 0{,}00000000195t^2), \qquad (50)$$

которая хорошо соответствует опыту для всех полученных температур t (положительных).

Поставим себе задачей найти линейный коэфициент расширения α платины при температуре 0 и 1000° Ц. Линейный коэфициент расширения определяется часто как приращение длины, которую получает единица длины при нагревании на 1° Ц. Очевидно, что если расширению подвергается не единица длины, а длина l, то и удлинение ее в l раз больше, а потому коэфициент расширения может быть получен делением приращения любой длины (при нагревании ее на 1°) на длину того же предмета до нагревания.

Но оба эти определения страдают недостатком: они предполагают, что при нагревании на 1° Ц данная длина l получает одно и то же приращение. Это, однако, не соответствует действительности, по крайней мере если мы стремимся к более точному ее познанию. Вот почему оно является недостаточным. Коэфициент расширения не остается постоянным при изменении температуры. Он меняется при изменении температуры. Чтобы характеризовать величину его, следует поэтому взять бесконечно-малое изменение температуры dt и разделить на него бесконечно-малое удлинение dl; величина $\frac{dl}{dt}$ даст, таким образом, то приращение, которое получила бы длина l при нагревании на 1°, если бы существовал постоянный коэфициент расширения.

Отношение этой величины к l (или в случае, если $l = 1$, то самое величину $\frac{dl}{dt}$) мы и должны теперь назвать коэфициентом расширения α. Итак

$$\alpha = \frac{dl}{l\,dt}. \qquad (51)$$

Теперь с помощью формулы (50) мы получим:

$$dl = l_0\,(0{,}000008806 + 0{,}0000000039t)\,dt.$$

Подставляя в (51) значения l и dl, получаем:

$$\alpha = \frac{0{,}000008806 + 0{,}0000000039t}{1 + 0{,}000008806t + 0{,}00000000195t^2}. \qquad (52)$$

При $t = 0°$ и $t = 1000°$ Ц имеем:

$$\alpha_{t=0} = 0{,}0000088,$$

$$\alpha_{t=1000} = 0{,}0000125.$$

Задача 51. Приняв во внимание условие предыдущей задачи, найти значение объемного коэфициента расширения платины β для температур 0 и 1000° Ц.

Объемный коэфициент расширения определится (аналогично линейному) формулой:

$$\beta = \frac{dv}{v\,dt}, \qquad (53)$$

где через v обозначен объем тела при температуре $t°$ Ц (величина $\frac{dv}{dt}$ есть отнесенное к 1° изменение объема, т. е. то изменение, которое получил бы объем v при нагревании от $t°$ Ц до $(t+1)°$ Ц, если бы в этих пределах изменения объема и температуры были пропорциональны).

Чтобы вычислить величину β по формуле (53), мы должны знать зависимость между v и t. Пусть мы имеем платиновый куб со стороной l. Его объем v выразится формулой:

$$v = l^3. \qquad (54)$$

Но величина l выражена через t формулой (50), и потому мы можем написать:

$$v = l_0^3\,(1 + 10^{-9}\,8806\,t + 10^{-11}\,195t^2)^3.$$

Раскрыв скобки в правой части этой формулы, мы сможем найти затем выражение для dv и, подставив выражения v и dv в (52), решить задачу. Однако такой путь был бы очень хлопотливым, и мы можем гораздо проще поступить так: воспользуемся для вычисления v и dv непосредственно формулой (54), которая дает уже выражение для v.

Из нее же находим выражение для dv

$$dv = 3l^2\,dl.$$

Подставляя эти выражения в (53), получаем:

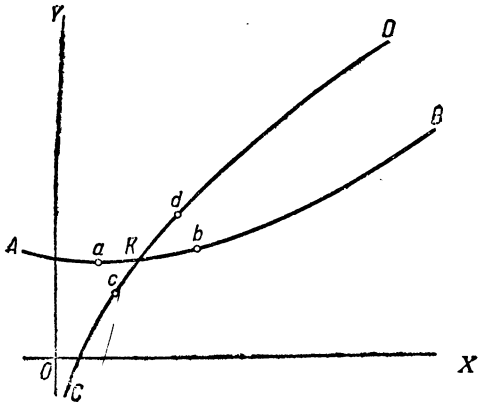
$$\beta = \frac{3l^2\,dl}{l^3\,dt}$$

или

$$\beta = 3\frac{dl}{l\,dt}. \qquad (55)$$

Это выражение уже нетрудно вычислить с помощью формулы (50) предыдущей задачи. Впрочем, в этом нет и нужды, так как величина $\frac{dl}{l\,dt}$, как мы видели в предыдущей задаче, есть не что иное, как линейный коэфициент расширения.

Мы получили, таким образом, важный результат: объемный коэфициент расширения всегда втрое больше линейного (совершенно независимо от того, по какому закону изменяется длина в зависимости от температуры).



Черт. 46.

Таким образом для $t = 0°$ Ц и $t = 1000°$ Ц значения β будут:

$$\beta_0 = 3\alpha_0 = 0{,}0000264,$$
$$\beta_{1000} = 3\alpha_{1000} = 0{,}0000375.$$

§ 27. В начале этой книги мы показали, что площадь криволинейной фигуры может быть вычислена разбиением ее на элементы (бесконечно-тонкие полоски), в которых бесконечно-малые дуги кривых принимаются за прямолинейные отрезки.

Выделение из кривой линии прямолинейного элемента (бесконечно-малой дуги) дает возможность решить и другую важную задачу геометрии.

Пусть нам даны две кривые линии AB и CD (черт. 46), пересекающиеся в точке K[1]), и требуется определить угол между ними. Идея решения этой задачи состоит в том, что на кривой CD выделяется бесконечно-малый элемент cd, проходящий через точку K, а на кривой AB — бесконечно-малый элемент ab. Эти элементы мы считаем прямолинейными (на что нам дает право их бесконечная малость), и, таким образом, задача сводится к определению угла между двумя прямыми линиями, отрезки которых ab и cd пересекаются в точке K.

Аналогично решается вопрос и в том случае, когда одна из пересекающихся линий — прямая.

Указанную идею мы и применим к решению следующих задач.

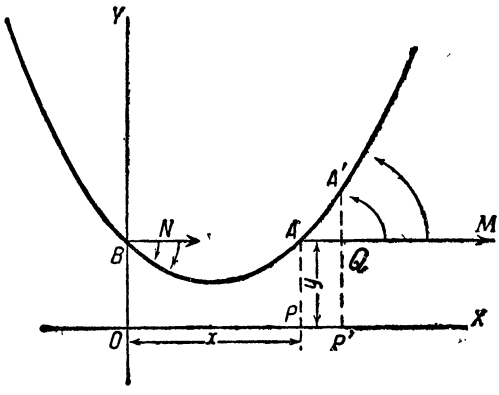
---

[1]) Говоря, что линии даны, мы разумеем, что заданы некоторые свойства, их определяющие, а так как, зная эти свойства, мы можем, отнеся линию к системе координат, составить уравнение этой линии, то мы будем считать всюду в дальнейшем, что известно уравнение, связывающее абсциссу x и ординату y данной линии.

§ 28. *Задача 52.* Найти угол, под которым линия $y=\frac{1}{4}x^2-x+2$ в точке своей A (4,2) наклонена к горизонту (т. е. к прямой, проведенной через точку A параллельно оси абсцисс).

Возьмем точку A' в бесконечной близости к точке A, так что бесконечно-малую дугу AA' мы можем считать отрезком прямой линии. Проведем ординату $A'P'$ точки A'. Тогда образуется бесконечно-малый прямоугольный треугольник $AA'Q$, одним из острых углов которого является угол A наклона кривой к горизонту. Величина этого угла может быть определена по его тангенсу по формуле:

$$\operatorname{tg} A=\frac{A'Q}{AQ}.$$



Черт. 47.

Но легко видеть, что катеты $A'Q$ и AQ представляют собой величины dy и dx, дифференциалы координат. В самом деле, катет $A'Q$ есть бесконечно-малая разность ординат $A'P'-AP$, а катет AQ — бесконечно-малая разность абсцисс

$$AQ=PP'=OP'-OP.$$

Таким образом тангенс угла наклона выразится дифференциальным отношением

$$\operatorname{tg}\angle A=\frac{dy}{dx}. \tag{56}$$

Эта формула пригодна для любой кривой линии. В нашем случае, когда кривая задана уравнением:

$$y=\frac{1}{4}x^2-x+2,$$

мы получаем:

$$\operatorname{tg}\angle A=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x-1. \tag{57}$$

Этот результат свидетельствует, что наклон кривой меняется с изменением положения точки A. На черт. 47 точка имеет координаты $x=4$, $y=2$.

Следовательно, для нее наклон кривой найдется из уравнения:

$$\operatorname{tg}\angle A=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}=\frac{1}{2}\cdot 4-1=1,$$

откуда

$$\angle A=45^\circ.$$

Найдем еще угол той же кривой в точке B $(0, 2)$. Формула (57) дает:

$$\operatorname{tg} \angle B = -1,$$
$$\angle B = -45°.$$

Отрицательный знак величины $\operatorname{tg} \angle B$ свидетельствует о том, что в точке B кривая опускается книзу, а не подымается наверх, как в точке A.

Стоит отметить, что, говоря о подъеме или опускании кривой, мы здесь в дальнейшем имеем в виду, что передвижение по кривой происходит в том направлении, в котором увеличиваются ее абсциссы (если передвигаться в направлении уменьшения абсцисс, картина получится обратная). Заметим также, что мы молчаливо предполагали, что и горизонтальные линии AM и BN направлены „вправо", т. е. в сторону увеличения абсцисс, и что при отсчете углов „начальным" направлением служит направление горизонтальной линии. Легко видеть, что при таком предположении угол A описывается движением против часовой стрелки, а угол B движением по часовой стрелке, так что положительность первого угла и отрицательность второго соответствуют обычно принимаемому соглашению.

В качестве нетрудного упражнения читатель вычислит углы наклона кривой $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ в точках, абсциссы которых равны $x = -1$; $x = +1$; $x = 5$. Для абсциссы $x = 2$ угол наклона этой кривой окажется равным нулю. Это значит, что в точке (2, 1) направление кривой совпадает с горизонтальным. В этой точке нет ни „подъема", ни „спуска".

Задача 53. Под какими углами ось X-ов пересекается кривой

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)?$$

Прежде всего найдем координаты точек пересечения нашей кривой с осью X-ов. Ордината такой точки должна равняться нулю; поэтому абсцисса найдется из уравнения

$$0 = (x - 1)(x - 2)(x - 3),$$

имеющего, очевидно, три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таковы будут абсциссы точек пересечения, которые назовем A_1, A_2 и A_3. Соответствующие углы наклона найдутся по формуле:

$$\operatorname{tg} \angle A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$$

и ей аналогичным (см. предыдущую задачу).

Для вычисления диференциального отношения представим уравнение нашей кривой в виде:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

откуда найдем:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11.$$

Для угла A_1 находим:

$$\operatorname{tg} \angle A_1 = (3x^2 - 12x + 11)_{x=1} = 2, \quad \angle A_1 = 63°26'6''.$$

Аналогично найдем величины углов A_2 и A_3:

$$\angle A_2 = -45°; \quad \angle A_3 = 63°26'6''.$$

Мы видим, что, пересекая ось X-ов, кривая сначала (в точке A_1) поднимается кверху, затем (в точке A_2) опускается и наконец в точке A_3 вновь поднимается. Построив кривую по точкам, читатель проверит эти результаты на чертеже.

Задача 54. В каких точках кривая $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$ наклонена к горизонту под углами: $-45°$; $0°$; $45°$?

Абсциссы искомых точек найдутся из условия, что тангенсы углов (представляемые, как мы знаем, диференциальным отношением $\frac{dy}{dx}$), должны равняться соответственно: -1; 0; $+1$.

Так, для угла $-45°$ мы получим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = -1.$$

Это уравнение удовлетворяется одним значением $x = 1$. Итак, под углом $-45°$ кривая наклонена к горизонту в одной точке, координаты которой $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.

Решая уравнение

$$x^2 - 2x = 0,$$

корни которого

$$x = 0, \quad x = 2,$$

мы находим две точки $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $(2, -1)$, в которых кривая образует с горизонтом угол $0°$, т. е. идет параллельно оси абсцисс. Наконец, уравнение

$$x^2 - 2x = 1$$

имеет корни $x = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4\ldots$ и $x_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4\ldots$

Таким образом в точках $\left(1 + \sqrt{2}; \ -\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\left(1 - \sqrt{2}, \ -\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$ кривая наклонена к горизонту под углом $45°$. Построить чертеж.

§ 29. Умея находить угол наклона линии к горизонту, мы можем весьма просто определить угол, образованный пересечением любых линий.

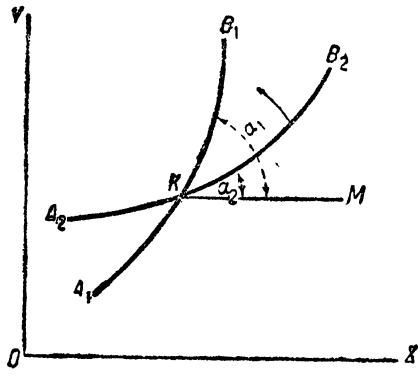
Именно, зная уравнения этих линий, мы найдем координаты точки K их пересечения (таких точек может быть и несколько).

Проводя горизонтальную прямую KM (черт. 48), мы видим, что угол B_1KB_2 есть разность углов наклона этих линий. Обозначая эти углы через α_1 и α_2, мы имеем:

$$\angle B_1KB_2 = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{58}$$

Этим задача может считаться уже решенной.

Следует только заметить, что линии A_1B_1 и A_2B_2 образуют не один, а четыре угла и что формула (58) дает величину того из них, который образован „положительными" направлениями кривых, т. е. теми, которые соответствуют увеличению их абсцисс (ср. задачу 51).



Черт. 48.

Заметим еще, что вместо формулы (58) мы могли бы написать и такую:

$$\angle B_1KB_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \tag{58'}$$

ибо линии A_1B_1 и A_2B_2 совершенно равноправны. Результаты будут различаться только по знаку.

Геометрический смысл этого различия такой: в формуле (58) предполагается, что угол отсчитывается от линии KB_2 к линии KB_1 (на черт. 48 это направление отмечено стрелкой; при данном расположении линий этот угол положителен). Формула же (58′) предполагает обратное направление (при данном расположении линий получаем отрицательный угол).

Так как для нас важно знать лишь абсолютную величину угла между линиями, то мы можем пользоваться как формулой (58), так и формулой (58′).

Может показаться, что ни одна из них не годится в том случае, когда кривые расположены, как на черт. 49.

Именно, может представиться, что угол B_1KB_2 равен сумме, а не разности углов α_1 и α_2. Следует, однако, помнить, что, находя угол наклона кривой A_2B_2 в точке K, мы для $\operatorname{tg}\alpha_2$ и для α_2 получим в этом случае отрицательные значения, так что арифметическая сумма углов представится как раз разностью $\alpha_1 - \alpha_2$.

Задача 55. Найти углы, образуемые пересечением линии $y = \frac{1}{2}x^2$ (парабола) и $xy = 4$ (гипербола) (черт. 50).

Решая систему уравнений

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

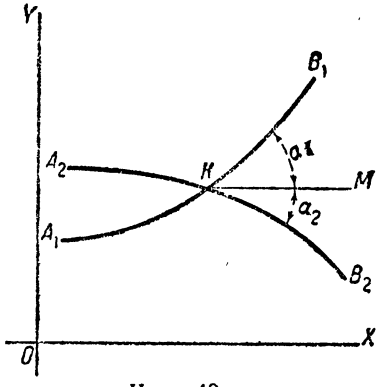
$$xy = 4,$$

мы находим единственную пару решений $x=2$, $y=2$, дающую координаты точки пересечения K гиперболы и параболы. Обозначим через α_1 угол наклона параболы в точке K (2, 2), а через α_2 угол наклона гиперболы в той же точке.

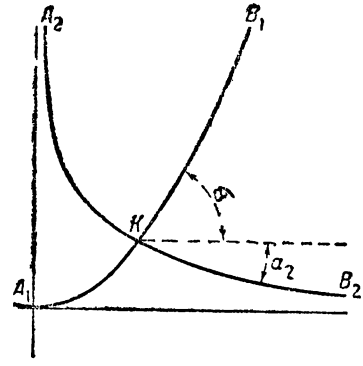
Первый определится из уравнения:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{dx}=x=2,$$

так что (с точностью до минуты) $\alpha_1=63°26'$.



Черт. 49.



Черт. 50.

Второй найдем аналогично:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{d\left(\frac{4}{x}\right)}{dx}=-\frac{4}{x^2}=-1;\ \alpha_2=-45°.$$

Угол, образованный в точке K положительными направлениями кривых, равен:

$$\angle B_1KB_2=\alpha_1-\alpha_2=108°26'.$$

Если бы мы хотели найти величину трех остальных углов при точке K, то угол A_2KA_1 как вертикальный равен углу B_1KB_2, два же другие угла дополняют его до 180°, и следовательно равны каждый 71°34′.

Часто удобнее бывает вместо двух подысканий углов по их тангенсам ограничиться одним. Это достигается тем, что, не вычисляя углов α_1 и α_2, находим тангенс их разности по формуле:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Подставляя сюда значения

$$\operatorname{tg}\alpha_1=2,\quad \operatorname{tg}\alpha_2=-1$$

находим

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = -3.$$

В пределах углов, не превышающих по абсолютной величине 180°, этому тангенсу соответствуют д в а угла. Один — 71°34′; он дает величину угла A_2KB_1 и его вертикального. Другой 108°26′; он дает величину угла B_1KB_2.

Как мы видим, недостатком такого приема является то, что неизвестно, какая из этих двух величин соответствует углу, образованному положительными направлениями кривых, и какая — углу, смежному с ним [1]). Если это представляется несущественным для задачи, то этот недостаток не мешает делу. В противном случае приходится прибегать к дополнительным выкладкам, усложняющим расчет.

Задача 56. Определить углы, под которыми прямая $2y - x = 4$ пересекает параболу $y = \frac{1}{4}x^2$.

Решение системы уравнений

$$2y - x = 4,$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

показывает, что прямая пересекает параболу в двух точках:

$$K(4,\ 4) \text{ и } L\ (-2,\ 1).$$

Угол α_1 наклона п р я м о й, разумеется, один и тот же в обеих точках.

Тангенс его равен угловому коэфициенту прямой.

Написав уравнение ее в форме

$$y = \frac{1}{2}x + 2,$$

мы видим, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}\ ^{2}).$$

---

[1]) Не нужно думать, что з н а к и углов могут помочь в решении этого вопроса. В самом деле, если бы за α_1 мы взяли угол наклона гиперболы, а за α_2 — параболы (что, очевидно, не меняет дела), то для $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$ мы получили бы величину 8, соответствующую углам 71° 34′ и —108° 26′.

[2]) Заметим, что тот же результат можно получить и по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx},$$

ибо уравнение прямой дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}x + 2\right)}{dx} = \frac{1}{2}.$$

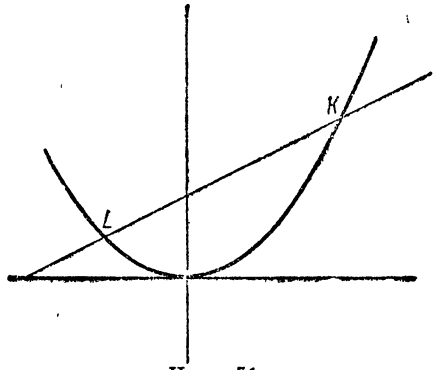
Что касается угла α_2 наклона параболы, то его тангенс равен

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{2}x$$

и, следовательно, имеет различные значения в точках K и L; именно для точки K он равен

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 2,$$

для точки же L он равен -1.



Черт. 51.

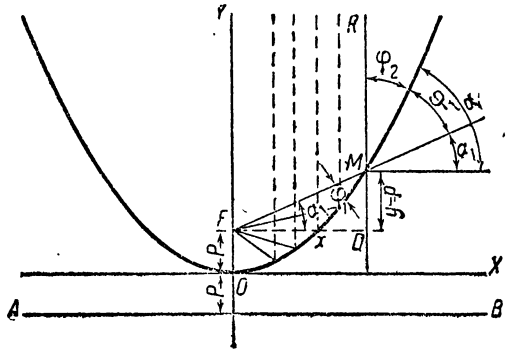
Таким образом для угла K мы получаем

$$\operatorname{tg}\angle K = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = -0{,}75.$$

Абсолютная величина острого угла при точке K равна, таким образом, $36°\,52'\,12''$, а тупого угла $-143°\,7'\,48''$. Какая из этих величин соответствует углу, составленному положительными направлениями,— этого наш прием не дает. Но, поступая как в предыдущей задаче, мы увидели бы, что это острый угол. Это очевидно и из чертежа.

Подобным же образом читатель найдет, что в точке L острый угол по абсолютной величине равен $71°\,33'\,54''$.

§ 30. *Задача 57.* Доказать, что пучок световых лучей, выходящий из фокуса параболического зеркала, после отражения дает параллельный пучок лучей, идущий по направлению оси параболы.



Черт. 52.

Напомним, что парабола может быть определена как геометрическое место точек, равноотстоящих от точки F (фокус) и прямой AB (директриса). Напомним также, что при соответствующем выборе системы координат (черт. 52) уравнение параболы может быть представлено в виде

$$4py = x^2, \qquad (59)$$

где p есть расстояние фокуса F от вершины параболы O (или половина расстояния фокуса от директрисы).

Обращаемся теперь к решению задачи. Мы должны доказать, что всякий луч FM, вышедший из фокуса F, попав в точку M параболы, отразится по направлению MK, параллельному оси параболы. Иначе

говоря, мы должны доказать, что угол падения φ_1 и угол отражения φ_2 равны между собой.

Вычислим угол падения φ_1. Он образован параболой $4py = x^2$ и прямой MF. Тангенс угла α_1 наклона прямой MF можно найти непосредственно из чертежа; из треугольника FDM находим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{MD}{FD} = \frac{y-p}{x}, \tag{60}$$

где x и y обозначают координаты точки M.

Тангенс угла α_2 наклона параболы равен

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{dy}{dx} \frac{d\left(\frac{x^2}{4p}\right)}{dx} = \frac{x}{2p}. \tag{61}$$

Таким образом тангенс угла падения φ_1 будет

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{x}{2p} - \frac{y-p}{x}}{1 + \frac{x(y-p)}{2px}} = \frac{x^2 - 2py + 2p^2}{x(p+y)}. \tag{62}$$

Вычислим теперь тангенс угла отражения φ_2. Он образован параболой и „вертикальной" прямой MK, параллельной оси ординат. Так как с горизонтом парабола образует угол α_2, то

$$\varphi_2 = 90^\circ - \alpha_2$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Итак, в силу (61)

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2p}{x}. \tag{63}$$

На первый взгляд может показаться, что полученное выражение $\operatorname{tg}\varphi_2$ отлично от выражения $\operatorname{tg}\varphi_1$, полученного в формуле (62).

Не нужно однако забывать, что величины y и x связаны уравнением $4py = x^2$, и потому, чтобы удостовериться в тождестве (62) и (63), необходимо произвести в формуле (62) некоторые преобразования. Проще всего заменить величину x^2 в числителе ее выражением $4py$.

Тогда формула (62) даст:

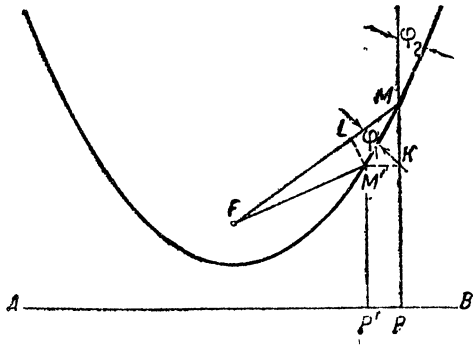
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4py - 2py + 2p^2}{x(p+y)} = \frac{2py + 2p^2}{x(p+y)} = \frac{2p(p+y)}{x(p+y)} = \frac{2p}{x}. \tag{64}$$

Теперь мы видим, что тангенсы углов φ_1 и φ_2 равны между собой. Так как оба угла, очевидно, острые, то равны и сами углы.

Таким образом параболическое зеркало обращает расходящийся пучок лучей в параллельный. На этом свойстве основано употребление таких зеркал для прожекторов.

Заметим, что, пользуясь координатным методом аналитической геометрии, мы получаем простое по идее, но довольно громоздкое по выкладкам доказательство. В таких случаях чисто геометрическое рассуждение обыкновенно позволяет упростить вычислительную работу, но, разумеется, требует каждый раз особых, из особенностей задачи вытекающих, приемов.

Разумеется, рассмотрение бесконечно-малых величин при геометрических рассуждениях должно играть еще более важную и „активную" роль, чем в аналитических выкладках.



Черт. 53.

В данном случае рассуждение можно повести так.

Каждая точка параболы M равно удалена от фокуса F и директрисы AB, так что

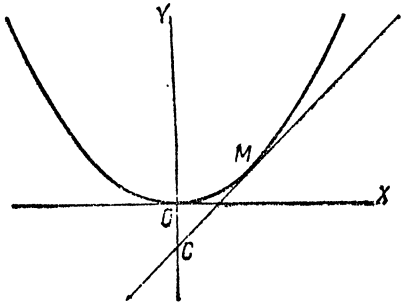
$$MF = MP.$$

Для точки M', бесконечно-близкой к M (черт. 53), в силу того же свойства параболы,

$$M'F = M'P'.$$

Следовательно бесконечно-малые разности $MF - M'F$ и $MP - M'P'$ тоже равны между собой. Они изображаются геометрически так. Разность $MP - M'P'$ есть бесконечно-малый отрезок MK. Разность же $MF - M'F$ можно получить, проведя радиусом FM' бесконечно-малую дугу окружности $M'L$. Тогда отрезок ML изобразит разность

$$MF - LF = MF - M'F.$$



Черт. 54.

Итак, отрезки MK и ML равны между собой. Рассмотрим теперь бесконечно-малые треугольники $MM'K$ и $MM'L$. Оба они, в силу бесконечной малости, могут рассматриваться как прямолинейные, причем треугольник $MM'L$ мы можем считать прямоугольным, ибо угол L образован радиусом окружности и бесконечно-малой дугой ее.

Прямоугольные треугольники $MM'K$ и $MM'L$ равны между собой (они имеют общую гипотенузу MM' и равные катеты MK и ML). Поэтому углы LMM' и KMM' равны. Но первый есть угол падения φ_1, а второй как вертикальный равен углу отражения φ_2.

§ 31. *Задача 58.* Составить уравнение прямой, касающейся параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ в точке M (2, 1).

Текущие координаты точек искомой прямой линии мы будем обозначать через X и Y, чтобы отличить их от координат x и y точек параболы.

Уравнение всякой прямой, проходящей через точку (2, 1), может быть представлено в виде

$$Y - 1 = m(X - 2), \tag{65}$$

где m есть угловой коэфициент прямой, т. е. тангенс ее угла наклона к горизонту. Эта величина m должна быть найдена из того условия, что прямая касается параболы в точке M (2, 1). Очевидно, что наклон прямой должен быть тот же, что наклон параболы в этой точке. Поэтому мы можем написать:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x = 1.$$

Подставляя это значение в (65), получаем

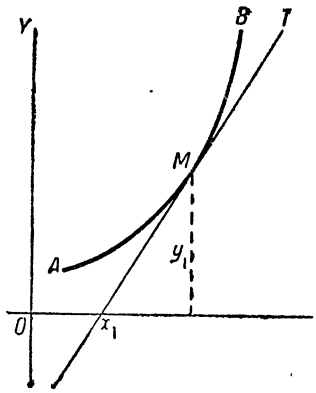
$$Y - 1 = X - 2$$

или

$$Y = X - 1.$$

Это и есть искомое уравнение касательной. Мы видим, что она образует с горизонтом угол 45° и отсекает от оси Y-ов отрезок $OC = -1$ снизу от начала координат.

Задача, решенная нами только для случая параболы, может быть решена тем же методом для любой линии.



Черт. 55.

Пусть M есть точка с координатами x_1 и y_1 на кривой AB, для которой известно уравнение, связывающее ее координаты x и y (этому уравнению должны удовлетворять, конечно, и числа x_1 и y_1, черт. 55).

Требуется составить уравнение касательной MT, проходящей через точку M кривой.

Всякая прямая, проходящая через M, имеет уравнение вида:

$$Y - y_1 = m(X - x_1). \tag{66}$$

В этом уравнении числа x_1 и y_1 известны — это координаты точки M. Остается найти число m — тангенс угла наклона касательной. Так как наклон касательной должен совпадать с наклоном кривой в точке M, то величина m равна значению диференциального отношения $\frac{dy}{dx}$ для точки M. Поэтому $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$; значком 1 мы хотим показать, что берется то

числовое значение величины $\frac{dy}{dx}$, которое она принимает при $x=x_1$ (или при $y=y_1$).

Итак, уравнение касательной MT будет

$$Y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (X-x_1). \tag{67}$$

Обычно значки 1 опускаются, и пишут просто

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x). \tag{68}$$

Следующие примеры покажут, как пользоваться формулой (68) при вычислениях.

Пример 1. Найти уравнение касательной к кривой:

$$y=2x^3-5x^2+3x-3 \text{ в точке } (2,-1).$$

Формула (68) дает:

$$Y-(-1)=\frac{d(2x^3-5x^2+3x-3)}{dx}(X-2),$$

$$Y+1=(6x^2-10x+3)\ (X-2).$$

Подставляя значение $x=2$, получаем

$$Y+1=7(X-2).$$

Это и есть искомое уравнение касательной. Его можно еще представить в форме

$$Y=7X-15.$$

Пример 2. Кривая задана параметрическими уравнениями

$$x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=\frac{1}{3}t^3$$

(парабола Нейля); найти уравнения касательных, проходящих через точку $t=1$; $t=2$; $t=3$.

Формула (68) дает:

$$Y-\frac{1}{3}t^3=\frac{d\left(\frac{1}{3}t^3\right)}{d\left(\frac{1}{2}t^2\right)}\left(X-\frac{1}{2}t^2\right),$$

$$Y-\frac{1}{3}t^3=\frac{t^2\,dt}{t\,dt}\left(X-\frac{1}{2}t^2\right),$$

$$Y-\frac{1}{3}t^3=t\left(X-\frac{1}{2}t^2\right).$$

Уравнение касательной в точке

$$t=1 \quad \left(x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}\right)$$

мы найдем, подставляя значение $t=1$ в полученное уравнение:

$$Y-\frac{1}{3}=X-\frac{1}{2}$$

или

$$Y=X-\frac{1}{6}.$$

Так же найдем уравнения касательных в точках $t=2$ и $t=3$:

$$Y=2X-1\frac{1}{3}; \quad Y=3X-4\frac{1}{2}.$$

Мы получим те же уравнения, если вместо параметрического уравнения кривой возьмем то, которое получится после исключения параметра t из уравнений

$$x=\frac{1}{2}t^2; \quad y=\frac{1}{3}t^3.$$

Например, мы можем определить t из первого уравнения через x и, подставив во второе, получим:

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}.$$

Формула (68) дает для $t=1$, т. е. для $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$,

$$Y-\frac{1}{3}=\frac{d\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}{dx}\left(X-\frac{1}{2}\right).$$

Диференцируя и подставляя $x=\frac{1}{2}$, получим прежнее уравнение

$$Y=X-\frac{1}{6}.$$

Пример 3. Найти уравнение касательной к кривой

$$y=\frac{1}{3}t^3+2t, \quad x=\frac{1}{4}t^4+t \text{ в точке } t=2.$$

$$Y-\left(\frac{1}{3}t^3+2t\right)=\frac{d\left(\frac{1}{3}t^3+2t\right)}{d\left(\frac{1}{4}t^4+t\right)}\left[X-\left(\frac{1}{4}t^4+t\right)\right].$$

Выполняя дифференцирование и подставляя $t=2$, получим:

$$3Y-2x=8.$$

§ 32. *Задача 59.* Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=25$ в точке (3, 4).

Искомое уравнение имеет вид:

$$Y-4=\frac{dy}{dx}(X-3).$$

Затруднение возникает при нахождении диференциального отношения $\frac{dy}{dx}$, ибо, разрешая уравнение окружности относительно y, мы получаем:

$$y=\pm\sqrt{25-x^2},$$

а мы еще не умеем диференцировать выражение $\sqrt{25-x^2}$. Хотя нетрудно было бы дать правило для диференцирования этого выражения, но мы не будем этого делать, потому что можно найти $\frac{dy}{dx}$, и не разрешая уравнения окружности.

Представив уравнение в виде

$$y^2=25-x^2,$$

мы возьмем диференциалы обеих частей равенства; они, конечно, равны между собой:

$$d(y^2)=d\ (25-x^2).$$

Диференцируя, получаем

$$2y\,dy=-2x\,dx.$$

Отсюда найдем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

К тому же равенству мы пришли бы, если бы непосредственно диференцировали уравнение

$$x^2+y^2=25;$$

$$d(x^2+y^2)=0$$

(диференциал постоянной равен нулю);

$$2x\,dx+2y\,dy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ ^{1)}.$$

---

[1]) Это равенство имеет простой геометрический смысл. Дело в том, что отношение $\frac{y}{x}$ представляет угловой коэфициент радиуса окружности, а $\frac{dy}{dx}$ — угловой коэфициент касательной. Наше равенство выражает, что касательная перпендикулярна к радиусу.

Уравнение касательной примет вид

$$Y-4=-\frac{x}{y}(X-3),$$

или, так как $x=3$, $y=4$,

$$Y-4=-\frac{3}{4}(X-3),$$

$$4Y+3X=25.$$

Задача 60. Составить уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в произвольной его точке M (x, y).

Находим диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$, как в предыдущей задаче:

$$d\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=0.$$

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}\,(X-x)\ ^1).$$

§ 33. *Задача 61.* В произвольной точке M параболы (любого раствора) проведем касательную MC, продолжив ее до пересечения с осью параболы в точке C (черт. 56). Требуется найти отрезок OC.

Отнеся параболу к системе координат XOY, в которой начало взято в вершине параболы, а ось параболы взята за ось ординат, мы можем уравнение параболы представить в форме

$$4py=x^2$$

(p — расстояние фокуса до вершины параболы).

---

1) Его можно представить в таком виде:

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

Но так как координаты x и y должны удовлетворять уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то уравнение примет вид

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y=1.$$

Обозначая через x и y координаты произвольной точки M параболы, уравнение касательной MC напишем в виде:

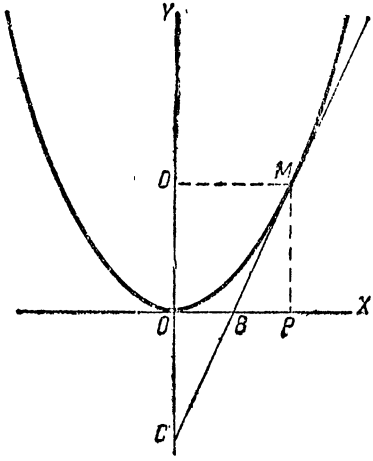
$$Y-y=\frac{d\left(\frac{x^2}{4p}\right)}{dx}(X-x),$$

$$Y-y=\frac{x}{2p}(X-x),$$

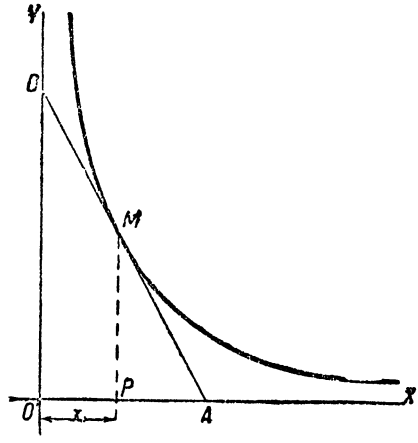
или

$$Y=\frac{x}{2p}X+y-\frac{x^2}{2p}.$$

Мы знаем, что отрезок OC равен свободному члену в уравнении касательной, т. е. выражению $y-\frac{x^2}{2p}$.



Черт. 56.



Черт. 57.

Принимая во внимание, что координаты y и x удовлетворяют уравнению параболы, мы можем заменить величину x^2 на $4py$ и получим:

$$OC=y-\frac{4py}{2p}=y-2y=-y.$$

Геометрический смысл этого результата очевиден.

Оказывается, что касательная MC пересекает продолжение оси параболы на том же расстоянии от вершины, на котором ось параболы пересекается перпендикуляром MD, опущенным на нее из точки M.

Отсюда вытекает, что для построения касательной к параболе в точке M нужно опустить из нее на ось перпендикуляр MD и отложить на продолжении оси отрезок $OC=OD$ и соединить точку M с точкой C.

Заметим еще, что абсцисса OP точки M делится пополам точкой пересечения B касательной с осью X-ов.

Это можно вывести как из уравнения касательной, так и из равенства треугольников MPB и OBC.

§ 34. *Задача 62.* В произвольной точке M равнобочной гиперболы с полуосью a проведена касательная AB и продолжена до пересечения с асимптотами OA и OB в точках A и B. Определить площадь треугольника AOB, образованного касательной и асимптотами.

Асимптоты примем за оси координат. Тогда уравнение гиперболы представится в виде

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

Угловой коэфициент касательной в точке M (x, y) будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{a^2}{2x}\right)}{dx} = -\frac{a^2}{2x^2}.$$

Уравнение касательной напишется:

$$Y - y = -\frac{a^2}{2x^2}(X - x).$$

Отрезок OA на оси X-ов найдем из этого уравнения, полагая $Y = 0$:

$$OA = X_0 = -\frac{2x^2 y}{a^2} + x.$$

Это выражение можно преобразовать, заменив y через $\frac{a^2}{2x}$, и мы получим $OA = 2x$.

Аналогично найдем $OB = 2y$ [1]).

Площадь s треугольника AOB равна

$$s = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 2xy.$$

Но так как координаты x и y связаны зависимостью

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

то мы получаем, что

$$s = a^2,$$

т. е. все касательные к равнобочной гиперболе отсекают от асимптот треугольники с постоянной площадью, равною площади квадрата, построенного на полуоси гиперболы.

---

[1]) Эти равенства выражают интересное свойство касательной к гиперболе: отрезки, отсекаемые ею на асимптотах, вдвое больше соответствующих координат точки касания. Поэтому для построения касательной в точке M гиперболы достаточно провести перпендикуляр MP к асимптоте, отложить $PA = OP$ и точку A соединить с точкой M

§ 35. В заключение этой главы мы познакомим читателя с одним важным приложением дифференциального исчисления; речь идет о нахождении наибольших и наименьших значений, приобретаемых данной функцией.

Чтобы уяснить постановку этой проблемы и метод ее решения рассмотрим следующую задачу.

Задача 63. Из зенитного орудия вертикально кверху вылетает ядро с начальной скоростью $v_0 = 196$ *м/сек*. Через сколько времени оно достигнет наивысшего положения?

Обозначим через s расстояние ядра от земли по истечении времени t после выстрела и найдем зависимость между этими переменными величинами. Если бы ядро не притягивалось землей, то оно сохраняло бы постоянную скорость v_0 (мы отвлекаемся от сопротивления воздуха) и через время t удалилось бы от земли на расстояние $v_0 t$. Но так как на самом деле ядро подвержено притяжению земли, то за время t оно должно опуститься на величину $\frac{1}{2} gt^2$. Следовательно, на самом деле расстояние ядра от земли через t сек. будет

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \tag{69}$$

$$(v_0 = 196 \text{ м/сек}; \; g = 9{,}8 \text{ м/сек}^2).$$

Очевидно, что подъем ядра должен смениться его падением книзу. Момент наивысшего подъема, нами разыскиваемый, должен быть тем моментом, когда происходит эта смена.

Посмотрим же, какими признаками характеризуются подъем и падение ядра.

При подъеме ядро удаляется от земли, его скорость направлена кверху; при падении ядро приближается к земле, его скорость направлена книзу. В математических терминах это можно формулировать так: подъем и падение характеризуются противоположностью знаков скорости: при подъеме скорость положительна; при падении отрицательна. Таким образом, найдя выражение для скорости движения ядра, мы сразу можем ответить на вопрос, подымается или падает ядро в данный момент времени. Скорость же движения представляется дифференциальным отношением $\frac{ds}{dt}$.

Из уравнения (69) мы находим:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt \; ^1). \tag{70}$$

Если теперь мы хотим узнать, подымается ли еще ядро кверху или уже падает книзу, то нужно только подставить в выражение $v_0 - gt$

---

1) Это выражение можно получить и непосредственно из физических соображений; во всякий момент скорость ядра складывается из направленной кверху скорости v_0, сообщенной ему орудием, и скорости падения на землю gt, направленной книзу.

соответствующее значение t; знак результата тотчас же дает ответ на вопрос. Так, через 12 сек. после выстрела скорость $\frac{ds}{dt}$ равна

$$\frac{ds}{dt} = 196 - 9{,}8 \cdot 12 = +78{,}4;$$

скорость положительна, ядро поднимается еще кверху.

Через 25 сек. после выстрела скорость $\frac{ds}{dt}$ равна

$$\frac{ds}{dt} = 196 - 9{,}8 \cdot 25 = -49{,}0;$$

скорость отрицательна, ядро опускается книзу.

Мы сказали, что момент наивысшего подъема служит границей между подъемом и падением. Но при подъеме скорость положительна, при падении отрицательна. Границей между положительными и отрицательными числами служит нуль. Итак, в момент наивысшего подъема скорость

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt$$

должна равняться нулю:

$$v_0 - gt = 0.$$

Из этого уравнения находим значение t:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{196}{9{,}8} = 20.$$

Итак, наивысшего положения ядро достигнет через 20 сек. после вылета из орудия.

Равенство нулю скорости ядра в момент его наибольшего удаления от земли можно истолковать физически так: в этот „критический" момент ядро останавливается на мгновение, на бесконечно-малый промежуток времени, и после мгновенной остановки начинает движение в обратном направлении.

Зная, что наибольшего удаления ядро достигнет через $\frac{v_0}{g}$ секунд, мы легко найдем и величину этого наибольшего удаления. Для этого достаточно в формулу

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

подставить вместо t выражение $\frac{v_0}{g}$.

Мы получим

$$s = \frac{v_0^2}{2g} = 1960 \text{ м}.$$

Эта формула показывает, что величина взлета ядра пропорциональна квадрату начальной скорости, так что, например, при вдвое меньшей скорости вылета ядро поднимется на высоту, вчетверо меньшую.

§ 36. Переведем теперь разобранную нами конкретную задачу на язык математических формул. Ее можно изложить так. Между величинами s и t существует зависимость

$$s = 196t - 4{,}9t^2.$$

Спрашивается: при каком значении величины t величина s приобретает наибольшее значение и как велико это последнее?

Мы видели, что для решения этой задачи нужно было найти производную функцию $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{ds}{dt} = 196 - 9{,}8t$$

и затем нужно было отыскать то значение t, которое обращает производную функцию в нуль, т. е. решить уравнение

$$196 - 9{,}8t = 0;$$

$$t = 20.$$

Это и есть то значение переменной t, при котором переменная s приобретает свое максимальное значение. Последнее находится непосредственно подстановкой в формулу $s = 196t - 4{,}9t^2$ значения $t = 20$.

Мы получаем $s_{\max} = 1960$ [1]):

§ 37. Какая же идея лежит в основе этого решения? Идея эта такова: мы предполагаем, что то значение независимой переменной t, которое дает максимальное значение функции s, должно давать значение нуль производной функции $\frac{ds}{dt}$. Это предположение для конкретной задачи о ядре, нами рассмотренной, естественно вытекало из соображений физического характера. Переведенное на математический язык, оно теряет свою непосредственную убедительность.

Поэтому мы должны вникнуть в дело несколько глубже, причем окажется, что формулированная только что основная мысль решения требует ряда дополнительных оговорок.

Удобнее всего прибегнуть к графическому изображению функциональной зависимости.

На черт. 58 изображена кривая $ABCDEFG$, изображающая функциональную зависимость между величинами y (ордината) и x (абсцисса). Будем рассматривать величину y как функцию независимой переменной x [2]). Положим, что при значении $x = Od$ величина $y = Dd$ имеет

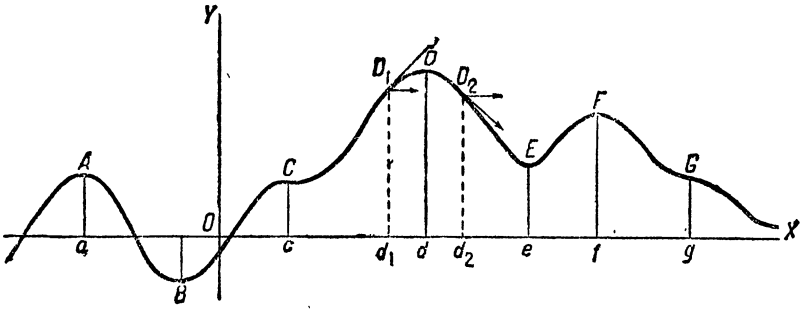
---

[1]) Обозначение $s_{\max}$ имеет целью подчеркнуть, что речь идет об определенном (максимальном) значении переменной величины s.

[2]) Мы пользуемся обозначениями y и x как общепринятыми. Они играют роль величин s и t. Такая замена обозначений, конечно, не смутит читателя.

значение, наибольшее из всех возможных. Графически это значит, что точка D — наивысшая точка кривой. Если наша основная идея правильна, то мы должны ожидать, что производная функция $\frac{dy}{dx}$ должна равняться нулю при $x = Od$. Но мы видели (§ 27), что производная $\frac{dy}{dx}$ есть величина тангенса угла наклона кривой. Таким образом мы должны ожидать, что в точке D кривая параллельна оси X-ов (ибо если $\operatorname{tg} \angle \alpha = 0$, то $\angle \alpha = 0$).

Чертеж действительно свидетельствует об этом. И это не случайное обстоятельство. В самом деле, если в точке D кривая поднимается выше



Черт. 58.

всего, то в точках D_1 и D_2 справа и слева от точки D ординаты D_1d_1 и D_2d_2 непременно должны быть меньше ординаты Dd. Значит, в точке D_1 кривая должна подниматься кверху, и угол ее наклона к горизонту (и его тангенс) должен быть положителен (см. чертеж). Напротив, в точке D_2 кривая должна иметь спуск, и угол наклона ее отрицателен.

В точке D подъем переходит в спуск; поэтому здесь кривая должна иметь горизонтальное направление; угол наклона и его тангенс равны нулю.

В переводе на алгебраический язык это и означает, что *там, где функция приобретает максимальное значение, производная ее равна нулю.*

Однако во избежание недоразумений мы должны тут же сделать ряд замечаний.

Прежде всего одного взгляда на чертеж достаточно, чтобы убедиться, что в точках A и F кривая имеет горизонтальное направление. Эти точки служат как бы вершинами холмов, более низких, чем холм с вершиной в D. Таким образом горизонтальность кривой характерна не только для наивысшей (в собственном смысле слова) ее точки, но и для тех точек, которые лежат выше всех „соседних" своих точек.

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, достаточно повторить рассуждения, которыми мы доказали горизонтальность кривой в точке D; ведь при этом доказательстве мы брали точки D_1 и D_2, достаточно близкие к точке D, т. е. лежащие на том самом холме,

вершиной которого является точка D. Если бы эти точки были взяты на склонах других холмов, то рассуждения наши потеряли бы свою силу.

Итак, первое замечание наше сводится к тому, что равенство производной нулю есть признак не абсолютного, а относительного максимума. Таких максимумов может быть несколько.

Второе наше замечание читатель вероятно предвосхитил. Именно, легко заметить, что кривая имеет горизонтальное направление не только там, где ординаты ее максимальны [1]), но и там, где они минимальны; на нашем чертеже это имеет место в точках B и E. Разумеется, речь идет об относительных минимумах.

Доказательство — такое же, как и для максимума; различие только в том, что справа от точки B мы имеем подъем (производная функция положительна), а не спуск, как в случае максимума. Наоборот, слева имеем спуск (производная отрицательна). В наинизших точках — в „долинах“ — мы должны иметь горизонтальное направление кривой (производная равна нулю).

Таким образом второе замечание сводится к тому, что равенство нулю производной отнюдь не свидетельствует о том, что мы имеем непременно максимум; это может быть, как мы видели, и минимум.

Наконец, необходимо сделать еще третье замечание, способное несколько огорчить читателя. Дело в том, что кривая может иметь горизонтальное направление (производная равна нулю) не только в точках максимума и минимума, но и в точках, подобных точкам C и G. В таких точках слева мы имеем подъем (спуск), крутизна которого все более умеряется, и наконец подъем (спуск) прекращается; но вместо того чтобы попасть здесь на вершину (в долину), мы видим перед собой новый подъем (спуск). Такие точки называют точками перегиба (потому что, переходя через эту точку, кривая поворачивает свою выпуклость в противоположную сторону).

§ 38. Если мы учтем все три сделанные замечания, то получим следующий способ нахождения максимального (или минимального) значения, принимаемого функцией. Основная идея, формулированная в начале предыдущего параграфа, остается в силе: то значение независимой переменной x, которое дает функции y ее максимальное (минимальное) значение, должно обращать в нуль производную функцию $\frac{dy}{dx}$. Вычислив производную и приравняв ее нулю, как мы это делали в предыдущем параграфе, мы получим, вообще говоря, не одно, а несколько значений переменной x. Но мы теперь знаем, что не все они дадут требуемый максимум (минимум). Иные дадут минимум (максимум); иные же — не дадут ни максимума, ни минимума.

Какие из этих значений дают максимум, какие минимум, а какие — ни того ни другого, распознать не всегда бывает легко. Существует общий метод решения этой задачи, но он довольно сложен, и излагать

[1]) В дальнейшем, говоря о максимальных ординатах, максимальных значениях функции и т. д., мы будем разуметь относительные максимумы, если особо не будет оговорено, что речь идет о максимумах абсолютных.

его мы не станем. На практике часто из условия конкретной задачи можно легко видеть, с каким из трех случаев (максимум, минимум, перегиб) мы имеем дело. Если же почему-либо это не удается усмотреть, то простое вычисление обычно решает вопрос. Именно, на ряду с тем значением x, которое является „подозрительным" (т. е. которое обращает производную в нуль), берем два близких значения: одно немного меньшее, другое немного большее, чем подозрительное значение. Затем вычисляем соответствующие значения функции y. Если окажется, что „подозрительное" значение величины x дает значение y, наибольшее из всех трех полученных значений, — имеем максимум; если наименьшее — минимум; наконец, если оно больше одного из двух соседних, но меньше другого, — тогда имеем перегиб.

Следующий пример пояснит эти указания.

Пример. Величины y и x связаны зависимостью $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$. Требуется найти максимальное и минимальное значения функции y (ср. задачу 53).

Найдем производную функцию $\frac{dy}{dx}$.

Величина y может получить минимальные или максимальные значения при тех значениях независимой переменной x, которые обращают в нуль производную, т. е. при которых

$$x^2 - 2x = 0.$$

Это уравнение дает два „подозрительных" значения: $x = 0$ и $x = 2$.

Рассмотрим первое из них: $x = 0$. Если мы сделаем график (черт. 59) нашей функциональной зависимости (особенно тщательно нужно вычертить кривую вблизи „подозрительных" точек), то сразу нам бросится в глаза, что в точке $x = 0$ мы имеем максимум. Но для построения графика мы должны сделать вычислений больше, чем нам нужно. Достаточно, если мы вычислим значения y для „подозрительного" значения $x = 0$ $\left(\text{мы получим } y = \frac{1}{3}\right)$ и для двух соседних значений x: меньшего и большего, чем $x = 0$. Так, например, можно взять $x = -1$ и $x = +1$ [1]). Соответственные значения величины y будут -1 и $-\frac{1}{3}$; обе они меньше, чем значение $y = \frac{1}{3}$, и потому при $x = 0$ функция принимает максимальное значение $\frac{1}{3}$.

Переходим к другому подозрительному значению: $x = 2$ (соответствующее значение величины y будет $y = -1$). Для соседних значений

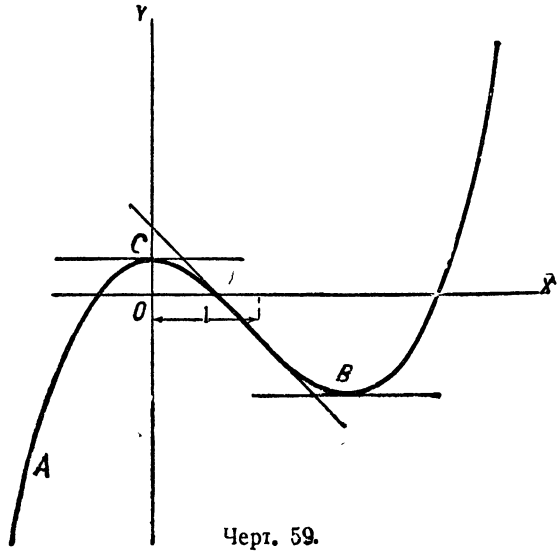
[1]) При выборе „соседних" значений величины x следует помнить, что они должны лежать между данным подозрительным значением и ближайшим следующим или предыдущим, ибо в противном случае мы можем очутиться на другом холме или в другой долине. В данном случае значение x, большее чем 0, следует брать не большим двух. Меньшее же значение x можно взять каким угодно, ибо слева нет подозрительных точек.

$x=1$ (меньшее подозрительного) и $x=3$ (большее подозрительного) получаем: $y=-\frac{1}{3}$ и $y=+\frac{1}{3}$. Оба они больше, чем значение $y=-1$, и потому при $x=2$ функция принимает минимальное значение.

Не нужно забывать, что как максимум, так и минимум суть максимум и минимум относительные. Абсолютного же максимума (и абсолютного минимума) наша функция не имеет вовсе. В самом деле, при удалении вправо кривая все время поднимается, и ординаты ее растут неограниченно. При удалении же влево кривая имеет неограниченный спуск.

Таким образом справа есть точки, превышающие вершину единственного холма $\left(\text{например, точка } x=4,\ y=5\frac{2}{3}\right)$; слева же имеются точки, лежащие ниже единственной долины $\left(\text{например, } x=-2,\ y=-6\frac{1}{3}\right)$.

При решении конкретных задач нам важно часто найти абсолютный, а не относительный максимум (и минимум); поэтому в конкретной задаче дело не исчерпывается тем, что мы нашли относительный максимум; необходимо еще исследовать, является ли он абсолютным, ибо в противном случае он нам не нужен. Мы уже говорили, что в большинстве случаев это исследование облегчается самим условием задачи.



Черт. 59.

Остается еще заметить, что очень часто по самому характеру задачи независимая переменная не может принимать любые значения, но лишь значения, не выходящие из данных пределов. Геометрически это значит, что наивысшая точка отыскивается не для всей кривой, а лишь для ее куска. Тогда положение дела существенно меняется, и условия задачи уточняются.

Так, если бы в нашем примере было добавлено условие, что переменная x может изменяться лишь в пределах от $x=-1{,}1$ до $x=+2$ (т. е. что рассматривается лишь кусок AB нашей кривой), то вершина C холма давала бы не только относительный, но и абсолютный максимум (так как более высокие точки справа были бы отрезаны от нашего куска). Долина B попрежнему не давала бы абсолютного минимума (так как слева, возле края A, оставались бы более низкие точки). Зато появился бы абсолютный минимум на левом краю A. Совершенно ясно, что для

подобного минимума (на краю) совсем не требуется горизонтальность кривой, и потому каждый раз, когда по условию задачи независимая переменная может принимать не все значения, необходимо особо обратить внимание на то, что происходит при крайних значениях ее, т. е. вычислить значения функции на краях промежутка изменения x.

§ 39. *Задача 64.* Проволоку длиной 80 *см* требуется согнуть в прямоугольник так, чтобы площадь этого прямоугольника была возможно большей.

В этой задаче требуется, как мы видим, отыскать абсолютный максимум.

Величина площади (обозначим ее через s) зависит от выбора длины одной из сторон прямоугольника; назовем эту длину x; противоположная сторона будет также x, две другие стороны будут иметь длину $40-x$ каждая. Таким образом зависимость величины s от величины x представится формулой

$$s = x(40 - x) = 40x - x^2,$$

и требуется найти абсолютный максимум величины s.

Отыскиваем прежде всего относительный максимум.

Для этого приравниваем нулю производную $\frac{ds}{dx}$

$$\frac{ds}{dx} = 40 - 2x = 0$$

и, решая полученное уравнение, находим

$$x = 20 \text{ см}.$$

Соответствующее значение s будет

$$s = x(40 - x) = 400 \text{ см}^2.$$

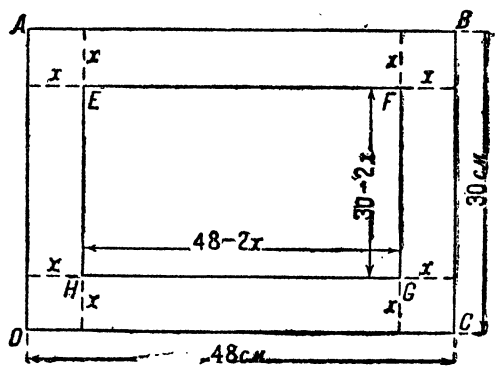
Мы должны были бы исследовать теперь, имеем ли мы здесь максимум, минимум или перегиб. Это нетрудно узнать, достаточно вычислить значения s для соседних значений величины x, например для $x = 19$ и $x = 21$; в обоих случаях мы получим $s = 399$, и следовательно при $x = 20$ мы имеем максимум (относительный). Впрочем и без выкладки из самого условия задачи видно, что здесь должен быть максимум. Более того, из условия задачи ясно, что это есть не только относительный, но и абсолютный максимум. Если все же хотят доказать это, то мы можем рассуждать так: относительных максимумов во всяком случае больше не имеется (ибо $x = 20$ — единственное значение, обращающее производную в нуль). Остается еще посмотреть, нет ли максимума на границах. Дело в том, что величина x по смыслу задачи должна заключаться между значениями $x = 0$ и $x = 40$ (две противоположных стороны не могут иметь в сумме длину, большую длины проволоки); при обоих этих значениях величина s равна нулю. Таким образом на краях нет абсолютного максимума, и, таким образом, относительный максимум $s = 400$ является вместе с тем и абсолютным.

Итак, наибольший из прямоугольников, которые можно согнуть из проволоки 80 *см* длины, есть квадрат со стороной в 20 *см*.

Рассмотрим еще вопрос о прямоугольнике минимальной площади. Функция s не имеет ни одного относительного минимума (ибо

единственное значение $x = 20$, обращающее производную в нуль, дает максимум). Тем не менее абсолютный минимум она имеет. Именно, на границах изменения величины x, т. е. при $x = 0$ и при $x = 40$, функция s имеет значение $s = 0$.

Это значит, что прямоугольник минимальной площади имеет одну сторону, равную 40 *см*, а другую — равную нулю. Разумеется, такой „прямоугольник" из проволоки согнуть нельзя. Но физический смысл этого результата тот, что меньше нуля (отрицательною) площадь прямоугольника быть не может.



Черт. 60.

§ 40. *Задача 65.* Прямоугольный лист жести $ABCD$ имеет длину 48 *см* и ширину 30 *см*. В четырех его углах вырезываются квадраты равной величины. В остающемся куске загибают края по линиям EF, FG, GH и HE и получают прямоугольную коробку (открытую сверху).

Какой величины должны быть вырезаемые квадраты, для того чтобы коробка имела наибольшую вместимость?

Обозначим через x длину стороны вырезываемых квадратов, а через v — объем коробки. Чтобы выразить v в функции x, заметим, что высота коробки равна стороне x вырезываемого квадрата, в основании же коробки окажется прямоугольник $EFGH$. Длина этого прямоугольника меньше длины листа жести на величину $2x$, так как с обеих сторон лист обрезан на x *см*. Следовательно, длина основания коробки $48 - 2x$; точно так же найдем, что ширина основания $30 - 2x$. Значит,

$$v = x(30 - 2x)(48 - 2x) = 1440x - 156x^2 + 4x^3.$$

Ищется максимум (абсолютный) величины v, причем из условия задачи видно, что величина x может изменяться между границами $x = 0$ и $x = 15$ (ибо ширина листа 30 *см*).

Сразу же видно, что на границах не может быть абсолютного максимума. В самом деле, при $x = 0$ коробка имеет нулевую высоту, а при $x = 15$ — основание с нулевой шириной. Из этого же ясно, что, по мере возрастания высоты коробки от $x = 0$ до $x = 15$, ее объем v должен сначала расти, а затем снова уменьшаться, так что где-то существует абсолютный максимум величины v. Раз его нет на краях, то он должен быть вместе с тем одним из относительных максимумов. Чтобы найти относительные максимумы функции, мы приравниваем нулю производную $\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} = 1440 - 312x + 12x^3 = 0.$$

Решая полученное уравнение (его предварительно удобно сократить на 12), получаем два „подозрительных“ значения величины x:

$$x = 20$$

и

$$x = 6.$$

Первое из этих значений лежит вне пределов изменения величины x, ибо оно превосходит число 15 (можно показать, что это значение дает относительный минимум функции v).

А так как одно из этих „подозрительных“ значений должно давать максимум (абсолютный и относительный), то отсюда заключаем, что максимальный объем коробка будет иметь, если сторона вырезываемых квадратов равна 6 *см*. Этот объем будет равен

$$v_{max} = 6 \cdot (30 - 2 \cdot 6)(48 - 2 \cdot 6) = 3888 \text{ } см^3.$$

Разумеется, можно и непосредственно увериться в том, что при $x = 6$ получается максимум, а не минимум и не точка перегиба (см. пример § 38), но в данном случае, как и в большинстве других, используя условие задачи, мы можем избавить себя от излишних выкладок.

§ 41. *Задача 66.* Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 узлов (т. е. 10 морских миль в час) [1]) расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода расстояние s морских миль будет покрыто им с наименьшими затратами?

Обозначая через v скорость парохода в узлах, мы найдем, что в один час расходы на топливо состазляют $0{,}03\,v^3$ руб. [2]); следовательно, стоимость одного часа плавания равна $480 + 0{,}03\,v^3$.

Расстояние s морских миль будет покрыто при скорости v узлов в течение $\frac{s}{v}$ часов. Следовательно, общая сумма, затраченная на весь рейс, составит

$$\frac{s}{v}(480 + 0{,}03\,v^3).$$

Требуется найти минимум (абсолютный) этого выражения. Величина v может измениться от нуля до некоторого предельного значения (предельная скорость парохода).

Найдем сначала относительные минимумы функции

$$\frac{s}{v}(480 + 0{,}03\,v^3) = s\left(\frac{480}{v} + 0{,}03\,v^2\right)$$

(величина s — постоянна).

---

[1]) 1 морская миля = 1,85 *км*.

[2]) Из пропорции

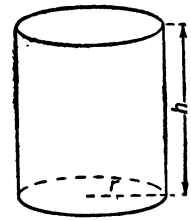
$$x : 30 = v^3 : 10^3;$$
$$x = 0{,}03\,v^3.$$

Приравнивая производную функцию нулю, получаем уравнение

$$s\left(-\frac{480}{v^2}+0{,}06\,v\right)=0,$$

решая которое, получаем $v^3=8000$; $v=20$ узлов.

Из условия задачи видно, что значение $v=20$ дает действительно относительный минимум данной функции. В самом деле при очень малых скоростях стоимость рейса очень велика из-за чрезмерной его продолжительности $\left(\text{слагаемое } \frac{480}{v} \text{ очень велико}\right)$; при очень больших скоростях стоимость рейса тоже очень велика из-за чрезмерно больших расходов на топливо (слагаемое $0{,}03\,v^2$ очень велико). Таким образом должна существовать некоторая наивыгоднейшая скорость, не слишком большая и не слишком малая.



Черт. 61.

Если теперь мы предположим, что скорость 20 узлов не превосходит предельной скорости парохода (если, например, предельная скорость его 25 узлов), то она и является наивыгоднейшей, и рейс в s миль обойдется в $36\,s$ рублей. Что в этом случае на границах ($v=0$ и $v=25$) не может быть абсолютного минимума, ясно из того, что при существовании единственного относительного минимума график даст единственную долину; вершин не будет вовсе, так что в обе стороны от значения $v=20$ функция

$$s\left(\frac{480}{v}+0{,}03v^2\right)$$

будет все время расти.

Если же предположить, что предельная скорость парохода меньше 20 узлов (например 18 узлов), то эта предельная скорость и будет наивыгоднейшей, ибо так как при изменении скорости от нуля до 20 узлов расходы все время уменьшаются, то на границе при $v=18$ мы имеем абсолютный минимум.

§ 42. *Задача 66а.* Требуется изготовить жестяную банку вместимостью в 2 *л*, закрытую сверху и снизу. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на ее изготовление потребовалось возможно меньшее количество жести?

Обозначим через r радиус основания, а через h высоту банки. Так как вместимость банки должна равняться 2 $л=2000$ $см^3$, то, если величины r и h выражены в сантиметрах, между ними существует зависимость, выражаемая уравнением

$$\pi r^2 h=2000, \qquad (71)$$

которое позволяет выразить h через r, или наоборот.

Поверхность банки, которую желательно сделать возможно меньшей, представляется формулой

$$s=2\pi rh+2\pi r^2. \qquad (72)$$

Очевидно, выбор одной из величин h или r уже определяет величину s, так как другая находится из формулы (71). Поэтому прежде чем приступить к нахождению минимума величины s, нужно представить ее в функции одной из величин h или r, какой именно — принципиально безразлично. Очевидно, однако, что проще всего взять за независимую переменную величину r; тогда формула (71) дает

$$h = \frac{2000}{\pi r^2}. \tag{73}$$

Подставляя это выражение h в формулу (72), находим

$$s = \frac{4000}{r} + 2\pi r^2.$$

Приравнивая производную нулю, получаем:

$$-\frac{4000}{r^2} + 4\pi r = 0,$$

откуда

$$r^3 = \frac{1000}{\pi},$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Соображения, совершенно аналогичные изложенным в предыдущей задаче, позволяют утверждать, что значение $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ дает минимум для функции s и что этот минимум является в то же время абсолютным минимумом [1]).

Соответствующая высота банки h находится из формулы (73):

$$h = \frac{2000\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \cdot 100} = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Мы видим, что высота банки должна быть вдвое больше радиуса (т. е. равняться диаметру) ее дна. Нетрудно убедиться, что такое соотношение размеров остается наивыгоднейшим для банки любого заданного объема.

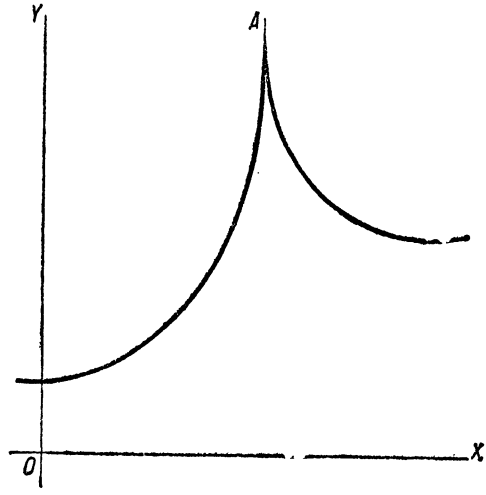
Читателю предлагается показать, что для банки, открытой сверху, наивыгоднейшей формой будет такая, при которой высота ее вдвое меньше диаметра дна.

§ 43. Наше изложение было бы неполным, если бы мы не упомянули об одном обстоятельстве, относящемся к теории максимумов и минимумов. Именно, могут представиться исключительные случаи, когда относительный максимум (или минимум) функции не сопрово-

[1]) Величина r может иметь любое положительное значение.

ждается обращением производной в нуль. Пользуясь геометрическим языком, мы можем выразить эту же мысль так: может случиться, что на вершине холма кривая не имеет горизонтального направления.

На черт. 62 представлен подобный случай. Слева от точки A мы имеем по мере приближения к точке A все больший подъем (в типичном случае подъем становился все меньшим). В точке A угол наклона к горизонту — прямой. После этого угол наклона становится тупым (или, если угодно, отрицательным). Что же делается с производной функцией? Так как она представляется тангенсом угла наклона, то в точке A она равна бесконечности, причем при переходе слева направо через точку A производная от бесконечно-большого положительного значения переходит к бесконечно-большим отрицательным значениям. Геометрически это и значит, что крутой подъем сменяется крутым спуском. Естественно, что эта смена обусловливает появление вершины в точке A. Когда мы в § 37 анализировали условие существования максимума, мы правильно учли, что производная от положительных значений должна перейти к отрицательным, но мы молчаливо предполагали „плавный“ переход через нуль и оставили в стороне переход „скачком“ через бесконечность. Между тем возможность такого перехода отнюдь не исключена [1]).



Черт. 62.

Следующий простой пример может иллюстрировать изложенное. Пусть ищется максимум функции

$$4 - \sqrt[3]{x^2}\ ^{2}).$$

Ее производная равна

$$\frac{d\,(4-\sqrt[3]{x^2})}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

---

[1]) Простой арифметический пример может иллюстрировать такой переход. Если величина u плавно переходит от положительных значений к отрицательным через нуль, то величина $\frac{1}{u}$ должна тоже переходить от положительных значений к отрицательным, но уже „скачком“ через бесконечность.

[2]) Для получения графического образа этой функции достаточно, перевернув „вверх ногами“ кривую черт. 62, поместить точку A в начале координат.

Совершенно очевидно, что в нуль она не обращается ни при каком конечном значении x. Тем не менее при $x=0$ функция $4-\sqrt[3]{x^2}$ достигает максимума (относительного и абсолютного). В самом деле, при $x=0$ функция имеет значение 4; при всех других значениях x она имеет меньшие значения, так как вычитаемое $\sqrt[3]{x^2}$ при любых значениях x (положительных и отрицательных) всегда положительно.

Дело здесь в том, что производная $-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при переходе через $x=0$ меняет свой знак (при $x<0$ производная положительна, при $x>0$ отрицательна), но меняет его скачком, принимая при $x=0$ бесконечно-большое значение. Построив график, читатель получит вершину того же типа, что и на черт. 62.

Совершенно ясно, что и для минимума функции можно соответственно повторить все сказанное о максимуме. Примером может служить функция $4+\sqrt[3]{x^2}$, имеющая при $x=0$ минимум, равный 4.

Итак, мы можем сказать, что полученный нами в § 37 вывод (что при максимуме или минимуме функции ее производная обращается в нуль) сохраняет свою силу, но с оговоркой, что производная изменяется плавно, без скачка, т. е. что не происходит внезапного изменения направления кривой. В разобранном нами случае направление кривой изменилось сразу на 180° (крутой подъем сменился крутым спуском), т. е. производная совершила скачок от бесконечно-больших положительных значений к бесконечно-большим отрицательным.

Но производная может претерпеть скачок и на конечную величину. Если только при этом она меняет знак, т. е. если подъем сменился спуском (или наоборот), то будем иметь максимум (или минимум).

Такого рода ход изменения изображен на черт. 63. В точке A мы имеем излом кривой линии, причем до излома она поднималась кверху, а после излома стала опускаться.

Ни до излома ни после него кривая не образует с горизонтом прямого угла, т. е. производная не обращается в бесконечность. Заметим, что такой скачок производной на конечную величину никогда не может иметь места в том случае, если переменные величины y и x связаны одной алгебраической формулой. В этом случае производная может претерпеть скачок только типа черт. 62, т. е. скачок через бесконечность.

Но функциональная зависимость может выражаться не одной, а несколькими формулами, и тогда возможны скачки типа черт. 63.

Так, например, величина y может быть задана в функции величины x так: при значениях x, меньших чем 2, y определяется по формуле

$$y=4-x,$$

а при значениях x, больших чем 2, по формуле

$$y=\frac{1}{2}x+1.$$

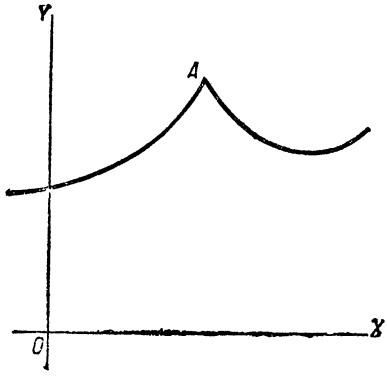
Обе формулы дают при $x=2$ значение $y=2$, так что изображающая функцию линия (черт. 64) не разрывается в точке $x=2$, но изламывается. Производная перескакивает от значения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(4-x)}{dx}=-1$$

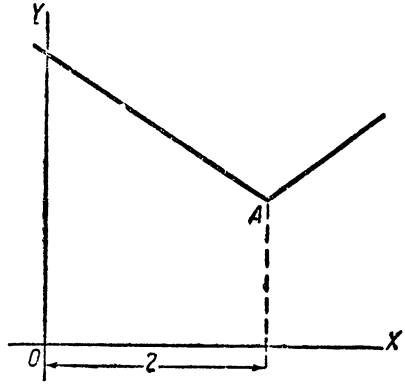
к значению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{dx}=\frac{1}{2},$$

так что мы имеем скачок, сопровождаемый переменой знака. Так как знак минус сменяется знаком плюс, то мы имеем переход от спуска к подъему, т. е. минимум.



Черт. 63.



Черт. 64.

Мы можем пояснить сказанное на конкретном примере: пусть бильярдный шар, находившийся на расстоянии 80 *см* от борта, получил толчок, сообщивший ему скорость 20 $\frac{см}{сек}$, и движется по направлению, перпендикулярному к борту. Требуется найти зависимость между расстоянием s шара от борта и протекшим с момента удара временем t сек. (влиянием трения мы пренебрегаем).

Очевидно, до удара шара о борт искомая зависимость будет $s=80-20t$.

После же удара (который наступит при $t=4$) расстояние s выразится формулой $s=20(t-4)$, которая сохраняет свою силу до момента второго удара о противоположный борт. Производная в данном случае представляет скорость движения. Мы видим, что до момента $t=4$ она равна -20 (расстояние до борта уменьшается); после момента $t=4$ она равна $+20$. В момент $t=4$ мы имеем скачок производной от отрицательных значений к положительным. Следовательно, функция s должна при $t=4$ иметь минимум (он равен в данном случае нулю). Физический смысл этого минимума очевиден.

Глава V.

Диференцирование и интегрирование через вспомогательную функцию.

§ 1. До сих пор, решая задачи разнообразного содержания, мы пользовались весьма несложным аппаратом математических формул. В сущности говоря, мы имели лишь две формулы интегрального исчисления:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad \text{(при } k\text{, отличном от } -1\text{).} \tag{1}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a} \tag{2}$$

и одну формулу диференциального исчисления

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx. \tag{3}$$

Естественно, однако, что с этим скромным аппаратом мы далеко не уйдем. Ряд задач, которые принципиально не содержат ничего нового по сравнению с уже решенными нами, требуют, однако, умения диференцировать и интегрировать функции более сложного типа.

Нам предстоит поэтому заняться усовершенствованием технического аппарата ислисления бесконечно-малых. В настоящей главе мы и приступим к этой работе.

§ 2. Прежде всего мы должны обратить внимание читателя на то, что еще не исчерпали всех тех возможностей, которые дают нам основные формулы (1), (2) и (3) интегрального и диференциального исчисления. Как мы сейчас покажем, простые соображения позволят нам использовать их для интегрирования и диференцирования выражений более сложного характера, чем те, которыми мы до сих пор занимались. Начнем с формулы диференциального исчисления

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx. \tag{3}$$

Вспомним, что при выводе ее не делалось никаких оговорок о характере величины x, так что совершенно безразлично, является ли эта величина независимой переменной или в свою очередь есть функция некоторого аргумента. До сих пор мы не рассматривали примеров последнего типа. Теперь же именно на них мы остановим внимание читателя.

Пусть требуется вычислить диференциал функции $(2z^3 + 3)^2$.

Эту функцию мы могли бы представить (по формуле квадрата суммы) в виде $4z^6+12z^3+9$ и тогда нашли бы

$$d(2z^3+3)^2=d(4z^6+12z^3+9)=(24z^5+36z^2)dz.$$

Но мы можем поступить и иначе. Именно, мы можем рассматривать выражение $2z^3+3$ как новую переменную величину. Для полной ясности дела мы введем для этой величины новое обозначение; назовем ее, например, буквой x, так что

$$x=2z^3+3. \tag{4}$$

Тогда задача дифференцирования функции $(2z^3+3)^2$ сводится к задаче дифференцирования функции x^2.

Эту функцию мы умеем дифференцировать:

$$d(2z^3+3)^2=d(x^2)=2x\,dx; \tag{5}$$

теперь остается избавиться от вспомогательной величины x. Мы вставляем в формулу (5) вместо x его выражение (4); что касается дифференциала dx, то его выражение находим из той же формулы (4), дифференцируя ее:

$$dx=6z^2\,dz. \tag{4'}$$

Подставляя теперь выражение (4) и (4′) в формулу (5), находим:

$$d(2z^3+3)^2=2(2z^3+3)\cdot 6z^2\,dz=(24z^5+36z^2)\,dz.$$

Мы получили результат, совпадающий с ранее найденным.

Идея изложенного только что приема состоит во введении вспомогательной величины $2z^3+3$, которую мы обозначили через x. Так как эта вспомогательная величина является функцией нашей переменной z, то мы назовем этот прием *дифференцированием через вспомогательную функцию*. В литературе часто употребляется термин: дифференцирование функции от функции.

Мы ввели для вспомогательной функции $2z^3+3$ новое обозначение x лишь для того, чтобы лучше уяснить теоретическую сторону дела. На практике этого вовсе не требуется. Вычисление развертывается так: рассматривая функцию $(2z^3+3)^2$ как квадрат величины $2z^3+3$, мы, по общему правилу, пишем

$$d(2z^3+3)^2=2(2z^3+3)d(2z^3+3)$$

и затем находим дифференциал вспомогательной функции $2z^3+3$, так что выкладка имеет вид

$$d(2z^3+3)^2=2(2z^3+3)d(2z^3+3)=2(2z^3+3)\cdot 6z^2\,dz.$$

Мы предостерегаем читателя от грубой ошибки. Нельзя написать

$$d(2z^3+3)^2=2(2z^3+3)\,dz.$$

Подобная ошибка делается иногда начинающим; она происходит от того, что в процессе дифференцирования забывают или не обращают вни-

мания, что дифференцируется квадрат величины $2z^3+3$, а не квадрат величины z.

Рассмотрим еще один пример дифференцирования через вспомогательную функцию

$$d(1+\sqrt{x})^3 = 3(1+\sqrt{x})^2\, d(1+\sqrt{x}) = 3(1+\sqrt{x})^2 \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Мы предоставляем читателю проверить полученный результат, дифференцируя многочлен, получающийся от возведения в куб выражения

$$1+\sqrt{x}.$$

Уже из этой проверки читатель уяснит преимущества нового метода. Но сила его проявляется во всей полноте тогда, когда мы имеем дело с дробной или отрицательной степенью вспомогательной функции, ибо тогда проверка, допускаемая в приведенных примерах, становится невозможной.

Так, пусть требуется найти дифференциал функции

$$\frac{1}{(x+4x^2)^2}.$$

Рассматривая выражение $x+4x^2$ как вспомогательную функцию мы имеем

$$d\frac{1}{(x+4x^2)^2} = -\frac{2d(x+4x^2)}{(x+4x^2)^3} = \frac{-2(1+8x)\,dx}{(x+4x^2)^3}.$$

В предыдущей главе, решая задачу 59, мы должны были найти диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ для переменных, связанных уравнением

$$x^2+y^2=25. \tag{6}$$

Так как мы не умели диференцировать функцию

$$y=\sqrt{25-x^2}, \tag{7}$$

то мы нашли $\frac{dy}{dx}$, не решая уравнения (6), и получили, что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{8}$$

Теперь мы можем диференцировать непосредственно формулу (7). Мы получим

$$dy = \frac{d(25-x^2)}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{25-x^2}},$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$$

Принимая во внимание формулу (7), мы убеждаемся в тождественности обоих выражений для $\frac{dy}{dx}$.

Конечно, для нахождения диференциального отношения нет необходимости разбивать вычисление на две операции, как мы это сейчас сделали. Выкладку можно вести так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{25-x^2}}{dx} = \frac{d(25-x^2)}{2\sqrt{25-x^2}\,dx} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{25-x^2}\,dx} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}};$$

предпоследнее промежуточное выражение желательно не выписывать, производя в уме сокращение дроби на dx.

Рассмотрим еще один пример несколько более сложного типа. Пусть требуется найти диференциал выражения

$$(3x^2+\sqrt{1-2x})^3.$$

Принимая за вспомогательную функцию

$$3x^2+\sqrt{1-2x},$$

мы получаем

$$d(3x^2+\sqrt{1-2x})^3 = 3(3x^2+\sqrt{1-2x})^2\, d(3x^2+\sqrt{1-2x}) = 3(3x^2+\sqrt{1-2x})^2\,(6x\,dx+d\sqrt{1-2x}).$$

Теперь введем новую вспомогательную функцию, именно функцию $1-2x$. Продолжая выкладку, получаем

$$3(3x^2+\sqrt{1-2x})^2\left[6x\,dx+\frac{d(1-2x)}{2\sqrt{1-2x}}\right] =$$

$$= 3(3x^2+\sqrt{1-2x})^2\left[6x\,dx-\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}\right] =$$

$$= 3(3x^2+\sqrt{1-2x})^2\left(6x-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)dx.$$

Предпоследнее выражение желательно не выписывать.

В этом примере вспомогательные функции пришлось ввести дважды; могут встретиться случаи, когда число промежуточных функций еще больше.

Упражнения [1]).

1) $d(4x^3 - 0{,}6x)^3 = 3(4x^3 - 0{,}6x)^2 (12x^2 - 0{,}6)\,dx.$

2) $d\dfrac{1}{(13x^2+8x)^2} = -\dfrac{4(13x+4)\,dx}{(13x^2+8x)^3}.$

3) $d\sqrt{x^3+12x^2} = \dfrac{3x(x+8)\,dx}{2\sqrt{x^3+12x^2}}.$

4) $d\sqrt{x^4-1} = \dfrac{2x^3\,dx}{\sqrt{x^4-1}}.$

5) $d(\sqrt{x^4-1})^3 = 6x^3\sqrt{x^4-1}\,dx.$

6) $d\sqrt{x^2-a^2} = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

7) $d\dfrac{3}{(2+x^2)^2} = \dfrac{-12x\,dx}{(2+x^2)^3}.$

8) $d\dfrac{3}{2-x^2} = \dfrac{6x\,dx}{(2-x^2)^2}.$

9) $d\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\dfrac{x\,dx}{(\sqrt{1+x^2})^3}.$

10) $d\dfrac{1}{(\sqrt{a^2+x^2})^3} = -\dfrac{3x\,dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^5}.$

11) $d\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{x\,dx}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}.$

12) $d\left[\sqrt{a^2+x^2}+4abx\right] = \left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+4ab\right)dx.$

13) $d\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4abx+x^2}} = \dfrac{-2ab-x}{(\sqrt{a^2+4abx+x^2})^3}\,dx.$

14) $d\sqrt{1+\sqrt{1+4x}} = \dfrac{dx}{\sqrt{1+4x}\,\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}.$

15) $d\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$

---

[1]) При вычислении дифференциалов нижеуказанных функций полезно пользоваться формулами:

$$d\frac{1}{x^n} = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}}; \quad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

которые представляют собой частные случаи общей формулы

$$x\,(x)^n = nx^{n-1}dx.$$

16) $$d\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-dx}{a^2+x^2+x\sqrt{a^2+x^2}}.$$

§ 3. Вычисляя диференциалы различных функций с помощью вспомогательных функций, мы опирались на формулу

$$d(x^n)=nx^{n-1}\,dx,$$

которая служила нам как в тех случаях, когда переменная x была независимой, так и в том случае, если она являлась сама функцией независимого переменного (эту функцию мы брали в качестве вспомогательной). Что касается вычисления производных с помощью вспомогательной функции, то здесь необходимо во избежание недоразумений заметить следующее. Если переменная y выражается через переменную x формулой $y=x^n$, то ее производная функция $\frac{dy}{dx}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1},$$

и эта формула справедлива, конечно, как в том случае, когда переменная x принята за независимую, так и в том случае, когда она является сама функцией некоторого аргумента, например величины z.

Но если за аргумент принимается не x, а z, то диференциальное отношение $\frac{dy}{dx}$ не представляет собой, собственно говоря, производной функции. Производной функцией является тогда диференциальное отношение $\frac{dy}{dz}$, а оно, конечно, не равно величине nx^{n-1}.

Так, например, если y и z связаны зависимостью $y=(2z^3+3)^2$, то мы можем, приняв $2z^3+3$ за вспомогательную функцию и обозначив ее через x (см. предыдущий параграф), написать

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

что иначе можно записать еще так:

$$\frac{dy}{d(2z^3+3)}=2(2z^3+3).$$

Из этой записи совершенно очевидно, что величина $2(2z^3+3)$ не является производной функцией от функции $(2z^3+3)^2$, ибо дает величину диференциального отношения $\frac{dy}{d(2z^3+3)}$, а не диференциального отношения $\frac{dy}{dz}$. Так, из уравнения

$$y=(2z^3+3)^2$$

следует:

$$dy=2(2z^3+3)\,6z^2\,dz,$$

а отсюда

$$\frac{dy}{dz} = 2(2z^3 + 3)\,6z^2.$$

Мы видим, что производная функция представилась произведением двух сомножителей $2(2z^3+3)$ и $6z^2$. Происхождение каждого из них установить очень легко. Сомножитель $2(2z^3+3)$, как мы видели, представляет диференциальное отношение

$$\frac{dy}{d(2z^3+3)}.$$

Это диференциальное отношение мы назовем „производной по вспомогательной функции". Вспомогательной функцией является в данном случае функция $2z^3+3$. Второй сомножитель $6z^2$ представляет собой производную этой вспомогательной функции, ибо

$$\frac{d(2z^3+3)}{dz} = 6z^2.$$

Значит, мы можем сказать, что производная функция представляет собой произведение „производной по вспомогательной функции" на производную самой вспомогательной функции.

Покажем, что это предложение справедливо не только для данного случая и не только для функции вида x^n, но для совершенно произвольного случая.

Пусть мы рассматриваем величину y как функцию величины x (вспомогательной переменной). Величина же x является функцией z (независимой переменной).

Таким образом, в конечном счете, y тоже является функцией независимой переменной z.

Производная переменной y по вспомогательной функции x есть диференциальное отношение

$$\frac{dy}{dx}.$$

Производная же самой вспомогательной функции x есть диференциальное отношение

$$\frac{dx}{dz}.$$

Составим произведение этих производных

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}.$$

Очевидно, оно равно диференциальному отношению

$$\frac{dy}{dz},$$

но это последнее и дает производную функцию величины y.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Найти производную функции $y=\frac{1}{(x+4x^2)^2}$.

Если мы введем вспомогательную функцию $x+4x^2=z$, то наша функция примет вид $y=\frac{1}{z^2}$; производная по вспомогательной функции будет равна

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{2}{z^3}=-\frac{2}{(x+4x^2)^3}.$$

Производная вспомогательной функции $z=x+4x^2$ равна:

$$\frac{dz}{dx}=1+8x.$$

Отсюда заключаем, что искомая производная функция равна

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{(x+4x^2)^3}\cdot(1+8x)=-\frac{2(1+8x)}{(x+4x^2)^3}.$$

В предыдущем параграфе мы нашли выражение диференциала той же функции $\frac{1}{(x+4x^2)^2}$, из которого можно непосредственно получить тот же результат. Следующий пример также сравните с соответствующим примером предыдущего параграфа.

Пример 2. Найти производную функции $y=\sqrt{25-x^2}$. Принимая функцию $25-x^2=z$ за вспомогательную, имеем:

$$\frac{dy}{dz}=\frac{d\sqrt{z}}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}};$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d(25-x^2)}{dx}=-2x.$$

Отсюда искомая производная функция представится произведением

$$\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot-2x=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}. \tag{9}$$

Разумеется, нет никакой необходимости вычислять производную функции способом, только что изложенным. Всегда можно вычислить предварительно диференциал функции и затем разделить его на диференциал аргумента. Последний путь является даже наиболее удобным в тех случаях, когда функция имеет более или менее сложный вид, т. е. когда приходится вводить не одну, а несколько вспомогательных функций. Но в случаях, когда можно ограничиться одной вспомогательной функцией, изложенный прием, при некотором навыке, отнимает меньше времени. Разумеется, нет необходимости вводить особые обозначения для вспомо-

гательной функции, что мы делали лишь для уяснения хода вычисления. Для большей быстроты вычисления полезно помнить, что если

$$y = \frac{1}{x^m},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{x^{m-1}};$$

и если

$$y = \sqrt{x},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(обе формулы получаются как частные случаи формулы

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

для $n = -m$ и $n = \frac{1}{2}$).

Пример 3. Вычислить производную функции $\frac{3}{2-x^2}$ (вспомогательная функция $2-x^2$; в знаменателе — первая степень вспомогательной функции). Производная по вспомогательной функции $-\frac{3}{(2-x^2)^2}$; производная вспомогательной функции $-2x$. Искомая производная равна

$$\frac{d\left(\frac{3}{2-x^2}\right)}{dx} = -\frac{3}{(2-x^2)^2} \cdot -2x = \frac{6x}{(2-x^2)^2}.$$

Для того чтобы левой части этого равенства придать менее громоздкий вид, часто вместо

$$\frac{d\left(\frac{3}{2-x^2}\right)}{dx}$$

пишут

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2-x^2}\right).$$

Ни в коем случае нельзя смотреть на выражение $\frac{d}{dx}$ как на самостоятельную операцию деления. Нужно помнить, что делится на dx выражение $d\left(\frac{3}{2-x^2}\right)$. Если угодно, можно смотреть на символ

$\frac{d}{dx}$, как на символ производной функции, заменяющий штрих в обозначении

$$\left(\frac{3}{2-x^2}\right)'.$$

Такой подход к символу $\frac{d}{dx}$ несколько суживает его значение, потому что игнорируется тот факт, что производная функция представляется отношением дифференциалов.

Пример 4. Найти $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Вспомогательная функция $1-x^2$; она входит в наше выражение в степени $-\frac{1}{2}$.

Производная по вспомогательной функции $-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2(\sqrt{1-x^2})^3}$; производная вспомогательной функции $-2x$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2(\sqrt{1-x^2})^3}\cdot(-2x) = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}.$$

Пример 5. Найти $\frac{d}{dx}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Упражнения.

Предлагается при вычислении производных функций применять в каждом случае оба изложенные способа, т. е. 1) находить произведение производной по вспомогательной функции на производную вспомогательной функции и 2) находить дифференциал функции и делить результат на дифференциал независимой переменной.

1) $\frac{d}{dx}(a-x^2)^2 = -4x(a-x^2)$.

2) $\frac{d}{dx}\sqrt{6x} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$.

3) $\frac{d}{dx}\sqrt{2px} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$.

4) $\frac{d}{ds}\sqrt{s^2+2ps+p^2} = \frac{s+p}{\sqrt{s^2+2ps+p^2}}$.

5) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

6) $\frac{d}{dt}\frac{3}{(1+t^2)^3} = \frac{-18t}{(1+t^2)^4}$.

7) $\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{1+\sqrt{z}}\right)^2 = -\frac{a^2}{\sqrt{z}(1+\sqrt{z})^3}$.

8) $\frac{d}{dx}\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2x^2}} = -\frac{ac^2x}{(\sqrt{b^2+c^2x^2})^3}$.

9) $\frac{d}{du}\sqrt{a^2+\frac{b^4}{u^2}} = -\frac{b^4}{u^2\sqrt{a^2u^2+b^4}}$.

10) $y = \frac{a}{a-x} + (a-x)^2$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(a-)^2x} - 2(a-x)$.

11) $s = a\sqrt{a^2-t^2} + \frac{b^4}{(a-t)^2}$; $\frac{ds}{dt} = -\frac{at}{\sqrt{a^2-t^2}} + \frac{2b^4}{(a-t)^3}$.

12) $u = \sqrt[3]{b^3+av^2}$; $\frac{du}{dv} = \frac{2}{3}\frac{av}{(\sqrt[3]{b^3+av^2})^2}$.

13) $\frac{d}{dx}\sqrt{(a+bx)^2+c^2x^2} = \frac{ab+(b^2+c^2)x}{\sqrt{(a+bx)^2+c^2x^2}}$.

14) $\frac{d}{dx}(\sqrt{(a-x)^2+b^2})^3 = -3(a-x)\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.

§ 4. *Задача 67.* Какая точка между двумя источниками света силы F_1 и F_2 слабее всего освещена?

Обозначим через a расстояние между источниками света и через x расстояние некоторой точки между ними до одного из источников света, скажем F_1; тогда $a-x$ есть расстояние этой точки до другого источника силы F_2. Как известно, сила освещения обратно пропорциональна квадрату расстояния, так что освещение от первого источника равно $\frac{F_1}{x^2}$, а от второго $\frac{F_2}{(a-x)^2}$; общая величина s освещения равна

$$s = \frac{F_1}{x^2} + \frac{F_2}{(a-x)^2}.$$

Величина s очень велика вблизи каждого из источников (теоретически $s=\infty$ при $x=0$ и при $x=a$). Она должна по мере удаления от одного из них и приближения к другому сначала убывать, потом вновь расти, так что должен существовать относительный минимум, который и будет абсолютным, так как на границах абсолютного минимума, конечно, нет. Этот относительный минимум достигается при том значении x, которое обращает в нуль $\frac{ds}{dx}$.

$$\frac{ds}{dx}=-\frac{F_1}{x^3}+\frac{F_2}{(a-x)^3}=0.$$

Чтобы решить это уравнение, удобнее всего представить его в форме

$$\left(\frac{x}{a-x}\right)^3=\frac{F_1}{F_2},$$

откуда

$$\frac{x}{a-x}=\frac{\sqrt[3]{F_1}}{\sqrt[3]{F_2}}.$$

Это уравнение, из которого x легко определяется, выражает, что расстояния наименее освещенной точки от источников света пропорциональны кубическим корням из силы света этих источников. Если, например, силы света относятся как 8 : 1, то соответствующие расстояния относятся как 2 : 1.

§ 5. *Задача 68.* Пароход, идущий со скоростью 16 *км/час*, находится на расстоянии 6 *км* к востоку от парусника и держит курс на запад. Парусник же идет к югу со скоростью 12 *км/час*. Когда пароход окажется в наиболее близком расстоянии от парусника?

Если через t обозначить время (в часах), протекшее от описанного в задаче момента, то $6-16t$ и $12t$ будут расстояния судов (в километрах) от первоначального местонахождения парусника. Расстояние их s друг от друга будет

$$s=\sqrt{(6-16t)^2+(12t)^2}.$$

Приравнивая нулю производную, получим уравнение:

$$\frac{-32(6-16t)+288t}{2\sqrt{(6-16t)^2+(12t)^2}}=0.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем уравнение первой степени, решение которого дает

$$t=0{,}24 \text{ часа}=14 \text{ мин. } 24 \text{ сек.}$$

Подставив найденное значение t в выражение $s=\sqrt{(6-16t)^2+(12t)^2}$, мы найдем, что $s=3{,}6$ *км*. Что это расстояние является наименьшим — очевидно из условия задачи.

Замечание. Мы могли бы искать минимум не величины s, а величины s^2, так как очевидно, что s^2 растет и убывает вместе с s.

Тогда диференцировать пришлось бы более простую функцию

$$s^2 = (6 - 16t)^2 + 144t^2;$$

$$\frac{d(s^2)}{dt} = -32(6 - 16t) + 288t = 0,$$

и получим то же значение $t = 0{,}24$ часа.

§ 6. *Задача 69.* Конец A рельса AB длиной 5 *м* поднимается с земли краном со скоростью 5 *см/сек*. Другой конец B волочится по земле. Какова скорость движения конца B в тот момент, когда конец A приподнялся на 2,8 *м*?

Обозначим через x расстояние конца B до точки C, над которой находится кран, и выразим величину x в функции времени t, протекшего с того момента, когда конец A начал подниматься с земли. За это время конец A поднялся на высоту $AC = 5t$; по пифагоровой теореме

$$x = \sqrt{500^2 - 25t^2}.$$

Скорость движения конца B есть производная $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-25t}{\sqrt{500^2 - 25t^2}}.$$

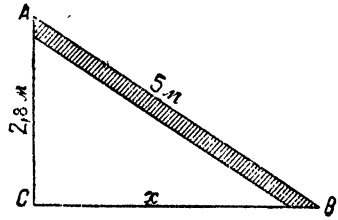
В момент, когда $AC = 5t = 280$ *см*, величина t равна

$$t = 56 \text{ сек.}$$

Подставляя это значение в формулу для скорости, получаем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1400}{\sqrt{171600}} \approx -3{,}4 \text{ (см/сек)}.$$

Отрицательный знак скорости указывает на то, что движение совершается в сторону уменьшения величины x.



Черт. 65.

Замечание. Очевидно, что скорость точки B зависит лишь от положения рельса AB и скорости подъема точки A в тот момент, когда она находится на данной высоте над землей, и совершенно безразлично, с какой скоростью точка A поднималась до того, как достигла данной высоты. В соответствии с этим замечанием мы можем дать иное решение нашей задачи, формулировав ее так: конец A рельса длиной $a = 500$ *см*, поднятый на высоту 280 *см*, имеет в этот момент скорость $v = 5$ *см/сек*. Найти скорость v' движения конца B. Решим задачу в общем виде.

Обозначив попрежнему через x расстояние BC, а через y расстояние AC, мы имеем:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2};$$

диференцируя, находим

$$dx = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy.$$

Отсюда находим величину скорости точки B, т. е. $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,\frac{dy}{dt}.$$

Но $\frac{dy}{dt}$ есть скорость v движения точки A. Поэтому

$$v' = \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,v = -\frac{280}{\sqrt{500^2 - 280^2}} \cdot 5 = -3{,}4 \text{ см/сек}.$$

Полученную формулу можно было переписать так:

$$\frac{v'}{v} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -\frac{AC}{BC}.$$

Мы видим, что скорости точек A и B обратно пропорциональны их расстояниям от точки C.

Последний факт выступает еще более ярко, если мы, прежде чем диференцировать уравнение

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

освободим его от иррациональности:

$$x^2 = a^2 - y^2.$$

Отсюда

$$2x\,dx = 2y\,dy.$$

Деля на dt обе части равенства, получаем

$$2x\,\frac{dx}{dt} = -2y\,\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = -(y : x).$$

Здесь уместно заметить, что мы всегда имеем возможность избежать диференцирования иррациональных выражений; для этого достаточно, как в данном случае, до диференцирования избавить от иррациональности уравнение, связывающее переменные величины. Конечно, не всегда мы получаем столь простые уравнения, как в данном случае.

§ 7. После изложенного в § 2 нам остается прибавить лишь немногие теоретические сведения, чтобы мы могли диференцировать любое алгебраическое выражение. Именно, мы должны познакомиться с правилами диференцирования произведения и частного.

Пусть требуется найти диференциал произведения uv, где u и v —

какие-нибудь переменные величины (зависимые или независимые; не исключена возможность и того, что одна из них или обе постоянны).

Пользуясь неоднократно применявшимся рассуждением, мы напишем прежде всего

$$d(uv) = (u + du)\ (v + dv) - uv$$

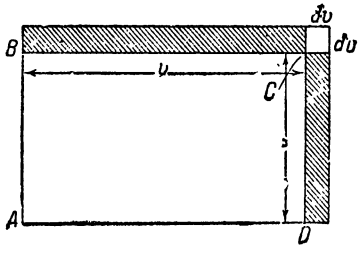
или

$$d(uv) = v\,du + u\,dv + du\,dv.$$

Слагаемое $du\,dv$ мы можем отбросить как бесконечно-малую величину более высокого порядка, чем два другие слагаемые (ср. § 8 гл. IV), и в результате получаем

$$d(uv) = v\,du + u\,dv. \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что для получения диференциала произведения нужно каждый из двух сомножителей умножить на диференциал другого и полученные произведения сложить [1]).



Черт. 66.

На черт. 66 формула (8) иллюстрирована геометрически. Мы видим, что бесконечно-малое приращение площади прямоугольника со сторонами u и v складывается из двух площадей, заштрихованных на чертеже, равных одна $u\,dv$, а другая $v\,du$. Что касается прямоугольника $du\,dv$, то его площадь бесконечно-мала в сравнении с каждой из заштрихованных площадей.

В качестве примера найдем диференциал выражения $(2x^2 + 3x)\ (x^3 - 2)$. Его можно вычислить и без помощи формулы (8), произведя умножение многочленов. Мы получим

$$d[(2x^2 + 3x)\ (x^3 - 2)] = d(2x^5 + 3x^4 - 4x^2 - 6x) = \\ = (10x^4 + 12x^3 - 8x - 6)\,dx.$$

Применим теперь формулу (8), полагая в ней

$$u = 2x^2 + 3x; \quad v = x^3 - 2;$$

$$d[(2x^2 + 3x)\ (x^3 - 2)] = (x^3 - 2)\,d(2x^3 + 3x) + (2x^3 + 3x)\,d(x^3 - 2) = \\ = (x^3 - 2)\ (4x + 3)dx + (2x^2 + 3)3x^2\,dx.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, вновь получим

$$(10x^4 + 12x^3 - 8x - 6)\,dx.$$

В разобранном примере мы, разумеется, ничего не выгадали от пользования формулой (8), ибо результат можно найти и без нее,

---

[1]) Если один из сомножителей, например u, есть величина постоянная, то его диференциал du равен нулю, в формуле (8) пропадает первое слагаемое, и мы получаем $d(uv) = u\,dv$, т. е. постоянная величина выносится за знак диференциала (ср. § 16 гл. IV).

и притом гораздо проще. Вся ценность этой формулы раскроется для нас в следующих главах. Однако уже сейчас мы можем демонстрировать ее пользу на таких примерах, где без нее обойтись было бы очень затруднительно.

Пусть требуется найти дифференциал выражения $\frac{x+1}{x^2+1}$.

Мы можем представить его в виде $(x+1)\ (x^2+1)^{-1}$ и применить формулу (8). Мы получаем:

$$d\frac{x+1}{x^2+1} = d[(x+1)\ (x^2+1)^{-1}] =$$

$$= (x^2+1)^{-1}\, d(x+1) + (x+1)\ d[(x^2+1)^{-1}] =$$

$$= (x^2+1)^{-1}\, dx - (x+1)\ (x^2+1)^{-2}\, 2x\, dx =$$

$$= \frac{dx}{x^2+1} - \frac{2x\,(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Если привести дроби к общему знаменателю, то можно представить результат формулой

$$d\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

В этом примере мы применили формулу (8) к вычислению дифференциала частного выражений $x+1$ и x^2+1. Так как вычислять дифференциал частного приходится очень часто, то полезно запомнить специальную формулу, которую можно рассматривать как частный случай формулы (8).

§ 8. Пусть требуется найти дифференциал частного $\frac{u}{w}$ (где u и w могут быть как постоянными, так и переменными, и в последнем случае как зависимыми, так и независимыми). Представим частное $\frac{u}{w}$ в виде uw^{-1} и применим формулу (8) (положим в ней $v = w^{-1}$). Мы получим

$$d\frac{u}{w} = d(uw^{-1}) = w^{-1}du + u\ d(w^{-1}) = \frac{du}{w} - \frac{u\,dw}{w^2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем формулу

$$d\frac{u}{w} = \frac{w\,du - u\,dw}{w^2}, \tag{8'}$$

которая показывает, что дифференциал дроби $\frac{u}{w}$ можно представить как дробь, знаменатель которой есть квадрат знаменателя w; числитель же представляет разность

произведений знаменателя на диференциал числителя и числителя на диференциал знаменателя [1]).

Применив формулу (8′) к диференцированию дроби $\frac{x+1}{x^2+1}$, мы получаем

$$d\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)\,d(x+1)-(x+1)\,d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+1)dx-(x+1)\cdot 2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Первый шаг в этом вычислении легко проделывается в уме, и таким образом благодаря пользованию формулой (8′) результат получается очень быстро.

Вот и все, что необходимо было изложить, для того чтобы мы могли найти диференциал любого алгебраического выражения.

Пример 1. Найдем диференциал выражения

$$\frac{2x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

По формуле (8′) получаем:

$$d\frac{2x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\sqrt{1+x^2}\,d(2x^2+1)-(2x^2+1)\,d\left(x\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2(1+x^2)}.$$

Теперь будем вычислять диференциалы, входящие в числитель, причем ко второму из них применим формулу (8). Получаем последовательно,

$$\frac{x\sqrt{1+x^2}\cdot 4x\,dx-(2x^2+1)\left(\sqrt{1+x^2}\,dx+x\,d\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2(1+x^2)}=$$

$$=\frac{4x^2\sqrt{1+x^2}\,dx-(2x^2+1)\left(\sqrt{1+x^2}\,dx+\dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2(1+x^2)}$$

Теперь остается выполнить чисто алгебраические преобразования: вынести dx в числителе за скобку, уничтожить двухъэтажность дроби, выполнить умножение и приведение подобных членов.

---

[1]) Практика показывает, что при запоминании формулы (8) возникает единственное затруднение: начинающий не сразу запоминает, что из чего вычитается в числителе, т. е. вместо выражения (8′) склонен иногда написать выражение $\frac{u\,dw-w\,du}{w^2}$; можно рекомендовать в случае такого рода сомнения следующую мнемоническую аналогию: вспомнив, что „знаменосец идет первым", вы сейчас же вспомните, что знаменатель стоит первым (в выражении $w\,du-u\,dw$).

В результате упрощений можно будет написать искомый дифференциал в таком виде:

$$d\frac{2x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}=-\frac{dx}{x^2(\sqrt{1+x^2})^3}.$$

Разумеется, можно изменить ход вычислений, если предварительно преобразовать дифференцируемое выражение. Можно было бы, например, подвести под знак радикала в знаменателе величину x : это избавило бы нас от дифференцирования произведения. Читатель может проверить таким образом полученный результат.

Пример 2. Найдем еще дифференциал выражения $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Мы можем, пользуясь функцией $\frac{1+x}{1-x}$ как вспомогательной, написать

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,d\frac{1+x}{1-x}.$$

Затем, применяя формулу (8′), получим (это при небольшом навыке получается в один прием)

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{(1-x)\,d(1+x)-(1+x)\,d(1-x)}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{(1-x)\,dx+(1+x)\,dx}{(1-x)^2}.$$

Далее можно упрощать полученное выражение обычными алгебраическими преобразованиями. В результате упрощений искомому дифференциалу можно придать такой вид:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Упражнения.

1) $d\frac{3x-1}{x^5}=\frac{5-12x}{x^6}dx.$

(Применить формулу (8′) и проверить, разбив на две дроби и дифференцируя двучлены.)

2) $d\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{2-2x^2}{(x^2-x+1)^2}dx.$

3) $d\frac{x}{x^2+1}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx.$

4) $y = x\sqrt{x^2+1}$, $dy = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

5) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $dy = \frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3}$.

6) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$, $dy = \frac{(-2-x)\,dx}{2x^2\sqrt{x+1}}$.

7) $y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{1-x+x^2}}$, $dy = \frac{(1-x^2)\,dx}{(1-x+x^2)\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

8) $y = (a+x)\sqrt{a-x}$, $dy = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}\,dx$.

9) $d\frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{(3+x)\,x^2\,dx}{(1+x)^3}$.

10) $d\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3} = \frac{1-x^2}{(x+2)^4}\,dx$.

§ 9. Если нам нужно найти производную произведения двух функций, то можно сначала вычислить диференциал этого произведения и затем разделить результат на диференциал независимого переменного.

Так, пусть требуется вычислить производную функции $x\sqrt{x^2+a^2}$. Вычисляем ее диференциал:

$$d\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right) = \sqrt{x^2+a^2}\,dx + x\,d\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2}\,dx + \frac{2x^2\,dx}{2\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Деля это выражение на dx, находим производную функции

$$x\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\frac{d\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{dx} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Но можно вычислять производную, не прибегая к посредствующему вычислению диференциала. Именно из формулы

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

мы немедленно получаем (деля обе части на диференциал независимой переменной x)

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Мы видим, что производная произведения двух сомножителей равна сумме произведений каждого из них на производную другого. В нашем примере мы получим

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)=\sqrt{x^2+a^2}\,\frac{dx}{dx}+x\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+a^2}.$$

Производная $\frac{dx}{dx}$ величины x равна единице; это можно было учесть сразу и не писать выражения $\frac{dx}{dx}$. Производная $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+a^2}$ вычисляется как произведение производной по вспомогательной функции x^2+a^2 на производную этой вспомогательной функции:

$$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)=\sqrt{x^2+a^2}+x\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+a^2}+$$

$$+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Вся выкладка записывается так:

$$\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)'=\sqrt{x^2+a^2}+x\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(x^2+a^2)'=$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}+x\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Здесь обозначение $\frac{d}{dx}$ заменено штрихом, что сокращает письмо.

Совершенно аналогично мы можем из формулы

$$d\frac{u}{w}=\frac{w\,du-u\,dw}{w^2}$$

получить формулу

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{w}\right)=\frac{w\frac{du}{dx}-u\frac{dw}{dx}}{w^2},$$

которая короче записывается так:

$$\left(\frac{u}{w}\right)'=\frac{wu'-uw}{w^2}.$$

Она выражает, что производная дроби $\frac{u}{w}$ представляется дробью, знаменатель которой есть квадрат знаменателя w, а числитель представляет разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя.

В качестве примера найдем производную дроби $\frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}$ (ср. пример 1 предыдущего параграфа).

$$\left[\frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}\right]' =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+1}\cdot 4x - (2x^2+1)\left[\sqrt{x^2+1} + x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\right]}{x^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{x^2+1} - (2x^2+1)\left[\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right]}{x^2(x^2+1)} =$$

$$= -\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}.$$

Такое вычисление производной, при котором мы не прибегаем к посредствующему вычислению дифференциала функции, несколько сокращает запись и экономит время. Поэтому полезно приобрести в нем навык. Разумеется, принципиально здесь нет ничего нового; это только изменение в порядке действий (деление на dx совершается не по окончании вычисления, а в процессе самого вычисления).

Упражнения.

1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^5}\right) = \frac{5-12x}{x^6}$.

2) $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)' = \frac{2-2x^2}{(x^2-x+1)^2}$.

3) $\frac{d}{dx}(1+4x^3)\,(1+2x^2) = 4x\,(1+3x+10x^3)$.

4) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$.

5) $y = \frac{(x+4)^2}{x+3}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\,(x+4)}{(x+3)^2}$.

6) $s = \frac{at}{(b+t)^2}$, $\frac{ds}{dt} = \frac{a(b-t)}{(b+t)^3}$.

7) $\frac{d}{dx}\frac{(a-x)^3}{a-2x} = \frac{(a-x)^2\,(4x-a)}{(a-2x)^2}$.

8) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\right] = \frac{a^2-4x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{7}{2}}}$.

9) $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}=\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$.

10) $\frac{d}{dt}\frac{a^2t^2}{(\sqrt{a^4+t^4})^3}=\frac{2a^2t(a^4-2t^4)}{(\sqrt{a^4+t^4})^5}$.

§ 10. *Задача 70.* Гальванический элемент с электродвижущей силой $v=1{,}1$ V и с внутренним сопротивлением $r=0{,}5\,\Omega$ нужно включить в цепь так, чтобы количество тепла, выделяющееся во внешней цепи, было возможно большим. Каково должно быть для этого внешнее сопротивление R цепи?

Обозначая через I силу тока в цепи, а через Q количество тепла, выделяющееся во внешней цепи в течение 1 сек., мы можем, согласно закону Джоуля, выразить величину Q следующей формулой.

$$Q=I^2R$$

(Q выражено в джоулях, I — в амперах, R — в омах).

В условиях нашей задачи величина I зависит от сопротивления внешней цепи, именно, согласно закону Ома,

$$I=\frac{v}{r+R}.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получаем:

$$Q=\frac{v^2R}{(r+R)^2}. \tag{9}$$

Решим поставленную задачу в общем виде, помня, что величины v и r постоянны.

Найдем производную $\frac{dQ}{dR}$:

$$\frac{dQ}{dR}=\frac{v^2(r-R)}{(r+R)^3}.$$

Она обращается в нуль при $R=r$. Что здесь мы имеем максимум (относительный и абсолютный) — вытекает из того, что как при очень малых, так и при очень больших значениях величины внешнего сопротивления R величина Q очень мала, в чем легко убедиться как из соображений физического характера, так и по формуле (9) [1]).

Таким образом наибольший тепловой эффект получается тогда, когда внешнее сопротивление цепи окажется равным внутреннему сопротивлению гальванического элемента. В нашей задаче следует взять $R=0{,}5\,\Omega$.

---

[1]) При $R=0$ формула (9), очевидно, дает $Q=0$; при $R=\infty$ величина r может быть отброшена в знаменателе, и мы получаем:

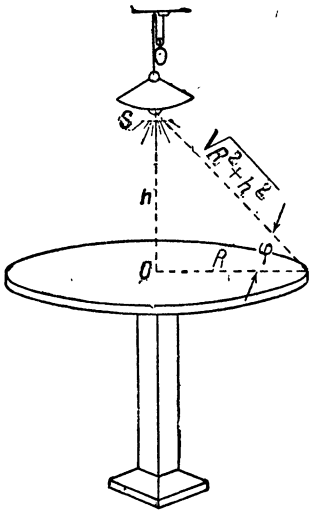
$$Q=\frac{v^2R}{R^2}=\frac{v^2}{R}=\frac{v^2}{\infty}=0.$$

Количество тепла, выделяемое током в 1 сек., достигнет при этом своей наибольшей величины

$$Q_{max} = \frac{v^2}{4r} \approx 0{,}6 \text{ джоуля.}$$

§ 11. *Задача 71.* Над центром круглого стола, радиус которого $R = 1$ *м*, висит электрическая лампа, которую можно опускать и поднимать на блоке. На какой высоте над столом должна находиться лампа, чтобы на краях стола освещенность была наиболее сильной?

Обозначим через h искомое расстояние лампы S до центра стола O (черт. 67). Пусть сила света, испускаемого лампой, равна F единиц (например свечей); в точке A освещенность стола обусловливается: 1) расстоянием $AS = \sqrt{R^2 + h^2}$ до источника света и 2) величиной угла φ, образуемого падающим в точку A лучом света с плоскостью стола. Именно, освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния AS и прямо пропорциональна синусу угла φ. Таким образом, обозначая через f освещность стола в точке A, имеем формулу:



Черт. 67.

$$f = \frac{F \sin \varphi}{R^2 + h^2}.$$

В эту формулу входят две переменные h и φ, но они связаны между собою так, что одну можно выразить через другую. Выбирая h за независимую переменную, мы находим (см. чертеж) для величины $\sin \varphi$ следующее выражение:

$$\sin \varphi = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}},$$

и, следовательно, для f выражение:

$$f = F \frac{h}{(\sqrt{R^2 + h^2})^3}.$$

Отсюда

$$\frac{df}{dh} = F \frac{R^2 - 2h^2}{(\sqrt{R^2 + h^2})^5}.$$

Она обращается в нуль только при условии

$$R^2 - 2h^2 = 0,$$

т. е.

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \text{ м.}$$

Из условия задачи очевидно, что при этой высоте лампы освещенность будет действительно максимальной.

§ 12. *Задача 72.* При измерении прямоугольного участка его длина

оказалась равной $u = 80$ *м*, а ширина $v = 31$ *м*, причем известно, что ошибка при измерении длины не превышала 0,3 *м*, а ошибка при измерении ширины $-0{,}1$ *м*. В каких пределах лежит ошибка, которую мы совершаем, принимая площадь прямоугольника равной $80 \times 31 = 2480$ *м*^{2}?

Ошибка, совершаемая нами, может быть рассматриваема как разность двух значений величины uv, одно из которых соответствует значениям $u = 80$, $v = 31$, а другое — истинным значениям этих величин. Обозначим через du разность между истинным значением величины u и значением $u = 80$, через dv — соответствующую разность значений v. Наконец, разность между истинным и вычисленным значением uv обозначим $d(uv)$. Тогда формула (8) § 7 дает:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv = 31\,du + 80\,dv.$$

Так как величины du и dv по абсолютному значению не превосходят 0,3 и 0,1, то величина $d(uv)$ не превосходит по абсолютному значению

$$31 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}1 = 17{,}3 \text{ м}^2.$$

Это значит, что, считая площадь прямоугольного участка равной 2480 *м*^{2}, мы рискуем ошибиться не больше чем на 17,3 *м*^{2}, или, округляя (в сторону увеличения) не более чем на 20 *м*^{2}.

Читатель может усомниться в законности нашего вычисления, потому что формула (8) была выведена в том предположении, что величины du и dv бесконечно-малы, тогда как может показаться натяжкой считать бесконечно-малой такую величину, как 0,3 *м*.

Дело, однако, в том, что существенным свойством бесконечно-малой величины является возможность п р е н е б р е г а т ь ею в вычислениях. Ясно, что это свойство не абсолютное, а относительное. В бюджете СССР лишняя тысяча (разумеется о д н а тысяча) рублей в годовом балансе есть незаметная величина; в бюджете же рабочего тысяча рублей годового заработка есть весьма существенная сумма.

Величиной 0,3 *м* можно пренебречь в с р а в н е н и и с величиной 80 *м*. Конечно, это довольно грубое пренебрежение, и потому никак нельзя утверждать, что 0,3 *м* есть б е с к о н е ч н о-малая величина. В силу этого формула (8) в данном случае не дает т о ч н о г о значения величины $d(uv)$, а лишь приближенное. Тем не менее мы можем ею пользоваться по двум основаниям:

1) Величина $du\,dv$, которую мы откинули при выводе формулы (8), хотя и не является бесконечно-малой по отношению к величинам du и dv, но во всяком случае достаточно мала, чтобы практически не считаться с ней (она равна $0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$). Будучи достаточно малой по сравнению с величинами du и dv, она в еще большей мере ничтожна по сравнению с величиной площади uv.

2) Мы разыскиваем не ошибку при измерении площади, а лишь пределы, в которых она заключена. Величину самой ошибки мы все равно найти не можем, ибо, если бы ошибка была известна, то были бы известны точные значения u и v. Нет никаких оснований полагать, что обе ошибки du и dv достигли своей предельной величины и притом

обе сделаны в одну и ту же сторону (т. е. обе положительны или обе отрицательны). Поэтому уже величина

$$31 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}1$$

заведомо больше, чем абсолютное значение

$$31\,dv + 80\,du,$$

так что добавление величины $du\,dv = 0{,}03$ совершенно не нужно.

Наконец, мы и так округляем результат в сторону увеличения, интересуясь лишь „порядком" предельной ошибки, а не ее точным значением.

Вот почему в этом и во всех других случаях, где требуется оценить небольшую ошибку, можно применять формулы дифференциального исчисления, что значительно облегчает выкладки. В данном случае особого облегчения, конечно, не получается, но, как и всегда, мы взяли для первого примера простую задачу, легко допускающую непосредственную проверку[1]).

Задача 73. При измерении величины u (например длины участка) ошибка не превышает 2%; ошибка измерения v (например ширины участка) не превышает 3%. В каких пределах лежит ошибка, совершаемая при вычислении uv (в процентах к вычисленной величине)?

Согласно условию задачи, величина $\frac{du}{u}$ не превышает по абсолютному значению 0,02; величина $\frac{dv}{v}$ не превышает 0,03.

Вычислим величину $\frac{d(uv)}{uv}$; применяя снова формулу (8) § 7, находим

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{v\,du + u\,dv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}. \qquad (10)$$

Из последнего выражения ясно, что величина $\frac{d(uv)}{uv}$ не превышает величины 0,05, т. е. ошибка при вычислении uv не превышает 5% вычисленной величины.

Нетрудно видеть, что наш числовой пример можно обобщить и высказать следующее предложение: (максимальная) относительная погрешность произведения равна сумме (максимальных) относительных погрешностей сомножителей[2]).

Задача 73а. Для нахождения плотности тела определены вес тела $p = 20$ *г* и вес вытесненной этим телом воды $v = 40$ *г*. Условия опыта гарантируют, что неизбежные ошибки не превышают: 0,5 *г* для p и 1 *г* для v. Оценить абсолютную и относительную погрешность при определении плотности.

---

[1]) Истинное значение u лежит между 79,7 и 80,3; истинное значение v — между 30,9 и 31,1. Следовательно, истинная величина площади не меньше $79{,}7 \cdot 30{,}9 = 2462{,}73$ *м*^{2} и не больше $80{,}3 \cdot 31{,}1 = 2497{,}33$ *м*^{2}. В обоих случаях максимальная ошибка не достигает 20 *м*^{2}. Проделав выкладки, читатель убедится, что они все же сложнее, чем те вычисления, которые проделаны в тексте.

[2]) Для краткости обычно опускают термин „максимальная".

Плотность тела k вычисляется по формуле

$$k = \frac{p}{v}.$$

Применяя формулу (8′), находим:

$$dk = \frac{v\,dp - p\,dv}{v^2} \tag{11}$$

dv, dp и dk — ошибки в величинах v, p и k). Мы должны найти максимальное значение величины dk. Может быть, читатель сгоряча склонен поставить в формулу (11) значения $v = 40$, $p = 20$, $dp = 0{,}5$, $dv = 1$. В ошибочности такого вычисления убедит его уже абсурдность ответа $dk = 0$, означающего, что плотность тела определена с абсолютной точностью! Дело здесь в том, что ошибки dp и dv могут иметь разные знаки, и наибольшая по абсолютному значению ошибка получается вовсе не тогда, когда знаки ошибок одинаковы (в этом случае они компенсируются и не исключена возможность полной компенсации), а тогда, когда знаки ошибок различны, т. е. при $dp = +0{,}5$, $dv = -1$ или при $dp = -0{,}5$, $dv = +1$.

В этих случаях абсолютное значение ошибки в величине плотности будет равно

$$\pm\frac{40 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 1}{40^2} = \pm\frac{1}{40},$$

так что истинная плотность тела заключена в пределах $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{40}$. Вообще, если под dp и dv мы будем разуметь абсолютные величины максимальных погрешностей, то максимальная погрешность частного $\frac{p}{v}$ [1]) вычисляется по формуле

$$\frac{v\,dp + p\,dv}{v^2}.$$

Относительная же погрешность найдется делением этой величины на $\frac{p}{v}$ [2]); она равна:

$$\frac{v\,dp + p\,dv}{pv} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}.$$

Таким образом относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей числителя и знаменателя.

§ 13. В § 2 мы показали, как введением вспомогательной функции мы можем расширить поле приложимости формул диференциального

---

[1]) Числа p и v предполагаются положительными.

[2]) Чтобы получить процентное выражение относительной ошибки, нужно еще умножить результат на 100.

исчисления. Покажем теперь, как введение вспомогательной функции может расширить поле применимости формул интегрального исчисления.

Мы начнем с простого примера; пусть нужно вычислить интеграл

$$\int_3^4 (x-2)^2\,dx.$$

Мы можем найти величину этого интеграла, раскрыв скобки в подынтегральной функции:

$$\int_3^4 (x^2-2)^2\,dx = \int_3^4 (x^2-4x+4)\,dx =$$

$$= \int_3^4 x^2\,dx - 4\int_3^4 x\,dx + 4\int_3^4 dx = \frac{37}{3} - 14 + 4 = 2\frac{1}{3}.$$

Но мы можем поступить и иначе, и притом облегчить себе вычисление. Введем вспомогательную функцию z, положив

$$x-2=z. \tag{12}$$

Тогда подынтегральная функция значительно упростится и примет вид z^2; что касается диференциала dx, то формула (12) показывает, что

$$dx=dz,$$

и потому мы можем вместо величины dx ввести dz. Теперь подынтегральное выражение зависит только от одной переменной z и имеет вид

$$z^2\,dz.$$

Если бы в этом месте дальнейшее вычисление было предложено проделать начинающему читателю, то весьма возможно, что он стал бы вычислять интеграл

$$\int_3^4 z^2\,dz.$$

Впрочем он сейчас же убедился бы, что полученный результат $12\frac{1}{3}$ не совпадает с ранее полученным $2\frac{1}{3}$.

В чем же причина ошибки? В том, что мы поспешили поставить старые пределы интегрирования 3 и 4. Мы упустили из виду, что мы ввели новую переменную величину z, тогда как 3 и 4 были пределами изменения старой переменной x. Каковы же пределы изменения величины z? На этот вопрос отвечает та формула, которая связывает x и z:

$$x-2=z.$$

Из нее мы видим, что когда величина x получает свое крайнее значение 3, то величина z получает значение 1; когда же $x=4$, тогда $z=2$; итак, пределами изменения величины z являются числа 1 (нижний) и 2 (верхний).

Теперь вычисляем интеграл

$$\int_1^2 z^2\,dz$$

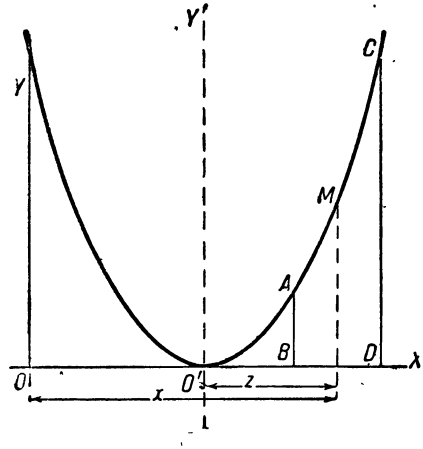
и находим значение его $2\frac{1}{3}$, совпадающее с ранее вычисленным.

На необходимость изменения пределов интегралов при введении вспомогательной функции мы обращаем особенное внимание читателя, так как, даже зная о грозящих последствиях, начинающие часто забывают о предосторожности, необходимой для их избежания.

Для рассмотренного нами примера можно дать геометрическую иллюстрацию, делающую наглядным изменение пределов интеграла (черт. 68). Интеграл

$$\int_3^4 (x-2)^2\,dx$$

представляет площадь $ABDC$, причем кривая AC есть дуга параболы, которая в системе координат XOY имеет уравнение $y=(x-2)^2$. Вершина O' этой параболы лежит в точке (2,0).



Черт. 68.

Если теперь мы перенесем начало координат в точку O', то уравнение параболы упростится. Обозначая через z новую абсциссу произвольной точки M (ординаты, очевидно, в новой системе те же, что в старой), мы напишем уравнение параболы в системе координат XOY'

$$y=z^2.$$

Площадь $ABDC$ найдется интегрированием выражения

$$z^2\,dz,$$

но пределами интегрирования будут служить величины новых абсцисс точек A и C, которые меньше старых на величину $OO'=2$ и равны

$$O'B=1,$$

$$O'D=2.$$

Интеграл $\int_1^2 z^2\,dz$ представляет следовательно ту же площадь, что интеграл

$$\int_3^4 (x-2)^2\,dx.$$

Рассмотрим еще примеры, в которых введение вспомогательной переменной приводит к плодотворным результатам.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx.$$

Напрашивается мысль о введении вспомогательной переменной z при помощи формулы

$$2x+1=z. \tag{13}$$

Пределами изменения этой новой переменной z будут, конечно, не старые числа 0 и 1, а новые. Они получатся из формулы (13) подстановкой в нее значений $x=0$ и $x=1$; соответственные значения z будут $z=1$ и $z=3$. Это и будут новые пределы.

Какой вид примет новое подъинтегральное выражение? Вместо $(2x+1)^3$ войдет выражение z^3; но вместо dx мы не можем написать просто dz (против подобной ошибки мы предостерегаем читателя!), ибо, диференцируя (13), мы получаем:

$$2\,dx=dz,$$

$$dx=\frac{1}{2}\,dz.$$

Таким образом вместо dx мы должны написать $\frac{1}{2}\,dz$ и окончательно напишем

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx=\int_1^3 z^3\,\frac{1}{2}\,dz=\frac{1}{2}\int_1^3 z^3\,dz=10.$$

Мы предлагаем читателю проверить полученный результат, не прибегая к введению вспомогательной переменной (применить формулу куба суммы). Уже из этой проверки читатель уяснит преимущества нового метода. Но сила его особенно сказывается тогда, когда подобная проверка становится вовсе невозможной.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int_5^{13} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}.$$

Полагая

$$2x-1=z, \tag{14}$$

имеем

$$2dx=dz$$

или

$$dx=\frac{1}{2}dz.$$

Что касается пределов интеграла, то формула (14) дает для z пределы 9 и 25.

Окончательно имеем

$$\int_5^{13}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\int_9^{25}\frac{dz}{2\sqrt{z}}=2.$$

Вычислим еще интеграл $\int_2^5\frac{dx}{6-x}$.

$$6-x=z;$$

$$dx=-dz;$$

$$\int_2^5\frac{dx}{6-x}=-\int_4^1\frac{dz}{z}=\int_1^4\frac{dz}{z}=\ln 4=1{,}386.$$

Наконец, вычислим интеграл $\int_0^2\frac{dx}{(8-3x)^2}$.

$$8-3x=z;\ dx=-\frac{dz}{3};$$

$$\int_0^2\frac{dx}{(8-3x)^2}=-\frac{1}{3}\int_3^2\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{8}.$$

Метод, изложенный нами, мы называем интегрированием через вспомогательную функцию.

Замечание. Метод интегрирования через вспомогательную функцию может быть с равным успехом применен и к тому случаю, когда один из пределов интеграла является переменной величиной. Так, если в последнем примере вместо верхнего предела 2 взять переменную величину x, то будем иметь

$$\int_0^x\frac{dx}{(8-3x)^2}=\int_8^{8-3x}-\frac{dz}{3z^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8-3x}-\frac{1}{8}\right).$$

Упражнения.

1) $\int_1^2 (2x+1)^2\,dx = 16\frac{1}{3}$. 2) $\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x+2\right)dx = 19$.

3) $\int_{-1}^{+1} (2x+3)^3\,dx = 78$. 4) $\int_0^1 (4x-2)^2\,dx = 1\frac{1}{3}$.

5) $\int_2^5 (8-x)^2\,dx = 63$. 6) $\int_1^2 (4-3x)^4\,dx = 2\frac{1}{5}$.

7) $\int_1^2 (8x-8)^3\,dx = 128$. 8) $\int_1^x (8x-8)^3\,dx = 128\,(x-1)^4$.

9) $\int_1^x (4-3x)^4\,dx = \frac{1-(4-3x)^5}{15}$.

10) $\int_0^4 \sqrt{8-2x}\,dx = \frac{16}{3}\sqrt{2}$.

11) $\int_a^x \sqrt{8-2x}\,dx = \frac{1}{3}\left[8-2a)^{\frac{3}{2}} - (8-2x)^{\frac{3}{2}}\right]$.

12) $\int_1^x \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$. 13) $\int_a^b \frac{dx}{cx+d} = \frac{1}{c}\ln\frac{cb+d}{ca+d}$.

14) $\int_a^x \frac{dx}{(mx+n)^3} - \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{(ma+n)^2} - \frac{1}{(mx+n)^2}\right]$.

15) $\int_a^x \frac{dx}{(mx+n)^2} = \frac{x-a}{(ma+n)\,(mx+n)}$.

16) $\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = 2\sqrt{x-a}$. 17) $\int_{\frac{a}{2}}^x (2x-a)^4\,dx = \frac{(2x-a)^5}{10}$.

§ 14. В тех случаях, когда подъинтегральная функция представляет степень линейного выражения $mx+n$ (таковы были все примеры предыдущего параграфа), мы всегда приводим интеграл к виду

$$\int_a^b z^k\,dz$$

при помощи вспомогательной функции z, вводимой уравнением

$$mx+n=z.$$

Полезно заметить, что уже в этих случаях удачным выбором вспомогательной функции можно упростить вычисления. Возьмем, например,

$$\int_5^{13}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}.$$

В предыдущем параграфе мы вычислили его, приняв за вспомогательную функцию $2x-1$. Возьмем теперь за вспомогательную функцию $\sqrt{2x-1}$, положив

$$\sqrt{2x-1}=z. \tag{14'}$$

Для большей простоты диференцирования освободим уравнение (14′) от иррациональности

$$2x-1=z^2.$$

Диференцируя, имеем

$$2dx=2z\,dz,\quad dx=z\,dz.$$

Подставим теперь в наш интеграл вместо выражения $\sqrt{2x-1}$ величину z, а вместо dx величину $z\,dz$ и, изменив пределы по формуле (14′), получим

$$\int_5^{13}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\int_{\sqrt{2\cdot5-1}}^{\sqrt{2\cdot13-1}}\frac{z\,dz}{z}=\int_3^5 dz=2.$$

Мы видим, что введение новой вспомогательной функции позволило освободиться от интегрирования дробной степени. Подобный прием дает хорошие результаты, когда подъинтегральная функция представляет дробную степень двучлена первой степени. Рассмотрим еще такой пример:

$$\int_2^6\sqrt[3]{x+2}\,dx=\int_{\sqrt[3]{4}}^{\sqrt[3]{8}}z\cdot3z^2\,dz=3\int_{\sqrt[3]{4}}^{2}z^3\,dz=\frac{3}{4}\left(16-4\sqrt[3]{4}\right).$$

(за вспомогательную функцию z принято выражение $\sqrt[3]{x+2}$).

Мы видим таким образом, что уже в простейшем случае от более или менее удачного выбора вспомогательной функции зависит большая или меньшая легкость вычисления интеграла.

С особенной яркостью это сказывается в тех случаях, когда подынтегральная функция имеет более сложный вид, чем в разобранных выше примерах. Тут нельзя дать общий рецепт, позволяющий отличить „удачную" подстановку от „неудачной". Более того, вообще говоря, нельзя указать, как найти вспомогательную функцию, при помощи которой интеграл приведется к такому виду, который мы умеем вычислять (пока что мы умеем вычислять лишь интегралы вида

$$\int_a^b x^k\,dx,$$

но положение дела не изменится и тогда, когда мы познакомимся с остальными формулами интегрального исчисления). Все, что остается нам делать в том случае, когда мы хотим найти вспомогательную функцию, приводящую предложенный интеграл к одному из изученных типов, — это путем догадки подобрать вспомогательную функцию и, проводя вычисление, посмотреть, к какому интегралу мы пришли.

Мы умышленно подчеркиваем такое неутешительное положение вещей; в дальнейшем читатель увидит, что проистекает оно не из несовершенства теории, а из природы дела.

Впрочем, если нельзя дать общее правило для выбора вспомогательной функции, то для частных случаев можно такие правила указать. Мы рассмотрим сначала простой пример: пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 x\,dx,$$

который, хотя и несколько хлопотливо, можно вычислить и без помощи вспомогательной функции; в результате получаем $1\frac{1}{6}$. Естественно напрашивается выбор функции $1+x^2$ в качестве вспомогательной; положим

$$1+x^2=z. \tag{15}$$

Диференцируя, находим

$$2x\,dx+dz. \tag{16}$$

Находить dx нет нужды, так как под знаком нашего интеграла стоит уже произведение $x\,dx$; заменяя его по формуле (16) выражением $\frac{1}{2}dz$, мы получаем

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 x\,dx=\int_{1+0^2}^{1+1^2} z^2\cdot\frac{1}{2}\,dz=\frac{1}{2}\int_1^2 z^2\,dz=1\frac{1}{6}.$$

Заметим, что более „систематичным" (но гораздо сложнее) было бы определить из уравнения (15) x в функции z:

$$x=\sqrt{z-1} \tag{17}$$

и найти dx, диференцируя полученное уравнение

$$dx = \frac{dz}{2\sqrt{z-1}}. \tag{18}$$

Тогда, подставляя в интеграл $1+x^2=z$, $x=\sqrt{z-1}$, $dx=\frac{dz}{2\sqrt{z-1}}$, мы получим под интегралом снова выражение

$$\frac{1}{2}z^2\,dz.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^1 (1+x^2)^2\,dx,$$

который еще проще предыдущего и непосредственное вычисление которого дает число $1\frac{13}{15}$. Казалось бы, та же вспомогательная функция

$$1+x^2=z$$

приведет этот интеграл к более простому виду. Однако, использовав формулы (17) и (18), мы увидим, что интеграл примет вид

$$\int_1^2 \frac{z^2\,dz}{2\sqrt{z-1}},$$

гораздо более сложный.

Из разобранных двух примеров мы уже можем вывести частное правило, позволяющее судить о пригодности подстановки, которую мы хотим испробовать. Если в подъинтегральное выражение входит множителем степень (в наших примерах вторая) некоторого выражения (в наших примерах выражения $1+x^2$), то выбор этого выражения в качестве вспомогательной функции будет удачным в том случае, когда произведение остальных сомножителей представляет собой диференциал вспомогательной функции или отличается от последнего п о с т о я н н ы м множителем. В первом примере подъинтегральное выражение имело вид $(1+x^2)^2x\,dx$. Приняв за вспомогательную функцию выражение $1+x^2$, мы видим, что диференциал ее равен $2x\,dx$ (этот подсчет производится без труда в уме); это выражение отличается лишь постоянным множителем от выражения $x\,dx$, на которое множится квадрат вспомогательной функции. Следовательно подстановка $1+x^2=z$ будет удачной. Не то—во втором примере, где подъинтегральное выражение имело вид $(1+x^2)^2\,dx$. Здесь квадрат функции $1+x^2$ множится на dx, а это последнее выражение отличается от диференциала $2x\,dx$ функции $1+x^2$ п е р е м е н н ы м множителем $2x$. Поэтому нельзя заранее быть уверенным в том, что подстановка $1+x^2=z$ удачна.

Но и унывать мы еще не имеем права, ибо о непригодности подстановки наше правило еще не позволяет судить. Нужно ее испробовать. В нашем втором примере мы пришли к интегралу более сложному, чем исходный (который мы умеем вычислять и без подстановки). Но возьмем интеграл

$$\int_0^1 (1+x^2)^2 x^3\,dx.$$

Выражение $x^3\,dx$ отличается от диференциала $2x\,dx$ тоже переменным множителем. Тем не менее мы получим хороший результат. Именно, подставляя, как в первом примере,

$$1+x^2=z,$$

$$x=\sqrt{z-1},$$

$$dx=\frac{dz}{2\sqrt{z-1}},$$

мы получаем интеграл

$$\int_1^2 \frac{1}{2} z^2 (z-1)\,dz,$$

который несколько проще исходного и во всяком случае вычисляется без труда $\left(\text{результат равен } \frac{17}{24}\right)$.

Заметим, что если один из множителей подъинтегральной функции представляет собой степень (в данном случае квадрат) выражения вида $a+bx^2$ (в данном случае $a=b=1$), а другой — нечетную положительную степень переменной интеграции (в данном случае третью), то вспомогательная функция $a+bx^2=z$ всегда даст удачную подстановку $\left(\text{дело сведется к вычислению интегралов типа } \int_a^b x^k\,dx\right)$.

В разобранных нами примерах метод вспомогательной функции не проявил себя достаточно ярко, потому что исходные интегралы вычислялись и без введения вспомогательной функции. В следующих примерах непосредственное вычисление окажется уже невозможным.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(3-2x^2)^3}.$$

Подъинтегральную функцию нельзя представить в виде многочлена, члены которого были бы степенями переменной x.

Подстановка

$$3-2x^2=z$$

будет удачной, потому что, кроме минус второй степени этого выражения, в подъинтегральную функцию входит множитель $x\,dx$, который лишь постоянным множителем отличается от диференциала

$$dz = d(3 - 2x^2) = -4x\,dx.$$

Использовав эту подстановку, получим

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(3-2x)^2} = -\int_3^1 \frac{1}{4}\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{6}.$$

Интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(3-2x^2)^2}$$

вычислится помощью той же подстановки, так как кроме минус второй степени двучлена вида $a + bx^2$ ($a = 3$; $b = -2$) имеет сомножителем в подъинтегральной функции нечетную (третью) степень величины x.

Проще всего вычисления вести так: представим подъинтегральное выражение в виде

$$\frac{x^2 \cdot x\,ax}{(3-2x^2)^2}.$$

Положив

$$3 - 2x^2 = z,$$

мы найдем

$$x^2 = \frac{3-z}{2}$$

и, как прежде,

$$x\,dx = -\frac{dz}{4}.$$

Таким образом подъинтегральное выражение примет вид

$$-\frac{1}{8}\,\frac{(3-z)\,dz}{z^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(3-2x^2)^2} = -\frac{3}{8}\int_3^1 \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{8}\int_3^1 \frac{dz}{z} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 3 = 0{,}11\ldots$$

Если бы мы применили подстановку $3 - 2x^2 = z$ к интегралу

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-2x^2)^2},$$

то получили бы интеграл

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int_3^1 \frac{dz}{z^2\sqrt{3-z}},$$

вычислить который мы с помощью наших основных формул не можем.

Рассмотрим еще интеграл

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

Можно принять за вспомогательную функцию $1+x^3$, потому что дифференциал ее $d(1+x^3)=3x^2\,dx$ отличается лишь множителем 3 от выражения $x^2\,dx$. Получим

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int_1^9 \frac{1}{3}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z}}=1\frac{1}{3}.$$

Можно было бы принять за вспомогательную функцию $\sqrt{1+x^3}$, положив:

$$\sqrt{1+x^3}=z,$$

$$1+x^3=z^2,$$

$$3x^2\,dx=2z\,dz.$$

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int_1^3 \frac{2}{3}\frac{z\,dz}{z}=\frac{2}{3}\int_1^3 dz=1\frac{1}{3}.$$

Для интеграла

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

эта подстановка уже не дает хорошего результата, (тогда как для интеграла

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

аналогичная подстановка является удачной).

Как было уже сказано, нельзя дать никакого годного для всех случаев правила, позволяющего выбрать удачную подстановку. Если такая существует, ее приходится подыскивать „на-ощупь", догадкой. Иногда такая подстановка напрашивается сама собой при первом взгляде на интеграл, и, испробовав ее, мы приходим к интегралу более простого вида.

Так, если имеем интеграл

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}},$$

то подстановка $1+\sqrt{x}=z$, так сказать, навязывается сама.

Испытывая ее, имеем:

$$1+\sqrt{x}=z,$$

$$x=(z-1)^2,$$

$$dx=2(z-1)\,dz.$$

Отсюда:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int_1^3 \frac{z-1}{z}\,dz=2\int_1^3 dz-2\int_1^3 \frac{dz}{z}=4-2\ln 3=1{,}89\ldots$$

Но часто случается, что удачная подстановка существует, а угадать ее не так легко.

Так, например, интеграл

$$\int_2^4 \frac{dx}{x(x-1)}$$

не приводится к более простому виду подстановкой

$$x-1=z.$$

Но подстановка $1-\frac{1}{x}=z$ дает прекрасный результат. В этом можно убедиться сейчас же.

Мы имеем:

$$x=\frac{1}{1-z},$$

$$x-1=\frac{z}{1-z},$$

$$x(x-1)=\frac{z}{(1-z)^2}.$$

Диференцируя первое из этих уравнений, получаем

$$dx=\frac{dz}{(1-z)^2},$$

отсюда

$$\frac{dx}{x(x-1)}=\frac{dz}{z}$$

и, наконец,

$$\int_2^4 \frac{dx}{x(x-1)} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dz}{z} = \ln \frac{3}{2} = 0{,}40.$$

Вся эта выкладка, однако, выглядит как ловко проделанный фокус. Возникает вопрос: откуда взялась эта удачная подстановка? Как мы угадали ее?

На это можно ответить: если во втором множителе знаменателя, $x-1$, вынести за скобку x, то подъинтегральное выражение примет вид

$$\frac{dx}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2},$$

и можно усмотреть, что, приняв $1-\frac{1}{x}$ за вспомогательную функцию, мы имеем еще множитель $\frac{dx}{x^2}$, который представляет как раз дифференциал вспомогательной функции:

$$d\left(1-\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно, подстановка

$$1-\frac{1}{x} = z$$

должна привести подъинтегральное выражение к виду $\frac{dz}{z}$, в чем мы уже убедились выше другим путем. Читатель, однако, вправе задать новый вопрос: как можно угадать, какому преобразованию подвергнуть подъинтегральное выражение? Почему нужно попробовать вынести за скобку величину x, а не x^2? Почему не произвести какое-либо иное преобразование?

На этот вопрос нельзя дать ответа, могущего служить руководящим правилом при интегрировании произвольно предложенного выражения. Лишь упражнением можно развить некоторое „чутье“, помогающее находить удачную подстановку в тех случаях, когда таковая существует [1]). При всем том метод вспомогательной функции является важнейшим методом интегрирования.

---

[1]) Разумеется, когда мы познакомимся с новыми формулами и методами интегрирования, поле применимости метода вспомогательной функции расширится, ибо „удачными“ будут не только такие подстановки, которые приведут дело к интегрированию выражений типа $\int_a^d x^k\,dx$, но и те, которые дадут интегралы, берущиеся по новым формулам, с которыми читатель будет в дальнейшем знакомиться.

Упражнения.

1) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}$

(подстановка $x^2+1=z$).

2) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln 2 = 0{,}35.$

3) $\int_0^x \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\sqrt{x^2+1}.$

4) $\int_0^x \frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x^2}{a^2(x^2+a^2)}.$

5) $\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,x\,dx = \sqrt{3} = 1{,}73$

(подстановка $x^2-1=z$ или $x^2-1=z^2$).

6) $\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,x\,dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2}.$

7) $\int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}.$

8) $\int_0^1 \sqrt{u^2+u}\left(u+\frac{1}{2}\right)du = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}94$

(подстановка $u^2+u=z$ или $u^2+u=z^2$).

9) $\int_0^1 \sqrt{2x^3+3x^2+1}\,(x^2+x)\,dx = \frac{6\sqrt{6}-1}{9} = 1{,}52.$

10) $\int_1^2 \frac{t(2t^2+1)}{t^4+t^2+1}\,dt = \ln\sqrt{7} = 0{,}97.$

11) $\int_0^t \frac{t^2\,dt}{(4-3t^3)^2} = \frac{t^3}{12(4-3t^3)}$

подстановка $4-3t^3=z$).

12) $\int_1^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^3} = \ln \sqrt[3]{14} = 0{,}88.$

13) $\int_0^x \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{a^2-x^2}.$

14) $\int_4^{12} \frac{dt}{3+\sqrt{2t+1}} = 2 - 3 \ln \frac{4}{3} = 1{,}14$

(подстановка $3+\sqrt{2t+1}=z$).

15) $\int_0^t \frac{dt}{a+b\sqrt{t}} = \frac{2}{b}\sqrt{t} - \frac{2a}{b^2} \ln \frac{a+b\sqrt{t}}{a}.$

16) $\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+2\sqrt{t}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \ln 3 = 0{,}20$

(после подстановки $1+2\sqrt{t}=z$ получим интеграл

$$\int_1^3 \frac{(z-1)^3\,dz}{8z};$$

его подъинтегральную функцию можно представить в виде многочлена, расположенного по степеням z; таким образом интеграл разобьется на сумму четырех легко вычисляющихся интегралов).

17) $\int_4^9 \frac{du}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-1)^2} = 1.$

(вспомогательная функция $\sqrt{u}-1$; ее диференциал отличается от $\frac{du}{\sqrt{u}}$ постоянным множителем).

18) $\int_1^4 \frac{dt}{t+\sqrt[4]{t^3}} = 4 \ln \frac{1+\sqrt{2}}{2} = 0{,}76$

(подстановка $t=z^4$).

19) $\int_1^4 \sqrt{3+\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{4}{3}(5\sqrt{5}-8) = 4{,}24$

($3+\sqrt{x}=z$ или $3+\sqrt{x}=z^2$).

§ 15. *Задача 74.* При растворении бензойной кислоты в воде (при постоянной температуре) скорость растворения замедляется по мере насыщения раствора; насыщение наступает тогда, когда вес растворившейся кислоты составляет 28% веса растворителя (воды). Можно считать, что скорость растворения пропорциональна избытку количества кислоты, насыщающего раствор, над количеством уже растворившейся кислоты. Зная, что через 10 минут после начала растворения раствор имеет крепость 6%, вычислить крепость раствора через 30 минут после начала растворения.

Обозначим через x крепость раствора (в процентах по отношению к весу воды) через t минут после начала процесса. Величина $\frac{dx}{dt}$ есть скорость растворения кислоты. Эта величина пропорциональна разности $28 - x$; обозначая через k коэфициент пропорциональности, имеем

$$\frac{dx}{dt} = k(28 - x).$$

Разделяя переменные, получаем

$$dt = \frac{1}{k} \frac{dx}{28 - x}.$$

Так как в начале процесса ($t = 0$) крепость раствора равна 0 ($x = 0$), то, интегрируя, имеем

$$t = \frac{1}{k} \int_0^x \frac{dx}{28 - x}. \tag{19}$$

Постоянная k определяется из условия

$$10 = \frac{1}{k} \int_0^6 \frac{dx}{28 - x}. \tag{20}$$

Для вычисления интегралов

$$\int_0^x \frac{dx}{28 - x} \quad \text{и} \quad \int_0^6 \frac{dx}{28 - x}$$

служит вспомогательная функция $28 - x = z$.

Формулы (19) и (20) перепишутся теперь так:

$$t = \frac{1}{k} \int_{28}^{28-x} -\frac{dz}{z}, \tag{19'}$$

$$10 = \frac{1}{k} \int_{28}^{22} = \frac{dz}{z}. \tag{20'}$$

Физический смысл вспомогательной функции $28 - x = z$ очень прост. Она представляет количество кислоты (в процентах к количеству воды), нехватающее для насыщения раствора. Соответственно этому изменились пределы интегрирования: в начале процесса, когда кислота еще не начала растворяться, до насыщения нехватает полного количества (28%), необходимого для насыщения; когда же крепость раствора достигла уже 6%, недохватка составляла 22%.

Исключая величину k из уравнений (19′) и (20′) (например, деля первое на второе), имеем:

$$\frac{t}{10} = \frac{\int_{28}^{28-x} \frac{dz}{z}}{\int_{28}^{22} \frac{dz}{z}} = \frac{\ln \frac{28-x}{28}}{\ln \frac{22}{28}};$$

Такова функциональная зависимость между переменными t и x. Заметим, что вместо натуральных логарифмов мы можем в числителе и знаменателе взять любое другое основание, например основание 10 (см. § 9 гл. III).

$$\frac{t}{10} = \frac{\lg \frac{28-x}{28}}{\lg \frac{22}{28}}.$$

Полученная функциональная зависимость дает возможность по данному количеству x растворившейся кислоты найти потребное для этого время t и, обратно, по данному времени t, протекшему от начала реакции, найти количество x растворившейся кислоты. В нашей задаче требуется найти значение x при $t = 30$. Мы получаем:

$$\lg (28 - x) = 3 \lg \frac{22}{28} + \lg 28 = 1{,}13294,$$

$$28 - x = 13{,}58,$$

$$x = 14{,}42\%.$$

§ 16. *Задача 75.* Воздух, наполняющий сосуд вместимостью в 3 *л*, содержит 20% кислорода. Сосуд имеет две трубки. Через одну из них в сосуд начинают впускать чистый кислород, через другую вытекает наружу столько же воздуха, сколько притекает в сосуд кислорода. Предполагая, что во всех частях сосуда концентрация кислорода одинакова, вычислить, какое количество кислорода будет содержаться в сосуде после того, как через него протечет 10 *л* газа.

Обозначим через x количество протекшего через сосуд газа (в литрах), через y количество содержащегося в сосуде кислорода и составим диференциальное уравнение соответственно условию задачи. Величина dx представляет бесконечно-малое количество втекающего кислорода (и вы-

текающего воздуха); dy — бесконечно-малое увеличение количества кислорода в сосуде. Это последнее легко выразить через первое. В самом деле, величина dy есть разность между количеством притекающего и количеством вытекающего кислорода. Первое выражается дифференциалом dx, второе же рассчитывается так: в 3 $л$ воздуха содержится y литров кислорода; следовательно, вытекающее количество dx литров воздуха унесет с собой $\frac{y}{3}\,dx$ литров кислорода.

Отсюда получаем уравнение

$$dy = dx - \frac{y\,dx}{3}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{3dy}{3-y} = dx.$$

Интегрируя, примем во внимание, что в начале процесса $x = 0$; $y = 0{,}20 \cdot 3 = 0{,}6$:

$$x = \int_{0{,}6}^{y} \frac{3dy}{3-y}.$$

Для вычисления интеграла вводим вспомогательную функцию $3 - y = z$.

$$x = -\int_{2{,}4}^{3-y} \frac{3dz}{z} = 3 \ln \frac{2{,}4}{3-y}.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, подставляем в это уравнение $x = 10$ и находим, переходя от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg \frac{2{,}4}{3-y} = \frac{10}{3} M,$$

$$\lg (3-y) = \lg 2{,}4 - \frac{10}{3} M = \overline{2}{,}93256,$$

$$3 - y \approx 0{,}086,$$

$$y \approx 2{,}914 \ л.$$

§ 17. *Задача 76.* Резервуар содержит 100 $л$ рассола, содержащего 10 $кг$ растворенной соли. В него притекает пресная вода со скоростью 3 $л$ в минуту. Одновременно из него вытекает рассол со скоростью 2 $л$ в минуту. Концентрация рассола в резервуаре поддерживается равномерным перемешиванием. Сколько соли останется в резервуаре по истечении часа с момента начала процесса?

Время (в минутах), протекшее от начала процесса, обозначим через t, а количество соли в резервуаре (в граммах) через x. Величина dx есть

изменение количества соли в резервуаре. Согласно условиям задачи, эта величина отрицательна, и величина $-dx$ представляет количество соли, ушедшее из резервуара за бесконечно-малый промежуток времени dt. Составим теперь диференциальное уравнение, связывающее dx и dt. За время dt из резервуара вытекает $2dt$ литров раствора. Какое количество соли в нем содержится? За время t количество жидкости в резервуаре увеличилось на $3t - 2t = t$ литров, и, следовательно, в резервуаре находится $100 + t$ литров рассола, содержащего, согласно нашим обозначениям, x килограммов соли. Следовательно, $2dt$ литров вытекающего рассола содержат $\frac{2x\,dt}{100+t}$ килограммов соли. Итак, получаем уравнение

$$-dx = \frac{2x\,dt}{100+t}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$-\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{100+t}.$$

Интегрируя, примем во внимание, что в начале процесса $t = 0$, $x = 10$:

$$-\int_{10}^{x}\frac{dx}{x} = \int_{0}^{t}\frac{2dt}{100+t}.$$

Для вычисления интеграла в правой части служит вспомогательная функция $100 + t = z$:

$$-\ln\frac{x}{10} = \int_{100}^{100+t}\frac{2dz}{z} = 2\ln\frac{100+t}{100}.$$

Переходя к десятичным логарифмам, получаем

$$\lg 10 - \lg x = 2\lg(100+t) - 2\lg 100.$$

Ответ на вопрос задачи мы получаем, подставляя в это уравнение $t = 60$.

$$\lg x = \lg 10 + 2\lg 100 - 2\lg 160 = 0{,}59176,$$

$$x \approx 3{,}91 \text{ кг}.$$

§ 13. *Задача 77.* Полукруг радиуса $R = 10$ *см* вертикально погружен в воду так, что диаметр его лежит на поверхности воды (черт. 69). Найти давление, испытываемое каждой из двух поверхностей полукруга (очевидно, что с обеих сторон давление одинаково).

Выделим на поверхности полукруга на глубине x бесконечно-тонкую полоску длиной $2y$ и шириной dx.

Давление на эту полоску равно $x \cdot 2y\,dx$ (ср. § 31 гл. I).

Переменные y и x связаны зависимостью

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (21)$$

Давление на весь полукруг представится интегралом

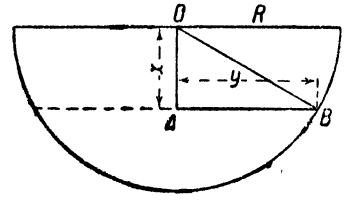
$$\int 2yx\,dx. \tag{22}$$

Пределы этого интеграла нужно еще поставить. Если за переменную интеграции принять глубину x, то пределами будут служить O и R, а величина y определится из (21) через x:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Давление на полукруг равно

$$2\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,x\,dx.$$



Черт. 69.

Для вычисления этого интеграла введем вспомогательную функцию:

$$\sqrt{R^2-x^2}=z,$$

$$R^2-x^2=z^2.$$

$$-2x\,dx=2z\,dz.$$

Пределами интеграла будут теперь числа $\sqrt{R^2-O^2}=R$ (нижний) и $\sqrt{R^2-R^2}=0$ (верхний). Теперь вычисляем интеграл

$$-2\int_R^0 z^2\,dz=\frac{2}{3}R^3=667 \text{ (граммов)}.$$

Легко видеть, что введенная вспомогательная функция z представляет не что иное, как длину обозначенной выше через y полухорды, лежащей на глубине x.

Если бы мы в интеграле (22) за переменную интеграции приняли не x, а y, то сразу же пришли бы к интегралу простого типа.

В самом деле, формула (21) даст для величины $y\,dy$ выражение $-x\,dx$, пределами же величины y будут (черт. 69) числа R и O, так что получим для давления величину

$$\int_R^0 -2y^2\,dy=667 \text{ (граммов)}.$$

§ 19. Если в электрической цепи с сопротивлением R действует постоянное напряжение (электродвижущая сила) V, то, по закону Ома, сила тока J связана с величинами R и V уравнением

$$J=\frac{V}{R} \tag{23}$$

(V выражено в вольтах, R в омах, J — в амперах).

Таким образом при постоянном напряжении в цепи должна существовать, согласно формуле (23), постоянная сила тока.

Положим теперь, что разомкнутая сначала цепь замыкается. До замыкания сила тока в цепи равнялась нулю, после замыкания она должна стать равной $\frac{V}{R}$. Очевидно, что такое изменение силы тока не может произойти сразу. В течение некоторого промежутка времени, хотя бы очень короткого, должно происходить постепенное усиление тока, так что величина J будет меняться во времени. Процесс этого изменения мы и рассмотрим в следующей задаче.

Предварительно, однако, необходимо сделать еще некоторые пояснения. Если мы под V будем подразумевать величину постоянного напряжения, существующую в цепи (например электродвижущую силу электрической батареи), то формула (23), очевидно, не годится для определения величины силы тока, меняющейся в процессе замыкания. Но тот же закон Ома позволяет заменить ее другой, более общей, формулой. Дело в том, что при изменении силы тока в цепи во всяком замкнутом проводнике возникает „индуктированный" ток; такой индуктированный ток возникает и в самой цепи (самоиндукция); вызывающая его электродвижущая сила, которую мы обозначим через V', действует в направлении, противоположном направлению возникающего тока, как бы стремясь помешать его усилению [1]).

Опыт показывает, что величина этой силы пропорциональна скорости изменения силы тока. Если через t обозначим время, протекшее от начала замыкания, то скорость изменения силы тока J представится диференциальным отношением $\frac{dJ}{dt}$ и, значит, электродвижущая сила самоиндукции V' представится формулой

$$V' = L\frac{dJ}{dt}, \tag{24}$$

где L есть величина (коэфициент самоиндукции), постоянная для данной цепи. Числовое значение коэфициента самоиндукции L данной цепи, разумеется, зависит от выбора единиц измерения времени, силы тока и напряжения. Обычно измеряют время t в секундах, силу тока J в амперах, а напряжения V и V' в вольтах. Чтобы отметить, что коэфициент L вычислен при этом выборе единиц, говорят, что коэфициент самоиндукции равен L генри. Таким образом, говоря, что коэфициент самоиндукции равен L генри, мы утверждаем, что при изменении силы тока со скоростью 1 A/сек. возникающая электродвижущая сила самоиндукции равна L вольт.

Очевидно, что во время замыкания тока формула

$$J = \frac{V}{R} \tag{23}$$

[1]) При размыкании тока, наоборот, возникает электродвижущая сила, действующая в направлении исчезающего тока, как бы стремясь помешать его ослаблению.

не может давать истинную величину силы тока, так как кроме постоянной электродвижущей силы V в цепи действует еще электродвижущая сила самоиндукции V', направленная в противоположную сторону.

Поэтому вместо (23) мы должны написать

$$J=\frac{V-V'}{R}$$

или, принимая во внимание (24),

$$J=\frac{V-L\dfrac{dJ}{dt}}{R}. \tag{25}$$

Заметим, что эта формула включает в себя формулу (23) как частный случай, ибо, если сила тока в цепи не меняется, т. е. J — постоянная величина, то величина $\dfrac{dJ}{dt}$ равна нулю.

После этих пояснений мы можем решить следующую задачу.

Задача 78. Электромотор включен в цепь с напряжением $V=$ $=300$ (вольт); зная общее сопротивление $R=150$ (ом) и коэфициент самоиндукции $L=30$ (генри), найти: 1) через сколько времени сила тока будет составлять 99% своей предельной величины; 2) какова будет сила тока через 1, 2, 3 сек. после замыкания.

Обозначая через t время, протекшее с момента включения электромотора, а через J силу тока, мы найдем сначала функциональную зависимость между J и t, оперируя для общности буквенными данными. Читателю рекомендуем проделать выкладку с числовыми данными.

Уравнение (25) мы представим в форме

$$L\frac{dJ}{dt}=V-RJ. \tag{25'}$$

Будем помнить, что L, V и R — постоянные величины. Чтобы решить диференциальное уравнение (25'), мы должны разделить переменные. Получим

$$\frac{L\,dJ}{V-RJ}=dt.$$

Примем во внимание, что в момент включения ($t=0$) тока в цепи еще нет ($J=0$); интегрируя, имеем

$$t=L\int_0^J\frac{dJ}{V-RJ}.$$

Для вычисления интеграла введем вспомогательную функцию:

$$V-RJ=u,$$

$$dJ=-\frac{du}{R}.$$

Теперь получаем

$$t=-\int_{V}^{V-RJ}\frac{du}{u}=-\frac{L}{R}\ln\frac{V-RJ}{V}=-\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{R}{V}J\right). \qquad (26)$$

Таково выражение величины t в функции J; знак минус в правой части формулы не должен смущать читателя: величина $\frac{V-RJ}{V}=$ $=1-\frac{R}{V}J$ заведомо меньше единицы, так что ее логарифм отрицателен; вследствие этого правая часть формулы (26) представляет положительную величину; последнее обстоятельство можно сделать очевидным, преобразовав формулу (26) к виду:

$$t=\frac{L}{R}\ln\frac{V}{V-RJ}. \qquad (26')$$

Из физических соображений ясно, что сила тока, равная нулю в момент замыкания тока, постепенно увеличивается, но не может стать больше, чем $\frac{V}{R}$; это значение она будет иметь, когда перестанет изменяться. Возникает вопрос, через какое время после замыкания сила тока достигнет своей предельной величины V. На этот вопрос должна ответить формула (26′). Подставляя в нее $J=\frac{V}{R}$, мы видим, что для величины t получается бесконечно-большое значение!

Другими словами, теоретически сила тока никогда не достигнет своей предельной величины. Это и понятно, потому что ток самоиндукции теоретически не должен исчезнуть никогда. Разумеется, практически весьма скоро его действие становится ничтожным, как мы сейчас убедимся на числовом примере.

Формула (26′) дает t в явной функции величины J. Если мы хотим, обратно, представить J в явной функции t, мы должны решить уравнение (26) относительно J. Последовательно получаем:

$$\ln\left(1-\frac{R}{V}J\right)=-\frac{R}{L}t,\quad 1-\frac{R}{V}J=e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$J=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (27)$$

Полученная формула позволяет уже чисто математически констатировать тот факт, что сила тока J всегда меньше величины $\frac{V}{R}$. Так как величины R и L положительны, то показатель степени $-\frac{R}{L}t$ является отрицательной величиной, так что величина $e^{-\frac{R}{L}t}=e^{\frac{1}{\frac{R}{L}t}}$ быстро убы-

вает с течением времени, но теоретически в нуль не обращается. Отсюда ясно, что величина J быстро приближается к величине $\frac{V}{R}$; теоретически она ее не достигает никогда; практически же очень скоро становится ей равной.

Обращаясь к ответам на поставленные в задаче вопросы, начнем с первого. Чтобы узнать, через сколько времени сила тока достигнет 99% предельной своей величины, нужно в формулу (26) подставить

$$J = 0{,}99\,\frac{V}{R}.$$

Мы получим

$$t = -\frac{L}{R}\ln 0{,}01 = -\frac{30}{150}\cdot 2{,}3\log 0{,}01 = 0{,}92 \text{ (секунд)}.$$

Таким образом не пройдет и секунды, как сила тока превысит 99% предельной.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, мы должны в формулу (27) подставить значения $t = 1, 2, 3$. Ход вычисления покажем на примере $t = 1$.

Сначала вычисляем $e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-5t}$. Логарифмируем:

$$\lg e^{-5t} = \lg e^{-5} = -5\lg e = -5M = -5\cdot 0{,}43429 = \bar{3}{,}82853.$$

Отсюда по таблице логарифмов находим

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}0067380.$$

Физический смысл полученного результата: через 1 сек. сила тока на 0,7% отличается от предельной. После этого находим

$$1 - e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}993262;$$

сила тока составляет 99,3% предельной. И, наконец, умножая на $\frac{V}{R} = 2$, находим искомую силу тока через 1 сек. $J = 1{,}986\,524$ А.

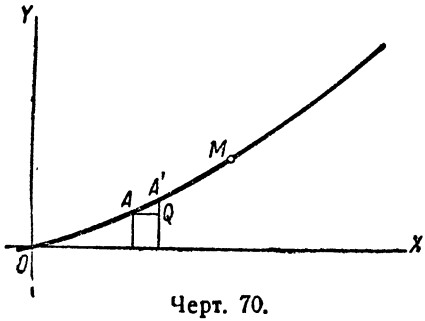
Читатель произведет выкладки для $t = 2$ и $t = 3$.

Результаты даны в следующей таблице.

Время	Сила тока $\frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$	Сила тока в процентах к предельной
1 сек.	1,986524 А	99,32
2 „	1,999902 „	99,995
3 „	1,999998 „	99,9999

Мы видим, что сила тока стремительно приближается к предельной и уже через 3 сек. практически совершенно не отличима от последней.

§ 20. *Задача 79.* Кривая линия задана уравнением $8y^2 = x^3$ (парабола Нейля). Требуется найти длину дуги OM, заключенной между точками (0, 0) и (2, 1).



Черт. 70.

В этой задаче мы впервые встречаемся с вопросом о так называемом „спрямлении" кривой линии, т. е. о нахождении длины ее дуги. Для произвольной кривой задача ее спрямления решается единообразным методом, сущность которого выяснится на нашем частном примере.

Идею этого метода читатель, конечно, предвосхищает. Она состоит в том, что дугу OM мы представляем себе как сумму бесконечно-большого числа бесконечно-малых дуг, одна из которых AA' изображена на черт. 70. Каждую такую дугу мы можем считать отрезком прямой, и тогда длина ее ds определится из прямоугольного треугольника $AA'Q$ (в котором $AQ = dx$, $A'Q = dy$):

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Длина дуги OM представится интегралом

$$\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

пределы которого зависят от того, какую из величин x и y мы примем за переменную интеграции. Примем за переменную интеграции величину x. Длина дуги OM представится тогда интегралом

$$\int_0^2 \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \tag{28}$$

в котором нужно еще вместо dy подставить его выражение через dx.

Из уравнения $8y^2 = x^3$ находим

$$y = \frac{1}{\sqrt{8}} x^{3/2}.$$

Диференцируя, получаем

$$dy = \frac{3}{2\sqrt{8}} x^{1/2}\, dx.$$

Подставляя в (28), находим:

$$OM = \int_0^2 \sqrt{(dx)^2 + \frac{9}{32} x\,(dx)^2} = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{32} x}\, dx.$$

Вычисляя интеграл с помощью вспомогательной функции

$$\sqrt{1+\frac{9}{32}x}=z,$$

мы получаем

$$OM=2\frac{7}{27}.$$

Замечание. Если бы за переменную интеграции мы взяли не x, а y, то нам пришлось бы вычислять интеграл

$$\int_0^1\sqrt{\frac{16}{9}y^{-\frac{2}{3}}(dy)^2+(dy)^2}=\int_0^1\sqrt{\frac{16}{9}y^{-\frac{2}{3}}+1}\,dy.$$

Для этого интеграла не так легко сразу угадать удачную подстановку. Выбор последней облегчается, если догадаться преобразовать подъинтегральное выражение так:

$$\sqrt{\frac{16}{9}y^{-\frac{2}{3}}+1}\,dy=\sqrt{\frac{16}{9}+y^{\frac{2}{3}}}\,y^{-\frac{1}{3}}dy$$

(т. е. если вынести за скобки под радикалом $y^{-\frac{2}{3}}$ и затем вывести этот множитель из радикала).

Теперь видно, что диференциал выражения $\frac{16}{9}+y^{\frac{2}{3}}$ отличается только постоянным множителем от выражения $y^{-\frac{1}{3}}dy$. Поэтому можно положить $\frac{16}{9}+y^{\frac{2}{3}}=z$ или, еще лучше, $\frac{16}{9}+y^{\frac{2}{3}}=z^2$.

В последнем случае интеграл приводится к простому виду

$$3\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}z^2\,dz=2\frac{7}{27}.$$

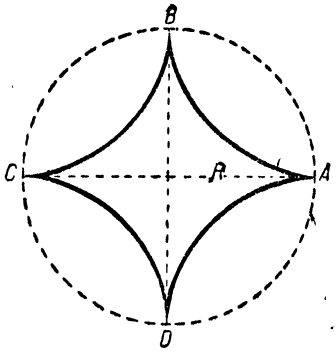
В следующей задаче мы рассмотрим еще один пример спрямления кривой линии.

§ 21. *Задача 80.* Кривая линия задана уравнением $x^{\frac{2}{3}}=y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ (астроида). Ее вид представлен на черт. 71; пунктиром нанесена окружность радиуса R [1]). В четырех точках A, B, C, D кривая эта упирается

[1]) Астроида может быть получена механически так: по внутренней стороне круга радиуса R катится (без скольжения) круг вчетверо меньшего радиуса. Если на последнем отметить какую-нибудь точку, то при движении эта точка описывает астроиду. Вывод уравнения астроиды читатель может найти, например, в книге О. Н. Цубербиллер „Задачи и упражнения по аналитической геометрии“ (стр. 48, зад. 179 и 181).

в окружность, образуя криволинейный четыреугольник. Требуется найти длину кривой $ABCD$.

Так как наша кривая симметрична относительно обеих осей координат, то достаточно вычислить длину дуги AB. Она представится интегралом



Черт. 71.

$$\int_{x=0}^{x=R} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Выражая y через x по уравнению астроиды, находим последовательно:

$$y=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$dy=-\frac{3}{2}\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx,$$

$$(dy)^2=\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}}(dx)^2=\left(R^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right)(dx)^2.$$

Интеграл наш принимает простой вид

$$\int_0^R \sqrt{R^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}(dx)^2}=\int_0^R R^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}R.$$

Длина всей астроиды вчетверо больше, т. е. равна шести радиусам окружности $ABCD$.

Глава VI.

Процессы диференцирования и интегрирования в их взаимной связи.

§ 1. В предыдущей главе мы научились диференцировать любое алгебраическое выражение и интегрировать такие выражения, которые при удачно подобранной вспомогательной функции приводятся к многочленам. Чтобы продвинуться дальше в технике интегрирования и диференцирования, мы должны глубже проникнуть во внутреннюю связь этих операций между собой.

О существовании этой связи можно было догадаться и раньше. На нее намекает и та аналогия, которая обнаруживается при пользовании вспомогательной функцией, и особенно то обстоятельство, что при посредстве диференциального исчисления мы решили в гл. IV ряд задач, представляющих обращение задач интегрального исчисления. Обнаружение и математическая формулировка этой связи представляют нашу ближайшую задачу, разрешение которой даст нам новые средства для развития техники исчисления бесконечно-малых.

§ 2. Возьмем какой-нибудь интеграл с переменным верхним пределом, хотя бы интеграл

$$\int_4^x x\,dx.$$

Вычисляя его, мы найдем выражение

$$\frac{x^2}{2} - 8.$$

Теперь найдем диференциал этого выражения; мы получим

$$d\left(\frac{x^2}{2} - 8\right) = x\,dx.$$

Нетрудно заметить, что при повторном применении к выражению $x\,dx$ двух операций (сперва интегрирование при переменном верхнем пределе, а затем диференцирование) мы приходим вновь к исходному выражению. Эти две операции как бы уничтожают друг друга, подобно тому как уничтожают друг друга возведение в степень и извлечение корня, умножение и деление на одно и то же число и т. д. В этом смысле инте-

грирование при переменном верхнем пределе и диференцирование являются обратными операциями [1]).

Рассмотрим еще такой более сложный пример. Вычисляя интеграл

$$\int_0^t \frac{t^2\,dt}{(4-3t^3)^2}$$

через вспомогательную функцию $4-3t^3$, находим выражение

$$\frac{t^3}{12(4-3t^3)}.$$

Диференцируя его, придем снова к выражению

$$\frac{t^2\,dt}{(4-3t^3)^2}.$$

Читатель легко составит новые примеры и убедится на них в справедливости того, что каждый раз диференцирование „уничтожает" интегрирование. Вышеприведенные примеры можно кратко записать так:

$$d\int_4^x x\,dx = x\,dx,$$

$$d\int_0^t \frac{t^2\,dt^2}{(4-3t^3)^2} = \frac{t^2\,dt}{(4-3t^3)^2}.$$

Обобщая эти примеры, мы можем формулировать обнаруженную закономерность так: диференциал интеграла с переменным верхним пределом равен подъинтегральному выражению. На математическом языке эта закономерность выразится формулой

$$d\int_a^x y\,dx = y\,dx.$$

В этой формуле a — постоянное число, а y — некоторая функция переменной x. Чтобы сделать последнее обстоятельство очевидным, можно вместо y ввести обозначение $f(x)$ [2]) и написать:

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx. \qquad (I).$$

---

[1]) Переменность предела существенна; если предел — постоянная величина, то интеграл дает постоянную величину, а диференциал постоянной величины равен нулю. О случае, когда переменным является нижний предел, речь будет ниже.

[2]) Читается: „функция эф от икс" или „эф от икс". Характер функции

§ 3. Разумеется, даже большое число проделанных примеров не доказывает справедливости формулы (I) для произвольной функции, а так как мы собираемся применить эту формулу к новым, еще не изученным функциям, то для нас особенно важно теоретически установить ее справедливость для совершенно произвольной функции.

Для лучшего понимания дела мы дадим сначала механическое доказательство. Читатель сравнит его с рассуждениями начала гл. IV и увидит, что здесь мы, в сущности говоря, лишь уточняем их.

Будем истолковывать переменную величину x как время, отсчитываемое от некоторого начального момента, а величину y как скорость движения тела. Считая y произвольной функцией величины x, мы принимаем произвольный закон изменения скорости.

При таком истолковании выражение $y\,dx$ есть не что иное, как путь, пройденный телом в бесконечно-малый промежуток времени dx. Интеграл же

$$\int_a^x y\,dx$$

представляет собой сумму таких бесконечно-малых путей, т. е. величину расстояния тела от той точки, где оно находилось в момент

$$x = a.$$

Диференциал интеграла

$$\int_a^x y\,dx$$

представляет следовательно бесконечно-малое изменение этого расстояния. Но расстояние тела от любой неподвижной точки изменилось как раз на величину проходимого им бесконечно-малого пути. Последний же представляется выражением $y\,dx$.

Таким образом

$$d\int_a^x y\,dx = y\,dx.$$

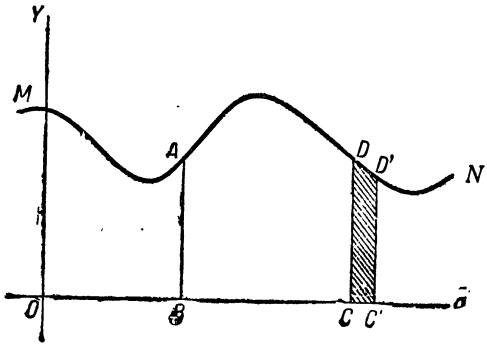
§ 4. Вслед за механическим доказательством формулы (I) покажем ее геометрический смысл, истолковывая величины x и y как прямоугольные координаты точки. Считая величину y произвольной функцией величины x, мы получим в качестве геометрического образа этой функциональной зависимости произвольную линию MN.

остается совершенно произвольным, например $f(x)$ может равняться x^2, $\frac{1+x}{1-x}$, $\lg x$, $\sin^2 x$ и т. д., аналогично тому как в алгебре буква m может означать любое число. Аналогично тому как для обозначения разных чисел употребляются разные буквы, так и для обозначения разных функций употребляют символы $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$... и т. д.

Выражение $y\,dx$ представляет теперь площадь бесконечно-тонкой полоски $DCC'D'$. Интеграл

$$\int_a^x y\,dx$$

представляет площадь вида $ABCD$. Эта площадь имеет три „неподвижных" ограничивающих линий: 1) кривую MN, 2) ось абсцисс, 3) ординату AB, уравнение которой $x = a$. Четвертая линия CD, ограничивающая площадь, подвижна, потому что расстояние ее x от начала координат мы считаем переменным. Благодаря ее перемещению площадь



Черт. 72.

$$ABCD = \int_a^x y\,dx$$

меняется. Чему же равен дифференциал этой площади, т. е.

$$d\int_a^x y\,dx,$$

представляющий бесконечно-малое изменение площади $ABCD$?

Из черт. 72 очевидно, что площадь бесконечно-тонкой полоски $CDD'C'$ как раз дает то приращение, которому подвергается площадь $ABCD$, а площадь полоски представляется выражением $y\,dx$. Снова мы видим, что

$$d\int_a^x y\,dx = y\,dx.$$

§ 5. После всего изложенного мы можем доказать справедливость формулы (I) арифметически, не прибегая ни к каким истолкованиям. Так как по существу оно не будет отличаться от предыдущих двух, то его отвлеченная форма вряд ли послужит препятствием к пониманию.

Интеграл

$$\int_a^x y\,dx$$

мы можем определить как сумму бесконечно-большого числа слагаемых

$$y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}), \qquad (1)$$

где

$$x_0 = a;\ x_n = x;$$

числа

$$x_1,\ x_2 \ldots x_{n-1}$$

(ср. § 14 гл. I) промежуточные между a и x; числа же $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ представляют значения функции y при соответствующих значениях величины x. Найти дифференциал интеграла

$$\int_a^x y\,dx$$

значит найти то приращение, которому подвергается сумма (1) при бесконечно-малом изменении dx верхнего предела x. Что же произойдет с суммой (1), когда вместо верхнего предела x_n будет взят верхний предел

$$x_{n+1} = x_n + dx?$$

Числа $x_1, x_2, x_3 \ldots$ и т. д. попрежнему будут промежуточными числами, так что ни одно из слагаемых в сумме (1) не изменится. Но в сумме появится одно лишнее слагаемое, именно слагаемое

$$y_n(x_{n+1} - x_n),$$

так что она примет вид

$$y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + y_n(x_{n+1} - x_n). \qquad (1')$$

Ясно, что полученное интегралом приращение есть не что иное, как величина этого лишнего слагаемого, т. е.

$$d\int_a^x y\,dx = y_n(x_{n+1} - x_n) = y_n dx.$$

Так как y_n есть значение величины y, соответствующее значению $x_n = x$, то мы можем значок n опустить и получаем

$$d\int_a^x y\,dx = y\,dx.$$

Замечание 1. Во избежание всяких недоразумений напомним, что в обозначении

$$\int_a^x y\,dx$$

мы пользуемся одной и той же буквой x для обозначения как переменного верхнего предела, так и переменной интеграции. Хотя такой способ и является законным (ср. § 10 гл. II), но не нужно забывать, что величина x в верхнем пределе играет иную роль, чем в подъинтегральном выражении. Так, если верхний предел x примет значение $x = 3$, то величина x в подъинтегральном выражении пробежит бесконечномного значений между величиной a и величиной 3.

Чтобы устранить возможность всяких недоразумений, мы могли бы ввести для верхнего предела другое обозначение, например букву X, рассматривая величину X как переменную величину; величина x должна пробегать значения между $x=a$ и $x=X$. При таком обозначении будем иметь

$$d\int_a^X f(x)\,dx = f(X)\,dX. \tag{2}$$

Замечание 2. Если переменной величиной является не верхний, а нижний предел, то диференциал интеграла можно вычислить так:

$$d\int_{X_1}^{b} f(x)\,dx = d\left(-\int_b^{X_1} f(x)\,dx\right) = -f(X_1)\,dX_1.$$

Эта формула отличается от формулы (2) только знаком. Геометрический смысл этого отличия тот, что площадь $ABCD$ (черт. 72) растет вместе с ростом абсциссы OC, но уменьшается при росте абсциссы OB [1]).

§ 6. Мы переходим к практическому использованию формулы (I) и начнем опять с простого примера.

Пусть мы только что научились интегрировать функцию x^2 и нашли такую формулу:

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}. \tag{3}$$

Кроме того мы познакомились с формулой (I), и никаких других формул исчисления бесконечно-малых мы еще не знаем.

Но немедленно по ознакомлении с формулой (I) мы можем вывести новую формулу. Именно, диференцируя обе части равенства (3), мы получаем

$$d\int_0^x x^2\,dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

Или, переворачивая равенство и применяя формулу (I):

$$d\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2\,dx. \tag{4}$$

Таким образом с помощью формулы (I) мы из формулы (3) интегрального исчисления получили формулу (4) диференциального исчисления.

---

[1]) Можно было бы поставить вопрос о диференцировании интеграла, у которого оба предела переменны. Можно показать, что в этом случае получится формула

$$d\int_{X_1}^{X} f(x)\,dx = f(X)\,dX - f(X_1)\,dX_1,$$

для которой формулы (2) и (3) являются частными случаями.

Таким же образом каждая новая формула интегрального исчисления дает нам новую формулу дифференциального исчисления. В самом деле, если известно, что, интегрируя функцию $f(x)$ (при постоянном нижнем пределе a и переменном верхнем), мы получаем функцию $F(x)$, то мы всегда узнаем дифференциал функции $F(x)$. Именно, если

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x), \tag{3'}$$

то, рассуждая как выше, найдем

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{4'}$$

Конечно разобранный нами пример ничего нового для нас не дал, потому что мы и так умели найти дифференциал функции $\frac{x^3}{3}$. Посмотрим же, можем ли мы извлечь какой-нибудь существенно новый результат. Пока что мы знаем по существу только две формулы интегрального исчисления. Первая из них:

$$\int_a^x x^k\,dx = \frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \tag{5}$$

Она имеет место для всех значений k, кроме $k = -1$. Сразу видно, что она ничего нового дать не может, потому что функцию

$$\frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

мы уже умеем дифференцировать [1]).

§ 7. Другая изученная нами формула интегрального исчисления может быть написана так:

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \ln\frac{x}{a},$$

---

[1]) Впрочем, мы можем получить интересный теоретический результат. Напомним, что справедливость формулы (5) была доказана как для дробных, так и для отрицательных значений числа k. Теперь, дифференцируя формулу (5), получаем:

$$x^k dx = \frac{d(x^{k+1} - a^{k+1})}{k+1} = \frac{d(x^{k+1})}{k+1}$$

или

$$d(x^{k+1}) = (k+1)\,x^k dx.$$

Вводя обозначение $k+1 = n$, мы получим

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

Эта формула была доказана нами (§ 12 гл. IV) только для целых положительных значений числа n. Теперь мы можем считать ее доказанной для любых значений числа n.

или

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \ln x - \ln a. \tag{6}$$

В последнем виде ее удобнее всего взять.

Эта формула дает нам существенно новый результат. Именно, мы получаем:

$$d(\ln x - \ln a) = \frac{dx}{x},$$

или, так как $\ln a$ есть постоянная величина,

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}. \tag{7}$$

Эту формулу можно было бы доказать и непосредственно, но нам пришлось бы иметь дело с очень громоздкими выкладками.

Выведенная нами новая формула принадлежит к числу основных формул дифференциального исчисления. Ее нужно запомнить твердо, что легко достигается после небольшого числа упражнений. В соединении с изученными уже правилами дифференцирования знание формулы (7) позволяет дифференцировать любое выражение, содержащее (кроме шести алгебраических действий) операцию логарифмирования. Рассмотрим примеры.

Пример 1. $d\ln(x^2+1)$; рассматривая x^2+1 как вспомогательную функцию, находим

$$d\ln(x^2+1) = \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x\,dx}{x^2+1}.$$

Пример 2.

$$d\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right) = \frac{d\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)^{1)}}{x+\sqrt{a+x^2}} = \frac{dx+\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}}.$$

Освобождаясь от двухэтажности дроби и сокращая на выражение

$$x+\sqrt{a+x^2},$$

получаем окончательно

$$d\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}.$$

Пример 3. $d(\lg x)$; здесь логарифм взят по основанию 10, но мы сейчас же можем выразить $\lg x$ через $\ln x$

$$\lg x = M\ln x, \qquad M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43.$$

---

1) a — постоянная величина.

Значит,

$$d(\lg x) = d(M \ln x) = M\, d(\ln x) = M \frac{dx}{x}.$$

Упражнения.

1) $d \ln (3x^2 + 4x - 7) = \dfrac{(6x+4)\,dx}{3x^2+4x-7}$. 2) $d \ln \sqrt{x} = \dfrac{dx}{2x}$.

(*Указание*: можно рассматривать $\sqrt{x}$ как вспомогательную функцию; проще применить формулу алгебры

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x.)$$

3) $d \ln (4x) = \dfrac{dx}{x}$.

(*Указание*: можно рассматривать $4x$ как вспомогательную функцию; проще применить формулу: $\ln (4x) = \ln 4 + \ln x$).

4) $d \ln \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2dx}{1-x^2}$. 8) $y = (\ln x - 1)x$; $\dfrac{dy}{dx} = \ln x$.

5) $y = \ln (3x - 5)$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{3x-5}$. 9) $d\left(\dfrac{1}{2} x^2 \ln x - \dfrac{1}{4} x^2\right) = x \ln x\, dx$.

6) $y = \ln (x^2)$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x}$. 10) $d \lg_5 x = \dfrac{1}{\ln 5} \dfrac{dx}{x}$.

7) $y = (\ln x)^2$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 \ln x}{x}$. 11) $d \lg_a x = \dfrac{1}{\ln a} \dfrac{dx}{x}$.

12) $d \lg_3 \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \dfrac{dx}{(\ln 3)\sqrt{1+x^2}}$ (ср. пример 2).

§ 8. Чтобы использовать до конца формулу

$$d \ln x = \frac{dx}{x}, \tag{7}$$

мы применим ее к выводу новой формулы, которая наряду с формулой (7) принадлежит к числу основных в дифференциальном исчислении. Для большей ясности дальнейшего мы обозначим через y величину $\ln x$:

$$y = \ln x. \tag{8}$$

Тогда формула (7) примет вид

$$dy = \frac{dx}{x}, \tag{9}$$

и мы можем сказать, что формула (8) задает зависимость между величинами y и x, а формула (9) решает вопрос о зависимости между их

дифференциалами. Но формула (8) представляет зависимость между y и x несколько односторонне; именно, в ней величина y выражена через x, и соответственно этому в формуле (9) величина dy выражена через величину x и ее дифференциал. Но ту же зависимость можно представить и иначе, а именно выразить величину x через y. Для этого достаточно решить уравнение (8) относительно x. Мы получаем формулу

$$x = e^y, \tag{8'}$$

которая, повторяем, дает лишь иную форму зависимости, выраженной формулой (8). Соответственно с этим возникает вопрос о выражении дифференциала dx через величину y и ее дифференциал.

Так как формула (9) уже дает зависимость между дифференциалами величин y и x, то остается только найти из нее выражение dx. Мы получаем

$$dx = x\,dy.$$

Это и есть выражение дифференциала dx; правда, в правой части равенства входят не y и dy, как нам хотелось бы, а x и dy. Но величина x сейчас же может быть заменена на основании (8') выражением e^y, и мы получаем

$$dx = e^y\,dy. \tag{9'}$$

Итак, мы нашли, что если величины y и x связаны уравнением

$$x = e^y, \tag{8'}$$

то их дифференциалы связаны уравнением

$$dx = e^y\,dy. \tag{9'}$$

Мы таким образом научились дифференцировать новую функцию — показательную. Две формулы (8') и (9') можно заменить одной, если написать

$$de^y = e^y\,dy.$$

Это и есть новая основная формула дифференциального исчисления. Разумеется, в этой формуле переменный показатель степени можно обозначить любой буквой, например буквой x:

$$de^x = e^x\,dx. \tag{10}$$

§ 9. При всей несложности вышеприведенного рассуждения, оно обычно нелегко воспринимается и кажется искусственным. Происходит это потому, что здесь мы пользуемся новым приемом, который можно назвать „обращением“ функциональной зависимости. Однако этот прием играет важную роль, и мы будем еще не раз им пользоваться в дальнейшем. Поэтому мы еще раз выведем формулу (10), пользуясь по существу тем же приемом обращения функциональной зависимости, только начав рассуждение с другого конца.

Именно, мы поставим задачу: найти выражение дифференциала функции e^x (через величину x и ее дифференциал).

Обозначим эту функцию какой-нибудь буквой, например z.

$$z = e^x. \tag{11}$$

Задача сводится к тому, чтобы выразить $dz = d(e^x)$ через x и dx. Непосредственно мы не умеем этого сделать, но если обратить функциональную зависимость

$$z = e^x$$

и представить ее в виде

$$x = \ln z, \tag{12}$$

то мы сразу найдем зависимость между dz и dx, так как дифференцировать логарифмическую функцию мы умеем. Дифференцируя обе части уравнения (12), мы получим

$$dx = \frac{dz}{z}.$$

Здесь dx выражено через z и dz, а нам нужно выразить dz через x и dx. Уравнение (12) позволяет написать такое выражение для dz:

$$dz = z\,dx.$$

В это выражение входит z, а не x, как нам хотелось бы. Но на основании уравнения (10′) мы можем заменить z через e^x и получаем

$$dz = e^x\,dx.$$

Таким образом мы выразили dz через x и dx. Если освободиться вовсе от вспомогательной величины z, то мы получим

$$d(e^x) = e^x\,dx. \tag{10}$$

Замечание 1. Чтобы лучше уяснить применение метода обращения функциональной зависимости, рассмотрим еще один пример его применения. Пусть требуется найти дифференциал функции $\sqrt{x}$. Мы знаем, что

$$\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Теперь мы выведем эту формулу методом обращения функциональной зависимости. Обозначим величину $\sqrt{x}$ через y:

$$y = \sqrt{x}.$$

Обратим зависимость

$$x = y^2.$$

Дифференцируем

$$dx = 2y\,dy.$$

Находим выражение dy:

$$dy = \frac{dx}{2y}$$

или, устраняя вспомогательную переменную y,

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Замечание 2. После того как мы вывели формулу (10), мы можем дифференцировать любое выражение, содержащее, кроме шести основных алгебраических операций, операции логарифмирования и возведения в переменную степень.

Примеры.

1. $d\left(e^{5x^2-2}\right)$; принимая за вспомогательную функцию $5x^2-2$, получаем

$$d\left(e^{5x^2-2}\right)=e^{5x^2-2}\,d(5x^2-2)=10xe^{5x^2-2}\,dx.$$

2. $d(xe^x)=e^x\,dx+x\,d(e^x)=e^x\,dx+xe^x\,dx=(1+x)\,e^x\,dx.$

3. $d(10^x)$; представив число 10 в виде $e^{\ln 10}$, получим

$$d(10)^x=d\left(e^{x\ln 10}\right)=e^{x\ln 10}\,d(x\ln 10)=\ln 10\,e^{x\ln 10}\,dx=\ln 10\cdot 10^x dx=$$

$$=\frac{1}{M}\cdot 10^x dx\left(\frac{1}{M}=2{,}30258\right).$$

Упражнения.

1) $d\left(e^{0,4x}\right)=0{,}4\,e^{0,4x}\,dx.$ 2) $d\left(e^x+e^{-x}\right)=\left(e^x-e^{-x}\right)dx.$

3) $d\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x\,dx}{(e^x+1)^2}.$ 4) $d\,\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{4dt}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}.$

5) $de^{(2+3t)^2}=6\,(2+3t)\,e^{(2+3t)^2}\,dt.$

6) $y=\left(e^{2x}-1\right)^2;\ \dfrac{dy}{dx}=4\left(e^{2x}-1\right)e^{2x}.$

7) $y=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x};\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+e^x}.$

8) $d(7^t)=7^t\ln 7\cdot dt$ (представить основание в виде $e^{\ln 7}$).

9) $d(7^{t^2})=2t\,\ln 7\cdot 7^{t^2}dt.$

10) $d(x^x)=x^x\,(1+\ln x)\,dx$ (представить основание в виде $e^{\ln x}$).

§ 10. В § 2—6 мы занимались вопросом о том, к чему приводит повторное производство двух операций: интегрирования и дифференцирования. Теперь мы рассмотрим, что дают эти же две операции, проделанные в обратном порядке.

Найдем дифференциал какой-нибудь функции, например функции x^2:

$$d(x^2)=2x\,dx.$$

Полученное выражение проинтегрируем, причем пределы интегрирования возьмем произвольными. Они могут быть постоянными или пере-

менными, это совершенно безразлично. Обозначим их через a и b. Вычисляя интеграл, находим

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2.$$

В результате мы получили разность двух величин, первая есть квадрат верхнего, вторая — квадрат нижнего предела. Исходная же функция была квадратом переменного x.

Рассмотрим еще один пример, взяв за исходную функцию $\ln x$. Диференцирование дает

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

Интеграция дает

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a.$$

Результат снова равен разности двух величин: первая есть натуральный логарифм верхнего, вторая — натуральный логарифм нижнего предела, а исходной функцией служил натуральный логарифм переменной x. Вышеприведенные примеры можно кратко записать так:

$$\int_a^b d(x^2) = b^2 - a^2,$$

$$\int_a^b d(\ln x) = \ln b - \ln a.$$

Закономерность, которая напрашивается уже после этих двух примеров, может быть формулирована так: интеграл диференциала данной функции равен разности между тем значением, которое дает этой функции верхний предел, и тем значением, которое дает ей нижний предел.

На математическом языке эта закономерность выражается формулой

$$\int_a^b d[F(x)] = F(b) - F(a). \qquad (11)$$

Доказательство этой формулы не представляет никаких затруднений: стоит только рассматривать $F(x)$ как вспомогательную функцию. Обозначив ее через z:

$$F(x) = z, \qquad (12)$$

мы будем под знаком интеграла иметь просто dz; пределы же интегрирования изменяются, и вместо a и b мы, согласно формуле (II), получим пределы $F(a)$ (нижний) и $F(b)$ (верхний). Таким образом мы получим

$$\int_a^b dF(x) = \int_{F(a)}^{F(b)} dz = F(b) - F(a),$$

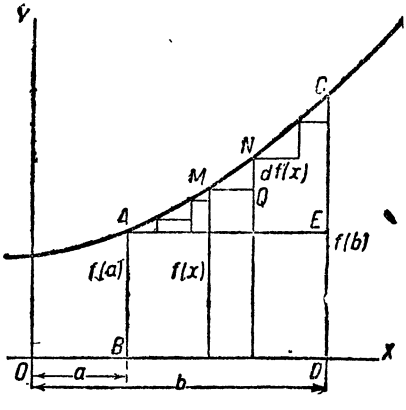
и справедливость формулы (II) доказана [1]).

§ 11. Подобно тому, как формула (I) позволяет из каждой формулы интегрального исчисления вывести формулу дифференциального исчисления, — формула (II), только что полученная, позволяет, наоборот, из каждой формулы дифференциального исчисления получить формулу интегрального исчисления. Рассмотрим простой пример; пусть мы научились дифференцировать функцию x^3 и нашли формулу

$$d(x^3) = 3x^2\,dx. \tag{13}$$

---

[1]) Эта формула имеет очень простой арифметический смысл: дифференциал $df(x)$ есть бесконечно-малое изменение величины $f(x)$; интегрируя в пределах от a до b, мы находим сумму всех бесконечно-малых изменений, которые претерпела функция $f(x)$, когда x изменялось от a до b. Очевидно, эта сумма даст полную величину изменения функции $f(x)$ с того момента, когда при $x = a$ она имела значение $f(a)$, до того момента, когда при $x = b$ она получила значение $f(b)$. Но ясно, что это изменение выражается величиной $f(b) - f(a)$.



Черт. 73.

Можно истолковать формулу (II) механически, рассматривая функцию $f(x)$ как расстояние, пройденное телом за время x. Тогда $df(x)$ есть бесконечно-малый элемент пути, а интеграл

$$\int_a^b df(x)\,dx$$

есть сумма таких элементов. Суммирование производится с момента $x = a$ по момент $x = b$, а за это время тело прошло путь $f(b) - f(a)$.

Что касается геометрического истолкования, то в той форме, которою мы пользовались в § 4, оно не особенно наглядно в силу непривычности для нас истолковывать функцию $f(x)$ как площадь типа $ABCD$ (черт. 72). Оно сводится к тому, что сумма площадей бесконечно-тонких полосок дает кусок площади $ABCD$, вырезанный из нее двумя ординатами $x = a$ и $x = b$.

Можно дать иное геометрическое истолкование, более наглядное. Если функцию $f(x)$ истолковать как ординату кривой (черт. 73), меняющуюся вместе с абсциссой x, то $df(x)$ изобразится бесконечно-малым катетом NQ треугольника MNQ. Сумма таких катетов на протяжении от точки A до точки C равна отрезку CE, представляющему разность

$$CD - AB = f(b) - f(a)$$

Интегрируя обе части равенства в пределах от a до b, получаем

$$\int_a^b d(x^3) = \int_a^b 3x^2\,dx.$$

Переворачивая это равенство и применяя формулу (II), получаем:

$$\int_a^b 3x^2\,dx = b^3 - a^3. \tag{13'}$$

Так, с помощью формулы (II) мы из формулы диференциального исчисления (13) получили формулу (13′) интегрального исчисления.

Таким же образом каждая новая формула диференциального исчисления может служить источником новой формулы интегрального исчисления. Если мы умеем диференцировать функцию $F(x)$ и знаем, что диференциал ее равен $f(x)\,dx$,

$$dF(x) = f(x)\,dx,$$

то мы тем самым умеем интегрировать функцию $f(x)$. Именно, рассуждая как выше, мы найдем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Конечно, разобранный выше пример ничего нового нам не дал, потому что выражение $3x^2\,dx$ мы умеем интегрировать и без помощи диференциального исчисления. Не даст ничего нового вообще диференцирование функций типа x^k. Интересно отметить, что формула

$$d\ln x = \frac{dx}{x} \tag{7}$$

приведет нас снова к формуле

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a,$$

из которой она была выведена в § 6.

Но мы уже теперь можем получить одну новую формулу интегрального исчисления, принадлежащую к числу основных. Именно, в § 9 мы вывели формулу

$$de^x = e^x\,dx. \tag{10}$$

Из нее немедленно следует

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a. \tag{14}$$

Если верхний предел — переменная величина, эту формулу можно написать так:

$$\int_a^x e^x\,dx = e^x - e^a. \qquad (14')$$

Эта формула в соединении с прежде изученными приемами дает возможность интегрировать ряд новых функций [1]). Рассмотрим примеры.

1. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$; вводим вспомогательную функцию $2x = z$;

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^z\,dz = \frac{1}{2}(e^2 - 1) \approx 3{,}194\ ^2).$$

2. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$; вводим вспомогательную функцию

$$-x = z;$$

мы получим

$$-\int_0^{-\infty} e^z\,dz = \int_{-\infty}^0 e^z\,dz;$$

применяя формулу (14), получим:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = e^0 - e^{-\infty},$$

---

[1]) Интересно заметить, что, зная формулу (7), из которой, как помнит читатель, мы вывели формулу (10), можно вывести формулу (14), не прибегая к помощи (10). Для этого достаточно в интеграле

$$\int_a^b e^x\,dx$$

сделать подстановку $e^x = z$ (так что новые пределы будут e^a и e^b); для того чтобы выразить dx в новой переменной, мы из уравнения $e^x = z$ находим $x = \ln z$, откуда, согласно (7),

$$dx = \frac{dz}{z}.$$

Теперь имеем

$$\int_a^b e^x\,dx = \int_a^b z\,\frac{dz}{z} = \int_{e^a}^{e^b} dz = e^b - e^a.$$

[2]) Величина e^2 легко вычисляется с помощью таблицы, так как

$$\lg(e^2) = 2\lg e = 2M = 0{,}86859.$$

так как $e^0 = 1$, а $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$, то окончательно получим

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Мы видим, что интеграл с бесконечным пределом равен конечному числу 1. С фактами такого рода мы уже встречались (гл. II, задача 35).

Если построить график e^{-x}, то мы увидим, что ординаты кривой быстро убывают, так что площадь, представляемая интегралом

$$\int_0^{x} e^{-x}\,dx,$$

хотя и растет, но не безгранично; она стремится к пределу 1.

3. $\int_0^{x} e^{(x^2)}\,x\,dx$; вспомогательная функция $x^2 = z$;

$$\int_0^{x} e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{z}\,dz = \frac{1}{2}\,(e^{x^2} - 1).$$

Упражнения.

1) $\int_0^{1} e^{\frac{1}{2}x+1}\,dx = 2\,(e^{\frac{3}{2}} - e) = 3{,}53.$

2) $\int_0^{1} e^{1-\frac{1}{2}x}\,dx = 2\,(e - \sqrt{e}) = 2{,}14.$

3) $\int_0^{\frac{1}{2}} 3e^{-2x^2}\,x\,dx = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0{,}30.$

4) $\int_0^{\infty} 3e^{-2x^2}\,x\,dx = \frac{3}{4}$. 5) $\int_1^{2} 10^x\,dx = \frac{10^2 - 10}{\ln 10} = 90{,}M = 39{,}086$

(представить 10 в виде $e^{\ln 10}$).

Иногда удачной подстановкой удается устранить показательную функцию из подъинтегральной функции (см. сноску 1 настоящего параграфа).

6) $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{(e^x+1)^2}$; подстановка $e^x+1=z$ $(e^x\,dx=dz)$ дает

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}=\int_2^{e+1}\frac{dz}{z^2}=\frac{e-1}{2(e+1)}.$$

7) $\int_0^x \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; подстановка $e^x+e^{-x}=z$.

8) $\int_0^x (e^x-e^{-x})^2(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{(e^x-e^{-x})^3}{3}$; $e^x-e^{-x}=z$.

9) $\int_{\ln 2}^x \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$; подстановка $e^x-1=z$ дает $e^x=z+1$, откуда

$$e^{2x}=(z+1)^2;\ x=\ln(z+1);\ dx=\frac{dz}{z+1};$$

$$\int_{\ln 2}^x \frac{e^{2x}\,dx}{e^x-1}=\int_1^{e^x-1}\frac{(z+1)\,dz}{z}=e^x-2+\ln(e^x-1).$$

§ 12. Сопоставляя то, что было изложено в предыдущих параграфах, мы можем констатировать, что операции дифференцирования и интегрирования находятся между собой в теснейшей внутренней связи. Из каждой формулы дифференциального исчисления „механически" получается формула интегрального исчисления, и обратно. Перед нами, таким образом, открываются две возможные линии дальнейшего развития техники исчисления бесконечно-малых. Можно искать интегралы новых функций (например функции $\sin x$), находя их непосредственным суммированием (как, например, мы поступали в главах I — III), и, обращая полученные формулы на основании формулы (I), находить дифференциалы новых функций: это — первый возможный путь. Можно, наоборот, искать дифференциалы новых функций непосредственным вычислением (как мы поступали в гл. IV) и, обращая полученные формулы на основании формулы (II), находить интегралы новых функций.

На практике именно этот второй путь является удобным. Дело в том, что непосредственное интегрирование в техническом отношении представляет задачу несравненно более трудную, чем непосредственное дифференцирование [1]).

[1]) Причина коренится в том, что операция интегрирования, требующая нахождения суммы б е с к о н е ч н о - б о л ь ш о г о числа слагаемых, по природе своей сложнее, чем задача дифференцирования, требующая нахождения бесконечно-малой разности д в у х величин (двух бесконечно-близких значений функций).

Вот почему мы в дальнейшем развитии техники исчисления бесконечно-малых пойдем этим вторым путем и задачу интегрирования постараемся, насколько это представится возможным, свести к задаче дифференцирования.

В § 11 мы показали, что каждая новая формула дифференциального исчисления порождает новую формулу интегрального исчисления, так что в нашем распоряжении находится неиссякаемый источник формул интегрирования. Но для того, чтобы вычислить заданный интеграл, этого еще недостаточно. Необходимо еще решить вопрос, какая из формул дифференциального исчисления может быть использована. Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int_1^2 3x^2\,dx.$$

Чтобы это вычисление выполнить (если мы не умеем произвести непосредственное интегрирование), нам нужно разыскать такую функцию, дифференциал которой равен $3x^2dx$. Если это удалось, тогда мы можем считать задачу решенной: формула

$$\int_a^b d\,[F(x)] = F(b) - F(a) \qquad \text{(II)}$$

немедленно доводит решение до благополучного конца.

Так, если нам удалось установить, что функция x^3 удовлетворяет поставленному требованию, т. е. что дифференциал ее равен $3x^2\,dx$,

$$d(x^3) = 3x^2\,dx,$$

то интеграл

$$\int_1^2 3x^2\,dx$$

мы можем представить в виде

$$\int_1^2 d(x^3)$$

и формула (II) дает

$$\int_1^2 3x^2\,dx = \int_1^2 d(x^3) = 2^3 - 1^3 = 7.$$

Совершенно так же обстоит дело при вычислении любого интеграла Возьмем еще один пример: найти интеграл

$$\int_0^1 e^x\,dx.$$

Задача будет решена, как только мы укажем функцию, дифференциал которой равен $e^x dx$; если мы установили, что таковою может служить функция e^x, т. е. что

$$d(e^x) = e^x dx,$$

то, как в предыдущем примере, находим

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 d(e^x) = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1{,}72.$$

Итак, задача вычисления интеграла сводится к нахождению такой функции, дифференциал которой равен подъинтегральному выражению. Если такая функция найдена, то наш интеграл становится интегралом дифференциала найденной функции и, следовательно, для вычисления его нужно только взять разность между тем значением, которое дает нашей функции верхний предел, и тем значением, которое дает ей нижний предел (§ 10).

Рассуждениям, которые мы провели на частных примерах, можно придать вполне общую форму. Искомый интеграл напишем в общей форме так:

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

если нам удалось разыскать функцию $F(x)$, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$

$$dF(x) = f(x)\,dx,$$

то интеграл наш можно представить в виде

$$\int_a^b dF(x)$$

и, на основании формулы (II), этот интеграл равен

$$F(b) - F(a).$$

Следующие примеры должны уяснить дело вполне.

Пример 1. Мы хотим найти интеграл

$$\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

пусть удалось отыскать функцию $\sqrt{x}$, дифференциал которой равен $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; тогда наш интеграл вычисляется так: находим значения функции $\sqrt{x}$

при $x=4$ и при $x=1$. Это будут числа 2 и 1; вычитая из первого второе, находим наш интеграл

$$\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1.$$

Пример 2 Хотим найти интеграл

$$\int_3^4 \frac{dx}{x+1};$$

удалось найти функцию $\ln(x+1)$, дифференциал которой равен $\frac{dx}{x+1}$; подставляем в эту функцию значения $x=4$ и $x=3$, получаем $\ln 5$ и $\ln 4$. Вычитая, находим

$$\int_3^4 \frac{dx}{x+1} = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4} = 0{,}223.$$

Оба эти результата мы можем проверить непосредственным вычислением.

§ 13. В предыдущем параграфе мы показали, что вычисление интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

сводится к разысканию функции $F(x)$, удовлетворяющей требованию, чтобы

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Эта функция $F(x)$ получила по причинам, которые вскоре выяснятся, название неопределенного интеграла функции $f(x)$ [или выражения $f(x)\,dx$]. Мы можем, следовательно, определить это новое понятие так: неопределенным интегралом функции $f(x)$ [или выражения $f(x)\,dx$] называется такая функция, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$ или производная равна $f(x)$.

Так, например, для функции $3x^2$ (или для выражения $3x^2\,dx$) неопределенным интегралом может служить функция x^3, потому что

$$d(x^3) = 3x^2\,dx,$$

или

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Для функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (или для выражения $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$) неопределенным интегралом может служить функция $\sqrt{x}$, так как

$$d\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}};\ \frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Для функции $\frac{1}{x+1}$ неопределенным интегралом может служить функция $\ln(x+1)$, ибо

$$d\ln(x+1)=\frac{dx}{x+1}.$$

Для выражения $e^x dx$ неопределенным интегралом может служить функция e^x, так как

$$d(e^x)=e^x dx;\ \frac{d(e^x)}{dx}=e^x.$$

Пользуясь вновь введенным термином, мы можем сказать, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(который, в отличие от „неопределенного" называют, иногда „определенным" интегралом) равен разности значений неопределенного интеграла при $x=b$ и при $x=a$.

Необходимо подчеркнуть то обстоятельство, что каждая данная функция имеет не один, а бесчисленное множество неопределенных интегралов (на это обстоятельство и указывает термин „неопределенный"). Так, неопределенным интегралом функции $3x^2$ может служить не только функция x^3, но и функция x^3-1, x^3+8 и вообще всякая функция вида x^3+c, где c — постоянное число.

В самом деле, дифференциалы всех этих функций представляются одним и тем же выражением $3x^2dx$.

Точно так же неопределенным интегралом функции e^x может служить любая функция вида e^x+c и т. д. Какой из неопределенных интегралов будет нами взят для вычисления интеграла — это совершенно безразлично. Например, для вычисления интеграла

$$\int_a^b 3x^2\,dx$$

мы можем взять за неопределенный интеграл не x^3, а x^3+8. Согласно только что высказанному правилу нам придется взять разность

$$(b^3+8)-(a^3+8).$$

Но в этой разности постоянное число 8, входившее в функцию x^3+8, уничтожается, так что результат b^3-a^3 получается тот же, что при неопределенном интеграле x^3. Совершенно ясно, что таким же образом при интегрировании любого выражения уничтожается при вычитании то постоянное слагаемое, на которое один из неопределенных интегралов может разниться от другого [1]). Остается еще показать, чем оправдывается употребление слова „интеграл" в термине „неопределенный интеграл".

Дело в том, что всякий интеграл с переменным верхним пределом представляет собой „неопределенный интеграл" для своей подъинтегральной функции. Возьмем, например, интеграл

$$\int_0^x 3x^2\,dx.$$

Он равен, как известно, функции x^3, которая является одним из неопределенных интегралов выражения $3x^2\,dx$. Интеграл

$$\int_1^x 3x^2\,dx$$

даст функцию x^3-1; она тоже является одним из неопределенных интегралов. Интеграл

$$\int_{-2}^x 3x^2\,dx$$

равен x^3+8, и эта функция служит неопределенным интегралом выражения $3x^2\,dx$.

Нетрудно показать, что эти результаты не случайны. Пусть мы имеем совершенно произвольный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Он представляет собой некоторую функцию переменной x.

---

[1]) Что два неопределенных интеграла одной и той же функции могут разниться т о л ь к о на постоянную величину, вытекает из простого рассуждения: пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обе являются неопределенным интегралом одного и того же выражения (например $3x^2\,dx$). Иными словами, дифференциалы $d[f_1(x)]$ и $d[f_2(x)]$ одинаковы.

Тогда разность $f_1(x)-f_2(x)$ имеет дифференциал, равный нулю:

$$d[f_1(x)-f_2(x)]=df_1(x)-df_2(x)=0.$$

Если величина имеет своим дифференциалом нуль, то, значит, она не получает никакого изменения, т. е. является постоянной:

$$f_1(x)-f_2(x)=c.$$

Чтобы показать, что эта функция служит неопределенным интегралом выражения $f(x)\,dx$, мы должны показать, что дифференциал этой функции есть $f(x)\,dx$, т. е. что

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Но эта формула есть не что иное, как формула (I) § 2, три доказательства которой были даны в § 3—5.

Итак, интеграл с переменным верхним пределом всегда является одним из неопределенных интегралов своего подъинтегрального выражения. Очевидно, что, беря в качестве нижних пределов различные числа, мы получаем различные неопределенные интегралы одной и той же (подъинтегральной) функции [1]).

Теперь совершенно ясно происхождение термина „неопределенный интеграл". Для обозначения его употребляют очень удачный символ $\int$, который только отсутствием пределов отличается от символа определенного интеграла. Таким образом символ

$$\int 3x^2\,dx$$

обозначает неопределенный интеграл выражения $3x^2\,dx$; символ

$$\int e^x\,dx$$

обозначает неопределенный интеграл выражения $e^x\,dx$ и т. д.

Можно встретить иногда запись вроде такой:

$$\int 3x^2\,dx = x^3.$$

Против нее нельзя возражать, если только помнить об ее условном характере, ибо с таким же правом можно написать:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 - 1,$$

или

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + 8.$$

Если упустить из виду условный характер этих равенств, то из них можно вывести любое абсурдное равенство, например равенство $8 = -1$.

Во избежание всяких недоразумений пользуются такой записью:

$$\int 3x^2\,dx \doteq x^3 + c;$$

[1]) Все они отличаются между собой на постоянную величину.

здесь буква c (первая буква латинского слова constans, французского constante — „постоянная“) обозначает произвольную постоянную величину. Эту величину называют „постоянной интеграции“, „константой интеграции“ или просто „константой“.

§ 14. Так как неопределенный интеграл можно рассматривать как определенный интеграл с переменным верхним пределом, то те правила, которые применялись нами для вычисления определенных интегралов, остаются в силе и при вычислении неопределенных интегралов. Так, например, неопределенный интеграл суммы двух слагаемых равен сумме неопределенных интегралов этих двух слагаемых. Зная, например, что

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c \tag{15}$$

и что

$$\int e^x\,dx = e^x + c, \tag{16}$$

мы можем вычислить неопределенный интеграл

$$\int (3x^2 + e^x)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int e^x\,dx = x^3 + e^x + c\ ^{1}). \tag{17}$$

Точно так же мы имеем право постоянный множитель выносить за знак интеграла, так что, например,

$$\int 3e^x\,dx = 3\int e^x\,dx = 3e^x + c\ ^{2}).$$

Мы можем также вводить вспомогательные функции, удачный выбор которых часто позволяет свести незнакомый интеграл к знакомым. Например, для вычисления неопределенного интеграла $\int 3\sqrt{x^2+1}\,x\,dx$ удобно воспользоваться вспомогательной функцией $\sqrt{x^2+1}$; обозначая ее через z, получим

$$\sqrt{x^2+1} = z,\quad x\,dx = z\,dz,$$

$$\int 3\sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int 3z^2\,dz = z^3 + c;$$

переходя теперь снова к переменной x, находим

$$\int 3\sqrt{x^2+1}\,x\,dx = (\sqrt{x^2+1})^3 + c.$$

---

1) Может быть, у читателя возникнет вопрос: почему мы пишем в результате c, а не $2c$. Дело в том, что, во-первых, величина c в формуле (15) вовсе не обязательно равна величине c в формуле (16); можно было бы это отметить, введя в (15) обозначение c_1, а в (16) c_2. Во-вторых, ничто не мешает вместо c написать в формуле (17) $2c$, а если угодно, то и $3c$, $4c$ и т. д., так как прибавить можно произвольную постоянную. Пишем же мы c для краткости.

2) c мы пишем вместо $3c$ по тем же основаниям, которые были указаны в предшествующей сноске.

Предлагаем читателю проверить результат диференцированием. Если требуется вычислить неопределенный интеграл $\int e^{-x^2} x\,dx$, то удобно воспользоваться подстановкой $-x^2 = z$. Тогда получаем

$$\int e^{-x^2} x\,dx = \int e^z \left(-\frac{1}{2}dz\right) = -\frac{1}{2}\int e^z\,dz = -\frac{1}{2}e^z + c =$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Проверьте результат диференцированием.

Так же, как и при вычислении определенного интеграла, и при неопределенном интегрировании некоторые основные формулы приходится помнить. К числу их относится, прежде всего, формула

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \tag{18}$$

справедливая для всех значений k кроме $k = -1$.

Эту формулу можно вывести из соответствующей формулы определенного интегрирования [1]); справедливость ее обнаруживается и непосредственным диференцированием правой ее части. Затем мы можем присоединить еще формулу

$$\int e^x dx = e^x + c. \tag{19}$$

Наконец, мы имеем в числе основных формулу

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c. \tag{20}$$

Обе легко проверяются диференцированием.

Относительно последней формулы необходимо сделать оговорку. Мы могли бы в качестве неопределенного интеграла выражения $\frac{dx}{x}$ взять функцию $\ln(2x)$ или, в более общей форме, $\ln(2x) + c$, т. е. мы имеем полное право написать

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(2x) + c.$$

---

[1]) $\int_a^x x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$; при любом значении a правая часть равенства, как было показано в предыдущем параграфе, дает неопределенный интеграл выражения $x^k\,dx$; величина $-\frac{a^{k+1}}{k+1}$ есть постоянная, но совершенно произвольная величина; она обозначена в (18) через c.

В самом деле, функция $\ln(2x)$ удовлетворяет условию, позволяющему ей именоваться неопределенным интегралом выражения $\frac{dx}{x}$, так как ее дифференциал равен

$$d[\ln(2x)+c]=\frac{d(2x)}{2x}=\frac{dx}{x}.$$

Может показаться странным, что неопределенные интегралы $\ln x$ и $\ln(2x)$ одного и того же выражения разнятся друг от друга, но легко видеть, что разнятся они только на постоянную величину, так как

$$\ln(2x)=\ln x+\ln 2.$$

Постоянной же величиной два неопределенных интеграла всегда могут друг от друга отличаться. Также будет справедлива формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(3x)+c$$

и вообще формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(kx)+c,$$

где k — постоянное число.

В частности, справедлива формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+c. \tag{21}$$

Если переменная x должна принимать положительные значения, то этой формулой пользоваться неудобно, потому что отрицательные числа не имеют логарифмов (действительных). Но если x должно принимать отрицательные значения, то именно этой формулой удобно пользоваться, тогда как формула (20) становится неудобной.

Не представляет никакого труда написать еще десятки формул неопределенного интегрирования; для этого достаточно взять наудачу ряд функций и продифференцировать их. Это значило бы, однако, нагружать память излишним баластом. Большое число неопределенных интегралов сводится к рассмотренным трем простейшим типам при помощи вышеуказанных приемов, среди которых метод вспомогательной функции играет наиболее важную роль.

К трем основным формулам (18), (19) и (20) мы добавим пока только одну, которую полезно также запомнить:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+c. \tag{22}$$

Ее легко проверить дифференцированием (см. пример 2 § 7).

Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ можно было бы вычислить и при помощи вспомогательной функции. Угадать удачную подстановку здесь не легко,

хотя существует не одна такая подстановка. Лучше всего принять за вспомогательную функцию $x+\sqrt{x^2+a}$ [зная формулу (22), это сообразить очень легко!]. Выкладка эта очень поучительна, и мы рекомендуем читателю внимательно ее проделать. Положив $x+\sqrt{x^2+a}=z$, мы получим для x выражение $\frac{z^2-a}{2z}$; для dx выражение $\frac{z^2+a}{2z^2}\,dz$; выражение для $\sqrt{x^2+a}$ проще всего получить, приняв во внимание, что из уравнения $x+\sqrt{x^2+a}=z$ следует $\sqrt{x^2+a}=z-x=\frac{z^2+a}{2z}$. После подстановки интеграл внезапно получает очень простой вид

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dz}{z}=\ln z+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+c.$$

Мы обращаем внимание читателя на существенность знака плюс перед величиной x^2. Если мы имеем неопределенный интеграл [1])

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}},$$

то его никоим образом нельзя положить равным функции

$$\ln\left(x+\sqrt{a-x^2}\right),$$

ибо дифференциал последней равен не

$$\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}},\text{ а }\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{a-x^2}-x}{\sqrt{a-x^2}+x}.$$

Во избежание недоразумений заметим, что в формуле

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+c$$

постоянная величина a отнюдь не предполагается непременно положительной, так что ничто не мешает вместо a написать $(-a)$. Ввиду этого, а также в целях придания (22) однородности, можно переписать ее в виде

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c\ [2]. \qquad (22')$$

Пример 1. $\int(3x-5)^2\,dx$; за вспомогательную функцию примем $3x-5=z$;

$$\int(3x-5)^2\,dx=\int z^2\frac{dz}{3}=\frac{1}{9}z^3+c=\frac{1}{9}(3x+5)^3+c.$$

[1]) Вычисление этого интеграла требует знания новых основных формул, которые будут выведены в дальнейшем.

[2]) Вместо a введено выражение $\pm a^2$ (a^2 — всегда положительно!).

При проверке дифференцированием $(3x-5)$ окажется снова вспомогательной функцией.

Здесь уместно обратить внимание на то, что часто удается выполнить интегрирование через вспомогательную функцию, не вводя для нее специальных обозначений, подобно тому как мы не вводим специальных обозначений при дифференцировании через промежуточную функцию.

В нашем примере можно поступать так.

В интеграле $\int (3x-5)^2\,dx$ мы рассматриваем функцию $3x-5$ как вспомогательную. Множитель $(3x-5)^2$ представляет квадрат вспомогательной функции. Постараемся вместо множителя dx ввести дифференциал вспомогательной функции, т. е. $d(3x-5)$. В уме мы соображаем, что он равен $3dx$; между тем наш множитель есть dx, т. е. втрое меньше. Итак, вместо dx напишем $\dfrac{d(3x-5)}{3}$.

Теперь интеграл принял вид $\dfrac{1}{3}\int (3x-5)^2\ d(3x-5)$, и, помня формулу

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c \tag{18}$$

(у нас $k=2$), мы сейчас же видим, что наш интеграл [отличающийся от (18) только тем, что вместо x всюду входит $3x-5$] равен

$$\frac{1}{3}\,\frac{(3x-5)^3}{3} + c = \frac{(3x-5)^3}{9} + c\ ^{1}).$$

Все вычисление записывается так:

$$\int (3x-5)^2\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^2\ d(3x-5) = \frac{1}{9}(3x-5)^3 + c.$$

Пример 2. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Читатель не должен быть обманут тем, что этот интеграл „похож" на интеграл формулы (22′): наличие лишнего множителя x существенно меняет вид неопределенного интеграла [2]). Здесь очень удобно принять за вспомогательную функцию x^2+a^2, а еще лучше $\sqrt{x^2+a^2}$. В первом случае постараемся выразить числитель через дифференциал вспомогательной функции, который подсчитываем в уме (он равен $2x\,dx$). Сейчас же видим, что нехватает нам только постоянного множителя 2, а потому можем написать:

---

[1]) Еще раз напоминаем, что вместо $\dfrac{1}{3}c$ можно писать c, ибо c — произвольная постоянная.

[2]) Подстановка $x+\sqrt{x^2+a^2}=z$, приводящая интеграл (22′) к простому виду, привела бы наш интеграл к виду $\int \dfrac{z^2-a^2}{2z^2}\,dz$; этот интеграл, конечно, легко вычислить, но потом, перейдя снова к переменной x, придется возиться с алгебраическими упрощениями.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+a^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+a^2}+c\,.$$

Если за вспомогательную функцию принять $\sqrt{x^2+a^2}$, то, подсчитав в уме дифференциал, мы увидим, что он равен подъинтегральному выражению, так что прямо можем написать

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int d\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2}+c\,.$$

Пример 3. $\int e^{2x^2+4x}(x+1)\,dx$. Приняв за вспомогательную функцию $2x^2+4x$, мы видим, что ее дифференциал равен $(4x+4)\,dx$, т. е. вчетверо больше выражения $(x+1)\,dx$.

$$\int e^{2x^2+4x}(x+1)\,dx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2+4x}\,d(2x^2+4x) = \frac{1}{4}e^{2x^2+4x}+c.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$. Этот интеграл отличается от интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ только тем, что вместо x^2 в знаменатель входит $4x^2 = (2x)^2$. Естественно принять $2x$ за вспомогательную функцию и в соответствии с этим представить dx в виде

$$dx = \frac{1}{2}d(2x),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+9}} = \frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+9}\right)+c.$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Здесь уже не обойтись без специального обозначения вспомогательной функции $1+\sqrt{x}$. Полагая $1+\sqrt{x}=z$, получаем

$$x=(z-1)^2;\ dx=2(z-1)\,dz,$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 1\int \frac{z-1}{z}\,dz = 2\int dz - 2\int \frac{dz}{z} = 2z-2\ln z =$$

$$= 2\left(1+\sqrt{x}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Пример 6. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$. Для этого интеграла, как и для всякого интеграла, содержащего иррациональность вида $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, „удачной“ подстановкой будет

$$x+\sqrt{x^2+a^2}=z.$$

Мы уже применяли эту подстановку к вычислению интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Удобство ее состоит в том, что иррациональность исчезает из подъинтегрального выражения, так как три величины: x, $\sqrt{x^2+a^2}$ и dx выражаются рационально через z и dz, а именно:

$$x=\frac{z^2-a^2}{2z},\quad \sqrt{x^2+a^2}=\frac{z^2+a^2}{2z},\quad dx=\frac{z^2+a^2}{2z^2}dz;$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int \frac{(z^2+a^2)^2}{4z^3}dz=\frac{1}{4}\int z\,dz+\frac{1}{2}a^2\int\frac{dz}{z}+$$

$$+\frac{1}{4}a^4\int\frac{dz}{z^3}=\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{2}a^2\ln z-\frac{1}{8}\frac{a^4}{z^2}.$$

Переход от переменной z к переменной x очень облегчается, если мы, приведя к общему знаменателю первый и третий члены, примем во внимание, что $\frac{z^2-a^2}{2z}=x$

и

$$\frac{z^2+a^2}{2z}=\sqrt{x^2+a^2};$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{z^4-a^4}{8z^2}+\frac{1}{2}a^2\ln z=\frac{1}{2}\frac{z^2-a^2}{2z}\frac{z^2+a^2}{2z}+$$

$$+\frac{1}{2}a^2\ln z=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right).$$

Упражнения.

1) $\int 2dx=2x+c.$

2) $\int 2x\,dx=x^2+c.$

3) $\int 2x^2\,dx=\frac{2}{3}x^3+c.$

4) $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c.$

5) $\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}=c.$

6) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+c.$

7) $\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c.$

8) $\int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{d(1-x)}{1-x} = -\ln(1-x)+c$ [1]).

9) $\int \frac{dx}{3x-5} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{3x-5} = \frac{1}{3}\ln(3x-5)+c$ [2]).

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2x)}{\sqrt{1-2x}} = -\sqrt{1-2x}+c.$

11) $\int \sqrt{4x^2+6}\,x\,dx = \frac{1}{8}\int \sqrt{4x^2+6}\,d(4x^2+7) =$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{4x^2+6}\right)^3 + c.$$

12) $\int \frac{x\,dx}{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{4-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(4-x^2)+c.$

13) $\int (1+2t)^3 dt = \frac{1}{2}\int (1+2t)^3 d(1+2t) = \frac{(1+2t)^4}{8}+c.$

14) $\int (1+2t)^3 t\,dt = \int t\,dt + 6\int t^2 dt + 12\int t^3 dt + 8\int t^4 dt =$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \frac{8}{5}t^5 + c$$

[здесь принятие функции $(1+2t)$ за вспомогательную не дает упрощения].

15) $\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3}+c.$

16) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+2x^3)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d(1+2x^3)}{(1+2x^3)^2} = -\frac{1}{6(1+2x^3)}+c.$

17) $\int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t}}dt = 2\sqrt{t^2+t}+c.$

18) $\int \frac{t^2+1}{4t^3+12t}dt = \frac{1}{12}\ln(4t^3+12t)+c.$

19) $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10}+c.$

20) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^{-2x})+c.$

---

[1]) Если $x>1$, то удобнее взять интеграл в виде $-\ln(x-1)+c$ [см. формулу (21) и пояснение к ней].

[2]) Или $\frac{1}{3}\ln(5-3x)$ $\left(\text{если } x<\frac{5}{3}\right)$. В дальнейшем мы не будем оговаривать двоякой формы представления интегралов, приводящих к логарифмическим функциям.

21) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)+c$

(вспомогательная функция x^2).

22) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+1}} = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+1}\right)+c.$

23) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}+c.$

24) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^6+1}} = \frac{1}{3}\sqrt{x^6+1}+c.$

25) $\int \frac{dx}{3-2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(3-2\sqrt{x})-\frac{3}{2}\ln(3-2\sqrt{x})+c$

(см. пример 5).

26) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x} = \frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)+c.$

§ 15. Иногда случается, что простое алгебраическое преобразование, будучи применено к подъинтегральной функции, значительно облегчает труд интегрирования. Подметить такое преобразование не всегда бывает легко, но для некоторых частных случаев можно указать правила, по которым эти преобразования производятся. В практическом отношении большой интерес представляют правила для интегрирования рациональных дробей [1]). С некоторыми из них мы можем уже теперь познакомить читателя. Лучше всего они уясняются на примерах.

Пример 1. $\int \frac{1+x^5-x^6}{1-x}\,dx$; подстановка $1-x=z$ безусловно привела бы к цели, но лишь после довольно больших вычислений. Но, представив дробь $\frac{1+x^5-x^6}{1-x}$ в виде $\frac{1}{1-x}+\frac{x^5-x^6}{1-x}=\frac{1}{1-x}+x^5$, мы без труда находим

$$\int \frac{1+x^5-x^6}{1-x} = \frac{x^6}{6}-\ln(1-x)+c.$$

Можно дать следующее правило: если в числителе дроби стоит многочлен более высокой степени, чем в знаменателе, то интеграция облегчается, если мы произведем деление (с остатком); частное станет целой частью подъинтегрального выражения (в нашем примере x^5); остаток (в нашем примере 1) будет числителем в „дробной части“; знаменатель дробной части останется прежним (в нашем примере $1-x$). Следующий пример пояснит дело.

---

[1]) То-есть дробей, числитель и знаменатель которых суть многочлены, содержащие целые степени переменной.

Пример 2. $\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}\,dx$; произведя деление многочленов, получаем в частном x^2-4x, а в остатке 5, так что

$$\frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}=\frac{(x^2-4x)(2x+3)+5}{2x+3}=x^2-4x+\frac{5}{2x+3}.$$

Поэтому

$$\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}\,dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{5}{2}\ln(2x+3)+c.$$

Из этих примеров легко усмотреть, что интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию такой дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример 3. $\int \frac{dx}{x(1+x)}$; этот интеграл можно было бы вычислить подстановкой $x=\frac{1}{z}$; но удобнее поступить так: в числителе подъинтегральной функции прибавим и вычтем величину x. Подъинтегральная функция преобразуется тогда к виду

$$\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1+x}{x(1+x)}-\frac{x}{x(1+x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x},$$

после чего интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{dx}{x(1+x)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)+c=$$

$$=\ln\frac{x}{1+x}+c.$$

Если в подъинтегральном выражении мы имеем дробь, знаменатель которой представляет произведение двух линейных выражений [1]), то всегда можно представить ее в виде суммы двух дробей с линейными знаменателями и с постоянными числителями, а такие дроби легко интегрируются. В нашем примере мы воспользовались искусственным приемом; если не удается сразу подметить его, то можно сделать преобразование методически, поступая следующим образом.

Мы хотим представить дробь $\frac{1}{x(1+x)}$ в виде суммы двух дробей, знаменателями которых служили бы x и $1+x$:

$$\frac{1}{x(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x},$$

[1]) То-есть выражений первой степени относительно переменной интеграции

где A и B — какие-то пока нам неизвестные числа. Постараемся их определить. Приведя наши две дроби к одному знаменателю, мы получим:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A+Ax+Bx}{x(1+x)}.$$

Эта дробь должна равняться дроби $\frac{1}{x(1+x)}$. Знаменатели у них одинаковы; остается выбрать числа A и B так, чтобы числители тоже были одинаковы. Но числитель дроби $\frac{1}{x(1+x)}$ не имеет члена, содержащего x, а числитель дроби $\frac{A+Ax+Bx}{x(1+x)}=\frac{A+(A+B)x}{x(1+x)}$ содержит величину x с коэфициентом $A+B$; значит, этот коэфициент должен равняться нулю:

$$A+B=0.$$

Далее, свободный член A должен равняться свободному члену числителя дроби $\frac{1}{x(1+x)}$, т. е.

$$A=1.$$

Из уравнения

$$A+B=0$$

мы теперь находим значение другого неизвестного числа B:

$$B=-1.$$

Таким образом числа A и B найдены, и мы получаем

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Пример 4. $\int\frac{4x+11}{(x-1)\,(2x+3)}dx$; к этому интегралу применим только что изложенный метод. Мы хотим представить дробь $\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)}$ в виде суммы двух дробей

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x+3},$$

где A и B — какие-то постоянные числа, которые нужно разыскать Приведя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{(2A+B)\,x+3A-B}{(x-1)\,(2x+3)}.$$

Эта дробь должна быть тождественна с дробью

$$\frac{4x+11}{(x-1)\,(2x+3)};$$

знаменатели у них одинаковы. В числителе первой дроби коэфициент при x равен $2A+B$, во второй же дроби он равен 4; значит, должно удовлетвориться уравнение

$$2A+B=4.$$

Свободные члены в числителях: $3A-B$ у первой дроби и 11 у второй; значит, должно удовлетвориться уравнение

$$3A-B=11.$$

Решая эти два уравнения, находим $A=3$, $B=-2$.
Мы получаем, следовательно,

$$\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{2x+3}.$$

Справедливость этого тождества легко проверить. Теперь вычисляем интеграл

$$\int\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{2x+3}=$$
$$=3\ln(x-1)-\ln(2x+3)+c.$$

Метод разложения дроби на сумму простейших дробей, с которым мы познакомились в двух последних примерах, называется **методом неопределенных коэфициентов.**

Пример 5. $\int\frac{2-x}{(7-x)^2}dx$; в этом примере мы снова имеем дробь, знаменатель которой представляет произведение двух множителей, но эти множители одинаковы. Представить дробь $\frac{2-x}{(7-x)^2}$ в виде суммы вида $\frac{A}{7-x}+\frac{B}{7-x}$, конечно, нельзя; но можно представить ее в виде $\frac{A}{(7-x)^2}+\frac{B}{7-x}$, после чего интеграция не представит затруднений. К такому виду мы можем привести дробь, прибавляя и отнимая в числителе число 5:

$$\frac{2-x}{(7-x)^2}=\frac{(5+2-x)-5}{(7-x)^2}=\frac{7-x-5}{(7-x)^2}=\frac{1}{7-x}-\frac{5}{(7-x)^2}$$

(т. е. $A=-5$, $B=1$).

Числа A и B могут быть найдены и методически; тот же метод неопределенных коэфициентов ведет к цели. Именно, приведя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{A}{(7-x)^2}+\frac{B}{7-x}=\frac{A+7B-Bx}{(7-x)^2}.$$

Сравнивая эту дробь с заданной, получаем

$$-B=-1;\quad A+7B=2.$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$A=-5;\ B=1.$$

Интеграция дает

$$\int\frac{2-x}{(7-x)^2}\,dx=-5\int\frac{dx}{(7-x)^2}+\int\frac{dx}{7-x}=-\frac{5}{7-x}-\ln(7-x)+c.$$

Совершенно так же может быть проинтегрирована любая дробь, знаменатель которой представляет квадрат линейного выражения.

Пример 6. $\int\frac{4x+5}{(2x+3)^2}\,dx$; как и в предыдущем примере, ищем числа A и B, удовлетворяющие тождеству

$$\frac{4x+5}{(2x+3)^2}=\frac{A}{(2x+3)^2}+\frac{B}{2x+3}$$

Приводим правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{4x+5}{(2x+3)^2}=\frac{A+3B+2Bx}{(2x+3)^2}.$$

Для определения A и B получаем уравнения:

$$A+3B=5,$$
$$2B=4,$$

которые дают:

$$A=-1;\quad B=2.$$

Теперь находим заданный интеграл

$$\int\frac{4x+5}{(2x+2)^2}=-\int\frac{dx}{(2x+3)^2}+2\int\frac{dx}{2x+3}=\frac{1}{2(2x+3)}+$$
$$+\ln(2x+3)+c.$$

Упражнения.

1) $\int\frac{x^3\,dx}{x-1}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x-1)+c.$

2) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x-3)}=\frac{1}{5}\ln(x+1)+\frac{3}{10}\ln(2x-3)+c.$

3) $\int\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}=\frac{1}{5}\ln\frac{2x-3}{x+1}+c.$

4) $\int\frac{(4x-1)\,dx}{(x+1)(2x-3)}=\ln[(2x-3)(x+1)]+c.$

5) $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+c.$

6) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + c.$

7) $\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{12}\ln\frac{2x-3}{2x+3} + c.$

8) $\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x} + c.$

9) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c.$

(*Указание*: найти числа A, B и C, удовлетворяющие тождеству

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.\ )$$

10) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{1}{1+x} + \ln\frac{x}{1+x} + c.$

(*Указание*: представить подъинтегральную дробь в виде

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{x}.\ )$$

11) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x} + c.$

12) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx = \frac{1}{4}x + \ln x - \frac{7}{16}\ln(2x-1) -$

$$-\frac{9}{16}\ln(2x+1) + 2.$$

13) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{x+1}{x-1}\right) + c.$

Нижеприведенные примеры решаются помощью простых алгебраических преобразований подъинтегральной функции.

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+9}} =$

$$= \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right) + c.$$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c.$

16) $\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = 4\sqrt{x^2-6x+5} +$

$$+7\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c.$$

Указание. Так как мы умеем вычислять интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$$

и, кроме того, интеграл

$$\int \frac{d(x^2-6x+5)}{\sqrt{(x^2-6x+5)}} = \int \frac{(2x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}},$$

то представим числитель $4x-5$ в виде $2(2x-6)+7$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов; если это преобразование затруднительно сделать сразу, можно искать методом неопределенных коэфициентов числа A и B, удовлетворяющие тождеству

$$A(2x-6)+B=4x-5$$

17) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c.$$

18) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \sqrt{x^2-2x}+\ln\left[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}\right]+c,$$

19) $$\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)+c$$

(см. пример 6 предыдущего параграфа).

20) $$\int x\sqrt{x^2-2x}\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^3+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2}\ln\left[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}\right]+c.$$

(см. указание к упражнению 16).

§ 16. К понятию неопределенного интеграла мы пришли, исходя из потребности в вычислении определенного интеграла. Напомним, что в § 12 мы показали, что знание неопределенного интеграла немедленно решает задачу определенного интегрирования. Рассмотрим здесь примеры, несколько более сложные, чем ранее рассматривавшиеся.

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2}$; найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{9-4x^2}$, представив дробь $\frac{1}{9-4x^2}$ в виде $\frac{1}{6}\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{6}\frac{1}{3-2x}$; мы получаем:

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{3+2x}+\frac{1}{6}\int \frac{dx}{3-2x} = \frac{1}{12}\ln(3+2x)-\frac{1}{12}\ln(3-2x) = \frac{1}{12}\ln\frac{3+2x}{3-2x}+c.$$

Для того чтобы вычислить наш определенный интеграл, нам нужно выбрать какой-либо из неопределенных интегралов (т. е. выбрать для c любое значение), подставить в этот неопределенный интеграл значения $x=1$ и $x=0$ и произвести вычитание. Каково бы ни было выбранное значение c, мы получим один и тот же результат, именно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{12}\ln\frac{5}{1} - \frac{1}{12}\ln\frac{3}{3} = \frac{1}{12}\ln 5 = 0{,}134\ldots$$

Мы могли бы тот же результат получить, не прибегая к неопределенному интегрированию. Произведя над дробью $\frac{1}{9-4x^2}$ такое же преобразование, как выше, мы получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dx}{3+2x} + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dx}{3-2x};$$

произведя в первом интеграле подстановку $3+2x=z$, а во втором интеграле подстановку $3-2x=u$, мы получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{12}\int_3^5 \frac{dz}{z} - \frac{1}{12}\int_3^1 \frac{du}{u} = \frac{1}{12}\ln\frac{5}{3} -$$

$$-\frac{1}{12}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{5}{3}:\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}\ln 5.$$

Легко видеть, что первый способ вычисления интеграла имеет перед вторым то преимущество, что в промежуточных выкладках нам не приходится заботиться о пределах интеграла; поэтому, чем больше промежуточных переделок нужно проделать, тем бо́льшие преимущества дает пользование неопределенным интегралом.

Заметим, что при пользовании неопределенным интегралом часто употребляют так называемый „символ подстановки". Именно, если хотят обозначить, что в функцию x^3 нужно подставить сначала $x=b$, потом $x=a$ и из первого результата вычесть второй, то пишут

$$x^3\Big|_a^b$$

Это выражение равносильно, следовательно, выражению b^3-a^3. Согласно этому ход вычисления интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2}$ можно представить так:

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{dx}{9-4x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\ln\frac{3+2x}{3-2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\ln 5.$$

Пример 2. $\int_2^3 \frac{dx}{9-4x^2}$; найдем сначала неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{9-4x^2}$. В предыдущем примере мы написали его в форме

$$\frac{1}{6}\int \frac{dx}{3+2x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{3-2x} = \frac{1}{12}\ln(3+2x) - \frac{1}{12}\ln(3-2x);$$

но в этой форме теперь его взять неудобно, потому что при значениях x, заключенных между числами 2 и 3, величина $3-2x$ имеет отрицательное значение и, следовательно, $\ln(3-2x)$ есть мнимая величина. Поэтому неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{3-2x}$ удобнее взять в форме $\ln(2x-3)$ [ср. пояснение к формуле (20) § 14 и примеры 8 и 9 параграфа того же]. Мы получаем

$$\int_2^3 \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{dx}{9-4x^2}\Big|_2^3 = \left[\frac{1}{12}\ln(3+2x) - \frac{1}{12}\ln(2x-3)\right]\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{12}\ln\frac{3+2x}{2x-3}\Big|_2^3 = \frac{1}{12}\left(\ln\frac{9}{3} - \ln\frac{7}{1}\right) = \frac{1}{12}\ln\frac{3}{7}\ ^{1}).$$

Пример 3. Рассмотрим еще интеграл $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; рассуждая, как выше, найдем:

---

[1]) Может быть, у читателя возникнет вопрос, в какой форме следует брать неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{9-4x^2}$, если пределы определенного интеграла $\int_a^b \frac{dx}{9-4x^2}$ таковы, что для некоторых значений x, лежащих между a и b, величина $3-2x$ (или $3+2x$) отрицательна, а для других положительна. На этот вопрос следует ответить, что такой интеграл вообще не имеет смысла, ибо не имеет смысла определенный интеграл $\frac{1}{6}\int_a^b \frac{dx}{3-2x}$; подстановка $3-2x$ приводит его к виду $-\frac{1}{12}\int_{3-2a}^{3-2b} \frac{dz}{z}$; если, например, величина $3-2a$ отрицательна, а $3-2b$ положительна, то имеем интеграл выражения $\frac{dz}{z}$, пределы которого имеют разные знаки. В § 6 гл. III мы показали, что такие интегралы не имеют смысла.

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\Big|_0^1 = \left(\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 1{,}30.$$

§ 17. Применим теоретические выводы предыдущих параграфов к решению ряда задач.

Задача 81. Найти длину дуги OA параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от вершины ее $O(0, 0)$ до точки $A\left(3, 4\frac{1}{2}\right)$.

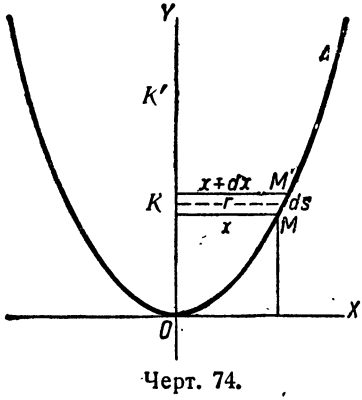
Искомая длина, как мы видели в § 20 гл. V, выражается интегралом:

$$\int_O^A \sqrt{(dx)^2+(dy)} = \int_0^3 \sqrt{(dx)^2+(x\,dx)^2} = \int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Вычисляя этот интеграл (см. пример 6 § 14), получаем:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,dx\Big|_0^3 = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^3 = \frac{3}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\ln\left(3+\sqrt{10}\right) \approx 5{,}65.$$



Черт. 74.

§ 18. *Задача 82.* Найти поверхность S, образованную вращением дуги OA параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ вокруг ее оси (координаты точек O и A те же, что в предыдущей задаче).

Так как бесконечно-малый элемент длины ds можно считать прямолинейным, то поверхность, описываемую его вращением, можно считать поверхностью усеченного конуса. Радиусы оснований этого усеченного конуса будут x и $x+dx$ (черт. 74), а образующая ds. Поэтому поверхность, описываемая элементом ds, равна

$$\pi \cdot [x+(x+dx)]\,ds = 2\pi x\,ds + \pi\,dx\,ds.$$

Второе слагаемое бесконечно-мало в сравнении с первым, так что получаем простое выражение для элемента поверхности dS:

$$dS = 2\pi x\, ds$$ [1].

Искомая поверхность выразится интегралом

$$S = \int_0^A 2\pi x\, ds = 2\pi \int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$S = 2\pi \int x\sqrt{1+x^2}\, dx \Big|_0^3 = \frac{2}{3}\pi \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left(\sqrt{10^3} - 1\right) \approx 64{,}1.$$

Задача 83. Найти поверхность, образованную вращением дуги OA параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ вокруг оси абсцисс (координаты O и A те же, что в предыдущей задаче).

Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, найдем для искомой поверхности выражение

$$2\pi \int_0^A y\, ds = \pi \int_0^3 x^2\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Подстановка $x + \sqrt{1+x^2} = z$ (см. пример 6 § 14) дает:

$$x = \frac{z^2-1}{2z},$$

$$dx = \frac{z^2+1}{2z^2}\, dz,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Вычислим теперь неопределенный интеграл

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\, dx,$$

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{16}\int \frac{(z^4-1)^2}{z^5}\, dz =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int z^3\, dz - 2\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z^5}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{z^4}{4} - 2\ln z - \frac{1}{4z^4}\right).$$

---

[1] Это же выражение получим, если воспользуемся для вычисления поверхности усеченного конуса формулой $2\pi rl$ (l — образующая, r — радиус среднего сечения), ибо в данном случае $l = ds$, радиус же среднего сечения r ввиду бесконечной тонкости полоски $MM'K'K$ можно считать равным величине x.

Можно перейти снова к переменной x; после алгебраических преобразований получили бы

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{8}\left[x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right].$$

Но проще будет, не производя замены переменной, подставить пределы переменной z в найденное выражение.

Именно, мы получим:

$$\pi\int_0^3 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{16}\int_1^{3+\sqrt{10}}\frac{(z^4-1)^2}{z^5}\,dz=\frac{\pi}{16}\left(\frac{z^4}{4}-\frac{1}{4z^4}-2\ln z\right)\Bigg|_1^{3+\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{\pi}{16}\left[\frac{(3+\sqrt{10})^4}{6}-\frac{1}{4(3+\sqrt{10})^4}-2\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right]=70{,}1.$$

§ 19. *Задача 84.* Найти поверхность S, образованную вращением дуги MO параболы Нейля $8y^2=x^3$ вокруг оси y-ов (O — начало координат; M — точка с координатами $x=2$, $y=1$).

Элемент ds дуги нашей кривой (см. § 20 гл. V) представится:

$$ds=\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx.$$

Поверхность dS, образованная вращением этого элемента вокруг оси y-ов, выразится

$$dS=2\pi x\,ds=2\pi x\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx.$$

Вся поверхность S представится интегралом

$$2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx.$$

Вычисляем неопределенный интеграл

$$\int x\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx$$

подстановкой

$$1+\frac{9}{32}x=z^2.$$

$$\int x\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx=\int\frac{32}{9}(z^2-1)\,z\cdot\frac{64}{9}z\,dz=\frac{32\cdot64}{9\cdot9}\left[\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right].$$

Искомая поверхность равна

$$2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+\frac{9}{32}x}\,dx=\frac{2\pi\cdot32\cdot64}{9\cdot9}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_1^5\approx11{,}70.$$

§ 20. *Задача 85.* Определить длину первого завитка архимедовой спирали с ходом [1]) в $h = 2{,}4$ *см*.

Уравнение архимедовой спирали имеет наиболее простой вид в полярной системе координат; именно, оно пишется в форме

$$r = a\varphi,$$

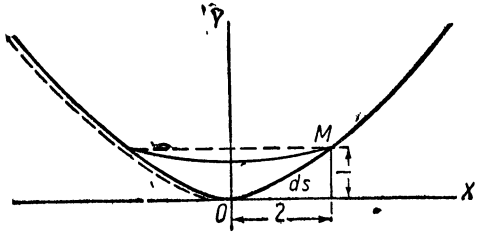
где r — переменный радиус-вектор OC и φ — полярный угол XOC точки C спирали. Величина a есть постоянная, которая может быть определена из условия, что ход спирали равен h.

Можно, например, рассуждать так: длина отрезка OD есть ход спирали. Но для точки D полярный угол равен 2π, следовательно радиус-вектор $r = OD$ должен равняться $2\pi a$; отсюда уравнение

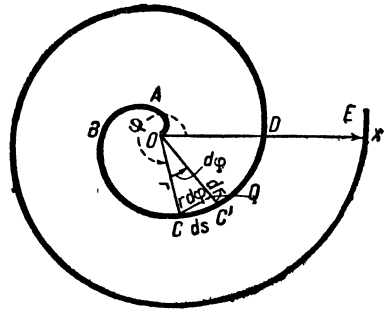
$$2\pi a = h,$$

которое дает

$$a = \frac{h}{2\pi}.$$



Черт. 75.



Черт. 76.

Итак, уравнение нашей спирали имеет вид

$$r = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

Теперь мы должны найти выражение для длины элемента дуги $CC' = ds$. Так как уравнение кривой дано в полярных координатах, то через полярные координаты r и φ и их диференциалы мы и должны выразить ds.

Соединив концы C и C' дуги ds с точкой O двумя бесконечно-близкими радиусами-векторами и проведя бесконечно-малую дугу CQ окружности с центром в точке O, мы получим бесконечно-малый треугольник CQC' с прямым углом в точке Q. Одним катетом этого треугольника служит бесконечно-малый отрезок QC'. Длина его есть разность dr двух бесконечно-близких радиусов-векторов

$$QC' = OC' - OC = dr.$$

[1]) Ходом спирали называют расстояние между двумя ближайшими точками, лежащими на одном и том же радиусе-векторе.

Другой же катет есть бесконечно-малая дуга CQ; ее центральный угол COC' есть разность $d\varphi$ двух полярных углов

$$\angle COC' = d\varphi;$$

радиус дуги CQ есть r, и потому ее длина CQ представится формулой

$$CQ = r\,d\varphi.$$

Так как ввиду бесконечной малости дуги CQ ее можно считать отрезком прямой, то по пифагоровой теореме длина элемента $CC' = ds$, служащего гипотенузой треугольника $CC'Q$, представится формулой

$$ds = \sqrt{CQ^2 + QC'^2} = \sqrt{(r\,d\varphi)^2 + (dr)^2},$$

а длина первого завитка $OABCD$ спирали представится интегралом

$$\int_O^D \sqrt{(r\,d\varphi)^2 + (dr)^2}.$$

Уравнение спирали позволяет выразить r и dr через φ и $d\varphi$:

$$r = \frac{h}{2\pi}\varphi;$$

$$dr = \frac{h}{2\pi}\,d\varphi.$$

Так как точка O соответствует значению $\varphi = 0$, а точка D — значению $\varphi = 2\pi$, то длина первого завитка представится интегралом

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\varphi\,d\varphi\right)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}d\varphi\right)^2} = \frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi.$$

Так как (см. пример 6 § 14)

$$\int \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right),$$

то

$$\frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \frac{h}{2\pi}\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)\right] \approx 3{,}38h.$$

§ 21. Логарифмической спиралью называют линию, имеющую в полярных координатах уравнение $r = e^{k\varphi}$, где k — некоторое постоянное число. Одно из ее геометрических свойств, легко выводимое из этого уравнения, состоит в том, что радиусы-векторы точек A, B, C, D... лежащих на одном и том же луче OM, образуют геометрическую прогрессию. Таким образом спираль делает бесконечное число завитков, не только удаляясь от полюса, но и стягиваясь к нему.

Задача 86. Определить длину логарифмической спирали от точки A, соответствующей полярному углу φ, до ее центра. На первый взгляд кажется, что раз спираль образует вокруг точки O бесконечное число завитков, то из точки A в точку O ведет спиральный путь бесконечно-большой длины. Это, однако, оказывается неверным.

Вычислим, как в предыдущей задаче, длину ds элемента $A'A$ дуги спирали

$$ds = \sqrt{(r\,d\varphi)^2 + (dr)^2}.$$

Так как r и φ связаны уравнением

$$r = e^{k\varphi},$$

то

$$dr = ke^{k\varphi}d\varphi,$$

так что

$$ds = \sqrt{(e^{k\varphi}\,d\varphi)^2 + (ke^{k\varphi}\,d\varphi)^2} = \sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi.$$

Для определенности предположим, что величина k положительна (черт. 77 соответствует этому предположению). Тогда спираль разматывается при увеличении угла φ и, наоборот, свертывается при уменьшении φ, так что точке O соответствует значение φ:

$$\varphi = -\infty.$$

Для вычисления длины спирали от центра ее O до точки A мы должны, следовательно, вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\,e^{k\varphi}\Big|_{-\infty}^{\varphi} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\,e^{k\varphi} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\,r$$

(при значении $\varphi = -\infty$ выражение $e^{k\varphi}$ обращается в нуль, так как k — положительное число).

Мы видим, что искомая дуга имеет конечную величину.

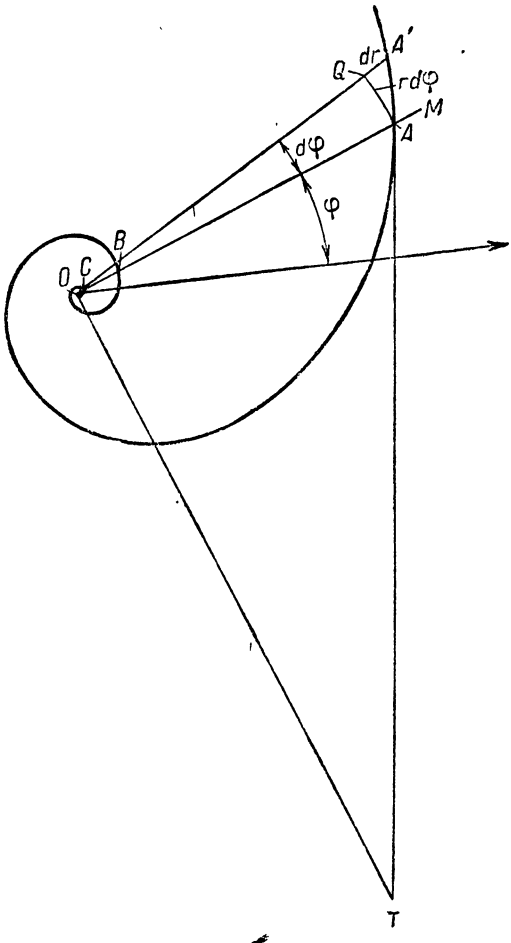
Кажущаяся парадоксальность вывода разъясняется таким образом: каждый оборот спирали имеет длину меньшую, чем предыдущий, и легко показать, что длины оборотов по мере стягивания спирали убывают в геометрической прогрессии. Таким образом дело сводится к тому, что сумма членов убывающей геометрической прогрессии имеет конечную величину.

Можно было бы еще усилить парадоксальность вывода, высказав его в такой форме: точка, движущаяся по логарифмической спирали с постоянной скоростью v, выйдя из точки A, достигнет точки O через промежуток времени

$$\frac{\sqrt{1+k^2}}{kv}\,r.$$

Парадоксальной представляется возможность сделать в конечный промежуток времени при конечной скорости бесконечно-большое число оборотов. Разберем парадокс в этой его форме.

Представим себе, что от одного конца проволоки к другому ползет муха. В течение некоторого времени она проползет всю длину проволоки. Этот промежуток не изменится, если проволоку согнуть как угодно. Свернем ее в спираль, так чтобы на первый завиток ушла ровно половина длины проволоки, на второй — половина остатка, на третий — половина нового остатка и т. д. Теоретически такое свертывание можно продолжать бесконечно, но от этого не меняются ни длина проволоки, ни время, которое требуется мухе, чтобы проползти по ней. Завитков же мы получим бесконечно много. Практически, конечно, процесс свертывания скоро становится невозможным. Невозможно практически продолжать до бесконечности и построение логарифмической спирали. Физический смысл полученного нами решения задачи состоит в том, что, сколько бы завитков спирали нам ни удалось сделать, длина логарифмической спирали, считая от точки с радиусом-вектором r, хотя и будет расти, но не превзойдет величины $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} r$. Эта величина имеет интересный геометрический смысл, обнаруживающийся при решении задачи 87.



Черт. 77.

Задача 87. Из точки A (r, φ) логарифмической спирали (черт. 77) проведена к спирали касательная AT и продолжена до точки ее пересечения T с лучом OT, перпендикулярным к радиусу-вектору OA точки A. Найти длину AT касательной.

Построим бесконечно-малый треугольник $AA'Q$, образованный: 1) элементом дуги спирали $A'A$, 2) бесконечно-малой дугой $A'Q$ окружности

радиуса OA' и 3) кусочком AQ радиуса-вектора OA. В этом треугольнике угол Q прямой, а стороны равны:

$$AQ = dr$$
$$A'Q = r\,d\varphi,$$
$$A'A = ds.$$

Если теперь мы сравним этот бесконечно-малый прямоугольный треугольник с прямоугольным треугольником AOT, то увидим, что они подобны (имеют общий острый угол A), и следовательно искомая сторона AT определится из пропорции:

$$\frac{AT}{r} = \frac{ds}{dr},$$

$$AT = r\frac{ds}{dr}.$$

В предыдущей задаче мы нашли, что

$$dr = ke^{k\varphi}\,d\varphi,$$

$$ds = \sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi.$$

Поэтому мы получаем для AT выражение

$$AT = r\frac{\sqrt{1+k^2}\,e^{k\varphi}\,d\varphi}{ke^{k\varphi}\,d\varphi} = r\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}.$$

Этот результат показывает, что если из произвольной точки A логарифмической спирали провести касательную AT до пересечения с лучом OT, перпендикулярным к радиусу-вектору точки A, то длина прямолинейного отрезка AT равна длине дуги спирали от ее центра до точки A (эта дуга, как мы видели, имеет бесконечно-большое число завитков).

Задача 88. Показать, что касательная в любой точке логарифмической спирали образует один и тот же угол с соответствующим радиусом-вектором.

Из рассмотрения того же бесконечно-малого треугольника $AA'Q$, которым мы пользовались в предыдущей задаче, легко вывести, что

$$\operatorname{tg} \angle TAO = \frac{A'Q}{QA} = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Вставляя сюда

$$r = e^{k\varphi},$$
$$dr = ke^{k\varphi}\,d\varphi,$$

получаем

$$\operatorname{tg} \angle TAO = \frac{1}{k}.$$

Таким образом тангенс угла между касательной и радиусом-вектором, а значит самый угол, имеют постоянную величину. Постоянная k, входящая в уравнение $r = e^{k\varphi}$, имеет, следовательно, простой геометрический смысл: это есть величина котангенса угла, образуемого касательной к логарифмической спирали с соответствующим радиусом-вектором.

Читатель без труда покажет, что в архимедовой спирали тангенс угла между радиусом-вектором и касательной пропорционален величине полярного угла и что, следовательно, по мере удаления от центра угол между касательной и радиусом-вектором увеличивается, стремясь к 90°.

§ 22. В ряде следующих задач мы займемся расчетом хода химических реакций. Предварительно необходимо сделать следующие замечания.

Положим, что в реакции участвует несколько веществ A, B, C..., находящихся в растворенном состоянии, и пусть в реакцию входят a молекул вещества A, b молекул вещества B, c молекул вещества C и т. д., т. е. левая часть уравнения реакции имеет вид

$$aA + bB + cC + \ldots$$

В таком случае скорость реакции зависит при прочих равных условиях, т. е. при тех же реагирующих веществах, при неизменной температуре и т. д., от концентрации реагирующих веществ. Величина концентрации измеряется количеством данного вещества в единице объема (например в 1 $л$) раствора. Скорость реакции увеличивается по мере увеличения концентрации каждого из веществ. Наиболее естественным казалось бы написать такое выражение скорости реакции v:

$$v = k\,[A]\,[B]\,[C]\ldots, \qquad (23)$$

где k — коэфициент пропорциональности, а $[A]$, $[B]$, $[C]\ldots$ — концентрации соответствующих веществ.

Формула (23) действительно соответствует опытным данным, но лишь в тех случаях, когда числа a, b, $c\ldots$ равны единице. В общем же случае формулу (23) приходится заменить более общей, имеющей вид

$$v = k\,[A]^a[B]^b[C]^c\ldots \qquad (24)$$

(закон действующих масс).

Эта формула может быть оправдана как теоретическими соображениями [1]), так и опытными результатами.

---

1) Пусть реагирующие вещества будут A и B. Если левая часть уравнения реакции имеет вид $A + B$, то химическое превращение обусловливается столкновением одной молекулы вещества A и одной молекулы B. Эти столкновения происходят тем чаще и, значит, скорость реакции тем больше, чем большее число молекул A и B находится в растворе, так что скорость реакции пропорциональна как количеству h_A молекул A, так и количеству h_B молекул B, т. е. пропорциональна произведению $h_A\,h_B$, числа же h_A и h_B пропорциональны концентрациям $[A]$ и $[B]$.

Иначе обстоит дело в случае реакции вида $2A + B$. Здесь для превращения вещества должно произойти столкновение одной молекулы B и двух молекул A. Число этих столкновений пропорционально числу молекул B (т. е. h_B) и числу

Числовое значение коэфициента k (константа скорости) различно для различных химических процессов. Оно, кроме того, зависит и от выбора единиц для количества вещества и времени. Обычно принято за единицу количества вещества принимать 1 моль (граммолекула), т. е. число граммов вещества, равное его молекулярному весу. За единицу концентрации вещества A принимают концентрацию раствора, содержащего в 1 $л$ раствора 1 моль вещества A. Наконец, за единицу времени принимают обычно 1 минуту.

Что касается величины скорости v реакции, то ее можно определить как частное от деления количества вещества, вступающего в реакцию, на протекшее время. При этом естественно брать не абсолютное количество вещества, а приходящееся на 1 $л$ раствора. Ясно также, что если с течением времени реакция замедляется или ускоряется, то для вычисления скорости следует брать бесконечно-малый промежуток времени.

§ 23. *Задача 89.* Реакция „омыления" уксусноэтилового эфира ($CH_3COOC_2H_5$) едким натром (NaOH) идет по уравнению

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \rightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH. \qquad (25)$$

уксусноэтиловый эфир — едкий натр — уксуснокислый натр — этиловый спирт

В начале опыта раствор уксусноэтилового эфира имел концентрацию $a = 0{,}01$ (т. е. 0,01 моля на 1 $л$ раствора), а едкий натр присутствовал в концентрации $b = 0{,}002$. По истечении 23 мин. концентрация $CH_3COOC_2H_5$ уменьшилась на 10% первоначальной величины. В какое время она уменьшится на 15%?

Обозначим через t промежуток времени, протекший от начала опыта, а через x — уменьшение концентрации $CH_3COOC_2H_5$ к концу этого промежутка. Легко видеть, что концентрация NaOH уменьшается на ту же величину [1]).

Таким образом к концу промежутка t концентрации реагентов будут равны $a - x$ и $b - x$.

Так как в течение процесса концентрации веществ изменяются, то для вычисления скорости реакции мы должны взять бесконечно-малый

пар молекул A. В элементарной алгебре доказывается, что число парных комбинаций из n элементов равно $\frac{n(n-1)}{2}$; таким образом число столкновений оказывается пропорциональным не величине h_A, а величине $\frac{h_A(h_A-1)}{2}$. Так как h_A — очень большое число, то практически величина $\frac{h_A(h_A-1)}{2}$ не отличается от величины $\frac{(h_A)^2}{2}$. Таким образом число столкновений пропорционально числам h_B и $\frac{(h_A)^2}{2}$, или, что то же, числам h_B и $(h_A)^2$

[1]) Каждая молекула эфира согласно уравнению (25) реагирует с одной молекулой едкого натра, а так как 1 моль эфира содержит столько же молекул, сколько 1 моль едкого натра (ибо весовые количества их пропорциональны молекулярным весам), то каждый моль эфира реагирует с одним молем едкого натра.

промежуток времени dt и разделить на него бесконечно-малое количество вещества (выраженное в молях), вошедшее в реакцию. Какое из двух веществ взять — безразлично, так как число реагирующих молей, как мы отметили, для обоих одно и то же.

Так как через x мы обозначили уменьшение концентрации вещества, т. е. число молей, вступивших в реакцию (в 1 $л$) за время t, то число молей, вступивших в реакцию за время dt, выразится дифференциалом dx, а скорость реакции v — дифференциальным отношением $\frac{dx}{dt}$.

Теперь мы можем на основании формулы (24) написать дифференциальное уравнение нашей реакции в виде

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \tag{26}$$

где $a = 0{,}01$, $b = 0{,}002$.

Значение k нам пока неизвестно. Для вычисления его мы сможем использовать приведенный в задаче результат опыта.

Решим уравнение (26) в общем виде и найдем функциональную зависимость между величинами x и t. При интеграции будем иметь в виду, что в начале опыта ($t = 0$) $x = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{(a-x)(b-x)}. \tag{27}$$

Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$$

разложением подъинтегральной функции на сумму двух дробей с линейными знаменателями

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-x}\right).$$

Мы получаем

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{b-x} - \frac{1}{a-b}\int \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a-x}{b-x}$$

и, следовательно,

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a-x}{b-x}\Bigg|_0^x = \frac{1}{a-b}\left(\ln\frac{a-x}{b-x} - \ln\frac{a}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\ln\frac{(a-x)b}{(b-x)a}.$$

Вставляя полученный результат в (27), мы получаем функциональную зависимость между x и t в форме

$$kt = \frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}. \qquad (28)$$

В нашей задаче числа a и b равны:

$$a = 0{,}01, \qquad b = 0{,}002.$$

Определим теперь значение коэфициента k. Мы знаем, что через 23 мин. концентрация $CH_3COOC_2H_5$ уменьшилась на 10% первоначальной величины, т. е. на $0{,}1a$. Иначе говоря, мы знаем, что значению $t = 23$ соответствует значение $x = 0{,}1a = 0{,}001$. Поэтому на основании формулы (28) мы получаем

$$k = \frac{1}{t(a-b)} \ln \frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a} = \frac{1}{23(0{,}1-0{,}002)} \ln \frac{(0{,}01-0{,}001)\cdot 0{,}002}{(0{,}002-0{,}001)\cdot 0{,}01} =$$

$$= \frac{2{,}3}{23\cdot 0{,}008} \cdot \log 1{,}8 \approx 3{,}19.$$

Теперь для решения нашей задачи остается подставить в уравнение (28) найденное значение k и положить $x = 0{,}15a = 0{,}0015$. Тогда получим

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \ln \frac{(a-x)\,b}{(b-x)\,a} = \frac{2{,}3}{3{,}19\cdot 0{,}008} \log \frac{0{,}0085\cdot 0{,}002}{0{,}0005\cdot 0{,}01} =$$

$$= 90{,}13 \cdot \log 3{,}4 \approx 47{,}9 \text{ мин.}$$

§ 24. *Задача 90.* Приняв во внимание данные предыдущей задачи, вычислить, каковы будут концентрации $CH_3COOC_2H_5$ и NaOH через 2 часа после начала опыта.

Для ответа на вопрос задачи мы должны в формулу

$$kt = \frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}, \qquad (28)$$

где $a = 0{,}01$, $b = 0{,}002$, $k = 3{,}19$, подставить значение $t = 120$ и найти из уравнения (28) соответствующее значение x.

Искомые концентрации будут:

$$[CH_3COOC_2H_5] = a - x,$$

$$[NaOH] = b - x.$$

Предварительно разрешим относительно x уравнение (28) в общем его виде. Мы получаем последовательно:

$$\ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} = (a-b)kt,$$

$$\frac{(a-x)b}{(b-x)a} = e^{(a-b)kt},$$

$$x = \frac{ab[e^{(a-b)kt}-1]}{ae^{(a-b)kt}-b} \quad ^{1}) \qquad (29)$$

Подставляя сюда значения $a = 0{,}01$, $b = 0{,}002$, $k = 3{,}19$, $t = 120$, находим

$$e^{(a-b)kt} \approx 21{,}4,$$

$$x \approx \frac{0{,}01 \cdot 0{,}002 \cdot 20{,}4}{0{,}212} \approx 0{,}0019.$$

Концентрации реагентов станут равными:

$$[CH_3COOC_2H_5] = a - x = 0{,}0081; \quad [NaOH] = 0{,}0001.$$

Мы видим, что через 2 часа после начала опыта концентрация $CH_3COOC_2H_5$ составляет примерно 81% первоначальной, тогда как концентрация NaOH составляет всего 5% первоначальной. Это и понятно, так как в растворе имеется избыток $CH_3COOC_2H_5$ (0,01 моля при 0,002 моля NaOH). Понятно также, что в реакцию не может войти более чем 0,002 моля того и другого вещества. Если наступит момент, когда эта степень реакции будет достигнута, то реакция окончится. Едкий натр войдет в реакцию целиком, тогда как концентрация уксусноэтилового эфира будет равна 80% начальной.

Когда же наступит этот момент? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно в формулу

$$kt = \frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a}$$

подставить значение $x = b$. Знаменатель дроби $\frac{(a-x)b}{(b-x)a}$ обращается в нуль, сама дробь — в бесконечность, и мы видим, что величина t — бесконечно-большая. Таким образом теоретически реакция закончится только через бесконечно-большой промежуток времени. Практически она довольно скоро может считаться закончившейся. В задаче мы видели, что уже через 2 часа реакция близка практически к концу. Читатель может легко подсчитать, через какое время концентрация NaOH составит 1% или 0,1% первоначальной.

---

1) Эту формулу можно переписать в симметричном виде, помножив числитель и знаменатель ее правой части на e^{bkt} или представив выражение $e^{(a-b)k}$ в виде $e^{akt-bkt} = \frac{e^{akt}}{e^{bkt}}$ и освободившись от двухъэтажности в правой части. Формула примет вид

$$x = \frac{ab(e^{akt}-e^{bkt})}{ae^{akt}-be^{bkt}}$$

К аналогичным выводам приводит и формула

$$x = \frac{ab[e^{(a-b)kt} - 1]}{ae^{(a-b)kt} - b}. \qquad (29)$$

Так как показательная функция обладает быстрым ростом, то уже при небольших значениях величины t величина $e^{(a-b)kt}$ принимает большие значения, так что в числителе формулы (29) можно пренебречь единицей, а в знаменателе — числом b. Тогда дробь сократится на $ae^{(a-b)kt}$, и мы получим $x \approx b$, т. е. практически в реакцию войдет b молей того и другого вещества, после чего концентрация $CH_3COOC_2H_5$ станет практически равной $a - b$, а концентрация NaOH практически будет равна нулю, т. е. реакция окончится.

§ 25. *Задача 91.* Раствор уксусноэтилового эфира омыляется едким натром (см. задачу 89). Оба реагирующие вещества имеют концентрацию $a = 0{,}01$. Через сколько времени концентрация реагентов уменьшится наполовину? Какова будет концентрация реагентов через 2 часа после начала реакции? Константу скорости положим равной $k = 3{,}19$.

На первый взгляд может показаться, что для решения этой задачи необходимо подставить в формулы (28) и (29) соответствующие значения x или t. Однако мы сейчас же убедимся, что при данных концентрациях и вообще при равных концентрациях реагентов, т. е. при

$$a = b,$$

формулы

$$kt = \frac{1}{a-b} \ln \frac{(a-x)b}{(b-x)a} \qquad (28)$$

и

$$x = ab \frac{e^{(a-b)kt} - 1}{ae^{(a-b)kt} - b} \qquad (29)$$

приводят к неопределенностям.

Так, в формуле (28) дробь $\frac{(a-x)b}{(b-x)a}$ обращается при $a = b$ в единицу, а ее логарифм — в нуль; одновременно обращается в нуль и величина $a - b$, так что в правой части получается выражение $\frac{0}{0}$, не дающее возможности ничего заключить о величине t. Точно так же легко убедиться, что дробь, входящая в формулу (29), принимает вид $\frac{0}{0}$, если положить $a = b$. Каким же образом мы оказались в таком неприятном положении? На этот вопрос даст ответ внимательный пересмотр хода наших рассуждений в задаче 89, где была получена формула (28), из которой потом была выведена и формула (29). Этот пересмотр приведет нас и к правильному ответу на вопросы задачи.

Мы исходили из диференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \tag{26}$$

которое теперь, полагая $b = a$, мы можем переписать так:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2. \tag{26'}$$

Далее мы получили формулу

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{(a-x)(b-x)} \tag{27}$$

и для нахождения неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$$

мы представили подъинтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-x}\right).$$

Но это-то преобразование и не годится для случая, когда $b = a$ [1]). Здесь и лежит источник беды, в которую мы попали. Но мы не попадем в нее, если не будем пользоваться последним преобразованием. Да нам и не нужны никакие преобразования, ибо формула (27) принимает теперь вид

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{(a-x)^2}. \tag{27'}$$

Соответствующий неопределенный интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = -\int \frac{d(a-x)}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x},$$

и следовательно

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x}\Bigg|_0^x = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = \frac{x}{(a-x)a}.$$

---

[1]) Когда мы ищем числа A и B, удовлетворяющие тождественно равенству $\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$, то нам приходится решать (см. § 15) систему уравнений: $bA + aB = 1$, $A + B = 0$.

Вообще говоря, она дает для A и B значения $A = -\frac{1}{a-b}$, $B = \frac{1}{a-b}$; но для случая $b = a$ уравнения этой системы становятся несовместными, так как первое уравнение можно представить в виде $A + B = \frac{1}{a}$, а это уравнение противоречит второму, которое требует, чтобы та же сумма $A + B$ равнялась нулю.

Таким образом вместо уравнения (28) мы получаем уравнение

$$kt = \frac{x}{(a-x)a} \tag{28'}$$

и, решая его относительно x, получаем взамен уравнения (29)

$$x = \frac{a^2kt}{akt+1}. \tag{29'}$$

Теперь нетрудно ответить на оба поставленные в задаче вопроса. На первый вопрос отвечает формула (28'), из которой находим

$$t = \frac{x}{ka(a-x)}.$$

Подставляя сюда $k = 3{,}19$; $a = 0{,}01$; $x = \frac{a}{2} = 0{,}005$, находим

$$t = \frac{\frac{a}{2}}{ka \cdot \frac{a}{2}} = \frac{1}{ka} = \frac{1}{0{,}0319} \text{ мин.} \approx 31 \text{ мин. } 21 \text{ сек.}$$

На второй вопрос отвечает формула (29'), в которую мы должны подставить $t = 120$, $k = 3{,}19$, $a = 0{,}01$.

Мы найдем

$$x = \frac{(0{,}01)^2 \cdot 3{,}19 \cdot 120}{0{,}01 \cdot 3{,}19 \cdot 120 + 1} \approx 0{,}0079.$$

Следовательно, через 2 часа в реакцию войдет 0,0079 моля каждого реагента, а, значит, концентрация обоих реагентов станет равной $a - x = 0{,}01 - 0{,}0079 = 0{,}0021$, т. е. составит 21% первоначальной.

Как и в предыдущей задаче, можно показать, что через бесконечно большой (практически через достаточно большой) промежуток времени t уменьшение концентрации x станет равным a, так что реакция закончится полным превращением обоих реагентов. Предоставляем читателю вывести этот результат из формулы (29').

Замечание. Между общей формулой (28) и формулой (28'), которой мы пользуемся для случая, когда $a = b$, вовсе не лежит непроходимая пропасть, как это могло бы показаться из сравнения внешней их формы. Так, если концентрация a одного реагента отличается от концентрации b другого хотя бы на очень малую величину, то придется пользоваться формулой (28), а не (28'); между тем очевидно, что практически можно считать мало отличающиеся друг от друга концентрации равными между собой. Соответственно этому, если мы положим, например, $a = 0{,}01$, а $b = 0{,}00999$, то формула (28) должна дать результат, практически совпадающий с результатом формулы (28) при $a = b = 0{,}01$. Таким образом можно было бы решить нашу задачу и при помощи формулы (28), но, разумеется, формула (28') проще, и потому следует, наоборот, пользоваться ею в тех случаях, когда a и b мало отличаются друг от друга.

§ 26. *Задача 92.* Реакция соединения хлорного железа и хлористого олова происходит по уравнению [1]):

$$2FeCl_3 + SnCl_2 \rightarrow 2FeCl_2 + SnCl_4. \qquad (30)$$

хлорное железо — хлористое олово — хлористое железо — хлорное олово

В начале реакции концентрация $SnCl_2$ равнялась 0,06250, а концентрация $FeCl_3$ — 0,12500. Через 1 мин. после начала опыта концентрация $SnCl_2$ равнялась 0,04816. Какова будет концентрация $SnCl_2$ через 11 мин. после начала реакции?

Обозначим через x уменьшение концентрации $SnCl_2$. Уравнение (30) показывает, что одна молекула $SnCl_2$ соединяется с двумя молекулами $FeCl_3$. Следовательно, когда концентрация хлористого олова уменьшается на величину x, концентрация хлорного железа уменьшится на величину $2x$. Таким образом, обозначая через a концентрацию $SnCl_2$, а через b концентрацию $FeCl_3$, мы получим диференциальное уравнение реакции (см. § 22)

$$\frac{dx}{dt} = k(b-2x)^2(a-x).$$

В нашей задаче $a = 0{,}06250$; $b = 0{,}12500$; k — постоянная, подлежащая определению на основании данных опыта.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{(b-2x)^2(a-x)}. \qquad (31)$$

Чтобы вычислить интеграл, стоящий в правой части этого уравнения, мы, вообще говоря, должны были бы представить подъинтегральную функцию в виде суммы „простейших" дробей. Но в нашей задаче мы имеем тот исключительный случай, когда $b = 2a$, и следовательно уравнение (31) можно переписать в виде

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{4(a-x)^3}.$$

Этот интеграл вычисляется непосредственно с помощью вспомогательной функции $a - x$, и мы получаем

$$kt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2}\right]. \qquad (32)$$

---

[1]) Эта реакция принадлежит к числу тримолекулярных, т. е. таких, в которых участвуют три молекулы (в данном случае две молекулы $FeCl_3$ и 1 молекула $SnCl_2$). Рассмотренная выше реакция омыления—бимолекулярна. В ней участвуют две молекулы. Расчет бимолекулярных реакций наиболее часто встречается на практике. Но рассмотрение тримолекулярной реакции представляет большой интерес в математическом отношении.

Это уравнение легко преобразуется к виду

$$kt = \frac{x(2a-x)}{8a^2(a-x)^2}, \tag{32}$$

и значение k мы найдем, подставляя в последнее уравнение значения $t=1$, $a=0{,}06250$, $a-x=0{,}04816$ и, следовательно, $x=0{,}01434$.

Вычисление дает

$$k = \frac{x(2a-x)}{8a^2t(a-x)^2} = \frac{0{,}01434 \cdot 0{,}11066}{8 \cdot 0{,}06250^2 \cdot 1 \cdot 0{,}04816^2} \approx 21{,}89.$$

Чтобы дать ответ на вопрос задачи, мы должны выразить величину $a=x$ в функции t; для этого удобнее всего воспользоваться уравнением (32). Оно дает

$$a-x = \frac{a}{\sqrt{8a^2kt+1}}.$$

По смыслу задачи перед квадратным корнем следует взять лишь положительный знак.

В эту формулу мы и должны подставить

$$t=11,\ a=0{,}06250,\ k=21{,}89.$$

Вычисление дает

$$a-x=0{,}02141.$$

Такова должна быть концентрация $SnCl_2$ через 11 мин. после начала реакции. Экспериментальная проверка дает очень близкий результат; именно, через 11 мин. в описанном опыте концентрация $SnCl_2$ равнялась 0,02148 [1]).

§ 27. *Задача 93.* Используя данные и результаты предыдущей задачи, вычислить, через какое время после начала опыта концентрация $SnCl_2$ составит 50% своей начальной величины, если начальные концентрации $SnCl_2$ и $FeCl_3$ были

$$a=[SnCl_2[=0{,}0600,$$

$$b=[FeCl_3]=0{,}0824.$$

Так как исключительный случай $b=2a$ теперь не имеет места, то для вычисления интеграла в формуле

$$kt = \int_0^x \frac{dx}{(b-2x)^2(a-x)} \tag{31}$$

---

[1]) Данные взяты из опытов Нойеса (Noyes), результаты которого заимствованы из задачника Ф. Дингельдея (Dingelday) по интегральному исчислению, стр. 172 немецкого издания.

мы должны подъинтегральную функцию представить в виде суммы „простейших“ дробей такого вида (см. § 15 этой главы, примеры 5, 6 и упражнение 10):

$$\frac{1}{(b-2x)^2(a-x)}=\frac{A}{(b-2x)^2}+\frac{B}{b-2x}+\frac{C}{a-x}.$$

Числа A, B и C находятся по общему методу (§ 15), и мы получаем:

$$C=\frac{1}{(2a-b)^2};\quad B=\frac{-2}{(2a-b)^2};\quad A=\frac{2(2a-b)}{(2a-b)^2}=\frac{2}{2a-b}.$$

Дальнейшее вычисление дает

$$\int\frac{dx}{(b-2x)^2(a-x)}=\frac{1}{2a-b}\int\frac{2dx}{(b-2x)^2}-\frac{1}{(2a-b)^2}\int\frac{2dx}{b-2x}+$$

$$+\frac{1}{(2a-b)^2}\int\frac{dx}{a-x}=\frac{1}{(2a-b)(b-2x)}+$$

$$+\frac{1}{(2a-b)^2}\ln(b-2x)-\frac{1}{(2a-b)^2}\ln(a-x)=\frac{1}{(2a-b)(b-2x)}+$$

$$+\frac{1}{(2a-b)^2}\ln\frac{b-2x}{a-x};$$

$$\int_0^x\frac{dx}{(b-2x)^2(a-x)}=\frac{1}{(2a-b)(b-2x)}+\frac{1}{(2a-b)^2}\ln\frac{b-2x}{a-x}\Bigg|_0^x=$$

$$=\frac{2x}{(2a-b)(b-2x)b}+\frac{1}{(2a-b)^2}\ln\frac{(b-2x)a}{(a-x)b}=$$

$$=\frac{1}{(2a-b)^2}\left[\frac{2(2a-b)x}{(b-2x)b}+\ln\frac{(b-2x)a}{(a-x)b}\right],$$

так что величина t в функции x предстáвится следующим образом:

$$t=\frac{1}{k(2a-b)^2}\left[\frac{2(2a-b)x}{(b-2x)b}+\ln\frac{(b-2x)a}{(a-x)b}\right].$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, мы должны подставить в эту формулу следующие значения:

$$a=0{,}0600,\quad b=0{,}0824,\quad x=0{,}50a=0{,}0300,\quad k=21{,}89,$$

$$2a-b=0{,}0376,\quad b-2x=0{,}0224,\quad a-x=0{,}0300.$$

Мы получаем:

$$\frac{2(2a-b)x}{(b-2x)b}=\frac{2\cdot0{,}0376\cdot0{,}0300}{0{,}0824\cdot0{,}0224}\approx1{,}2223;$$

$$\ln\frac{(b-2x)a}{(a-x)b}=\frac{1}{M}\log\frac{0{,}0224\cdot 0{,}0600}{0{,}0300\cdot 0{,}0824}\approx -0{,}6094;$$

$$t\approx\frac{1}{21{,}89\cdot 0{,}0376^2}\cdot(1{,}2223-0{,}6094)=\frac{0{,}6129}{21{,}89\cdot 0{,}0376^2}\approx 19{,}8 \text{ мин.}$$

Итак, концентрация $SnCl_2$ уменьшится на половину первоначальной величины через 19 мин. 28 сек. после начала реакции.

§ 28. В ряде следующих задач мы займемся вопросом о движении тела в сопротивляющейся среде. Предварительно необходимо сделать следующие замечания.

Простейшим видом прямолинейного движения тела является движение равномерное, т. е. такое, скорость которого неизменна. Согласно основным законам механики таким движением обладает тело, в процессе движения не подверженное действию никакой силы (первый закон Ньютона). Если же на тело действует какая-нибудь сила, то она ускоряет (или замедляет) его движение. Если величина силы остается неизменной, то согласно основным законам механики скорость тела растет в каждую единицу времени на одну и ту же величину, пропорциональную действующей силе и обратно пропорциональную массе тела (второй закон Ньютона). Этот закон может быть представлен формулой

$$v-v_0=k\frac{F}{m}(t-t_0), \tag{33}$$

где через v и v_0 обозначены скорости тела в моменты t и t_0, m представляет массу тела, F — действующую на него силу. Величина k есть постоянный коэфициент пропорциональности. Числовое его значение зависит от выбора единиц длины, массы, времени и силы. Соответствующим выбором этих единиц можно сделать величину k равной единице. Именно, принимая за единицу длины 1 *см*, за единицу времени 1 сек., а за единицу массы 1 *г*, мы должны за единицу силы принять такую, которая через 1 сек. увеличивает скорость тела массой в 1 *г* на 1 *см/сек*. Эта сила называется **диной** $\left(1 \text{ дина равна около } \frac{1}{980}\,г\right)$. При таком выборе единиц формула (33) принимает вид

$$v-v_0=\frac{F}{m}(t-t_0). \tag{34}$$

Формула эта, повторяем, верна лишь при том предположении, что сила F остается постоянной. Это предположение очень редко осуществляется в действительности. В тех случаях, когда эта сила переменна, формула (33) **не может быть применена**. Но мы знаем, что всякую силу можно считать постоянной в течение бесконечно-малого промежутка времени. Поэтому для **всякого** прямолинейного движения имеет место уравнение, которое получается из (34) заменой разностей $t-t_0$ и $v-v_0$ диференциалами dt и dv:

$$dv=\frac{F}{m}dt. \tag{35}$$

Как только известны масса тела m и закон изменения силы F, мы можем, интегрируя диференциальное уравнение (35), вычислить скорость тела в любой момент времени. Обратно, если известна скорость тела в функции времени, мы можем найти закон изменения силы F по формуле

$$F = m\frac{dv}{dt}, \tag{36}$$

получающейся непосредственно из формулы (35).

Мы видим, что действующая на тело сила пропорциональна производной функции $\frac{dv}{dt}$. Производную скорости по времени $\frac{dv}{dt}$ называют ускорением. Можно определить ускорение как приходящееся на единицу времени увеличение скорости, или — иначе — как скорость изменения скорости.

§ 29. *Задача 94.* Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 10$ *км/час*. На полном ходу ее мотор был выключен, и через $t = 20$ сек. скорость лодки уменьшилась до $v_1 = 6$ *км/час*. Принимая, что сопротивление воды движению лодки пропорционально скорости ее движения, вычислить, какова будет скорость лодки через 2 мин. после остановки мотора.

Обозначим через v переменную скорость лодки, через F — силу сопротивления воды ее движению. На основании предположения, сделанного о законе изменения сопротивления, мы можем написать

$$F = -kv,$$

где через k обозначено некоторое, пока неизвестное, постоянное положительное число (коэфициент пропорциональности). Знак минус, стоящий в правой части, указывает, что направление силы F противоположно направлению скорости.

Уравнение (35) предыдущего параграфа принимает, следовательно, вид

$$dv = -\frac{kv}{m}dt, \tag{37}$$

в котором m обозначает массу лодки, а t — переменное время, которое удобнее всего отсчитывать от момента остановки мотора.

Разделяя переменные и интегрируя, мы получаем:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_{0}^{t}dt,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t. \tag{38}$$

Это уравнение дает функциональную зависимость между временем t, протекшим с момента остановки мотора, и скоростью v лодки.

Его можно представить еще в виде

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{39}$$

Для вычислений удобнее пользоваться формулой (38). В ней нам неизвестны величины k и m, но входящее в нее отношение $\frac{k}{m}$ может быть определено из условия задачи. Именно, нужно принять во внимание, что при $t = t_1$ ($= 20$ сек.) скорость v равна v_1 ($= 6$ *км/час*). Вставляя эти данные в (38), получаем

$$\ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{k}{m} t_1. \tag{40}$$

Исключая из (38) и (40) величину $\frac{k}{m}$, получаем:

$$\ln \frac{v}{v_0} = \frac{t}{t_1} \ln \frac{v_1}{v_0}$$

или, переходя к десятичным логарифмам,

$$\lg \frac{v}{v_0} = \frac{t}{t_1} \lg \frac{v_1}{v_0}. \tag{40'}$$

Подставляя в это уравнение данные значения v_0, v_1 и t_1, находим

$$v \approx 0{,}46 \text{ км/час}.$$

Задача 95. Вычислить расстояние, пройденное лодкой (см. предыдущую задачу) в течение 1 мин. после остановки мотора. Найти расстояние, которое будет пройдено лодкой до ее полной остановки.

Исходным пунктом решения этой задачи служит результат, полученный в предыдущей задаче, именно формула

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}, \tag{39}$$

дающая скорость движения лодки в функции времени.

Обозначая через s расстояние, пройденное лодкой с момента выключения мотора, мы можем написать диференциальное уравнение

$$ds = v\,dt,$$

которое вследствие (39) принимает вид

$$ds = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\,dt.$$

Интегрируя его, находим

$$s = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\,dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Bigg|_0^t = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{41}$$

Пользуясь этой формулой для ответа на первый вопрос задачи, необходимо помнить, что единицы измерения всюду должны быть одни и те же, так что если, например, величину t мы выражаем в секундах, то скорость v_0 должна быть выражена в *км/сек* или в *м/сек*, но не в *км/час* [1]).

Сообразно с этим положим в формуле (41) $t = 60$ сек., $v_0 = 10 \cdot \frac{1000}{60 \cdot 60}$ *м/сек*.

Величину $\frac{k}{m}$ следует заменить ее значением, вычисляемым по формуле (40):

$$\frac{k}{m} = \frac{1}{t_1} \ln \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{20} \ln \frac{10}{6} \approx 0{,}025.$$

Обратную же ей величину $\frac{m}{k}$ — выражением

$$\frac{m}{k} = \frac{t_1}{\ln \frac{v_0}{v_1}} = \frac{20}{\ln \frac{10}{6}} \approx 40.$$

Таким образом мы получаем окончательный результат

$$s \approx \frac{40 \cdot 10 \cdot 1000}{60 \cdot 60} \left(1 - e^{-0{,}025 \cdot 60}\right) \approx 87 \text{ м}.$$

Что касается ответа на второй вопрос задачи, то, чтобы по формуле (41) найти расстояние, пройденное лодкой до ее остановки, следует узнать предварительно, чему равно в этом случае t. Иными словами, нужно найти то значение t, при котором скорость v равна нулю.

Из формулы

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \tag{39}$$

мы видим, что, при $v = 0$, $t = \infty$.

Это значит, что теоретически лодка никогда не остановится; разумеется, практически остановка наступит очень скоро, и это обстоятельство находит свое формальное выражение в том, что уже для сравнительно небольших значений t формула (39) дает ничтожно-малые значения v. На первый взгляд может показаться, что теоретически лодка должна пройти после остановки бесконечно-большой путь.

Это, однако, неверно, ибо подстановка в формулу (41) значения $t = \infty$ дает для s значение

$$s = \frac{m v_0}{k}.$$

---

[1]) В предыдущей задаче мы для скорости могли выбрать любую единицу измерения, поскольку в формулу (40') входили только отношения скорости.

Таково будет теоретически вычисленное расстояние, которое лодка пройдет после остановки мотора. Подставляя числовые значения $\frac{m}{k}$ и v_0, найдем, что до своей полной остановки лодка пройдет около 111 *м*.

§ 30. *Задача 96.* Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ *см* со скоростью $v_0 = 200$ *м/сек*, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью $v_1 = 80$ *м/сек*. Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску.

Простой арифметический подсчет показывает, что искомый промежуток времени очень мал; он меньше, чем $\frac{h}{v_1} = \frac{1}{800}$ сек., и больше, чем $\frac{h}{v_0} = \frac{1}{2000}$ сек. В этих пределах, следовательно, должна во всяком случае заключаться продолжительность полета пули через доску. Для более точного подсчета мы должны принять во внимание закон сопротивления, чтобы из него вывести закон изменения скорости пули.

Закон сопротивления может быть представлен формулой

$$F = -kv^2,$$

где через v обозначена скорость пули, через F — сила сопротивления, а через k — некоторое положительное число (коэфициент пропорциональности).

В силу этого закона и формулы (36) § 28, мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2$$

(значения букв прежние).

Обозначая дробь $\frac{k}{m}$ буквой α, мы перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2. \tag{42}$$

Значение положительной величины α нам пока неизвестно.

Закон изменения скорости пули мы найдем, интегрируя уравнение (42). Разделение переменных и интеграция дают

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\alpha \int_0^t dt.$$

Через v_0 обозначена скорость пули в момент $t = 0$, т. е. в момент ее удара в доску ($v_0 = 200$ *м/сек*).

Получаем

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\alpha t; \tag{43}$$

откуда находим

$$v = \frac{v_0}{1 + \alpha v_0 t}. \tag{43'}$$

Будь нам известна величина α, мы уже из уравнения (43) или (43') могли бы найти время прохождения пули через доску; достаточно было бы положить скорость v равной скорости вылета пули $v = v_1 = 80$ *м/сек*. Единственная неизвестная величина t определилась бы из уравнения (43) или (43').

Но, не зная значения α, мы получим одно уравнение с двумя неизвестными. Чтобы найти их значения, нужно иметь еще одно уравнение с этими же неизвестными α и t.

Такое уравнение мы можем получить, интегрируя диференциальное уравнение

$$ds = v\,dt, \tag{44}$$

в котором s означает расстояние, пройденное пулей с момента вхождения в доску; величина v определена уравнением (43').

Таким образом диференциальное уравнение (44) принимает вид

$$ds = \frac{v_0\,dt}{1 + \alpha v_0 t}.$$

Интеграция его дает

$$s = \int_0^t \frac{v_0\,dt}{1 + \alpha v_0 t} = \frac{1}{\alpha} \ln (1 + \alpha v_0 t)\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} \ln (1 + \alpha v_0 t). \tag{45}$$

Это уравнение дает расстояние, проходимое пулей в доске в функции времени, протекшего с момента ее вхождения в доску.

Чтобы определить время, протекшее до выхода пули из доски, нужно положить $s = h$ $(h = 10$ *см*$)$.

Таким образом для определения величин α и t мы имеем следующие два уравнения:

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \alpha t v_0};$$

$$h = \frac{1}{\alpha} \ln (1 + \alpha t v_0).$$

Из первого находим

$$1 + \alpha t v_0 = \frac{v_0}{v_1}. \tag{46}$$

Тогда второе дает

$$\alpha = \frac{\ln (1 + \alpha t v_0)}{h} = \frac{\ln \dfrac{v_0}{v_1}}{h}.$$

Теперь подставляем найденное значение α в одно из предыдущих уравнений, лучше всего в (43), и находим

$$t = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) \approx 0{,}0007 \text{ сек.}$$

§ 31. Если тело движется в воздухе со скоростью, лежащей в определенных границах (примерно от 1 *м/сек* до 25 *м/сек*), то силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной квадрату скорости движения тела. Кроме того, величина сопротивления существенно зависит от величины и формы поверхности тела. При данной форме тела величину сопротивления можно считать пропорциональной площади его наибольшего сечения, перпендикулярного к направлению движения.

Таким образом мы можем написать формулу

$$F_1 = kSv^2,$$

где F_1 — сила сопротивления (в динах), S — площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к направлению движения (в $см^2$), v — скорость тела (в *см/сек*). Величина k зависит от ряда обстоятельств (плотность воздуха, температура его и т. д.), из которых наиболее существенным является форма тела.

Если, например, та часть поверхности тела, которая обращена в сторону движения, имеет форму вогнутого полушария, то при указанном выборе единиц измерения можно положить $k = 0{,}00081$.

Если же эта поверхность имеет форму выпуклого полушария, то $k = 0{,}00020$, т. е. почти вчетверо меньше [1]).

Приняв во внимание вышеуказанное, мы сможем решить следующую задачу.

Задача 97. Воздухоплаватель спускается на парашюте, имеющем форму полушария радиуса $R = 4$ *м*. Вес его вместе с весом парашюта равен 82 *кг*. Какова будет скорость v спуска через 2 сек. после его начала (предполагается, что парашют раскрылся в момент начала спуска)?

Напишем основное уравнение движения, выведенное в § 28:

$$m\frac{dv}{dt} = F. \tag{36}$$

Величина m согласно условию равна

$$m = 82\,000.$$

Чтобы найти выражение скорости спуска v через протекшее от начала спуска время t, т. е. чтобы проинтегрировать уравнение (36), нам нужно составить выражение для величины F, т. е. для силы, действующей на тело. Мы будем считать положительным направление спуска. Величина F является равнодействующей двух противоположно направленных сил. Абсолютная величина одной из них — силы тяжести —

[1]) Эти значения k соответствуют давлению 760 *мм* и температуре 15° С.

равна $mg = 82\,000 \cdot 980$ (дин) [1]); абсолютная величина другой — силы сопротивления воздуха — выражается формулой:

$$F_1 = kSv^2.$$

Если мы условимся направление книзу считать положительным, то силу тяжести мы должны будем считать положительной, а силу сопротивления воздуха — отрицательной, так что равнодействующая их F выразится формулой

$$F = mg - F_1 = mg - kSv^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (36), получаем

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kSv^2,$$

или, разделив обе части этого уравнения на m и обозначив через α величину $\frac{ks}{m}$, имеем:

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v^2. \tag{47}$$

Коэфициенты g и α в этом уравнении — известные числа, именно [2]):

$$\alpha = \frac{ks}{m} = \frac{0{,}00081 \cdot \pi \cdot 400^2}{82\,000} \approx 0{,}0050;$$

$$g \approx 980.$$

Решим сначала задачу в общем виде и прежде всего найдем функциональную зависимость между величинами v и t.

Разделяя в уравнении (47) переменные, получаем

$$\frac{dv}{g - \alpha v^2} = dt.$$

Так как в начале спуска ($t = 0$) скорость падения равна нулю ($v = 0$), то, интегрируя уравнение (47), получаем:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \alpha v^2} = t. \tag{48}$$

Чтобы вычислить интеграл, стоящий в левой части уравнения (48), разложим знаменатель подъинтегрального выражения на множители

$$g - \alpha v^2 = (\sqrt{g} + v\sqrt{\alpha})(\sqrt{g} - v\sqrt{\alpha})$$

---

[1]) Мы игнорируем изменение силы тяжести, имеющее место при изменении расстояния от центра земли, так как это изменение в условиях нашей задачи не может быть значительным.

[2]) Гоняться за точностью, большей чем 1%, вычисляемых величин было бы бесполезно, так как величина k задана с точностью до пятого десятичного знака, т. е. с относительной точностью около 1%. Относительная точность результата поэтому во всяком случае не превосходит 1% (см. § 12 гл. V).

и представим подъинтегральную функцию в виде суммы дробей с знаменателями $\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}$ (см. примеры 3 и 4 § 15 этой главы). Мы получим

$$\frac{1}{g-\alpha v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\,\frac{1}{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\,\frac{1}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}.$$

Вычисляя неопределенный интеграл

$$\int\frac{dv}{g-\alpha v^2},$$

мы находим [1]):

$$\int\frac{dv}{g-\alpha v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\int\frac{dv}{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\int\frac{dv}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\left(\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\left(\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}.$$

Соответствующий определенный интеграл оказывается равным

$$\int_0^v\frac{dv}{g-\alpha v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}\Bigg|_0^v\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}$$ [2]).

Вставляя в уравнение (48) этот результат, мы получаем искомую функциональную зависимость между v и t:

$$t=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}. \tag{49}$$

Так как в нашей задаче аргументом является величина t, то полученное уравнение мы должны решить относительно v. Мы получаем последовательно:

$$\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}=2\sqrt{g\alpha}\,t,$$

$$\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}=e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}. \tag{50}$$

---

[1]) Мы опускаем произвольное постоянное слагаемое c.

[2]) Ибо подстановка $v=0$ дает: $\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}=0$.

Теперь v находится из уравнения первой степени (50)

$$v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t} - 1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t} + 1}. \tag{51}$$

Вставляя в найденную формулу значения $g = 980$ и $\alpha = 0{,}0050$, мы получаем:

$$\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \approx 443; \qquad \sqrt{g\alpha} \approx 2{,}21;$$

$$v = 443\,\frac{e^{4{,}42t} - 1}{e^{4{,}42t} + 1}.$$

Через 2 сек. после начала спуска скорость будет равна

$$443\,\frac{e^{8{,}84} - 1}{e^{8{,}84} + 1}.$$

Величина $e^{8{,}84}$ не может быть вычислена с большой точностью, так как она изменится значительно при небольшом изменении показателя степени. Так, если вместо 8,84 мы возьмем 8,80 (а такое отклонение величины 8,84 от ее истинного значения вполне возможно), то десятичный логарифм величины $e^{8{,}84}$,

$$\log e^{8{,}84} = 8{,}84 \cdot M = 3{,}83916,$$

уменьшится на $0{,}04\,M \approx 0{,}01737$, так что вместо величины

$$e^{8{,}84} \approx 6905$$

мы получим

$$e^{8{,}80} \approx 6604.$$

Таким образом погрешность при вычислении $e^{8{,}84}$ может составить около 5% ее величины.

Но большая точность нам и не нужна. В самом деле, представив величину

$$\frac{e^{8{,}84} - 1}{e^{8{,}84} + 1}$$

в виде

$$1 - \frac{2}{e^{8{,}84} + 1} \approx 1 - \frac{2}{7000},$$

мы видим, что пятипроцентная ошибка при определении $e^{8{,}84}$ дает примерно такую же относительную ошибку в уменьшаемом $\frac{2}{7000} \approx 0{,}0003$,

так что величину $\frac{e^{8,84}-1}{e^{8,84}+1}$ можно положить равной 0,9997 без всякой ошибки в последнем знаке.

Эта точность превосходит ту, которая нам нужна.

Принимая во внимание, что в выражении

$$v=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}=443\,\frac{e^{8,84}-1}{e^{8,84}+1} \tag{51}$$

$\sqrt{\frac{g}{\alpha}}=443$ верно с точностью около 1%, мы можем считать множитель 0,9997 равным единице и таким образом окончательно получаем, что скорость v спуска через 2 сек. после его начала приблизительно равна

$$v=4{,}43\ м/сек.$$

Только что использованная нами для вычисления v формула (51) дает нам возможность установить чрезвычайно интересный и практически важный результат. Именно, она показывает, что скорость спуска имеет предельную величину.

В самом деле, дробь

$$\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}=1-\frac{2}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}$$

ни при каком значении не может быть больше единицы, и потому скорость v не может превзойти величину $\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ (в нашем случае 4,43 *м/сек*). Теоретически равенство

$$v=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$$

может иметь место лишь при $t=\infty$, т. е. теоретически эта предельная скорость никогда не достигается.

Но, не говоря уже о том, что формула (51) не является точной формулой (она выведена из приближенного закона сопротивления воздуха), практически и она дает для v величину, равную предельной, для сравнительно небольших значений t. В нашей задаче предельная скорость оказывается достигнутой еще до истечения 2 сек. с момента начала спуска. В общем же случае время, потребное для достижения предельной скорости, зависит от значения α.

Именно для того, чтобы скорость спуска практически равнялась предельной скорости $\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, нужно, чтобы величина $\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}$ практически равнялась единице. Мы видели, что это равенство практически достигается, когда показатель $2\sqrt{g\alpha}\,t=8{,}84$.

Отсюда видно, что через время

$$t=\frac{4{,}42}{\sqrt{g\alpha}} \tag{52}$$

(и даже еще раньше) предельная скорость v_∞,

$$v_\infty=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}, \tag{53}$$

практически будет достигнута.

Сравнение (52) и (53) показывает, что отношение величин t и v_∞ есть величина постоянная, т. е. что величина предельной скорости прямо пропорциональна времени, потребному для ее практического достижения.

§ 32. *Задача 98.* Сохраняя условия предыдущей задачи, найти, насколько опустится парашют за 2 сек., протекшие с начала полета.

Решим сперва эту задачу в общем виде. Обозначая через s расстояние, пройденное парашютом за промежуток времени t, найдем прежде всего функциональную зависимость между s и t.

При этом мы будем исходить из полученного в предыдущей задаче уравнения

$$v=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}, \tag{51}$$

дающего скорость падающего тела в функции времени.

Так как скорость v есть не что иное, как диференциальное отношение $\frac{ds}{dt}$, то мы можем переписать уравнение (51) в виде

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}. \tag{54}$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание, что при $t=0$ (т. е. в начале спуска) $s=0$, мы получаем

$$s=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\int_0^t\frac{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1}\,dt. \tag{55}$$

Остается вычислить интеграл, стоящий в правой части равенства. Его можно найти, выбрав в качестве вспомогательной функции $e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}$ или $e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}-1$ или $e^{2\sqrt{g\alpha}\,t}+1$. Несмотря на естественность такого выбора, он сопряжен с довольно долгими выкладками. Между тем простое, хотя и несколько искусственное, преобразование подъинтегральной функции дает результат гораздо быстрее. Помножив числитель и знаме-

натель подъинтегральной функции на выражение $e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}$, мы приведем интеграл наш к виду

$$\int_0^t \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}\,dt.$$

Неопределенный интеграл легко вычисляется с помощью вспомогательной функции $e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}$:

$$\int \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{g\alpha}} \int \frac{d\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)}{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g\alpha}} \ln\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right).$$

Следовательно

$$\int_0^t \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{g\alpha}} \ln\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g\alpha}} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{2}.$$

Вычислив таким образом интеграл, стоящий в правой части равенства (55), мы можем переписать это равенство так:

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}}{2}. \tag{56}$$

Это и есть общее выражение пути, пройденного падающим в воздухе телом.

Чтобы ответить на вопрос, поставленный в нашей задаче, мы должны в полученное уравнение подставить (см. предыдущую задачу)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}0050} \approx 200; \qquad \sqrt{g\alpha} = 2{,}21; \qquad t = 2.$$

Мы получим

$$s = 200 \ln \frac{e^{4{,}42} + e^{-4{,}42}}{2}.$$

Вычисление дает:

$$e^{4{,}42} \approx 83,$$

$$e^{-4{,}42} \approx \frac{1}{83} \approx 0{,}01.$$

Так как число 4,42 представляет величину $\sqrt{g\alpha}\,t$ с точностью, во всяком случае не превосходящей 0,01, то в числе 83 не вполне

надежна даже цифра единиц, и потому принимать в расчет величину $e^{-4,42} \approx \frac{1}{83}$ было бы пустой математической игрой.

Поэтому расстояние, пройденное парашютом за 2 сек., можно вычислять по формуле

$$s = 200 \ln \frac{e^{4,42}}{2}.$$

Вместо того чтобы вычислять $e^{4,42}$, делить пополам и логарифмировать, проще и точнее будет переписать эту формулу так:

$$s = 200(\ln e^{4,42} - \ln 2) = 200\,(4,42 - \ln 2),$$

откуда находим ($\ln 2 \approx 0,69$):

$$s \approx 746 \text{ см} = 7,46 \text{ м}.$$

Общая формула

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t}}{2} \tag{56}$$

дает нам интересный и важный результат. Именно, при сравнительно незначительных значениях величины t слагаемое $e^{-\sqrt{g\alpha}\, t} = \frac{1}{e^{\sqrt{g\alpha}\, t}}$ становится ничтожно-малой величиной в сравнении с слагаемым $e^{\sqrt{g\alpha}\, t}$. Поэтому для всех значений t, бо́льших некоторой величины (какой именно — это зависит от значения величины α), формулу (56) можно без практической ошибки заменить формулой

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\, t}}{2},$$

а эту последнюю переписать в виде:

$$s = \frac{1}{\alpha} [\sqrt{g\alpha}\, t - \ln 2] = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\, t - \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Физический смысл этого уравнения таков: после некоторого промежутка времени движение становится практически равномерным и протекает так, как если бы тело пришло в движение из точки, расположенной на $\frac{\ln 2}{\alpha}$ *см* ниже места фактического начала спуска. Скорость этого равномерного движения равна $\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$; она была найдена нами в предыдущей задаче как предельная величина скорости спуска.

§ 33. Решая задачи, относившиеся к движению тел, мы неоднократно должны были иметь дело с отношением $\frac{dv}{dt}$ (ускорение). Это отношение

представляет производную скорости v, рассматриваемой как функция времени t.

Но величина v может быть рассматриваема в свою очередь как производная $\frac{ds}{dt}$ (s — путь, пройденный телом). Таким образом ускорение является производной функцией от производной функции, так что величину $\frac{dv}{dt}$ можно представить выражением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}.$$

Чтобы избежать нагромождения слов, вместо выражения „производная функция от производной функции" употребляют термин: „вторая производная функция" или — короче — „вторая производная".

Точно так же в целях краткости записи вместо выражения $\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}$ пишут s'' по аналогии с обозначением s' для производной $\frac{ds}{dt}$. Эту последнюю, чтобы подчеркнуть ее отличие от второй производной, называют часто первой производной.

Таким образом второй производной функции s от независимой переменной t называется производная от первой производной этой функции.

Совершенно так же можно итти и дальше, отыскивая производную второй производной; ее естественно назвать третьей производной. Далее производную третьей производной называют четвертой производной и т. д. Эти „высшие" производные (или, как говорят, производные высших порядков) находят себе применение в ряде задач исчисления бесконечно-малых. Для их обозначения можно употреблять по аналогии с обозначением производных первого и второго порядка символы s''' (для третьей производной функции s), s'''' (для четвертой производной). Впрочем, для производных более высоких порядков и эти обозначения становятся громоздкими; поэтому вместо s'''' пишут s^{IV}, для пятой производной — s^{V} и т. д. Римские цифры подчеркивают отличие этих символов от символов четвертой, пятой и т. д. степени.

Пример 1. Найти вторую производную функции x.

Первая производная равна

$$(x^3)' = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

Вторая производная $(x^3)''$ согласно определению есть производная функции $3x^2$:

$$(x^3)'' = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x.$$

Пример 2. Найти для $x=2$ значение второй производной функции $\frac{1}{2}x^4$.

$$\left(\frac{1}{2}x^4\right)' = 2x^3,$$

$$\left(\frac{1}{2}x^4\right)'' = (2x^3)' + 6x^2.$$

При $x=2$ эта вторая производная равна

$$\left(\frac{1}{2}x^4\right)''_{x=2} = 24.$$

Пример 3. Найти вторую производную функции $s=\frac{1}{2}gt^2$.

$$s' = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = gt,$$

$$s'' = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)'' = (gt)' = g.$$

Если в формуле $s=\frac{1}{2}gt^2$ положить $g=9{,}8$, то она представит закон свободного падения тела в пустоте (t — время в секундах, s — путь в метрах). Вторая производная дает величину ускорения, которое, как мы видели, является постоянной величиной 9,8 *м/сек²*.

Пример 4. Найти четвертую производную функции $y=x^3\ln x$.

$$y' = \frac{d}{dx}(x^3\ln x) = 3x^2\ln x + x^2;$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(3x^2\ln x + x^2) = 6x\ln x + 5x;$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(6x\ln x + 5x) = 6\ln x + 11;$$

$$y^{IV} = \frac{d}{dx}(6\ln x + 11) = \frac{6}{x}.$$

Упражнения.

1) $y=x^3-12x^2-3x+7$; $y''=6x-24$.

2) $[e^x(x-1)]''=e^x(x+1)$.

3) $(x^5)'''=60x^2$.

4) $(x^3)^{IV}=0$.

5) $y=\frac{x}{1-x}$; $(y'')_{x=\frac{1}{2}}=16$.

6) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$; $y''=\frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

7) $(x^3)''_{x=1,8}=10{,}8$.

8) $(ax^2+bx+c)'''=0$.

9) $\left(e^{\frac{x}{a}}=e^{-\frac{x}{a}}\right)''=\frac{1}{a^2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

§ 34. Первая производная функции y (от аргумента x) была определена нами как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$ или — более строго — как предел отношения приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (§ 18 гл. IV).

Что касается второй производной, то ее можно было бы определить, согласно сказанному в предыдущем параграфе, как отношение дифференциалов $\frac{dy'}{dx}$ (y' — производная функция) или — более строго — как предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y'}{dx}$ (когда Δx неограниченно уменьшается).

Однако это выражение второй производной имеет то неудобство, что в него входит первая производная y'; желательно было бы представить его в таком виде, чтобы кроме величин x и y никакие другие в него не входили.

С этой целью мы напишем вместо y' его выражение $\frac{dy}{dx}$, и тогда для второй производной y'' получаем выражение

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Его, в свою очередь, можно преобразовать, рассматривая числитель как дифференциал дроби $\frac{dy}{dx}$, и мы получаем

$$y'' = \frac{dx\,d(dy) - dy\,d(dx)}{(dx)^3}. \tag{57}$$

В этом выражении мы впервые встречаемся с дифференцированием дифференциалов. На первый взгляд может показаться незаконным дифференцирование бесконечно-малой величины. Ведь дифференциал $d(dx)$ величины dx должен быть бесконечно-малой величиной по отношению к дифференциалу dx. А до сих пор мы такие величины отбрасывали, пренебрегая ими. Так, вычисляя дифференциал функции x^2, мы получили выражение $2x\,dx + (dx)^2$, в котором мы откинули член $(dx)^2$ ввиду того, что он бесконечно-мал в сравнении с dx (см. § 8 гл. IV).

Но теперь мы находимся в ином положении. В числителе выражения (57) нет членов, по отношению к которым мы могли бы пренебречь бесконечно-малыми величинами $dx\,d(dy)$ и $dy\,d(dx)$. Можем ли мы их просто отбросить и считать числитель нулем? Если бы мы это сделали, то должны были бы и знаменатель $(dx)^3$ (который тоже является ничтожной величиной не только абсолютно, но и по отношению к dx) также считать нулем. Но тогда для второй производ-

ной y'' мы получим неопределенное выражение $\frac{0}{0}$. Таким образом, хотя мы не можем запретить игнорирование бесконечно-малых величин, стоящих в числителе, но вместе с тем и не можем рекомендовать это игнорирование, ибо оно хотя и не дает неверных результатов, но оставляет нас в неведении об истинном результате.

Оно и понятно. Ведь мы хотим найти отношение двух величин; каждая из них ничтожно-мала, и потому искомое отношение может быть любым числом, вообще говоря, отнюдь не бесконечно-малым. Так, вес одной молекулы ничтожно мал по сравнению с весом тела, но может быть вдвое, втрое, во сто раз больше веса молекулы другого вещества. Если мы будем просто игнорировать эти величины, ограничиваясь констатированием их ничтожности, мы не найдем величины их отношения.

Поясним сказанное на грубом числовом примере. Пусть, например, $dx = 0{,}001$, а $dy = 0{,}002$. Если мы согласимся игнорировать величины порядка 10^{-3} в сравнении с единицей, то dx и dy можно считать „бесконечно-малыми" величинами. Величины $d(dx)$ и $d(dy)$ должны быть бесконечно-малыми по отношению к dx и dy, т. е. в нашем предположении должны исчисляться в тысячных их долях. Это будут величины порядка $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$, или, как говорят, бесконечно-малые величины второго порядка (если величины порядка 10^{-3} будем считать бесконечно-малыми первого порядка).

Положим например $d(dx) = 0{,}000001$; $d(dy) = 0{,}000007$. Каков будет порядок малости числителя выражения (57)? Член $d(dx)\,dy$ представляет произведение величин порядка $(10^{-3})^2$ и 10^{-3}, т. е. является величиной порядка $(10^{-3})^3 = 10^{-9}$. Таким образом он представляет бесконечно-малую величину третьего порядка (и исчисляется в миллиардных долях единицы). В нашем примере имеем:

$$dx\,d(dy) = 0{,}000000007.$$

Тот же порядок малости имеет и второй член числителя

$$dy\,d(dx) = 0{,}000000002,$$

так что числитель есть бесконечно-малая величина третьего порядка

$$dx\,d(dy) - dy\,d(dx) = 0{,}000000005.$$

Но и знаменатель дроби есть бесконечно-малая величина третьего порядка

$$(dx)^3 = (0{,}001)^3 = 0{,}000000001,$$

так что вся дробь (58) имеет значение

$$\frac{dx\,d(dy) - dy\,d(dx)}{(dx)^3} = 5.$$

§ 35. В нашем числовом примере мы дали величинам dx, dy, $d(dx)$, $d(dy)$ значения по произволу, сообразуясь только с порядком их ма-

лости. Разумеется, когда речь идет о вычислении второй производной y'' заданной функции, то давать всем четырем величинам произвольные значения мы уже не можем. Мы можем например задать по произволу (сообразуясь, конечно, с порядком малости) значения dx и $d(dx)$, значения же dy и $d(dy)$ вычисляются на основании заданного уравнения, связывающего y и x.

Возьмем например функцию $y = x^3$ и поставим себе задачей вычислить приближенное значение второй ее производной при $x = 1$. Приближенным это вычисление будет постольку, поскольку мы будем брать в качестве диференциалов не бесконечно-малые, а просто малые величины. Во избежание громоздкости расчетов мы возьмем даже не очень малые величины. Конечно и результат получится грубоватый.

Возьмем, например, за величину dx величину порядка 10^{-2}; в качестве $d(dx)$ придется взять величину порядка $(10^{-2})^2 = 10^{-4}$. Положим например

$$dx = 0{,}01, \quad d(dx) = 0{,}0001.$$

Соответственно с этим придется взять, кроме $x = 1$, еще два соседних значения x. Первое будет отличаться от $x = 1$ на $dx = 0{,}01$, т. е. будет равно $x = 1{,}01$.

Второе будет превосходить значение $x = 1{,}01$ уже не на 0,01, а на 0,0101 (так как диференциал $dx = 0{,}01$ получил приращение $d(dx) = 0{,}0001$. Таким образом второе соседнее значение величины x будет

$$x = 1{,}01 + 0{,}0101 = 1{,}0201.$$

Мы получаем такую таблицу:

Таблица 1.

x	dx	$d(dx)$
1		
1,01	0,01	0,0001
1,0201	0,0101	

В ней числа второго столбца представляют разности чисел первого столбца; число же в третьем столбце — разность чисел второго столбца (т. е. разность разностей).

Такую же таблицу мы должны составить для величины y, но теперь уже нельзя брать числа по произволу.

Именно в первом столбце таблицы

Таблица 2.

y	dy	$d(dy)$
1		
1,030301	0,030301	0,000918
1,061520	0,031219	

мы должны выписать кубы чисел 1; 1,01; 1,0201 (ибо нам задано уравнение $y = x^3$). Во втором столбце мы пишем разности последова-

тельных значений величины y; наконец в третьем столбце — разность этих разностей. Теперь мы должны в формулу

$$y'' = \frac{dx\, d(dy) - dy\, d(dx)}{(dx)^3}$$

подставить найденные значения дифференциалов.

При этом для величин $d(dx) = 0{,}0001$ и $d(dy) = 0{,}000918$ мы имеем вполне определенные значения. Что же касается величин dx и dy, то для каждой из них можно взять любое из двух ее табличных значений [1]). Взяв например

$$dx = 0{,}01,$$

$$dy = 0{,}030301,$$

мы получаем

$$y''_{x=1} = \frac{dx\, d(dy) - dy\, d(dx)}{(dx)^3} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}01 \cdot 0{,}000918 - 0{,}030301 \cdot 0{,}0001}{(0{,}01)^3} \approx 6{,}15.$$

Если бы вместо значения $dy = 0{,}030301$ мы взяли другое табличное значение $dy = 0{,}031219$ (оставив прежнее значение $dx = 0{,}01$), то получили бы

$$y''_{x=1} \approx 6{,}06.$$

Точное значение $y''_{x=1}$ есть

$$(x^3)''_{x=1} = (6x)_{x=1} = 6.$$

§ 36. Вычисления, проделанные в предыдущем параграфе, понадобились нам, конечно, не затем, чтобы найти сокращенный путь к получению второй производной. Она находится гораздо короче формальным путем вычисления производной от производной. Нам важно было уяснить арифметический смысл получаемого при этом результата. Оказалось, что вторая производная выражается через дифференциалы переменных величин и дифференциалы их дифференциалов. Эти последние величины $d(dx)$ и $d(dy)$ должны рассматриваться как бесконечно-малые величины второго порядка, т. е. они бесконечно-малы по отношению к величинам dx и dy. Для краткости их называют вторыми дифференциа-

---

[1]) Разница в значениях числителя, которая при этом может получиться, „бесконечно-мала" по отношению к величине числителя, так как при относительной ошибке в 1% в величине dx относительная ошибка произведения $dx\, d(dy)$ будет также в 1% (§ 10 гл. V). Мала будет и относительная ошибка во втором члене (около 3%), так что и в общей величине числителя ошибка будет мала не только абсолютно, но и относительно. Так как мы ищем приближенную величину второй производной, то получающаяся разница не имеет существенного значения.

лами и пишут d^2x вместо $d(dx)$ и d^2y вместо $d(dy)$. Следует строго различать символы d^2x и $(dx)^2$. Оба они изображают бесконечно-малые второго порядка, но отнюдь не должны быть равными между собой.

Пользуясь этими новыми обозначениями, мы можем написать для второй производной следующее выражение:

$$y'' = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx)^3}. \qquad (57')$$

По поводу выкладок предыдущего параграфа мы должны заметить еще следующее: они дали нам не точное, а лишь приближенное значение второй производной, и это потому, что за dx мы взяли не бесконечно-малую, а конечную (и притом даже не очень малую) величину 0,01, а за d^2x величину 0,0001, которая, конечно, не является бесконечно-малой по сравнению с 0,01. Чем меньше будет взята величина dx и, что особенно существенно, чем меньше по отношению к ней будет величина d^2x (величины dy и d^2y уже не будут произвольными, но малость их обеспечивается выбором dx и d^2x), тем с большей точностью мы получим значение второй производной.

Этому положению можно придать такую более строгую форму.

Обозначим через Δx разность двух значений величины x (мы пишем Δx, а не dx, чтобы подчеркнуть, что это величина конечная); через $\Delta^2 x$ обозначим разность двух таких разностей. Аналогичное значение припишем символам Δy и $\Delta^2 y$. Тогда мы можем сказать, что вторая производная есть предел, к которому стремится выражение

$$\frac{\Delta x\, \Delta^2 y - \Delta y\, \Delta^2 x}{(\Delta x)^3}$$

при следующих условиях: 1) Δx неограниченно приближается к нулю, 2) величина $\Delta^2 x$ неограниченно уменьшается по отношению к Δx, т. е. отношение $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x}$ имеет пределом нуль. Записать это можно так:

$$y'' = \lim_{\left\{\substack{\Delta x \to 0 \\ \frac{\Delta^2 x}{\Delta x} \to 0}\right\}} \frac{\Delta x\, \Delta^2 y - \Delta y\, \Delta^2 x}{(\Delta x)^3}.$$

§ 37. Мы говорили уже, что значения dx и d^2x могут быть взяты по произволу. В частности можно всегда положить величину d^2x равной нулю. Другими словами, можно предположить, что величина dx сохраняет постоянное значение, т. е. что величина x нарастает равными бесконечно-малыми порциями.

В этом предположении формула (57) значительно упрощается и принимает вид

$$y'' = \frac{d^2y}{(dx)^2}. \qquad (58)$$

Таким образом, считая dx постоянной величиной, мы можем рассматривать вторую производную как отношение второго дифференциала к квадрату дифференциала аргумента.

Ее строение становится аналогичным строению первой производной, которая есть отношение первого дифференциала (т. е. просто дифференциала) функции к первой степени дифференциала аргумента.

В следующей таблице приведены результаты промежуточных выкладок, необходимых для приближенного вычисления второй производной функции x^3. Величине dx дано постоянное значение $dx = 0{,}01$.

Таблица 3.

x	$y = x^3$	dy	d^2y
1	1		
		0,030301	
1,01	1,030301		0,000606
		0,030907	
1,02	1,061208		

Формула (58) дает

$$(y'')_{x=1} = \frac{0{,}000606}{0{,}0001} = 6{,}06.$$

Грубость результата обусловливается тем, что величина dx была взята недостаточно малой. Чем меньше ее значение, тем точнее будет результат.

Формулируя последнее положение в терминах теории пределов, мы скажем прежде всего, что вторая производная есть предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, когда Δx неограниченно уменьшается. Но этого недостаточно. Необходимо еще, чтобы величина Δx оставалась постоянной. На первый взгляд это требование противоречит первому, согласно которому Δx должна рассматриваться как переменная величина. Но противоречия здесь нет; здесь мы имеем лишь яркий пример, иллюстрирующий относительность понятий переменности и постоянства: величина Δx постоянна в пределах одной таблицы, подобной табл. 3 (она взята там равной 0,01), но она меняется от одной таблицы к другой, стремясь при этом изменении к нулю (так что следующую таблицу мы составим, например, давая Δx постоянное значение 0,001, затем — постоянное значение 0,0001 и т. д.).

Чтобы оттенить относительный характер постоянства Δx, мы скажем, что она остается постоянной по отношению к величине x (так как например в табл. 3 она одинакова для $x = 1$ и для $x = 1{,}01$).

В окончательной формулировке наше предложение выскажется так: вторая производная есть предел, к которому стре-

мится отношение $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, когда Δx, оставаясь постоянной по отношению к x, стремится к нулю.

Это записывается так:

$$y'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}.$$

Пример. Вычислим вторую производную функции $y = x^3$. Величину Δx возьмем сначала произвольной конечной величиной. Если через x обозначим одно из значений аргумента, то при разности Δx следующее значение будет $x + \Delta x$. Ввиду постоянства величины Δx третье значение должно разниться от второго на ту же величину, т. е. должно равняться:

$$x + \Delta x + \Delta x = x + 2\Delta x.$$

Разность $\Delta y = \Delta(x^3)$ будет иметь следующие значения:

1) $(x + \Delta x)^3 - x^3$,
2) $(x + 2\Delta x)^3 - (x + \Delta x)^3$,

и следовательно вторая разность $\Delta^2 y = \Delta^2(x^3)$ равна

$$\Delta^2 y = (x + 2\Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^3 + x^3.$$

После алгебраических упрощений получаем

$$\Delta^2 y = 6x(\Delta x)^2 + 6(\Delta x)^3.$$

Отсюда $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = 6x + 6\Delta x$.

Когда Δx стремится к нулю, второе слагаемое правой части безгранично уменьшается, и следовательно пределом выражения $6x + 6\Delta x$ служит величина $6x$.

Мы получаем

$$y'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = 6x.$$

§ 38. Мы видели, что проще всего вторая производная выражается через дифференциалы переменных в том случае, когда независимая переменная x нарастает равными порциями. Именно тогда она представляется отношением

$$\frac{d^2 y}{(dx)^2}.$$

Это отношение часто употребляют как символ для обозначения второй производной. Таким образом запись

$$\frac{d^2 y}{(dx)^2} = 6x \quad \text{или} \quad \frac{d^2(x^3)}{(dx)^2} = 6x$$

выражает то же, что запись

$$y'' = 6x \text{ или } (x^3)'' = 6x.$$

Такая запись не приведет ни к каким недоразумениям, если мы будем помнить, что рассмотрение величин d^2y и $(dx)^2$ по отдельности в качестве числителя и знаменателя дроби законно лишь постольку, поскольку можно считать выполненным добавочное условие $d^2x = 0$. В противном случае на выражение $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ можно смотреть только как на символ второй производной, ибо частное $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ не даст значения этой величины.

Для краткости вместо $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ пишут обыкновенно просто $\frac{d^2y}{dx^2}$ (без скобок в знаменателе). Излишне распространяться о том, что dx^2 при этом не может рассматриваться как дифференциал функции x^2. Если выражение функции y имеет более сложный вид, то пользуются символом $\frac{d^2}{dx^2}$, который ставится перед выражением функции.

Так, вместо

$$\frac{d^2(x^3 - 12x^2 - 3x + 7)}{dx^2} = 6x - 24$$

пишут

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 - 12x^2 - 3x + 7) = 6x - 24.$$

Символический характер записи здесь выступает очень ярко.

Совершенно аналогично строятся обозначения производных третьего, четвертого и т. д. порядков. Например вместо y''' пишут $\frac{d^3y}{dx^3}$; для обозначения четвертой производной переменной s при аргументе t пишут $\frac{d^4s}{dt^4}$ и т. д. Вместо равенства

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'' = -\frac{24}{x^5}$$

пишут

$$\frac{d^3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dx^3} = -\frac{24}{x^5} \text{ или } \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{24}{x^5}.$$

Обычно эти обозначения вводятся как простые символы [1]). Но на них можно смотреть совершенно так же, как на символы $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, т. е. как на частное от деления дифференциалов. Необходимо,

---

[1]) См. например Филипс Г., Дифференциальное исчисление, Гиз, 1926, § 24, стр. 32.

однако, помнить, что лишь в предположении постоянства величины dx эти частные дают величины соответствующих производных.

Вычислим, например, выражение третьей производной через дифференциалы. При этом символом d^3y мы будем обозначать величину $d(d^2y)$, т. е. дифференциал второго дифференциала. Эта величина является бесконечно-малой третьего порядка.

Вторая производная y'' в случае постоянства dx представляется дробью

$$y'' = \frac{d^2y}{(dx)^2}.$$

Ее производная y''' представляется отношением диференциалов

$$\frac{dy''}{dx} = \frac{d\dfrac{d^2y}{(dx)^2}}{dx},$$

и так как dx рассматривается как постоянная величина, то получаем

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(d^2y)}{(dx)^3} = \frac{d^3y}{(dx)^3}\ ^{1}).$$

§ 39. *Задача 99.* Найти приближенное значение второй производной функции $y = \dfrac{1}{x}$ для значения $x = 2$.

Ввиду медленности убывания роста функции $\dfrac{1}{x}$ вблизи значения $x = 2$, мы можем ограничиться очень грубым выбором „диференциала" величины x, например положить $dx = 0{,}1$. Тогда мы должны взять три последовательных значения величины x, разнящихся друг от друга на 0,1, из которых одно равно 2. Лучше всего положить равным этому числу среднее по величине значение x, т. е. выбрать значения $x = 1{,}9$; $x = 2{,}0$ и $x = 2{,}1$. Мы получим следующую таблицу:

---

[1]) Если бы мы хотели получить выражение y''' через диференциалы для общего случая, то должны были бы исходить из общего выражения второй производной $y'' = \dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3}$ и вычислить $\dfrac{dy''}{dx}$, уже не считая dx постоянной величиной. Величину dy'' находим как диференциал дроби, и после алгебраических упрощений получаем:

$$y''' = \frac{d^3y(dx)^2 - 3d^2y\,dx\,d^2x + 3dy(d^2x)^2 - dy\,d^3x\,dx}{(dx)^5}.$$

Не входя в подробности, заметим, что формулы, дающие выражение высших производных через диференциалы, имеют большое значение в тех вопросах исчисления бесконечно-малых, где приходится от выражения функции через одну переменную переходить к выражению ее и ее производных через другую переменную. Обычно их вывод доставляет учащимся большие затруднения, это происходит благодаря тому, что рассматривать диференциалы как бесконечно-малые величины запрещается по соображениям формального характера.

Таблица 4.

x	$y=\frac{1}{x}$	dy	d^2y	$\frac{d^2y}{dx^2}$
1,9	0,526316			
		$-0,026316$		
2,0	0,500000		$+0,002506$	0,2506...
		$-0,023810$		
2,1	0,476190			

Точное значение $\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^2}=\frac{2}{x^3}$, при $x=2$, равно 0,2500, так что найденное приближенное значение разнится от него на 0,2% Если бы мы положили $dx=0,01$, то аналогичное вычисление даст приближенное значение

$$\frac{d^2y}{dx^2}\approx 0,250006,$$

отличающееся от истинного только на 0,002% величины последнего.

Задача 100. Зная значения a и b первой и второй производной переменной y, рассматриваемой как функция переменной x, найти значения первой и второй производной переменной x, рассматриваемой как функция величины y (при тех же значениях переменных).

Согласно условию имеем [1]):

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=a, \tag{59}$$

$$y''(x)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx)^3}=b. \tag{60}$$

Нужно вычислить значения величин

$$x'(y)=\frac{dx}{dy}, \tag{59'}$$

$$x''(y)=\frac{dy\,d^2x-dx\,d^2y}{(dy)^3}. \tag{60'}$$

Уравнения (59) и (60) дают возможность найти выражение дифференциалов dy и d^2y через дифференциалы dx и d^2x и через известные величины a и b. Эти выражения подставим в (59') и (60'); величины dx и d^2x должны при этом исключиться сами собой, так как они могут иметь произвольные значения (соответствующего порядка малости), вели-

[1]) Обозначения $y'(x)$ и $y''(x)$ подчеркивают, что аргументом служит величина x.

чины же $x'(y)$ и $x''(y)$ имеют вполне определенные значения (при данных значениях переменных). Действительно мы получаем:

$$x'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a},$$

$$x''(y)=\frac{dy\,d^2x-dx\,d^2y}{(dy)^3}=-\frac{b}{a^3}.$$

Эти же результаты более просто, но несколько искусственно получаются, если почленно разделить равенства (59′) и (59) и равенства (60′) и (60).

Обращаем внимание на то, что мы могли бы для одной из вторых производных, например для y'', написать более простое ее выражение $\frac{d^2y}{dx^2}$. Но тогда для другой производной выражение $\frac{d^2x}{dy^2}$ может употребляться только как символ, а не как дробь с числителем d^2x и знаменателем $(dy)^2$. Дело в том, что, написав вторую производную $y''(x)$ в виде $\frac{d^2y}{dx^2}$, мы предположили, что величина x растет равными порциями. Этим уже определился характер роста величины y, причем лишь случайно может оказаться, что y растет тоже равными порциями. Поэтому вторая производная $x''(y)$ уже не представится отношением $\frac{d^2x}{dy^2}$. Ее выражение через диференциалы будет теперь иметь вид [в (60′) подставляем $d^2x=0$]:

$$x''(y)=\frac{-dx\,d^2y}{(dy)^3}.$$

Подставляя в это уравнение значения dy и d^2y, определенные из уравнений

$$\frac{dy}{dx}=a,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=b,$$

мы найдем снова

$$x''(y)=-\frac{b}{a^3}.$$

Задача 101. В нижеследующей таблице дано расстояние s (в метрах), пройденное ползуном паровой машины за время t (в секундах) после пуска машины.

Таблица 5.

t сек.	3,02	3,03	3,04	3,05
s метров	0,4178	0,4620	0,5065	0,5513

Зная, что вес ползуна равен 82,5 *кг*, найти величину силы, действовавшей на ползун в момент $t = 3{,}03$ сек.

Величину силы, действующей на ползун, мы сможем вычислить, если нам будет известно ускорение его движения $\frac{d^2s}{dt^2}$, по формуле

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2} \text{ [см. формулу (36) § 28]},$$

причем, если за единицу массы принять 1 *г*, за единицу длины 1 *см*, а за единицу времени 1 сек., то мы получим величину силы в динах (1 дина $\approx \frac{1}{980}$ *г*).

Для определения $\frac{d^2s}{dt^2}$ составим следующую таблицу.

Таблица 6.

t	s	ds	d^2s	$\frac{d^2s}{dt^2}$
3,02	0,4178			
3,03	0,4620	0,0442		
3,04	0,5065	0,0445	0,0003	3
3,05	0,5513	0,0448	0,0003	3

Эта таблица показывает, что ускорение в момент $t = 3{,}03$ приблизительно равно 3 *м/сек²*. Так как таблица дает для $t = 3{,}04$ ту же приближенную величину ускорения, то точная величина ускорения может отличаться от 3 *м/сек²* только десятичными долями, т. е. в пределах 10—20%. Теперь мы находим величину силы F для $t = 3{,}03$:

$$F = (82\,500 \cdot 300) \text{ дин} = \frac{82\,500 \cdot 300}{980} \text{ г} \approx 25 \text{ кг}.$$

Вычислять силу с большей точностью не имеет смысла, так как величина 25 *кг* может отличаться от точной величины силы на несколько килограммов как в силу приближенности вычисления, так и в силу неточности самой таблицы.

§ 40. В задаче 95 мы нашли выражение пути, пройденного моторной лодкой за время t после остановки мотора

$$s = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \tag{61}$$

где m — масса лодки, v_0 — ее начальная скорость (т. е. скорость в момент остановки мотора, когда $t = 0$), k — постоянный коэфициент пропорцио-

нальности (положительный). При решении задачи мы исходили из предположения, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Теперь мы решим обратную задачу.

Задача 102. Зная, что зависимость между путем, пройденным движущимся телом, и временем, протекшим от начала движения, выражается формулой

$$s = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \tag{61}$$

найти закон изменения силы, действующей на тело.

Так как сила выражается через массу m и ускорение $\frac{d^2s}{dt^2}$ формулой

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{62}$$

то задача состоит в вычислении $\frac{d^2s}{dt^2}$. Сначала находим $\frac{ds}{dt}$, т. е. скорость движения тела

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{mv_0}{k} \cdot \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{63}$$

Диференцируя еще раз, получаем

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-kv_0}{m} e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Наконец с помощью (62) получаем:

$$F = -kv_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{64}$$

Такова зависимость между силой F и временем t, протекшим от начала движения. Мы видим, что величины v и F имеют все время противоположные знаки, т. е. сила направлена в сторону, противоположную направлению движения. Она таким образом оказывает сопротивление движению. Сравнение формул (63) и (64) показывает, что сопротивление это пропорционально величине скорости, именно

$$F = -kv.$$

Из этого закона сопротивления мы и исходили при решении задачи 95.

Задача 103. Найти закон изменения силы, действующей на движущееся тело, зная, что уравнение его движения имеет вид

$$s = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{1 + v_0 kt}{m}\right) \tag{65}$$

(m — масса тела, v_0 — начальная скорость, k — постоянная положительная величина).

Как и в предыдущей задаче, находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{1}{1 + \frac{v_0 k t}{m}} = \frac{m v_0}{m + v_0 k t}, \tag{66}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k m v^2}{(m + v_0 k t)^2},$$

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k m^2 v_0^2}{(m + v_0 k t)^2}. \tag{67}$$

Сравнение формул (66) и (67) показывает, что сила направлена в сторону, противоположную направлению движения, т. е. оказывает сопротивление движению, замедляя его, и что это сопротивление пропорционально квадрату скорости, именно

$$F = -kv^2.$$

Из этого закона сопротивления мы исходили при решении задачи 96. Полученная там формула (45) совпадает с нашей формулой (65).

Задача 104. Зная, что путь s, пройденный телом, падающим в воздухе, выражается через время t, протекшее от начала падения, формулой

$$s = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{\sqrt{g\alpha}\, t}}{2}, \tag{68}$$

найти закон изменения силы сопротивления воздуха (через α обозначена постоянная величина, значение которой зависит от массы и поверхности падающего тела).

Найдем сначала величину силы, действующей на падающее тело:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{e^{\sqrt{g\alpha}\, t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\, t}}{e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t}}, \tag{69}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t}) \frac{d}{dt}(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})}{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2} -$$

$$- \frac{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\, t}) \frac{d}{dt}(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})}{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot \sqrt{g\alpha} \frac{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2 - (e^{\sqrt{g\alpha}\, t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2}{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2} =$$

$$= g \frac{4}{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2};$$

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{4\, mg}{(e^{\sqrt{g\alpha}\, t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\, t})^2}.$$

Таково выражение силы, действующей на падающее тело. Эта сила является равнодействующей силы тяжести и силы сопротивления. Обозначая первую через F_1, а вторую через F_2 и зная, что сила тяжести равна

$$F_1 = mg,$$

где m — масса тела, а g — ускорение земного тяготения, мы можем силу сопротивления F_2 найти по формуле

$$F_2 = F - F_1 = \frac{4mg}{\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)} - mg.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и открывая в числителе скобки, получаем:

$$F_2 = mg\frac{-e^{2\sqrt{g\alpha}\,t} + 2 - e^{-2\sqrt{g\alpha}\,t}}{\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)^2} = -mg\frac{\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} - e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)^2}{\left(e^{\sqrt{g\alpha}\,t} + e^{-\sqrt{g\alpha}\,t}\right)^2}. \quad (70)$$

Сравнение этой формулы с формулой (69) показывает, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости движения тела. Именно

$$F_2 = -\alpha m v^2.$$

Глава VII.

Диференцирование и интегрирование тригонометрических функций. Пополнение сведений о технике интегрирования.

§ 1. В этой главе мы должны ознакомиться с рядом правил диференцирования и интегрирования. Эти правила дадут нам возможность диференцировать любое из тех выражений, которые изучались в элементарной математике. Что же касается интегрирования элементарных функций, то мы покажем, на какие затруднения оно наталкивается и на каких путях можно эти затруднения преодолеть.

§ 2. В предыдущих главах мы уже научились диференцировать все „элементарные" выражения, кроме тех, которые содержат тригонометрические функции. Нам предстоит теперь научиться диференцировать эти последние. Предварительно напомним некоторые сведения, которые нам понадобятся в дальнейшем и которые, вероятно, знакомы читателю из элементарной математики.

Известно, что длина s дуги окружности AB пропорциональна (при данном радиусе) величине α центрального угла AOB, опирающегося на эту дугу. Кроме того, эта длина пропорциональна радиусу окружности R, так что величина s может быть представлена формулой

$$s = kR\alpha, \tag{1}$$

где k — некоторая постоянная величина (коэфициент пропорциональности). Значение этой постоянной величины зависит от того, какими единицами измеряется угол α[1]), т. е. какой угол принят за единицу угловой меры.

Пусть, например, за единицу угловой меры принимается 1°, т. е. $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. В этом случае имеет место известная формула

$$s = \frac{\pi}{180} R\alpha, \tag{1a}$$

т. е. величина k равна

$$k = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533\ldots$$

Если за единицу угловой меры примем 1′, то формула (1) примет вид

$$s = \frac{\pi}{180 \cdot 60} R\alpha, \tag{1b}$$

---

[1]) От выбора единиц длины величина k не зависит, поскольку s и R выражаются в одинаковых единицах.

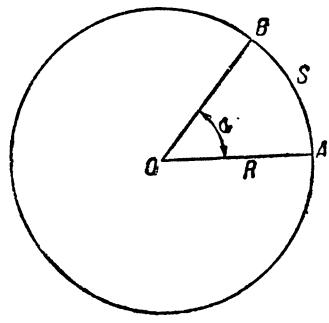
т. е.

$$k = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0002909\ldots$$

и т. д.

Так как выбор единицы угловой меры всецело зависит от нашего усмотрения, то совершенно естественно исходить при выборе этой единицы из стремления придать формуле (1) возможно более простой вид, т. е. сделать величину k равной единице. Из этого же стремления исходит физик при выборе единиц измерения физических величин. Так, например, зная, что сила пропорциональна ускорению, сообщаемому ею телу, и массе этого тела, т. е. что зависимость между величинами F (сила), m (масса) и j (ускорение) представляется формулой

$$F = kmj$$



Черт. 78.

(где k — коэфициент пропорциональности), физик выбирает единицу силы так, чтобы величина k оказалась равной единице. Для этого он должен за единицу силы принять ту силу, которая сообщает телу, имеющему массу $m = 1$ (грамм), ускорение $j = 1$ (1 *см/сек*^{2}). Это приводит к тому, что при выборе единицы силы (1 дина) физик должен отказаться от обычного измерения силы общепринятыми единицами веса (грамм, килограмм, фунт и т. д.) и создавать новую единицу измерения. Неудобство, вытекающее из необходимости постоянно переводить величину силы из одной системы мер в другую и обратно, искупается упрощением теоретических расчетов, происходящих от того, что формула

$$F = kmj,$$

подобно ряду других формул физики, упрощается, принимая вид

$$F = mj.$$

Из подобных же соображений исходит математик, когда выбирает теоретическую единицу измерения угла. Естественно, что и ему приходится отступить от принятых в практике способов измерения и примириться с необходимостью переводить величину угла из одной системы мер в другую.

Итак, теоретическую единицу угловой меры мы выберем так, чтобы формула (1) приняла вид

$$s = R\alpha \qquad (2)$$

(где α — величина угла, измеренная в теоретических единицах). Для этого мы должны принять за единицу угловой меры такой угол, центральная дуга которого s равна единице длины, когда радиус окружности R равен также единице длины.

Эта единица носит название радиана. Итак, радианом мы называем тот угол, который имеет центральную дугу $s = 1$ при радиусе $R = 1$, или, что то же, центральная дуга которого (при произвольном радиусе) имеет длину, равную радиусу.

Это определение позволяет выразить величину теоретической единицы (радиана) через практические (градусы, минуты, секунды), и обратно.

Именно, центральная дуга прямого угла равна

$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2},$$

и, следовательно, согласно формуле (2) радиальная мера прямого угла равна

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Градусная же мера его выражается числом 90.

Следовательно, угол в 1 радиан имеет $90 : \frac{\pi}{2}$ градусов:

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} \text{ градусов} \approx 57°17'45''.$$

Обратно, угол в 1° имеет $\frac{\pi}{2} : 90$ радианов:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ радианов} = 0{,}0174533\ldots$$

Наименование „радиан" обычно опускается, так что, например, последнее равенство пишется

$$1° = \frac{\pi}{180}.$$

Замечание 1. В дальнейшем всюду, где не будет специально оговорено, мы будем пользоваться радиальным измерением углов

Полезно помнить следующие соотношения:

$$90° = \frac{\pi}{2}, \qquad 45° = \frac{\pi}{4},$$

$$180° = \pi, \qquad 30° = \frac{\pi}{6},$$

$$270° = \frac{3}{2}\pi, \qquad 60° = \frac{\pi}{3},$$

$$360° = 2\pi,$$

Замечание 2. Если за единицу измерения длины мы примем радиус R окружности, то формула (2) принимает особенно простой вид

$$s = \alpha, \tag{3}$$

где s — длина дуги (измеренная в радиусах), а α — величина соответствующего центрального угла (в радианах).

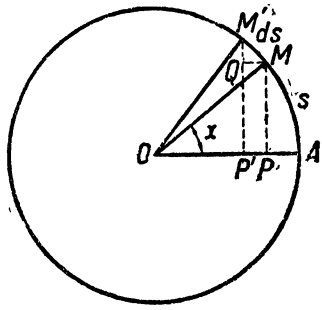
Эта формула несколько усложнилась бы, если бы мы выбрали другую единицу угловой меры; например, приняв за единицу измерения угла 1°, мы получили бы из формулы (1а), полагая в ней $R = 1$:

$$s = \frac{\pi}{180}\alpha \approx 0{,}01745\alpha. \qquad (4)$$

§ 3. Переходя к выводу формул диференцирования тригонометрических функций, мы начнем с функции синуса.

Проведем окружность радиусом OA с центром в точке O. Считая точку A неподвижной, будем обозначать длину дуги AM (M — подвижная точка) буквой s, а соответствующую величину центрального угла MOA — буквой x. Если за единицу длины принять радиус окружности, то синусом угла x будет служить линия MP (черт. 79):

$$s = \cup AM,$$
$$x = \angle MOA,$$
$$\sin x = MP.$$



Черт. 79.

Если в бесконечной близости точки M взять точку M', то диференциалы величин s, x и $\sin x$ представятся так:

$$ds = \cup MM',$$
$$dx = \angle MOM',$$
$$d(\sin x) = M'Q.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить величину $d(\sin x)$ через x и dx. Для этого достаточно рассмотреть прямоугольный треугольник $M'MQ$ (угол Q — прямой). Гипотенузой его служит отрезок MM', который ввиду его бесконечной малости можно считать отрезком прямой, касающейся окружности в точке M' (или в точке M).

В силу этого отрезок $MM' = ds$ можно считать перпендикулярным к радиусу OM, а так как кроме того $M'P'$ перпендикулярна к OA, то угол $MM'Q$ равен углу MOA, т. е. x:

$$\angle MM'Q = x.$$

Теперь легко написать искомое выражение $d(\sin x)$:

$$d(\sin x) = M'Q = MM' \cos \angle MM'Q = ds \cos x.$$

Остается еще величину ds выразить через dx. Но вид выражения ds через dx существенно зависит от выбора единицы угловой меры. Если за единицу угловой меры принят радиан, то формула предыдущего параграфа

$$s = \alpha \qquad (3)$$

дает

$$ds = d\alpha,$$

и мы получаем окончательно

$$d(\sin x) = \cos x\,dx. \tag{5}$$

Такова формула дифференцирования синуса. Она приняла бы более сложный вид, если бы за единицу угловой меры мы приняли, например, 1°. Именно, мы имели бы [формула (4), § 2]

$$d(\sin x) = \frac{\pi}{180}\cos x\,dx. \tag{5'}$$

Сравнение формул (5) и (5') показывает теоретические преимущества введения радиального измерения углов.

Замечание. Так как при пользовании чертежом мы не учитывали знаков величин, а брали лишь их абсолютные значения, то формулу (5) следовало бы написать сначала в виде

$$d\sin x = \pm\cos x\,dx,$$

где из двух знаков какой-то один верный, а другой нет. Но легко видеть, что верным является положительный знак. Ограничиваясь случаем, когда угол x принадлежит первой четверти (где $\cos x$ положителен), мы видим, что величины $d\sin x$ и dx имеют одинаковые знаки, т. е. с увеличением угла увеличивается и его синус, и, наоборот, с уменьшением угла уменьшается и его синус. Таким образом величины $d(\sin x)$ и $\cos x\,dx$ должны иметь также одинаковые знаки, т. е.

$$d\sin x = \cos x\,dx. \tag{5}$$

Аналогичное рассуждение подтверждает правильность формулы (5) и для углов, принадлежащих другим четвертям.

§ 4. Формула дифференцирования косинуса получается тем же методом, который мы применили к выводу формулы дифференцирования синуса. Обращаясь к черт. 79, мы видим, что величина $\cos x$ представляется отрезком OP, а величина $d(\cos x)$ по абсолютной величине равна длине $PP' = MQ$.

Из прямоугольного треугольника $MM'Q$ находим

$$MQ = MM'\sin \angle MM'Q,$$

т. е.

$$d(\cos x) = \pm\sin x\,dx.$$

Из двух знаков нам надлежит выбрать один верный (см. замечание к § 3). Нетрудно видеть, что теперь верным является отрицательный знак. В самом деле, пусть x есть угол первой четверти ($\sin x > 0$). Тогда с увеличением величины x величина $\cos x$ уменьшается, а с уменьшением x величина $\cos x$ увеличивается. Таким образом в первой четверти $d\cos x$ и dx имеют противоположные знаки. Ввиду положительности величины $\sin x$ противоположные знаки будут иметь и величины

$\cos x$ и $\sin x\,dx$, так что, по крайней мере для первой четверти, имеем равенство

$$d(\cos x) = -\sin x\,dx. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что оно справедливо и для остальных четвертей. Разумеется, формула (6) предполагает, что величина угла x выражена в радиальной мере.

§ 5. Для функции $\operatorname{tg} x$ выражение ее дифференциала также может быть получено из чертежа, но проще воспользоваться известным выражением $\operatorname{tg} x$ через $\sin x$ и $\cos x$, дифференциалы которых мы уже умеем вычислять.

Именно, мы получаем

$$d(\operatorname{tg} x) = d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\,d\sin x - \sin x\,d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x\,dx + \sin^2 x\,dx}{\cos^2 x}.$$

Принимая во внимание, что

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

получаем

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,dx. \tag{7}$$

Тем же приемом мы найдем формулы дифференциала котангенса, секанса и косеканса:

$$d\operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x\,dx; \tag{8}$$

$$d\sec x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{tg} x\,dx; \tag{9}$$

$$d\operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\,dx. \tag{10}$$

Из формул (5), (6), (7), (8), (9) и (10) немедленно вытекают соответствующие формулы для производных тригонометрических функций:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x; \tag{5'}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x; \tag{6'}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \tag{7'}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x; \tag{8'}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x; \tag{9'}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x. \tag{10'}$$

Пользуясь формулами (5), (6), (7), (8), (9) и (10) и установленными прежде правилами дифференцирования, мы теперь в состоянии дифференцировать любое выражение, содержащее комбинации алгебраических и тригонометрических операций.

Пример 1. Найти дифференциал выражения $\sin^3 2x$.

Рассматривая функцию $\sin 2x$ как вспомогательную, имеем

$$d \sin^3 2x = 3\sin^2 2x \, d(\sin 2x).$$

Далее, считая функцию $2x$ вспомогательной, мы имеем по формуле (5)

$$d(\sin 2x) = \cos 2x \, d(2x) = 2\cos 2x \, dx.$$

Все вычисление располагается так:

$$d \sin^3 2x = 3\sin^2 2x \, d \sin 2x = 3 \sin^2 2x \cos 2x \, d(2x) =$$

$$= 6\sin^2 2x \cos 2x \, dx.$$

Пример 2. Найти производную функции $\operatorname{tg}^2 x \sin x$.

Эту функцию рассматриваем как произведение функций $\operatorname{tg}^2 x$ и $\sin x$:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x \sin x) = \sin x \frac{d}{dx} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x \frac{d}{dx}(\sin x).$$

В первом множителе производную функции $\operatorname{tg}^2 x$ находим через вспомогательную функцию $\operatorname{tg} x$; кроме того, пользуемся формулами (7) и (5):

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x \sin x) = 2\sin x \operatorname{tg} x \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg}^2 x \frac{d}{dx}(\sin x) =$$

$$= \frac{2\sin x \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x \cos x.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $\ln \sin x$.

$$d(\ln \sin x) = \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \, dx.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $\ln \cos x$.

$$d(\ln \cos x) = \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \, dx.$$

Пример 5. Найти $d(\sec x + \operatorname{tg} x) = d\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$.

Если воспользоваться вторым выражением и рассматривать его как дробь, то получим:

$$d\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d(1+\sin x) - (1+\sin x)\, d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\, d\sin x - (1+\sin x)\, d\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x\, dx + (1+\sin x)\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\, dx.$$

Еще проще непосредственно применить формулы (9) и (7) к первому выражению функции:

$$d(\sec x + \operatorname{tg} x) = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx = \sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx.$$

Легко видеть, что оба результата тождественны.

Пример 6. Найти дифференциал функции $\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

$$d\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) = \frac{d(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}.$$

Используя результат предыдущего примера, получаем

$$d\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) = \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \sec x\, dx = \frac{dx}{\cos x}.$$

Пример 7. Найти дифференциал функции $\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x)$. Вычисление, аналогичное предыдущему, дает

$$d\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) = \frac{d(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x)}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = \frac{-\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}\, dx =$$

$$= \operatorname{cosec} x\, dx = \frac{dx}{\sin x}.$$

Упражнения.

1) $d\sin(mx) = m\cos(mx)\, dx$.

2) $d\cos^2 x = -\sin 2x\, dx$.

3) $d\cos(x^2) = -2x\sin(x^2)\, dx$.

4) $\dfrac{d}{dx}\ln\sin x = \operatorname{ctg} x$.

5) $\dfrac{d}{dx}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{cosec} x$.

6) $\dfrac{d}{dx}e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x}\sin 2x$.

7) $d\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]=2\cos^2 x\,dx.$

8) $\frac{d}{dx}\left[x\operatorname{tg}x+\ln\cos x\right]=\frac{x}{\cos^2 x}.$

9) $d\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{2\cos x\,dx}{(1-\sin x)^2}.$

10) $\frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg}x\right]=\frac{1}{\cos^6 x}.$

11) $d\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+\ln\cos\varphi\right]=\operatorname{tg}^3\varphi\,d\varphi.$

12) $\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}\right]=\operatorname{cosec}^3\varphi.$

13) $\frac{d}{d\varphi}\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]=\cos^3\varphi.$

14) $d\left[\frac{3}{8}\alpha-\frac{3}{8}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin^3\alpha\cos\alpha\right]=\sin^4\alpha\,d\alpha.$

15) $d\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{dx}{\sin x};$

сравнить этот результат с примером 7 этого параграфа.

16) $d\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{dx}{\cos x};$

сравнить этот результат с примером 6 этого параграфа.

17) $\frac{d^2\sin\frac{2\pi t}{T}}{dt^2}=-\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2t\pi}{T}.$

18) $y=A\cos\left(\frac{2\pi x}{k}+a\right).\quad\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4\pi^2A}{k^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{k}+a\right).$

§ 6. Формулы диференциального исчисления, полученные нами в этой главе, могут быть использованы для получения новых формул интегрального исчисления.

Так, теперь мы можем вычислить, например, интеграл

$$\int_b^a \cos x\,dx.$$

Для этого достаточно отыскать какую-нибудь функцию, дифференциал которой представится выражением $\cos x\,dx$. Иначе говоря, найти неопределенный интеграл

$$\int \cos x\,dx.$$

Но формула (5) показывает, что такой функцией может служить функция $\sin x$. Ясно также, что функция $\sin x + C$, где C — произвольная постоянная величина, также является неопределенным интегралом выражения $\cos x\,dx$ (§ 13 гл. VI).

Итак, мы имеем

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{11}$$

Для нахождения же величины определенного интеграла

$$\int_a^b \cos x\,dx$$

нам нужно лишь подставить в неопределенный интеграл значения $x = a$, $x = b$ и из второго результата вычесть первый, так что

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin x + C\Big|_a^b = (\sin b + C) - (\sin a + C) = \sin b - \sin a.$$

Как и следовало ожидать, окончательный результат совершенно не зависит от значения постоянной C.

Мы разобрали этот пример, чтобы напомнить те сведения, которые были даны в § 12 и 13 предыдущей главы, к которым и отсылаем читателя за подробностями рассуждения.

Для нас важно было еще раз подчеркнуть, что основной проблемой является теперь задача нахождения новых неопределенных интегралов; к рассмотрению этой задачи мы и обращаемся.

§ 7. Каждая из формул (5) — (10) является источником новой формулы интегрального исчисления. Так, из формулы

$$d\cos x = -\sin x\,dx \tag{6}$$

непосредственно следует формула

$$\int -\sin x\,dx = \cos x + C,$$

или, умножая обе части равенства на —1 и вводя обозначение C вместо $-C$ (что всегда можно сделать ввиду произвольности C):

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \tag{12}$$

Точно так же из формул

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x\, dx, \tag{7}$$

$$d\operatorname{ctg} x = \frac{dx}{-\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x\, dx \tag{8}$$

вытекают формулы:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C, \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{14}$$

Формулы (11), (12), (13) и (14) следует твердо помнить. К ним стараются привести интегрирование тригонометрических функций более сложного вида, пользуясь рядом приемов, важнейшие из которых нам уже известны; это — интегрирование суммы и разности, метод вспомогательной функции и, наконец, преобразование подъинтегральной функции, имеющее целью привести ее к виду, более удобному для интегрирования.

Разумеется, чем большее количество формул интегрирования мы запомним, тем легче будет вычислять интегралы более сложного вида; но заучивание большого числа формул чрезвычайно обременяет память. Заучить все формулы все равно невозможно, так как их можно написать бесчисленное множество. При продолжительных же упражнениях наиболее часто получающиеся результаты запомнятся сами собой.

Так, обращая формулы

$$d(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos x}, \tag{9}$$

$$d(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sin x}, \tag{10}$$

мы могли бы получить такие:

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C, \tag{15}$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C. \tag{16}$$

Но особых преимуществ формулы не дают, потому что интегралы (15) и (16), которые встречаются на практике не так уж часто, легко вычисляются простой комбинацией вышеуказанных приемов.

Преобразуя подъинтегральное выражение, мы получаем, например,

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}.$$

Теперь сразу бросается в глаза, что в числителе стоит диференциал функции $\cos x$ (с обратным знаком)

$$\sin x\,dx = -d\cos x.$$

Так как в знаменателе стоит выражение $\cos^2 x$, то ясно, что за вспомогательную функцию следует принять $\cos x = z$.

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= +\frac{1}{z} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

При небольшом навыке всю эту выкладку можно провести короче, не вводя специального обозначения для вспомогательной функции:

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Аналогичным вычислением легко получить и формулу (16).

§ 8. Мы уже умеем интегрировать функции $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим теперь интегралы других основных тригонометрических функций. Вычисляя их, мы познакомимся на практике с типичными приемами интегрирования.

1) $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

Преобразуя подъинтегральное выражение, получаем

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}.$$

Так как в числителе стоит $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, то функцию $\cos x$ принимаем за вспомогательную:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln \cos x + C. \qquad (17)$$

2) $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

Аналогичное вычисление дает

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} + \ln \sin x + C. \qquad (18)$$

3) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x}.$

В примере 7 § 5 мы получили такой результат:

$$d\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{cosec} x\,dx.$$

Обращая его, мы сразу получаем

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C. \tag{19}$$

Однако, если бы предварительно мы не имели готового результата, очень трудно было бы догадаться подвергнуть диференцированию именно выражение $\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$, а не какое-нибудь другое. В таком случае мы должны были бы для вычисления интеграла

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x}$$

постараться преобразовать подъинтегральное выражение к более удобному для интегрирования виду. Разумеется, и тогда остается еще широкий простор для догадок и для применения искусственных приемов. Наиболее простой прием, довольно часто применяющийся на практике, состоит в том, что величина $\sin x$ представляется в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}.$$

После этого интеграл принимает вид

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Теперь функцию $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ удобно принять за вспомогательную, и так как

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}},$$

то

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C. \tag{19'}$$

Таков результат интегрирования. Он лишь по форме отличается от результата (19), ибо

$$\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Можно было бы итти и другим путем, более простым с технической стороны, но зато более искусственным по идее. Именно, помножим и разделим подъинтегральное выражение на величину $\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$ и примем во внимание формулы

$$d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x \, dx \tag{10}$$

и

$$d \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx. \tag{8}$$

Получаем

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x \, dx - \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x \, dx}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = \int \frac{-d(\operatorname{ctg} x) + d(\operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x)}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = \ln (\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

4) $\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x}$.

Этот интеграл можно свести к предыдущему, заменив величину $\cos x$ равной ей величиной $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C. \tag{20'}$$

Этот результат можно представить в иной форме, проделав такое преобразование:

$$\ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \ln \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \ln \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \ln \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \ln (\sec x + \operatorname{tg} x).$$

Полученная формула

$$\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C \tag{20}$$

представляет обращение результата, полученного в примере 6 § 5.

Выведенные в этом параграфе формулы интегрирования основных тригонометрических функций полезно запомнить, особенно формулы (19) и (20), дающие неопределенные интегралы функций $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ и $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ в одной из приведенных здесь форм.

§ 9. Уже из приведенных в предыдущем параграфе вычислений мы видим, что при интеграции даже простейших тригонометрических выражений нам не обойтись без помощи вспомогательных преобразований. Умение удачно выбрать соответствующее преобразование дается только упражнением.

Однако можно указать ряд типичных приемов, наиболее важных для практики. Эти приемы мы изучим на примерах, ниже разбираемых.

Пример 1. $\int \sin(ax+b)\,dx.$

Для вычисления этого интеграла достаточно принять за вспомогательную функцию $ax+b=z$:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{a}\cos z + C =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C;$$

еще лучше, не вводя особого обозначения вспомогательной функции, вести вычисление так:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,d(ax+b) =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sin 3x}.$

Выбирая $3x$ как вспомогательную функцию и применяя формулу (19) или (19′), получаем

$$\int \frac{dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\ln \operatorname{tg}\frac{3x}{2} + C,$$

или

$$\int \frac{dx}{\sin 3x} = -\frac{1}{3}\int \operatorname{cosec} 3x\,d(3x) = \frac{1}{3}\ln(\operatorname{cosec} 3x - \operatorname{ctg} 3x) + C.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

Вспомогательная функция $\frac{x}{2}$; применяем формулу (13)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Пример 4. $\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$.

Здесь за вспомогательную функцию принимаем $\sin 2x$ и тогда получаем

$$\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d \sin 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 2x + C =$$

$$= \frac{\sin^3 2x}{6} + C.$$

Пример 5. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x}$.

Вспомогательная функция $\cos x$:

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

Пример 6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx$.

Вспомогательная функция $\operatorname{tg} x$; множитель $\sec^2 x \, dx$ — ее дифференциал:

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \, d \operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

Пример 7. $\int \frac{\cos x \, dx}{(1 + 2\sin x)^2}$.

Вспомогательная функция $1 + 2\sin x$; числитель $\cos x \, dx$ — половина ее дифференциала:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{(1 + 2\sin x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + 2\sin x)}{(1 + 2\sin x)^2} = -\frac{1}{2(1 + 2\sin x)} + C.$$

В вышеприведенных примерах непосредственное введение вспомогательной функции приводило подъинтегральное выражение к виду, удоб-

ному для интегрирования. В следующих примерах потребуется предварительно произвести простые преобразования.

Пример 8. $\int \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin x} dx.$

Раскрывая скобки в числителе и приравнивая единице выражение $\cos^2 x + \sin^2 x$, мы разбиваем затем наш интеграл на сумму двух интегралов, каждый из которых вычисляется по основным формулам:

$$\int \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin x} dx = \int \frac{1 + 2\cos x \sin x}{\sin x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} + 2\int \cos x\, dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2\sin x + C.$$

Пример 9. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

Этот интеграл можно вычислить, если, воспользовавшись известной формулой тригонометрии

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

и введя затем вспомогательную функцию $\frac{x}{2}$, применить формулу (14)

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$

Можно применить и такой прием: умножим числитель и знаменатель подъинтегральной дроби на $1 + \cos x$. С помощью простых преобразований имеем

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{(1 + \cos x)\, dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{(1 + \cos x)\, dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}.$$

Первый интеграл берется непосредственно по формуле (14); во втором за вспомогательную функцию принимаем $\sin x$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + C =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x + C.$$

Легко показать, что оба полученных нами выражения отличаются только по форме (ср. пример 3 предыдущего параграфа).

Пример 10. $\int 2\sin x \cos x\, dx.$

Проще всего представить подъинтегральную функцию в виде:

$$2\sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$\int 2\sin x \cos x\, dx = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Можно было бы также ввести вспомогательную функцию $\sin x$. Тогда

$$\int 2\sin x \cos x\, dx = \int 2\sin x\, d\sin x = \sin^2 x + C_1.$$

Наконец, с таким же успехом можно выбрать за вспомогательную функцию $\cos x$:

$$\int 2\sin x \cos x\, dx = -\int 2\cos x\, d(\cos x) = -\cos^2 x + C_2.$$

Этот пример мы выбрали для того, чтобы обратить внимание читателя на то, что результаты, повидимому, получаются различные при всех трех способах вычисления. И действительно они различаются не только по форме, как это было в предыдущем примере. Но это не должно удивлять, потому что каждое выражение имеет не один неопределенный интеграл, а бесчисленное множество отличающихся друг от друга на постоянную величину (§ 13 гл. VI). Нетрудно видеть, что в нашем случае так и есть. Например, разность второго и третьего выражения равна:

$$\sin^2 x + C_1) - (-\cos^2 x + C_2) = \sin^2 x + \cos^2 x + C_1 - C_2 = 1 + C_1 - C_2.$$

Пример 11. $\int \cos^3 x\, dx.$

Для вычисления этого интеграла разобьем выражение на два множителя $\cos^2 x$ и $\cos x\, dx$. Второй — представляет собой дифференциал функции $\sin x$. Первый — легко выражается через ту же функцию:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx =$$

$$= \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x\, d\sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Прием, примененный нами, приводит к цели всегда, когда подъинтегральная функция — нечетная степень (положительная) синуса или косинуса. Следующий пример иллюстрирует это утверждение.

Пример 12. $\int \sin^5 x\, dx.$

Разбиваем подъинтегральное выражение на два множителя: $\sin^4 x$ и $\sin x\, dx = -d\cos x$:

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int \sin^4 x\; d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^2\, d\cos x =$$

$$= -\int d\cos x + 2\int \cos^2 x\, d\cos x - \int \cos^4 x\, d\cos x =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

В случае четной степени этот прием не годится. В этом случае можно воспользоваться следующими преобразованиями, известными из тригонометрии:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Следующие примеры уясняют указанный прием.

Пример 13. $\int \cos^2 x\,dx.$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Пример 14. $\int \sin^4 x\,dx.$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx.$$

Первые два интеграла вычисляются непосредственно; третий сводится к интегралу предыдущего примера введением вспомогательной функции $2x$ (или, если угодно, вычисляется с помощью преобразования

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\Big).$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

В дальнейшем мы укажем другой прием для вычисления этих интегралов.

Пример 15. $\int \sin mx \cos nx\, dx.$

В случае $m = n$ этот интеграл легко вычисляется введением вспомогательной функции $\sin mx = z$ или $\cos mx = z$. Если же m не равно n, то мы подвергаем подъинтегральную функцию тождественному преобразованию:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)];$$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin[(m+n)x]\, dx + \frac{1}{2}\int \sin[(m-n)x]\, dx.$$

В первом интеграле за вспомогательную функцию берем $(m+n)x$, во втором $(m-n)x$:

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)x] - \frac{1}{2(m-n)}\cos[(m-n)x] + c.$$

В следующих примерах подинтегральной функцией являются степени тангенса и котангенса. Прием интеграции состоит в том, что выделяется множитель $\operatorname{tg}^2 x$ или $\operatorname{ctg}^2 x$, который представляется в виде

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

или

$$\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Благодаря этому интеграл распадается на два слагаемых, из которых одно вычисляется непосредственно помощью вспомогательной функции $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$), а в другом степень тангенса или котангенса понижается.

Пример 16. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx = \int d\operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 17. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx.$

$$\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx = \int \operatorname{ctg} x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx = -\int \operatorname{ctg} x\, d\operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg} x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x + C.$$

Пример 18. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$$

Второй интеграл вычисляется повторным применением того же приема; мы уже проделали вычисление в примере 17.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

В следующем примере подъинтегральной функцией является отрицательная степень косинуса.

Пример 19. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \sec^6 x\,dx.$

Выделяем в подъинтегральной функции множитель $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\operatorname{tg} x$ и вводим в качестве вспомогательной функции $\operatorname{tg} x$. Остающийся множитель $\frac{1}{\cos^4 x}$ просто выражается через $\operatorname{tg} x$ на основании тождества

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^4 x\,d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int (\sec^2 x)^2\,d\operatorname{tg} x = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\,d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int d\operatorname{tg} x + 2\int \operatorname{tg}^2 x\,d\operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^4 x\,d\operatorname{tg} x =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Легко видеть, что этот способ ведет к цели всегда, когда подъинтегральная функция есть четная отрицательная степень косинуса или синуса. Для нечетных степеней этот прием не годится.

Упражнения.

1) $\int \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}\,dx = -2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C.$

2) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C.$

3) $\int \sin 2x \sin x\,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + C$

($\sin 2x = 2\sin x \cos x$).

4) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln(1+\sin x)+C.$

[Проделать двумя способами: 1) разбивая на два интеграла и пользуясь формулами (20) и (17) и 2) умножая числитель и знаменатель на $1+\sin x$.]

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C.$

(умножить числитель и знаменатель на $1-\sin x$).

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

(Воспользоваться преобразованием $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$; проверить результат приемом, аналогичным употребленному в предыдущем примере.)

7) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ (ср. пример 12).

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$ (ср. пример 19).

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^8 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x - \frac{3}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + C$ (аналогичный прием).

10) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x + C$ (ср. примеры 16 — 18).

11) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-\sin x} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

12) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

13) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

14) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^8 x} = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$

(Выделить множитель $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\operatorname{ctg} x$ и взять $\operatorname{ctg} x$ за вспомогательную функцию.)

15) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$ (ср. пример 15).

16) $\displaystyle\int \cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$ (аналогичный прием).

17) $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

(Выделить множитель $\cos x\, dx = d(\sin x)$ и взять $\sin x$ в качестве вспомогательной функции.)

18) $\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx = -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{9}\cos^9 x + C$ (аналогичный прием).

19) $\frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

20) $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^7 x} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x + C$ (вспомогательная функция $\operatorname{ctg} x$ или $\sin x$).

§ 10. При интегрировании тригонометрических функций иногда полезно применять кроме тех приемов, с которыми мы познакомились в предыдущем параграфе, еще один метод: так называемое „интегрирование по частям". Этот метод применяется и для интегрирования других функций, и в этом смысле может быть назван общим. Но он отнюдь не решает проблемы интегрирования произвольной функции. Напротив, он имеет, как мы сейчас увидим, очень узкий круг применения. Вот почему мы и не касались его до сих пор.

Приступая к изложению метода интегрирования по частям, мы прежде всего напомним читателю, что из самого определения неопределенного интеграла (§ 13 гл. VI) следует справедливость равенства

$$\int df(x) = f(x) + C, \tag{21}$$

где $f(x)$ — любая функция переменной x.

Так, например,

$$\int d(x^3) = x^3 + C,$$

$$\int d\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + C \text{ и т. д.}$$

Этот простой факт имеет основное значение в методе интегрирования по частям. Кроме него нужно еще вспомнить формулу дифференцирования произведения (§ 7 гл. V).

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \tag{22}$$

где u и v — любые функции.

После этих предварительных замечаний мы для лучшего уяснения метода интегрирования по частям начнем с простого примера. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int \ln x\, x\, dx.$$

Разобьем его подъинтегральное выражение на два сомножителя: $\ln x$ и $x\,dx$. Второй сомножитель можно представить в виде $d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, и таким образом заданный интеграл можно переписать так:

$$\int \ln x\, d\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

Если бы под знаком интеграла, кроме выражения $\ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right)$, входило бы в качестве слагаемого еще выражение $\frac{x^2}{2}\, d\ln x$, то согласно формуле (22) (в которой можно положить $u = \ln x$, $v = \frac{1}{2}x^2$) мы могли бы представить подъинтегральное выражение в виде

$$d\left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right],$$

и тогда мы могли бы немедленно вычислить наш интеграл, так как по формуле (21)

$$\int d\left[\ln x \cdot \frac{1}{2}x^2\right] = \ln x \frac{x^2}{2} + C.$$

Теперь сама собой напрашивается такая попытка вычислить интеграл:

$$\int \ln x\, x\, dx = \int \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Увеличим подъинтегральное выражение на величину $\frac{x^2}{2}\, d\ln x$; разумеется, для компенсации нужно ту же величину $\frac{x^2}{2}\, d\ln x$ вычесть из результата. Таким образом получаем

$$\int \ln x\, x\, dx = \int \left[\ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\, d\ln x = \frac{x^2}{2}\, d\ln x\right] =$$
$$= \int \left[d\left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} d\ln x\right].$$

Полученный интеграл естественно разбивается на два интеграла, из которых первый вычисляется немедленно:

$$\int \ln x\, x\, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 - \int \frac{x^2}{2}\, d\ln x.$$

Остановка теперь за вторым интегралом. Если его удастся вычислить — задача решена; если нет, то она останется не решенной.

Вообще говоря, вычисление этого второго интеграла представляет задачу не меньшей, а иногда и большей трудности, чем вычисление

исходного интеграла. Вот почему метод интеграции по частям имеет очень ограниченное поле применимости. Но в выбранном нами примере дело обстоит иначе: второй интеграл вычисляется очень легко. Мы имеем

$$\int \frac{x^2}{2} d\ln x = \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + C_2,$$

и таким образом искомый интеграл найден:

$$\int \ln x\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

где C (произвольное постоянное) заменяет выражение $C_1 - C_2$.

Для лучшего уяснения идеи метода мы покажем его применение к непосредственному вычислению определенного интеграла. Подъинтегральную функцию его мы возьмем ту же, что брали только что:

$$\int_a^b \ln x\, x\, dx.$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, дают

$$\int_a^b \ln x\, x\, dx = \int_a^b \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int_a^b \left[\ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} d\ln x\right] -$$

$$- \int_a^b \frac{x^2}{2} d\ln x = \int_a^b d\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right] - \int_a^b \frac{x^2}{2} d\ln x.$$

Согласно общей теореме об интеграле диференциала (§ 10 гл. VI) мы имеем

$$\int_a^b d\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right] = \frac{b^2}{2}\ln b - \frac{a^2}{2}\ln a.$$

Остается вычислить второй интеграл

$$\int_a^b \frac{x^2}{2} d\ln x,$$

который благодаря специальному выбору примера легко вычисляется:

$$\int_a^b \frac{x^2}{2} d\ln x = \frac{1}{2}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{4}(b^2 - a^2).$$

Итак, мы имеем

$$\int_a^b \ln x\, x\, dx = \frac{b^2}{2}\ln b - \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4}(b^2 - a^2).$$

Тот же результат мы получим, если используем для вычисления определенного интеграла полученное выше выражение неопределенного интеграла.

§ 11. Поведем теперь наше рассуждение в общем виде. Пусть подъинтегральное выражение мы представили в виде произведения некоторой функции u (в нашем примере $\ln x$) на диференциал другой функции v $\left(\text{в нашем примере } \frac{x^2}{2}\right)$, так что искомый интеграл получил вид

$$\int u\,dv.$$

Прибавим и отнимем в подъинтегральном выражении член $v\,du$ и разобьем полученный интеграл на два. Мы получим

$$\int u\,dv = \int (u\,dv + v\,du) - \int v\,du.$$

Замечая, что

$$u\,dv + v\,du = d(uv)$$

и что

$$\int d(uv) = uv + C,$$

мы получаем

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{23}$$

Произвольную постоянную можно не писать, потому что она войдет после вычисления второго интеграла [1]).

Задача свелась к вычислению интеграла $\int v\,du$. Если этот интеграл вычисляется непосредственно, то задача решена. Но, как мы указали уже, вообще говоря, этот интеграл представляет не меньше затруднения, чем интеграл $\int u\,dv$.

Заметим, что всякое подъинтегральное выражение можно представить в виде $u\,dx$ не одним, а многими способами. Так, например, в интеграле

$$\int e^x x\,dx$$

мы можем положить $u = e^x$, $v = \frac{x^2}{2}$ и представить его в виде

$$\int e^x d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

---

[1]) Совершенно так же можно поступать при вычислении определенного интеграла; мы получим

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du.$$

Можно положить также $u = x$, $v = e^x$ и представить тот же интеграл в виде

$$\int x\, d(e^x).$$

Число таких способов бесконечно-велико, ибо за v мы можем принять совершенно произвольную функцию, а u определить делением подъинтегрального выражения на dv. Так, в приведенном только что примере можно было бы взять $v = x^3$; $dv = 3x^2\, dx$;

$$u = \frac{e^x x\, dx}{3x^2\, dx} = \frac{e^x}{3x},$$

и интеграл представится в виде

$$\int \frac{e^x}{3x}\, d(x^3).$$

Однако не при всяком выборе функций u и v интегрирование по частям совершается успешно.

Возьмем, например, только что рассмотренный интеграл

$$\int e^x x\, dx.$$

Если мы, по аналогии с примером предыдущего параграфа, положим $u = e^x$, $v = \frac{x^2}{2}$, то на основании формулы (23) получим

$$\int e^x x\, dx = \int e^x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2}\, d(e^x).$$

Мы видим, что интеграл

$$\int v\, du = \int \frac{x^2}{2}\, de^x = \frac{1}{2} e^x x^2\, dx$$

нисколько не легче, чем исходный.

Но, если мы иначе представим подъинтегральное выражение в виде $u\, dv$, то получим хороший результат. Именно:

$$\int e^x x\, dx = \int x\, de^x$$

(так что $u = x$, $v = e^x$).

Формула (23) дает

$$\int e^x x\, dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x\, dx.$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int e^x\, dx = e^x + C,$$

и мы имеем

$$\int e^x x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Вся выкладка записывается так:

$$\int e^x x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Полученный результат легко проверить дифференцированием. Мы получим

$$d(xe^x - e^x + C) = e^x x\,dx.$$

Мы видим, что успех метода интегрирования по частям, даже в тех случаях, когда он приводит к цели, зависит от удачного расщепления подынтегрального выражения на множители u и dv. Здесь вновь мы встречаемся с тем фактом, что процесс интегрирования не совершается так методически, как процесс дифференцирования. Может быть, это обусловливается просто неполнотой теории? Такое предположение напрашивается прежде всего. Дело, однако, обстоит иначе.

Выработка методов интегрирования наталкивается на препятствия объективного характера, и мы вскоре увидим, на какие именно. Пока что мы на нижеследующих примерах постараемся приобрести некоторый навык в распознавании того, можно ли рассчитывать на успех нового метода в том или ином случае.

Пример 1. $\int x \sin x\,dx.$

Если мы разобьем подынтегральное выражение на множители $\sin x$ и $x\,dx$, то функции u и v будут $u = \sin x$, $v = \frac{x^2}{2}$. Выражение $v\,du$ будет иметь вид

$$\frac{x^2}{2}\,d\sin x = \frac{x^2}{2}\cos x\,dx.$$

Оно не имеет более приветливого вида, чем исходное подынтегральное выражение. Таким образом этот способ расщепления мы отбрасываем. Вышеприведенные соображения желательно произвести в уме.

Прикинем другую возможность расщепления: на множители x и $\sin x\,dx$. Второй множитель есть дифференциал косинуса (с обратным знаком). Легко видеть, что выражение $v\,du$ будет иметь вид

$$-\cos x\,dx \quad [v = -\cos x,\ u = x];$$

его легко проинтегрировать. Итак, производим выкладку:

$$\int x \sin x\,dx = \int x d(-\cos x) = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Результат проверьте дифференцированием.

Пример 2. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Если разобьем подъинтегральное выражение на множители x и $\frac{dx}{\cos^2 x}$, то второй представит $d\operatorname{tg} x$. Таким образом придется иметь дело с выражением $\operatorname{tg} x\,dx$, которое поддается интегрированию:

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \int x\,d\operatorname{tg} x = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln\cos x + C.$$

Пример 3. $\int x^2 \cos x\,dx$.

Можно разбить подъинтегральное выражение на множители x^2 и $d\sin x$. Тогда придется иметь дело с выражением $\sin x\,d(x^2) = 2x\sin x\,dx$. Это выражение, правда, не интегрируется непосредственно, но оно проще исходного, потому что степень величины x понизилась. Есть основание поэтому полагать, что повторное применение интеграции по частям приведет нас к цели (ср. пример 1).

$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx = x^2\sin x +$$

$$+ 2\int x\,d\cos x = x^2\sin x + 2\left[x\cos x - \int \cos x\,dx\right] = x^2\sin x +$$

$$+ 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Проверить диференцированием.

Пример 4. $\int x^2 e^x\,dx$.

В этом примере интегрирование по частям также придется проделать дважды.

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$$

$$= x^2e^x - 2\int x\,de^x = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x +$$

$$+ 2e^x + C.$$

Пример 5. $\int \cos^2 x\,dx$.

Можно разбить $\cos^2 x\,dx$ на множители $\cos x$ и $\cos x\,dx = d\sin x$. На первый взгляд может показаться, что этот прием ничего не даст, так как придется иметь дело с выражением $\sin x\,d\cos x = -\sin^2 x\,dx$, которое нисколько не проще первоначального. Но дело в том, что функция $\sin^2 x$ легко выражается через подъинтегральную функцию $\cos^2 x$, и это дает возможность получить в правой части равенства т о т же интеграл, что и в левой. Какие выгоды при этом получаются, покажет выкладка.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,d\sin x = \sin x\cos x - \int \sin x\,d\cos x =$$

$$= \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx.$$

Заменяем в последнем интеграле $\sin^2 x$ выражением

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx = \sin x\cos x +$$

$$+ \int dx - \int \cos^2 x\,dx.$$

Таким образом мы получили для определения интеграла $\int \cos^2 x\,dx$ уравнение; перенося неизвестную величину интеграла из правой в левую часть уравнения, мы решим его:

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int dx = \sin x\cos x + x + C.$$

Отсюда

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$$

(C поставлено вместо $\frac{C}{2}$).

Это же выражение (лишь в иной форме) мы получили в примере 13 § 9.

Пример 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$

Можно сначала вычислять неопределенный интеграл, но лучше оперировать прямо определенными интегралами (см. сноску в начале этого параграфа).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d(-\cos x) = -\cos x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$$

Первое слагаемое правой части обращается в нуль (так как при $x = \frac{\pi}{2}$ обращается в нуль $\cos x$, а при $x = 0$ $\sin x$):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$$

Перенося в одну часть равенства неизвестную величину определенного интеграла, получаем:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx.$

Здесь снова выделение множителя $\sin x\,dx = d(-\cos x)$ приводит к уравнению, которое дает возможность вычислить искомый интеграл если не сразу до конца, то, по крайней мере, через посредство интеграла более простого вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\cos x \sin^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot 3\sin^2 x \cos x\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части обратилось в нуль.

Как и в предыдущем примере, заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx.$$

Отсюда находим, как в предыдущем примере,

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$$

Интеграл, стоящий справа, может быть вычислен повторным применением интегрирования по частям. Мы уже проделали выкладку в предыдущем примере. Окончательно получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{16}\pi$$

(ср. пример 14 § 9).

Применяя тот же прием, можно вычислить интеграл любой степени синуса или косинуса. Рассмотрим еще случай нечетной степени.

Пример 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\cos x \sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x\,dx =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^3 x\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx.$$

Отсюда

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx.$$

Вычисляя далее тем же приемом интеграл в правой части равенства, найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$$

Таким образом

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{8}{15}$$

(ср. пример 12 § 9).

Пример 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx.$

Поступая как в предыдущем примере, найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx = \frac{8}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1.$$

Отсюда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx = \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{128}{315}.$$

Нетрудно видеть, что в общем случае для нечетной степени синуса имеем формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Точно так же выражается и интеграл нечетной степени косинуса:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Пример 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx.$

Поступая, как в примере 7, найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx = \frac{7}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \left(\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

В общем случае:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \left(\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Пример 11. $\int e^{-x}\cos x\,dx.$

Этот интеграл можно вычислить двояким образом, представляя его в виде

$$\int \cos x\,d(-e^{-x})$$

или в виде

$$\int e^{-x}\,d(\sin x).$$

Мы проследим вычисление по второму способу.

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}\,d(\sin x) = \sin x e^{-x} - \int \sin x\,d(e^{-x}) =$$

$$= \sin x e^{-x} + \int e^{-x}\sin x\,dx.$$

Мы пока не получили ни более простого интеграла ни интеграла того же вида, что исходный. Но так как подъинтегральная функция отличается от исходной тем, что вместо множителя $\cos x$ у нас появился множитель $\sin x$, то имеет смысл повторно интегрировать по частям, в надежде, что после этого мы получим интеграл, совпадающий с исходным:

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \sin x e^{-x} + \int e^{-x}\sin x\,dx = \sin x e^{-x} +$$

$$+ \int e^{-x}\,d(-\cos x) = \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} + \int \cos x\,d(e^{-x}) =$$

$$= \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int e^{-x}\cos x\,dx.$$

Отсюда находим:

$$2\int e^{-x}\cos x\,dx = \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} = (\sin x - \cos x)e^{-x} + C;$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{(\sin x - \cos x)e^{-x}}{2} + C.$$

Пример 12. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Для того чтобы вычислить этот интеграл, можно ввести в числитель подъинтегрального выражения множитель $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; тогда интеграл разобьется на два, из которых в одном $\cos x$ в знаменатель войдет в степени, на 2 меньшей, чем в исходном. В другом интеграле при помощи интегрирования по частям можно будет также уменьшить степень косинуса в знаменателе.

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^6 x} + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \sin x\,d\frac{1}{5\cos^5 x} =$$

$$= \frac{dx}{\cos^4 x} + \frac{\sin x}{5\cos^5 x} - \int \frac{1}{5\cos^5 x}\,d\sin x =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \frac{\sin x}{5\cos^5 x} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Дело свелось к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x};$$

а его мы найдем, применив повторно процесс, только что проделанный. Мы получим

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4}{15}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x + C =$$
$$= \operatorname{tg} x\left[\frac{1}{5}\sec^4 x + \frac{4}{15}\sec^2 x + \frac{8}{15}\right] + C.$$

В примере 19 § 9 мы вычислили этот же интеграл другим, более простым, способом (нетрудно убедиться в тождественности результатов). Но преимущество нашего нового метода состоит в том, что он с успехом применяется и для интеграции нечетных отрицательных степеней косинуса (и синуса), тогда как метод § 9 мы можем использовать с успехом лишь для четных отрицательных степеней.

Упражнения.

1) $\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C.$

2) $\int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$

3) $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C.$

4) $\int (3x^2 - 5)\cos 2x\, dx = \frac{6x^2 - 13}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x\cos 2x + C.$

5) $\int x^2 \sin x\, dx = 2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x + C.$

6) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$

7) $\int \sin^4 x\, dx = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3\sin x\cos x}{8} + \frac{3}{8}x + C.$

8) $\int \cos^4 x\, dx = \frac{\cos^3 x\sin x}{4} + \frac{3\cos x\sin x}{8} + \frac{3}{8}x + C.$

9) $\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{2\sin 3x - 3\cos 3x}{13}e^{2x} + C.$

10) $\int e^{-2x}\cos x\, dx = \frac{\sin x - 2\cos x}{5}e^{-2x} + C.$

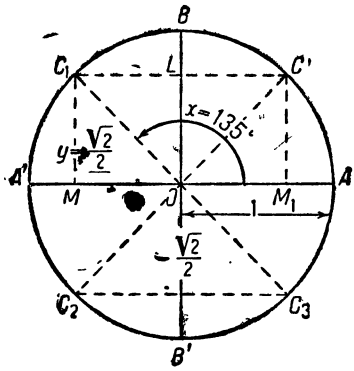
11) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C$ (ср. пример 12).

12) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C$
(аналогичный прием).

13) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C.$

§ 12. Чтобы научиться дифференцировать решительно все функции, которые рассматриваются в элементарной математике, нам остается вывести правила дифференцирования так называемых обратных тригонометрических (или обратных круговых) функций.

Эти функции рассматриваются в каждом учебнике тригонометрии, но как правило обычно плохо усваиваются учащимися. Об объективных причинах этого факта мы скажем в следующем параграфе. Во всяком случае будет полезным напомнить здесь основные сведения об обратных тригонометрических функциях.



Черт. 80.

Пусть переменные величины x и y связаны зависимостью

$$y = \sin x.$$

Зная значение величины x, например, $x = \frac{3}{4}\pi$, мы можем из таблицы или графически найти соответствующую величину y. В данном случае $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. На черт. 80 отмечены эти величины x и y (радиус окружности OA принят за единицу длины)

Рассмотрим теперь обратную задачу: зная значение величины y, найти соответствующее значение величины x. Пусть, например, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отложим от точки O кверху отрезок $OL = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$ и проведем через точку L прямую $CC_1 \parallel AA'$. Эта прямая пересечет окружность в двух точках C и C_1. Ясно, что углы $x = AOC$ и $x = AOC_1$ будут иметь синусами одну и ту же величину $y = OL = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом значению величины $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют уже не одно значение величины x, а по крайней мере два, именно:

$$x = \frac{1}{4}\pi \angle AOC,$$

$$x = \frac{3}{4}\pi = \angle AOC_1.$$

Кроме того, если рассматривать углы, бо́льшие 2π (360°), и отрицательные углы, то ясно, что точке C может соответствовать бесчисленное множество углов:

$$x=\frac{1}{4}\pi+2\pi=2\frac{1}{4}\pi;\quad x=4\frac{1}{4}\pi\ \ldots x=\frac{1}{4}\pi-2\pi=$$

$$=-1\frac{3}{4}\pi;\quad x=-3\frac{3}{4}\pi\ldots,$$

т. е. все углы вида

$$x=\frac{1}{4}\pi\pm 2\pi k,$$

где k — произвольное целое положительное число.

Точно так же точке C_1 могут соответствовать все углы вида

$$x=\frac{3}{4}\pi\pm 2\pi k.$$

Для наших целей различение всех этих углов между собой представляется несущественным. Все углы вида $\alpha\pm 2\pi k$ мы будем считать тождественными, и для данного угла α будет выбирать то его выражение, которое соответствует кратчайшему пути по окружности от точки A до точки C или C_1.

Таким образом мы можем сказать, что значению $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют два существенно различных значения x, именно:

$$x=\frac{1}{4}\pi,\quad x=\frac{3}{4}\pi.$$

Точно так же значению $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (черт. 80) будут соответствовать значения x:

$$x=-\frac{3}{4}\pi\ \text{ и }\ x=-\frac{1}{4}\pi,$$

(мы берем $x=-\frac{3}{4}\pi$, а не $x=1\frac{1}{4}\pi$, ибо значение $x=-\frac{3}{4}\pi$ соответствует кратчайшему пути $AB'C_2$ по окружности).

Итак, формула

$$y=\sin x, \tag{A}$$

дающая y как функцию величины x, в то же время задает (хотя и не однозначно) величину x как функцию от величины y. Здесь мы наблюдаем тот же факт о б р а т и м о с т и функциональной зависимости, который проявляется во всех случаях, когда две величины связаны между собой. Так, если величина u выражена в функции величины v формулой

$$u=v^2, \tag{B}$$

то величина v в свою очередь является функцией величины u, т. е. по данному значению u находим соответствующее значение v (их будет два, отличающихся друг от друга знаком).

Этот факт уясняется на вид формулой

$$v = \sqrt{u} \qquad (B')$$

(величина $\sqrt{u}$ имеет два значения, например $\sqrt{25} = \pm 5$).

Формула (B′) не высказывает ничего большего, чем формула (B). По своему содержанию они совершенно тождественны. Но формула (B′) указывает на факт зависимости величины v от u, тогда как в формуле (B) подчеркивается зависимость u от v.

Если мы хотим подчеркнуть аналогичный факт зависимости величины x от величины y, то мы должны ввести некоторое новое обозначение для этой функциональной зависимости, подобно тому как в алгебре вводится обозначение квадратного корня.

В соответствии с этим формулу (A) переписывают в виде

$$x = \arcsin y. \qquad (A')$$

Эта новая формула высказывает абсолютно то же самое, что и формула (A), она лишь подчеркивает зависимость величины x от y. Таким образом найти значение $\arcsin y$ (читается „арксинус игрек") — значит указать такую величину x, синус которой равен величине y.

Найдем, например, $\arcsin(-0{,}920)$.

Просматривая таблицу синусов, мы найдем, что ближайшее к величине 0,920 число в графе синусов равно 0,921; ему соответствует величина угла $67\frac{\pi}{180}$ (67°). Не забудем, что еще угол $(180-67)\frac{\pi}{180} = 113\frac{\pi}{180}$, не помещенный в таблице, имеет тот же синус, что угол $67\frac{\pi}{180}$. Но в нашем случае величина синуса должна равняться не 0,920, а −0,920. Значит, соответствующие углы равны (приблизительно) $-67\frac{\pi}{180}$ и $-113\frac{\pi}{180}$.

Итак,

$$\arcsin(-0{,}920) = \begin{cases} -67\frac{\pi}{180}. \\ -113\frac{\pi}{180}. \end{cases}$$

Мы уже говорили, что усвоение обратных тригонометрических функций обычно представляет затруднение для учащихся. Из рассмотренного примера легко увидеть, в чем корень этих затруднений. Мы видим, что для вычисления значений функции $\arcsin x$ нам приходится пользоваться *теми же таблицами*, которые служат для нахождения значений функции $\sin x$.

Таким образом новое обозначение является как бы совершенно бесполезным для вычислительной практики. С другой стороны, именно по этой причине при решении тех тригонометрических задач, где было бы уместно пользоваться функцией арксинуса, ее никогда не употребляют. Так,

если даны катет $a = BC$ и гипотенуза $c = AC$ прямоугольного треугольника ABC и требуется найти острый угол A, то пишут обычно

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

и затем по таблицам находят величину угла A, тогда как было бы уместно писать

$$A = \arcsin \frac{a}{c}.$$

Но такая запись не употребительна именно потому, что она по сравнению с предыдущей не имеет никаких преимуществ для решения этой и других задач тригонометрии. Происходит это потому, что для решения тригонометрических задач нам важно не изучение функциональной зависимости между величинами y и x в формулах (A) и (A′), а лишь умение найти одну из них по данной величине другой; иными словами, решить уравнение вида

$$y = \sin a$$

или

$$b = \sin x,$$

где a и b — некоторые определенные, заданные величины.

Совершенно иначе обстоит дело в исчислении бесконечно-малых. Здесь нас не может не интересовать вопрос об изучении данной функции, например вопрос о вычислении ее дифференциала или неопределенного интеграла, а с этой точки зрения функция арксинуса имеет совершенно самостоятельный интерес, подобно тому как, например, дифференцирование или интегрирование квадратного корня есть задача, совершенно отличная от дифференцирования или интегрирования второй степени.

И мы увидим, что изучение обратных тригонометрических функций даст нам новые, чрезвычайно важные и интересные результаты.

§ 13. Итак, мы поставим вопрос о нахождении дифференциала функции $\arcsin x$. Так как эта функция представляет собой обращение функции синуса, то мы можем воспользоваться общим методом, изложенным в § 8 и 9 гл. VI.

Именно, обозначим величину $\arcsin x$ буквой y:

$$y = \arcsin x. \tag{24}$$

Это равенство совершенно тождественно с равенством

$$x = \sin y. \tag{25}$$

Последнее мы умеем дифференцировать:

$$dx = \cos y \, dy.$$

Отсюда находим

$$dy = \frac{dx}{\cos y}. \tag{26}$$

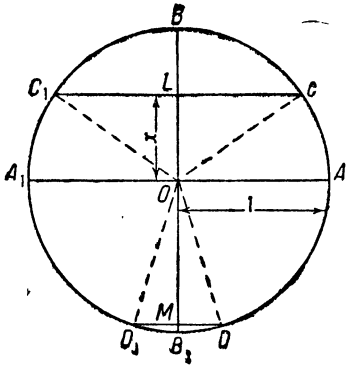
Теперь остается устранить вспомогательное обозначение y. Равенство (24) позволяет заменить dy на $d\arcsin x$; что касается величины $\cos y$, то ее проще всего выразить через x с помощью формулы (25). Мы получаем

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}. \tag{27}$$

Формула (26) перепишется теперь так:

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}. \tag{28}$$

Нас не должно смутить то обстоятельство, что в правой части формулы (27) мы имеем два знака. Эта двузначность связана с тем, что функция $\arcsin x$ имеет не одно, а два существенно различных значения.



Черт. 81.

Черт. 81 показывает, что концы C и C_1Z дуг AC и AC_1, соответствующих одному и тому же значению $x = OL$, расположены всегда симметрично относительно диаметра BB_1. Это относится как к тому случаю, когда x положительно, так и к случаю, когда x отрицательно ($x = OM$; точки D и D_1 симметричны относительно BB_1). Очевидно, что если мы возьмем то значение $\arcsin x$, для которого конец дуги лежит справа от BB_1 (например $\arcsin OL = \angle AOC$ или $\arcsin OM = \angle AOD$), то величина $\cos y$ будет положительна. В этом случае в формуле (27), а следовательно и в формуле (28) нужно взять знак плюс.

Если же выбрать то значение $\arcsin x$, для которого конец дуги лежит слева от BB_1 (например, $\arcsin OL = \angle AOC_1$ или $\arcsin OM = \angle AOD_1$), то в формулах (27) и (28) следует взять знак минус.

Во избежание необходимости каждый раз оговаривать, какое из значений функции $\arcsin x$ рассматривается, условливаются, если не сделано особых оговорок, подразумевать под символом $\arcsin x$ то значение величины $\arcsin x$, для которого конец дуги лежит справа. Иначе говоря, $\arcsin x$, согласно этому условию, есть угол, имеющий синусом величину x и принадлежащий либо четвертой четверти (когда величина x отрицательна), либо первой (когда величина x положительна).

При этом условии каждому значению x (заключенному между -1 и $+1$; при всех других значениях x величина $\arcsin x$ не может иметь никакого действительного значения!) соответствует одно вполне определенное значение $\arcsin x$ $\left(\text{заключенное между } -\frac{\pi}{2} \text{ и } +\frac{\pi}{2}\right)$ и формула (28) освобождается от двузначности. Она принимает вид

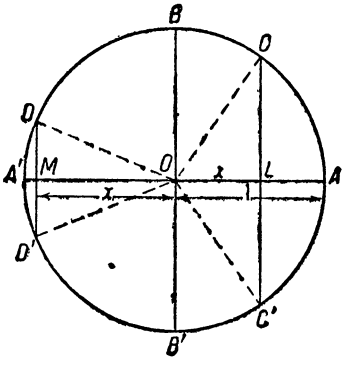
$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}}. \tag{28}$$

Производная функция $\arcsin x$ равна

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}. \qquad (28')$$

Она положительна при всяком значении x; это свидетельствует о том, что функция $\arcsin x$ (если держаться вышеуказанного соглашения о выборе ее значения) есть функция, возрастающая при всех значениях x. Последнее очевидно и непосредственно.

Мы обращаем внимание читателя на то, что производная обратной тригонометрической функции $\arcsin x$ представляет собой функцию не тригонометрическую, а алгебраическую. Это обстоятельство повлечет важные последствия в вопросе об интегрировании функций.



Черт. 82.

§ 14. После подробного рассмотрения функции $\arcsin x$ мы можем не останавливаться долго на остальных обратных тригонометрических функциях.

Функция $\arccos x$, обратная функции $\cos x$, может быть определена так: $\arccos x$ есть величина угла, косинус которого имеет значение x. Черт. 82 показывает, что каждому значению x (заключенному между -1 и $+1$) соответствуют два значения функции $\arccos x$ [1]).

Так,

$$\arccos QL = \begin{cases} \angle AOC \\ \angle AOC_1; \end{cases}$$

$$\arccos OM = \begin{cases} \angle AOD \\ \angle AOD_1. \end{cases}$$

Концы дуг, соответствующих одному и тому же значению x, лежат симметрично относительно диаметра AA' (а не BB', как в случае $\arcsin x$). Поэтому, если мы хотим устранить двузначность [2]) функции $\arccos x$, то мы должны брать либо только те значения $\arccos x$, для которых конец дуги лежит над диаметром AA', либо только те значения, для которых конец дуги лежит под AA'.

Обычно условливаются брать первый из этих вариантов. При этом соглашении $\arccos x$ может быть углом первой четверти (когда величина x положительна) или второй (когда x отрицательная величина), т. е. при изменении x от $+1$ до -1 величина $\arccos x$ изменяется

[1]) Мы, как и в § 12, считаем тождественными все углы, отличающиеся друг от друга на целое число полных оборотов.

[2]) Двузначной функцией называется функция, дающая для каждого значения аргумента два значения функции (они вовсе не должны отличаться друг от друга знаком!).

от 0 до π. Найдем теперь диференциал функции $\arccos x$. Обозначая эту функцию через y, имеем:

$$y = \arccos x,$$

$$x = \cos y.$$

$$dx = -\sin y\, dy,$$

$$dy = -\frac{dx}{\sin y}. \tag{29}$$

Находим выражение $\sin y$ через x.

$$\sin y = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Какой из двух знаков перед корнем мы должны взять? Очевидно, что при нашем соглашении относительно функции $y = \arccos x$, в силу которого угол y принадлежит первой или второй четверти, величина $\sin y$ всегда положительна, и потому из двух знаков мы должны выбрать знак плюс. Итак, имеем

$$\sin y = +\sqrt{1-x^2},$$

и формула (29) переписывается так:

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{30}$$

Производная функции $\arccos x$ выражается формулой

$$\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{30'}$$

Она имеет отрицательное значение для любого значения x, что указывает на убывание функции $\arccos x$.

Замечание. Сравнивая формулы

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{28}$$

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{30}$$

мы видим, что диференциалы функций арксинуса и арккосинуса отличаются друг от друга только знаком и, следовательно, сумма их равна нулю, что можно записать так:

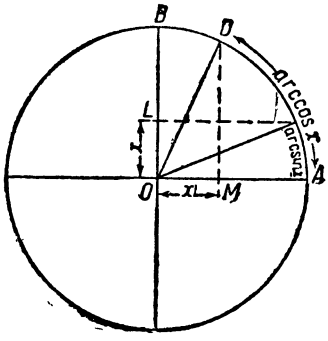
$$d(\arcsin x + \arccos x) = 0.$$

Эта формула выражает, что сумма

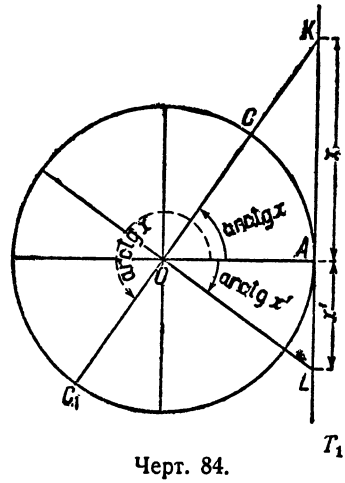
$$\arcsin x + \arccos x$$

есть величина постоянная.

В самом деле, при тех соглашениях, которые мы сделали относительно значений $\arcsin x$ и $\arccos x$, эта сумма всегда дает $\frac{\pi}{2}$ (90°). В этом легко убедиться, рассматривая черт. 83, где отрезки OL и OM изображают положительное значение x. Для отрицательного x можно провести аналогичное построение.



Черт. 83.



Черт. 84.

Можно вести рассуждение и аналитически, исходя из формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y.$$

Если обозначить через x величину $\cos y$, то мы получим:

$$\cos y = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x,$$

или, что то же:

$$y = \arccos x,$$

$$\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x.$$

Сложив почленно последние два равенства, получим: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

§ 15. Функция $\operatorname{arctg} x$, обратная функции $\operatorname{tg} x$, может быть определена так: $\operatorname{arctg} x$ есть величина угла, тангенс которого равен x. Черт. 84 показывает, что каждому значению x соответствуют два значения $\operatorname{arctg} x$, отличающихся друг от друга на π. Концы дуг, соответствующих одному и тому же значению x, расположены, следовательно, симметрично относительно центра O. Чтобы устранить двухзначность функции $\operatorname{arctg} x$, мы

из двух дуг, например AC и AC_1, выбираем ту, конец которой C лежит ближе к касательной TT_1. Таким образом при изменении x (от $-\infty$ до $+\infty$) величина arctg x (как и arcsin x) изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. соответствующий угол берется в первой четверти (когда $x > 0$) или в четвертой (когда $x < 0$).

Аналогичные соображения заставляют из двух значений функции arcctg x выбрать одно таким образом, чтобы оно представляло угол первой или второй четверти (как в случае функции arccos x). Таким образом при изменении величины x от $-\infty$ до $+\infty$ величина arcctg x изменяется от значения π до значения 0.

Выведем теперь формулы диференцирования функций arctg x и arcctg x. Обозначив функцию arctg x буквой y, имеем:

$$\operatorname{arctg} x = y,$$

$$x = \operatorname{tg} y,$$

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

$$dy = \cos^2 y\, dx = \frac{dx}{\sec^2 y}. \tag{31}$$

Чтобы найти выражение $\sec^2 y$ через x, воспользуемся известным тригонометрическим тождеством:

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\sec^2 y = 1 + x^2.$$

Формула (31) перепишется теперь:

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}. \tag{32}$$

Интересно отметить, что эта формула не содержит никакой двузначности, так как она остается справедливой не только при том соглашении, которое мы ввели выше, но и при любом выборе значения arctg x.

Совершенно аналогично получим формулу

$$d \operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}. \tag{33}$$

Правые части (32) и (33) отличаются друг от друга только знаком. Это обстоятельство свидетельствует о том, что сумма arctg x + arcctg x есть постоянная величина. Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что при сделанном выше соглашении эта сумма равна $\frac{\pi}{2}$.

В качестве упражнения предлагаем читателю вывести формулу диференцирования арксеканса и арккосеканса:

$$d \operatorname{arcsec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \tag{34}$$

$$d \operatorname{arccosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \tag{35}$$

Функция arcsec x предполагается здесь изменяющейся в тех же пределах, что функция arccos x, т. е. между 0 и π, а функция arccosec x — в тех же пределах, что функция arcsin x, т. е. между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Заметим, что производные всех обратных тригонометрических функций представляют функции алгебраические.

§ 16. Сводя вместе выведенные в предыдущих параграфах формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций, мы получаем таблицу:

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{28}$$

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{30}$$

$$d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}, \tag{32}$$

$$d\operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}, \tag{33}$$

$$d\operatorname{arcsec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \tag{34}$$

$$d\operatorname{arccosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \tag{35}$$

Пользуясь этими формулами и всеми выведенными ранее правилами дифференцирования, мы получаем возможность дифференцировать любую „элементарную“ функцию, т. е. такую, которая получается некоторой комбинацией шести операций алгебры, логарифмирования, потенцирования и тригонометрических операций. Следующие примеры иллюстрируют это положение.

Пример 1. Вычислить $d\arcsin\frac{x}{a}$.

Применяя формулу (28), получаем

$$d\arcsin = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

После простого преобразования получаем

$$d\arcsin\frac{x}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Пример 2. Найти производную функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

За вспомогательную функцию возьмем $\frac{x}{a}$. Производная по вспомогательной функции будет, согласно (32), $\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$; производная вспомогательной функции: $\frac{1}{a}$.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Пример 3. Найти $p\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)$,

$$d\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)=d(x\arcsin x)+d\sqrt{1-x^2}=$$

$$=x\,d\arcsin x+\arcsin x\,dx+d\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\,dx-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\,dx.$$

Пример 4. Найти производную функции $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$,

$$\frac{d}{dx}\left[x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]=x\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}x-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(1+x^2)=\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg}x-\frac{x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x.$$

Пример 5. $d\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$,

$$d\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}=\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{2dx}{(x+1)^2\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{2dx}{2x^2+2}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Так как в результате мы получили выражение, совпадающее с выражением диференциала функции $\operatorname{arctg}x$, то отсюда следует, что разность функций $\operatorname{arctg}x$ и $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ есть постоянная величина. Простые вычисления подтверждают этот факт и вместе с тем дают значение постоянной разности.

Так, при $x=0$ имеем:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}=\operatorname{arctg}\ 0-\operatorname{arctg}\quad(-1)=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

При $x = 1$ имеем

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4};$$

при $x = \infty$ имеем

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, постоянная величина разности есть $\frac{\pi}{4}$, и мы имеем право считать доказанной формулу

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ее можно было бы доказать и непосредственно, опираясь на формулу

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u-v}{1+uv}, \tag{36}$$

представляющую обращение известной тригонометрической формулы для тангенса разности двух углов [1]).

Мы привели этот пример для того, чтобы показать, что диференцирование функций может натолкнуть нас на соотношения между ними, которые могли бы не обратить на себя нашего внимания. Часто оказывается, что непосредственный вывод этих соотношений представляет большие технические затруднения. В дальнейшем (упражнения 10 и 11) мы обращаем внимание читателя на существование таких соотношений, но не будем останавливаться на их выводе, ввиду того что практического значения эти соотношения для нас не имеют.

Упражнения.

1) $d(\arcsin x)^2 = \dfrac{2\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) $d\arccos\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$.

3) $d\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b} = \dfrac{ab\, dx}{b^2 + a^2x^2}$.

---

1) Обозначив через α и β величины $\operatorname{arctg} u$ и $\operatorname{arctg} v$, мы получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = u,$$
$$\operatorname{tg}\beta = v,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{u-v}{1+uv},$$

т. е.

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{u-v}{1+uv}.$$

4) $d\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}=\frac{dx}{3x^2+2x+1}$.

5) $d\frac{1}{2}\operatorname{arccosec}\frac{3}{4x-1}=\frac{dx}{\sqrt{2+2x-4x^2}}$.

6) $\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{ctg}x\right)=\frac{\sqrt{ab}\,dx}{a\sin^2x+b\cos^2x}$.

7) $d\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi)\right]=\frac{d\varphi}{1-\sin^4\varphi}$.

8) $d\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]=\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

9) $d\operatorname{arctg}\frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}=\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

10) $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{x-a}{x+a}=\frac{a}{x^2+a^2}$ (сравнить с результатом примера 2 и написать на основании этого сравнения соотношение между

$$\operatorname{arctg}\frac{x-a}{x+a}\text{ и }\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big).$$

11) $d\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\right]=-\frac{dx}{x^2+1}$ [сравнить с формулой (33) и написать соотношение, вытекающее отсюда].

12) $d\left[a\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{a^2-x^2}\right]=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$.

13) $d\left[\operatorname{arcctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right]=\frac{2ax^2\,dx}{x^4-a^4}$.

14) $d\left[x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)\right]=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx$.

15) $d\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{3}}{1-z^2}\right]=\frac{(z^2+1)}{z^4+z^2+1}\,dz$.

§ 17. Обращая формулы дифференциального исчисления, приведенные в предыдущем параграфе, мы приходим к следующим новым формулам интегрального исчисления:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C\ (37)\ [\text{из формулы (28)}],$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C\ (38)\ [\text{из формулы (32)}],$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C \quad (39) \text{ [из формулы (34)]}.$$

Что касается формул (30), (33) и (35), то они не дают ничего существенно нового. Так, формула (30) дает

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C; \qquad (37')$$

но эта формула по существу совпадает с формулой (37). В самом деле, мы показали (§ 14, замечание), что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ связаны соотношением

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому формула (37) может быть переписана так:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + \frac{\pi}{2} + C.$$

Эта формула отличается от (37′) только тем, что в последней величина $\frac{\pi}{2} + C$ обозначена просто через C, что вполне допустимо ввиду произвольности постоянной величины C.

Относительно формул (33) и (35) можно повторить с соответствующими изменениями все, что сказано о формуле (30). Из трех приведенных здесь формул интегрального исчисления две первые имеют большое значение как с практической, так и с принципиальной стороны. Поэтому их необходимо помнить. Что касается третьей формулы, то ее легко свести при помощи простого преобразования к формуле (37), или, что то же, к формуле (37′). Именно, вынося в знаменателе подынтегрального выражения за знак радикала величину x, мы получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Теперь остается взять за вспомогательную функцию $\frac{1}{x}$, и мы получим с помощью формулы (37′):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \arccos\frac{1}{x} + C.$$

Полученная формула лишь по внешности отличается от формулы (39), ибо величины $\operatorname{arccos}\frac{1}{x}$ и $\operatorname{arcsec} x$ тождественно равны между собой [1]).

§ 18. Прежде чем обратиться к практическому использованию новых формул, полученных нами в предыдущем параграфе, мы остановимся на вопросах принципиального характера. Мы знаем, что дифференцирование любой элементарной функции выполняется методически, причем в результате дифференцирования получается функция элементарная. Что касается процесса интегрирования, то мы уже неоднократно обращали внимание на то, что не существует такого методического рецепта, который позволял бы успешно выполнить интегрирование любой данной элементарной функции.

Можно было бы думать, что отсутствие таких рецептов проистекает из несовершенства наших методов и что дальнейшее развитие их выведет нас из неприятного положения и даст возможность методически интегрировать любую элементарную функцию, получая в результате каждый раз опять элементарную функцию.

Оказывается однако, что надежда на создание таких методов совершенно несостоятельна. Отыскание общих методов, с помощью которых интеграл любой элементарной функции может быть представлен элементарной же функцией, обречено заранее на неудачу, потому что интеграл элементарной функции, вообще говоря, *не является элементарной функцией*. На первый взгляд, такое утверждение может показаться странным, особенно если вспомнить, что интегрирование есть операция, обратная дифференцированию, а последняя для всех элементарных функций выполняется и приводит к функциям элементарным.

Чтобы лучше уяснить себе дело, представим себе, что мы ничего не знаем о тригонометрических функциях.

Тогда „элементарными" функциями переменной x будут для нас все те функции, которые получаются при помощи операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования, производимых над переменной x и над постоянными величинами. Понимая термин „элементарная функция" в этом более узком смысле, мы можем сказать, что дифференцирование всякой элементарной функции совершается методически и приводит к элементарной (в узком смысле слова) функции.

Но можем ли мы утверждать что-либо подобное относительно интегрирования „элементарной" функции?

---

[1]) Формальный вывод тождества $\operatorname{arcsec} x = \operatorname{arccos}\frac{1}{x}$ может быть дан таким образом. Обозначим величину $\operatorname{arcsec} x$ через α:

$$\alpha = \operatorname{arcsec} x.$$

Отсюда

$$x = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{x}; \qquad \alpha = \operatorname{arccos}\frac{1}{x}.$$

Сравнивая это равенство с исходным, получаем наше тождество.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для вычисления его можно принять за вспомогательную функцию $1-x$ или $\sqrt{1-x^2}$, и мы получим:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

Таким образом в этом случае интеграл „элементарной" функции $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ есть „элементарная" функция $-\sqrt{1-x^2}+C$.

С помощью той же вспомогательной функции мы выразим „элементарно" интегралы:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и т. д.}$$

Но пусть нам требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ни вспомогательная функция $1-x^2$ ни $\sqrt{1-x^2}$ не помогут нам представить этот интеграл в „элементарном" виде. Можно ли надеяться на то, что усовершенствование методов интегрирования позволит нам добиться желаемого?

Теперь мы можем с уверенностью сказать, что никакие вспомогательные функции, никакие преобразования, вообще никакие ухищрения не позволят этот интеграл вычислить „элементарно", потому что мы знаем, что этот интеграл выражается функцией „неэлементарной", именно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Мы видим, что разыскание методов „элементарного" вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

было заранее обречено на неудачу.

Вот почему невозможно создать методический рецепт элементарного интегрирования: оно, вообще говоря, невыполнимо.

Дело нисколько не облегчается тем, что область элементарных функций расширяется благодаря введению тригонометрических и обратных им функций. Ведь совершенно ясно, что с их введением множество всех возможных функциональных зависимостей совершенно не исчерпано.

И есть ли какая-нибудь гарантия, что интегрирование элементарной функции не может привести к функции, которая не будет элементарной и в расширенном смысле этого слова?

Такой гарантии дать, конечно, нельзя. Более того, можно утверждать, что лишь специально выбранные классы элементарных функций интегрируются элементарно. За примерами ходить недалеко. Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

уже не может быть представлен никакой комбинацией элементарных операций [1]). То же самое можно сказать об интеграле

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Оба эти интеграла дают функции нового типа, имеющие большое теоретическое и практическое значение. Они принадлежат к числу так называемых эллиптических функций, изучением которых занимается специальная математическая дисциплина. К числу неэлементарных интегралов принадлежат также интегралы:

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ (интегральный логарифм)},$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x} \text{ (интегральный синус)},$$

$$\int e^{x^2} dx; \quad \int \sin(x^2)\, dx.$$

Было бы неправильным заключать из вышесказанного, что математика оказывается бессильной разрешить те задачи, которые приводятся к неэлементарным интегралам. Ведь вывод математической формулы не является самодовлеющей целью. Формула служит лишь удобным средством вычисления. Если запас наших операций оказывается недостаточным, для того чтобы написать формулу, решающую задачу, то этим совершенно не исключается возможность получить решение задачи с достаточной степенью приближения. А если это приближение может быть сделано с любой степенью точности, то большего мы не можем и требовать.

Ведь даже такой „элементарный" интеграл, как, например,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a},$$

---

[1]) Доказано впервые Лиувиллем в 1841 г. Привести доказательство этого предложения невозможно в рамках элементарного курса.

нельзя вычислить с „абсолютной" точностью. Но мы можем для всяких чисел a и b найти $\ln\frac{b}{a}$ с той точностью, которая нам потребуется [1]).

Так вот эта цель—уменье вычислить любой заданный интеграл с любой степенью точности—может быть достигнута и без того, чтобы было получено то или иное выражение интеграла при помощи ограниченного числа элементарных операций. Вопросом о том, как достигается эта цель, мы сейчас не будем заниматься [2]).

§ 19. После того, что было сказано в предыдущем параграфе, совершенно ясно, что методические рецепты интегрирования, подобные тем, которые были даны для диференцирования, не могут быть установлены. Однако существуют некоторые классы функций, для которых такие рецепты могут быть даны. Важнейший из этих классов—класс рациональных дробей, т. е. таких дробей, числитель и знаменатель которых—многочлены, содержащие целые степени переменной величины. Интегралы таких дробей всегда, и притом методически, можно представить в виде элементарных выражений.

---

[1]) Возможность или невозможность „написать формулу", дающую интеграл данной функции, всецело зависит от того, ввели или не ввели мы специальное обозначение для некоторой функции, значение которой может быть определено для ряда значений аргумента. Так, для всякого числа x можем найти (приближенно, с любой точностью) такой показатель y, который делает величину e^y равной x. Если мы вводим для функции y обозначение $\ln x$, то этим не прибавляется ничего принципиально нового к нашему значению функциональной зависимости между y и x, но это дает возможность написать формулу

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$$

Точно так же обстоит дело и с неэлементарными функциями, вводимыми интегрированием элементарных функций. Величину $\int_0^x e^{-x^2}dx$ можно с любой степенью точности вычислить для любого значения x [вычисляя, например, вместо интеграла сумму очень большого числа слагаемых вида $e^{x_i^2}(x_{i+1}-x_i)$]. С этой точки зрения интеграл $\int_0^x e^{-x^2}dx$ является такой же функцией, как функция $\ln x$. Для этого интеграла имеются таблицы, составленные с огромной степенью точности. Если мы условимся ввести какой-нибудь символ для обозначения функции $\int_0^x e^{-x^2}dx$, хотя бы символ $E(x)$, то можно написать и формулу

$$\int e^{-x^2}dx=E(x)+C.$$

Имеет ли смысл вводить новые специальные обозначения для неэлементарных функций — это вопрос не принципиального, а чисто практического характера. Так как все равно нельзя ввести обозначения для всех неэлементарных функций (ибо их множество неисчерпаемо), то специальные обозначения вводятся лишь для наиболее часто встречающихся на практике.

[2]) Читатель, который пожелает ознакомиться с методами приближенного вычисления интегралов, может найти доступное изложение этого вопроса в книге Г. М. Фихтенгольца „Математика для техников", § 174—177, Гиз, 1926, стр. 395—409.

Общую теорию интегрирования рациональных дробей излагают более обширные курсы интегрального исчисления. Мы не будем заниматься ею и ограничимся рассмотрением тех случаев, которые имеют практический интерес или позволяют усвоить общую идею, лежащую в основе упомянутой теории.

В § 15 предыдущей главы мы научились уже интегрировать такие рациональные дроби, знаменатели которых разлагаются на произведение линейных множителей. Теперь мы рассмотрим те случаи, когда в знаменатель дроби, помимо множителей линейных, входят многочлены второй степени относительно переменной величины, не разлагающиеся на линейные множители [1]). Простейший случай этого рода представляется при вычислении интеграла

$$\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Знаменатель подъинтегрального выражения $1+x^2$ не раскладывается на множители первой степени (если не вводить мнимых чисел).

Этот интеграл находится по формуле (38) предыдущего параграфа:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C. \tag{38}$$

Эта формула играет основную роль при интегрировании дробей, знаменатели которых содержат неразложимые многочлены второй степени. Ей нетрудно придать более общий вид. Именно, вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Вводя вспомогательную функцию z при помощи уравнения $x = az$, мы получаем:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\,dz}{a^2(1+z^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \tag{39}$$

(ср. с результатом примера 2 § 16).

---

[1]) В высшей алгебре доказывается, что всякий многочлен (содержащий целые положительные степени переменной с числовыми коэфициентами) может быть разложен на множители, каждый из которых будет не выше второй степени. Если ввести в рассмотрение мнимые числа, то всегда возможно разложение на множители первой степени (часть из которых может иметь мнимые коэфициенты). Однако практически это разложение выполнимо только в исключительных случаях. Дело в том, что для разложения нужно предварительно приравнять многочлен нулю и найти корни полученного уравнения. Но для уравнений выше четвертой степени, вообще говоря, нельзя получить „точное" выражение корней, т. е. корни уравнения не могут быть определены по какой-либо алгебраической формуле, как это делается в случае, например, квадратного уравнения. Если коэфициенты уравнения даны в числовом виде, то корни можно вычислить с любой степенью точности. В случае буквенного уравнения фактическое разложение на множители (в общем случае) невыполнимо.

Формулу (39) полезно запомнить; в частном случае $a = 1$ она обращается в формулу (38).

Заметим, что если бы в знаменателе вместо $a^2 + x^2$ мы взяли $a^2 - x^2$ или $x^2 - a^2$, то формула интегрирования приняла бы совершенно иной вид. Например интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

мы вычислим, разлагая знаменатель $x^2 - a^2$ на множители

$$(x - a)\ (x + a)$$

и разлагая дробь $\frac{1}{x^2 - a^2}$ на сумму простейших дробей (§ 15 гл. VI):

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x + a},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C. \tag{40}$$

Эту формулу также полезно запомнить.

Из сказанного следует, что интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - k}$$

выражается различно в зависимости от того, положительно или отрицательно число k. Если k положительно, то по формуле (40) мы имеем

$$\int \frac{dx}{x^2 - k} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{x - \sqrt{k}}{x + \sqrt{k}} + C. \tag{41}$$

Если же k отрицательно, то по формуле (38′)

$$\int \frac{dx}{x^2 - k} = \int \frac{dx}{x^2 + (-k)} = \frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{-k}} + C; \tag{42}$$

$-k$ в этом случае — положительное число, и потому квадратный корень $\sqrt{-k}$ есть действительное число. В случае же положительного k величина $\sqrt{-k}$ была бы числом мнимым. Правая часть формулы (42) стала бы непригодной для вычислений [1]).

---

1) Мы говорим „непригодной“, а не „неверной“, потому что формула (42) останется **верной** и для положительного k. Но, разумеется, для этого необходимо расширить понятие о тригонометрических функциях, введя в рассмотрение кроме углов действительных углы мнимые. Как это делается — об этом мы здесь не можем рассказывать. Существует специальная математическая дисциплина — теория функций комплексного переменного, в которой, между прочим, расширяется и понятие тригонометрических функций.

Заметим только, что „мнимая“ форма не мешает величине $\frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{-k}}$

Перейдем теперь к рассмотрению примеров более сложного типа на вычисление интегралов рациональных дробей, содержащих в знаменателе квадратный многочлен.

Пример 1. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$.

Вынося за скобку в знаменателе 2 и применяя (42), получаем

$$\int \frac{dx}{2x^2+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}x + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}x + C.$$

Можно было бы поступать и так: умножим числитель и знаменатель дроби на 2 и примем за вспомогательную функцию $2x$.

$$\int \frac{dx}{2x^2+7} = \int \frac{2dx}{(2x)^2+14} = \int \frac{d(2x)}{(2x)^2+14} = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{14}} + C.$$

Этот способ удобнее применять в тех случаях, когда в знаменателе имеем полный квадратный трехчлен, как мы имеем в следующем примере.

Пример 2. $\int \frac{dx}{3x^2-8x+7}$.

Умножая числитель и знаменатель на 3, постараемся представить знаменатель в виде суммы квадрата линейного двучлена и постоянного числа. Делается это совершенно так же, как в алгебре при выводе формулы квадратного уравнения:

$$3(3x^2-8x+7) = (3x)^2 - 24x + 21 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4 + 21 =$$

$$= (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 21 = (3x-4)^2 + 5,$$

$$\int \frac{dx}{3x^2-8x+7} = \int \frac{3dx}{3(3x^2-8x+7)} = \int \frac{3dx}{(3x-4)^2+5}.$$

За вспомогательную функцию принимаем $3x-4$ и получаем

$$\int \frac{dx}{3x^2-8x+7} = \int \frac{3dx}{(3x-4)^2+5} = \int \frac{d(3x-4)}{(3x-4)^2+5} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-4}{\sqrt{5}} + C.$$

иметь действительные значения при действительных значениях величин x и k ($k>0$). Так, например, при $x=2$ и $k=1$ величина $\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{-1}}$ есть действительная величина, одно из значений которой (функция arctg—многозначна) равно $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$ [сравните с формулой (42)]. В этом нет ничего противоестественного, ибо произведение двух мнимых чисел может давать число действительное: например, произведение $\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}$ дает действительное число -1.

Проверьте результат диференцированием.

Если коэфициент при первой степени x был бы целым нечетным числом, то, для того чтобы не вводить дробей, можно умножать числитель и знаменатель на учетверенный коэфициент квадратного члена [1]).

Пример 3. $\int \frac{dx}{5x^2+3x+1}$.

$$\int \frac{dx}{5x^2+3x+1} = \int \frac{20dx}{20(5x^2+3x+1)} = \int \frac{20dx}{100x^2+60x+20} =$$

$$= \int \frac{20dx}{(10x+3)^2+11} = \int \frac{2d(10x+3)}{(10x+3)^2+11} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{10x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} = \int \frac{8dx}{8(2x^2+3x+1)} = \int \frac{8dx}{16x^2+24x+8} =$$

$$= \int \frac{8dx}{(4x+3)^2-1} = \int \frac{2d(4x+3)}{(4x+3)^2-1}.$$

Здесь мы получили не положительный, а отрицательный свободный член. Поэтому, приняв функцию $4x+3$ за вспомогательную, мы должны, если хотим избежать мнимой формы, применить не формулу (42), а формулу (41).

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} = \ln \frac{4x+3-1}{4x+3+1} + C = \ln \frac{4x+2}{4x+4} + C =$$

$$= \ln \frac{2x+1}{2x+2} + C.$$

Разумеется, мы могли бы получить тот же результат, если бы трехчлен $2x^2+3+1$ разложили на множители:

$$2x^2+3x+1 = (2x+1)(x+1)$$

и методом неопределенных коэфициентов разложили бы подъинтегральную функцию на сумму дробей с одночленными знаменателями (§ 15 гл. VI).

Пример 5. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Этот интеграл отличается от интеграла $\int \frac{dx}{x^2+1}$ множителем x

[1]) Этот искусственный прием всегда ведет к цели, потому что от умножения на коэфициент при квадратном члене последний становится полным квадратом. Умножая еще на 4, мы сохраняем полноту квадрата, и в то же время обеспечиваем четность коэфициента при первой степени x.

в числителе. Он выражается уже не тригонометрической, а логарифмической функцией. Именно, беря за вспомогательную функцию x^2+1, мы получаем:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C = \ln\sqrt{x^2+1}+C.$$

Пример 6. $\int \frac{20x+6}{5x^2+3x+1}\,dx.$

Если обратить внимание на то, что в числителе стоит удвоенный диференциал знаменателя, то мы получаем:

$$\int \frac{(20x+6)\,dx}{5x^2+3x+1} = \int \frac{2d(5x^2+3x+1)}{5x^2+3x+1} = 2\ln(5x^2+3x+1)+C.$$

Пример 7. $\int \frac{3x+7}{x^2+1}\,dx.$

Разбивая этот интеграл на сумму двух, получаем (ср. пример 5)

$$\int \frac{3x+7}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + 7\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)+7\operatorname{arctg}+C.$$

Пример 8. $\int \frac{3x+7}{5x^2+3x+1}\,dx.$

Если мы, как в предыдущем примере, представим интеграл в виде

$$\int \frac{3x+7}{5x^2+3x+1}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{5x^2+3x+1} + 7\int \frac{dx}{5x^2+3x+1},$$

то второй из получившихся интегралов вычислится, как в примере 3. Первый же интеграл не вычислится так просто, как в предыдущем примере, потому что числитель $x\,dx$ не представляет собой ни диференциала знаменателя ни его кратного. Но мы можем разбить дробь $\frac{3x+7}{5x^2+3x+1}\,dx$ на два слагаемых и иначе, а именно так, чтобы одно из них имело вид: $\alpha\cdot\frac{d(5x^2+3x+1)}{5x^2+3x+1} = \alpha\cdot\frac{(10x+3)\,dx}{5x^2+3x+1}$ (α — некоторое, пока неизвестное, число), другое же — вид

$$\beta\cdot\frac{dx}{5x^2+3x+1}.$$

Тогда оба эти слагаемые легко проинтегрировать (примеры 3 и 6).

Итак, нужно подобрать числа α и β так, чтобы удовлетворилось тождественно равенство:

$$(3x+7)\,dx = \alpha\,d(5x^2+3x+1)+\beta\,dx$$

или

$$3x+7 = \alpha(10x+3)+\beta.$$

Сравнивая коэфициенты при x и свободные члены в обеих частях равенства, мы получаем

$$10\alpha = 3, \quad 3\alpha + \beta = 7,$$

откуда

$$\alpha = \frac{3}{10}, \qquad \beta = 6\frac{1}{10}.$$

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{5x^2+3x+1} = \frac{3}{10}\int \frac{(10x+3)\,dx}{5x^2+3x+1} + 6\frac{1}{10}\int \frac{dx}{5x^2+3x+1} =$$

$$= \frac{3}{10}\ln(5x^2+3x+1) + \frac{61}{5\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{10x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

Метод, примененный нами к этому числовому примеру, носит совершенно общий характер и может быть применен к любому интегралу вида

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}.$$

Предоставляем читателю получить общую формулу. Запоминать ее нет никакой нужды.

Если в числителе мы имели бы многочлен второй или более высокой степени, то следовало бы предварительно произвести деление числителя на знаменатель. Остаток будет служить числителем новой дроби. Он будет не выше первой степени. Частное же даст целый многочлен, интеграция которого не представляет затруднений.

Пример 9. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2+6x+10}\,dx.$

Производим деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x^2+6x+10 \\ \cline{2-2} x^3+6x^2+10x & x-6 \\ \cline{1-1} -6x^2-10x-1 & \\ -6x^2-36x-60 & \\ \cline{1-1} +26x+59, & \end{array}$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+6x+10} = \frac{26x+59}{x^2+6x+10} + x - 6,$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{26x+59}{x^2+6x+10}\,dx + \int x\,dx - 6\int dx =$$

$$= 13\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+10} - 19\int \frac{dx}{x^2+6x+10} + \int x\,dx - 6\int dx =$$

$$= 13\ln(x^2+6x+10) - 19\operatorname{arctg}(x+3) + \frac{x^2}{2} - 6x + C.$$

Пример 10. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Знаменатель можно разложить на множители:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\ ^1),$$

и теперь мы постараемся представить подъинтегральную функцию $\frac{1}{x^3+1}$ в виде суммы двух дробей с знаменателями $x+1$ и x^2-x+1.

С первого раза может показаться, что разложение нужно искать в форме

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2-x+1}.$$

Но мы сейчас же убеждаемся, что в этой форме разложение не имеет гарантии на успех. В самом деле, приведя правую часть к общему знаменателю, мы в числителе получим члены второй и первой степени и свободный. Числа A и B должны будут удовлетворить трем уравнениям. Но три уравнения с двумя неизвестными, вообще говоря, если не считать исключительных случаев, не имеют решения.

Ввиду этого мы вынуждены искать иное разложение дроби $\frac{1}{x^3+1}$ на сумму „простейших" дробей. Именно, оставляя те же знаменатели $x+1$ и x^2-x+1, мы постараемся числитель второй дроби искать не в виде постоянной величины, а в виде двучлена первой степени $Bx+C$ [2]):

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Найдя его, мы приведем задачу к вычислению интегралов

$$\int \frac{A}{x+1}dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Bx+C}{x^2-x+1}dx,$$

которые мы вычислять умеем.

Приводя к общему знаменателю правую часть, мы получаем в числителе:

$$(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C).$$

---

[1]) Квадратный трехчлен x^2-x+1 на множители первой степени (с действительными коэфициентами) не разлагается, так как уравнение $x^2-x+1=0$ имеет мнимые корни.

[2]) Этот прием подсказывается таким соображением: положим, что квадратный трехчлен можно разложить на множители первой степени, как например в случае $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Тогда сумма дробей вида $\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}$, если их привести к общему знаменателю, представится выражением вида $\frac{(M+N)x+(-2M-N)}{x^2-3x+2}$. Если не считать исключительных случаев (когда $M+N=0$), то в числителе мы получаем не постоянную величину, а двучлен первой степени. Отсюда естественно искать разложение, указанное в тексте.

Принимая во внимание, что это выражение должно тождественно равняться единице, мы получаем для определения A, B и C три уравнения:

$$A+B=0,$$
$$B+C-A=0,$$
$$A+C=1,$$

откуда находим:

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{2}{3};$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1}.$$

Поступая со вторым интегралом, как в примере 7, получаем

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

В заключение мы рассмотрим пример более сложного типа, когда в знаменателе мы имеем не один, а большее число неразложимых квадратных многочленов. Ограничимся случаем двух сомножителей.

Пример 11. $\displaystyle\int\frac{5x^3+2x^2+7x+5}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx.$

Постараемся разложить подъинтегральную функцию на сумму дробей с знаменателями x^2+1 и x^2+2. Очевидно, что числители этих дробей нужно искать в форме двучленов первой степени:

$$\frac{5x^3+2x^2+7x+5}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Поступая, как в предыдущем примере, получаем четыре уравнения:

$$A+C=5,\quad B+D=2,\quad 2A+C=7,\quad 2B+D=5,$$

из которых находим:

$$A=2,\quad B=3,\quad C=3,\quad D=-1;$$

$$\int\frac{5x^3+2x^2+7x+5}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx=\int\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+1}+\int\frac{(3x+1)\,dx}{x^2+2}=$$
$$=\ln(x^2+1)+3\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Этот способ имеет совершенно общий характер и может быть применен и к случаю, когда знаменатель содержит более двух неразложимых сомножителей второй степени, если только все они различны

между собой. Если же два сомножителя оказываются равными, как например в интеграле $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, то, как легко видеть, разложение вышеприведенного типа невозможно. В этом случае нужно действовать иными приемами, в рассмотрение которых мы не входим, отсылая интересующегося читателя к более полным курсам интегрального исчисления [1]). Практическое значение этих случаев невелико.

Упражнения.

1) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}.$

4) $\int \frac{(4x+3)\,dx}{x^2+9} = 2\ln\,(x^2+9) + \operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

5) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x+1)\,dx}{x^2+1} = \ln 2+\frac{\pi}{3}.$

6) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}\,dx = \ln(x^2-3x+7)+C,$

7) $\int \frac{dx}{3x^2-5x+3} = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-5}{\sqrt{11}}+C.$

8) $\int \frac{dx}{9x^2+30x+29} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x+5}{2}+C.$

9) $\int \frac{6x+1}{9x^2-12x+8}\,dx = \frac{1}{3}\ln(9x^2-12x+8)+$
$+\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{2}+C.$

10) $\int \frac{6x\,dx}{x^2-3x+7} = 3\ln(x^2-3x+7)+$
$+\frac{18}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{19}}+C.$

[1] См., например В. Гр э н в и л ь, Элементы диференциального и интегрального исчислений, ч. II, гл. III (стр. 28—40 6-го издания Гиз 1928).

11) $\int \frac{(12x+2)\,dx}{2x^2-2x+5} = 3\ln(2x^2-2x+5)+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C.$

12) $\int \frac{9x-11}{x^2-3x+2}\,dx = \ln[(x-1)^2(x-2)^7]+C.$

13) $\int \frac{dx}{x^2-12x+36} = -\frac{1}{x-6}+C.$

14) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{10}\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

15) $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)-\ln(x-1)+$
$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$

16) $\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{3}\ln(1-x)+$
$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

17) $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

18) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$

(здесь следует заметить, что в числителе стоит $\frac{1}{3}$ дифференциала знаменателя).

19) $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+$
$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)\right]+C=$
$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$

[см. формулу (36) § 16 этой главы].

20) $\int \frac{(9x^3+21x^2+41x+35)\,dx}{9x^2+12x+29} = \frac{x^2}{2}+x+$
$+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{5}+C$

(ср. примеры 1 и 2 § 15 гл. VI).

§ 20. Кроме рациональных дробей, следует указать еще один класс функций, которые могут быть методически проинтегрированы в элементарных функциях. Это — те функции, которые содержат в качестве единственной иррациональности квадратный корень из многочлена не выше второй степени (относительно переменной интеграции). Как и в предыдущем параграфе, мы не будем излагать теорию интегрирования таких функций, а рассмотрим ряд примеров, представляющих наибольший интерес в практическом отношении.

Один из простейших интегралов этого типа позволяет вычислить первая основная формула § 17, именно формула

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \tag{37}$$

Эта формула имеет основное значение при интегрировании функций рассматриваемого здесь типа. Ее легко обобщить, а именно вычислить интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Достаточно ввести вместо x вспомогательную переменную z уравнением

$$x = az;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C.$$

Следовательно, мы имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \tag{43}$$

Эту формулу полезно помнить; формула (37) представляет ее частный случай. Заметим, что если бы в знаменателе мы вместо $\sqrt{a^2-x^2}$ имели $\sqrt{a^2+x^2}$ (или $\sqrt{-a^2+x^2}$), то, желая избежать мнимостей (ср. § 19, сноска), мы должны были бы получить формулу иного вида, именно (см. § 14 гл. VI):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C. \tag{44}$$

Формула (44), наряду с (43), является основной формулой при интегрировании функций, имеющих единственной иррациональностью квадратный корень из многочлена второй степени.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}$.

Для большего удобства вычислений превратим свободный член

в квадрат целого числа, для чего числитель и знаменатель помножим на $\sqrt{5}$. После этого введем вспомогательную функцию $\sqrt{10}\,x=z$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}=\int\frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{25-10x^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\int\frac{dx}{\sqrt{25-z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{z}{5}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}x+C.$$

Результат можно представить в форме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}\,x+C.$$

Нетрудно тем же методом получить общую формулу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{m-nx^2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\sqrt{\frac{n}{m}}\,x+C.$$

Если мы хотим избежать мнимостей, то эту формулу можно применять лишь в тех случаях, когда числа m и n оба положительны.

Пример 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-5}}$.

Поступая, как в предыдущем примере, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-5}}=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{(2x)^2-10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-10}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-10}\right)+C.$$

Заметим, что в этом, как и в предыдущем, примере вычисление можно вести и иначе, например можно вынести за знак интеграла множитель $\sqrt{2}$. Тогда с помощью формулы (44) получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{5}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}}\right)+C.$$

Это выражение лишь по форме отлично от предыдущего (постоянная первого интеграла меньше, чем постоянная второго, на величину $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2$).

Тем же методом получим общую формулу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{nx^2-m}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-\frac{m}{n}}\right)+C.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-10x-3x^2}}$.

Так как квадратный член под корнем входит с отрицательным коэфициентом, то постараемся привести этот интеграл к интегралу вида (43).

С этой целью преобразуем подкоренное выражение так, чтобы оно содержало свободный член и квадрат линейного двучлена (ср. пример 2 предыдущего параграфа). Предварительно удобно увеличить подкоренное выражение втрое (что можно компенсировать умножением числителя дроби на $\sqrt{3}$):

$$3(7-10x-3x^2)=21-30x-9x^2=21-(30x+9x^2)=$$
$$=21+25-(25+30x+9x^2)=46-(3x+5)^2.$$

Теперь ясно, что нужно ввести вспомогательную функцию $3x+5=z$. Вычисление интеграла можно повести так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7-10x-3x^2}}=\sqrt{3}\int\frac{dx}{\sqrt{46-(3x+5)^2}}=\sqrt{3}\int\frac{dz}{\sqrt{46-z^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{z}{\sqrt{46}}+C-\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{3x+5}{\sqrt{46}}+C.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x+4x^2}}$.

Здесь квадратный член имеет положительный коэфициент; методом, аналогичным только что примененному, приведем его к виду (44). Вводя вспомогательную функцию $2x+1=z$, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+4x+4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left(2x+1+\sqrt{2+4x+4x^2}\right)+C.$$

Последние два примера показывают, что при соответствующем выборе вспомогательной функции под знаком радикала всегда можно иметь выражение вида $z^2\pm a^2$ или $\pm a^2-z^2$. При этом в случае $-a^2-z^2$ выражение $\sqrt{-a^2-z^2}$ всегда имеет мнимые значения, так что практического значения этот случай для нас не имеет. Поэтому в следующих примерах мы будем брать под знаком радикала квадратный многочлен без свободного члена (двучлен вида $z^2\pm a^2$ или a^2-z^2).

Пример 5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Примеры подобного типа мы уже неоднократно имели. Несмотря на то, что квадрат переменного входит с знаком минус, мы получаем не тригонометрическую, а алгебраическую функцию:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 6. $\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = m\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + n\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= -m\sqrt{a^2-x^2} + n \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 7. $\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = m\sqrt{a^2+x^2} + n \ln (x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

Пример 8. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Этот интеграл, имеющий большое практическое значение, можно вычислять различными способами. Первое, что приходит на мысль,— это перенесение иррациональности в знаменатель, в надежде воспользоваться формулой (43):

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} -$$

$$- \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Первый интеграл действительно непосредственно берется по формуле (43), но со вторым дело осложняется. Здесь нам поможет интегрирование по частям:

$$-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x \cdot \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x\,d\sqrt{a^2-x^2} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Хотя мы не довели интегрирования до конца, но пришли к исходному интегралу. Поэтому, перенося в уравнении

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}$$

из правой части в левую последнее слагаемое, получаем

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C. \qquad (45)$$

Ту же формулу можно получить и иным приемом, который с успехом применяется и в других случаях при интегрировании выражений, содержащих иррациональности вида $\sqrt{a^2-x^2}$. Именно, введем вспомогательную функцию z уравнением:

$$x = a\sin z,$$

$$dx = a\cos z\,dz.$$

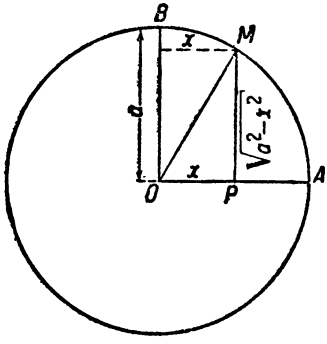
Тогда получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}\cdot a\cos z\,dz = a^2\int \cos^2 z\,dz.$$

Интеграл, к которому мы пришли, мы уже вычисляли в этой главе (пример 14 § 9, пример 5 § 11):

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 z\,dz = \frac{a^2}{2}z+\frac{a^2}{2}\sin z\cos z + C.$$

Заменяя $\sin z$ через $\frac{x}{a}$, $\cos z$ через $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ и, наконец, z через $\arcsin\frac{x}{a}$, мы получаем снова формулу (45).



Черт. 85.

Для того чтобы легче запомнить эту формулу, полезно истолковать ее геометрически. Интеграл $\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ дает, как показывает черт. 85, величину площади $OBMP$, составленной из сектора BOM и треугольника OMP (a — радиус окружности).

Согласно формуле (45), этот интеграл равен

$$\int_0^x \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Первое слагаемое дает площадь сектора BOM, так как, обозначая через z радиальную меру угла BOM, имеем

$$\text{площ. } BOM = \frac{1}{2}a\cdot\overset{\frown}{BM} = \frac{1}{2}a\cdot az = \frac{1}{2}a^2 z = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{MK}{MO} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Второе же слагаемое дает площадь треугольника OMP, так как

$$\text{площ. } OMP=\frac{1}{2}OP\cdot MP-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Пример 9. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

Этот интеграл может быть вычислен методом, аналогичным употребленному в предыдущем примере:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$$

$$=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx,$$

$$2\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+x\sqrt{a^2+x^2},$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+C$$

(ср. пример 6 § 14 гл. VI).

Можно было бы воспользоваться для вычисления интеграла тригонометрической подстановкой, но уже не подстановкой $x=a\sin z$, а $x=a\operatorname{tg} z$. Мы получим

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\frac{dz}{\cos^3 z}.$$

Этот интеграл мы умеем вычислять (см. § 11, пример 12 и упражнение 13).

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\frac{\sin z}{\cos^2 z}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\sec z+\operatorname{tg} z\right)+C;$$

подставляя

$$\operatorname{tg} z=\frac{x}{a};\ \sec z=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a};\ \cos z=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}};\ \sin z=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

получаем

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)+C.$$

Выражение лишь по форме отличается от предыдущего (ср. пример 2).

Пример 10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Применим подстановку $x = a\sin\varphi$:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\varphi - \frac{a^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi + C$$

(пример 5 и упражнение 6 § 11).

Вставляем $\sin\varphi = \frac{x}{a}$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; $\varphi = \arcsin\frac{x}{a}$;

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Можно было бы применить к этому интегралу метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int x\,d\sqrt{a^2-x^2} = -\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Последний интеграл был найден уже в примере 8; если бы мы не вычислили его предварительно, нам пришлось бы, продолжая вычисление, перенести иррациональность в знаменатель. В правой части окажется исходный интеграл (со знаком минус). Предоставляем читателю довести вычисление до конца.

Пример 11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

За вспомогательную функцию можно взять $\frac{1}{x}$ (ср. § 17) или еще лучше $\frac{a}{x} = z$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -\frac{1}{a}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

Избавившись от иррациональности в знаменателе, мы можем написать результат так:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C;$$

к тому же результату мы придем при помощи тригонометрической подстановки

$$x = a\sin\varphi; \quad dx = a\cos\varphi\, d\varphi;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi) + C;$$

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Пример 12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^3}$.

Можно ввести вспомогательную функцию $\frac{a}{x}$; мы воспользуемся тригонометрической подстановкой

$$x = a\sec\varphi; \quad dx = a\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi; \quad (\sqrt{x^2-a^2})^3 = \operatorname{tg}^3\varphi,$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^3} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec\varphi\, d\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{a^2\sin\varphi} + C =$$

$$= -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

Пример 13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$.

Преобразуя подкоренное выражение, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-(x-a)^2}}.$$

Здесь предвидятся две подстановки: $x-a=z$ и затем $z=a\sin\varphi$; выполним их сразу, положив:

$$x-a = a\sin\varphi, \quad x = a(1+\sin\varphi), \quad dx = a\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1}{a}(\operatorname{tg}\varphi - \sec\varphi) + C$$

(ср. пример 9 и упражнение 5 § 9).

Из уравнения $x-a=a\sin\varphi$ находим:

$$\sin\varphi = \frac{x-a}{a}, \quad \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{(x-a)^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a},$$

$$\sec\varphi = \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{1}{a}\,\frac{x-2a}{\sqrt{2ax-x^2}} + C = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C.$$

Пример 14. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx.$

Для вычисления этого интеграла можно предложить ряд хороших приемов. Можно, например, спустить иррациональность в знаменатель:

$$\int \frac{\sqrt{a-x}}{x}\,dx = \int \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2}}.$$

Далее, как и в предыдущем примере, вводим вспомогательную функцию φ уравнением

$$x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sin\varphi, \quad x = \frac{a}{2}(1+\sin\varphi), \quad dx = \frac{a}{2}\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2(1-\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{\frac{a}{2}\cos\varphi} =$$

$$= \frac{a}{2}\int (1-\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{a}{2}(\varphi+\cos\varphi) + C = \frac{a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a} +$$

$$+\sqrt{ax+x^2} + C.$$

Можно ввести вспомогательную функцию ϑ уравнением $x = a\sin^2\vartheta$; тогда

$$a - x = a\cos^2\vartheta; \quad \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \operatorname{ctg}\vartheta, \quad dx = 2a\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\int \frac{\sqrt{a-x}}{x}\,dx = 2a\int \operatorname{ctg}\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = 2a\int \cos^2\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= a\vartheta + a\sin\vartheta\cos\vartheta + C;$$

так как

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \cos\vartheta = \sqrt{\frac{a-x}{a}}, \quad \vartheta = \arcsin = \sqrt{\frac{x}{a}},$$

то мы получаем окончательно

$$\int \frac{\sqrt{a-x}}{x}\,dx = a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{ax-x^2} + C.$$

Этот результат отличается от предыдущего лишь по форме. Величины $a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$ и $\frac{a}{2} \arcsin \frac{2x-a}{a}$ должны разниться друг от друга на постоянную величину. Эта величина, если она нас интересует, может быть найдена подстановкой вместо x любого числового значения. Например, для $x=0$ разность $a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$ и $\frac{a}{2} \arcsin \frac{2x-a}{a}$ дает

$$a \arcsin 0 - \frac{a}{2} \arcsin (-1) = -\frac{a}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\frac{\pi}{4}.$$

Проверьте результат при $x=a$, $x=\frac{a}{4}$. Разумеется, можно дать непосредственное доказательство этого интересного соотношения, но оно не так просто раскрывается [1]).

Укажем, наконец, еще один удобный прием вычисления интеграла

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx.$$

Полагаем: $x=z^2$, $dx=2z\,dz$,

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx = 2\int \sqrt{a-z^2}\, dz.$$

Отсюда, пользуясь формулой (45), выведенной в примере 8, получаем:

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx = a \arcsin \frac{z}{\sqrt{a}} + z\sqrt{a-z^2} + C =$$

$$= a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{ax-x^2} + C.$$

Упражнения.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+4x-12}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \ln\left(7x+2+\sqrt{49x^2+28x-84}\right) + C.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+5x+8}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x-5}{11} + C.$

---

[1]) Полагая $\arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} = u$, т. е. $\frac{x}{a} = \sin^2 u$, мы получим $\frac{2x-a}{a} = 2\sin^2 u - 1 = -\cos 2u = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2u\right)$, т. е. $\arcsin \frac{2x-a}{a} = -\frac{\pi}{2}+2u$; следовательно $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x-a}{a} = -\frac{\pi}{4}+u = -\frac{\pi}{4}+\arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$

3) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \sqrt{x^2-2x+3} + \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right) + C.$$

4) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \arcsin\frac{x-1}{2} - \sqrt{-x^2+2x+3} + C.$$

5) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2-x^2} - \frac{3}{8}a^2x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

(Интегрировать по частям, как в примере 10, и использовать результат этого примера. Другой способ — тригонометрическая подстановка: использовать результат упражнения 7 § 11.)

6) $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

(Спустить иррациональность в знаменатель и использовать предыдущий результат.)

7) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{3}(2a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$$

9) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x} = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

11) $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

12) $$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + \sqrt{(a-x)(b+x)} + C.$$

(Ср. пример 14; здесь проще всего использовать последний из указанных там приемов; впрочем нетрудно обобщить и оба других.)

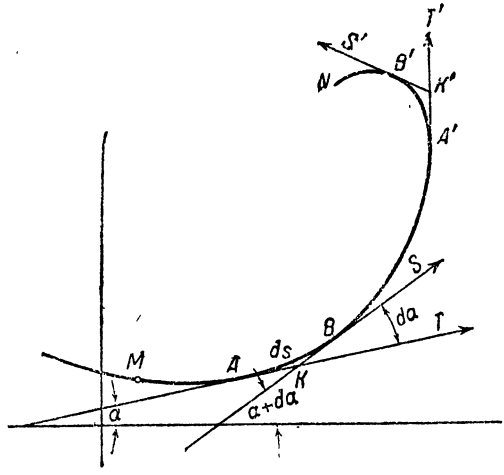
13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

14) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx =$$
$$= \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}\right) + C.$$

§ 21. Переходя к рассмотрению задач на применение изложенного теоретического материала, мы для начала займемся решением одного геометрического вопроса, представляющего большой интерес и для приложений. Именно, мы поставим себе задачей вычислить кривизну плоской линии в любой ее точке. При этом мы будем считать, что линия нам задана своим уравнением в прямоугольной системе координат.

Прежде всего необходимо установить само понятие кривизны линии.

Взглянем на черт. 86. Линия MN, изображенная на нем, искривлена в верхней своей части гораздо сильнее, чем в нижней. Иначе говоря, кривизна ее в верхней части больше, чем кривизна в нижней. Чтобы облечь это сравнение в математическую форму, мы должны будем выразить кривизну линии в некоторой числовой мере. Что же принять за числовую меру кривизны?



Черт. 86.

Говоря, что кривизна дуги $A'B'$ больше, чем кривизна AB, мы выражаем тот факт, что направление кривой линии изменяется вдоль $A'B'$ быстрее, чем вдоль AB.

„Быстрее" — это значит, что на единицу длины $A'B'$ приходится больший угол поворота направления, чем на единицу длины AB [1]).

Таким образом мы приходим к такому выбору меры кривизны: мерой кривизны (или, проще, кривизной) дуги AB мы назовем тот угол поворота направления, который приходится на единицу длины этой дуги.

Согласно с этим кривизна дуги AB измеряется частным

$$\frac{\angle SKT}{\smile AB}$$

от деления на длину дуги AB угла SKT, образованного касательными AT и BS.

---

[1]) Величину поворота нужно относить к единице длины, а не просто сравнивать повороты направления вдоль AB и $A'B'$, потому что, если дуга $A'B'$ мала по сравнению с AB, то вдоль нее направление кривой может измениться меньше, чем вдоль AB, несмотря на большую кривизну.

Теперь мы имеем возможность выразить в числовой мере степень искривленности дуги AB кривой линии. Но этого еще недостаточно, потому что кривизна линии может меняться и на протяжении самой дуги AB, так что необходимо иметь числовую меру кривизны линии в данной ее точке, например в точке A.

Если кривизна линии остается неизменной вдоль дуги AB, то величина $\frac{\angle SKT}{\smile AB}$ характеризует кривизну линии в точке A, в точке B и во всех промежуточных. Поэтому, если мы желаем получить для любой кривой меру кривизны ее в точке A, мы должны взять дугу AB бесконечно-малой. Тогда вдоль нее кривизна может считаться неизменной, и мы получаем следующее определение кривизны линии в данной ее точке: кривизна линии в точке A есть частное от деления бесконечно-малого угла поворота касательной на бесконечно-малую длину соответствующей дуги кривой.

Обозначим через α угол наклона касательной к кривой (черт. 86) т. е. угол между касательной и осью абсцисс. Бесконечно-малый угол поворота касательной представляется величиной $d\alpha$.

Через s обозначим расстояние (по кривой) переменной точки A от некоторого начала отсчета (например от точки M). Длина бесконечно-малой дуги AB представится величиной ds.

Обозначая, наконец, через K кривизну линии в точке A, мы получаем на основании вышесказанного

$$K=\frac{d\alpha}{ds}. \tag{46}$$

Нам остается выразить $d\alpha$ и ds через диференциалы координат.

Диференциал длины дуги кривой ds, как мы знаем (§ 20 гл. V), выражается формулой

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Что же касается величины $d\alpha$, то для нахождения ее вспомним, что величина угла α определяется формулой (§ 26 гл. IV)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

Отсюда

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx},$$

$$d\alpha=d\left(\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Вычисляя диференциал дроби $\frac{dy}{dx}$, мы находим

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d(dy)-dy\,d(dx)}{(dx)^2},$$

или, пользуясь обозначениями, введенными в предыдущей главе,

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx)^2}.$$

Отсюда величина $d\alpha$ представится так:

$$d\alpha=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx)^2\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right]}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Подставляя это выражение и выражение для ds в формулу (46), мы получаем для кривизны K следующее выражение:

$$K=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{[\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}]^3}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{[(dx)^2+(dy)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (47)$$

Это и есть формула, определяющая кривизну линии в данной ее точке. В нее входят кроме первых еще и вторые дифференциалы координат. Это совершенно естественно, потому что первые дифференциалы координат определяют (своим отношением) лишь наклон линии, а при одном и том же наклоне линия может иметь различную кривизну. Чтобы знать кривизну, нужно знать изменение наклона, а для этого необходимо знать изменение первых дифференциалов, т. е. вторые дифференциалы координат.

Формула (47) дает возможность определить кривизну любой линии в произвольной ее точке, как только известно уравнение этой линии. В курсах дифференциального исчисления она обычно приводится [illegible]ином виде: вместо дифференциалов в ней фигурируют производные функции: первая и вторая. Нетрудно соответственным образом преобразовать формулу (47). Пусть в уравнении кривой линии за независимую переменную принята абсцисса x, за функцию — ордината y. Через y' мы обозначим производную функцию (первую)

$$y'=\frac{dy}{dx};$$

далее, через y'' обозначим вторую производную

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx)^3} \qquad (48)$$

(см. § 34 гл. VI).

Сопоставляя последнее выражение с выражением кривизны линии

$$K=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{[\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}]^3}, \qquad (47)$$

мы видим, что в числителе формулы (47) стоит не что иное, как $y''(dx)^3$. Знаменатель же легко преобразуется к виду:

$$\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]^3(dx)^3=(\sqrt{1+y'^2})^3\,(dx)^3.$$

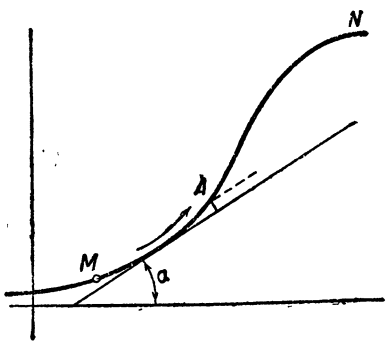
Поэтому, сокращая на $(dx)^3$, можно переписать формулу (47) так:

$$K=\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}. \qquad (49)$$

Кривизна выразилась через первую и вторую производные ординаты по абсциссе.

Относительно выбора знака перед радикалом следует заметить, что здесь возможны два подхода. Если нас интересует только абсолютная величина кривизны, но неважно, в какую сторону искривляется линия, то мы можем выбирать знак перед радикалом в знаменателе так, чтобы K выразилось числом положительным. Но часто бывает интересно проследить и за тем, в какую сторону искривляется линия.

Так, на черт. 87 мы видим, что если итти по линии MM от точки N к точке N, то искривление происходит сначала влево, а затем вправо. Это отражается на знаке величины K. В самом деле, величина K равна $K=\frac{d\alpha}{ds}$. В нижней части MN при продвижении по направлению стрелки угол α увеличивается, так что $d\alpha$ — положительная величина; в верхней части α уменьшается, так что $d\alpha$ — отрицательная величина.



Черт. 87.

Таким образом, чтобы судить о направлении кривизны, мы должны будем, зафиксировав знак радикала (например беря всегда знак плюс), обратить внимание на знак величины K. Различие в знаках будет свидетельствовать об изменении направления закривления. Что касается того, каков именно будет знак кривизны в данной точке A кривой, т. е. плюс или минус, то это совершенно несущественно. Если, например, начало отсчета дуг выбрать в точке M, то, для точки A, $d\alpha$ — положительно, ds — положительно [1]) и следовательно K положительно. Если же начало отсчета дуг выбрать в точке N, то $d\alpha$ остается положительным, но ds — отрицательно, и кривизна в точке A окажется отрицательной. Таким образом здесь, как и всегда, выбор знака имеет чисто относительный характер.

---

[1]) Если изменить направление движения по кривой, оставляя неизменным начало отсчета, то обе величины $d\alpha$ и ds меняют знак на обратный, так что знак величины $K=\frac{d\alpha}{ds}$ остается тот же.

§ 22. *Задача 105.* Найти меру кривизны окружности радиуса R в произвольной ее точке A.

Чтобы получить уравнение окружности в наиболее простой форме, выберем начало координат в центре окружности O. Уравнение окружности будет

$$x^2+y^2=R^2,$$

откуда

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Первая производная выражается формулой

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Вторая производная будет

$$y''=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)=-\frac{R^2}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}.$$

Подставляя эти выражения y' и y'' в (49), получаем

$$K=\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=-\frac{R^2}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}:\left[\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\right]^3=$$

$$=-\frac{R^2}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}:\frac{R^3}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}=-\frac{1}{R}.$$

Мы видим, что кривизна окружности одинакова во всех ее точках и равна обратной величине радиуса. Что касается знака минус, то самостоятельного геометрического значения он не имеет никакого [1]).

Полезно обратить внимание на то, что численная величина кривизны данной окружности зависит от выбора единицы длины. Это явление носит совершенно общий характер, ибо, чтобы вычислить кривизну линии, мы берем величину поворота, приходящуюся на единицу длины [2]).

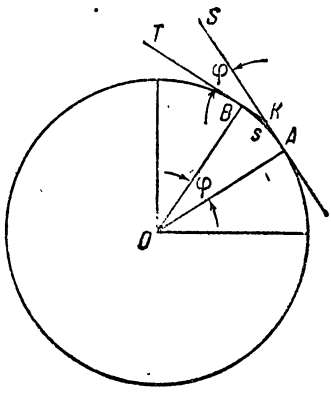
---

[1]) В формуле $K=\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$ независимой переменной является величина x. Этим случайным для дела обстоятельством и вызывается наличие знака минус. Если бы за независимую переменную мы взяли y, а x считали бы функцией y, то первая производная x' имела бы вид $\frac{dx}{dy}$, вторая же производная x'' представилась бы отношением $\frac{dy\,d^2x-dx\,d^2y}{(dy)^3}$. Рассуждая так же, как в предыдущем параграфе, мы получили бы для кривизны K формулу $K=-\frac{x''}{(\sqrt{1+x'^2})^3}$. Для случая окружности вычисления протекают совершенно так же, как в тексте, ввиду симметрии уравнения $x^2+y^2=R^2$, и в результате получим

$$K=+\frac{1}{R}.$$

[2]) Таким образом кривизна есть величина размерности L^{-1}.

Постоянство кривизны окружности является фактом, очевидным и без всяких вычислений. Выражение же $\frac{1}{R}$ для кривизны может быть получено и элементарным путем. Именно, возьмем дугу AB окружности; она может быть и не бесконечно-малой, ибо кривизна окружности одна и та же для всех ее точек. Угол поворота касательной $SKT=\varphi$ равен центральному углу AOB (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Поэтому кривизна K может быть представлена так:



Черт. 88.

$$K=\frac{\angle AOB}{\smile AB}=\frac{\varphi}{s}.$$

Но дуга s связана с углом φ (измеренным в радиальной мере) формулой

$$s=R\varphi.$$

Поэтому

$$K=\frac{\varphi}{R\varphi}=\frac{1}{R}.$$

§ 23. Часто случается, что уравнение кривой задается в параметрической форме, так что координаты x и y даются в функции параметра. Тогда пользоваться для вычисления кривизны формулой

$$K=\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \tag{49}$$

не рекомендуется, потому что вычисление y'' [напоминаем, что в формуле (49) y'' есть вторая производная координаты y, рассматриваемой как функция координаты x, а не параметра t] требует предварительного исключения параметра из уравнений кривой, а это часто затрудняет выкладки, а иногда и вовсе невыполнимо практически.

В этом случае лучше обратиться к общей формуле

$$K=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{[\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}]^3} \tag{47}$$

и выражать дифференциалы переменных x и y через дифференциалы параметра

Для примера возьмем уравнение окружности в его параметрической форме:

$$x=R\cos t,$$

$$y=R\sin t.$$

Из этих уравнений находим:

$$dx=-R\sin t\,dt,$$

$$dy=R\cos t\,dt.$$

При вычислении вторых дифференциалов мы можем считать dt постоянной величиной, т. е. предполагать величину t растущей равными порциями, потому что величина кривизны линии, конечно, не зависит от закона роста параметра. Это значительно облегчает выкладку.

Рекомендуя читателю проделать ее, мы в целях общности не будем делать никаких предположений о законе роста t. Тогда, дифференцируя два последних уравнения, мы получим:

$$d^2x = d(-R\sin t\,dt) = -R\cos t\,dt\cdot dt - R\sin t\,d(dt) =$$
$$= -R\cos t\,(dt)^2 - R\sin t\,d^2t$$

и, аналогично,

$$d^2y = -R\sin t\,(dt)^2 + R\cos t\,d^2t.$$

Подставляя выражения dx, dy, d^2x и d^2y в формулу (47), мы после алгебраических преобразований находим

$$K = \frac{1}{R}.$$

Если желательно и для параметрической формы кривой дать выражение кривизны не через дифференциалы, а через производные функции координат x и y по параметру t, то нужно только заменить первые и вторые дифференциалы координат их первыми и вторыми производными (по параметру).

Доказательство этого предложения очень облегчается, если предположить, что параметр t нарастает равными порциями (это, как сказано, не должно повлиять на окончательный результат). В самом деле, тогда мы имеем:

$$x' = \frac{dx}{dt},$$

$$x'' = \frac{d^2x}{(dt)^2}$$

(символы x' и x'' означают производные абсциссы по параметру), откуда

$$dx = x'\,dt,$$
$$d^2x = x''\,(dt)^2.$$

Аналогично

$$dy = y'dt,$$
$$d^2y = y''\,(dt)^2.$$

Подставляя эти выражения в формулу

$$K = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\left(\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\right)^3} \tag{47}$$

и сокращая на $(dt)^3$, получаем

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}. \tag{50}$$

Тот же результат получится и в том случае, если об изменении t не будем делать никаких предположений. В этом случае формула $d^2x = y''(dt)^2$ уже перестает быть верной, но формула $dx = x'dt$ сохраняет силу.

Диференцируя ее, получаем

$$d^2x = d(x')\,dt + x'd^2t.$$

Диференциал $d(x')$ на основании определения производной равен произведению dt на производную от функции x', т. е. на вторую производную x'':

$$d(x') = x''\,dt.$$

Значит, второй диференциал d^2x можно представить так:

$$d^2x = x''(dt)^2 + x'd^2t$$

и, аналогично,

$$d^2y = y''(dt)^2 + y'd^2t.$$

Подставив эти выражения, а также выражения

$$dx = x'dt,$$

$$dy = y'dt$$

в формулу (47), получаем

$$K = \frac{x'dt\,[y''(dt)^2 + y'd^2t] - y'dt\,[x''(dt)^2 + x'd^2t]}{[\sqrt{(x'^2 + y'^2)}\,(dt)^2]^3}.$$

Члены числителя, содержащие второй диференциал, взаимно уничтожаются, и по сокращении дроби на $(dt)^3$ мы снова получаем

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}. \tag{50}$$

В качестве примера вычислим кривизну эллипса в концах его осей. Уравнение эллипса возьмем в параметрической форме:

$$x = a\cos t,$$

$$y = b\sin t.$$

Отсюда находим:

$$x' = -a\sin t, \quad x'' = -a\cos t,$$

$$y' = b\cos t, \quad y'' = -b\sin t,$$

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t})^3}.$$

У конца большой полуоси $x = a$, $y = 0$ параметр t имеет значение $t = 0$. Поэтому кривизна K_a этой вершины равна

$$K_a = \frac{a}{b^2}.$$

Такова же кривизна на противоположном конце большой оси $t=\pi$. У концов же малой оси

$$t=\frac{\pi}{2},\quad t=\frac{3\pi}{2}$$

кривизна равна

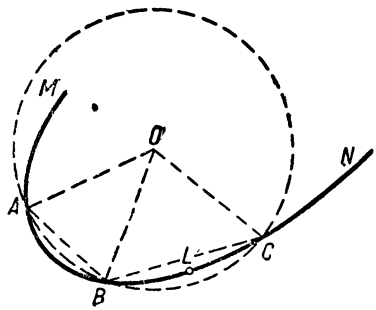
$$K_b=\frac{b}{a^2}.$$

Мы видим, что кривизны эллипса у вершин относятся, как кубы соответствующих полуосей.

В случае равенства полуосей $a=b=R$ эллипс обращается в окружность, и обе кривизны K_a и K_b становятся равными $\frac{1}{R}$.

§ 24. В тесной связи с понятием кривизны находится понятие радиуса кривизны линии.

На кривой линии MN (черт. 89) возьмем три близких друг к другу точки A, B и C и проведем через них окружность. Центр этой окружности обозначим буквой O. Отрезки OA, OB и OC будут равны друг другу; общую их длину мы обозначим через R.



Черт. 89.

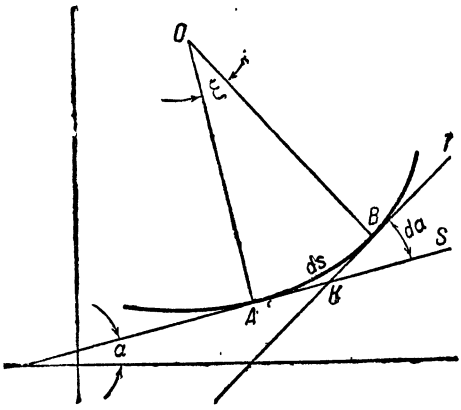
Дуга ABC окружности, как показывает чертеж, почти сливается с дугой ABC кривой MN, и чем ближе друг к другу будут взяты точки A, B и C, тем теснее обе эти дуги будут примыкать одна к другой. Разумеется, положение центра O и величина радиуса R изменяются, если вместо точек A, B, C взять другие три точки; но если все эти три точки стягиваются к некоторой определенной точке линии MN, например к точке L, то положение точки O и величина R изменяются все более нечувствительно, так что практически они становятся неизменными. Вместе с тем дуги ABC окружности и кривой MN практически сливаются.

Мы можем поэтому сказать, что в бесконечно-малой своей части всякая кривая линия может рассматриваться как дуга окружности. Радиус этой окружности называется радиусом кривизны линии MN, а центр O — центром кривизны. Разумеется, в различных своих точках кривая MN имеет вообще различные центры и радиусы кривизны (если только MN не есть сама дуга некоторой окружности; в этом случае радиус кривизны линии MN один и тот же всюду: он равен радиусу этой окружности).

Рассматривая бесконечно-малую дугу линии MN как дугу окружности, мы отнюдь не отменяем того положения, что ее можно рассматривать как прямолинейный отрезок хотя бы потому, что мы можем дугу окружности (бесконечно-малую) заменить ее хордой. Мы только *уточняем* последнее положение, которое становится не неверным, но недостаточным. В самом деле, заменяя бесконечно-малую дугу линии ее хордой, мы можем судить о ее наклоне, но мы еще не можем судить

об интересующей нас величине радиуса кривизны кривой. Для этой последней цели мы должны взять бесконечно-близкую дугу окружности, проходящую через точки A, B, C кривой.

Для вычисления радиуса кривизны можно было бы избрать аналитический путь, составляя уравнение окружности, проходящей через точки A, B и C, но этот метод будет очень громоздким. Гораздо проще путь геометрический. Возьмем бесконечно-малую дугу AB нашей линии и будем считать ее дугой окружности (черт. 90). Через точку A проведем прямую, перпендикулярную к дуге AB в точке ее A. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную к AB в точке ее B. Эти две прямые наклонены друг к другу под бесконечно-малым углом ξ и пересекаются в точке O. Эта точка будет центром кривизны, а отрезки OA и OB, отличающиеся друг от друга на бесконечно-малую величину, могут быть рассматриваемы как радиусы окружности, дугой которой служит дуга AB.



Черт. 90.

Обозначая через R длину радиуса и через ds длину дуги AB, мы имеем известное соотношение

$$ds = R\xi,$$

из которого определяем R:

$$R = \frac{ds}{\xi}.$$

Прямая AO по построению перпендикулярна к дуге AB в точке ее A и, следовательно, также к касательной AS. Точно также прямая BO перпендикулярна к касательной BT. Поэтому

$$\angle AOB = \angle TKS.$$

Если через α, как и прежде, мы будем обозначать угол наклона касательной, то, как показывает черт. 90, угол TKS представляет величину $d\alpha$, так что мы имеем:

$$\xi = d\alpha$$

и, следовательно,

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Можно было бы продолжать дальше вычисление, как в § 21, но это излишне. В самом деле, в § 21 мы видели, что кривизна K представляется выражением

$$K = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Сравнивая последние два равенства, мы видим, что радиус кривизны имеет величину, обратную величине кривизны:

$$R=\frac{1}{K} \text{ или } K=\frac{1}{R}.$$

Последнее соотношение мы еще раньше установили для частного случая окружности.

Таким образом для радиуса кривизны мы можем на основании формулы (47) написать следующее выражение:

$$R=\frac{\left(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\right)^3}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \tag{51}$$

Точно так же формулы (49) и (50) дают:

$$R=\frac{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}{y''} \tag{52}$$

и

$$R=\frac{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}{x'y''-y'x''}. \tag{53}$$

Заметим, что первую из этих формул можно рассматривать как частный случай второй (если за параметр выбрать абсциссу x; когда $x=t$, то $x'=1$ и $x''=0$).

§ 25. *Задача 106.* Вычислить радиус кривизны линии, описываемой точкой окружности круга, когда круг катится без скольжения [1]) по прямой линии.

Линия, описываемая точкой окружности катящегося круга (например точкой велосипедного колеса при движении велосипеда), называется циклоидой. Эта линия была предметом особого внимания математиков XVII в. ввиду многообразия ее геометрических и механических свойств. Некоторые из них будут нами в дальнейшем изучены.

Прежде всего составим уравнение циклоиды.

Пусть OX — прямая, по которой катится круг радиуса r. На черт. 91 круг изображен катящимся по нижней стороне прямой слева направо. Это расположение представит в дальнейшем некоторые удобства. Зафиксируем на окружности некоторую точку M, и за начало координат примем точку O, в которой точка M соприкасалась с прямой OX. Прямую OX сделаем осью абсцисс, а ось ординат OY направим книзу. На черт. 91 круг изображен сместившимся вправо. Координаты точки M: $x=OP$,

[1]) Чтобы пояснить, в чем состоит скольжение, представим себе телегу с плохо смазанными колесами. Может случиться, что колесо такой телеги при движении ее вовсе не будет вращаться: тогда оно вовсе не катится, а только скользит. Может случиться, что колесо сделает один оборот, в то время как телега проедет расстояние, превышающее длину обода: тогда колесо катится со скольжением. Отсюда ясно, что колесо катится *без скольжения* в том случае, когда при каждом обороте колеса оно продвигается вперед на полную длину обода. Другими словами, при качении без скольжения длина обода, вдоль которой колесо соприкасалось с землей, во всякий момент равна расстоянию, на которое колесо продвинулось вперед.

$y = MP$; представим их параметрически через угол $\varphi = ACM$, на который повернулся круг.

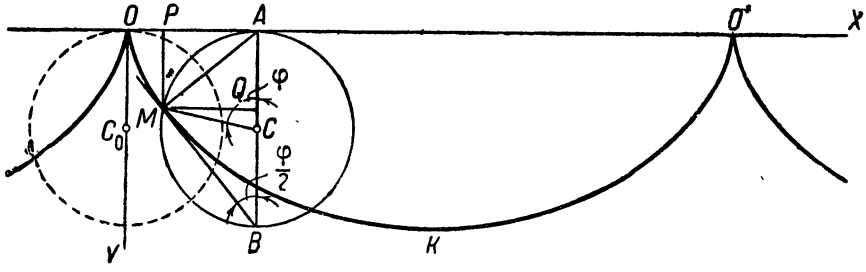
Так как круг катится по прямой OX без скольжения, то путь OA, пройденный кругом по оси абсцисс, равен дуге AM, $OA = \cup AM = r\varphi$.

Теперь непосредственно из черт. 91 мы получаем для координат точки M следующие выражения:

$$x = OP = OA - PA = OA - MQ = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = PM = AQ = AC - QC = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi).$$

Если бы мы пожелали исключить параметр φ, то уравнение между x и y получилось бы очень громоздким. Поэтому сохраним параметрическое представление [1]).

Очевидно, что после полного оборота круга ($\varphi = 2\pi$) точка M начнет описывать такую же кривую, которую она описала в течение первого



Черт. 91.

оборота, только сдвинутую направо, так что циклоида будет состоять из бесчисленного множества ветвей, образующих подобие гирлянды. Низшие точки этой гирлянды соответствуют значениям параметра $\varphi = \pi$, 3π... и т. д., $-\pi$, -3π... и т. д.

Для вычисления радиуса кривизны R циклоиды мы воспользуемся формулой

$$R = \frac{(\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2})^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \qquad (51)$$

Из уравнений циклоиды:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r(1 - \cos\varphi)$$

находим

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$
$$dy = r\sin\varphi\,d\varphi.$$

При вычислении вторых дифференциалов будем считать $d\varphi$ постоянным (см. § 23):

$$d^2x = r\sin\varphi\,(d\varphi)^2,$$
$$d^2y = r\cos\varphi\,(d\varphi)^2.$$

[1]) Параметр φ может получать любые положительные и отрицательные значения.

Подставляя в (51), получаем

$$R=\frac{r^3\left[\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\right]}{r^2\left[(1-\cos\varphi)\cos\varphi-\sin^2\varphi\right]}=$$

$$=r\frac{\left[\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\right]^3}{-(1-\cos\varphi)}=-2r\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\ .$$

Заменяя выражение $1-\cos\varphi$ через $2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, мы получаем (опуская знак минус) следующее выражение радиуса кривизны циклоиды:

$$R=4r\sin\frac{\varphi}{2}\ . \tag{52}$$

Полученное выражение имеет простой геометрический смысл. Именно, прямая AM, соединяющая точку M с точкой опоры круга A, имеет длину $AM=AB\ \sin\angle ABM=2r\ \sin\frac{\varphi}{2}$. Таким образом радиус кривизны циклоиды всегда вдвое больше расстояния точки катящегося круга до точки его опоры. В частности, в низших точках циклоиды, например в точке K, $R=4r$.

Задача 107. Показать, что касательная в точке M циклоиды всегда перпендикулярна к прямой MA (A — точка опоры „производящего" круга).

Найдем угловой коэфициент прямой AM. Координаты точки M обозначаем попрежнему x и y. Уравнение циклоиды дает их выражение через параметр φ:

$$x=r(\varphi-\sin\varphi),$$
$$y=r(1-\cos\varphi).$$

Координаты точки A обозначим x_1 и y_1:

$$x_1=OA=r\varphi,$$
$$y_1=0.$$

Угловой коэфициент k_1 прямой AM равен

$$k_1=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{r(1-\cos\varphi)}{-r\sin\varphi}=-\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\ .$$

Угловой коэфициент k_2 касательной MB к циклоиде есть $\frac{dy}{dx}$:

$$k_2=\frac{dy}{dx}=\frac{r\sin\varphi\,d\varphi}{r(1-\cos\varphi)\,d\varphi}=\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\ .$$

Условие перпендикулярности прямых AM и BM

$$k_1k_2=-1$$

очевидно удовлетворяется при любом φ.

Из перпендикулярности AM и MB тотчас же следует, что касательная к циклоиде всегда проходит через нижний конец B производящего круга (свойство угла, вписанного в окружность).

Задача 108. Вычислить длину одной ветви циклоиды. Обозначим через s расстояние (по кривой) произвольной точки M циклоиды до точки O. Диференциал ds представится формулой

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2r \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Длина ветви OKO' циклоиды выразится интегралом

$$\int_0^{2\pi} 2r \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Интеграл этот вычисляется простой подстановкой: $\frac{\varphi}{2} = z$.

$$\int_0^{2\pi} 2r \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = 4r \int_0^{\pi} \sin z \, dz = 4r(-\cos z)\Big|_0^{\pi} = 8r.$$

Итак, длина одной ветви циклоиды равна учетверенной длине диаметра производящего круга.

Задача 109. Вычислить площадь S, ограниченную одной ветвью циклоиды и прямой, по которой катится производящий круг.

Искомая площадь представится интегралом

$$S = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} y \, dx.$$

Подставляя параметрические выражения y и dx, получаем

$$S = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi - 2r^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi + r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi.$$

Первый интеграл дает $2\pi r^2$, второй обращается в нуль, третий (§ 11, пример 5) дает:

$$r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = r^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

Таким образом

$$S = 3\pi r^2; \tag{53}$$

площадь циклоиды втрое больше площади производящего круга.

Задача 110. Вычислить объем V тела, получаемого вращением ветви OKO' циклоиды вокруг ее основания OO'.

$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \pi y^2\,dx = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^3\,d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^3\,d\varphi =$$

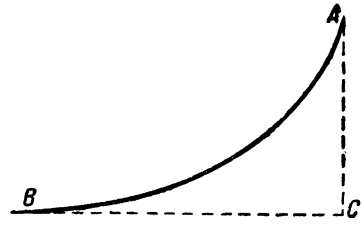
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi - 3\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi + 3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\,d\varphi.$$

Второй и четвертый интегралы обращаются в нуль (пример 11 § 8). Первый дает 2π, а третий 3π.

$$V = 5\pi^2 r^3.$$

§ 26. Мы знаем, что если тяжелое тело, не имеющее начальной скорости, падает в пустоте вертикально вниз, то, считая силу земного тяготения постоянной, мы имеем следующую зависимость между скоростью v, приобретенной телом, и пройденным им расстоянием h (гл. IV, § 19):

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (54)$$



Черт. 92.

Теория и опыт показывают, что эта же формула управляет движением тяжелого тела по любой траектории (если пренебречь влиянием трения и сопротивления воздуха). Только h представляет не путь, пройденный телом, а понижение тела, т. е. разность между начальной высотой падающего тела (когда скорость равнялась нулю) и высотой его в любом промежуточном положении. Так, если тело положено в точку A криволинейного желоба AB (черт. 92), то в точке B скорость его движения будет равна $v = \sqrt{2gh}$, где $h = AC$ (AC — отрезок вертикали).

Исходя из этого закона, решим следующую задачу.

Задача 111. Шарик положен в точку M желобка, имеющего форму циклоиды, обращенной овалом книзу. Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, вычислить продолжительность спуска шарика от точки M до низшей точки желобка.

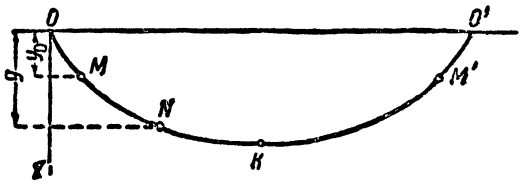
Располагая оси координат, как указано на черт. 93, мы можем написать уравнение циклоиды в виде:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = r(1 - \cos\varphi).$$

Координаты точки M мы обозначим через x_0 и y_0; соответствующее значение параметра φ — через φ_0. Понижение шарика h представится разностью между ординатой движущегося шарика и ординатой его начального положения (черт. 93):

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos\varphi) - r(1 - \cos\varphi_0) = r(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$



Черт. 93.

Поэтому уравнение (54) может быть переписано так:

$$v = \sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}.$$

Обозначая через t время, проходящее от момента начала спуска шарика, мы можем представить скорость v в виде $\frac{ds}{dt}$, где ds есть дифференциал пути шарика, т. е. дифференциал дуги циклоиды:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}.$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, остается вычислить ds. Как в задаче 108, находим

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

и наше дифференциальное уравнение получает вид

$$\frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{dt} = \sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$dt = \frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}.$$

При падении шарика из точки M в точку K параметр φ изменяется от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = \pi$. Поэтому искомая продолжительность спуска представится интегралом

$$t = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}.$$

Интеграл этот легко вычисляется при подходящем выборе вспомогательной функции. Обратив внимание на то, что в числителе мы имеем выражение

$$2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4r\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right),$$

выразим величину $\cos\varphi$, входящую в знаменатель, через $\cos\frac{\varphi}{2}$:

$$\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1.$$

Для большей симметрии заменим таким же выражением постоянную величину $\cos\varphi_0$:

$$\cos\varphi_0 = 2\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - 1.$$

Наш интеграл преобразуется к виду

$$t = \int_{\varphi_0}^{\pi} -\frac{4r\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{4gr\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\varphi_0}^{\pi} -\frac{d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Теперь ясно, что в качестве вспомогательной следует ввести функцию $\cos\frac{\varphi}{2} = z$:

$$\int \frac{-d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}} = \int -\frac{dz}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - z^2}} =$$

$$= \arccos\left(\frac{z}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right) + C = \arccos\left(\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right) + C.$$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{\varphi_0} -\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\arccos\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\Bigg|_{\varphi_0}^{\pi}$$

Подстановка верхнего предела $\varphi = \pi$ дает $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, подстановка $\varphi = \varphi_0$ обращает дробь $\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ в единицу; $\arccos 1 = 0$, и окончательно получаем

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Эта формула выявляет замечательное свойство процесса движения тяжелого тела по циклоиде, а именно: продолжительность спуска до низшей точки циклоиды не зависит от того, каково было начальное положение тела на циклоиде, так что если одновременно положить в разные места желобка шарики, то все они одновременно скатятся в точку K.

Это свойство представляется, на первый взгляд, парадоксальным, ибо, например, шарик M (черт. 93) должен пройти тот же путь, что и шарик N, да еще путь MN. Но дело в том, что путь NK шарик M пройдет гораздо быстрее, чем шарик N, и этим компенсируется излишек пути MN. Заметим, что циклоида является единственной линией, на которой эта компенсация осуществляется полностью.

Полученный результат мы можем истолковать еще следующим образом. После достижения наинизшего положения шарик M будет продолжать движение, поднимаясь по правой ветви циклоиды. Скорость его будет при этом уменьшаться и сделается равной нулю в тот момент, когда шарик поднимется до точки M_1, находящейся на высоте точки M (это следует из формулы $v = \sqrt{2gh}$). Значение параметра φ в точке M_1 очевидно равно $2\pi - \varphi_0$.

Очевидно, что движение от точки K до точки M_1 займет столько же времени, сколько и спуск из точки M в точку K; это можно проверить, вычислив интеграл

$$\int_{\pi}^{2\pi-\varphi_0} \frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi}{\sqrt{2rg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}.$$

Таким образом через время $T_1 = 2t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ после начала спуска шарик достигнет наивысшего положения, после чего начнется движение в обратную сторону. Еще через промежуток времени $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ шарик снова вернется в точку M и т. д. Другими словами, мы имеем маятник с периодом колебания $T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. При этом

период этот совершенно не зависит от амплитуды колебания [изохронность [1])]. Мы знаем, что для кругового математического маятника (тяжелая материальная точка подвешена на невесомой нити) период колебания, вообще говоря, зависит от амплитуды и только для небольших амплитуд может считаться постоянным. Именно, он может считаться равным $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, т. е. радиус окружности, по которой движется материальная точка.

Этот факт можно теперь объяснить следующим образом: при небольших амплитудах дуга окружности, описываемой грузом маятника, мало отличается от дуги циклоиды соответствующих размеров. Именно, размеры циклоиды должны быть таковы, чтобы радиус кривизны циклоиды в ее наинизшей точке R был равен радиусу дуги, описываемой грузом, т. е. длине маятника l. Отсюда следует (так как радиус кривизны циклоиды в ее низшей точке равен учетверенному радиусу производящего круга), что производящий круг циклоиды должен иметь радиус r, равный $\frac{l}{4}$.

А если в формулу

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

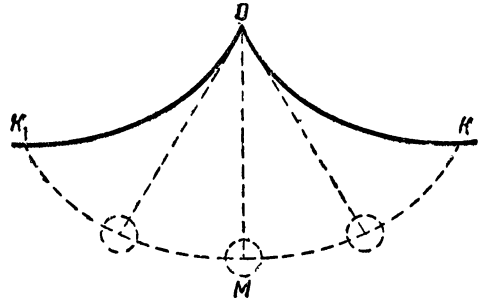
подставить $r = \frac{l}{4}$, то мы и получим для периода колебания математического маятника формулу

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Эта формула справедлива лишь постольку, поскольку мы дугу окружности можем считать дугой циклоиды, т. е. для колебаний маятника малых амплитуд.

---

[1]) На практике благодаря большой величине трения движение шарика по циклоидальному желобу не будет точно следовать установленному закону; в частности, нарушится и изохронность. При качании груза на нити внешние препятствия гораздо слабее. Можно осуществить движение и по циклоиде так, чтобы его совершал груз, подвешенный на нити. Именно, если в точке схождения двух ветвей циклоиды (черт. 94), вырезанной например из дерева, привесить нить, равную по длине половине длины одной ветви OK, т. е. учетверенному радиусу производящего круга (§ 25), то груз, привешенный к концу нити, будет при раскачивании описывать уже не окружность, а кривую линию K_1MK. Эта линия тоже будет циклоидой тех же размеров, что и исходная, только смещенная. На доказательстве этого замечательного свойства циклоиды мы не можем останавливаться.



Черт. 94.

§ 27. *Задача 112.* Принимая во внимание, что ускорение силы земного тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния падающего тела от центра земли, вычислить, сколько времени продолжится падение тела (небольших по сравнению с землей размеров) на землю, если в начальный момент это тело находится в покое в одной из точек лунной орбиты.

Радиус земли $r = 6370$ *км*; радиус лунной орбиты $R = 385\,080$ *км*. Сопротивлением воздуха мы, конечно, вправе пренебречь, так как протяжение земной атмосферы очень невелико по сравнению с радиусом лунной орбиты.

Обозначим через s расстояние (в метрах), пройденное телом за время t сек., через v — скорость, им приобретенную, и через g_1 его ускорение: $g_1 = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Мы получим диференциальное уравнение движения, если выразим, что это ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра земли. Мы знаем, что у поверхности земли ускорение равно $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}. Расстояние до центра земли здесь равно r. Когда тело пройдет расстояние s, оно будет отстоять от центра земли на $R - s$. Следовательно

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r^2}{(R-s)^2}$$

или

$$g_1 = \frac{gr^2}{(R-s)^2}.$$

Перепишем это уравнение так:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{(R-s)^2}; \tag{55}$$

это диференциальное уравнение содержит три переменных величины: s, v и t, и потому необходимо иметь еще одно уравнение, которое позволило бы одну из них исключить. Этой цели служит уравнение, выражающее скорость v через диференциалы ds и dt:

$$\frac{ds}{dt} = v. \tag{56}$$

Из уравнений (55) и (56) можно исключить dt. Если, например, определить dt из уравнения (56) и подставить полученное выражение в (55), то получим уравнение:

$$\frac{v\,dv}{ds} = \frac{gr^2}{(R-s)^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, примем во внимание, что в начальном положении $s = 0$ скорость равнялась нулю:

$$\int_0^v v\,dv = gr^2 \int_0^s \frac{ds}{(R-s)^2},$$

откуда

$$\frac{v^2}{2} = gr^2\left[\frac{1}{R-s} - \frac{1}{R}\right] = \frac{gr^2}{R}\frac{s}{R-s},$$

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{R}\frac{s}{R-s}}. \qquad (57)$$

Прежде чем продолжать решение, заметим, что формула (57) позволяет вычислить скорость v падения тела на землю. Для этого достаточно вставить в нее значение $s = R - r$.

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{R}\cdot\frac{R-r}{r}} = \sqrt{2gr\left(1-\frac{r}{R}\right)}. \qquad (57')$$

Подставляя сюда $R = 385\,080 \cdot 10^3$, $r = 6370 \cdot 10^3$, $g = 9{,}8$, найдем:

$$v \approx 11\,100 \text{ м/сек} = 11{,}1 \text{ км/сек}.$$

Заметим кстати, что с увеличением начального расстояния скорость падения тела на землю отнюдь не увеличивается беспредельно. Именно, формула (57′) показывает, что при $R = \infty$ скорость падения на землю будет

$$v = \sqrt{2gr} \approx 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

Продолжая решение, перепишем формулу (57) в виде

$$\frac{ds}{dt} = r\sqrt{\frac{2g}{R}}\sqrt{\frac{s}{R-s}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\int_0^t dt = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^s \sqrt{\frac{R-s}{s}}\,ds,$$

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^s \sqrt{\frac{R-s}{s}}\,ds.$$

Используя результаты примера 14 § 20, мы можем написать

$$\int_0^s \sqrt{\frac{R-s}{s}}\,ds = R\arcsin\sqrt{\frac{s}{R}} + \sqrt{Rs-s^2}\Bigg|_0^s,$$

откуда:

$$\int_0^s \sqrt{\frac{R-s}{s}}\,ds = R\arcsin\sqrt{\frac{s}{R}} + \sqrt{Rs-s^2},$$

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left[R\arcsin\sqrt{\frac{s}{R}} + \sqrt{(R-s)s}\right].$$

Такова связь между расстоянием, пройденным телом, и временем. В частности продолжительность T падения тела на землю мы найдем, положив $s = R - r$.

$$T = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left[R \arcsin \sqrt{\frac{R-r}{R}} + \sqrt{r(R-r)}\right] =$$

$$= \frac{R}{r}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left[\arcsin \sqrt{\frac{R-r}{R}} + \frac{\sqrt{r(R-r)}}{R}\right].$$

Рекомендуем читателю самостоятельно вычислить по этой формуле значение T, подставляя:

$$R = 38\,508 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$r = 637 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$g = 9{,}8 \text{ м/сек}^2.$$

Для контроля приводим результаты промежуточных и окончательной выкладок:

$$T = \frac{38\,508}{637}\sqrt{\frac{38\,508 \cdot 10^4}{2 \cdot 9{,}8}}\left[\arcsin \sqrt{\frac{37\,871}{38\,508}} + \frac{\sqrt{637 \cdot 37\,871}}{38\,508}\right].$$

Для вычисления $\arcsin \sqrt{\frac{37\,871}{38\,508}}$ удобнее всего воспользоваться таблицей логарифмов тригонометрических величин. Именно, из уравнения

$$x = \arcsin \sqrt{\frac{37\,871}{38\,508}}$$

получаем

$$\lg \sin x = \lg \sqrt{\frac{37\,871}{38\,508}} = \bar{1}{,}99\,638,$$

откуда (табл. III „Пятизначных таблиц логарифмов“ Е. Пржевальского)

$$x = 82^\circ 37',$$

$$x = 1{,}4419 \text{ (радиальных единиц)}$$

(см. табл. XI „Пятизначных таблиц логарифмов“ Е. Пржевальского); за последнюю цифру ручаться нельзя, так как величина x определена с точностью до $0{,}5' = 0{,}00015$.

Далее находим

$$\frac{\sqrt{r(R-r)}}{R} = \frac{\sqrt{637 \cdot 37\,871}}{38\,508} = 0{,}1276.$$

Вычисляем выражение в скобках:

$$\arcsin\sqrt{\frac{R-r}{R}}+\frac{\sqrt{r(R-r)}}{R}=1{,}4419+0{,}1276=1{,}5695.$$

Наконец, для величины T (в часах) находим следующее значение:

$$T=\frac{38\,508\cdot 10^2}{3\,600\cdot 637}\sqrt{\frac{38\,508}{2\cdot 9{,}8}}\cdot 1{,}5695=116{,}7 \text{ часов.}$$

Резюме.

Изложенным выше исчерпывается тот круг основных вопросов исчисления бесконечно-малых, которым мы ограничили объем этой книги. Бросим теперь беглый взгляд на пройденный нами путь.

В первых трех главах мы познакомились с основными понятиями исчисления бесконечно-малых (интеграл, дифференциал, дифференциальное уравнение). Мы видели, как они связаны с решением разнообразных задач конкретного содержания. Мы научились выполнять процесс интегрирования в простейших случаях. В четвертой главе мы сформулировали общую задачу дифференциального исчисления и показали ее внутреннюю связь с задачей интегрального исчисления. Там же мы изучили технику дифференцирования простейших функций. И здесь мы познакомились с разнообразными задачами конкретного содержания, решение которых требовало выполнения процесса дифференцирования.

В пятой главе мы пополнили наш запас технических приемов, значительно расширив поле применимости исчисления бесконечно-малых. Уже здесь с полной очевидностью выяснилось существование неразрывной связи между процессами дифференцирования и интегрирования. Эта связь была полностью вскрыта в шестой главе, где было показано, как значительно продвигается вперед техника исчисления бесконечно-малых, когда мы рассматриваем два основных его процесса в их взаимной связи. Таким образом внутренняя связь этих двух процессов, развертывавшаяся перед читателем в предыдущих двух главах, получила свое формальное завершение. Результатом этого синтеза процессов дифференцирования и интегрирования явилось, между прочим, установление нового понятия — неопределенного интеграла. Мы видели, что неопределенное интегрирование, будучи обращением дифференцирования, является в то же время общим методом получения определенных интегралов.

Наконец, в седьмой главе мы исчерпали проблему дифференцирования элементарных функций и использовали полученные результаты для продвижения вперед техники неопределенного интегрирования. Однако выяснилось, что исчерпывающего решения проблема неопределенного интегрирования элементарных функций не имеет, так как неопределенный интеграл элементарной функции, вообще говоря, уже не представляется элементарной функцией.

Вот в существенных чертах тот путь, который пройден нами. Что касается метода изложения, то мы ставили себе задачей отчетливое

выявление происхождения основных понятий и операций исчисления бесконечно-малых. Поэтому та форма, в которой понятия анализа обычно преподносятся с самого начала курса, в нашем изложении давалась как позднейший продукт развития. В соответствующих местах книги (в первой главе — при установлении понятии интеграла; в четвертой главе — при установлении понятия производной; в шестой главе — при введении производных высших порядков) мы стремились к выяснению тех принципиальных вопросов, которые связаны с развитием этих основных понятий и с их отношением к действительности.

Нас интересовала именно принципиальная сторона дела, и мы вовсе не стремились к тому, чтобы фактически построить этот курс на почве более строгих логических концепций. Это сделало бы книгу очень тяжеловесной и затруднило бы отчетливое уяснение основных методов исчисления бесконечно-малых и его приложений. При дальнейшем развертывании теории за рамки этого небольшого курса, естественно, уместна будет и большая степень строгости, потребность в которой создается только на известной ступени развития.

Литературные указания.

Читатель, желающий расширить круг своих знаний по исчислению бесконечно-малых или проработать основы анализа на более строгой логической базе, может использовать существующую учебную литературу. Мы выражаем уверенность, что после проработки этой книги чтение нижеуказанной литературы не представит никаких затруднений. Укажем здесь некоторые учебники, которые можно рекомендовать.

1. Фихтенгольц, Г. М. Математика для техников, Гиз, 1926. Эта книга не претендует ни на большую строгость ни на исчерпывающую полноту. Очень ценна подбором задач прикладного содержания.

2. Грэнвиль, В. Элементы диференциального и интегрального исчисления, I и II части.

Эту книгу можно рекомендовать только как пособие для изучения техники исчисления бесконечно-малых. Теоретическая часть ее суха и скучна, хотя и не представляет особых формальных затруднений. Первая часть вышла в переработке Н. Н. Лузина (Гиз, 1930). Это издание можно рекомендовать для ознакомления с основными методологическими установками формального построения курса анализа.

3. Власов, Н. К. Курс высшей математики, I и II части. Эта книга содержит большой объем фактических сведений; написана ясным языком. Теоретическая часть достаточно развита, без углубления в тонкости.

4. Курант, Р. Курс диференциального и интегрального исчисления, ч. I и ч. II, ГНТИ, 1931.

Эта книга значительно труднее вышеперечисленных. Она гораздо полнее их по объему фактического материала и по глубине проникновения в теорию. Для того, кто хотел бы войти в курс современной трактовки вопросов анализа, эта книга является лучшим руководством. Заметим, что здесь рассматривается и ряд приложений анализа, преимущественно к теоретической механике и физике.

Во всех вышеуказанных книгах читатель найдет основные сведения о диференциальных уравнениях. Существуют и специальные руководства по интегрированию диференциальных уравнений. Из более полных курсов, написанных доступно и живо, можно указать на книгу Пиаджио „Курс интегрирования диференциальных уравнений", ГТТИ, 1933. Из существующих в русской литературе укажем на небольшую книгу:

5. Филипс, Г. Дифференциальные уравнения (печатается новое издание). Она ценна большим количеством задач конкретного содержания.

Наконец укажем два сборника задач по анализу.

6. Сборник задач по высшей математике, составленный А. А. Адамовым, Б. В. Булыгиным, А. П. Вилежаниным и др., ч. I и II, изд. 5-е, Гиз, 1931.

Это, собственно, сборник упражнений. Число последних очень велико и подбор сделан систематически. Для развития техники вычислений этот сборник очень полезен.

7. Дингельдей, Ф. Сборник задач по приложению диференциального и интегрального исчисления, ч. I и II.

Первая часть была издана в 1912 г. и выходит в ближайшее время вторично — в издании ГТТИ. Она интересна тем, что содержит ряд задач отвлеченного характера, требующих большой самостоятельной работы. Задач прикладного содержания здесь сравнительно немного.

Вторая часть издана ГТТИ в 1933 г. и содержит много интересных практических задач, часть которых использована при составлении этой книги. Кроме того, имеется большое число отвлеченных задач, требующих нешаблонных приемов решения.

Таблица неопределенных интегралов.

В этой книге мы не задавались целью разобрать систематически все те случаи, когда неопределенный интеграл может быть выражен в элементарных функциях. Мы ограничились изучением важнейших случаев, чаще всего встречающихся на практике. Приемы, нами изложенные, должны быть хорошо усвоены, для того чтобы производимые вычисления делались сознательно и при необходимости могли быть проконтролированы.

Но вовсе нет необходимости в каждом отдельном случае, встречающемся в практике, проделывать все промежуточные выкладки, часто довольно сложные. Нужно уметь пользоваться справочником, чтобы экономить время и труд. Такой справочник, таблицу неопределенных интегралов, мы и даем в этом приложении.

Разумеется, никакой справочник не может содержать все формулы интегрирования, ибо даже тех интегралов, которые выражаются в элементарных функциях, существует бесчисленное множество. Потому-то и важно владеть элементарными способами вычисления интегралов. Они позволят привести задачу вычисления данного интеграла к вычислению интегралов, содержащихся в таблице. Разумеется, такое приведение не всегда выполнимо, ибо, как мы показали в § 18 гл. VII, далеко не все функции могут быть проинтегрированы в элементарных функциях.

Общих методов, позволяющих решить вопрос, возможно ли элементарное интегрирование, не существует, и потому в тех случаях, когда оно возможно, успех зависит в большой степени от наличия практических навыков. Их мы и старались сообщить читателю в последних трех главах книги.

I. Функции, содержащие $a+bx$ в целой степени.

1) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)+C.$$

2) $$\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C,\quad n \neq -1.$$

3) $$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left[a+bx-a\ln(a+bx)\right]+C.$$

4) $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+\right.$$
$$\left.+a^2\ln(a+bx)\right]+C.$$

5) $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+bx}{x} + C.$

6) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x} + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C.$

9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x} + C.$

10) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C.$

II. Функции, содержащие a^2+x^2, a^2-x^2, $a+bx^2$.

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C.$

или

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a} + C.$

(ср. § 14 гл. VI).

15) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C.$

при $a>0$ и $b>0$. Если a и b отрицательны, то знак (—) выносится за интеграл, а если a и b разных знаков, то пользуются формулой 16 (см. § 19 и XII).

16) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C.$

17) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln\left(x^2+\frac{a}{b}\right) + C.$

18) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2}$

и затем по формуле (15) или (16).

19) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{a+bx^2} + C.$

20) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2},$$

и затем по формуле (15) или (16).

21) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2},$$

и затем по формуле (15) или (16).

III. Функции, содержащие $\sqrt{a+bx}$.

22) $$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C.$$

23) $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C.$$

24) $$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C.$$

25) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C.$$

26) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$$

27) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C.$$

28) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C \text{ при } a>0.$$

28а) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \text{ при } a<0.$$

29) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

и затем по формуле (27) или (28).

30) $$\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$$

и затем по формуле (27) или (28).

IV. Функции, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$.

31) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

32) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

33) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C.$

34) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

35) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

37) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}+C.$

38) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

39) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

40) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

41) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$

42) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

43) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x} = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C.$

44) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$

V. Функции, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$.

45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C.$

47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

48) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

49) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

50) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

51) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2} + C.$

52) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^5}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

53) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} + C.$

54) $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5} + C.$

55) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

56) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

57) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{x}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

58) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

59) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

60) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

61) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

VI. Функции, содержащие $\sqrt{x^2-a^2}$.

62) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

63) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

64) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$

65) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

66) $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

67) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3} + C.$

68) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5} + C.$

69) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

70) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

71) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

72) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$

73) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C.$

74) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C.$

75) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C.$

76) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$

77) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{x^2-a^2}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

VII. Функции, содержащие $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$.

Функция, содержащая $\sqrt{2ax-x^2}$, интегрируется подстановкой $t=x-a$. Тогда $\sqrt{2ax-x^2}$ получит вид $\sqrt{a^2-t^2}$, и интеграл нахо-

дят в группе V этого справочника. Если его в справочнике нет, то стараются привести его к виду, имеющемуся в справочнике.

То же можно сказать и о функции, содержащей выражение $\sqrt{2ax+x^2}$. В этом случае подстановка $t=x+a$ приводит радикал к виду $\sqrt{t^2-a^2}$ (группа VI справочника).

VIII. Функции, содержащие $a+bx+cx^2$ $(c>0)$.

78) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C,$$

если $b^2 < 4ac$.

78а) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C,$$

если $b^2 > 4ac$.

79) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

80) $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln \left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

81) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} = -\frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln \left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

IX. Функции, содержащие $a+bx-cx^2$ $(c>0)$.

82) $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} + C.$$

83) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

84) $$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

85) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

X. Другие алгебраические функции.

86) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right)+C.$$

87) $$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+q)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C.$$

88) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C.$$

89) $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$$

90) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

XI. Показательные и тригонометрические функции.

91) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C.$$ 92) $$\int e^x dx = e^x+C.$$

93) $$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}+C.$$ 94) $$\int \sin x\,dx = -\cos x+C.$$

95) $$\int \cos x\,dx = \sin x+C.$$ 96) $$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x+C.$$

97) $$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x+C.$$

98) $$\int \sec x\,dx = \ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

99) $$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln(\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x)+C = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

100) $$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x+C.$$

101) $$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x+C.$$

102 $$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x+C.$$

103) $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

104) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

105) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

106) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$; эта формула употребляется несколько раз, пока не приведет к интегралу $\int \sin x\,dx$ или $\int \sin^2 x\,dx$ (в зависимости от того, четное или нечетное n), а эти интегралы см. под № 94 и 105.

107) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ (см. замечание к предыдущему интегралу и № 95 и 105).

108) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

(употребляется несколько раз, пока не приведет к интегралу $\int dx$, если n четное, или к интегралу $\int \frac{dx}{\sin x}$, если n нечетное; последний интеграл дан под № 99).

109) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ (см. замечание к предыдущему интегралу и № 98).

110) $\int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C,$

111) $\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

112) $\int \cos^m x \sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx$

(употребляется несколько раз, пока степень косинуса не будет равна нулю (если m четное) или единице (если m нечетное); в первом случае—см. № 106; во втором—№ 111. Этой формулой следует пользоваться, когда $m < n$. Если $m > n$, то лучше пользоваться следующей.

113) $\int \cos^m x \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx$

см. замечание к предыдущему интегралу и № 107 и 110).

114) $\int \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C,$

115) $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

116) $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

117) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C,$

если $a > b$.

118) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C,$

если $a < b$.

119) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C,$

если $a > b$.

120) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} + C,$

если $a < b$.

121) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$

122) $\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$

123) $\int e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$

124) $\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$

125) $\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$

126) $\int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$

127) $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx$ (формула применяется несколько раз, пока степень x не сделается равной 1, тогда интеграл находят под № 126).

128) $\int xa^{mx}\,dx = \frac{xa^{mx}}{m\ln x} - \frac{a^{mx}}{m(\ln a)^2} + C.$

129) $\int x^n a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}x^n}{n\ln a} - \frac{n}{m\ln a}\int a^{mx}x^{n-1}\,dx$ (формула применяется до тех пор, пока степень x не сделается равной 1, тогда интеграл находят под № 128).

130) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x\,(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} +$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$ [Формула применяется до тех пор, пока косинус не исчезнет (в случае четного n) или не сделается равным 1 (в случае нечетного n). В последнем случае см. № 122.]

XII. Логарифмические функции.

Даются функции, содержащие только натуральный логарифм. Если требуется найти интеграл от функции, содержащей логарифм при другом основании, то предварительно переводят его в натуральный по формуле:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

а затем пользуются справочником.

131) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

132) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

133) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

134) $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx.$ [Формула употребляется до тех пор, пока не получится интеграл $\int \ln x\,dx$, который берется по формуле 131.]

135) $\int x^m \ln^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx.$ [Формула употребляется до тех пор, пока не приведет к интегралу 133.]

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Предисловие к третьему изданию 3
Предисловие ко второму изданию 4

Глава I. Основные понятия интегрального исчисления.

§ 1. Вводные замечания 11
§ 2. О способах задания линии . . . . . —
§ 3—4. Основная задача вычисления площадей 12
§ 5. Идея интегрального исчисления 14
§ 6—8. Площадь трапеции 15
§ 9. Параболическая трапеция 19
§ 10. Понятие об интеграле; две формулы интегрирования 22
§ 11. Постоянный множитель под знаком интеграла 25
§ 12. Бесконечно-тонкие полоски; математические абстракции и действительность 28
§ 13. Объем конуса 30
§ 14. Падение в пустоте 33
§ 15. Выкачивание воды из цилиндрического резервуара 36
§ 16. Площадь круга и объем шара 37
§ 17—18. Логическое уточнение определения интеграла; точка зрения теории пределов. Преимущества классической концепции 38
§ 19. Интеграл произвольной целой положительной степени 45
§ 20. Интегрирование многочленов 49
§ 21. Дополнительные замечания о пределах интегрирования 50
§ 22. Вычисление площадей 54
§ 23. Вычисление объемов пирамиды и шара 58
§ 24. Объем параболоида вращения 60
§ 25. Объем „цилиндрического отрезка“ 62
§ 26. Свободное падение с начальной скоростью 63
§ 27. Выкачивание воды из котла 64
§ 28. Выкачивание воды из конического резервуара 65
§ 29. Растяжение проволоки 66
§ 30. Удлинение проволоки от собственного веса 67
§ 31. Вычисление давления жидкости 68

Глава II. Интегрирование отрицательных и дробных степеней. Интегралы с переменным пределом.

§ 1—3. Распространение формулы интегрирования степени на случай дробного и отрицательного показателя 72
§ 4. Замечания о пределах интегрирования 78
§ 5. Площадь параболы Нейля; площадь бесконечно-длинного шпиля . . 81
§ 6. Отталкивание электрических зарядов; потенциал 86
§ 7. Истечение жидкости из вертикальной щели 88
§ 8—9. Истечение воды из дна цилиндрического сосуда 89
§ 10—11. Интеграл с переменным верхним пределом 96
§ 12. Диференциальное уравнение; разделение переменных 101
§ 13. Интегралы с переменным нижним пределом 102
§ 14. Истечение воды из воронки 104
§ 15. Истечение воды через пробоину в котле 105
§ 16. Адиабатное сжатие и расширение газа 106

Глава III. Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$

Стр.

§ 1. Вычисление суммы S_n 111
§ 2. Предел выражения $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ 112
§ 3. Число e 115
§ 4. Интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x}$ 117
§ 5. Натуральные логарифмы; их перевод в десятичные и обратно . . . 119
§ 6. Случай отрицательных пределов 123
§ 7. Изотермическое сжатие воздуха 125
§ 8. Изотермическое расширение воздуха 126
§ 9. Распад радия 128
§ 10. Охлаждение металлического шара 131
§ 11. Барометрическая формула 133

Глава IV. Основные понятия дифференциального исчисления.

§ 1—3. Задача дифференциального исчисления 136
§ 4—6. Дифференцирование линейной функции 139
§ 7. Дифференциальное отношение 142
§ 8—10. Дифференциал квадратной функции 144
§ 11. Производная функция 147
§ 12—14. Дифференциал и производная степени 148
§ 15. Обозначения 154
§ 16. Постоянный множитель под знаком дифференциала 156
§ 17. Дифференциал суммы 157
§ 18. Дифференциальное исчисление с точки зрения теории пределов. Формализация понятий бесконечно-малой величины и дифференциала . . 158
§ 19. Скорость свободного падения 163
§ 20. Длина окружности и поверхность шара 164
§ 21. Натяжение проволоки 166
§ 22. Отталкивание электрических зарядов . . . . . —
§ 23. Формула Пуассона 167
§ 24. Истечение жидкости из цилиндрического сосуда 168
§ 25. Теплоемкость 169
§ 26. Коэфициент расширения линейный и объемный 172
§ 27—28. Угол наклона кривой к горизоиту 174
§ 29. Угол, образованный кривыми линиями 177
§ 30. Параболический прожектор 181
§ 31. Уравнение касательной 1 4
§ 32. Касательная к окружности 187
§ 33. Касательная к параболе 188
§ 34. Касательная к гиперболе 190
§ 35—37. Максимальные и минимальные значения функций 191
§ 38. Способ разыскания максимумов и минимумов 195
§ 39—40. Прямоугольник наибольшей площади; коробка наибольшего объема 198
§ 41. Наивыгоднейшая скорость пароходного рейса 200
§ 42. Наивыгоднейшая форма банки 201
§ 43. Дополнительные замечания о максимальных и минимальных значениях функции 202

Стр.

Глава V. Дифференцирование и интегрирование через вспомогательную переменную.

§ 1. Вводные замечания 206
§ 2. Введение вспомогательной функции. Дифференциал функции от функции —
§ 3. Производная функции от функции 211
§ 4. Наименее освещенная точка 216
§ 5. Наименьшее расстояние между судами 217
§ 6. Подъем рельса краном 218
§ 7—8. Дифференциал произведения и частного 219
§ 9. Производная произведения и частного 224
§ 10. Наибольшее нагревание гальванической цепи 227
§ 11. Наилучшее освещение на краях стола 228
§ 12. Относительная и абсолютная погрешность произведения и частного —
§ 13. Интегрирование через вспомогательную функцию 231
§ 14. О выборе вспомогательной функции 237
§ 15. Растворение бензойной кислоты в воде 247
§ 16. Измерение концентрации кислорода 248
§ 17. Разбавление рассола 249
§ 18. Давление воды на полукруг 250
§ 19. Изменение силы тока при замыкании цепи (экстра-ток) 251
§ 20. Спрямление параболы Нейля 256
§ 21. Спрямление астроиды 257

Глава VI. Процессы дифференцирования и интегрирования в их взаимной связи.

§ 1. Вводные замечания 259
§ 2—5. Дифференциал интеграла . . . . . —
§ 6—7. Дифференциал логарифмической функции 264
§ 8—9. Дифференциал показательной функции 267
§ 10. Интеграл дифференциала 270
§ 11. Интегрирование показательной функции 272
§ 12. Две перспективы развития техники исчисления бесконечно-малых. Интегрирование через обращение формул дифференциального исчисления 276
§ 13. Неопределенный интеграл 279
§ 14. Техника неопределенного интегрирования 283
§ 15. Интегрирование рациональных дробей, знаменатели которых разлагаются на линейные множители; метод неопределенных коэфициентов 291
§ 16. Дополнительные замечания о вычислении определенных интегралов 297
§ 17—18. Спрямление параболы; поверхность, образованная вращением параболы 300
§ 19. Поверхность вращения параболы Нейля 302
§ 20. Спрямление архимедовой спирали 303
§ 21. Спрямление логарифмической спирали; свойства касательной логарифмической спирали 304
§ 22. Скорость химических реакций 308
§ 23. Омыление уксусноэтилового эфира; подсчет времени 309
§ 24. Подсчет концентрации 311
§ 25. Случай равных концентраций 313
§ 26—27. Тримолекулярная реакция 316
§ 28. Законы Ньютона 319
§ 29. Движение моторной лодки 320
§ 30. Полет пули через доску 323
§ 31—32. Спуск на парашюте. Скорость. Расстояние 325
§ 33. Производные второго и высших порядков 332

Стр.

§ 34—35. Выражение второй производной через дифференциалы 335
§ 36. Вторые дифференциалы; вторая производная как предел отношения . 338
§ 37—38. Выражение второй производной в случае, когда дифференциал аргумента остается постоянным, относительность понятий постоянства и переменности, обозначения высших производных 339
§ 39. Приближенные вычисления второй производной; обмен ролями аргумента и функции. Сила, действующая на ползун паровой машины. 343
§ 40. Вычисление силы сопротивления среды по закону движения тела . 346

Глава VII. Дифференцирование и интегрирование тригонометрических функций.

§ 1. Вводные замечания 350
§ 2. Радиальное измерение углов . . . . . —
§ 3. Дифференциал синуса 353
§ 4. Дифференциал косинуса 354
§ 5. Дифференциалы других тригонометрических функций 355
§ 6—7. Основные формулы интегрирования тригонометрических функций 358
§ 8—9. Приемы интегрирования тригонометрических функций 361
§ 10—11. Интегрирование по частям 372
§ 12. Обратные тригонометрические функции 386
§ 13—16. Дифференцирование обратных тригонометрических функций . . . 389
§ 17. Обращение формул дифференцирования тригонометрических функций 398
§ 18. Об интегрируемости в элементарных функциях 400
§ 19. Интегрирование рациональных дробей, знаменатели которых имеют мнимые корни 403
§ 20. Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{x^2+ax+b}$ 414
§ 21. Кривизна плоской линии. Знак кривизны 425
§ 22. Кривизна окружности 429
§ 23. Кривизна при параметрическом задании кривой 430
§ 24. Радиус кривизны 433
§ 25. Циклоида и ее свойства 435
§ 26. Циклоидальный маятник 439
§ 27. Движение в переменном поле тяготения. 445

Резюме 447

Литературные указания. 448

Приложение. Таблица неопределенных интегралов 450