



Уральский
федеральный
университет

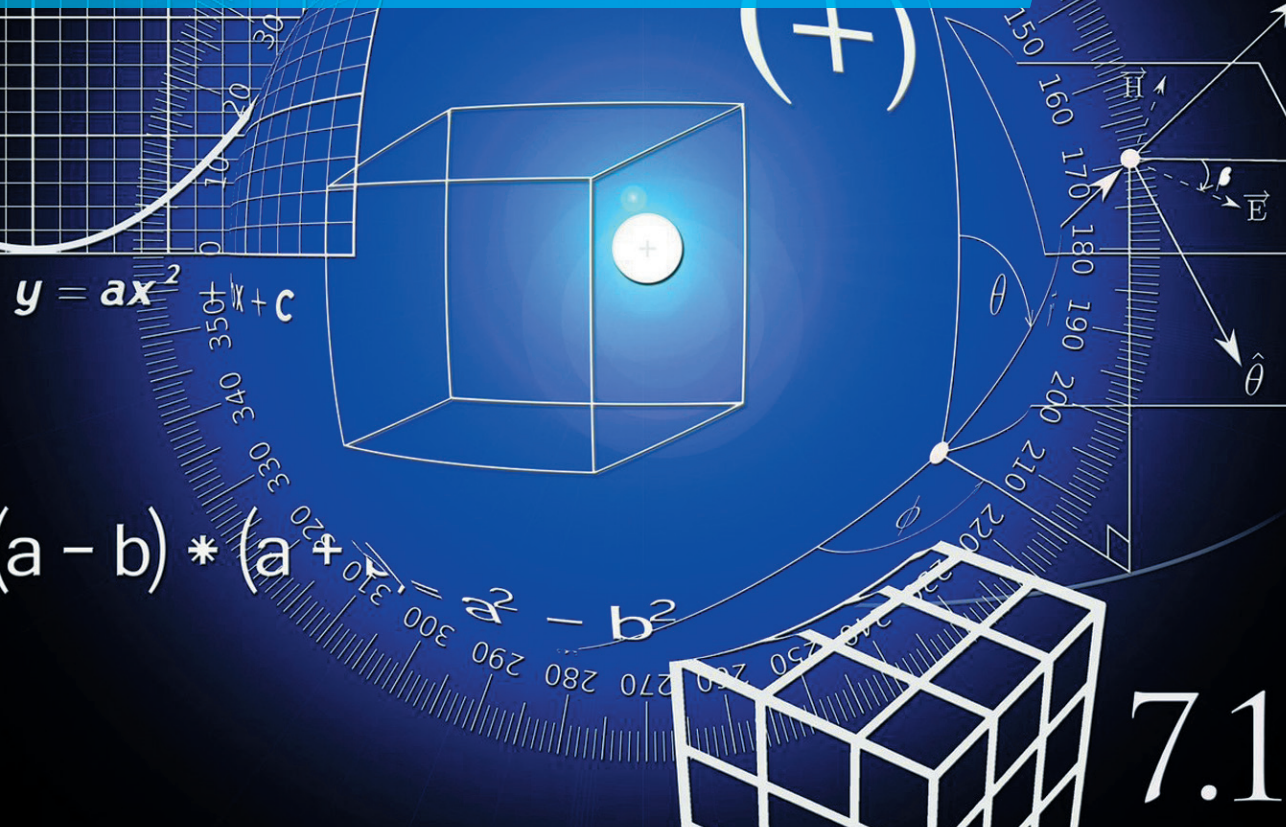
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт
фундаментального
образования

И. В. ГРЕБЕННИКОВА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие



7.1

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

И. В. Гребенникова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
09.03.02 — Информационные системы и технологии

Екатеринбург
УрФУ
2016

УДК 517.95(076.1)

ББК 22.161я73

Г79

Рецензенты:

кафедра информационных технологий Института развития образования
ГАОУ ДПО (завкафедрой д-р пед. наук, проф. *Л. И. Долинер*);

главн. науч. сотр. Института физики металлов УрО РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.
М. И. Куркин

Научный редактор — д-р пед. наук, канд. физ.-мат. наук, проф. Т. А. Матвеева

На обложке использовано изображение с сайта http://www.mampytanko.com/img/home/nauka_1.jpg

Гребенникова, И. В.

Г79 Уравнения математической физики : учебное пособие / И. В. Гребенникова. —
Екатеринбург: УрФУ, 2016. — 164 с.

ISBN 978-5-321-02475-1

Представлены основные разделы курса уравнения математической физики технического вуза. Каждый раздел пособия содержит теоретическую часть, примеры решения типовых задач, систематизированную подборку контрольных заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 — Информационные системы и технологии всех форм обучения.

Библиогр.: 13 назв. Рис. 7.

УДК 517.95(076.1)

ББК 22.161я73

Учебное издание

Гребенникова Ирина Владимировна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Подписано в печать 29.03.2016. Формат 70×100/16. Бумага писчая. Печать цифровая.

Гарнитура Newton. Уч.-изд. л. 8,1. Усл. печ. л. 13,2. Тираж 50 экз. Заказ 114.

Редактор О. С. Смирнова

Верстка О. П. Игнатьевой

Издательство Уральского университета

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ

620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5. Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41

E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ

620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4. Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13

Факс: 8(343) 358-93-06

E-mail: press-urfu@mail.ru

ISBN 978-5-321-02475-1

© Уральский федеральный
университет, 2016

© Гребенникова И. В., 2016

Предисловие

Настоящее учебное пособие состоит из двух частей: теоретической и практической. В первой части содержится теоретический материал справочного характера: понятия, определения, утверждения, формулы по курсу «Уравнения математической физики», а также примеры решения типовых задач, графические иллюстрации. Вторая часть включает систематизированную подборку заданий для самостоятельного решения.

По содержанию данное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО направления 09.03.02 — Информационные системы и технологии всех форм обучения и включает в себя в соответствии с учебной программой основные разделы:

- Основы операционного исчисления;
- Классификация уравнений в частных производных;
- Гиперболические уравнения;
- Параболические уравнения;
- Эллиптические уравнения.

Математический аппарат, применяемый в данном пособии и используемый при изучении курса «Уравнения математической физики» и решении задач, не выходит за пределы обычного (стандартного) курса высшей математики в технических вузах.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.02 — Информационные системы и технологии, может быть использовано преподавателями при организации и проведении лекционных и практических занятий по курсу «Уравнения математической физики» всех форм обучения.

1. Основы операционного исчисления

1.1. Понятия оригинала и изображения по Лапласу. Свойства преобразования Лапласа

Определение 1. *Функцией-оригиналом* называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющая условиям:

- 1) $f(t)$ интегрируема по Риману на любом конечном интервале оси t (локально интегрируема);
- 2) $f(t) = 0$ для всех $t < 0$;
- 3) $M > 0$ и $\alpha > 0$ — постоянные, при которых

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (1.1)$$

Нижняя грань α_0 всех чисел α , для которых справедливо неравенство (1.1), называется показателем роста функции $f(t)$.

Первое условие в определении 1 иногда формулируют следующим образом: на любом конечном интервале оси t функция $f(t)$ является непрерывной, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

Простейшей функцией-оригиналом является функция Хэвисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, для любой функции $\varphi(t)$ справедливо:

$$\varphi(t)\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varphi(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Если при $t \geq 0$ функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(t)\theta(t)$ является оригиналом. В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, записывать $\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)\theta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных значений аргумента t .

Определение 2. *Изображением функции $f(t)$ по Лапласу* называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.2)$$

Теорема 1 (об аналитичности изображения). Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F(p)$ определено и является аналитической функцией переменного p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, где α_0 — показатель роста функции $f(t)$, при этом справедливо равенство

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} |F(p)| = 0.$$

Теорема 2 (единственности). Изображение по Лапласу $F(p)$ единственно в том смысле, что две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые изображения, совпадают во всех точках непрерывности при $t > 0$.

Существует несколько вариантов записи соответствия между оригиналом и изображением:

$$f(t) \leftrightarrow F(p), \quad f(t) \doteq F(p), \quad L\{f(t)\} = F(p).$$

Пример 1

Пользуясь определением, найти изображение функции $f(t) = \sin 3t$.

Решение

Для функции $f(t) = \sin 3t$ имеем $\alpha_0 = 0$. Поэтому изображение $F(p)$ будет определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Применим формулу (1.2) к заданной функции, используя при выполнении преобразований правило интегрирования по частям и ограничение на множество значений переменной p , обеспечивающее сходимость интеграла:

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin 3t dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin 3t \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos 3t dt = \\
 &= \frac{3}{p} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \cos 3t \Big|_0^{+\infty} - \frac{3}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin 3t dt \right) = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).
 \end{aligned}$$

Получили равенство

$$F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{9}{p^2} F(p).$$

Отсюда находим

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Таким образом, справедливо следующее соответствие:

$$\sin 3t \leftrightarrow \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$, то для любых комплексных λ и μ выполняется

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \leftrightarrow \lambda F(p) + \mu G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(\alpha_0, \beta_0),$$

здесь и далее α_0, β_0 — показатели роста функции $f(t), g(t)$ соответственно.

2. Подобие. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то для $\forall a > 0$ справедливо

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad \operatorname{Re} p > a\alpha_0.$$

3. Дифференцирование оригинала. Если $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ — оригиналы и $f(t) \leftrightarrow F(p)$ для $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - p f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0),$$

где $f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

4. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-t)^n f(t), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

5. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

6. Интегрирование изображения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал, то

$$\int_p^\infty F(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}, \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

7. Свойство запаздывания. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и $f(t) = 0$ при $t < \tau$, где $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

З а м е ч а н и е . Возможна следующая формулировка свойства запаздывания: если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то для любых $\tau > 0$ имеет место

$$f(t - \tau)\theta(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

8. Свойство смещения. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то для любого комплексного λ

$$e^{\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(p - \lambda), \operatorname{Re} p > \alpha_0 + \operatorname{Re} \lambda.$$

9. Изображение свертки. *Сверткой функций f и g называется функция, которая обозначается $f \cdot g$ и определяется равенством*

$$(f \cdot g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Свертка функций обладает свойством симметричности, то есть

$$(f \cdot g)(t) = (g \cdot f)(t).$$

Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и $g(t) \leftrightarrow G(p)$, то

$$(f \cdot g)(t) \leftrightarrow F(p)G(p), \operatorname{Re} p > \max(\alpha_0, \beta_0).$$

Приведем таблицу оригиналов и изображений некоторых элементарных функций:

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$t^n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sin at$	$\frac{a^2}{p^2 - a^2}$
$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$	$e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}$	$\frac{a}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$	$\frac{a}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}$

Пример 2

Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу основных оригиналов и изображений, найти изображения следующих функций:

- 1) $f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t$;
- 2) $f(t) = e^{(t-2)} \sin(t-2)$;
- 3) $f(t) = t^2 e^{3t}$;
- 4) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$.

Решение

а) Преобразуем выражение для функции $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t = \frac{1}{2} e^{-4t} (\sin 5t + \sin t) = \frac{1}{2} e^{-4t} \sin 5t + \frac{1}{2} e^{-4t} \sin t.$$

Так как $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ и $\sin 5t \leftrightarrow \frac{5}{p^2 + 25}$, то, используя свойства ли-

нейности и смещения, для изображения функции $f(t)$ будем иметь

$$F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{(p+4)^2 + 25} + \frac{1}{(p+4)^2 + 1} \right).$$

б) Так как $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, $e^t \sin t \leftrightarrow \frac{1}{(p-1)^2 + 1}$, то, используя свойство запаздывания, будем иметь

$$f(t) = e^{(t-2)} \sin(t-2) \leftrightarrow F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p-1)^2 + 1}.$$

в) Так как $t^2 \leftrightarrow \frac{2}{p^3}$, то по свойству смещения имеем

$$f(t) = t^2 e^{3t} \leftrightarrow F(p) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Приведем для сравнения способ построения изображения функции $f(t) = t^2 e^{3t}$ с применением свойства дифференцирования изображения:

$$e^{3t} \leftrightarrow \frac{1}{p-3}; \quad te^{3t} \leftrightarrow -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p-3} \right) = \frac{1}{(p-3)^2};$$

$$t^2 e^{3t} \leftrightarrow -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{(p-3)^2} \right) = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Получили тот же результат.

г) Так как $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \leftrightarrow \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4}$, то, используя свойство интегрирования изображения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t}{t} &\leftrightarrow \int_p^\infty \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4} \right) dp = \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln p - \frac{1}{4} \ln(p^2 + 4) \right) \Big|_p^\infty = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2}{p^2 + 4} \Big|_p^\infty = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}. \end{aligned}$$

Для функции, заданной следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ f_1(t), & t_1 \leq t < t_2, \\ f_2(t), & t_2 \leq t < t_3, \\ \dots \\ f_{n-1}(t), & t_{n-1} \leq t < t_n, \\ f_n(t), & t \geq t_n, \end{cases}$$

с помощью функции Хэвисайда можно записать аналитическое выражение, которое удобно использовать при построении соответствующего изображения.

Легко проверить, что для функции $g_k(t)$, равной

$$g_k(t) = \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ f_k(t), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ 0, & t \geq t_{k+1}, \end{cases}$$

справедливо следующее представление с помощью функции Хэвисайда:

$$g_k(t) = f_k(t)\theta(t-t_k) - f_k(t)\theta(t-t_{k+1}). \quad (1.3)$$

А для функции

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_n, \\ f_n(t), & t \geq t_n, \end{cases}$$

имеет место запись в виде

$$g_n(t) = f_n(t)\theta(t-t_n). \quad (1.4)$$

Считая, что k меняется от 1 до $n-1$, функцию $f(t)$ можно рассматривать как сумму функций $g_k(t)$ и $g_n(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} g_k(t) + g_n(t).$$

И тогда, используя выражения (1.3) и (1.4), получим

$$f(t) = f_1(t)\theta(t-t_1) - \sum_{k=2}^n (f_k(t) - f_{k-1}(t))\theta(t-t_k). \quad (1.5)$$

Пример 3

Построить изображение для функции $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \varphi(t), & a \leq t < b, \\ 0, & t \geq b. \end{cases}$$

Решение

Запишем выражение для функции $f(t)$ с помощью функции Хэвисайда:

$$f(t) = \varphi(t)\theta(t-a) - \varphi(t)\theta(t-b).$$

Так как

$$\varphi(t) = \varphi(t-a+a) \text{ и } \varphi(t) = \varphi(t-b+b),$$

то, найдя изображения для функций $\varphi(t+a)$ и $\varphi(t+b)$,

$$\varphi(t+a) \leftrightarrow \Phi_1(p), \quad \varphi(t+b) \leftrightarrow \Phi_2(p),$$

построим изображение для функции $f(t)$, учитывая свойство запаздывания

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = \Phi_1(p)e^{-ap} - \Phi_2(p)e^{-bp}.$$

Пример 4

Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ 1, & t \in (0, a), \\ \frac{2a-t}{a}, & t \in (a, 3a), \\ \frac{t-4a}{a}, & t \in [3a, \infty). \end{cases}$$

Решение

Найдем изображение функции $f(t)$, предварительно записав выражение для нее с помощью функции Хэвисайда $\theta(t)$. Для этого воспользуемся формулой (1.5). Так как для заданной функции

$$t_1 = 0, t_2 = a, t_3 = 3a \text{ и}$$

$$f_1(t) = 1, f_2(t) = \frac{2a-t}{a}, f_3(t) = \frac{t-4a}{a},$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} f(t) &= \theta(t) - \left(\frac{2a-t}{a} - 1 \right) \theta(t-a) + \left(\frac{t-4a}{a} - \frac{2a-t}{a} \right) \theta(t-3a) = \\ &= \theta(t) - \frac{t-a}{a} \theta(t-a) + \frac{2(t-3a)}{a} \theta(t-3a). \end{aligned}$$

Применяя свойства линейности и запаздывания к построенному выражению, находим искомое изображение $F(p)$:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} + \frac{2}{ap^2} e^{-3ap}.$$

Контрольные задания

1. Проверить, являются ли следующие функции оригиналами, и найти их показатели роста:

а) $f(t) = b^t \theta(t)$, $b > 0$, $b \neq 1$;

б) $f(t) = e^{(2+4i)t} \theta(t)$;

в) $f(t) = \frac{1}{t-3} \theta(t)$;

г) $f(t) = t^2 \theta(t)$;

д) $f(t) = e^{t^2} \theta(t)$;

е) $f(t) = e^{-t} \cos t \theta(t)$;

ж) $f(t) = \ln(t+1)$;

з) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \geq 1. \end{cases}$

2. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = t$;

б) $f(t) = \sin 3t$;

в) $f(t) = te^t$;

г) $f(t) = \cos 7t$;

д) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ -1, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & t \geq 3; \end{cases}$

е) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ \frac{4-t}{2}, & 2 \leq t < 4, \\ 0, & t \geq 4; \end{cases}$

ж) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \tau, \\ 1, & t \geq \tau; \end{cases}$

з) $f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2; \end{cases}$

и) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < 2, \\ 3-t, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & t \geq 3; \end{cases}$

к) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2(\pi-t)}{\pi}, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$

3. Используя указанные свойства преобразования Лапласа, найти изображения заданных функций:

Свойства линейности и подобия

а) $f(t) = 1 + t$;

б) $f(t) = 2\sin t - \cos t$;

в) $f(t) = t + \frac{e^{-t}}{2}$;

г) $f(t) = \sin 4t$;

д) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$;

е) $f(t) = \sin^2 t$;

ж) $f(t) = \sin mt \sin nt$;

з) $f(t) = \cos^3 t$;

Дифференцирование оригинала

а) $f(t) = \cos^2 t$;

б) $f(t) = \sin^3 t$;

в) $f(t) = t \cos bt$;

г) $f(t) = te^t$;

д) $f(t) = t^2 e^{-t}$;

е) $f(t) = t^2 \operatorname{ch} 2t$.

Дифференцирование изображения

а) $f(t) = t^2 \cos t$;

б) $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$.

Интегрирование оригинала

а) $f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$;

б) $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$;

в) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

г) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

$$\text{д) } f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau;$$

$$\text{е) } f(t) = \int_0^t \frac{\cos \beta \tau - \cos \alpha \tau}{\tau} d\tau;$$

$$\text{ж) } f(t) = \int_0^t \frac{\text{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau;$$

$$\text{з) } f(t) = \int_0^t \frac{e^{\beta \tau} - e^{\alpha \tau}}{\tau} d\tau.$$

Интегрирование изображения

$$\text{а) } f(t) = \frac{e^t - 1}{t};$$

$$\text{б) } f(t) = \frac{\sin^2 t}{t};$$

$$\text{в) } f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t};$$

$$\text{г) } f(t) = \frac{e^t - 1 + t}{t}.$$

Свойство смещения

$$\text{а) } f(t) = e^{2t} \sin t;$$

$$\text{б) } f(t) = e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t.$$

Свойство запаздывания

$$\text{а) } f(t) = \sin(t - b)\theta(t - b);$$

$$\text{б) } f(t) = \cos^2(t - b)\theta(t - b);$$

$$\text{в) } f(t) = e^{t-1}\theta(t - 1);$$

$$\text{г) } f(t) = \sin^2((t - 2) / 2)\theta(t - 2);$$

$$\text{д) } f(t) = te^t\theta(t - 1);$$

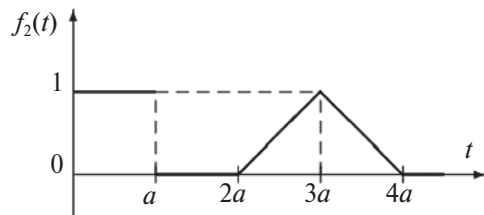
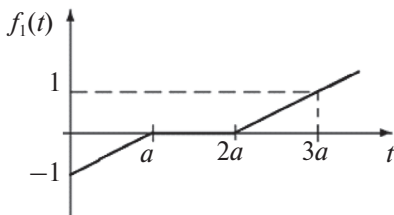
$$\text{е) } f(t) = \sin t \theta\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. *Изображения периодических функций.* Пусть функция $f(t)$, периодическая с периодом l , есть функция-оригинал. Показать, что ее изображение по Лапласу $F(p)$ дается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pl}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

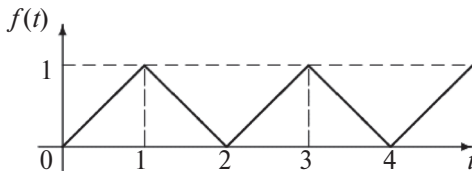
и определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > 0$.

5. Построить изображения функций, заданных графически:



6. Найти изображения следующих периодических функций (аналитические формулы определяют заданные функции на периоде $[0, l]$):

а)



б) $f(t) = |\sin t|$, $l = \pi$;

в) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t < T \end{cases} \quad l = T$,

(периодическая последовательность единичных импульсов);

г) $f(t) = \begin{cases} h, & 0 \leq t < c, \\ -h, & c \leq t < 2c, \end{cases} \quad l = 2c$;

д) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t < T, \end{cases} \quad l = T$;

е) $f(t) = \frac{h}{c}t$, при $0 \leq t < c$, $l = c$.

1.2. Восстановление оригинала по изображению

1.2.1. Элементарный метод

Во многих случаях заданное изображение можно преобразовать к такому виду, когда оригинал легко восстанавливается непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы оригиналов и изображений.

Для преобразования изображения широко используется в этом случае метод разложения рациональной дроби на сумму простейших.

Пусть $F(p)$ — рациональная функция, для нахождения оригинала представим функцию $F(p)$ в виде суммы простейших дробей вида

$$\frac{A}{p-a}, \frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^k}, k=2,3,\dots$$

(A, B, a, b — некоторые постоянные), для каждой из которых можно построить соответствующий оригинал.

Действительно, используя свойство смещения и таблицу оригиналов и изображений, найдем

$$\frac{A}{p-a} \leftrightarrow Ae^{at}, \frac{A}{(p-a)^k} \leftrightarrow \frac{A}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}, k=2,3,\dots;$$

$$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} = \frac{A(p-a)+B+Aa}{(p-a)^2+b^2} \leftrightarrow Ae^{at} \cos bt + \frac{B+Aa}{b} e^{at} \sin bt.$$

Пусть $S_k(p) \leftrightarrow s_k(t)$. Построим оригинал для изображения

$$S_k(p) = \frac{Ap+B}{((p-a)^2+b^2)^k}, k=2,3,\dots$$

Рассмотрим выражение для изображения $S_2(p)$. Так как

$$S_2(p) = \frac{Ap+B}{(p-a)^2+b^2} \frac{1}{(p-a)^2+b^2},$$

то, применяя свойство изображения свертки, построим соответствующий оригинал:

$$s_2(t) = \frac{1}{b} \int_0^t s_1(t-\tau) e^{a\tau} \sin b\tau d\tau.$$

Здесь оригинал $s_1(t)$ определяется выражением

$$s_1(t) = Ae^{at} \cos bt + \frac{B + Aa}{b} e^{at} \sin bt.$$

Далее, так как

$$S_3(p) = S_2(p) \frac{1}{(p-a)^2 + b^2},$$

то

$$s_3(t) = \frac{1}{b} \int_0^t s_2(t-\tau) e^{a\tau} \sin b\tau d\tau.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему соотношению:

$$s_k(t) = \frac{1}{b} \int_0^t s_{k-1}(t-\tau) e^{a\tau} \sin b\tau d\tau, \quad k \geq 2.$$

Пример 1

Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - p}.$$

Решение

Разложив заданное изображение на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{p^3 - p} = \frac{1}{p(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

найдем оригинал

$$f(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = -1 + \text{cht}.$$

Пример 2

Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2}.$$

Решение

Применяя свойство изображения свертки, будем иметь

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \frac{1}{p^2 + 4} \leftrightarrow \frac{1}{4} \int_0^t \sin 2(t - \tau) \sin 2\tau d\tau.$$

Вычислив интеграл, получим искомое выражение для оригинала

$$f(t) = \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{8} t \cos 2t.$$

Пример 3

Найти оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}.$$

Решение

Представим дробь, входящую в выражение в виде простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Применяя к разложению метод неопределенных коэффициентов, получим

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = D = -\frac{1}{5}, \quad C = -\frac{1}{20}.$$

Изображение имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p} - \frac{1}{5} \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p+1} - \frac{1}{20} \frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p^2+4}. \quad (*)$$

Используя соотношения

$$\frac{1}{p} \leftrightarrow \theta(t), \quad \frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^{-t}\theta(t), \quad \frac{p}{p^2+4} \leftrightarrow \cos 2t\theta(t), \quad \frac{1}{p^2+4} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2t\theta(t)$$

и учитывая свойство запаздывания, получим для изображения (*) искомый оригинал

$$f(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{20} \cos(2t-1) - \frac{1}{10} \sin(2t-1) \right) \theta\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 4

Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+1)}.$$

Решение

Применяя свойство свертки и таблицу соответствия оригиналов и изображений, получим

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \leftrightarrow \int_0^t \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = (1 - \cos t)\theta(t).$$

При построении оригинала для заданного изображения применим свойство запаздывания и получим

$$f(t) = \left(1 - \cos\left(t - \frac{1}{3}\right) \right) \theta\left(t - \frac{1}{3}\right).$$

1.2.2. Формула обращения. Теоремы разложения

Теорема 1 (формула обращения преобразования Лапласа, формула Меллина). Пусть $f(t)$ — оригинал, а $F(p)$ — его изображение. Если функция $f(t)$ непрерывна в точке t и имеет в этой точке конечные односторонние производные, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (1.6)$$

Несобственный интеграл (1.6) берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = b > \alpha_0$, где α_0 — показатель роста функции $f(t)$ и понимается в смысле главного значения, то есть

$$f(t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} e^{pt} F(p) dp.$$

Теорема 2 (первая теорема разложения). Пусть функция $F(p)$ регулярна в точке $p = \infty$, $F(\infty) = 0$ и ее ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}.$$

Тогда оригиналом изображения $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n.$$

Определение. Функция $F(p)$ называется *мероморфной* в комплексной плоскости, если она регулярна в любой ограниченной области комплексной плоскости, за исключением, быть может, конечного числа особых точек типа полюс.

Теорема 3 (вторая теорема разложения). Пусть мероморфная функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \alpha$ и удовлетворяет условиям:

1) существует система окружностей

$$C_n: |p| = R_n, \quad R_1 < R_2 < \dots < R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

такая, что $\max_{p \in C_n} |F(p)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$;

2) при $\forall a > \alpha$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)| d\sigma$ сходится.

Тогда $F(p)$ — изображение, оригиналом для которого служит функция

$$f(t) = \sum_{p=p_k} \operatorname{res} [F(p)e^{pt}],$$

где сумма берется по всем полюсам p_k функции $F(p)$.

С л е д с т в и е . Если $F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}$, где $A_n(p)$, $B_m(p)$ — многочлены степени n и m соответственно, не имеющих общих нулей, и если $n < m$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left\{ F(p)e^{pt} (p - p_k)^{m_k} \right\} \Bigg|_{p=p_k}, \quad (1.7)$$

где p_1, \dots, p_l — различные нули многочлена $B_m(p)$, m_k — кратность нуля

$$p_k : \sum_{k=1}^l m_k = m.$$

В частности, если все полюсы функции $F(p)$ простые, то формула (1.7) принимает вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A_n(p_k)}{B'_m(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.8)$$

Пример 5

Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p^2 + 2}{p^3 - p^2 - 6p}.$$

Р е ш е н и е

Так как $p^3 - p^2 - 6p = p(p-3)(p+2)$, то функция $F(p)$ имеет три простых полюса: $p_1 = 0$, $p_2 = 3$, $p_3 = -2$. Построим соответствующий оригинал с помощью формулы (1.8):

$$f(t) = \frac{(p^2 + 2)e^{pt}}{3p^2 - 2p - 6} \Bigg|_{p=0} + \frac{(p^2 + 2)e^{pt}}{3p^2 - 2p - 6} \Bigg|_{p=3} + \frac{(p^2 + 2)e^{pt}}{3p^2 - 2p - 6} \Bigg|_{p=-2} = -\frac{1}{3} + \frac{11}{5}e^{3t} + \frac{3}{5}e^{-2t}.$$

Контрольные задания

7. Найти оригинал по известному изображению:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5};$$

$$\text{г) } F(p) = \frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3};$$

$$\text{д) } F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1};$$

$$\text{е) } F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2+9};$$

$$\text{ж) } F(p) = \frac{1}{p^2+1}(e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p});$$

$$\text{з) } F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+2p+2} + \frac{e^{-p}}{p^2-2p+2};$$

$$\text{и) } F(p) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{-p}}{p} \right)^k;$$

$$\text{к) } F(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{2pe^{-p}}{p^2-4};$$

$$\text{л) } F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{3e^{-4p}}{p^2+9};$$

$$\text{м) } F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}.$$

8. Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригиналы для заданных изображений:

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p} + \cos \frac{1}{p};$$

$$\text{б) } F(p) = \sin \frac{1}{p};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{2p} + \ln \frac{p+1}{p-1};$$

$$\text{г) } F(p) = \frac{1}{p} + e^{1/p^2};$$

$$\text{д) } F(p) = \frac{1}{p-1} + e^{-\frac{1}{p-1}}.$$

9. Пользуясь второй теоремой разложения или с помощью разложения на простейшие дроби, найти оригиналы для заданных изображений:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p+2}{(p^2+4)(p+1)(p-2)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{Q'(p)}{Q(p)}, \text{ где } Q(p) = (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n) \text{ и все числа } p_k$$

попарно различны;

$$\text{г) } F(p) = \frac{1}{(p^4-1)^2};$$

$$\text{д) } F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)};$$

$$\text{е) } F(p) = \frac{p^3}{(p^4-1)^2};$$

$$\text{ж) } F(p) = \frac{p^5}{p^6-1};$$

$$\text{з) } F(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)^3};$$

$$\text{и) } F(p) = \frac{1}{p^2-4p+3};$$

$$\text{к) } F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p^2 - 1)^2};$$

$$\text{л) } F(p) = \frac{p}{p^4 - 5p^2 + 4};$$

$$\text{м) } F(p) = \frac{p^3}{(p^4 + 4)(p^4 - 1)}.$$

10. Пусть известны оригиналы изображений $F(p)$ и $G(p)$, то есть $F(p) \leftrightarrow f(t)$ и $G(p) \leftrightarrow g(t)$. Показать, что изображение $pF(p)G(p)$ можно представить в одном из четырех видов:

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\leftrightarrow f(+0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau = \\ &= f(+0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \\ &= g(+0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \\ &= g(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Формулы (1.9) носят название интегралов Дюамеля.

11. Построить формулу оригинала для изображения $\frac{F(p)G(p)}{p}$ с помощью оригиналов $f(t)$ и $g(t)$, соответствующих изображениям $F(p)$ и $G(p)$.
12. Построить оригиналы для заданных изображений:
- а) $F(p) = \frac{1}{p - e^{-p}};$
- б) $F(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p - e^{-p}}.$

1.3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем

Способ решения различных классов уравнений и других задач с помощью преобразования Лапласа получил название *операционного метода*.

1.3.1. Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L(x) \equiv x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t). \quad (1.10)$$

Поставим задачу Коши: найти решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (1.11)$$

где x_i — заданные константы, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Предполагая, что функция $f(t)$ является оригиналом, будем искать решение $x(t)$ задачи (1.10)–(1.11) на множестве оригиналов.

Пусть $X(p) \leftrightarrow x(t)$, $F(p) \leftrightarrow f(t)$. По правилу дифференцирования оригинала и свойству линейности, переходя в уравнении (1.10) к изображениям, в силу условий (1.11) получаем уравнение для неизвестного изображения $X(p)$, которое будем называть *операторным уравнением*

$$A(p)X(p) - B(p) = F(p),$$

где $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$,

$$B(p) = x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \\ + x_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-2}(p + a_1) + x_{n-1}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{B(p) + F(p)}{A(p)}.$$

Для нахождения искомого решения $x(t)$ задачи (1.10)–(1.11) нужно восстановить оригинал $x(t)$ по его изображению $X(p)$.

Аналогично применяется операционный метод к решению систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 1

Найти решение дифференциального уравнения

$$x'(t) + x(t) = e^{-t},$$

удовлетворяющее условию $x(0) = 1$ (задача Коши).

Решение

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. Так как

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$e^{-t} \leftrightarrow \frac{1}{p+1},$$

то, применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, используя свойство линейности, получим алгебраическое уравнение относительно $X(p)$:

$$pX(p) - 1 + X(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Откуда находим выражение для $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Так как

$$\frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^{-t}, \quad \frac{1}{(p+1)^2} \leftrightarrow te^{-t},$$

то имеем

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = te^{-t} + e^{-t}.$$

Проверка. Покажем, что найденная функция действительно является решением задачи Коши. Подставляем выражение для функции $x(t)$ и ее производной

$$x'(t) = -te^{-t} + e^{-t} - e^{-t} = -te^{-t}$$

в заданное уравнение:

$$-te^{-t} + te^{-t} + e^{-t} = e^{-t}.$$

После приведения подобных слагаемых в левой части уравнения получаем верное тождество: $e^{-t} \equiv e^{-t}$. Таким образом, построенная функция является решением уравнения.

Проверим, удовлетворяет ли она начальному условию $x(0) = 1$:

$$x(0) = 0 \cdot e^{-0} + e^{-0} = 1.$$

Следовательно, найденная функция является решением задачи Коши.

Пример 2

Найти решение дифференциального уравнения:

$$x''(t) + 3x'(t) = e^t,$$

удовлетворяющее условиям: $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Решение

Применим к уравнению преобразование Лапласа. Воспользуемся свойством линейности и учитывая, что

$$x(t) \leftrightarrow X(p),$$

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 0 = pX(p),$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p \cdot 0 - (-1) = p^2X(p) + 1,$$

$$e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1},$$

получим алгебраическое уравнение относительно $X(p)$:

$$p^2X(p) + 1 + 3pX(p) = \frac{1}{p-1}, \Leftrightarrow (p^2 + 3p)X(p) = \frac{1}{p-1} - 1.$$

Найдем фундаментальное решение:

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 3p)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3} \right) \leftrightarrow h(t) = \frac{1}{3} (1 - e^{-3t}).$$

Тогда, так как

$$X(p) = \left(\frac{1}{p-1} - 1 \right) H(p) = \frac{1}{p-1} H(p) - H(p),$$

то, используя свойство изображения свертки, решение заданного уравнения запишем в виде

$$x(t) = \frac{1}{3} \int_0^t e^{t-\tau} (1 - e^{-3\tau}) d\tau - \frac{1}{3} (1 - e^{-3t}).$$

Вычислив интегралы и приведя подобные слагаемые, получим окончательный ответ:

$$x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t}.$$

Проверка.

Имеем

$$x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t}, \quad x'(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{5}{4} e^{-3t}, \quad x''(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{15}{4} e^{-3t}.$$

Подставляем эти выражения в заданное уравнение

$$\frac{1}{4} e^t + \frac{15}{4} e^{-3t} + 3 \left(\frac{1}{4} e^t + \frac{5}{4} e^{-3t} \right) \equiv e^t.$$

В результате получаем тождество $e^t \equiv e^t$. Следовательно, найденная функция является решением уравнения. Проверим выполнение начальных условий:

$$x(0) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} e^0 + \frac{5}{12} e^{-0} = 0; \quad x'(0) = \frac{1}{4} e^0 - \frac{5}{4} e^{-0} = -1.$$

Следовательно, найденная функция является решением задачи Коши.

Пример 3

Найти решение дифференциального уравнения

$$x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0,$$

удовлетворяющее условиям: $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

Решение

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. Так как, учитывая заданные условия, имеем

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - (-1) = pX(p) + 1,$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p(-1) - 2 = p^2 X(p) + p - 2,$$

$$\begin{aligned} x'''(t) &\leftrightarrow p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = \\ &= p^3 X(p) - p^2(-1) - p2 - 0 = p^3 X(p) + p^2 - 2p, \end{aligned}$$

то после применения к заданному уравнению преобразования Лапласа получим следующее операторное уравнение:

$$p^3 X(p) + p^2 - 2p + 2p^2 X(p) + 2p - 4 + 5pX(p) + 5 = 0,$$

или после преобразований:

$$X(p)(p^3 + 2p^2 + 5p) = -p^2 - 1.$$

Решая это уравнение относительно $X(p)$, получим

$$X(p) = \frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Полученное выражение разложим на простейшие дроби:

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем A , B , C .

Для этого приведем дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p :

$$\frac{-p^2 - 1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap^2 + 2Ap + 5A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Получим систему алгебраических уравнений относительно A , B , C :

$$A + B = -1, \quad 2A + C = 0, \quad 5A = -1,$$

решением которой будут: $A = -\frac{1}{5}$, $B = -\frac{4}{5}$, $C = \frac{2}{5}$.

Тогда

$$X(p) = -\frac{1}{5p} + \frac{1}{5} \frac{-4p+2}{p^2+2p+5}.$$

Чтобы найти оригинал второй дроби, выделим в ее знаменателе полный квадрат: $p^2 + 2p + 5 = (p+1)^2 + 4$, тогда в числителе выделим слагаемое $p+1$:

$$-4p+2 = -4(p+1)+6,$$

и разложим дробь на сумму двух дробей:

$$\frac{1}{5} \frac{-4p+2}{p^2+2p+5} = -\frac{4}{5} \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{3}{5} \frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

Далее, воспользовавшись свойством смещения и таблицей соответствия изображений и оригиналов, получим решение исходного уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5} e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{5} e^{-t} \sin 2t.$$

Пример 4

Найти решение системы:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + \sin t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Решение

Построим решение с помощью преобразования Лапласа, предварительно сведя систему к одному эквивалентному уравнению второго порядка.

Выразим неизвестную функцию $x_2(t)$ из первого уравнения системы

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} - x_1 - \sin t \right), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - \cos t \right)$$

и подставим во второе уравнение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - \cos t \right) = -x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} - x_1 - \sin t \right) + 1.$$

Преобразуем полученное уравнение, введя обозначение $f(t)$ для правой части:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} + 3x_1 = \cos t - \sin t \equiv f(t). \quad (*)$$

Найдем начальные условия

$$x_1(t)|_{t=0} = 1; \quad x_1'(t)|_{t=0} = (x_1 + 2x_2 + \sin t)|_{t=0} = 1. \quad (**)$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (*) с начальными условиями (**). Пусть $X_1(p) \leftrightarrow x_1(t)$, $F(p) \leftrightarrow f(t)$, тогда

$$p^2 X_1(p) - p - 1 - 2pX_1(p) + 2 + 3X_1(p) = F(p),$$

$$X_1(p)(p^2 - 2p + 3) = F(p) + p - 1,$$

$$X_1(p) = \frac{F(p)}{p^2 - 2p + 3} + \frac{p - 1}{p^2 - 2p + 3}.$$

Найдем фундаментальное решение:

$$h(t) \leftrightarrow H(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 3} = \frac{1}{(p-1)^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin \sqrt{2}t.$$

Найдем оригинал $x_1(t)$, учитывая, что $h'(t) \leftrightarrow pH(p) - h(0) = pH(p)$,

$$x_1(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + h'(t) - h(t).$$

Выражение для функции $x_2(t)$ можно построить, используя второе уравнение заданной системы, подставив в него найденное выражение для функции $x_1(t)$:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} - x_1 - \sin t \right).$$

В результате

$$x_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^t \cos \sqrt{2}t + \frac{7\sqrt{12}}{12}e^t \sin \sqrt{2}t,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t + \frac{7}{12}e^t \cos \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{6}e^t \sin \sqrt{2}t.$$

Пример 5

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t, \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^t \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = 1$.

Решение

$x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$. Так как, учитывая заданные условия, имеем

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

то, применив к каждому уравнению системы преобразование Лапласа, получим систему алгебраических уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + X(p) = Y(p) + \frac{1}{p-1}, \\ pY(p) - 1 + Y(p) = X(p) + \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Решив систему методом Гаусса или с помощью формул Крамера, найдем выражения для изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p) = Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Соответствующие оригиналы дают решение задачи:

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t.$$

Пример 6

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения

$$x''(t) - x'(t) = -2t$$

с граничными условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 3$.

Решение

Применяем к уравнению преобразование Лапласа:

$$x(t) \leftrightarrow X(p),$$

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$\begin{aligned} x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) &= p^2 X(p) - p \cdot 0 - x'(0) = \\ &= p^2 X(p) - x'(0). \end{aligned}$$

Обозначим неизвестное значение $x'(0)$ через x_1 . Тогда

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - x_1.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$X(p)(p^2 - p) = \frac{x_1 p^2 - 2}{p^2},$$

решением которого будет функция

$$X(p) = \frac{2 - x_1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} + \frac{x_1 - 2}{p - 1}.$$

Соответствующий оригинал имеет вид

$$x(t) = 2 - x_1 + 2t + t^2 + (x_1 - 2)e^t.$$

Используя второе граничное условие задачи $x(1) = 3$, найдем неизвестное значение x_1 : $x(1) = 2 - x_1 + 2 + 1 + (x_1 - 2)e = 3$. Откуда $x_1 = 2$.

В результате

$$x(t) = 2t + t^2.$$

Пример 7

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 6te^t,$$

с граничными условиями $x(1) = e$, $x(2) = 8e^2$.

Решение

Обозначим неизвестные значения $x(0) = x_0$ и $x'(0) = x_1$, применив к уравнению преобразование Лапласа, построим соответствующее операторное уравнение

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 - 2(pX(p) - x_0) + X(p) = \frac{6}{(p-1)^2}.$$

Откуда находим выражение для изображения $X(p)$:

$$X(p) = \frac{6}{(p-1)^4} + \frac{x_0}{p-1} + \frac{x_1 - x_0}{(p-1)^2}.$$

Для него легко установить соответствующий оригинал:

$$x(t) = t^3 e^t + x_0 e^t + (x_1 - x_0) t e^t.$$

Чтобы найти неизвестные значения x_0 и x_1 , воспользуемся граничными условиями задачи: $x(1) = e$, $x(2) = 8e^2$. Имеем

$$x(1) = e + x_0 e + (x_1 - x_0) e = e, \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$x(2) = 8e^2 + x_0 e^2 - x_0 2e^2 = 8e^2 \Rightarrow x_0 = 0.$$

В результате

$$x(t) = t^3 e^t.$$

1.3.2. Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t), \quad (1.12)$$

где $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ — многочлены степени m_i , а функция $f(t)$ является оригиналом. Обозначим $m = \max\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. Будем предполагать, что задача Коши для уравнения (1.12) с условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

имеет решение на множестве оригиналов. Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. По правилу дифференцирования изображения имеем

$$t^k x^{(s)}(t) \leftrightarrow (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \left(L\{x^{(s)}(t)\} \right) = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \left(p^s X(p) - p^{s-1} x_0 - \dots - x_{s-1} \right).$$

Таким образом, применяя к обеим частям уравнения (1.12) преобразование Лапласа, уравнение (1.12) преобразуем в дифференциальное уравнение m -го порядка относительно изображения $X(p)$. После этого задача интегрирования уравнения (1.12) упрощается.

Пример 8

Найти решение уравнения

$$tx''(t) - (1+t)x'(t) + 2(1-t)x(t) = 0.$$

Решение

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. Тогда, используя свойство дифференцирования оригинала и дифференцирования изображения, запишем:

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0),$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx(t) \leftrightarrow -\frac{dX(p)}{dp},$$

$$tx'(t) \leftrightarrow -\frac{d}{dp} \{pX(p) - x(0)\} = -p \frac{dX}{dp} - X(p),$$

$$tx''(t) \leftrightarrow -\frac{d}{dp} \{p^2 X(p) - px(0) - x'(0)\} = -p^2 \frac{dX}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$

Применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, получим следующее операторное уравнение:

$$-p^2 \frac{dX}{dp} - 2pX(p) + x(0) -$$

$$-pX(p) + x(0) + p \frac{dX(p)}{dp} + X(p) + 2X(p) + 2 \frac{dX(p)}{dp} = 0,$$

которое легко привести к виду

$$(p^2 - p - 2) \frac{dX}{dp} + 3(p - 1)X(p) = 2x(0).$$

Решив полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, например методом вариации произвольной постоянной, построим его общее решение:

$$X(p) = \frac{x(0)}{p-2} + \frac{c}{(p-2)(p+1)^2}.$$

Здесь c — произвольная постоянная. Далее, так как

$$\frac{1}{p-2} \leftrightarrow e^{2t},$$

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leftrightarrow te^{-t},$$

$$\frac{1}{(p-2)(p+1)^2} \leftrightarrow \int_0^t \tau e^{-\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{9} (e^{2t} - (3t+1)e^{-t}),$$

то общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$x(t) = x(0)e^{2t} + c \left(\frac{1}{9} e^{2t} - \frac{1}{9} (3t+1)e^{-t} \right) = (x(0) + c) e^{2t} - c(3t+1)e^{-t}.$$

Контрольные задания

13. Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям (задача Коши):

а) $x' + 3x = e^t$, $x(0) = 1$;

б) $x'' - x' - 6x = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

$$в) x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, x(0) = 0, x'(0) = 1;$$

$$г) x'' + 2x' = t \sin t, x(0) = 0, x'(0) = 0;$$

$$д) x''' + 3x'' - 4x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 2;$$

$$е) x''' + x'' = \sin t, x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0;$$

$$ж) x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2, x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0;$$

$$з) x'' - x' = -2t, x(2) = 8, x'(2) = 6;$$

$$и) x'' + 2x' + x = 2e^{1-t}, x(1) = -1, x'(1) = -1;$$

$$к) x^{IV} + 2x'' + x = \sin t, x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, x'''(0) = 0.$$

14. Найти решения систем уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

$$а) \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = -1;$$

$$б) \begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1;$$

$$в) \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$г) \begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1, x'(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$д) \begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$е) \begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 0;$$

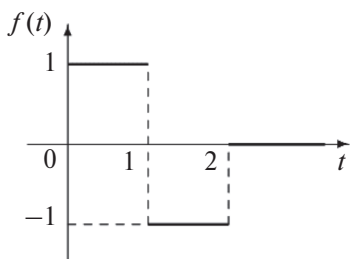
$$ж) \begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = -x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0;$$

$$з) \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1;$$

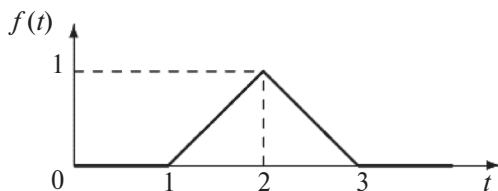
$$\text{и) } \begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \\ z'(0) = 0.$$

15. Решить задачу Коши в случае, когда функция $f(t)$ в уравнении задана графически:

а) $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$:



б) $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$:



16. Решить следующие краевые задачи:

а) $x''(t) + x'(t) = 2t$, $x(1) = 0$, $x'(1) = -1$;

б) $x''(t) + x'(t) = 2 \sin t$, $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$;

в) $x''(t) - x'(t) = te^t$, $x(0) = 1$, $x(2) = e^2$;

г) $x''(t) + x(t) = t \cos t$, $x(\pi) = -\frac{\pi}{4}$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)$.

17. Найти решения уравнений:

а) $tx'' - 2x' = 0$;

б) $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0$;

$$в) tx'' + 2x' = 0;$$

$$г) x'' + (t+1)x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1;$$

$$д) x'' + (t+b)x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad b \in R;$$

$$е) x'' + tx' - (t+1)x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

18. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \\ 6tz' = -x + 7y + 5z, \end{cases} \quad x(1) = 1, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 1.$$

1.4. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (1.13)$$

где $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geq 0$. Будем считать, что

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0, \quad \text{для } \forall t < 0.$$

Пусть требуется найти решение уравнения (1.13), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (1.14)$$

Применяя к обеим частям уравнения (1.13) преобразование Лапласа и учитывая свойство запаздывания оригинала, получим операторное уравнение для изображения $X(p) \rightarrow x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \quad (1.15)$$

где $F(p) \rightarrow f(t)$. Из (1.15) для $X(p)$ будем иметь

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \quad (1.16)$$

Оригинал для изображения (1.16) определяет решение уравнения (1.13), удовлетворяющее условиям (1.14).

Сформулируем задачу для уравнения с запаздывающим аргументом, описывающую процесс с *последствием*. Требуется найти непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ при $t \geq t_0$ уравнения

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau = \text{const} > 0, \quad (1.17)$$

если известно, что

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{для } t \in [t_0 - \tau, t_0]. \quad (1.18)$$

Начальная функция $\varphi(t)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция. Отрезок $[t_0 - \tau, t_0]$, на котором задается функция $\varphi(t)$, называется *начальным множеством*.

Если уравнение (1.17) является линейным, то его решение, удовлетворяющее условию (1.18), можно найти с помощью преобразования Лапласа. Пусть $t_0 = 0$, тогда при построении соответствующего операторного уравнения следует учитывать то, что для изображения функции $x(t - \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} x(t - \tau) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t - \tau) dt = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(\eta + \tau)} x(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\tau}^0 e^{-p(\eta + \tau)} x(\eta) d\eta + \int_0^{\infty} e^{-p(\eta + \tau)} x(\eta) d\eta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^0 e^{-p\eta} \varphi(\eta) d\eta + e^{-p\tau} X(p). \end{aligned}$$

При восстановлении оригиналов по известным изображениям можно воспользоваться следующим разложением:

$$\frac{1}{1 - \frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m}} = 1 + \frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m} + \left(\frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m} \right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma e^{-np}}{(p+a)^m} \right)^k, \quad (1.19)$$

которое справедливо для любых $n, m \in \mathbb{N}$ при условии $\text{Re } p > 0$.

Пример 1

Найти решение уравнения

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение

Считая, что $x(t) \equiv 0$ для $t \in [-1, 0]$, применив преобразование Лапласа к заданному уравнению, получим следующее операторное уравнение:

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p}.$$

Откуда

$$X(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{pe^{-p}} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}}.$$

Далее, применяя формулу (1.19), имеем

$$X(p) = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-p}}{p} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-pk}}{p^{k+2}}.$$

Учитывая свойство запаздывания, построим выражение для соответствующего оригинала $x(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \theta(t-k).$$

Пример 2

Найти решение уравнения

$$x'(t) = x(t-1),$$

если $x(t) \equiv 2$ для $\forall t \in [-1, 0]$.**Решение**

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. Из условия следует, что $x(0) = 2$, поэтому имеем

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 2.$$

Применим к обеим частям заданного уравнения преобразование Лапласа. Для правой части уравнения имеем

$$\begin{aligned}
x(t-1) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z) dz = \\
&= \int_{-1}^0 e^{-p(z+1)} x(z) dz + \int_0^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z) dz = \\
&= 2 \int_{-1}^0 e^{-p(z+1)} dz + e^{-p} X(p) = \frac{2}{p} (1 - e^{-p}) + e^{-p} X(p).
\end{aligned}$$

Следовательно, соответствующее операторное уравнение имеет вид

$$pX(p) - 2 = \frac{2}{p} (1 - e^{-p}) + e^{-p} X(p).$$

Отсюда получаем

$$X(p) = 2 \frac{p+1-e^{-p}}{p^2 - pe^{-p}} = \frac{2}{p} + \frac{2}{p(p-e^{-p})}.$$

Используя результат предыдущего примера, построим оригинал в виде

$$x(t) = 2 \left(\theta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \theta(t-k) \right).$$

Пример 3

Найти решение уравнения

$$x'(t) + 2x(t) - x(t-1) = f(t),$$

если $x(0) = 0$ и $x(t) \equiv 0$ для $\forall t < 0$.

Решение

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Так как при заданных условиях $x(t-1) \leftrightarrow e^{-p} X(p)$, то операторное уравнение, соответствующее заданному, имеет вид

$$pX(p) + 2X(p) - e^{-p} X(p) = F(p).$$

Решение этого уравнения запишем в виде произведения:

$$X(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}} F(p).$$

Построим оригинал для функции

$$Y(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}},$$

выполнив следующие преобразования:

$$Y(p) = \frac{1}{p+2-e^{-p}} = \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{1-\frac{e^{-p}}{p+2}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kp}}{(p+2)^{k+1}}.$$

Последнее равенство записано, с учетом формулы (1.19). Переходя к оригиналам для слагаемых суммы ряда, используя соответствие $t^k \leftrightarrow \frac{k!}{p^{k+1}}$ $t < 0$ и свойство запаздывания, находим

$$Y(p) \leftrightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^k}{k!} e^{-2(t-k)} \theta(t-k).$$

Решением поставленной задачи будет функция $x(t)$, которая является сверткой функций $f(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^t f(t-\tau) (\tau-k)^k e^{-2(\tau-k)} \theta(\tau-k) d\tau.$$

Контрольные задания

Найти решения уравнения, удовлетворяющие заданным условиям:

19. $x'(t) = x(t-1) + 3$, $x(0) = 0$.
20. $x''(t) - x(t-1) = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
21. $x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
22. $x'(t) = x(t-1)$, $x(t) = t$ для $t \in [-1, 0]$.
23. $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x(t) = \cos t$ для $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

1.5. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений и систем

1.5.1. Уравнение Вольтерра второго рода

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $K(t)$ вида

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad (1.20)$$

где $K(t)$, $f(t)$ — заданные функции, $y(t)$ — искомая.

Пусть $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $K(t) \leftrightarrow K^*(p)$. Переходя в уравнении (1.20) к изображениям и используя свойство изображения свертки, получим соответствующее операторное уравнение

$$Y(p) = F(p) + K^*(p)Y(p).$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K^*(p)}.$$

Оригинал для изображения $Y(p)$ есть искомое решение уравнения (1.20).

1.5.2. Уравнение Вольтерра первого рода

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром $K(t)$ вида

$$\int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t), \quad (1.21)$$

где $K(t)$, $f(t)$ — заданные функции, $y(t)$ — искомая.

Пусть $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $K(t) \leftrightarrow K^*(p)$. Тогда, применив преобразование Лапласа к уравнению (1.21), получим операторное уравнение

$$K^*(p)Y(p) = F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{F(p)}{K^*(p)}.$$

Оригинал для $Y(p)$ дает искомое решение уравнения (1.21).

1.5.3. Системы интегральных уравнений Вольтерра

Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерра вида

$$y_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^s \int_0^t K_{ik}(t-\tau)y_k(\tau)d\tau, \quad i=1,2,\dots,s, \quad (1.22)$$

где $K_{ik}(t)$, $f_i(t)$ — заданные функции, $i, k=1,2,\dots,s$.

Пусть

$$F_i(p) \leftrightarrow f_i(t), \quad K_{ik}^*(p) \leftrightarrow K_{ik}(t), \quad Y_i(p) \leftrightarrow y_i(t).$$

Применяя к обеим частям уравнений (1.22) преобразование Лапласа, получим систему операторных уравнений

$$Y_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^s K_{ik}^*(p)Y_k(p), \quad i=1,2,\dots,s, \quad (1.23)$$

линейную относительно изображений $Y_i(p)$. Решая систему (1.23), найдем $Y_i(p)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (1.22).

Пример 1

Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$$

Решение

Пусть $y(x) \leftrightarrow Y(p)$. Так как интеграл, входящий в заданное уравнение, представляет собой свертку двух функций t и $y(t)$, то его изображением будет произведение изображений этих функций, то есть $\frac{1}{p^2}Y(p)$. Применив к уравнению преобразование Лапласа, получим

следующее операторное уравнение:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2} Y(p).$$

Его решение имеет вид

$$Y(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{p}{(p^2 - 1)} \frac{p}{(p^2 + 1)}.$$

Так как

$$\frac{p}{(p^2 - 1)} \leftrightarrow \operatorname{ch} x, \quad \frac{p}{(p^2 + 1)} \leftrightarrow \cos x,$$

то соответствующий изображению $Y(p)$ оригинал является сверткой двух функций — $\operatorname{ch} x$ и $\cos x$:

$$y(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \cos t dt$$

Вычислив интеграл, получим искомое решение:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Пример 2

Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt - \int_0^x e^{(x-t)} z(t) dt, \\ z(x) = -x - \int_0^x (x-t) y(t) dt - \int_0^x z(t) dt. \end{cases}$$

Решение

Пусть $y(x) \leftrightarrow Y(p)$, $z(x) \leftrightarrow Z(p)$. Применим к каждому уравнению системы преобразование Лапласа. Используя свойства об интегрировании оригинала и о свертке для построения изображений оригиналов уравнений, получим

$$\begin{cases} Y(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{Y(p)}{p} - \frac{Z(p)}{p-1}, \\ Z(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{Y(p)}{p^2} + \frac{Z(p)}{p}. \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений, найдем изображения

$$Y(p) = \frac{1}{p-2}, \quad Z(p) = -\frac{1}{p(p-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-2} \right),$$

которым соответствуют оригиналы:

$$y(x) = e^{2x}, \quad z(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Пример 3

Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y''(x) + 2y'(x) - 2 \int_0^x \sin(x-t)y'(t)dt = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение

Пусть $y(x) \leftrightarrow Y(p)$. Применим к заданному уравнению преобразование Лапласа:

$$p^2 Y(p) + 2pY(p) - 2 \frac{1}{p^2 + 1} pY(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Решив уравнение относительно $Y(p)$, получим

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \leftrightarrow y(x) = 1 - e^{-x}x - e^{-x}.$$

Таким образом: $y(x) = 1 - e^{-x}x - e^{-x}$.

Пример 4

Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t)y''(t)dt + \\ + 2 \int_0^x \sin(x-t)y'(t)dt = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение

Пусть $y(x) \leftrightarrow Y(p)$. Применив к заданному уравнению преобразование Лапласа, получим

$$p^2 Y(p) - 2p Y(p) + Y(p) + 2 \frac{p}{p^2 + 1} p^2 Y(p) + \frac{2}{p^2 + 1} p Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Решив уравнение относительно $Y(p)$, будем иметь

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow y(x) = \int_0^x \cos(x-t) \sin t dt = \frac{x}{2} \sin x.$$

При переходе к оригиналу было использовано свойство изображения свертки.

Контрольные задания

24. Решить следующие уравнения:

а) $y(x) = \sin 2x - \frac{8}{3} \int_0^x \operatorname{sh} 3(x-t) y(t) dt;$

б) $y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t) y(t) dt;$

в) $y(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt;$

г) $y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt;$

д) $y(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt;$

е) $y(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt;$

ж) $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt;$

з) $y(x) = x + 2 \int_0^x (x-t + \sin(t-x)) y(t) dt;$

$$\text{и) } y(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2) y(t) dt ;$$

$$\text{к) } y(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt ;$$

$$\text{л) } \sin^2 x = \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt .$$

25. Решить системы интегральных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)} y_1(t) dt + \int_0^x y_2(t) dt, \\ y_2(x) = 4x - \int_0^x y_1(t) dt + 4 \int_0^x (x-t) y_2(t) dt; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y_1(x) = f(x) + \int_0^x y_2(t) dt, \\ y_2(x) = g(x) - \int_0^x \cos(x-t) y_1(t) dt, \end{cases}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — заданные функции, которые являются оригиналами;

$$\text{в) } \begin{cases} y_1(x) = 2 - \int_0^x (x-t) y_1(t) dt - 4 \int_0^x y_2(t) dt, \\ y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t) dt - \int_0^x (x-t) y_2(t) dt. \end{cases}$$

26. Найти решения интегродифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

$$\text{а) } y''(x) - 2y'(x) + y(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) y''(t) dt + \\ + 2 \int_0^x \sin(x-t) y'(t) dt = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0 ;$$

$$\text{б) } y''(x) + y(x) + 2 \int_0^x \text{sh}(x-t)y(t)dt + \int_0^x \text{ch}(x-t)y'(t)dt = \text{ch}x ,$$
$$y(0) = y'(0) = 0 ;$$

$$\text{в) } y''(x) + y(x) + 2 \int_0^x \text{sh}(x-t)y(t)dt + \int_0^x \text{ch}(x-t)y'(t)dt = \text{ch}x , \quad y(0) = -1 ,$$
$$y'(0) = 1 ;$$

$$\text{г) } y''(x) - y(x) - 4 \int_0^x (x-t)\cos(x-t)y(t)dt = 0 , \quad y(0) = 4 , \quad y'(0) = 0 .$$

2. Классификация уравнений в частных производных

2.1. Дифференциальные уравнения в частных производных

Обозначим через D область n -мерного пространства R^n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_1, x_2, \dots, x_n , $n \geq 2$ — декартовы координаты точки x .

Уравнение вида

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \frac{\partial u}{\partial x_n^m}\right) = 0, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n i_j = k, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 1$$

называется *дифференциальным уравнением в частных производных порядка m* относительно неизвестной функции $u = u(x)$, где

$F = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots\right)$ — заданная действительная функция точек $x \in D$,

неизвестной функции u и ее частных производных. Левая часть равенства (2.1) называется *дифференциальным оператором с частными производными порядка m* .

Действительная функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в области D задания уравнения (2.1), непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется *классическим (регулярным) решением* уравнения (2.1).

Уравнение (2.1) называется *линейным*, если F линейно зависит от всех переменных вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Линейное уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x), \quad \sum_{j=1}^n i_j = k, \quad x \in D$$

или в виде

$$Lu = f(x), \quad x \in D,$$

где L — линейный дифференциальный оператор порядка m :

$$L \equiv \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad \sum_{j=1}^n i_j = k.$$

Линейное уравнение называется однородным, если $f(x) \equiv 0$, неоднородным, если $f(x) \neq 0$.

Уравнение (2.1) порядка m называется квазилинейным, если F линейно зависит лишь от частных производных порядка m :

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad \sum_{j=1}^n i_j = m.$$

Контрольные задания

27. Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями в частных производных:

а) $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = 0$;

б) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0$;

в) $\sin^2(u_{xx} + u_{xy}) + \cos^2(u_{xx} + u_{xy}) - u = 1$;

г) $\sin(u_{xy} + u_x) - \sin u_{xy} \cos u_x - \cos u_{xy} \sin u_x + 2u = 0$;

д) $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u + 2 = 0$;

е) $\ln|u_x u_y| - \ln|u_y| - \ln|u_x| + 5u - 6 = 0$.

28. Определить порядок уравнений:

а) $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y)^2 - 2xy = 0$;

б) $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$;

в) $2(u_x - 2u)u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0$.

29. Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными и какие нелинейными (квазилинейными):

а) $u_x u_{xy}^2 + 2x u_{yy} - 3x u_y - u = 0$;

б) $u_y u_{xx} - 3x^2 u_{xy} + 2u_x - f(x, y)u = 0$;

в) $2\sin(x + y)u_{xx} - x \cos y u_{xy} + x u_x - 3u + 1 = 0$;

г) $x^2 y u_{xxy} + 2e^x y^2 u_{xy} - (x^2 y^2 + 1)u_{xx} - 2u = 0$;

д) $3u_{xy} - 6u_{xx} + 7u_y - u_x + 8x = 0$;

е) $u_{xy} u_{xx} - 3u_{yy} - 6x u_y + x u = 0$;

ж) $2x u_{xy} - 6 \frac{\partial}{\partial x}(u^2 - xy) + u_{yy} = 0$;

з) $\frac{\partial}{\partial y}(u_y + u_x^2) - 2u_x u_{xy} + u_x - 6u = 0$.

2.2. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим некоторые примеры уравнений в частных производных.

Пример 1

Найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1.$$

Решение

Интегрируя, получим

$$u = x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция. Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 2

Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y,$$

где $u = u(x, y)$.

Решение

Дважды интегрируя по y , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x), \quad u = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции.

Пример 3

Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Решение

Интегрируя уравнение по x , имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Проинтегрировав полученный результат по y , находим

$$u = \varphi(x) + \psi(y),$$

где $\psi(y) = \int f(y) dy$, $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.

Пример 4

Решить уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x \neq 0.$$

Решение

Данное уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Проинтегрировав уравнение по переменной x , получим

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(y),$$

где $f(y)$ — произвольная функция.Интегрируя полученный результат по переменной y , находим

$$u = \varphi(x) + \psi(y),$$

где $\psi(y) = \frac{1}{x^2} \int f(y) dy$, $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольные функции.**Пример 5**

Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \right) + x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \right) + x^2 y = 0.$$

Решение

Введем обозначение

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} + u, \tag{*}$$

тогда заданное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial y} + xv = -x^2 y.$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения построим в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $v_0(x, y)$ и частного решения неоднородного уравнения $\tilde{v}(x, y)$:

$$v(x, y) = v_0(x, y) + \tilde{v}(x, y) = \psi(x)e^{-xy} + \tilde{v}(x, y),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция. Нетрудно установить, что

$$\tilde{v}(x, y) = 1 - xy.$$

Таким образом, учитывая обозначение (*), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = \psi(x)e^{-xy} + 1 - xy. \quad (**)$$

Теперь решим уравнение (**). Так как уравнение (**) линейное неоднородное, то сначала построим общее решение соответствующего однородного уравнения. Оно будет иметь вид

$$u(x, y) = \varphi(y)e^{-x}.$$

Далее применим метод вариации произвольной постоянной:

$$u(x, y) = \varphi(x, y)e^{-x}. \quad (***)$$

Подставим выражение (***) в уравнение (**):

$$\varphi_x = e^x (\psi(x)e^{-xy} + 1 - xy).$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$\varphi(x, y) = \int_0^x e^{\xi} (\psi(\xi)e^{-\xi y} + 1 - \xi y) d\xi + \chi(y),$$

где $\chi(y)$ — произвольная функция.

Учитывая равенство (***), получаем общее решение уравнения (**):

$$u(x, y) = e^{-x} \left\{ \int_0^x e^{\xi} (\psi(\xi)e^{-\xi y} + 1 - \xi y) d\xi + \chi(y) \right\}.$$

Контрольные задания

30. Проверить тождественность равенства:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \varphi(x + at)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$, где φ и ψ — произвольные дифференцируемые функции;

в) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ и ψ — произвольные дифференцируемые функции.

31. Решить уравнения:

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, если $z = z(x, y)$;

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ при условии $z(x, y)|_{y=0} = x$, $z(x, y)|_{x=0} = y^2$;

в) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$;

г) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$;

д) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 y$;

е) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x$;

ж) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ при заданном условии $z(x, y)|_{y=x^2} = 1$.

2.3. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} = U, \quad (2.2)$$

где X , Y и U — функции x , y и u .

Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{du}{U}.$$

Пусть решение этой системы определяется равенствами

$$\omega_1(x, y, u) = C_1, \quad \omega_2(x, y, u) = C_2.$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$\Phi[\omega_1(x, y, u), \omega_2(x, y, u)] = 0,$$

где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 1

Найти общий интеграл уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Решение

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

Решая уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

получим

$$\frac{y}{x} = C_1;$$

решение уравнения

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$$

есть

$$\frac{u}{x} = C_2.$$

Теперь можно найти общий интеграл заданного уравнения:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0, \text{ или } \frac{u}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

то есть

$$u = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где ψ — произвольная функция.

Пример 2

Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение

Запишем систему уравнений

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{du}{0}.$$

Воспользовавшись свойством пропорции, представим уравнение

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy}$$

в виде

$$\frac{dx + dy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{dx - dy}{x^2 + y^2 - 2xy},$$

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{x+y} = -\frac{1}{x-y} + C_1,$$

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = C_1,$$

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} = C_1.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{y}{x^2 - y^2} = C_1.$$

Второе уравнение системы: $du = 0$. Отсюда $u = C_2$.

Общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}, u\right) = 0, \text{ или, } u = \psi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right),$$

где ψ — произвольная функция.

Пример 3

Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy$$

и проходящую через окружность

$$x^2 + y^2 = 16, \quad u = 3.$$

Решение

Решим систему уравнений

$$\frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xu} = -\frac{du}{2xy}.$$

Освободившись от знаменателя, имеем

$$xdx = ydy, \quad 2xdx = -udu.$$

Интегрируя оба уравнения, получим

$$x^2 - y^2 = C_1, \quad x^2 + \frac{u^2}{2} = C_2.$$

Общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x^2 + \frac{u^2}{2} = \psi(x^2 - y^2). \quad (*)$$

Из семейства поверхностей, определяемых этим уравнением, нужно выделить поверхность, проходящую через окружность:

$$x^2 + y^2 = 16, \quad u = 3.$$

Для того чтобы найти функцию ψ , в равенстве (*) положим

$$x^2 = 16 - y^2, \quad u = 3.$$

Тогда получим

$$16 - y^2 + \frac{9}{2} = \psi(16 - 2y^2).$$

Пусть $16 - 2y^2 = t$, откуда $y^2 = 8 - \frac{t}{2}$.

Следовательно,

$$\psi(t) = \frac{t + 25}{2},$$

то есть

$$\psi(x^2 - y^2) = \frac{x^2 - y^2 + 25}{2}.$$

Подставляя найденное выражение в соотношение (*), имеем

$$x^2 + \frac{u^2}{2} = \frac{x^2 - y^2 + 25}{2}, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + u^2 = 25.$$

Итак, искомой поверхностью является сфера.

2.3.1. Применение преобразования Лапласа к решению линейных уравнений первого порядка

Неизвестная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению первого порядка линейному относительно частных производных и заданным условиям, может быть найдена с помощью однократного или двукратного преобразования Лапласа в зависимости от вида условий.

В первом случае преобразование применяют к уравнению в частных производных по одной из независимых переменных в предположении, что другая остается неизменной. В результате получается операторное уравнение относительно изображения, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением с параметром. После интегрирования операторного уравнения по найденному из него изображению находят оригинал как решение исходного уравнения.

Во втором случае преобразование Лапласа применяется последовательно, в результате получается уравнение, из которого находят двукратное изображение искомой функции. С помощью обратных преобразований восстанавливается функция-оригинал.

Решение уравнения в частных производных, найденное с помощью двукратного преобразования Лапласа, не зависит от того, в какой последовательности применялись прямые и обратные преобразования.

Пример 4

В области $x > 0$, $y > 0$, с помощью преобразования Лапласа найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y,$$

удовлетворяющее условиям: $u(0, y) = u(x, 0) = 1$.

Решение

Применим к заданному уравнению преобразование Лапласа по переменной x , полагая $u(x, y) \leftrightarrow U(p, y)$. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leftrightarrow pU(p, y) - u(0, y) = pU(p, y) - 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \leftrightarrow \frac{\partial U(p, y)}{\partial y},$$

$$u(x, 0) = 1 \leftrightarrow U(p, 0) = \frac{1}{p},$$

то указанное преобразование дает операторное уравнение:

$$pU(p, y) - 1 + \frac{\partial U(p, y)}{\partial y} = \frac{1}{p^2} + \frac{y}{p},$$

к которому следует добавить условие $U(p, 0) = \frac{1}{p}$.

Таким образом, однократное преобразование Лапласа по переменной x дает задачу

$$\begin{cases} pU(p, y) + \frac{\partial U(p, y)}{\partial y} = \frac{1}{p^2} + \frac{y}{p} + 1, & y > 0, \\ U(p, 0) = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (*)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами для функции U , с независимой переменной y и параметром p . Решим задачу Коши (*) двумя способами.

Во-первых, решая дифференциальное уравнение, можно построить его общее решение:

$$U(p, y) = Ce^{-py} + \frac{y}{p^2} + \frac{1}{p},$$

и выделить решение, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$U(p, y) = \frac{y}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Для найденного изображения легко построить соответствующий оригинал:

$$u(x, y) = yx + 1.$$

Второй способ предполагает решение задачи (*) с помощью преобразования Лапласа относительно переменной y .

Полагая $U(p, y) \leftrightarrow V(p, q)$, построим операторное уравнение

$$qV(p, q) - \frac{1}{p} + pV = \frac{1}{p^2 q} + \frac{1}{pq^2} + \frac{1}{q},$$

откуда находим

$$V(p, q) = \frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{pq}.$$

Выполняя обратные преобразования

$$V(p, q) = \frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{pq} \leftrightarrow U(p, y) = \frac{1}{p^2} y + \frac{1}{p} \leftrightarrow u(x, y) = xy + 1,$$

находим решение задачи, сформулированной в условии примера.

И первый способ — однократное преобразование Лапласа, и второй — двукратное преобразование Лапласа, дают один и тот же результат.

Контрольные задания

32. Найти общий интеграл дифференциальных уравнений:

а) $\sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin z$;

б) $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

33. Найти уравнения векторных поверхностей, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям:

а) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu$;

б) $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 4u$;

в) $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$;

г) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x$;

34. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \varphi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$ дифференциальному уравнению $(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

35. С помощью преобразования Лапласа в области $x > 0$, $y > 0$ найти решения $u = u(x, y)$ уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

а) $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y)$, $a, b > 0$,

$$u(0, y) = \psi(y), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0);$$

б) $(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} = u + y$, $u(0, y) = y^3 - y$;

в) $\frac{\partial u}{\partial x} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y$, $u(x, 0) = \sin x$.

2.4. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка

Линейным уравнением в частных производных второго порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x), \quad x \in D, \quad (2.3)$$

где коэффициенты являются действительными функциями точки x в области D :

$$a_{ij} = a_{ij}(x), \quad b_i = b_i(x), \quad c = c(x).$$

Уравнению (2.3) ставится в соответствие характеристическая форма:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j,$$

которая является квадратичной.

В каждой фиксированной точке $x \in D$ квадратичную форму Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных:

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

можно привести к каноническому виду

$$\tilde{Q}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i^2, \quad (2.4)$$

где $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Канонический вид квадратичной формы определяет тип уравнения (2.3).

Линейное уравнение (2.3) будем называть *эллиптическим* в точке $x \in D$, если в каноническом виде квадратичной формы (2.4) с коэффициентами, вычисленными в точке $x \in D$, все $\alpha_i \neq 0$ и одного знака.

Уравнение (2.3) будем называть *гиперболическим* в точке $x \in D$, если в каноническом виде квадратичной формы (2.4) с коэффициентами, вычисленными в точке $x \in D$, все $\alpha_i \neq 0$, но не все одного знака.

Уравнение (2.3) будем называть *параболическим* в точке $x \in D$, если в каноническом виде квадратичной формы (2.4) с коэффициентами, вычисленными в точке $x \in D$, хотя бы один из коэффициентов $\alpha_k = 0$.

Пример 1

Определить тип уравнения для $u = u(x, y)$:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 6u + y = 0.$$

Решение

Заданному уравнению соответствует квадратичная форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 8\lambda_2^2,$$

которую приведем к каноническому виду, последовательно выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 8\lambda_2^2 = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_2^2 + 4\lambda_2^2 = \\ &= (\lambda_1 - 2\lambda_2)^2 + (2\lambda_2)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 = \tilde{Q}(\mu_1, \mu_2). \end{aligned}$$

Так как оба коэффициента в каноническом виде квадратичной формы имеют один знак, то заданное уравнение имеет эллиптический тип во всей области задания переменных x, y .

Пример 2

Определить тип уравнения для $u = u(x, y, z)$:

$$u_{xx} - 4u_{yy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u_x - u_y = xyz^2.$$

Решение

Заданному уравнению соответствует квадратичная форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 - 4\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3.$$

Приведем ее к каноническому виду, последовательно выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 - \lambda_3^2 - 4\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3)^2 - (2\lambda_2 - \lambda_3)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 = \tilde{Q}(\mu_1, \mu_2, \mu_3). \end{aligned}$$

Так как один из коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равен 0 (при μ_3^2), то заданное уравнение имеет параболический тип во всей области задания переменных x, y, z .

Контрольные задания

Определить тип следующих уравнений:

36. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xuy_x + 3xu = 0$.

37. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xy} - 3x^2u_y + y \sin xu + xe^{-y} = 0$.

38. $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2 \sin x = 0$.

39. $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$.

40. $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$.

41. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$.

2.5. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными

Рассмотрим уравнение второго порядка, линейное относительно старших производных, для неизвестной функции $u(x, y)$ двух независимых переменных x и y :

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (2.5)$$

где действительные функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ определены в области D .

2.5.1. Замена независимых переменных

Введем независимые переменные

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (2.6)$$

где ξ , η — дважды непрерывно дифференцируемые функции в области D .

Потребуем, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Попытаемся преобразование (2.6) выбрать таким образом, чтобы в новых переменных уравнение (2.5) имело наиболее простую форму. Преобразуем уравнение (2.5) к новым переменным, полагая

$$U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \quad u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= U_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}, \\ u_{yy} &= U_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}, \\ u_{xy} &= U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}. \end{aligned}$$

В новых переменных уравнение (2.5) примет вид

$$\bar{a}U_{\xi\xi} + 2\bar{b}U_{\xi\eta} + \bar{c}U_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (2.7)$$

где

$$\bar{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad (2.8)$$

$$\bar{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,$$

$$\bar{b} = a\xi_x\eta_x + 2b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,$$

$\bar{F} = \bar{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ — функция, не зависящая от старших производных.

Определение 1. Уравнение (2.5) имеет в точке (x, y) :

- *гиперболический* тип, если $b^2 - ac > 0$ в точке (x, y) ,
- *эллиптический* тип, если $b^2 - ac < 0$ в точке (x, y) ,
- *параболический* тип, если $b^2 - ac = 0$ в точке (x, y) .

Если тип уравнения сохраняется во всех точках области D , то уравнение называется уравнением данного типа во всей области D .

Если в разных точках области уравнение принадлежит разным типам, то оно называется уравнением *смешанного* типа в области D .

2.5.2. Уравнение характеристик

Теперь выясним, как нужно вводить новые переменные ξ и η , чтобы уравнение (2.5) приняло наиболее простой вид.

Предположение. Уравнение (2.5) принадлежит определенному типу во всей области D и $a(x, y)$, и $c(x, y)$ одновременно в нуль не обращаются.

Для определенности считаем, что $a(x, y) \neq 0$.

Из соотношения (2.8) видно, что для того, чтобы $\bar{a} = 0$, нужно в качестве функции $\xi(x, y)$ взять решение уравнения:

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0. \quad (2.9)$$

Определение 2. Уравнение (2.9) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (2.5).

Л е м м а . Пусть функция $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области D и такова, что $z_y \neq 0$. Для того, чтобы семейство кривых $z(x, y) = C$ представляло собой характеристики уравнения (2.5), необходимо и достаточно, чтобы выражение $z(x, y) = C$ было общим интегралом обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0. \quad (2.10)$$

Определение 3. Уравнение (2.10) называется *уравнением характеристик* для уравнения (2.5).

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = C$ есть интеграл уравнения (2.10), мы обращаем в нуль коэффициент при $U_{\xi\xi}$ в уравнении (2.7).

Если $\psi(x, y) = C$ — другой интеграл уравнения (2.10), независимый от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обращаем в нуль также и коэффициент при $U_{\eta\eta}$.

Уравнение (2.10) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (2.12)$$

Определение 4. Решения уравнений (2.11), (2.12) называются *характеристиками* для уравнения (2.5).

2.5.3. Канонические формы уравнений

Рассмотрим область D , во всех точках которой уравнение (2.5) имеет один и тот же тип.

1. Для уравнения гиперболического типа $b^2 - ac > 0$ правые части уравнений (2.11) и (2.12) действительны и различны.

Общие интегралы их, $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$, определяют семейства характеристик, которые не касаются друг друга.

Выбирая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, получим $\bar{a} = 0$, $\bar{c} = 0$.

Следовательно, уравнение (2.7) после деления на $\bar{b} \neq 0$ принимает вид

$$U_{\xi\eta} = \bar{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta). \quad (2.13)$$

Определение 5. Форма уравнения (2.13) называется *первой канонической формой* уравнения гиперболического типа.

Часто используется и другая каноническая форма, которую можно получить заменой:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

В этом случае уравнение принимает вид

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \bar{F}_1(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta).$$

2. Пусть в области D уравнение (2.5) эллиптического типа, то есть $b^2 - ac < 0$.

Тогда уравнения характеристик (2.11) и (2.12) при действительных коэффициентах a , b , c имеют комплексно-сопряженные правые части. Все характеристики будут комплексными.

Считая, что коэффициенты a , b , c определены в комплексной области, и делая формальную замену:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \xi^*(x, y),$$

где $\xi(x, y) = C_1$ и $\xi^*(x, y) = C_2$ — комплексно-сопряженные интегралы (2.11) и (2.12), получим уравнение

$$U_{\xi\eta} = \bar{F}_2(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \quad (2.14)$$

в комплексной области.

Если сделать еще одну замену:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \operatorname{Re} \xi, \quad \beta = -\frac{i}{2}(\xi - \eta) = \operatorname{Im} \xi,$$

то уравнение (2.14) примет вид

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \bar{F}_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \quad (2.15)$$

уже в действительной области.

Определение 6. Форма (2.15) преобразованного уравнения (2.5) есть *канонический вид* уравнения эллиптического типа.

3. Рассмотрим, наконец, уравнение параболического типа в области D :

$$b^2 - ac = 0.$$

В этом случае существует только одно уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Пусть $\xi(x, y) = C$ — его интеграл. Возьмем произвольную дважды дифференцируемую функцию $\eta(x, y)$ такую, чтобы выполнялось условие

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0.$$

Тогда при замене $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ уравнение (2.7) принимает вид

$$U_{\eta\eta} = \bar{F}_4(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta). \quad (2.16)$$

Определение 7. Форма (2.16) преобразованного уравнения (2.5) представляет собой *каноническую форму* уравнения параболического типа.

Пример 1

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

$$u_{xx} - uu_{yy} = 0.$$

Решение

Здесь $a = 1$, $b = 0$, $c = -u$, $b^2 - ac = u$. Следовательно, в области $u > 0$ уравнение гиперболично, в области $u < 0$ — эллиплично.

а) Рассмотрим сначала область гиперболичности. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{y},$$

а $x - 2\sqrt{y} = C_1$, $x + 2\sqrt{y} = C_2$ — их общие интегралы.

Произведя замену независимых переменных: $\xi = x - 2\sqrt{y}$, $\eta = x + 2\sqrt{y}$, получим каноническую форму преобразованного уравнения

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\eta} - u_{\xi}).$$

б) в области эллиптичности ($y < 0$) производим замену переменных:

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = x, \quad \beta = \frac{\eta - \xi}{2i} = 2\sqrt{-y}.$$

Канонический вид уравнения:

$$W_{\alpha\alpha} + W_{\beta\beta} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}W_{\beta} = 0.$$

Пример 2

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

$$xu_{xx} - 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

Решение

Здесь $a = x$, $b = -\sqrt{xy}$, $c = y$, $b^2 - ac = 0$. Следовательно, всюду это уравнение параболического типа. Оно имеет одно семейство характеристик, описываемых уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Общий интеграл этого уравнения: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$. Поэтому полагаем

$$\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

η можно положить, равной любой функции $\psi(x, y)$, независимой от ξ . Полагаем, например,

$$\eta = \sqrt{x}.$$

Тогда получаем следующий канонический вид уравнения:

$$u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0.$$

Пример 3

Найти области сохранения типа уравнения:

$$(y+2)u_{xx} + 2xu_{xy} - (y-2)u_{yy} + xu_x + 2 = 0.$$

Решение

Здесь $a = y + 2$, $b = x$, $c = -(y - 2)$, $b^2 - ac = x^2 + y^2 - 4$. Область параболичности D_1 уравнения определяет условие $b^2 - ac = 0$. Имеем $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ — окружность с центром в начале координат радиусом 2.

Область гиперболичности D_2 определяет условие $b^2 - ac > 0$. Имеем $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}$ — внешность круга с центром в начале координат и радиусом 2.

Область эллиптичности D_3 определяет условие: $b^2 - ac < 0$. Имеем:

$D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ — часть плоскости, ограниченная кругом с центром в начале координат и радиусом 2.

Контрольные задания

42. Установить тип дифференциального уравнения, привести его к каноническому виду:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$$в) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$г) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$д) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$е) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial u}{\partial x} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} - 10u = 0;$$

$$ж) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$з) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 32u = 0.$$

43. Привести уравнения к каноническому виду:

$$а) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$б) y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$в) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (2 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$г) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 + y^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

44. На плоскости (x, y) указать области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнений:

$$а) (1 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$б) \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \sin(xy) \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$в) \sin(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos y \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0;$$

$$г) \sqrt{2} \cos(x^2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

45. Привести уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

$$\text{а) } x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{б) } y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{в) } x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\text{г) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\cos^2 x - \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\text{д) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2.6. Основные уравнения математической физики

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, описывающих явления природы. Построение математической модели процесса начинается с установления величин, которые являются определяющими для изучаемого процесса. Далее, используя физические законы (принципы), выражающие связь между этими величинами, строится уравнение (система уравнений) в частных производных и составляются дополнительные условия (начальные и граничные) к уравнению (системе).

Мы будем в основном изучать уравнения в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа, обычно называемые классическими уравнениями математической физики.

2.6.1. Уравнение колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) приводят к уравнению колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t),$$

где неизвестная функция $u = u(x, t)$ зависит от n ($n = 1, 2, 3$) пространственных переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и времени t , коэффициенты ρ , k , q определяются свойствами среды, $F(x, t)$ — плотность внешнего возмущения:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Под струной мы понимаем тонкую нить, которая не оказывает никакого сопротивления изменению ее формы, не связанного с изменением ее длины. Сила натяжения T_0 , действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси x .

Мы будем рассматривать только *поперечные колебания* струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси x .

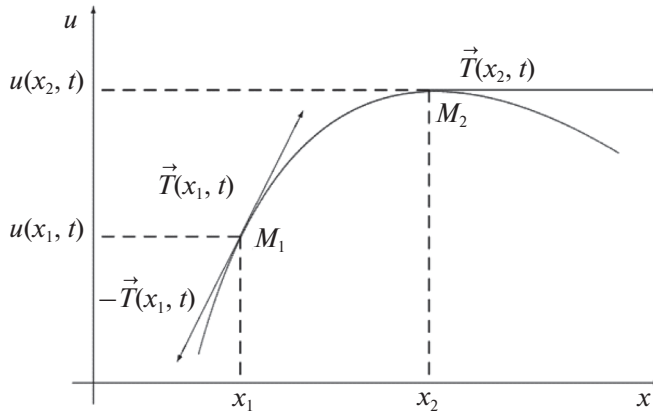
Обозначим через $u(x, t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия.

Рассматривая далее только *малые* колебания струны, мы будем считать, что смещение $u(x, t)$, а также производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что

их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими величинами.

При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1).

Обозначим через $F(x, t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x .

Рис. 1. Мгновенный профиль участка струны (x_1, x_2) в момент времени t

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению колебаний струны:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Если $\rho(x) = \rho = \text{const}$, то есть в случае однородной струны, уравнение обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}.$$

Это уравнение будем называть *одномерным волновым уравнением*.

Если внешняя сила отсутствует, то имеем: $F(x, t) = 0$ и получаем *уравнение свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Аналогично уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(x, t).$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}.$$

Последнее уравнение будем называть *двумерным волновым уравнением*.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x, t)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Будем записывать волновые уравнения единой формулой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

2.6.2. Уравнение теплопроводности

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются уравнением теплопроводности

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t).$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через $u(x, t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t , а через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ — соответственно ее плотность, удельную плотность и коэффициент теплопроводности в точке x . Пусть $F(x, t)$ — интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t . Посчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Обозначим через S границу V и пусть \vec{n} — внешняя нор-

малы к ней. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_s k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS \Delta t = \Delta t \iint_s (k(x) \operatorname{grad} u, \vec{n}) dS,$$

равное, в силу формулы Гаусса-Остроградского:

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) dx \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме V количество тепла

$$Q_2 = \iiint_V F(x, t) dx \Delta t.$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ выросла на величину

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \iiint_V c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \Delta t.$$

С другой стороны, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ и поэтому

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) + F - c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \Delta t = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема V , получаем уравнение распространения тепла

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (2.17)$$

Если среда однородна, то есть $c(x)$, $\rho(x)$ и $k(x)$ — постоянные, то уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (2.18)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{F}{c\rho}$.

Уравнение (2.18) называется уравнением теплопроводности или *уравнением диффузии*.

2.6.3. Стационарное уравнение

Для стационарных процессов $F(x, t) = F(x)$, $u(x, t) = u(x)$ и уравнения колебаний, и теплопроводности принимают вид

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = F(x). \quad (2.19)$$

При $k = \text{const}$, $q = 0$ уравнение (2.19) называется *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}. \quad (2.20)$$

При $f = 0$ уравнение (2.20) называется *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = 0.$$

Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, а именно: пусть внутри некоторого объема V с границей S , которая имеет стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$. Если течение жидкости не вихревое ($\operatorname{rot} \vec{v} = 0$), то скорость \vec{v} является потенциальным вектором, то есть

$$\vec{v} = \operatorname{grad} u, \quad (2.21)$$

где u — скалярная функция, называемая *потенциалом скорости*.

Если отсутствуют источники, то

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.22)$$

Теперь из формул (2.21) и (2.22) получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0, \quad \text{или} \quad \Delta u = 0,$$

то есть потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Контрольные задания

46. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.
47. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.
48. Тяжелая однородная нить длины l прикреплена верхним концом ($x = 0$) к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω . Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.
49. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $v(x)$ в направлении оси x , если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные оси x .
50. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде для вещества, частицы которого: а) распадаются со скоростью, пропорциональной концентрации; б) размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации.
51. Исходя из Максвелла, в вакууме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{H} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

где \vec{H} — напряженность магнитного поля, \vec{E} — напряженность магнитного поля. Вывести уравнение для потенциала электрического поля постоянного электрического тока, вывести уравнение для потенциала.

2.7. Постановка основных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка

2.7.1. Классификация краевых задач

Как было показано, линейное уравнение второго порядка

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (2.23)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (2.24)$$

описывает процессы диффузии, а уравнение

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \quad (2.25)$$

— стационарные процессы.

Пусть $G \subset R^n$ — область, где происходит процесс и S — ее граница. Таким образом, G — область задания уравнения (2.25). Областью задания уравнений (2.23) и (2.24) будем считать цилиндр $\Omega_T = G \times (0, T)$ высоты T и основанием G . Его граница состоит из боковой поверхности $S \times (0, T)$ и двух оснований: нижнего $\bar{G} \times \{0\}$ и верхнего $\bar{G} \times \{T\}$ (рис. 2).

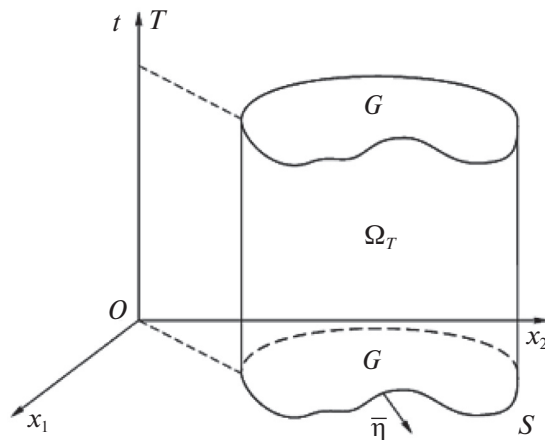


Рис. 2. Область задания уравнений колебаний и диффузии

Будем предполагать, что коэффициенты ρ , k , q уравнений (2.23)–(2.25) не зависят от времени t ; далее, в соответствии с их физическим смыслом, будем считать, что $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in \bar{G}$.

При этих предположениях уравнение колебаний (2.23) — гиперболического типа, уравнение диффузии (теплопроводности) (2.24) — параболического типа и стационарное уравнение (2.25) — эллиптического типа.

Далее, чтобы полностью описать физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (начальные условия) и режим на границе той области, в которой происходит процесс (граничные условия).

Различают три типа задач для дифференциальных уравнений.

- 1) Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область G совпадает со всем пространством R^n , граничные условия отсутствуют.
- 2) Краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе S , начальные условия, естественно, отсутствуют.
- 3) Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные, и граничные условия, $G \neq R^n$.

Опишем подробнее каждую из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (2.23)–(2.25).

2.7.2. Задача Коши

Для уравнения колебаний (2.23) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (2.23) в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x). \quad (2.26)$$

При этом необходимо:

$$F \in C(t > 0), \quad u_0 \in C^1(R^n), \quad u_1 \in C(R^n).$$

Для уравнения теплопроводности (2.24) задача Коши ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, удовлетворяющую уравнению (2.24) в полупространстве $t > 0$ и начальным условиям при $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2.27)$$

При этом необходимо, чтобы

$$F \in C(t > 0), \quad u_0 \in C(R^n).$$

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Пусть даны дифференциальные уравнения 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \Phi \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (2.28)$$

кусочно-гладкая поверхность $\Sigma: t = \sigma(x)$ и функции u_0 и u_1 на Σ . Задача Коши для уравнения (2.28) состоит в нахождении в некоторой части области $t > \sigma(x)$, примыкающей к поверхности Σ , решения $u(x, t)$, удовлетворяющего на Σ краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = u_1,$$

где \vec{n} — нормаль к Σ , направленная в сторону возрастающих t .

2.7.3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Смешанная задача

Краевая задача для уравнения (2.25) состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющей в области G уравнению (2.25) и граничному условию на S вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}|_S = v, \quad (2.29)$$

где α, β, v — заданные непрерывные функции на S , причем

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Выделяют следующие типы граничных условий (2.29).

Граничное условие I рода ($\alpha = 1, \beta = 0$):

$$u|_S = u_0.$$

Граничное условие II рода ($\alpha = 0, \beta = 1$):

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1.$$

Граничное условие III рода ($\alpha \geq 0, \beta = 1$):

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_2.$$

Соответствующие краевые задачи называются *задачами I, II и III рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача I рода:

$$\Delta u = -f, \quad u|_S = u_0$$

называется *задачей Дирихле*; краевая задача II рода:

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1$$

называется *задачей Неймана*.

Для уравнения колебаний (2.23) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(\Omega_\infty) \cap C^1(\bar{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (2.23) в цилиндре Ω_∞ , начальным условиям (2.26) при $t = 0, x \in \bar{G}$ и граничному условию (2.29) при $x \in S, t \geq 0$.

Аналогично для уравнения диффузии (2.24) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x, t)$ класса $C^2(\Omega_\infty) \cap C^1(\bar{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (2.24) в цилиндре Ω_∞ , начальному условию (2.27) при $t = 0, x \in \bar{G}$ и граничному условию (2.29) при $x \in S, t \geq 0$.

2.7.4. Корректность постановки задач математической физики

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) решение существует в каком-то классе функций M_1 ;
- 2) решение — единственное в некотором классе функций M_2 ;
- 3) решение непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и так далее).

Непрерывная зависимость решения u от данных задачи \tilde{u} означает следующее: пусть последовательность \tilde{u}_k , $k = 1, 2, \dots$, в каком-то смысле стремится к \tilde{u} и \tilde{u}_k , $k = 1, 2, \dots$, u — соответствующие решения задачи; тогда $u_k \rightarrow u$, $k \rightarrow \infty$ в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом.

Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем обстоятельством, что данные физической задачи, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям а)–в), называется *корректно поставленной*, а соответствующее множество функций $M_1 \cap M_2$ — *классом корректности*.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений с N неизвестными функциями u_1, u_2, \dots, u_N :

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i \left(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right), \quad (2.30)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$. Здесь правые части Φ_i не содержат производные порядка выше k_i и производные по t порядка выше $k_i - 1$, то есть

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i, \quad \alpha_0 \leq k_i - 1.$$

Для системы (2.30) поставим следующую задачу Коши: найти решение u_1, u_2, \dots, u_N этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при $t = t_0$:

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \Big|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.31)$$

где $\varphi_{ik}(x)$ — заданные функции в некоторой области $G \subset R^n$.

Теорема Ковалевской.

Если все функции $\varphi_{ik}(x)$ аналитичны в некоторой окрестности точки x_0 и все функции $\Phi_i \left(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right)$ аналитичны в окрестности точки $\left(x_0, t_0, \varphi_{10}(x_0), \dots, \varphi_{N0}(x_0), \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \varphi_{j\alpha_0}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots \right)$, то

задача Коши (2.30), (2.31) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) и притом единственное в классе аналитических функций.

Приведем пример, показывающий, что может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Этот пример построен Адамаром.

Решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx$$

есть

$$u_k(x, t) = \frac{\operatorname{sh} kt}{k^2} \sin kx.$$

Если $k \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{k} \sin kx \rightarrow 0$; тем не менее, при $x \neq j\pi$, $j = 0, \pm 1, \dots$ $u_k(x, t)$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.

Контрольные задания

52. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены жестко.
53. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец ($x = 0$) жестко закреплен, а нижний свободен.

54. Рассмотреть задачу 53 в предположении, что струна вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ относительно вертикального положения равновесия.
55. На боковой поверхности тонкого стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_{\text{ср}} = \varphi(t)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на одном конце его поддерживается температура $f_1(t)$, а на другой подается тепловой поток $q(t)$.
56. Поставить краевую задачу о нагревании полубесконечного стержня, конец которого горит, причем фронт горения распространяется со скоростью v и имеет температуру $\varphi(t)$.

3. Гиперболические уравнения

3.1. Уравнение колебания струны и его решение методом Даламбера

Изучение методов решений краевых задач для уравнений гиперболического типа начинаем с задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.1. Формула Даламбера

Преобразуем уравнение (3.1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]^2 - a^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$\frac{dx}{dt} - a = 0, \quad \frac{dx}{dt} + a = 0,$$

интегралами которых являются

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Теперь, полагая

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.3)$$

Общее решение уравнения (3.3) определяется формулой

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции. Возвращаясь к переменным x, t , получаем

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (3.4)$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций f_1 и f_2 . Оно называется *решением Даламбера*.

Далее, подставляя формулу (3.4) в (3.2), будем иметь

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (3.5)$$

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x), \quad (3.6)$$

откуда, интегрируя второе равенство (3.6), получим

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + C, \quad (3.7)$$

где x_0 и C — постоянные. Из формул (3.5) и (3.7) находим

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + C \right],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - C \right].$$

При этом, учитывая формулу (3.4), имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x+at) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(y) dy + C + \varphi(x-at) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(y) dy - C \right]$$

и окончательно получаем формулу

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) называется *формулой Даламбера*.

Нетрудно проверить, что формула (3.8) удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.2) при том, что $\varphi(x) \in C^2(R)$, а $\psi(x) \in C^1(R)$. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

Пример 1

Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u|_{t=0} = x^2, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Решение

Так как $\psi(x) = 0$, то

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2},$$

где $a=1$, $\varphi(x) = x^2$.

$$u(x,t) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2}, \text{ или } u(x,t) = x^2 + t^2.$$

Пример 2

Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x.$$

Решение

Здесь $a=2$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x$. Отсюда имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} y dy = \frac{1}{8} y^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8} [(x+2t)^2 - (x-2t)^2],$$

то есть

$$u(x, t) = xt.$$

3.1.2. Неоднородное уравнение

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (3.9)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in R. \quad (3.10)$$

Легко проверить, что решение задачи (3.9), (3.10) $u = u(x, t)$ представимо в форме

$$u = v + \omega, \quad (3.11)$$

где v — решение задачи Коши (3.1), (3.2), а ω — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in R, \quad t > 0, \\ \omega(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \omega(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \in R. \end{cases} \quad (3.12)$$

Пусть $W(x, t; \tau)$ — решение вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & x \in R, \quad t > \tau, \\ W(x, t; \tau) \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases} \quad (3.13)$$

Покажем, что решение $\omega(x, t)$ задачи (3.12) определяется формулой

$$\omega(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau, \quad (3.14)$$

где $W(x, t; \tau)$ — решение задачи (3.13).

Действительно,

$$\omega(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} = W(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial W(x, t; \tau)}{\partial t} d\tau,$$

следовательно, $\frac{\partial \omega(x, 0)}{\partial t} = 0$ в силу начального условия (3.13).

И, наконец:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x, t; \tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial^2 W(x, t; \tau)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W(x, t; \tau)}{\partial x^2} d\tau = f(x, t).$$

Решение задачи (3.13) определяется формулой Даламбера:

$$W(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.15)$$

Теперь, используя формулы (3.8), (3.11), (3.14) и (3.15), находим, что решение исходной задачи (3.9), (3.10) задается формулой

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Пример 3

Найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t, \quad \text{если } u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение

Здесь $a=1$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$, $f(x, t) = x \sin t$. Отсюда имеем

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos y dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \sin \tau d\xi d\tau. \quad (*)$$

Найдем интегралы, входящие в выражение (*):

$$\int_{x-t}^{x+t} \cos y dy = \sin(x+t) - \sin(x-t) = 2 \sin t \cos x,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \sin \tau d\xi d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau \left((x+t-\tau)^2 - (x-t+\tau)^2 \right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t 2x(2t-2\tau) \sin \tau d\tau = 2x \int_0^t (t-\tau) \sin \tau d\tau = \\
&= 2x \left\{ -(t-\tau) \cos \tau \Big|_0^t - \int_0^t \cos \tau d\tau \right\} = 2xt - 2x \sin t.
\end{aligned}$$

Подставив значения интегралов в (*), получим

$$u(x, t) = \sin x \cos t + \sin t \cos x + xt - x \sin t = \sin(x+t) + xt - x \sin t.$$

3.1.3. Метод продолжений

Первая краевая задача

Первая краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой с однородным краевым условием ставится следующим образом: найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3.16)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.17)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \geq 0. \quad (3.18)$$

Добавим условия сопряжения

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

для обеспечения непрерывности функций $u(x, t)$ и $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ в нуле.

Доопределим нечетным образом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всей прямой, задав новые функции Φ и Ψ :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим модифицированную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \Psi(x). \end{cases}$$

В данном случае для нахождения $U(x, t)$ мы можем применить формулу Даламбера:

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy.$$

Возьмем в качестве нужной нам функции $u(x, t)$ при $x \geq 0$, $t \geq 0$ функцию $U(x, t)$. Очевидно, что условия (3.16) и (3.18) при $x \geq 0$, $t \geq 0$, выполняются сразу — это следует из определения функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. Выполнение условия (3.17) следует из следующих преобразований:

$$u(0, t) = U(0, t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(y) dy.$$

В силу нечетности функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ первое и второе слагаемые обращаются в нуль, что и дает выполнение условия (3.17).

Выразим $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ через исходные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно:

$$\text{при } x \geq at, \quad \begin{cases} \Phi(x + at) = \varphi(x + at), \\ \Phi(x - at) = \varphi(x - at), \\ \Psi(y) = \psi(y), \quad y \in [x - at, x + at]; \end{cases}$$

$$\text{при } x < at, \quad \begin{cases} \Phi(x + at) = \varphi(x + at), \\ \Phi(x - at) = -\varphi(at - x). \end{cases}$$

Теперь запишем вспомогательную формулу для решения первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \text{при } x < at, \quad \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy &= \int_{x-at}^0 \Psi(y) dy + \int_0^{x+at} \Psi(y) dy = \\ &= \int_{x-at}^0 -\psi(-y) dy + \int_0^{x+at} \psi(y) dy = \{ \text{положим } -y = y \} = \\ &= \int_{at-x}^0 \psi(y) dy + \int_0^{x+at} \psi(y) dy = \int_{at-x}^{x+at} \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Тогда общая формула будет такой:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, & x \geq at, \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(y) dy, & x < at. \end{cases}$$

Вторая краевая задача

Вторая краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой с однородным краевым условием ставится следующим образом: найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3.19)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.20)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \geq 0. \quad (3.21)$$

Будем действовать так же, как и в предыдущем случае, однако здесь нас устроит только четное продолжение:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Новая задача Коши и решение для нее по формуле Даламбера будут выглядеть так же, как и в предыдущем случае:

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy.$$

Аналогично, пусть функция $u(x,t) = U(x,t)$ при $x > 0$, $t > 0$. Тогда выполнение условий (3.19) и (3.21) опять же очевидно. Проверим условие (3.20). Дифференцируя формулу Даламбера и используя то, что у четной функции производная нечетна, получим

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\Psi(at) - \Psi(-at)].$$

Из нечетности $\Phi'(t)$ и четности $\Psi(t)$ видно, что оба слагаемых равны нулю.

Общая формула получается аналогично:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy, & x \geq at, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{at-x} \psi(y) dy + \int_0^{x+at} \psi(y) dy \right], & x < at. \end{cases}$$

Контрольные задания

57. Решить в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, следующие задачи:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -x; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{в)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{x^2}; \end{array} \right. \\
\text{г)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos^2 x; \end{array} \right. \\
\text{д)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \frac{\cos x}{a}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x \cos x; \end{array} \right. \\
\text{е)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x + \cos x; \end{array} \right. \\
\text{ж)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^2, \\ u(x, 0) = e^{-x}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 4; \end{array} \right. \\
\text{з)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5xt, \\ u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x; \end{array} \right. \\
\text{и)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x; \end{array} \right. \\
\text{к)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \cos 5x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^{-3x}; \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\text{л) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{8} \cos 4x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 9 \sin 5x \cos x. \end{cases}$$

58. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, изображенным на рис. 3. Построить положения струны для моментов времени: $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

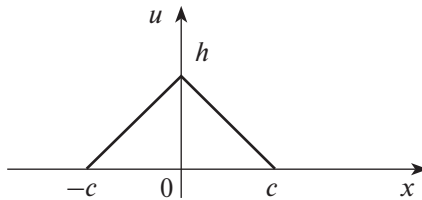


Рис. 3. Начальное положение струны

59. Полуограниченная струна, закрепленная на конце $x = 0$, возбуждена начальным отклонением, изображенным на рис. 4. Построить положения струны для моментов времени: $t \in \left\{ \frac{c}{a}, \frac{3c}{2a}, \frac{2c}{a}, \frac{7c}{2a} \right\}$.

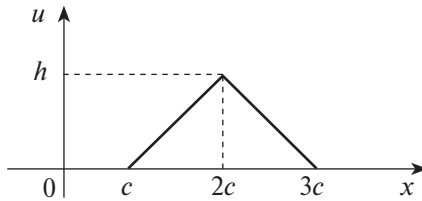


Рис. 4. Начальное положение струны

60. Решить следующие задачи на полупрямой методом продолжений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), & x > 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, t > 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), & x > 0. \end{cases}$$

3.2. Уравнение колебания струны и его решение методом разделения переменных (метод Фурье)

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений в частных производных. Изложение данного метода проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

3.2.1. Уравнение свободных колебаний струны

Рассматривается следующая смешанная задача.

Задача 1. Пусть требуется найти решение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным и граничным (краевым) условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Решение этой задачи ищем в виде произведения:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

подставляя которое в данное уравнение, имеем

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.22)$$

Правая часть равенства (3.22) является функцией только переменного x , а левая — только t , поэтому правая и левая части равенства (3.22) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Это значение удобно обозначит через $-\lambda$, то есть

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, а функция $u(x, t)$ есть

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t).$$

Постоянные A и B можно найти, используя краевые условия задачи 1. Так как

$$T(t) \neq 0, \text{ то } X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

$$X(0) = A = 0, \quad X(l) = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

то есть

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак,

$$X(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Найденные значения $\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи 1, а функции $X(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x$ — *собственными функциями*.

При найденных значениях λ получаем

$$T(t) = C \cos \frac{ak\pi}{l} t + D \sin \frac{ak\pi}{l} t,$$

$$u_k(x, t) = \sin \frac{k\pi}{l} x \left(a_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ линейное и однородное, то сумма решений также является решением, которое можно представить в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

При этом решение должно удовлетворять начальному условию:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x).$$

Если функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье в промежутке $(0, l)$ по синусам, то

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (3.23)$$

Из начального условия

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$$

имеем

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x).$$

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда:

$$\frac{ak\pi}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx ,$$

откуда

$$b_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx . \quad (3.24)$$

Таким образом, решение уравнения колебания струны может быть представлено как сумма бесконечного ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x , \quad (3.25)$$

где a_k , b_k определяются по формулам (3.23) и (3.24).

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^2([0,l])$, $\psi(x) \in C^1([0,l])$, кроме этого, $\varphi(x)$ имеет третью, а $\psi(x)$ — вторую кусочно-непрерывную производную и выполнены соотношения: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда сумма ряда (3.25) с коэффициентами, определенными формулами (3.23), (3.24), является решением задачи 1.

Пример 1

Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, равны нулю, а начальная скорость

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} v_0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| < \frac{h}{2}, \\ 0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого времени t .

Решение

Здесь $\varphi(x) = 0$, а $\psi(x) = v_0$ в интервале $\left(\frac{l-h}{2}, \frac{l+h}{2} \right)$ и $\psi(x) = 0$ вне этого интервала.

Следовательно, $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{ak\pi} \int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0 \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{2v_0}{ak\pi} \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} x \Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} =$$

$$= \frac{2v_0 l}{ak^2 \pi^2} \left[\cos \frac{k\pi(l-h)}{2l} - \cos \frac{k\pi(l+h)}{2l} \right] = \frac{4v_0 l}{ak^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi h}{2l}.$$

Отсюда

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{a\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi h}{2l} \sin \frac{ak\pi t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Пример 2

Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB , изображенной на рис. 5. Найти форму струны для любого времени t , если начальные скорости отсутствуют.

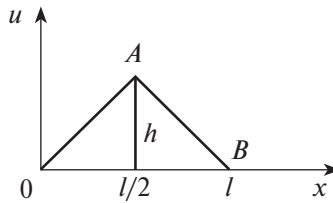


Рис. 5. Форма струны в начальный момент времени

Решение

Угловым коэффициентом прямой OA равен $\frac{h}{l/2}$, уравнение этой прямой есть $u = \frac{2h}{l}x$. Прямая AB отсекает на осях координат отрезки: l

и $2h$, значит, уравнение прямой AB : $u = \frac{2h}{l}(l-x)$. Итак,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases} \quad \psi(x) = 0.$$

Находим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{4h}{l^2} \int_0^{l/2} x \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{4h}{l^2} \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \\ b_k &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{4h}{k\pi l} x \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^{l/2} + \frac{4h}{k\pi l} \int_0^{l/2} \cos \frac{k\pi x}{l} dx - \\ &- \frac{4h}{k\pi l} (l-x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{l/2}^l - \frac{4h}{k\pi l} \int_{l/2}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= -\frac{2h}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^{l/2} + \frac{2h}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{4h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{l/2}^l = \\ &= \frac{4h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{8h}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{ak\pi t}{l}.$$

Пример 3

Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы

$$u(x, 0) = \frac{4}{l^2} x(l-x).$$

Найти форму струны в любой момент времени, если начальные скорости отсутствуют.

Решение

Здесь $\varphi(x) = \frac{4}{l^2} x(l-x)$, $\psi(x) = 0$. Поэтому имеем

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{4}{l^2} x(l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = 0.$$

Применяя дважды метод интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{8}{l^3} \int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{8}{l^3} \left(-\frac{l(lx - x^2)}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{k\pi} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{8}{l^2 k \pi} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{8}{l^2 k \pi} \left(\frac{l(l - 2x)}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{2l}{k\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{16}{lk^2 \pi^2} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{16}{lk^2 \pi^2} \left(-\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \right) \Big|_0^l = \\ &= -\frac{16}{k^3 \pi^3} (\cos k\pi - 1) = \frac{16}{k^3 \pi^3} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{32}{k^3 \pi^3}, & k = 2n + 1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда решение задачи примет следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{l}.$$

3.2.2. Неоднородное уравнение

Рассматривается следующая смешанная задача.

Задача 2. Пусть требуется найти решение неоднородного уравнения колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.26)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.27)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Будем искать решение задачи 2 в виде разложения в ряд Фурье по x :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (3.28)$$

рассматривая при этом t как параметр. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (3.29)$$

Подставляя ряды (3.28) и (3.29) в исходное уравнение (3.26):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k''(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 u_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны

$$u_k''(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 u_k(t) = f_k(t). \quad (3.30)$$

Для определения $u_k(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Далее начальные условия (3.27) дают

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

следовательно,

$$u_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad u_k'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad (3.31)$$

$$\varphi_k = u_k(0), \quad \psi_k = u_k'(0).$$

Условия (3.31) полностью определяют решение (3.30), а именно:

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + \frac{l}{ak\pi} \psi_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \frac{l}{ak\pi} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{ak\pi}{l}(t-\tau) d\tau. \quad (3.32)$$

Таким образом, искомое решение задачи 2, согласно формулам (3.28) и (3.32) запишется в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + \frac{l}{ak\pi} \psi_k \sin \frac{ak\pi}{l}t + \frac{l}{ak\pi} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{ak\pi}{l}(t-\tau) d\tau \right\} \times \\ \times \sin \frac{k\pi}{l}x,$$

где величины φ_k , ψ_k и $f_k(\tau)$ вычисляются посредством (3.31) и (3.29) соответственно.

Пример 4

Найти решение краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Решение

Здесь $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $f(x,t) = 2b$, $a = 1$.

Следовательно, $\varphi_k = 0$, $\psi_k = 0$.

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l 2b \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{4b}{l} \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \Big|_0^l = \\ = -\frac{4b}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{8b}{k\pi}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Далее

$$\int_0^t f_{2n+1}(\tau) \sin \frac{(2n+1)\pi}{l}(t-\tau) d\tau = \frac{8b}{(2n+1)\pi} \int_0^t \sin \frac{(2n+1)\pi}{l}(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{8b}{(2n+1)\pi} \frac{l}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{l}(t-\tau) \Big|_0^t = \frac{8bl}{(2n+1)^2 \pi^2} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} t \right].$$

Отсюда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8bl^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

Контрольные задания

61. Найти решения следующих смешанных задач:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 1, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x, \\ u(0,t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{4}, t\right) = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -x, \\ u(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A x e^{-t}, \\ u(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A e^{-t} \cos \frac{x}{2}, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 4 \sin \frac{3x}{2} \sin x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

62. Струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = 3$. В начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, -0.1)$, $B(3, 0)$. Найти форму струны для любого момента времени, если начальные скорости точек струны отсутствуют.
63. Струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = 1$. В начальный момент времени форма струны имеет форму $u = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Найти форму струны для любого момента времени, если начальные скорости точек струны отсутствуют.
64. Определить форму струны для любого момента времени, если начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, равны 0, а начальная скорость выражается формулой

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| \leq \frac{h}{2} \\ 0, & \left| x - \frac{l}{2} \right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

4. Параболические уравнения

4.1. Одномерное уравнение теплопроводности.

Постановка краевых задач

Процесс распространения температуры в стержне, теплоизолированном с боков и достаточно тонком, чтобы в любой момент времени температура во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой, может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t . Эта функция $u(x, t)$ — решение уравнения:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

называемое *уравнением теплопроводности*. Здесь $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ — соответственно плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности стержня в точке x , а $F(x, t)$ — интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t .

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции u в начальный момент времени t_0 :

$$u(x, t_0) = \varphi(x).$$

Основными видами граничных условий являются краевые задачи первого, второго и третьего типа.

Первая краевая задача поставлена, если температура на конце стержня $x = 0$ поддерживается по определенному закону, например:

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — заданная функция времени.

Вторая краевая задача поставлена, если на конце стержня $x = l$ задан тепловой поток q , например:

$$q(l, t) = -k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x},$$

следовательно, граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \upsilon(t) = -\frac{1}{k} q(l, t).$$

В частности, в случае теплоизолированного конца тепловой поток через него отсутствует, то есть $\upsilon(t) = 0$.

Третья краевая задача формулируется, когда на конце стержня $x = l$ происходит теплообмен с окружающей средой по *закону Ньютона*:

$$q(l, t) = H(u(l, t) - \theta(t)),$$

где $\theta(t)$ — есть температура окружающей среды, H — коэффициент теплообмена, то есть количество тепла, прошедшее через единичную площадку сечения стержня за единицу времени при изменении температуры в один градус. Граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\lambda(u(l, t) - \theta(t)),$$

где $\lambda = \frac{H}{k}$.

Рассматриваются также некоторые предельные случаи. Например, если процесс теплопроводности изучается в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющее условию

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leq x < \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня: найти решение уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ и $t \geq t_0$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq t_0,$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ — заданные функции.

4.2. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Функция мгновенного точечного источника

4.2.1. Однородная краевая задача

Рассматривается следующая первая краевая задача.

Найти решение однородного уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2)$$

и однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.3)$$

Решение этой задачи ищем в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

подставляя которое в уравнение (4.1), имеем

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4.4)$$

Правая часть равенства (4.4) является функцией только переменного x , а левая — только t , поэтому правая и левая части равенства (4.4) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Это значение удобно обозначит через $-\lambda$, то есть

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,$$

$$T(t) = C e^{-a^2 \lambda t},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $u(x,t)$ есть

$$u(x,t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) C e^{-a^2 \lambda t}.$$

Постоянные A и B можно найти, используя краевые условия (4.3) задачи. Так как

$$T(t) \neq 0, \text{ то } X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

$$X(0) = A = 0, \quad X(l) = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

то есть

$$A = 0 \text{ и } B \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак,

$$X(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Найденные значения $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи, а функции $X(x) = B \sin \frac{k\pi}{l} x$ — *собственными функциями*.

При найденных значениях λ получаем

$$T(t) = C e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t},$$

$$u_k(x, t) = a_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как уравнение (4.1) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, которое можно представить в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

При этом решение должно удовлетворять начальному условию (4.2):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x).$$

Если функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье в промежутке $(0, l)$ по синусам, то

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi.$$

Таким образом, решение уравнения теплопроводности может быть представлено как сумма бесконечного ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (4.5)$$

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^1([0, l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (4.1)–(4.3), представимое в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда (4.5).

Решение (4.5) можно представить в виде

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

где введена функция

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi \xi}{l},$$

называемая *функцией мгновенного точечного источника*.

Физический смысл функции $G(x, \xi, t)$ состоит в том, что она как функция аргумента x представляет собой распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ в момент времени t , если при $t=0$ температура была равна нулю, и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла Q , а на концах стержня постоянно поддерживается температура, равная нулю.

Пример 1

Дан тонкий однородный стержень $0 \leq x \leq l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

Решение

Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

при условиях $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi = -\frac{2u_0}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \xi \Big|_0^l = \\ &= -\frac{2u_0}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} \frac{4u_0}{k\pi}, & k = 2n+1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда решение примет вид (по формуле (4.5)):

$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{l^2}t} \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

Пример 2

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq l/2, \\ l-x, & l/2 \leq x < l \end{cases}$$

и краевым условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Решение

Коэффициенты a_k :

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \xi \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi.$$

Проинтегрируем по частям, полагая

$$u = \xi, \quad dv = \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \quad du = d\xi, \quad v = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \xi d\xi;$$

получим

$$a_k = \frac{2}{l} \left(-\frac{l\xi}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \xi + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \xi \right) \Big|_0^{l/2} + \\ + \frac{2}{l} \left(-\frac{l^2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \xi + \frac{l\xi}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} \xi - \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{l} \xi \right) \Big|_{l/2}^l = \frac{4l}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Следовательно, искомое решение по формуле (4.5) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x.$$

4.2.2. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad (4.7)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по функциям $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (4.8)$$

считая при этом t параметром. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \quad (4.9)$$

Подставляя ряды (4.8) и (4.9) в исходное уравнение (4.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{ak\pi}{l} \right)^2 u_k(t) + \frac{du_k(t)}{dt} - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, то есть

$$\frac{du_k(t)}{dt} = - \left(\frac{ak\pi}{l} \right)^2 u_k(t) + f_k(t). \quad (4.10)$$

Для определения $u_k(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Далее начальные условия (4.7) дают

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = 0,$$

следовательно,

$$u_k(0) = 0. \quad (4.11)$$

Условие (4.11) полностью определяют решение (4.10), а именно

$$u_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

Таким образом, решение исходной задачи согласно формулам (4.8) и (4.12) запишется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (4.13)$$

Далее, воспользовавшись выражением (4.9) для $f_k(t)$, найденное решение (4.13) можно представить с помощью функции точечного источника $G(x, \xi, t)$ следующим образом:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Контрольные задания

65. Найти решения следующих задач для уравнений теплопроводности методом Фурье:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = Ax, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases} & l > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x(l-x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \\ u(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x + 3 \sin 3\pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 8x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

66. Найти температуру стержня $0 < x < l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, один конец которого ($x = l$) поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце ($x = 0$) происходит

конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура стержня: $u_0 = \text{const}$.

67. Дан тонкий однородный стержень длины l , изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого $\varphi(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

4.3. Задачи на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности

4.3.1. Задача Коши

Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши): найти функцию $u(x, t)$ ($t > 0$, $-\infty < x < \infty$), удовлетворяющую уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.15)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Найдем сначала частное решение уравнения (4.14) в виде произведения:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

подставляя которое в уравнение (4.14), имеем

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4.16)$$

Правая часть равенства (4.16) является функцией только переменного x , а левая — только t , поэтому правая и левая части равенства (4.16) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Это значение удобно обозначит через $-\lambda^2$, то есть имеем

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0,$$

откуда, полагая постоянный множитель в выражении $T(t)$ равным единице, $T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$, а $X(x)$ выберем таким: $X(x) = A(\lambda) e^{i\lambda x}$, получаем частное решение уравнения (4.14):

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x}. \quad (4.17)$$

Здесь λ — любое вещественное число $-\infty < \lambda < \infty$. Интегрируя (4.17) по параметру λ , получим также решение уравнения (4.14):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda. \quad (4.18)$$

Требую выполнения начального условия (4.15) при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Подставляя эту функцию в (4.18) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right] e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Внутренний интеграл в (4.19):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в (4.19), приходим к интегральному представлению искомого решения:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (4.21)$$

Функцию (4.21) называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Фундаментальное решение $G(x, \xi, t)$ (4.21) дает распределение температуры в бесконечном стержне, если в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется количество тепла $Q = c\rho$.

Теорема. Для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$ существует единственное решение задачи Коши (4.14)–(4.15), имеющее вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (4.22)$$

Пример 1

Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для следующего начального распределения температуры стержня:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x < x_1, x > x_2. \end{cases}$$

Решение

Из формул (4.21), (4.22) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Так как $\varphi(x)$ в интервале (x_1, x_2) равна постоянной температуре u_0 , а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu.$$

Действительно, полагая $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2a\sqrt{t}d\mu$, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-x_1)/2a\sqrt{t}}^{(x-x_2)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu = \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_1)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_2)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

4.3.2. Краевая задача для полуограниченной прямой

В тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого несущественно, принимают, что этот конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности на полуограниченной прямой.

Итак, рассматривается следующая первая краевая задача.

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.23)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x > 0 \quad (4.24)$$

и однородному граничному условию

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.25)$$

Положим:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

и функцию $v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi$.

Легко проверить, что $v(0, t) = 0$.

Таким образом, согласно формулам (4.21) и (4.22) функция $u(x, t) = v(x, t)$ при $x > 0$ дает решение краевой задачи (4.23)–(4.25). Пользуясь определением функции $\Phi(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \phi(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left[-\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Соединяя оба интеграла вместе, получим искомую функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Пример 2

Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x) = u_0$ и краевому $u(0, t) = 0$.

Решение

Здесь мы имеем дифференциальное уравнение теплопроводности на полуограниченной прямой. Решение, удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right] u_0 d\xi,$$

или

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right] d\xi.$$

Полагая $\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2\sqrt{t}d\mu$, преобразуем первый интеграл:

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

Полагая $\frac{x+\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = 2\sqrt{t}d\mu$, получим

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

Таким образом, решение принимает вид

$$u(x,t) = u_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

4.3.3. Применение преобразования Лапласа к решению краевых задач

Пусть требуется решить следующую первую краевую задачу.

Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.26)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad x > 0$$

и граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

Будем считать, что ограничения на параметры задачи допускают применение преобразования Лапласа.

Применим к уравнению (4.26) преобразование Лапласа по переменной времени t , полагая $u(x, t) \leftrightarrow U(x, p)$. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leftrightarrow pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2},$$

$$u(0, t) = \mu(t) \leftrightarrow U(0, p) = M(p),$$

то указанное преобразование дает операторное уравнение

$$pU(x, p) = a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2},$$

к которому следует добавить условие $U(0, p) = M(p)$.

Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для функции U , с независимой переменной x и параметром p . Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$U(x, p) = c_1(p)e^{x\frac{\sqrt{p}}{a}} + c_2(p)e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}}.$$

Для определения коэффициентов $c_1(p)$ и $c_2(p)$ воспользуемся условием $U(0, p) = M(p)$ и тем фактом, что $U(x, p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Получаем, что $c_1(p) = 0$, $c_2(p) = M(p)$. Таким образом,

$$U(x, p) = M(p)e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, находим

$$e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}} \leftrightarrow \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

$$M(p) \leftrightarrow \mu(t).$$

Далее, применяя свойство изображения свертки, получаем

$$U(x, p) = M(p)e^{-x\sqrt{p}/a} \leftrightarrow u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Пусть теперь требуется решить вторую краевую задачу.
Найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.27)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = v(t), \quad t > 0.$$

Применим к уравнению (4.27) преобразование Лапласа по переменной времени t , полагая $u(x, t) \leftrightarrow U(x, p)$. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leftrightarrow pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = v(t) \leftrightarrow \frac{\partial U(0, p)}{\partial x} = N(p),$$

то указанное преобразование дает операторное уравнение

$$pU(x, p) = a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2},$$

к которому следует добавить условие $\frac{\partial U(0, p)}{\partial x} = N(p)$.

Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для функции U , с независимой переменной x и параметром p . Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$U(x, p) = c_1(p)e^{x\frac{\sqrt{p}}{a}} + c_2(p)e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}}.$$

Для определения коэффициентов $c_1(p)$ и $c_2(p)$ воспользуемся условием $\frac{\partial U(0, p)}{\partial x} = N(p)$ и тем фактом, $U(x, p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Полу-

чаем, что $c_1(p) = 0$, $c_2(p) = -\frac{a}{\sqrt{p}}N(p)$. Таким образом,

$$U(x, p) = -\frac{a}{\sqrt{p}}N(p)e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, находим

$$-\frac{a}{\sqrt{p}}e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}} \leftrightarrow -\frac{a}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

$$N(p) \leftrightarrow v(t).$$

Далее, применяя свойство изображения свертки, получаем

$$U(x, p) = -\frac{a}{\sqrt{p}}N(p)e^{-x\frac{\sqrt{p}}{a}} \leftrightarrow u(x, t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Контрольные задания

68. Найти решение задач Коши для уравнения теплопроводности:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x < 0, x > l, l > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{l}, & -l \leq x \leq 0, \\ 0, & x < -l, x > l, l > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x_1 < 0, \\ u_2, & x \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < -2, x > 2; \end{cases} \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x < -1, x \geq 1; \end{cases} \end{cases}$$

69. Найти решение задач Коши для уравнения теплопроводности:

$$а) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{l}, & 0 \leq x \leq l, \\ 1 + \frac{x}{l}, & -l \leq x < 0, \\ 0, & x < -l, x > l, l > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x < 0, x \geq 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{В)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x < -1, x > 0; \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ \text{Г)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < -1, x > 1; \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ \text{Д)} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x < x_1, x > x_2. \end{cases} \end{array} \right. \end{aligned}$$

5. Эллиптические уравнения

5.1. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач

Уравнение Лапласа возникает в целом ряде далеких друг от друга физических задач. Рассмотрим некоторые из них.

Установившийся процесс теплопроводности или диффузии. Уравнение теплопроводности в трехмерном случае при наличии стационарных источников тепла (2.17):

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + F(x, y, z), \quad (5.1)$$

или аналогичное уравнение диффузии. Если в рассматриваемой области установилось распределение температуры (концентрации), не меняющееся со временем, то есть стационарный процесс, то уравнение (5.1) сводится к *уравнению Пуассона*:

$$\Delta u = -f(x, y, z), \quad (5.2)$$

где $f(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{k}$.

Если источники тепла в данной области отсутствуют, $F(x, y, z) = 0$, получаем *уравнение Лапласа*:

$$\Delta u = 0. \quad (5.3)$$

Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля выражается через скалярный потенциал

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Подставляя напряженность в четвертое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho ,$$

где ρ есть объемная плотность заряда, получаем уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho ,$$

или, если в рассматриваемой области зарядов нет, потенциал электростатического поля подчиняется уравнению Лапласа.

Стационарные токи в однородной проводящей среде. Векторное поле плотности стационарных токов $\vec{j}(x, y, z)$, связанное с плотностью заряда ρ уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 ,$$

при отсутствии в рассматриваемой области источников тока, меняющихся со временем зарядов, подчиняется уравнению

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0 .$$

С другой стороны, плотность тока связана с напряженностью электрического поля законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} ,$$

где σ — удельная проводимость.

Второе уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

в стационарном случае содержит в правой части нуль, следовательно, для электрического поля можно ввести скалярный потенциал φ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi ,$$

который в случае однородной среды, $\sigma = \operatorname{const}$, также подчиняется уравнению Лапласа.

Краевые задачи

Итак, требуется найти некоторую физическую величину $u(x, y, z)$, которая в области пространства V , ограниченной поверхностью S , подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

или уравнению Пуассона:

$$\Delta u = -f(x, y, z).$$

При этом должно быть задано одно из граничных условий (то есть поставлена краевая задача). Рассмотрим основные из них.

Первая краевая задача, или *задача Дирихле*, поставлена в том случае, если на границе области задана сама неизвестная функция

$$u|_S = f_1(x, y, z).$$

Вторая краевая задача, или *задача Неймана*, поставлена, если на границе области задана производная неизвестной функции по направлению внешней нормали

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2(x, y, z).$$

Третья краевая задача поставлена, если на границе области задана комбинация неизвестной функции и ее производной по направлению внешней нормали

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = f_3(x, y, z).$$

В случае процесса теплопроводности это соответствует теплообмену с внешней средой по закону Ньютона.

Кроме перечисленной классификации, краевые задачи подразделяются также на внутренние (если область V лежит внутри поверхности S) и внешние (если область V лежит вне поверхности S).

5.2. Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. Фундаментальные решения

В уравнениях (5.2) и (5.3) оператор Лапласа представлен в прямоугольной декартовой системе координат. В зависимости от конкретной геометрии области V , в которой рассматривается изучаемый процесс, возможно представление оператора Лапласа в системе координат, наиболее подходящей для соответствующей области.

Выведем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

Выполним замену переменных: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Отсюда получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \varphi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rho^2 \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rho^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Лапласа (5.3) в цилиндрических координатах для функции $u = u(\rho, \varphi, z)$ примет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Если в задаче имеется осевая симметрия, $u = u(\rho)$, уравнение значительно упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0.$$

Интегрируя, получаем решение при $\rho \neq 0$ в виде

$$u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2. \quad (5.4)$$

Решение (5.4) при выборе констант вида $C_1 = -1$, $C_2 = 0$:

$$u(\rho) = \ln \frac{1}{\rho},$$

называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в цилиндрических координатах*.

Аналогично, уравнение Лапласа в сферических координатах для функции $u = u(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Если в задаче заведомо имеется сферическая симметрия: $u = u(r)$, уравнение также упрощается:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$$

и может быть легко проинтегрировано, в результате получаем при $r \neq 0$:

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (5.5)$$

Решение (5.5) при выборе констант вида $C_1 = 1$, $C_2 = 0$:

$$u(r) = \frac{1}{r}$$

принято называть *фундаментальным решением уравнения Лапласа в сферических координатах*.

5.3. Гармонические функции и их основные свойства

Определение. Пусть задана область пространства $V \subset R^3$, ограниченная поверхностью S . Функция $u(x, y, z)$ называется гармонической в области V , если:

- 1) функция $u(x, y, z)$ непрерывна вместе с первыми производными в области \bar{V} ;

- 2) имеет непрерывные вторые производные внутри области V ;
 3) удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad \text{для } \forall (x, y, z) \in V .$$

Гармонические функции имеют ряд замечательных свойств, которые мы сформулируем в виде трех теорем.

Теорема 1 (об отсутствии источников). Если $u(x, y, z)$ — функция, гармоническая в области V , ограниченной поверхностью S , то

$$\oint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (5.6)$$

где σ — любая замкнутая поверхность, лежащая целиком внутри поверхности S .

Почему это свойство называется отсутствием источников, можно понять на примере электростатики. Если u — потенциал электростатического поля, интеграл в соотношении (5.6) есть поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность. Равенство нулю потока через любую замкнутую поверхность означает, что в области V нет зарядов — источников электростатического поля.

Теорема 2 (о среднем значении). Если $u(x, y, z)$ — функция, гармоническая в области V , а M_0 — точка внутри V , то

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (5.7)$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0 , лежащая целиком в области V .

То есть, значение гармонической функции в центре сферы всегда равно среднему значению по поверхности сферы.

Теорему о среднем значении можно сформулировать и иначе. Записывая формулу (5.7) для сферы меньшего радиуса $\rho < a$:

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \oint_{\Sigma_\rho} u d\sigma$$

и интегрируя по ρ от 0 до a , получим

$$\frac{4}{3}\pi a^3 u(M_0) = \int_{V_a} u dV,$$

или

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \int_{V_a} u dV.$$

Таким образом, значение гармонической функции в центре шара является средним также и по объему шара.

Теорема 3 (принцип максимального значения). Функция $u(x, y, z)$, гармоническая в области V с границей S , может достигать своих максимальных и минимальных значений только на поверхности S .

Следствие. Если функции u и U являются гармоническими в области V , непрерывны в замкнутой области \bar{V} , и на поверхности S имеет место неравенство $u \leq U$, то оно сохраняется всюду в области V .

5.4. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Пусть область V — круг радиуса R с центром в точке с координатами $(0, 0)$:

$$V = O_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\},$$

$$\bar{V} = \bar{O}_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге O_R .

Найти функцию $u(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области O_R , непрерывную в области \bar{O}_R , удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in O_R$$

и принимающую на границе круга $x^2 + y^2 = R^2$ заданные значения:

$$u(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

В полярных координатах: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге формулируется следующим образом.

Найти функцию $u(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга $\rho < R$ уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.8)$$

и принимающую на границе круга $\rho = R$ заданные значения

$$u(R, \varphi) = f(\varphi). \quad (5.9)$$

Решение этой задачи ищем в виде произведения:

$$u(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi), \quad (5.10)$$

подставляя которое в уравнение (5.8), имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} P(\rho) = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\frac{1}{\rho^2} P(\rho)\Phi(\varphi)$, получаем

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right)}{P(\rho)} = - \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)}. \quad (5.11)$$

Правая часть равенства (5.11) является функцией только переменного φ , а левая — только ρ , поэтому правая и левая части равенства (5.11) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Это значение удобно обозначит через λ , то есть

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right)}{P(\rho)} = - \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда следует, что функция $P(\rho)$ является решением уравнения

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) - \lambda P(\rho) = 0, \quad (5.12)$$

а для функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (5.13)$$

Здесь условие периодичности функции $\Phi(\varphi)$ является следствием периодичности искомого решения $u(\rho, \varphi)$ по переменной φ с периодом 2π .

Ненулевые периодические решения задачи (5.13) существуют только при собственных значениях $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и имеют вид

$$\Phi(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Из (5.12) для функции $P(\rho)$ при $\lambda = k^2$ получаем уравнение

$$\rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} - k^2P = 0. \quad (5.14)$$

Частные решения этого уравнения будем искать в виде

$$P(\rho) = \rho^\alpha, \quad \alpha = \text{const}.$$

Подставляя эту функцию в (5.14), получаем $\alpha = \pm k$.

Следовательно, $P(\rho) = \rho^k$ или $P(\rho) = \rho^{-k}$.

Второе из этих решений следует отбросить, так как при $\rho = 0$ функция $P(\rho) = \rho^{-k}$ не является гармонической в круге $\rho < R$.

Таким образом, согласно (5.10), частные решения уравнения (5.8) можно записать так:

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Так как уравнение (5.8) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, которое можно представить в виде ряда:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi).$$

Выполняя граничное условие (5.9), получаем

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = f(\varphi). \quad (5.15)$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi, \quad (5.16)$$

где коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad (5.17)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

Сравнивая ряд (5.15) с рядом (5.16), получаем

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \frac{a_k}{R^k}, \quad B_k = \frac{b_k}{R^k}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $\rho < R$ имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (5.19)$$

где a_0 , a_k , b_k определяются по формулам (5.17) и (5.18).

Теорема. Пусть функция $f(\varphi)$ непрерывна на границе круга $\rho = R$. Тогда сумма ряда (5.19) с коэффициентами, определенными формулами (5.17), (5.18), является решением задачи (5.8)–(5.9).

Пример 1

Найти гармоническую внутри единичного круга функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения x^2 .

Решение

Задача сводится к решению уравнения

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{если } x^2 + y^2 = \rho^2 < 1$$

при условии

$$u(x, y) = x^2, \text{ если } x^2 + y^2 = \rho^2 = 1.$$

В полярных координатах $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим следующую задачу Дирихле: найти функцию $u(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга $\rho < 1$ уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

и принимающую на границе круга $\rho = 1$ значения

$$u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi.$$

Согласно (5.19), решение примет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (5.20)$$

Коэффициенты a_0 , a_k , b_k определяются по формулам (5.17) и (5.18).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = 1.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cos kt dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos kt + \cos 2t \cos kt) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin kt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos t(k-2) + \cos t(k+2)) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{k-2} \sin t(k-2) + \frac{1}{k+2} \sin t(k+2) \right) \Big|_0^{\pi} \right] = 0, \quad k \neq 2.$$

При $k = 2$:

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4t) dt \right] = \frac{1}{2\pi} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin kt dt = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (5.20), получим решение задачи:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Пример 2

Найти гармоническую внутри круга радиуса 2 функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $\frac{y^2}{4}$.

Решение

Задача сводится к решению уравнения

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ если } x^2 + y^2 = \rho^2 < 4$$

при условии

$$u(x, y) = \frac{y^2}{4}, \text{ если } x^2 + y^2 = \rho^2 = 4.$$

В полярных координатах: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим следующую задачу Дирихле: найти функцию $u(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга $\rho < 2$ уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

и принимающую на границе круга $\rho = 2$ значения:

$$u(2, \varphi) = \sin^2 \varphi.$$

Согласно (5.19), решение примет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{2^k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (5.21)$$

Коэффициенты a_0 , a_k , b_k определяются по формулам (5.17) и (5.18).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = 1.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \cos kt dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos kt - \cos 2t \cos kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin kt \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos t(k-2) + \cos t(k+2)) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{k-2} \sin t(k-2) + \frac{1}{k+2} \sin t(k+2) \right) \Big|_0^{\pi} \right] = 0, \quad k \neq 2. \end{aligned}$$

При $k = 2$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \cos 2t dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4t) dt \right] = -\frac{1}{2\pi} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \sin kt dt = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (5.21), получим решение задачи:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{8} \cos 2\varphi.$$

Контрольные задания

70. В круге $x^2 + y^2 = \rho^2 < R^2$ решить задачу Дирихле:

$$\text{а) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = x + xy, & \rho = R; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = 2(x^2 + y), & \rho = R; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = 4y^3, & \rho = R; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = x^2 - 2y^2, & \rho = R; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = 4xy^2, & \rho = R; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < \rho < R, \\ u(x, y) = 3\frac{y^4}{R^4}, & \rho = R. \end{cases}$$

71. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $\frac{y^2}{R} + Rxy$.
72. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $2x^2 - x - y$.
73. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $\frac{y^3}{R^3}$.
74. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $\frac{x^3}{R^3}$.
75. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x, y)$, принимающую на его границе значения $x^2 - y^2$.

5.5. Решение краевых задач в шаре с использованием сферических функций

В сферических координатах задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре формулируется следующим образом.

Найти функцию $u = u(r, \theta, \varphi)$, удовлетворяющую внутри шара $r < R$ уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.22)$$

и принимающую на поверхности шара $r = R$ заданные значения:

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi). \quad (5.23)$$

Частные решения уравнения (5.22) ищем в виде однородного многочлена степени k :

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^k Y(\theta, \varphi),$$

подставляя которое в уравнение (5.22), получаем, что функция $Y(\theta, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + k(k+1)Y = 0. \quad (5.24)$$

Дважды непрерывно дифференцируемые ограниченные решения уравнения (5.24) называются *сферическими функциями порядка k* .

Для нахождения решений уравнения (5.24) применим метод разделения переменных. Будем искать решение $Y_k(\theta, \varphi)$ уравнения (5.24) в виде произведения двух функций:

$$Y_k(\theta, \varphi) = P(\cos \theta) \Phi(\varphi).$$

Учитывая, что $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$, получим

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases} \quad (5.25)$$

откуда $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и решения задачи (5.25):

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Функция $P(\cos\theta)$ определяется из уравнения:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP(\cos\theta)}{d\theta} \right] + \left[k(k+1) - \frac{\lambda}{\sin^2\theta} \right] P(\cos\theta) = 0, \quad (5.26)$$

и, следовательно, задача нахождения сферических функций на единичной сфере сводится к отысканию решений уравнения (5.26) при $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Полагая в (5.26) $t = \cos\theta$, для функции $P(\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, получаем уравнение:

$$-\left[(1-t^2)P'(t) \right]' + \frac{n^2}{1-t^2} P(t) = k(k+1)P(t). \quad (5.27)$$

Ограниченными решениями уравнения (5.27) являются *присоединенные многочлены Лежандра*:

$$P_{k,n}(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_k(t)}{dt^n},$$

где $P_k(t) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dt^k} \left[(t^2 - 1)^k \right]$ — *многочлены Лежандра*, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Возвращаясь к переменной θ , находим частные решения уравнения (5.26):

$$P_{k,n}(\cos\theta) = \sin^n\theta \frac{d^n}{d\cos\theta^n} [P_k(\cos\theta)],$$

причем $P_{k,0}(\cos\theta) = P_k(\cos\theta)$, $P_{k,n}(\cos\theta) = 0$ при $n > k$.

Таким образом, частные решения уравнения (5.24), ограниченные на единичной сфере, имеют вид:

$$P_{k,n}(\cos\theta) \cos n\varphi, \quad P_{k,n}(\cos\theta) \sin n\varphi.$$

Их линейные комбинации с произвольными коэффициентами:

$$Y_k(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^k (a_{k,n} \cos n\varphi + b_{k,n} \sin n\varphi) P_{k,n}(\cos\theta) \quad (5.28)$$

также являются частными решениями уравнения (5.24), а частные решения уравнения (5.22) даются формулами:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^k Y_k(\theta, \varphi).$$

Решение внутренней задачи Дирихле в шаре (и других внутренних задач) находится в виде ряда по сферическим функциям $X_k(\theta, \varphi)$:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k X_k(\theta, \varphi).$$

Разлагая функцию $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям $Y_k(\theta, \varphi)$:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi)$$

и используя граничное условие (5.23), находим $X_k(\theta, \varphi) = Y_k(\theta, \varphi)$.

Таким образом, решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $r < R$ имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k(\theta, \varphi). \quad (5.29)$$

Теорема. Пусть функция $f(\theta, \varphi)$ непрерывна на поверхности шара $r = R$. Тогда сумма ряда (5.29) является решением задачи (5.22)–(5.23).

Приведем формулы для многочленов Лежандра $P_k(t)$, $P_{k,n}(\cos\theta)$ при $k = 0, 1, 2, 3$:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t);$$

$$P_{0,0}(\cos\theta) = P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_{1,0}(\cos\theta) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_{1,1}(\cos\theta) = \sin\theta.$$

Аналогично получим

$$P_{2,0}(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1), \quad P_{2,1}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta, \quad P_{2,2}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta;$$

$$P_{3,0}(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta), \quad P_{3,1}(\cos\theta) = \sin\theta \frac{15\cos^2\theta - 3}{2},$$

$$P_{3,2}(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta, \quad P_{3,3}(\cos\theta) = 15\sin^3\theta;$$

$$P_{k,k}(\cos\theta) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sin^k\theta.$$

Пользуясь формулой (5.28), выпишем сферические функции $Y_k(\theta, \varphi)$ в явном виде для $k = 0, 1, 2, 3$:

$$Y_0(\theta, \varphi) = a_{0,0},$$

$$Y_1(\theta, \varphi) = a_{1,0} \cos\theta + (a_{1,1} \cos\varphi + b_{1,1} \sin\varphi) \sin\theta,$$

$$Y_2(\theta, \varphi) = a_{2,0} (3\cos^2\theta - 1) + (a_{2,1} \cos\varphi + b_{2,1} \sin\varphi) \sin\theta \cos\theta + \\ + (a_{2,2} \cos 2\varphi + b_{2,2} \sin 2\varphi) \sin^2\theta,$$

$$Y_3(\theta, \varphi) = a_{3,0} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (a_{3,1} \cos\varphi + b_{3,1} \sin\varphi) \sin\theta (15\cos^2\theta - 3) + \\ + (a_{3,2} \cos 2\varphi + b_{3,2} \sin 2\varphi) \sin^2\theta \cos\theta + (a_{3,3} \cos 3\varphi + b_{3,3} \sin 3\varphi) \sin^3\theta.$$

Пример 3

Найти функцию $u = u(r, \theta, \varphi)$, гармоническую внутри единичного шара и удовлетворяющую на границе шара условию

$$u(1, \theta, \varphi) = \sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta).$$

Решение

Представим функцию $f(\theta, \varphi) = \sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta)$ в виде

$$\sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta) = \sin\varphi \sin\theta + \sin^2\theta =$$

$$= \sin\varphi \sin\theta + 1 - \cos^2\theta = \sin\varphi \sin\theta - \frac{1}{3}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{2}{3}.$$

Из формул для Y_0, Y_1, Y_2 следует, что

$$\text{при } a_{0,0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} = Y_0(\theta, \varphi);$$

$$\text{при } a_{1,0} = a_{1,1} = 0, \quad b_{1,1} = 1, \quad \sin\varphi \sin\theta = Y_1(\theta, \varphi);$$

$$\text{при } a_{2,0} = -\frac{1}{3}, \quad a_{2,1} = b_{2,1} = a_{2,2} = b_{2,2} = 0, \quad -\frac{1}{3}(3\cos^2\theta - 1) = Y_2(\theta, \varphi).$$

Следовательно,

$$f(\theta, \varphi) = \sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta) = Y_0(\theta, \varphi) + Y_1(\theta, \varphi) + Y_2(\theta, \varphi).$$

Тогда, согласно формуле (5.29), решение внутренней задачи Дирихле имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = Y_0(\theta, \varphi) + rY_1(\theta, \varphi) + r^2Y_2(\theta, \varphi),$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{2}{3} + r\sin\varphi\sin\theta - \frac{r^2}{3}(3\cos^2\theta - 1).$$

Контрольные задания

76. Найти функцию $u = u(r, \theta, \varphi)$, гармоническую внутри единичного шара и удовлетворяющую на границе шара условию:

а) $u(1, \theta, \varphi) = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta;$

б) $u(1, \theta, \varphi) = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right);$

в) $u(1, \theta, \varphi) = \cos^2\theta\sin\theta\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$

77. Найти функцию $u = u(r, \theta, \varphi)$, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и удовлетворяющую на границе шара условию:

а) $u(R, \theta, \varphi) = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\sin^2\theta\cos\theta;$

б) $u(R, \theta, \varphi) = \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta;$

в) $u(R, \theta, \varphi) = \sin^2\theta\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\theta\sin\varphi;$

г) $u(R, \theta, \varphi) = \sin 100\varphi\sin^{100}\theta.$

5.6. Решение задачи Дирихле. Метод функции Грина

Пусть дана область V в пространстве, ограниченная поверхностью S . Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

Внутри области V найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y, z)$, непрерывную в области \bar{V} , удовлетворяющую уравнению Пуассона:

$$\Delta u = -f, \quad (x, y, z) \in V \quad (5.30)$$

и принимающую на границе области S заданные значения

$$u(x, y, z) = u_0, \quad (x, y, z) \in S. \quad (5.31)$$

Решение поставленной задачи в некоторых случаях может быть получено с помощью функции Грина.

Зафиксируем произвольно точку (x_0, y_0, z_0) внутри области, и пусть (x, y, z) — любая точка внутри или на границе области V .

Построим три функции от пары точек (x, y, z) , (x_0, y_0, z_0) :

$$1. \quad E(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Функция E удовлетворяет по первой точке при фиксированной второй уравнению Лапласа

$$\Delta E = 0, \quad \text{при } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

и называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*.

2. $v(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ — решение задачи Дирихле специального вида:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (x, y, z) \in V, \\ v = -E, & (x, y, z) \in S. \end{cases}$$

3. $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = E + v$.

Функция G называется *функцией Грина задачи Дирихле* (5.30)–(5.31).

Из определения следует:

1) $\Delta G = 0$ внутри V , кроме (x_0, y_0, z_0) ;

2) $G|_S = E|_S + \upsilon|_S = E|_S - E|_S = 0$.

Если функция G известна, то решение задачи Дирихле (5.30)–(5.31) в точке $(x_0, y_0, z_0) \in V$ дается формулой

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iint_S u_0 \frac{\partial G}{\partial n} dS + \iiint_V G f dx dy dz, \quad (5.32)$$

где $\frac{\partial G}{\partial n}$ — производная функции G на границе S , взятая по направлению внешней нормали к S .

Для двумерной области V с границей S функция Грина определяется аналогично

$$G(x, y; x_0, y_0) = E + \upsilon,$$

где

$$1. E(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},$$

$$\Delta E = 0, \text{ при } (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

Функция E называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости*.

2. $\upsilon(x, y; x_0, y_0)$ такая, что

$$\begin{cases} \Delta \upsilon = 0, & (x, y) \in V, \\ \upsilon = -E, & (x, y) \in S. \end{cases}$$

Решение первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = -f$ при этом дается формулой

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\int_S u_0 \frac{\partial G}{\partial n} dS + \iint_V G f dx dy. \quad (5.33)$$

Пример 4

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве, $z > 0$, то есть

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z > 0, \\ u|_{z=0} = u_0(x, y). \end{cases}$$

Решение

Выберем любую точку (x_0, y_0, z_0) , $z_0 > 0$. Пусть (x, y, z) — текущая точка. Построим точку $(x_0, y_0, -z_0)$, симметричную с точкой (x_0, y_0, z_0) относительно плоскости $z_0 > 0$ (рис. 6). Соединим (x, y, z) с (x_0, y_0, z_0) , расстояние обозначим через r . Соединим (x, y, z) с $(x_0, y_0, -z_0)$, расстояние обозначим через ρ .

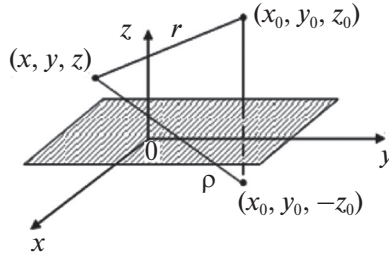


Рис. 6. Построение выбранных точек

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = E + v,$$

где

$$E(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

$v(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ — решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & z > 0, \\ v|_{z=0} = -E|_{z=0}. \end{cases}$$

Положим,

$$v(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi \rho} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}.$$

Очевидно, $\Delta v = 0$ при $z > 0$,

$$\begin{aligned} v|_{z=0} &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(0+z_0)^2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}} = -E|_{z=0}. \end{aligned}$$

Имеем

$$G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n}|_{z=0} &= -\frac{\partial G}{\partial z}|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{r'_z}{r^2} + \frac{\rho'_z}{\rho^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{z-z_0}{r^3} - \frac{z+z_0}{\rho^3} \right)_{z=0} = \\ &= -\frac{z_0}{2\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (5.32) и учитывая, что $f = 0$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(x, y) dx dy}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример 5

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, то есть

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0, \\ u|_{y=0} = u_0(x). \end{cases}$$

Решение

Выполним построения, аналогичные построениям в примере 4 (рис. 7). Функция Грина может быть получена таким же способом.

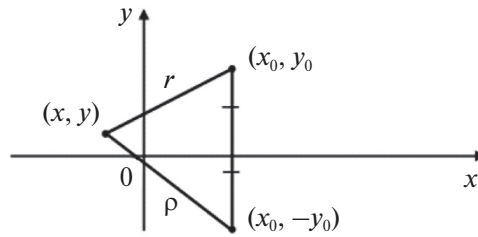


Рис. 7. Построение выбранных точек

$$G(x, y; x_0, y_0) = E + v,$$

где

$$E(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},$$

$$v(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}.$$

Имеем

$$G = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho}{r}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{r \rho'_y r - r'_y \rho}{r^2} \Big|_{y=0} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{y+y_0}{\rho^2} - \frac{y-y_0}{r^2} \right) \Big|_{y=0} = -\frac{y_0}{\pi \left[(x-x_0)^2 + y_0^2 \right]}.$$

Решение краевой задачи, согласно (5.33), примет вид

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(x) dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2}.$$

Контрольные задания

78. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3 :

а) двугранный угол: $y > 0$, $z > 0$;

б) октант: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

в) полушар: $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$, $z > 0$;

г) четверть шара: $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$, $y > 0$, $z > 0$.

79. Найти решение задачи Дирихле: $\Delta u = 0$, если $z > 0$; $u|_{z=0} = u_0(x, y)$

для следующих функций $u_0(x, y)$:

$$\text{а) } u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & |x| > l, \quad -\infty < y < \infty, \\ 1, & |x| \leq l, \quad -\infty < y < \infty; \end{cases}$$

$$\text{б) } u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ 1, & x \geq 0, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$$

80. Найти решение задачи Дирихле: $\Delta u = 0$, если $y > 0$; $u|_{y=0} = u_0(x)$

для следующих функций $u_0(x)$:

$$\text{а) } u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ 1, & |x| \leq l; \end{cases}$$

$$\text{б) } u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ C, & x \geq 0. \end{cases}$$

81. Найти решение уравнения: $\Delta u = 0$, в первом квадранте, $x > 0$, $y > 0$ со следующими граничными условиями:

а) $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = 1$;

б) $u|_{x=0} = a$, $u|_{y=0} = b$.

Библиографический список

1. Бойков, В. А. Уравнения математической физики / В. А. Бойков, А. В. Жибер. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 254 с.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1988. — 439 с.
3. Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. — М.: Наука, 1991. — 387 с.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высшая школа, 2011. — 435 с.
5. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1991. — 386 с.
6. Сборник задач по математике для вузов / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, С. М. Коган [и др.]. — М.: Физматлит, 2010. Ч. 3. — 482 с.
7. Краснов, М. А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. А. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Наука, 1998. — 415 с.
8. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 2005. — 359 с.
9. Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 275 с.
10. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 2000. — 287 с.
11. Соболев, Л. В. Уравнения математической физики / Л. В. Соболев. — М.: Наука, 2002. — 375 с.
12. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Изд-во МГУ, 2009.. — 520 с.
13. Шелковников, Ф. А. Сборник упражнений по операционному исчислению / Ф. А. Шелковников, К. Г. Такайшвили. — М.: Высшая школа, 1996. — 236 с.

Содержание

Предисловие	3
1. Основы операционного исчисления	4
1.1. Понятия оригинала и изображения по Лапласу. Свойства преобразования Лапласа	4
Свойства преобразования Лапласа	6
Контрольные задания	12
1.2. Восстановление оригинала по изображению	17
1.2.1. Элементарный метод	17
1.2.2. Формула обращения. Теоремы разложения	20
Контрольные задания	23
1.3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем	26
1.3.1. Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами	26
1.3.2. Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	35
Контрольные задания	37
1.4. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	40
Контрольные задания	44
1.5. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений и систем	45
1.5.1. Уравнение Вольтерра второго рода	45
1.5.2. Уравнение Вольтерра первого рода	45
1.5.3. Системы интегральных уравнений Вольтерра	46
Контрольные задания	49
2. Классификация уравнений в частных производных	52
2.1. Дифференциальные уравнения в частных производных	52
Контрольные задания	53
2.2. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных	54
Контрольные задания	58
2.3. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных	59

2.3.1. Применение преобразования Лапласа к решению линейных уравнений первого порядка	63
Контрольные задания	65
2.4. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка	66
Контрольные задания	68
2.5. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными	69
2.5.1. Замена независимых переменных	69
2.5.2. Уравнение характеристик	70
2.5.3. Канонические формы уравнений	71
Контрольные задания	75
2.6. Основные уравнения математической физики	77
2.6.1. Уравнение колебаний	78
2.6.2. Уравнение теплопроводности	80
2.6.3. Стационарное уравнение	82
Контрольные задания	83
2.7. Постановка основных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка	84
2.7.1. Классификация краевых задач	84
2.7.2. Задача Коши	85
2.7.3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Смешанная задача	86
2.7.4. Корректность постановки задач математической физики	87
Контрольные задания	89
3. Гиперболические уравнения	91
3.1. Уравнение колебания струны и его решение методом Даламбера	91
3.1.1. Формула Даламбера	91
3.1.2. Неоднородное уравнение	94
3.1.3. Метод продолжений	96
Контрольные задания	99
3.2. Уравнение колебания струны и его решение методом разделения переменных (метод Фурье)	102
3.2.1. Уравнение свободных колебаний струны	102
3.2.2. Неоднородное уравнение	108
Контрольные задания	111
4. Параболические уравнения	114
4.1. Одномерное уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач	114
4.2. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Функция мгновенного точечного источника ...	116
4.2.1. Однородная краевая задача	116

4.2.2. Неоднородное уравнение теплопроводности.....	121
Контрольные задания.....	123
4.3. Задачи на бесконечной прямой	
для уравнения теплопроводности	125
4.3.1. Задача Коши	125
4.3.2. Краевая задача для полуограниченной прямой	128
4.3.3. Применение преобразования Лапласа	
к решению краевых задач	130
Контрольные задания	133
5. Эллиптические уравнения	136
5.1. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач	136
5.2. Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических	
координатах. Фундаментальные решения	139
5.3. Гармонические функции и их основные свойства	140
5.4. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье	142
Контрольные задания	148
5.5. Решение краевых задач в шаре	
с использованием сферических функций	150
Контрольные задания	154
5.6. Решение задачи Дирихле. Метод функции Грина	155
Контрольные задания	160
Библиографический список.....	161



ГРЕБЕННИКОВА ИРИНА ВЛАДИМИРОВНА

Старший преподаватель кафедры «Информационные системы и технологии» Уральского федерального университета. По образованию математик. Автор 32 научных и учебных изданий. Область научных интересов – математическая теория управляемых динамических процессов: оптимизация сингулярно возмущенных систем управления с запаздыванием.