С.Л.Соболев
В.Л.Васкевич

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

С. Л. Соболев
В. Л. Васкевич

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Предисловие

Значительное место в научном наследии С. Л. Соболева занимают работы по теории приближенного интегрирования, выполненные им за двадцать пять лет жизни в г. Новосибирске. Первая его статья по этой теме была опубликована в 1961 г., последняя — в 1986 г. Всего же их более трех десятков, в том числе фундаментальная монография «Введение в теорию кубатурных формул» [167]. Ряд ее глав, существенно переработанных и дополненных, составили основу и этой книги.

Объектом исследования в книге служат формулы приближенного вычисления многомерных интегралов. Область интегрирования Ω при этом ограничена кусочно гладкой поверхностью конечной площади. В остальном она произвольна. Допускается одномерный случай, когда интегрирование происходит по отрезку числовой прямой. Для приближенного вычисления интеграла по области Ω предлагается использовать *кубатурные формулы*, т. е. приближенные равенства вида

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi(x_k) \cong 0.$$

Точки x_k и параметры c_k называют соответственно *узлами* и *коэффициентами* кубатурной формулы. Распределение узлов x_k внутри Ω может быть произвольным. Тем не менее бóльшая часть результатов книги относится к формулам с параллелепипедальной решеткой узлов. В этом случае узлы x_β нумеруются с помощью мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с целочисленными координатами. Любой из них можно найти по формуле $x_\beta = hH\beta$, где H — матрица размера

$n \times n$, $\det H = 1$, а положительный параметр h называется шагом решетки.

Узлы и коэффициенты всех упоминаемых в монографии формул заданы либо явно, либо как итог вполне определенной последовательности действий. Для каждой формулы указывается множество функций, на которых она точна. Чаще всего это конечномерное пространство $\mathbf{P}_{m-1}$, состоящее из полиномов степени не выше $m-1$. Если формула точна на $\mathbf{P}_{m-1}$ и m максимален среди номеров с указанным свойством, то такой номер называют алгебраическим порядком точности данной формулы. Таким образом, авторы имеют дело с кубатурными формулами алгебраического порядка точности m.

Основные результаты книги получены благодаря функциональному подходу. Это предполагает, во-первых, что подынтегральные функции объединены в некоторое банахово пространство, и во-вторых, что разность между интегралом и приближающей его комбинацией значений подынтегральной функции рассматривается как результат действия некоторого линейного функционала. Этот функционал, называемый функционалом погрешности кубатурной формулы, как правило непрерывен. Знание численного значения его нормы позволяет получать гарантированные оценки точности кубатурной формулы на элементах выбранного пространства. В этом — существенное преимущество функционального подхода перед чисто алгебраическим.

Алгебраический и функциональный подходы порождают отличные друг от друга критерии качества кубатурных формул. В первом случае лучшей считается формула, точная на возможно большем числе полиномов. Во втором предпочтительней та формула, функционал погрешности которой имеет меньшую норму. В книге подробно исследуется взаимосвязь этих критериев. Доказывается, что неограниченное увеличение числа точно интегрируемых полиномов может привести к неограниченному увеличению нормы функционала погрешности. Иначе говоря, из двух функционалов меньшую норму может иметь тот, который точен на значительно меньшем числе полиномов.

Функциональный подход помимо описания конструкций рассматриваемых формул, т. е. указания их узлов и коэффициентов либо алгоритмов их нахождения, подразумевает также исследование норм соответствующих функционалов погрешности в выбранном банахо-

вом пространстве. В частности, выводятся двусторонние оценки этих норм либо их асимптотические разложения по шагу решетки интегрирования и порядку точности кубатурного процесса.

Функциональные методы стали широко применяться в теории приближенного интегрирования со времени появления работ С. М. Никольского и первого издания его книги [88]. Изложенные в [88] результаты относятся, в основном, к квадратурным формулам на классах функций $W^m_{L_p}$. Возникновение теории кубатурных формул связывают с исследованиями С. Л. Соболева и его монографией [167]. Используемые в этой теории функциональные пространства характеризуются параметрами, задающими гладкость подынтегральных функций. В остальном выбор таких пространств произволен. В настоящем издании рассмотрены кубатурные формулы в пространствах Соболева $W_2^{(m)}(\Omega)$ и их подпространствах. В частности, к таковым относятся различные подпространства $W_2^{(m)}(\Omega)$, состоящие из бесконечно дифференцируемых элементов.

В теории кубатурных формул, как назвал ее сам С. Л. Соболев, выделяются четыре крупных направления. Все они представлены и в настоящем издании.

Хронологически первое из этих направлений составляют исследования по трехмерным кубатурным формулам, обладающим высоким алгебраическим порядком точности и инвариантным относительно преобразований группы вращений какого-нибудь правильного многогранника [148]. Требование точности кубатурной формулы с заданными узлами на многочленах до определенной степени сводит задачу отыскания ее коэффициентов к решению линейной системы уравнений. Чем выше требуемая точность и чем больше узлов, тем бóльшие размеры имеет эта система. Однако в случае, когда область интегрирования обладает определенного рода симметрией, а для приближенного интегрирования используется инвариантная кубатурная формула, размеры соответствующей линейной системы можно существенно уменьшить. Вопрос о том, как это можно сделать, рассматривается в гл. II. Там же предложен алгоритм построения узлов инвариантной кубатурной формулы на трехмерной сфере. Исследования С. Л. Соболева по инвариантным формулам существенно продвинуты в работах В. И. Лебедева [73–80, 61], И. П. Мысовских [85], Г. Н. Салихова [138–146] и других математиков.

Второе направление теории, пожалуй наиболее развитое, состоит из исследований по асимптотически оптимальным решетчатым кубатурным формулам в пространствах функций конечной гладкости. Сам С. Л. Соболев рассматривал в этой связи гильбертовы пространства $L_2^{(m)}$. Предложенная им конструкция регулярного пограничного слоя позволяет при сколь угодно большом числе узлов находить коэффициенты кубатурной формулы, решая лишь несколько стандартных систем линейных уравнений с размерами, зависящими только от порядка точности m. Центральное же место этого направления — вывод асимптотического представления $L_2^{(m)*}$-нормы функционала погрешности с регулярным пограничным слоем. Соответствующая формула включает в себя два слагаемых, первое из которых записано в явном виде через так называемые обобщенные числа Бернулли, а второе пренебрежимо мало по сравнению с первым при малом шаге h решетки интегрирования. Из этого представления следует, что норма функционала погрешности с регулярным пограничным слоем убывает при $h \to 0$ как степенная функция h^m. Это весьма глубокий аналитический факт, позволяющий дать не алгебраическое, а функциональное определение порядка точности кубатурной формулы на классе [178]. Формула с регулярным пограничным слоем представляет собой, по существу, многомерный вариант решения классической задачи суммирования функций, относящейся к исчислению конечных разностей [39]. С этой точки зрения любая кубатурная формула, обладающая регулярным пограничным слоем, является многомерным аналогом классической квадратурной формулы Грегори.

Замечателен метод, предложенный С. Л. Соболевым для отыскания $L_2^{(m)*}$-нормы функционала погрешности $l(x)$ и использующий понятие экстремальной функции $u(x)$. Эта функция рассматривается как обобщенное решение многомерного полигармонического уравнения со специальной правой частью:

$$\Delta^m u(x) = (-1)^m l(x).$$

Решение этого уравнения на числовой прямой — это кусочно полиномиальная функция класса $W_2^{(m)}$, т. е. сплайн. В многомерном же случае такой подход позволил С. Л. Соболеву привлечь к исследованию классической проблемы анализа им же изобретенные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.

Вопросы теории асимптотически оптимальных кубатурных формул рассматриваются в гл. III–V. Некоторые особенности построения формул с регулярным пограничным слоем возникают в случае, когда область интегрирования представляет собой рациональный многогранник. В этом случае предложена конструкция формального пограничного слоя, позволившая создать простой алгоритм вычисления коэффициентов решетчатых кубатурных формул. Соответствующие результаты изложены в гл. III.

Исследования С. Л. Соболева по асимптотически оптимальным формулам были продолжены другими математиками. Среди них М. Д. Рамазанов [118–131], написавший гл. VI этой книги, и В. И. Половинкин [92–117], обобщивший теорию асимптотически оптимальных формул на пространства $L_p^{(m)}(\Omega)$ при $1 < p < \infty$ и на случай весового интегрирования. О. В. Бесов вывел в [13–16] асимптотические формулы для норм дроблений данного функционала погрешности. Каждое такое дробление — это множество функционалов погрешности, действующих в более общих, чем $L_p^{(m)}(\Omega)$, пространствах. К ним, в частности, относятся классы функций, обобщенные производные порядка m которых принадлежат пространству Марцинкевича $M_\psi(\Omega)$ (либо пространству Лоренца $\Lambda_\psi(\Omega)$, либо пространству Орлича $L_M^*(\Omega)$). Кубатурные формулы в пространствах $W_p^{(m)}$ и в неизотропных пространствах Соболева рассматривались Ц. Б. Шойнжуровым [194, 195]. Кубатурными формулами с регулярным и формальным пограничным слоем занимались Н. И. Блинов [17–21], Л. В. Войтишек [32–36], Ф. Я. Загирова [56]. Асимптотические оценки норм функционалов погрешности, действующих в анизотропных классах $W_p^{(r)}M$, нашли М. Д. Рамазанов [126] и В. Н. Темляков. Асимптотические разложения норм функционалов погрешности над анизотропными пространствами Никольского $NH_q^R([0,2\pi]^n)$ получил В. Н. Темляков [180, 181].

Третье направление теории составляют исследования С. Л. Соболева по кубатурным формулам в классах бесконечно дифференцируемых функций. В качестве таковых он рассмотрел в [170, 178] пространства периодических функций многих переменных с заданным поведением интегральных $L_2^{(m)}$-норм при неограниченном возрастании m. Предложенной им классификацией охватываются известные пространства целых функций, имеющих определенный тип и порядок

роста, пространства аналитических функций, а также классы Жевре, включающие в себя квазианалитические элементы. Рассмотрев действие в этих пространствах решетчатого функционала погрешности с равными коэффициентами, С. Л. Соболев получил асимптотическое представление логарифма нормы этого функционала. Как и в случае пространств конечной гладкости, соответствующая формула состоит из двух слагаемых. Первое из них явно выражено через параметры исходного класса, второе же пренебрежимо мало по сравнению с первым при малом шаге h решетки. Эти результаты обобщили работу П. Дэвиса [206], в которой рассматривались кубатурные формулы в пространствах периодических аналитических функций одной переменной. Получить аналогичные утверждения для пространств бесконечно дифференцируемых непериодических функций многих переменных до сих пор не удалось. Одномерный случай составляет исключение. Н. С. Бахвалов в [10] оценил скорость сходимости квадратурного процесса Гаусса в пространстве функций, аналитических в окрестности единичного отрезка. Для этих же пространств В. И. Крылов в [71] доказал сходимость интерполяционного квадратурного процесса. В. Л. Васкевич в [24–28] получил асимптотические разложения норм функционалов погрешности квадратурных формул Грегори и Эйлера — Маклорена в пространствах бесконечно дифференцируемых функций, являющихся одномерными реализациями соответствующих пространств Соболева из [178]. Как оказалось, использование при данном h формул слишком высокого алгебраического порядка точности в общем случае не только не ведет к уменьшению нормы функционала погрешности, но, напротив, может повлечь за собой прямо противоположные последствия. Обзор свойств формул приближенного интегрирования в пространствах бесконечно дифференцируемых функций сделал К. И. Бабенко в [2].

Проведенные исследования показали, в частности, что переход от функций конечной гладкости к бесконечно дифференцируемым сопровождается интересным эффектом. Именно, норма функционала погрешности кубатурной формулы, в первом случае убывающая не быстрее некоторой степени шага решетки интегрирования, во втором случае убывает экспоненциально. С. Л. Соболев предложил считать порядок точности кубатурных формул во втором случае равным бесконечности. Точнее, кубатурная формула имеет в данном банаховом пространстве бесконечный порядок точности, если

норма соответствующего функционала погрешности в сопряженном пространстве убывает к нулю быстрее любой степени шага сетки интегрирования. До сих пор известно весьма немного кубатурных формул, обладающих подобным свойством. В многомерном случае единственный пример такого рода приведен С. Л. Соболевым в [178]. Результаты по кубатурным формулам на бесконечно дифференцируемых функциях составили основу гл. VII.

Наконец, четвертое направление теории, представленное в этой книге, составляют исследования С. Л. Соболева по оптимальным в пространстве $L_2^{(m)}$ решетчатым кубатурным формулам. Центральное место здесь занимает описание некоторого аналитического алгоритма отыскания их коэффициентов. С этой целью, прежде всего, в гл. VIII введены пространства функций многих дискретных переменных, аналогичные пространствам Соболева $W_p^{(m)}$, $L_p^{(m)}$, и исследованы их свойства. Далее, С. Л. Соболев определил и исследовал специальный конечно-разностный оператор, действие которого на функцию дискретного аргумента представляется сверткой со специальным ядром и аналогично действию полигармонического оператора Δ^m на непрерывно дифференцируемую функцию. Задача вычисления сверточного ядра при произвольном m оказалась весьма непростой. Частично ее удалось решить в одномерном случае: здесь имеется формула, выражающая искомые значения через корни многочлена Эйлера степени $2m$. Коэффициенты оптимальных кубатурных формул удобно представлять значениями в точках решетки $\mathbb{Z}^n$ финитной функции дискретной переменной. Эта функция, как оказывается, удовлетворяет линейному конечно-разностному уравнению со специальной правой частью. Подействовав на эту правую часть сверточным дискретным аналогом полигармонического оператора, С. Л. Соболев получил аналитическую формулу для искомых коэффициентов. Чтобы использовать ее в одномерном случае, он вывел ряд свойств многочленов Эйлера, в том числе получил асимптотические формулы для их корней. Результаты С. Л. Соболева по коэффициентам оптимальных квадратурных формул обобщили некоторые исследования А. Сарда, И. Мейерса, И. Шенберга, С. Силлимена, изложенные в работах [214, 217–219] и полученные методом сплайнов. Результаты по оптимальным в $L_2^{(m)}$ решетчатым формулам и по многочленам Эйлера составляют основное содержание гл. IX. Реализацией предложенного С. Л. Соболевым алгоритма занимались

З. Ж. Жамалов [52, 53], Ф. Я. Загирова [57, 58], Х. М. Шадиметов [189].

Особо следует сказать о систематически применяемом в этой книге методе исследования. С первых страниц становится очевидным, что метод С. Л. Соболева имеет глубокие корни в таких областях математики, как математический анализ и функциональный анализ, теория дифференциальных уравнений. В то же время предмет исследования — формулы приближенного интегрирования — по традиции относят к численному анализу, из которого выросла современная вычислительная математика. В результате же возникает теория, несомненно имеющая значение и для приложений. Подобное развитие событий представляется скорее неизбежным, чем случайным, явлением современной математики. Свою точку зрения по этому вопросу С. Л. Соболев весьма образно выразил в предисловии к монографии [167], выдержки из которого приведены далее.

Ряд глав этой книги послужил основой лекционных и специальных курсов, прочитанных в разное время студентам Новосибирского государственного университета.

Соглашения о нумерации, принятой далее, традиционны для физико-математической литературы. Формулы внутри каждой главы обозначены двумя цифрами: первая соответствует номеру параграфа, а вторая, следующая через точку, — порядковому индексу формулы внутри параграфа. Ссылка на формулу, внешнюю к какой-либо главе, осуществляется тройным номером: римская цифра указывает главу, в которой формула приведена, а смысл последующих арабских цифр с точкой прежний. Аналогично даны ссылки на следствия. Теоремы и леммы обозначены двойным номером: римская цифра — номер главы, через точку арабская цифра — порядковый номер внутри главы.

Сделаем одно замечание относительно констант, присутствующих в различных неравенствах, встречающихся в книге. Они, как правило, не зависят от переменных величин (функций, векторов и т. д.), входящих в эти неравенства. Далее, эти константы не нумеруются, т. е. одной и той же буквой могут быть обозначены разные величины. Такое соглашение представляется удобным, так как сокращает обозначения.

В создании окончательного текста книги принимали участие несколько математиков. Первым из них хотелось бы отметить

М. Д. Рамазанова, чье компетентное редактирование несомненно улучшило первоначальный текст. В. И. Лебедев принял существенное участие в написании гл. II, дополнив ее собственными результатами из работ [73–80, 61]. Результаты Ф. Я. Загировой существенно дополнили изложение теории оптимальных квадратурных формул в гл. IX, § 8. Неоценимую помощь авторам оказал Г. А. Шмырев. В работе над книгой участвовали также Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин, И. И. Матвеева. Ряд ценных замечаний сделали В. И. Половинкин и М. В. Носков. Всем им авторы чрезвычайно благодарны.

Васкевич В. Л.

Глава I

Задачи и результаты теории кубатурных формул

Эта глава вводная. В ней даны постановки задач, очерчен круг основных идей, послуживших фундаментом нашей теории, а также приведено краткое описание наиболее важных ее результатов. Стремление к компактному изложению привело нас к некоторой схематичности в доказательствах ряда теорем этой главы. Читатель, желающий ознакомиться с более полным их обоснованием, сможет сделать это в дальнейшем.

§ 1. Алгебраически точные формулы

Общая задача теории численного интегрирования функций многих переменных состоит в том, чтобы приближенно найти интеграл

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\,dx = \int \chi_\Omega(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Здесь x — это n-мерный координатный вектор, а $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция некоторой связной области Ω с достаточно гладкой границей. Искомое приближение будем искать в виде линейной комбинации значений функции $\varphi(x)$ в N точках

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}, \tag{1.2}$$

называемых *узлами*:

$$I^*(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi(x^{(k)}) = \int \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}) \varphi(x)\, dx, \qquad (1.3)$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака. Выражение (1.3) мы называем *кубатурной формулой* по аналогии с квадратурной формулой для одномерного случая.

Теория кубатурных формул сложилась, в основном, из трех ветвей: алгебраически точных формул; формул, построенных функционально-аналитическими методами, и формул, построенных вероятностными методами. Мы не будем заниматься здесь вероятностным подходом, с которым можно ознакомиться, например, в работах [38, 37, 48, 198].

Основное содержание этой книги составляет теория формул, хорошие аппроксимационные свойства которых обосновываются методами функционального анализа.

Кубатурной формуле (1.3) сопоставим *функционал погрешности*

$$(l, \varphi) = I(\varphi) - I^*(\varphi) = \int \left[\chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}) \right] \varphi(x)\, dx. \quad (1.4)$$

Он является линейным, так как мы требуем независимости правил, указывающих узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты c_k, от выбора конкретной интегрируемой функции.

Интегрируемые функции считаем элементами некоторого банахова пространства $\mathbf{B}$, вложенного в пространство непрерывных функций:

$$\mathbf{B} \to C(\Omega). \qquad (1.5)$$

Этого достаточно для того, чтобы формула (1.3) была определена на всех функциях из $\mathbf{B}$. О качестве формулы будем судить, исходя из оценки величины

$$\sup_{\|\varphi|\mathbf{B}\|=1} |(l, \varphi)|.$$

Естественно рассматривать последовательности кубатурных формул с погрешностями $(l^{(N)}, \varphi)$ с увеличивающимся числом узлов N. Сходимость функционалов $l^{(N)}$ к нулю может быть сильной или слабой.

Алгебраически точной будем называть кубатурную формулу (1.3), дающую точное значение интеграла (1.1) для заданной системы функций

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_M. \tag{1.6}$$

Интегралы от функций ψ_j обозначим через b_j, т. е.

$$b_j = \int\limits_{\Omega} \psi_j \, dx,$$

и образуем из чисел b_j вектор-столбец b. Вектор-столбец c соберем из *коэффициентов* c_j *кубатурной формулы* (1.3). Условия точной интегрируемости системы (1.6) состоят в выполнении равенств

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \psi_j(x^{(k)}) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, M.$$

Их можно записать и в матричном виде:

$$Sc = b \tag{1.7}$$

с матрицей

$$S = \begin{bmatrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_1(x^{(N)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_M(x^{(1)}) & \psi_M(x^{(N)}) \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Задача определения коэффициентов алгебраически точной формулы двойственна задаче интерполирования, в которой требуется отыскать линейную комбинацию функций (1.6), принимающую заданные значения в точках (1.2). Покажем это.

Пусть искомая линейная комбинация — это функция

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_M\psi_M, \tag{1.9}$$

а принимаемые ею в точках (1.2) значения расположены в виде вектора-строки $\vec{d} = (d^{(1)}, \ldots, d^{(N)})$. Коэффициенты линейной комбинации (1.9) также расположим вектором-строкой $a = (a_1, \ldots, a_M)$. Для определения a получаем систему уравнений

$$aS = \vec{d}, \tag{1.10}$$

которая является союзной с (1.7), т. е. соответствующие задачи двойственны.

Наиболее распространен случай, когда система (1.6) составлена из многочленов, упорядоченных по возрастанию степеней. В классической постановке задачи об алгебраически точных формулах число точек системы (1.2) равно M — числу одночленов от n переменных степени не выше m, на которых формула (1.3) должна быть точна. Легко подсчитать, что $M = (n+m)!/(n!m!)$. Интерполяционная же задача в этом случае такова:

найти многочлен $P(x)$ степени не выше m, совпадающий с функцией $\varphi(x)$ в заданных точках:

$$P(x^{(k)}) = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Многочлен $P(x)$ можно записать в виде $P(x) = ax^{\alpha}$, где a — вектор-строка длины M, а x^{α} — вектор-столбец той же высоты,

$$x^{\alpha} = \begin{pmatrix} x^{\alpha^{(1)}} \\ \vdots \\ x^{\alpha^{(M)}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(M)}$ — всевозможные целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условию

$$|\alpha^{(j)}| = \alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)} + \cdots + \alpha_n^{(j)} \le m.$$

Всякой функции $\varphi(x)$ сопоставим вектор-строку

$$\vec{\varphi} = (\varphi(x^{(1)}), \ldots, \varphi(x^{(N)}))$$

значений $\varphi(x)$ в точках системы (1.2). Значения многочлена $P(x)$ в точках (1.2) запишем с помощью матрицы

$$S = \begin{bmatrix} x^{(1)^{\alpha^{(1)}}} & & x^{(N)^{\alpha^{(1)}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(1)^{\alpha^{(M)}}} & & x^{(N)^{\alpha^{(M)}}} \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Имеет место равенство

$$\vec{P} = aS.$$

Задача интерполирования будет разрешимой, и притом однозначно, если матрица S неособенная. Ее решение, т. е. строка коэффициентов многочлена $P(x)$, дается формулой

$$a = \vec{\varphi} S^{-1}, \tag{1.12}$$

а сам многочлен — равенством

$$P(x) = \vec{\varphi} S^{-1} x^{\alpha}. \tag{1.13}$$

Формулы (1.12), (1.13) называются *интерполяционными*.

Решением двойственной к интерполяционной задачи является кубатурная формула (1.3), точная на всех многочленах степени m. Для этой формулы

$$c = S^{-1} b, \quad b_j = \int\limits_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}}\, dx, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.14}$$

Для неквадратной матрицы S, $M \neq N$, следует ввести в рассмотрение операторы $S^{-1}_{\text{пр}}$, $S^{-1}_{\text{лев}}$ — правый и левый обратные к S, если, конечно, они существуют. При этом интерполяционные формулы (1.12), (1.13) заменятся следующими:

$$a = \vec{\varphi} S^{-1}_{\text{пр}}, \quad P(x) = \vec{\varphi} S^{-1}_{\text{пр}} x^{\alpha}, \tag{1.15}$$

а коэффициенты кубатурной формулы (1.13) будут задаваться равенством

$$c = S^{-1}_{\text{лев}} b. \tag{1.16}$$

Правые части кубатурной формулы (1.3) и функционала погрешности (1.4) могут быть определены не только для числовых функций, но также и для абстрактных функций, заданных в области Ω независимой переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и принимающих значения из некоторого банахова пространства $\mathbf{X}$.

Условимся считать, что функции f, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbf{X}$, сами составляют некоторое банахово пространство $\mathbf{B}$. Пространство $\mathbf{B}$, в частности, может состоять из непрерывных в Ω вектор-функций. Тогда вместо функционала погрешности $l^{(N)}$ будем говорить об *операторе погрешности* $l^{(N)}$, отображающем $\mathbf{B}$ в $\mathbf{X}$. Качество кубатурной формулы по-прежнему будем характеризовать скоростью сходимости к нулю последовательности $(l^{(N)}, f)$. Приведем пример реализации такого подхода.

Пусть пространство $\mathbf{X}$ состоит из последовательностей $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, значения функции $f(x)$ лежат в $\mathbf{X}$. Тогда можно отождествлять f со счетным множеством обычных числовых функций. В рассматриваемом далее примере каждая числовая функция $f_k(x)$, выражающая k-ю компоненту функции f, будет принадлежать конечномерному пространству размерности n_k. Интегрирование абстрактной функции f сводится при этом к интегрированию каждой из функций f_k. Будем считать также, что пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{B}$ снабжены банаховыми нормами.

Рассмотрим некоторую последовательность операторов погрешностей $l^{(N)}$. Будем говорить, что она *сходится к нулю равномерно* (или *сильно*), если нормы операторов $l^{(N)}$ стремятся к нулю при возрастании N. Любому положительному числу ε при этом можно сопоставить натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $N \geq N(\varepsilon)$ и любом f таком, что $\|f\|_{\mathbf{B}} \leq 1$, имеет место неравенство

$$\|(l^{(N)}, f)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon. \tag{1.17}$$

Из-за линейности оператора $l^{(N)}$ вместо условия $\|f\|_{\mathbf{B}} \leq 1$ можно потребовать, чтобы $\|f\|_{\mathbf{B}} \leq C$, где C любое. Тогда, очевидно, $N(\varepsilon)$ заменится числом $N_1(\varepsilon)$, равным $N(\varepsilon/C)$.

Таким образом, для любой ε-окрестности нуля в $\mathbf{X}$ и любого ограниченного в $\mathbf{B}$ множества можно указать номер $N(\varepsilon)$, при котором выполнено (1.17) с $N \geq N(\varepsilon)$.

Пространство $\mathbf{X}$ снабдим некоторой специальной топологией, которую назовем *T-топологией*. Пусть окрестность нуля в $\mathbf{X}$ состоит из элементов вида $a = (0, \ldots, 0, a_{\beta+1}, a_{\beta+2}, \ldots)$. Меняя β, получим полную систему окрестностей нуля в T-топологии.

Последовательность операторов погрешности $l^{(N)}$ назовем *сходящейся по порядку близости*, если для любого β найдется номер $N(\beta)$ такой, что при всех $N \geq N(\beta)$ и $f \in \mathbf{B}$ элемент $(l^{(N)}, f)$ пространства $\mathbf{X}$ принадлежит окрестности нуля в T-топологии с номером β. Это означает, что при достаточно большом N любое наперед заданное число компонент последовательности $(l^{(N)}, f)$ обращается в нуль. Как мы видим, сходимость по порядку близости операторов погрешности $l^{(N)}$ эквивалентна равномерной по f сходимости в T-топологии последовательностей $(l^{(N)}, f)$.

Если нормы операторов погрешностей $l^{(N)}$, действующих из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{X} = \mathbf{l}_2$, ограничены равномерно по N и последовательность $l^{(N)}$

сходится к нулю по порядку близости, то она, очевидно, будет и слабо сходящейся.

Рассмотрим множество B аналитических функций двух переменных $f(x, y)$, определенных в единичном круге и разложенных в нем в сходящийся ряд Маклорена:

$$f(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots. \qquad (1.18)$$

Будем отождествлять функцию $f(x, y)$ с последовательностью

$$\bar{f} = (a_0, a_{10}x + a_{01}y, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \dots),$$

k-я компонента которой представляет собой однородный многочлен степени $k-1$ из разложения (1.18). Таким образом, каждая компонента $f_j(x, y)$ вектора $\bar{f}$ — это элемент конечномерного пространства однородных многочленов заданной степени. Определим нормы в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{B}$ формулами

$$\|a\|_{\mathbf{X}} = \sup_k |a_k|, \quad \|\bar{f}\|_{\mathbf{B}} = \max_{x^2+y^2 \le 1} \|\bar{f}(x, y)\|_{\mathbf{X}}.$$

В этом случае последовательность кубатурных формул сходится по порядку близости, если для любого натурального m найдется номер $N_0(m)$ такой, что

$$(l^{(N)}, P) = 0 \qquad (1.19)$$

при $N \ge N_0(m)$ для всех многочленов P степени не выше m. При условии, что сумма абсолютных значений коэффициентов этих кубатурных формул ограничена постоянной L, последовательность (1.3) слабо сходится.

В самом деле, пользуясь сходимостью степенного ряда (1.18) по δ подберем β_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{x^2+y^2 \le 1} |f_j(x, y)| \le \delta/L, \quad j \ge \beta_1.$$

Положим $m = \beta_1$, $N \ge N_0(m)$. Тогда из (1.19) имеем

$$(l^{(N)}, \bar{f}) = (0, 0, \dots, 0, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots).$$

Величины a_k, как несложно убедиться, представимы в виде

$$a_j = -\sum_{k=1}^{N} c_k f_j(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Поэтому справедливы оценки

$$\|(l^{(N)}, \bar{f})\|_{\mathbf{X}} \le \sup_{j \ge m} |a_j| \le \sup_{j \ge m} \sum_{k=1}^{N} |c_k| |f_j(x^{(k)}, y^{(k)})|$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| \right) \cdot \sup_{j \ge \beta_1, x^2+y^2 \le 1} |f_j(x, y)| \le \delta.$$

Это и означает, что последовательность (1.3) слабо сходится.

Пусть первоначальная задача состоит в приближенном вычислении интеграла

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} f(x, y)\, dx dy$$

с помощью последовательности кубатурных формул возрастающей алгебраической точности, т. е. точно интегрирующих многочлены все бóльших степеней. Предложенная схема сводит эту задачу к построению последовательности операторов погрешностей, равномерно сходящейся к нулю в рассмотренной T-топологии. Таким образом, алгебраический подход к проблеме приближенного интегрирования заменен функциональным.

§ 2. Функциональная постановка задачи

Задание кубатурной формулы (1.3) равносильно заданию функционала погрешности

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}).$$

Линейную комбинацию δ-функций в этом равенстве будем называть *точечной частью функционала* $l(x)$. Будем считать подынтегральную функцию $\varphi(x)$ элементом некоторого банахова пространства $\mathbf{B}$,

а функционал $l(x)$ — линейным ограниченным на $\mathbf{B}$, т. е. элементом $\mathbf{B}^*$. Рассмотрим два возможных случая.

Пространство $L_2^{(m)}$. Пусть функция $\varphi(x)$ определена во всем $\mathbb{R}^n$ и имеет локально суммируемые производные до порядка m включительно, причем

$$\|\varphi \mid L_2^{(m)}\| = \left[\int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2} < +\infty. \tag{2.1}$$

Интеграл здесь взят по всему $\mathbb{R}^n$, суммирование проводится по мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с целочисленными коэффициентами,

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Элементами пространства $L_2^{(m)}$ служат классы функций, отличающихся друг от друга на полином степени меньше m и имеющих конечный интеграл (2.1). Выражение (2.1), очевидно, задает в $L_2^{(m)}$ норму, по которой это пространство полно.

Для того чтобы функционал погрешности был определен в $L_2^{(m)}$, необходимо выполнение условий

$$(l, x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < m. \tag{2.2}$$

Если к тому же $2m > n$, т. е. выполнено условие первой теоремы вложения [179], то $l(x)$ ограничен в $L_2^{(m)}$.

Аналогично определяется пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$, норма в котором задается равенством

$$\|\varphi \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left[\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет в $\mathbb{R}^n$ локально суммируемые производные до порядка m, причем для любой ограниченной области Ω конечен интеграл (2.3). Предположим еще, что $2m > n$, а функция $\varphi(x)$ периодична с *матрицей периодов* H, т. е.

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где γ — произвольный целочисленный вектор-столбец. Матрице H сопоставим ее *фундаментальный параллелепипед* Ω_0, положив

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Hy, \quad \text{где } 0 \le y_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Как правило, будем предполагать, что матрица H ортогональная. Элементами пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}$ служат классы функций, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое. Норма в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ имеет вид

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\| = \left[\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}$$

Чтобы различать пространства, соответствующие разным матрицам H, будем иногда использовать обозначение $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Отметим, что пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}$ полное.

Норма в пространстве $L_2^{(m)}$ инвариантна при произвольных ортогональных преобразованиях координат. Иными словами, если $x = Ay$, где A — ортогональная матрица, и $\psi(y) = \varphi(Ay)$, то

$$\|\varphi \mid L_2^{(m)}\| = \|\psi \mid L_2^{(m)}\|.$$

Аналогичное утверждение для пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}$ читатель может сформулировать самостоятельно.

Переменными параметрами кубатурной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты c_k. *Оптимальной* кубатурной формулой будем считать такую, функционал погрешности которой при заданном числе узлов N имеет наименьшую норму в $\mathbf{B}^*$.

Общую задачу, где узлы произвольны, рассматривать не будем, а ограничимся случаем, когда эти узлы образуют *решетку*, т. е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$. Здесь h — малый положительный параметр, называемый *шагом решетки*, H — матрица размера $n \times n$ с единичным определителем, а γ — целочисленный вектор-столбец. В этом случае кубатурную формулу будем называть *решетчатой*.

Функционал погрешности $l(x)$ решетчатой кубатурной формулы является обобщенной функцией следующего вида:

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega} h^n c[\gamma] \delta(x - hH\gamma). \tag{2.5}$$

В случае пространств периодических функций типа $\widetilde{L}_2^{(m)}$ область Ω в (2.5) заменяется фундаментальным параллелепипедом Ω_0. При этом будем считать, что матрица периодов кратна матрице решетки.

Рассмотрим поведение нормы функционала погрешности при малом h. Нам понадобится ввести понятие ζ-функции Эпштейна, аргументами которой являются матрица A и натуральное число s. *Функция Эпштейна* выражается формулой

$$\zeta(A \mid s) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{r_\beta^s},$$

где r_β — расстояние от точки $A\beta$ до начала координат,

$$r_\beta^2 = |A\beta|^2 = (A\beta)^*(A\beta) = \sum_{j=1}^{n} (A\beta)_j^2.$$

В случае единичной матрицы A символом $|\beta| = |A\beta|$ здесь и далее во всей книге будем обозначать евклидову норму вектора $\beta \in \mathbb{Z}^n$. Лишь в немногих случаях символ $|\beta|$ будет обозначать порядок мультииндекса $|\beta|$:

$$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n.$$

Читателю каждый раз будет ясно из текста, о каком из этих обозначений идет речь. Имеет место следующая

Теорема I.1. *Все коэффициенты $c[\gamma]$ функционала погрешности (2.5), соответствующего оптимальной кубатурной формуле в $\widetilde{L}_2^{(m)}$, равны, а его норма задается формулой*

$$\left\| l \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| = B_{n,m} \|\chi_{\Omega_0} \mid L_2\|^{1/2} h^m, \tag{2.6}$$

где

$$B_{n,m} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1*} \mid 2m)}.$$

Отметим, что при $n = 1$ величина $\zeta(1 \mid 2m)$ выражается через известные числа Бернулли B_{2m} по формуле

$$\zeta(1 \mid 2m) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}.$$

В связи с этим величину

$$B_{2m}(H) = (-1)^{m-1}\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\zeta(H \mid 2m)$$

естественно назвать *обобщенным числом Бернулли*, соответствующим матрице H. Таким образом, равенство (2.6) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\left\| l \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| = h^m \left| \frac{B_{2m}(H^{-1*})}{(2m)!}|\Omega_0| \right|^{1/2}$$

Доказательство теоремы I.1. Используем свойство выпуклости единичной сферы в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}$. Напомним, в чем оно состоит. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — функционалы из единичной сферы пространства $\widetilde{L}_2^{(m)*}$, а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ — неотрицательные веса, дающие в сумме единицу:

$$\mu_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1.$$

Тогда соответствующая линейная комбинация функционалов лежит в единичном шаре пространства $\widetilde{L}_2^{(m)*}$, т. е.

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \mu_j l_j \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| \leq 1. \tag{2.7}$$

Здесь равенство достигается тогда и только тогда, когда все l_j совпадают друг с другом.

Из этого свойства сразу следует, что оптимальный функционал погрешности в $\widetilde{L}_2^{(m)*}$ единствен. В самом деле, если это не так, то найдутся по крайней мере два функционала погрешности, имеющие минимальную норму. Но тогда их полусумма, как следует из (2.7), имеет норму, строго меньшую, чем любой из них, а это противоречит предположению.

Пусть теперь функционал погрешности $l(x)$, записанный в виде (2.5) с $\Omega = \Omega_0$, имеет минимальную норму при заданной решетке

узлов $hH\gamma$. Тогда, очевидно, любой функционал $l(x - hH\gamma)$, где $hH\gamma \in \Omega_0$, будет иметь ту же минимальную норму, что и $l(x)$. Среднее арифметическое таких функционалов в силу (2.7) также минимально по норме и может быть записано в форме (2.5) с $\Omega = \Omega_0$. Коэффициенты $c[\gamma]$ у среднего арифметического совпадают друг с другом, а сам функционал (2.5) точен на любой постоянной. Поэтому $c[\gamma] = |\Omega_0|$ для любого γ. Из оптимальности функционала $l(x)$ следует, что он совпадает с рассмотренным средним арифметическим, и первая часть теоремы доказана.

Докажем равенство (2.6). Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}$ гильбертово, а скалярное произведение в нем задается формулой

$$[\varphi, \psi]_m = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx.$$

По теореме Рисса любой ограниченный функционал l в гильбертовом пространстве представим в виде скалярного произведения:

$$(l, \varphi) = [\varphi, \psi_l]_m \quad \forall \varphi \in \widetilde{L}_2^{(m)}. \tag{2.8}$$

Здесь $\psi_l(x)$ — функция из $\widetilde{L}_2^{(m)}$, определенная однозначно по функционалу $l(x)$ и называемая *экстремальной* для него. Интегрируя по частям выражение в правой части формулы (2.8) и пользуясь периодичностью функций φ и ψ_l, получим равенство

$$(l, \varphi) = (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \Delta^m \psi_l(x) \varphi(x) \, dx.$$

Таким образом, функция $\psi_l(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m \psi_l(x) = (-1)^m l(x). \tag{2.9}$$

Если $l(x)$ имеет минимальную норму в $\widetilde{L}_2^{(m)}$, то решение (2.9) несложно построить в виде ряда Фурье. Обозначив его через $\widetilde{\psi}(x)$, будем иметь

$$\widetilde{\psi}(x) = -\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|H^{-1*}\beta|^{2m}} e^{i2\pi\beta h^{-1} H^{-1} x}. \tag{2.10}$$

Из формулы (2.8) следует, что

$$\left\| l \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\|^2 = (l, \widetilde{\psi}). \tag{2.11}$$

Подставляя сюда разложение (2.10), получаем формулу (2.6).

Теорема I.1 доказана.

Предположим, что область Ω лежит строго внутри Ω_0 — фундаментального параллелепипеда, соответствующего матрице H. Это соглашение будем считать справедливым и в дальнейшем.

Теорема I.2. *Норма любого функционала погрешности вида* (2.5) *в пространстве* $L_2^{(m)*}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| \geq B_{n,m} |\Omega|^{1/2} h^m + O(h^{m+1}), \tag{2.12}$$

где постоянная $B_{n,m}$ *та же, что и в равенстве* (2.6).

Приведем здесь лишь схему доказательства, отложив более подробные выкладки до гл. V. Функция $\widetilde{\psi}(x)$, задаваемая формулой (2.10), зависит от шага h решетки:

$$\widetilde{\psi}(x) = h^{2m} u(x/h),$$

где через $u(x)$ обозначена функция (2.10), взятая при $h = 1$. Положим $v(x) = u(x) - u(0)$, тогда функция $h^{2m} v(x/h)$ будет экстремальной для оптимального функционала погрешности в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Ее значения во всех узловых точках равны нулю. Определим теперь функцию

$$\varphi(x, h \mid \Omega) = h^{2m} v\left(\frac{x}{h}\right) \eta(x, h \mid \Omega).$$

Здесь $\eta(x, h \mid \Omega)$ — так называемый *срезающий множитель* для области Ω, обладающий свойствами:

а) $\eta(x, h \mid \Omega) = 1$ во всех точках x из Ω, отстоящих от границы Ω на расстояние, большее $2h$;

б) $\eta(x, h \mid \Omega) = 0$ во всех точках x вне Ω, а также в тех точках Ω, расстояние от которых до границы Ω меньше $h/4$;

в) для всех мультииндексов $\alpha : |\alpha| \leq m$ и достаточно малых h справедливы оценки

$$|D^\alpha \eta(x, h \mid \Omega)| \leq K_\alpha h^{-|\alpha|-n}.$$

В качестве срезающего множителя можно взять, например, интеграл вида

$$\int \chi_{\Omega_h}(y)\sigma(x, y \mid h)\, dy,$$

где Ω_h состоит из тех точек Ω, которые отстоят от границы Ω больше чем на h, а функция $\sigma(x, y \mid h)$ представляет собой стандартное ядро усреднения [179].

Подсчет показывает, что

$$\left\| h^{2m} v\left(\frac{x}{h}\right) - \varphi(x, h \mid \Omega) \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\| \leq K h^{m+1},$$

где K не зависит от h. Поэтому

$$\left\| \varphi(x, h \mid \Omega) \mid L_2^{(m)} \right\| \leq B_{n,m} h^m \sqrt{|\Omega|} + O(h^{m+1}).$$

Вычислим значение на срезанной функции $\varphi(x, h \mid \Omega)$ исходного функционала погрешности $l(x)$. Заметим, что значения $\varphi(x, h \mid \Omega)$ в узлах решетки обращаются в нуль. Поэтому значение $l(x)$ на $\varphi(x, h \mid \Omega)$ не зависит от выбора коэффициентов и, значит, совпадает с интегралом по Ω от рассматриваемой функции. Пользуясь этим, можно установить, что

$$(l, \varphi(x, h \mid \Omega)) = B_{n,m}^2 h^{2m} |\Omega| (1 + O(h)).$$

Согласно определению норма функционала $l(x)$ не меньше отношения

$$\frac{(l, \varphi(x, h \mid \Omega))}{\left\| \varphi(x, h \mid \Omega) \mid L_2^{(m)} \right\|} = B_{n,m} h^m |\Omega|^{1/2} + O(h^{m+1}).$$

Теорема I.2 доказана.

Фиксируем два положительных числа K_0, L и рассмотрим семейство функционалов $l_\gamma(x)$, зависящих от целочисленного вектора γ и удовлетворяющих условиям

$$\|l_\gamma(x) \mid C^*\| \leq K_0, \quad \operatorname{supp} l_\gamma(x) \subset \{x : |x| \leq L\}. \tag{2.13}$$

Функционалы вида $l_\gamma\left(x/h - H\gamma\right)$ будем называть*элементарными*. Будем говорить, что элементарный функционал *имеет порядок* s, если он точен на всех многочленах степени ниже s:

$$\left(l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), x^\alpha\right) = 0, \quad |\alpha| < s.$$

Обозначим через B_L множество значений γ, для которых расстояние от точки $hH\gamma$ до множества Ω не превосходит Lh. Пусть функционал погрешности некоторой кубатурной формулы представлен в виде

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = \sum_{\gamma \in B_L^{(1)}} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(2)}} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{2.14}$$

Здесь $B_L^{(1)} \cup B_L^{(2)} = B_L$, а все элементарные функционалы $l_\gamma\left(x/h - H\gamma\right)$ имеют порядок $m+1$, кроме, быть может, тех, у которых γ принадлежит подмножеству $B_L^{(2)}$. При этом функционал, соответствующий $\gamma \in B_L^{(2)}$, имеет порядок m, а общее число таких l_γ при $h \to 0$ не превосходит величины $K_0 h^{1-n}$, где постоянная K_0 не зависит от h. В этом случае функционал (2.14) назовем *равномерно распределенным.*

Рассмотрим равномерно распределенный функционал, у которого множество $B_L^{(2)}$ состоит из точек, отстоящих от границы области Ω не более чем на Lh. Точки B_L, лежащие внутри Ω и удаленные от границы Ω больше чем на Lh, образуют множество $B_L^{(1)}$. Переобозначим $B_L^{(1)}$, $B_L^{(2)}$ через $B_L^{(i)}$, $B_L^{(l)}$ соответственно. Предположим, что все функционалы $l_\gamma(x)$ при $\gamma \in B_L^{(i)}$ совпадают друг с другом. Тогда исходный функционал запишется в виде

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l_0 \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{2.15}$$

Будем называть его *функционалом погрешности с регулярным пограничным слоем.*

Отметим важное свойство функционала погрешности с регулярным пограничным слоем. Все его коэффициенты $c[\gamma]$, соответствующие тем γ, для которых точка $hH\gamma$ отстоит от границы Ω на расстояние, большее $2Lh$, равны единице. Действительно, согласно условию (2.13) каждый такой коэффициент $c[\gamma]$ образуется при суммировании одного и того же числа элементарных функционалов $l_0\left(x/h - H\gamma\right)$. Поскольку $l_0(x)$ точен на тождественной постоянной, все рассматриваемые $c[\gamma]$ должны равняться единице.

Представление данного функционала погрешности $l(x)$ с регулярным пограничным слоем суммой (2.15) не единственно. Всегда возможно такое разложение (2.15), в котором $l_0(x)$ — произвольный наперед заданный функционал порядка $m+1$ или выше, удовлетворяющий условиям (2.13). Следует отметить, что постоянные K_0, L при этом зависят от порядка $m+1$ и неограниченно возрастают при его увеличении.

Укажем конструктивный способ построения функционалов с регулярным пограничным слоем. Разобьем данную область Ω на элементарные части Ω_γ, каждая из которых получается пересечением Ω с одной из ячеек решетки, соответствующей матрице hH. Характеристическую функцию области Ω можно разложить в сумму

$$\chi_\Omega(x) = \sum_\gamma \chi_{\Omega_\gamma}(x), \quad \chi_{\Omega_\gamma}(x) = \chi_\Omega(x)\chi_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Здесь $\chi_0(y)$ — характеристическая функция фундаментального параллелепипеда матрицы H. Составим кубатурные формулы для интегрирования по каждой из частей Ω_γ, а затем сложим их.

Остановимся на вопросе о том, как следует строить кубатурные формулы для интегрирования по Ω_γ. Сначала найдем функционал погрешности порядка $2m+2$ для фундаментального параллелепипеда Ω_0:

$$l_0(y) = \chi_0(y) - \sum_{|\gamma'|\le L} c[\gamma']\delta(y - H\gamma').$$

Это можно сделать при достаточно большом L. Точнее, L должно быть не меньше чем $(n+2m+2)!/n!(2m+2)!$. Далее, для всех γ, которым соответствует элементарный функционал $l_0\left(x/h - H\gamma\right)$ с носителем, содержащимся в Ω, положим

$$l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = l_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Будем считать, что множество таких γ составляет $B_L^{(i)}$. Для всех остальных непустых ячеек Ω_γ функционал погрешности возьмем в виде

$$l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = \chi_{\Omega_\gamma}(x) - \sum_{\substack{|\gamma'-\gamma|\le L \\ hH\gamma'\in\Omega}} c_\gamma[\gamma']\delta(x - hH(\gamma-\gamma')).$$

Коэффициенты $c_\gamma[\gamma']$ следует выбирать так, чтобы $l_\gamma(x)$ был порядка m.

Суммируя элементарные функционалы по всем $\gamma \in B_L^{(i)} \cup B_L^{(l)}$, получим, очевидно, функционал погрешности кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем.

Теорема I.3. *Норма любого равномерно распределенного функционала погрешности ограничена сверху величиной $K_1 h^m$:*

$$\left\| l(x) \mid L_2^{(m)*} \right\| \le K_1 h^m, \tag{2.16}$$

где K_1 — постоянная, зависящая от Ω, m, n, l, но не от h.

Теорема I.4. *Норма любого функционала погрешности с регулярным пограничным слоем удовлетворяет неравенству*

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| \le B_{n,m} h^m |\Omega|^{1/2} + K h^{m+1}. \tag{2.17}$$

Здесь $B_{n,m}$ — постоянная из соотношения (2.6), *а K не зависит от h.*

Сопоставляя теоремы I.2 и I.4, видим, что функционалы с регулярным пограничным слоем с заданной решеткой $hH\gamma$ при достаточно малом шаге h имеют норму, отличающуюся от своей нижней границы на малую величину более высокого порядка. Такие кубатурные формулы будем называть ***асимптотически оптимальными.***

Приведем схему доказательств теорем I.3 и I.4. Наши рассуждения основаны на подробном исследовании уравнения (2.9). Его решение записывается в виде свертки правой части с фундаментальным решением $G_{m,n}(x)$ полигармонического уравнения. В пространстве нечетной размерности $G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n}|x|^{2m-n}$, где

$$\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma(n/2 - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{n/2}} = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\Gamma(m)\Gamma(m - n/2 + 1) 2^{2m} \pi^{n/2-1}}.$$

Оба приведенных выражения для константы $\varkappa_{m,n}$ эквивалентны. Это вытекает из известного соотношения

$$\Gamma(n/2 - m)\Gamma(m - n/2 + 1) = (-1)^{(n-1)/2+m}\pi.$$

В пространстве четной размерности n имеются два разных выражения для $G_{m,n}(x)$. При $2m < n$

$$G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n}|x|^{2m-n}, \tag{2.18}$$

где

$$\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma(n/2 - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{n/2}},$$

а при $2m \geq n$

$$G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n} |x|^{2m-n} \ln |x| \tag{2.19}$$

с постоянной

$$\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{\Gamma(m)\Gamma(m - n/2 + 1) 2^{2m-1} \pi^{n/2}}.$$

В этих формулах, разумеется, $|x|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$. Каждая из форм записи константы $\varkappa_{m,n}$ в равенствах (2.18) и (2.19) применима либо только при $2m \geq n$, либо только при $2m < n$. При нечетном n или при $|\alpha| > 2m - n$ производная порядка α от функции $G_{m,n}(x)$ удовлетворяет оценке

$$|D^\alpha G_{m,n}(x)| \leq K |x|^{2m-n-|\alpha|},$$

где постоянная K не зависит от x. Если же n четно и $|\alpha| \leq 2m - n$, то справедливо следующее неравенство:

$$|D^\alpha G_{m,n}(x)| \leq K |x|^{2m-n-|\alpha|} |\ln |x||.$$

Дальнейшие оценки всевозможных решений уравнения (2.9) основываются на следующей лемме.

Лемма I.1. *Свертка функции $G_{m,n}(x)$ с элементарным функционалом погрешности $l(x)$, имеющим ограниченный носитель и порядок $s > 2m - n$, допускает оценку*

$$|G_{m,n} * l(x)| \leq K \frac{1}{(1 + |x|^2)^{(n-2m+s)/2}}. \tag{2.20}$$

Производная порядка l от рассматриваемой свертки при достаточно большом $|x|$ имеет порядок $|x|^{2m-n-l-s}$, если $l + s > 2m - n$ или n нечетно, и порядок $|x|^{2m-n-l-s} \ln |x|$ в противном случае.

Чтобы убедиться в справедливости леммы I.1, достаточно разложить $G_{m,n}(x-y)$ по формуле Тейлора по степеням y с остаточным членом и подставить это разложение в определение свертки:

$$G_{m,n}(x) * l(x) = \int G_{m,n}(x-y)l(y)\,dy.$$

Дальнейшие оценки будут приведены в гл. V.

Решение $\psi_l(x)$ уравнения (2.9) запишем в виде

$$\psi_l(x) = (-1)^m G_{m,n}(x) * l(x) = (-1)^m \int G_{m,n}(x-y)l(y)\,dy.$$

Подставляя сюда разложение (2.14) или (2.15), получим, что

$$\psi_l(x) = \sum_{\gamma \in B_L} \psi_\gamma(x - hH\gamma), \tag{2.21}$$

где $\psi_\gamma(x) = (-1)^m G_{m,n}(x) * l_\gamma(x/h)$. Каждое слагаемое $\psi_\gamma(x)$ ряда (2.21) промажорируем с помощью леммы I.1. Затем при помощи интегрального признака сходимости рядов оценим норму всей суммы $\psi_l(x)$. Вспоминая, что $\psi_l(x)$ — это экстремальная функция для $l(x)$ и поэтому ее норма в $L_2^{(m)}$ совпадает с нормой $l(x)$ в $L_2^{(m)*}$, получим искомую оценку (2.16) теоремы I.3.

Теорема I.4 доказывается несколько сложнее. Пусть функционал погрешности $l(x)$ с регулярным пограничным слоем в области Ω разложен в сумму (2.15). Сравним его норму в $L_2^{(m)*}$ со значением простейшего функционала

$$l_\infty(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} h^n \delta(x - hH\gamma), \tag{2.22}$$

оптимального в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}$, на срезанной экстремальной функции $\chi_\Omega(x)(\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\psi}(0))$, где $\widetilde{\psi}(x)$ определена равенством (2.10). Экстремальная функция $\psi_l(x)$ функционала $l(x)$ является решением уравнения (2.9) и

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = (l(x), \psi_l(x)).$$

Величину в правой части этого равенства представим как сумму:

$$(l, \psi_l) = \int\limits_{\Omega} l_\infty(x)\tilde{v}(x)\,dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} (l(x) - l_\infty(x))\tilde{v}(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} l(x)[\tilde{v}(x) - \psi_l(x)]\,dx, \quad (2.23)$$

где через $\tilde{v}(x)$ обозначена разность $\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\psi}(0)$. Можно показать, что первое слагаемое в (2.23) имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} l_\infty(x)\tilde{v}(x)\,dx = B^2_{n,m} h^{2m}|\Omega| + O(h^{2m+1}).$$

Второе слагаемое в (2.23) мало́ в силу того, что носитель разности $l_\infty(x) - l(x)$ пересекается с областью Ω по тонкому слою. Точнее, имеет место

Лемма I.2. *Разность функционалов $l_\infty(x)$ и $l(x)$ представляет собой функционал с регулярным пограничным слоем для области $\Omega_0 \setminus \Omega$.*

Убедимся в справедливости леммы I.2. На любой функции $\varphi(x)$ из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ значение простейшего функционала можно представить в виде суммы:

$$(l_\infty, \varphi) = \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} \left(l_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \varphi(x)\right),$$

где $l_0(x)$ — функционал погрешности из разложения (2.15). Поэтому в разности $l^*(x) = l_\infty(x) - l(x)$ все слагаемые вида $l_0\,(x/h - H\gamma)$ при $\gamma \in B_L^{(i)}$ взаимно сократятся, а элементарные функционалы $l_0\,(x/h - H\gamma)$, соответствующие тем γ, для которых точки $hH\gamma$ лежат в Ω_0 на расстоянии, большем Lh от границы Ω, останутся неизменными. Для всех $\gamma \in B_L^{(l)}$ элементарные функционалы в разложении $l^*(x)$ имеют вид

$$l_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) - l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Лемма I.2 доказана.

Пользуясь леммой I.2, несложно оценить второе слагаемое в равенстве (2.23):

$$\left| \int\limits_{\Omega} (l_\infty(x) - l(x))\, \tilde{v}(x)\, dx \right| \le K h^{2m+1}.$$

Третье слагаемое в (2.23) также является величиной вида $O(h^{2m+1})$. Детальные оценки мы приведем в гл. V. Собирая вместе оценки всех трех слагаемых в правой части равенства (2.23), получим неравенство (2.17), а с ним и теорему I.4.

Мы показали, каким образом можно построить семейство функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем. Оказалось, что при фиксированной матрице H и стремящемся к нулю шаге h решетки они асимптотически оптимальны. При этом постоянная $B_{n,m}$, присутствующая в асимптотическом разложении нормы функционала погрешности с регулярным пограничным слоем, изменяется в зависимости от матрицы H. Из определения величины $B_{n,m}$ следует, что матрицу H решетки имеет смысл выбирать так, чтобы при заданном m соответствующая ζ-функция Эпштейна принимала свое минимальное значение.

Задача отыскания такой матрицы H — сложная задача теории чисел. При больших m ζ-функция Эпштейна совпадает асимптотически с отношением $K/r_{\min}^{2m}$, где K — постоянная, не зависящая от H, а $r_{\min}$ — минимальное расстояние от точек вида $H^{-1*}\gamma$, $\gamma \ne 0$, до начала координат. Это отношение минимизируется при таком выборе матрицы H^{-1*}, при котором $r_{\min}$ достигает максимально возможного значения. Узловые точки соответствующей решетки служат центрами шаров из так называемой наиплотнейшей упаковки в n-мерном пространстве [136]. Следовательно, наилучшая матрица H должна быть обратной к матрице, которая является транспонированной к матрице решетки, соответствующей наиплотнейшей упаковке шаров. Алгоритм отыскания таких решеток предложен Г. Ф. Вороным для пространств любой размерности. Однако его трудно реализовать. Фактически решетки найдены для размерностей $n \le 8$. Обзор соответствующих результатов читатель может найти в [32].

Отметим в заключение, что для нахождения нормы функционала погрешности по формуле (2.6) при заданных n, m, H, h необходимо уметь вычислять значения ζ-функции Эпштейна. В этой связи

сошлемся на работы [34, 59], в которых предложены соответствующие алгоритмы.

§ 3. Порядок точности кубатурных формул на бесконечно дифференцируемых функциях

До сих пор мы занимались пространствами функций, у которых не предполагалось существования производных любого порядка. Сейчас же рассмотрим кубатурные формулы на классах бесконечно дифференцируемых функций, которые для простоты будем считать периодическими.

Будем говорить, что *функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* $\widetilde{C}(\beta \mid A)$, если, во-первых, она периодична с матрицей периодов H, т. е.

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

и, во-вторых, последовательность ее производных имеет определенный рост при увеличении порядка дифференцирования:

$$\sup_{x \in \Omega_0} |D^\alpha \varphi(x)| \le K \alpha! A^{|\alpha|} |\alpha|^{(\beta+1/2)|\alpha|} \alpha^{-\alpha/2} |\alpha|^\mu, \quad |\alpha| \ge 0. \tag{3.1}$$

Константа K может зависеть от φ, но не от α. Класс $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ является некоторой детализацией классов Жевре [182, 192].

Линейная подстановка независимых переменных, в частности изменение масштаба, переводит класс $\widetilde{C}(\beta \mid A)$, вообще говоря, в некоторый новый класс $\widetilde{C}(\beta \mid A_1)$. При этом число β, которое будем называть *порядком* функции, остается неизменным, а число A, которое будем называть *типом* функции, может изменяться. Однако класс $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ задан так, что последовательность оценок (3.1) не меняется при произвольных ортогональных преобразованиях независимой переменной x. Иными словами, ортогональные преобразования переводят этот класс в себя, т. е. имеет место

Теорема I.5. *Пусть T — квадратная ортогональная матрица. Если функция $\varphi(x)$ принадлежит $\widetilde{C}(\beta \mid A)$, то и функция $\psi(y) = \varphi(Ty)$ принадлежит этому классу.*

Конечно, функция $\psi(y)$ будет периодична, но уже не с матрицей периодов H, а с другой, равной произведению $T^* H$.

Доказательство теоремы основано на оценке при любом натуральном m формы

$$\Phi_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Лемма I.3. *Если производные функции $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам* (3.1), *то при любых комплексных x форма $\Phi_m(x)$ допускает оценку*

$$|\Phi_m(x)| \le K A^m m^{\beta m} m^{\lambda+n} |x|^m. \tag{3.2}$$

Лемма I.4. *Если $\varphi(x)$ периодична и при всех x_0 из фундаментального параллелепипеда Ω_0 для форм $\Phi_m(x-x_0)$ имеет место серия оценок* (3.2), *то функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $\widetilde{C}(\beta \mid A)$.*

Ортогональная замена координат преобразует форму $\Phi_m(x)$ в тейлоровском разложении функции $\varphi(x)$ в такую же форму от новых переменных. Учитывая это и пользуясь последовательно леммами I.3 и I.4, получаем теорему I.5.

Функции классов $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ при различных β и A ведут себя поразному. Положим $\varkappa$ равным $\beta + 1$ и рассмотрим пять случаев.

1. $\varkappa < 0$. Класс $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ состоит из тождественно постоянных функций.

2. $\varkappa = 0$. Элементами класса $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ служат тригонометрические полиномы вида

$$\sum_{|H^{-1*}\beta| \le KA} a[\beta] e^{i2\pi\beta H^{-1} x}.$$

Степень такого полинома конечна и зависит от A: с увеличением A она растет.

3. $0 < \varkappa < 1$. К классу $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ относятся целые аналитические функции, удовлетворяющие условию периодичности и имеющие порядок роста ρ и тип σ, где $\rho = -1/\beta$, $\sigma = A^\rho/(\rho e)$.

4. $\varkappa = 1$. Класс $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ состоит из аналитических функций, радиусы сходимости степенных рядов которых в любой точке Ω_0 ограничены снизу отношением $1/A$.

5. $\varkappa > 1$. К классу $\widetilde{C}(\beta \mid A)$ относятся периодические функции, вообще говоря, не аналитические, в том числе всевозможные квазианалитические функции.

Оценим значение функционала погрешности $l(x)$ данной кубатурной формулы на функции $\varphi(x) \in \widetilde{C}(\beta \mid A)$:

$$|(l, \varphi)| \leq \left\| l \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| \left\| \varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)} \right\|. \tag{3.3}$$

Эта оценка имеет место при любом m, и мы вправе выбрать наиболее благоприятное его значение. Таковым будет номер $m_0 = m_0(h)$, при котором правая часть (3.3) достигает минимального значения, если, конечно, этот минимум существует.

Рассмотрим пример, когда выражение в правой части (3.3) допускает мажоранту в виде явной функции аргументов m, h. Имеет место

Теорема I.6. *Норма в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ произвольной функции $\varphi(x) \in \widetilde{C}(\beta \mid A)$ допускает оценку*

$$\left\| \varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)} \right\| \leq K A^m m^{(\beta+1)m} m^{\lambda}, \tag{3.4}$$

где постоянные K, λ не зависят от m.

Неравенство (3.4) легко получить из определения нормы в $\widetilde{L}_2^{(m)}$, пользуясь серией оценок (3.1) и формулой Стирлинга.

Возьмем в (3.3) функционал $l(x)$ равным $l_\infty(x)$ и воспользуемся известным представлением нормы функционала $l_\infty(x)$ в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)*}$. Тогда с учетом (3.4) получим, что

$$|(l_\infty, \varphi)| \leq K B_{n,m}(\Omega_0) h^m A^m m^{\varkappa m + \lambda}. \tag{3.5}$$

Функция $\zeta(H^{-1*} \mid 2m)$, очевидно, убывает при возрастании m, стремясь в пределе к нулю. При больших m ее можно асимптотически точно представить равенством

$$\zeta(H^{-1*} \mid 2m) = \frac{K}{r_{\min}^{2m}} \left(1 + O(1/m)\right),$$

где $r_{\min}$ — минимальное расстояние между узлами решетки $H^{-1*}\gamma$, а K — число точек, находящихся на этом минимальном расстоянии от начала координат. Таким образом, при больших m из (3.5) следует, что

$$|(l_\infty, \varphi)| \leq K \left(\frac{Ah}{2\pi r_{\min}} \right)^m m^{\varkappa m + \lambda} \equiv \psi(m, h).$$

Минимум функции $\psi(m,h)$ при фиксированном h и меняющемся m легко найти. В результате получим соотношение

$$|(l_\infty,\varphi)| \le Ke^{-s(1/h)^{1/\varkappa}}(1/h)^\mu ,$$

где

$$s = \frac{\varkappa}{e}\left(\frac{2\pi e r_{\min}}{A}\right)^{1/\varkappa}$$

Номер m_0, при котором функция $\psi(m,h)$ минимальна при заданном h, совпадает с целым числом, ближайшим к величине

$$\frac{1}{e}\left(\frac{2\pi e r_{\min}}{hA}\right)^{1/\varkappa}$$

Таким образом, хотя для периодических функций кубатурная формула с равными коэффициентами имеет бесконечный порядок точности, эта точность при любом конечном $h > 0$ бесполезна, за исключением функций из $\widetilde{C}(\varkappa \mid A)$ при $\varkappa \le 0$, которые, начиная с некоторого h, интегрируются точно. Для остальных классов $\widetilde{C}(\varkappa \mid A)$ стремление к нулю погрешности интегрирования будет более быстрым чем h^m, каково бы ни было m.

Опыты с численным интегрированием функций одной переменной при помощи формул различного порядка точности приводят к результатам, которые очень напоминают только что описанные. Именно, при заданном h увеличение порядка точности формул ведет к увеличению точности результатов лишь до некоторого m_0. При дальнейшем увеличении порядка никаких ощутимых изменений в точности не происходит. Чем меньше h, тем больший порядок точности оказывается выгодным.

Мы оценили скорость сходимости кубатурных формул на периодических функциях благодаря тому, что было известно выражение нормы функционалов погрешности в виде явной функции от порядка точности m и шага h. В случае непериодических функций мы, к сожалению, не располагаем аналогичной информацией. Однако в гл. VII будет получено нужное представление для нормы функционала погрешности квадратурных формул Грегори.

§ 4. Функционалы погрешности на пространстве $W_2^{(m)}$

В практических вопросах важно, чтобы вычисление интеграла требовало как можно меньше работы при заданной точности вычислений. Поэтому задачу удобно поставить следующим образом: на первом шаге, задавшись определенным числом действий, получить максимально возможную точность; на втором шаге, выбрав, как указано, наилучший способ действий при данном объеме затрат, определить необходимые затраты.

Чтобы построить искомое приближение к функции φ или к интегралу $I(\varphi)$, нужно произвести некоторую работу. Будем считать, что ее объем пропорционален числу точек, в которых нужно знать значения функции φ. Таким образом, поставленная выше задача будет состоять в исследовании таких методов приближения, которые дают наивысшую точность при заданном числе узлов N. Эти формулы будем считать оптимальными.

В кубатурной формуле (1.3) при заданном N мы свободны в выборе узлов $x^{(k)}$ и коэффициентов c_k. Выбор коэффициентов при данных узлах представляет собой линейную задачу, и мы исследуем ее до конца. Наоборот, выбор узлов является задачей значительно более трудной. Мы рассмотрим ее не во всей полноте, а ограничимся случаем, когда система узлов K есть параллелепипедальная решетка и меняются только параметры этой решетки.

В функциональной постановке качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности в пространстве $\mathbf{B}^*$. Выбор исходного пространства $\mathbf{B}$, как это по большей части бывает в теории вычислений, в какой-то степени произволен и зависит в практических случаях от интуиции и вкуса исследователя. К сожалению, этот выбор частично диктуется желанием получить задачу, поддающуюся исследованию тем методом, который задуман автором, ибо самая естественная постановка может оказаться слишком трудной. Мы приведем здесь лишь два условия, которым, на наш взгляд, должно удовлетворять пространство $\mathbf{B}$ в общем случае.

1. Значение функционала погрешности

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}) \tag{4.1}$$

определено на любой функции $\varphi(x)$ из $\mathbf{B}$ лишь в случае, когда φ непрерывна. Поэтому естественно потребовать, чтобы $\mathbf{B}$ было вложено в пространство $C(\Omega)$.

2. Вложения $\mathbf{B}$ в $C(\Omega)$ недостаточно, если только мы хотим иметь возможность управлять качеством кубатурной формулы, увеличивая число ее узлов N. В самом деле, если $\mathbf{B}$ совпадает с $C(\Omega)$, то норма функционала (4.1) дается выражением

$$\|l \mid C^*\| = |\Omega| + \sum_{k=1}^{N} |c_k|.$$

Эта величина ограничена снизу положительным числом, т. е. не стремится к нулю при увеличении N. Чтобы избежать подобных неприятностей, потребуем вполне непрерывности вложения $\mathbf{B}$ в $C(\Omega)$.

Лемма I.5. *Пусть оператор вложения* $\mathbf{B}$ *в* $C(\Omega)$ *вполне непрерывен. Тогда найдется последовательность таких функционалов погрешности вида* (4.1), *нормы которых при неограниченном возрастании* N *могут быть сделаны сколь угодно малыми.*

Доказательство. Согласно условию замкнутый единичный шар в $\mathbf{B}$ переходит в компактное подмножество $C(\Omega)$. Как известно, в этом случае рассматриваемый шар состоит из равностепенно непрерывных функций. Иными словами, для любого положительного ε найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любой функции φ из $\mathbf{B}$ с нормой, не превосходящей единицы, будет выполнено неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \varepsilon, \quad \text{если } |x - y| < \delta(\varepsilon). \tag{4.2}$$

По этому $\delta(\varepsilon)$ найдем в Ω точки $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}$ такие, что объединение шаров $\{y : |y - x^{(k)}| < \delta(\varepsilon)\}$ по всем k от 1 до N покрывает всю область Ω. Эти точки будем считать узлами искомого функционала погрешности.

Далее, шары с центрами в $x^{(j)}$ радиуса $\delta(\varepsilon)$ очевидным образом индуцируют разбиение Ω на элементарные ячейки Ω_j. Коэффициент c_j возьмем равным объему Ω_j. Тогда для всех функций φ из единичного шара B в силу (4.2) имеем

$$\left| \int_{\Omega} \varphi \, dx - \sum_{k=1}^{N} |\Omega_k| |\varphi(x^{(k)})| \right| \le \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_k} |\varphi(y) - \varphi(x^{(k)})| \, dx \le \varepsilon |\Omega|.$$

Значит, $|(l,\varphi)| \le \varepsilon|\Omega|$ равномерно по всем φ из единичного шара, т. е. $\|l \mid \mathbf{B}^*\| \le \varepsilon|\Omega|$.

Лемма I.5 доказана.

Для нахождения в явном виде нормы функционала l_N в пространстве $\mathbf{B}^*$ будем использовать понятие его экстремальной функции. Функцию u из $\mathbf{B}$ назовем *экстремальной* для данного функционала погрешности l_N, если выполняется равенство

$$(l_N, u) = \|l_N \mid \mathbf{B}^*\| \, \|u \mid \mathbf{B}\|.$$

Выбрав экстремальную функцию u с нормой, равной единице, для $\|l_N \mid \mathbf{B}^*\|$ получим следующее выражение:

$$\|l_N \mid \mathbf{B}^*\| = (l_N, u).$$

Существование экстремальной функции надо, вообще говоря, доказывать. Особенно удобными при этом оказываются гильбертовы пространства. В них экстремальная функция выражается через заданный функционал с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала.

Помимо пространств $L_2^{(m)}$, $\widetilde{L}_2^{(m)}$ и $L_2^{(m)}(\Omega)$, введенных в § 2, нас будут интересовать также пространства $W_2^{(m)}$, $\widetilde{W}_2^{(m)}$ и $W_2^{(m)}(\Omega)$. Напомним определения последних.

Пространство $\widetilde{W}_2^{(m)}$ — это прямая сумма $\widetilde{L}_2^{(m)}$ и $\mathbb{R}^1$, так как на множестве периодических функций единственный элемент с нулевой нормой в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ — это постоянная. Норму в $\widetilde{W}_2^{(m)}$ зададим равенством

$$\|\varphi \mid \widetilde{W}_2^{(m)}\| = \left\{|(\mu,\varphi)|^2 + \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2\right\}^{1/2},$$

где μ — произвольный линейный функционал в $\widetilde{W}_2{}^{(m)}$, не равный нулю на тождественной единице. Можно, например, положить

$$(\mu,\varphi) = \frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\,dx.$$

В этом случае норму элемента $\varphi \in \widetilde{W}_2{}^{(m)}$ легко выразить через коэффициенты Фурье φ. Предположим, что

$$\varphi(x) = \sum_{\beta} c_\varphi[\beta] e^{i2\pi\beta H^{-1}x}. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\|\varphi \mid \widetilde{W}_2^{(m)}\|^2 = \sum_\beta |c_\varphi[\beta]|^2(1 + |2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}). \tag{4.4}$$

Пространство $W_2^{(m)}(\Omega)$ есть прямая сумма $L_2^{(m)}(\Omega)$ и пространства $\mathbf{P}_{m-1}$ всех многочленов степени ниже m. В случае, когда Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$, вместо $W_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ пишем просто $W_2^{(m)}$. Пусть имеется оператор Π, проектирующий $W_2^{(m)}(\Omega)$ на подпространство $\mathbf{P}_{m-1}$. Тогда норму произвольной функции $\varphi \in W_2^{(m)}(\Omega)$ зададим выражением

$$\|\varphi \mid W_2^{(m)}(\Omega)\| = \{\|\Pi\varphi \mid \mathbf{P}_{m-1}\|^2 + \|\varphi \mid L_2^{(m)}(\Omega)\|^2\}^{1/2}. \tag{4.5}$$

Естественными проекторами пространства $W_2^{(m)}(\Omega)$ на $\mathbf{P}_m$ являются интерполяционные операторы. Один из них мы построили в § 1, сопоставив любой непрерывной функции $\varphi(x)$ многочлен $P(x)$ степени m, принимающий в узлах $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}$ заданные значения $\vec{\varphi} = (\varphi(x^{(1)}), \ldots, \varphi(x^{(N)}))$. Напомним, что

$$P(x) = \vec{\varphi} S^{-1} x^\alpha. \tag{4.6}$$

Этот многочлен определен и дает решение интерполяционной задачи, если размерность M пространства $\mathbf{P}_m$ равна числу узлов N, а S — вандермондова матрица (1.11) — неособенная.

Если число точек N в системе (1.2) не меньше M то, вообще говоря, по системе значений функции φ в узлах (1.2) можно построить бесконечное множество операторов, каким-либо способом отображающих $W_2^{(m)}(\Omega)$ в пространство $\mathbf{P}_m$ многочленов m-й степени. Все эти операторы имеют вид

$$P(x) = \vec{\varphi} Y x^\alpha, \tag{4.7}$$

где Y — матрица размера $N \times M$. Каждый такой оператор называется *интерполяционным оператором*, а равенство (4.7) — *интерполяционной формулой*.

Пусть требуется найти такой интерполяционный оператор, который служит тождественным оператором в пространстве $\mathbf{P}_m$ всех

многочленов степени m. Ясно, что он будет восстанавливать любой многочлен ax^α степени m по заданным значениям в узлах системы (1.2). Это условие можно записать в виде

$$aSYx^\alpha = ax^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

или эквивалентным образом:

$$aSY = a.$$

В силу произвольности a это возможно лишь в случае, когда матрица Y служит правой обратной к S, что, в свою очередь, возможно лишь при $N \leq M$. Если $N < M$, то матрица Y, вообще говоря, определена неоднозначно. Формула (4.7) при этом записывается в виде

$$P(x) = \vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} x^\alpha = \Pi\varphi. \tag{4.8}$$

При $M = N$ многочлен (4.8) совпадает с заданным формулой (4.6).

Приведем пример системы точек, для которой вандермондова матрица S допускает правую обратную и тем самым формула (4.8) задает проектор $W_2^{(m)}(\Omega)$ в $\mathbf{P}_m$. Нам понадобятся некоторые элементарные сведения из теории интерполирования, которые мы и приводим ниже.

Для одной переменной t при целом $k \geq 0$ *ньютоновой степенью* $[k]$ называют функцию $t^{[k]}$, заданную равенством

$$t^{[0]} = 1; \quad t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1), \quad k \geq 1.$$

Для n переменных ньютонова степень y^α определяется так:

$$y^{[\alpha]} = y_1^{[\alpha_1]} y_2^{[\alpha_2]} \dots y_n^{[\alpha_n]}.$$

Обозначив через Δ конечную разность с шагом 1 для функции одной переменной, а через Δ^k — взятие этой разности k раз, т. е. обозначив

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t), \quad \Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f),$$

для n переменных положим

$$\Delta^\alpha f(x) = \Delta^{\alpha_1} \Delta^{\alpha_2} \dots \Delta^{\alpha_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Имеет место

Лемма I.6. Любой многочлен $P(x)$ единственным образом раскладывается по ньютоновым степеням:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le m} p_\alpha (x - x^{(0)})^{[\alpha]}. \tag{4.9}$$

При этом коэффициенты p_α определяются формулами

$$p_\alpha = \frac{\Delta^\alpha P(x_0)}{\alpha!}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Для функции одной переменной имеем

$$t^{[k]} = t^k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j t^j.$$

Значит, матрица перехода от системы $\{t^k\}_{k=0}^{\alpha}$ к системе $\{t^{[k]}\}_{k=0}^{\alpha}$ треугольная с единицами по главной диагонали и потому неособенная. Следовательно, $t^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} l_k t^{[k]}$. Для n переменных получаем равенства

$$y^\alpha = \prod_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} b_{k_j,j} y_j^{[k_j]} = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} l_\beta y^{[\beta]},$$

из которых сразу следует (4.9).

Единственность установим вместе с формулой (4.10) для коэффициентов. Применим к обеим частям (4.9) конечную разность Δ^α, взятую в точке $x^{(0)}$, и заметим, что $\Delta^\alpha y^{[\beta]}|_{y=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Лемма I.6 доказана.

Систему точек вида

$$x^{(k)} = x^{(0)} + y^{(k)}, \tag{4.11}$$

где координаты точки $y^{(k)}$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \le y_j^{(k)} \le m, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j^{(k)} \le m,$$

будем называть *ньютоновой*.

Покажем, что вандермондова матрица S, соответствующая ньютоновой системе, является квадратной неособенной матрицей.

Прежде всего, очевидно, что число точек $x^{(k)}$ в системе (4.11) равно M, ибо их столько же, сколько целочисленных векторов α, подчиненных условию $|\alpha| \leq m$. Далее, каждый многочлен x^α определяется своими значениями в точках (4.11) однозначно. В самом деле, вместо значений функции в узлах ньютоновой системы мы можем ввести связанные с ними линейными преобразованиями конечные разности и разложить любой многочлен $P(x)$ по ньютоновым степеням:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x - x^{(0)})^{[\alpha]}}{\alpha!} \Delta^{[\alpha]} P(x) \Big|_{x=x^{(0)}}.$$

Это разложение, очевидно, определяется единственным образом. Значит, матрица S действительно квадратная неособенная.

Если система узлов K содержит в себе ньютонову подсистему, то всегда будет существовать правая обратная к S матрица $S_{\text{пр}}^{-1}$. Аналогично можно рассмотреть систему вида

$$x^{(0)} + hy^{(k)} \tag{4.12}$$

и любую другую, получаемую из (4.12) произвольным аффинным преобразованием. В частности, что важно для нас, матрица S будет иметь правую обратную, если система узлов K состоит из всех точек некоторой решетки $x^{(0)} + hH\beta$, лежащих внутри шара с центром в $x^{(0)}$ радиуса $L > mh$.

Вернемся к пространству $W_2^{(m)}(\Omega)$ и зададим его проектор на $\mathbf{P}_{m-1}$ равенством (4.8). Тогда произвольный функционал $l(x) \in W_2^{(m)*}(\Omega)$ можно записать в виде

$$(l, \varphi) = (l, \Pi\varphi) + (l, \varphi - \Pi\varphi) = (l_1, \varphi) + (l_2, \varphi),$$

где l_1 — суперпозиция операторов Π и l, а l_2 — операторов $I - \Pi$ и l. Нетрудно убедиться, что l_2 обращается в нуль на всех многочленах из $\mathbf{P}_{m-1}$. Поэтому l_2 принадлежит $L_2^{(m)*}(\Omega)$ и норму оператора l в $W_2^{(m)*}(\Omega)$ можно получить по формуле

$$\|l \mid W_2^{(m)*}(\Omega)\| = \left\{ \|l_1 \mid \mathbf{P}_{m-1}^*\|^2 + \|l_2 \mid L_2^{(m)*}(\Omega)\|^2 \right\}^{1/2}. \tag{4.13}$$

Это равенство следует из более общего утверждения — леммы I.7.

Лемма I.7. Пусть $\mathbf{X}$ *— банахово пространство, являющееся прямой суммой своих подпространств* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_\sigma$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}_\sigma.$$

Пусть в пространствах $\mathbf{X}_j$, $1 \le j \le \sigma$, *заданы нормы* $\|\cdot \mid \mathbf{X}_j\|$, *причем*

$$\|\varphi \mid \mathbf{X}\| = g(\|\varphi_1 \mid \mathbf{X}_1\|, \|\varphi_2 \mid \mathbf{X}_2\|, \ldots, \|\varphi_\sigma \mid \mathbf{X}_\sigma\|),$$

где элементы $\varphi_j \in \mathbf{X}_j$, $j = 1, \ldots, \sigma$, *получаются из единственного разложения* φ *в сумму* $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\sigma$, *а* g *— норма в* σ*-мерном евклидовом пространстве. Тогда пространство* $\mathbf{X}^*$ *является прямой суммой пространств* $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \ldots, \mathbf{X}_\sigma^*$:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_1^* \oplus \mathbf{X}_2^* \oplus \cdots \oplus \mathbf{X}_\sigma^*, \tag{4.14}$$

причем

$$\|l \mid \mathbf{X}^*\| = g^*\left(\|l_1 \mid \mathbf{X}_1^*\|, \|l_2 \mid \mathbf{X}_2^*\|, \ldots, \|l_\sigma \mid \mathbf{X}_\sigma^*\|\right), \tag{4.15}$$

где l_j *— сужение* l *на* $\mathbf{X}_j$, *а* g^* *— норма, сопряженная к* g, *т. е.*

$$g^*(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma) = \sup_{g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma)=1} (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_\sigma\beta_\sigma).$$

Доказательство. Соотношение (4.14) очевидно. Докажем (4.15). Предположим для простоты, что функционал l обладает экстремальным элементом φ, $\|\varphi \mid \mathbf{X}\| = 1$ (общий случай получается с помощью предельного перехода, и мы предоставляем читателю возможность проделать соответствующие выкладки).

Рассмотрим разложение

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\sigma, \quad \varphi_j \in \mathbf{X}_j.$$

По определению нормы функционала получим

$$\|l \mid \mathbf{X}^*\| = \sup_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma} \frac{(l, \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_\sigma\varphi_\sigma)}{\|\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_\sigma\varphi_\sigma \mid \mathbf{X}\|}$$
$$= \sup_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma} \frac{\alpha_1(l_1, \varphi_1) + \cdots + \alpha_\sigma(l_\sigma, \varphi_\sigma)}{g(\alpha_1\|\varphi_1\|, \ldots, \alpha_\sigma\|\delta_\sigma\|)}.$$

Легко показать, что каждый элемент φ_j является экстремальным для функционала l_j, т. е. $(l_j, \varphi_j) = \|l_j\| \, \|\varphi_j\|$. Но тогда

$$\|l \mid \mathbf{X}^*\| = \sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\sigma} \frac{\alpha_1\|l_1\| \, \|\varphi_1\| + \cdots + \alpha_\sigma\|l_\sigma\| \, \|\varphi_\sigma\|}{g(\alpha_1\|\varphi_1\|, \ldots, \alpha_\sigma\|\varphi_\sigma\|)}$$
$$= \sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\sigma} \frac{\alpha_1\|l_1\| + \cdots + \alpha_\sigma\|l_0\|}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma)} = g^*(\|l_1\|, \ldots, \|l_\sigma\|).$$

Лемма I.7 доказана.

Полагая в условии леммы I.7 $\sigma = 2$ и $g(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, получим соотношение (4.13).

Итак, пространство $W_2^{(m)*}(\Omega)$ так же, как раньше пространство $W_2^{(m)}(\Omega)$, разбивается в прямую сумму подпространств:

$$W_2^{(m)*}(\Omega) = \mathbf{P}_{m-1}^* \oplus L_2^{(m)*}(\Omega).$$

Таким образом, любой элемент $l \in W_2^{(m)*}(\Omega)$ представи́м в виде $l = l_1 + l_2$, где $l_1 \in \mathbf{P}_{m-1}^*$ и $l_2 \in L_2^{(m)*}(\Omega)$, причем имеет место соотношение (4.13). Воспользовавшись им, несколько упростим задачу о минимуме нормы функционала погрешности.

Будем считать, что число точек N достаточно велико, так что существует матрица $S_{\text{пр}}^{-1}$. Пользуясь тем, что проектор $\Pi\varphi$ выбран как интерполяционный оператор, построенный в узлах кубатурной формулы (1.3), получим равенство

$$l_1 = \sum_{k=1}^{N} a_k \delta(x - x^{(k)}).$$

В дальнейшем именно это и предполагается.

Минимизировать норму в $W_2^{(m)*}$ функционала погрешности $l(x)$ можно, минимизируя порознь норму каждого из соответствующих ему функционалов $l\Pi$ и $l(I - \Pi)$. Если число точек (1.2) достаточно велико, норму первого из этих функционалов легко обратить в нуль, взяв в качестве коэффициентов a_k нули.

Сформулируем этот же результат несколько по-другому. Мы доказали, что любой кубатурной формуле в $W_2^{(m)}$ соответствует кубатурная формула такого же вида, точная на всех многочленах степени ниже m. При этом норма функционала погрешности формулы

из $L_2^{(m)*}$, вычисленная в пространстве $W_2^{(m)*}$, не превосходит нормы в $W_2^{(m)*}$ функционала погрешности, соответствующего исходной кубатурной формуле. Это обстоятельство позволяет сосредоточиться на поиске оптимальных формул в пространстве $L_2^{(m)}$.

Рассмотрим пространство $W_2^{(m)}$ и изучим в нем норму функционала погрешности $l(x)$.

Допустим, прежде всего, что число точек N в кубатурной формуле настолько велико, что матрица S имеет правую обратную. Как мы видели, это всегда будет иметь место, если в число узлов входят точки решетки, принадлежащие симплексу (4.12).

Построим по формуле (4.8) проекционный оператор пространства $W_2^{(m)}$ в $\mathbf{P}_{m-1}$. Нетрудно видеть, что $\Pi\varphi = \varphi$ при всех $\varphi \in \mathbf{P}_{m-1}$.

Норму в $\mathbf{P}_{m-1}$ можно задать произвольно. Согласно равенству (4.13) это может изменить лишь ту часть нормы, которая не нуждается в приближении. Положим

$$\|P \mid \mathbf{P}_{m-1}\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |P(x^{(k)})|^2.$$

Тогда норма функции $\varphi(x) \in W_2^{(m)}$ выразится формулой

$$\left\|\varphi \mid W_2^{(m)}\right\|^2 = \left(\vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} S\right)\left(\vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} S\right)^* + \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi)^2 \, dx. \quad (4.16)$$

Определенное таким образом пространство $W_2^{(m)}$ гильбертово. Скалярное произведение в нем задается формулой

$$\{\varphi, \psi\}_{W_2^{(m)}} = \vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} S S^* S_{\text{пр}}^{-1} \psi + \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx. \quad (4.17)$$

По основному свойству гильбертовых пространств $W_2^{(m)*}$ отождествляется с $W_2^{(m)}$, и любой линейный ограниченный функционал l на $W_2^{(m)}$ по теореме Рисса можно записать с помощью скалярного произведения (4.17) в виде

$$(l, \varphi) = \{\psi_l, \varphi\}_{W_2^{(m)}}. \quad (4.18)$$

Здесь функция ψ_l однозначно определяется функционалом l. В частности, любой функционал $l(x)$ из $W_2^{(m)*}$ можно разложить в сумму:

$$(l, \varphi) = (l_1, \varphi) + (l_2, \varphi), \tag{4.19}$$

где

$$(l_1, \varphi) = \left(\vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} S\right)\left(\vec{\psi}_l S_{\text{пр}}^{-1} S\right)^*, \tag{4.20}$$

$$(l_2, \varphi) = \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi_l(x)\, dx. \tag{4.21}$$

Несложно убедиться, что l_1 совпадает с суперпозицией $l\Pi$. В самом деле, для любой функции $\varphi \in W_2^{(m)}$ согласно (4.18) имеем

$$(l, \Pi\varphi) = \{\Pi\varphi, \psi_l\}_{W_2^{(m)}} = (l_1, \varphi).$$

Отсюда и из (4.19) заключаем, что $l_2 = l(I - \Pi)$.

Используя формулы (4.19)–(4.21), можно получить следующую важную теорему.

Теорема I.7 (И. Бабушка). *Пусть функционал погрешности $l(x)$ определен на пространстве $L_2^{(m)}$, т. е. его значения на всех многочленах степени ниже m равны нулю. Если $l(x)$ оптимален в $L_2^{(m)*}$, т. е. среди всех функционалов погрешности с заданной системой узлов $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}$ он имеет наименьшую норму в $L_2^{(m)*}$, то существует его экстремальная функция, принадлежащая $L_2^{(m)}$ и принимающая нулевое значение во всех узловых точках $x^{(k)}$.*

Доказательство. По заданной системе узлов построим проектор

$$\Pi\varphi = \vec{\varphi} S_{\text{пр}}^{-1} x^\alpha$$

и с его помощью зададим скалярное произведение (4.17). Тогда $W_2^{(m)}$ — гильбертово пространство.

Наилучшим приближением элемента g из гильбертова пространства $\mathbf{H}$ элементами замкнутого подпространства $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$ служит, как известно, проекция g_1 элемента g на подпространство $\mathbf{H}_1$. При этом разность $g - g_1$ ортогональна в $\mathbf{H}$ любому элементу из $\mathbf{H}_1$.

Примем за $\mathbf{H}$ пространство $W_2^{(m)}$, а за $\mathbf{H}_1$ — подпространство линейных комбинаций вида $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k u_k(x)$, где $u_k(x)$ — функция из $W_2^{(m)}$, соответствующая функционалу $\delta(x - x^{(k)})$ по теореме Рисса. При этом для любой функции $\varphi \in W_2^{(m)}$ имеем

$$\{\varphi, u_k\}_{W_2^{(m)}} = (\delta(x - x^{(k)}), \varphi(x)) = \varphi(x^{(k)}).$$

Очевидно, что подпространство $\mathbf{H}_1$ замкнуто в $\mathbf{H}$.

Характеристической функции $\chi_\Omega(x)$ по теореме Рисса соответствует элемент $g \in \mathbf{H}$. При этом для любого $g_1 \in \mathbf{H}_1$ разность $g - g_1$ определяет функционал погрешности некоторой кубатурной формулы. Норма этого функционала погрешности минимальна, если функция $\psi_l = g - g_1$ ортогональна всем функциям $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, N$, т. е. если

$$\{\psi_l, u_k\}_{W_2^{(m)}} = \psi_l(x_k) = 0.$$

При этом функция $\psi_l(x)$ экстремальна для $l(x)$ в $W_2^{(m)}$. Оказывается, что эта же функция представляет $l(x)$ и в пространстве $L_2^{(m)}$.

В самом деле, согласно условию функционал $l(x)$ принимает нулевое значение на всех многочленах степени ниже m. Поэтому суперпозиция $l_1 = l\Pi$ совпадает с тождественно нулевым оператором в $W_2^{(m)}$. Отсюда и из равенств (4.19)–(4.21) следует, что для любой функции $\varphi \in W_2^{(m)}$ справедливо равенство

$$(l, \varphi) = (l_2, \varphi) = \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi_l(x)\, dx.$$

Теорема I.7 доказана.

Следует отметить, что теорема I.7 вытекает из более общей теоремы двойственности С. М. Никольского для функционалов (см., например, [69, с. 26]).

§ 5. Представление нормы функционала погрешности в $L_2^{(m)*}$

Как уже отмечалось, практически полезно знать норму функционала погрешности кубатурной формулы при каждом фиксированном числе узлов N. Тогда можно с заданной точностью найти

приближенное значение интеграла без лишних затрат. В этом параграфе мы дадим два выражения нормы функционала погрешности, действующего на пространстве $L_2^{(m)}$, которые, в частности, можно использовать и для вычислений. Пользуясь представлениями нормы, получим также систему линейных уравнений для определения коэффициентов оптимальных в $L_2^{(m)}$ кубатурных формул и рассмотрим ее простейшие свойства.

Кубатурную формулу с функционалом погрешности $l(x)$, рассматриваемую на пространстве $L_2^{(m)}$, будем характеризовать двумя способами.

1. Кубатурную формулу определяет экстремальная функция $\psi_l(x)$, которая получается как решение уравнения

$$\Delta^m u = (-1)^m l(x). \tag{5.1}$$

Функция $\psi_l(x)$ принадлежит $L_2^{(m)}$ и может быть записана в виде свертки

$$\psi_l(x) = G(x) * l(x) + P(x). \tag{5.2}$$

Здесь через $G(x)$ обозначена функция $(-1)^m G_{m,n}(x)$, где $G_{m,n}(x)$ — фундаментальное решение полигармонического уравнения; явное выражение $G_{m,n}(x)$ приведено в § 2. Второе слагаемое $P(x)$ в (5.2) — это произвольный многочлен степени ниже m. Нормы функционала $l(x)$ и функции $\psi_l(x)$ связаны между собой соотношением

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = \int \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \psi_l(x)|^2 \, dx. \tag{5.3}$$

Интеграл в правой части (5.3) берется от функции $\psi_l(x)$, полигармонической во всех точках $\mathbb{R}^n$, за исключением точек границы области Ω и узлов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$. Если $m = 1$, он совпадает с обычным интегралом Дирихле. Разность экстремальных функций функционалов погрешностей $l_1(x)$ и $l_2(x)$ — это функция, полигармоническая во всех точках $\mathbb{R}^n$, за исключением точек из объединения множеств узлов, соответствующих $l_1(x)$ и $l_2(x)$.

2. Кубатурную формулу определяют также ее коэффициенты c_k, $1 \le k \le N$, связанные с экстремальной функцией $\psi_l(x)$ соотношением

(5.2). Подставив (5.2) в (5.3), видим, что квадрат нормы функционала погрешности представляет собой квадратичную функцию его коэффициентов:

$$\left\|\varphi \mid L_2^{(m)*}\right\|^2 = \sum_{k,k'=1}^{N} G(x^{(k)} - x^{(k')})c_k c_{k'} - 2\sum_{k=1}^{N} c_k \int\limits_{\Omega} G(x - x^{(k)})\,dx$$
$$+ \int\int \chi_\Omega(x)\chi_\Omega(y)G(x-y)\,dxdy \equiv \psi(c). \quad (5.4)$$

Напомним, что коэффициенты c_k в равенстве (5.4) должны удовлетворять системе линейных уравнений (1.7), эквивалентной условиям точности кубатурной формулы на полиномах степени ниже m:

$$(l(x), x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < m. \quad (5.5)$$

Сформулируем условия, при которых квадратичная функция $\psi(c)$ достигает минимума на множестве векторов c, подчиненных соотношениям (5.5). Для этого применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi_1(c, v) = \psi(c) + 2\sum_{j=1}^{M} v_j (l(x), x^{\alpha^{(j)}})$$
$$= \psi(c) - 2\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} v_j c_k (x^{(k)})^{\alpha^{(j)}} + 2\sum_{j=1}^{M} v_j \int\limits_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}}\,dx.$$

Приравняв нулю частные производные от $\psi_1(c, v)$, получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{k'=1}^{N} G(x^{(k)} - x^{(k')})c_{k'} - \sum_{j=1}^{M}(x^{(k)})^{\alpha^{(j)}} v_j = m_k, \quad 1 \le k \le N; \\ \sum_{k=1}^{N}(x^{(k)})^{\alpha^{(j)}} c_k = f_j, \quad 1 \le j \le M.\end{gathered} \quad (5.6)$$

Здесь

$$m_k = \int\limits_{\Omega} G(x - x^{(k)})\,dx, \quad f_j = \int\limits_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}}\,dx.$$

Решение системы (5.6), которое мы обозначим как $c_k^{(0)}$, $v_j^{(0)}$, представляет собой стационарную точку функции $\psi_1(c, v)$. Из теории условного экстремума известно достаточное условие, при котором это решение дает локальный минимум $\psi(c)$ на многообразии (5.5). Оно состоит в положительной определенности квадратичной формы

$$\Phi(c) = \sum_{k,k'=1}^{N} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial c_k \partial c_{k'}} c_k c_{k'} \tag{5.7}$$

на множестве векторов c, подчиненных требованию

$$Sc = 0. \tag{5.8}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае это условие выполнено.

Лемма I.8. *Для любого ненулевого вектора $c \in \mathbb{R}^n$, лежащего в подпространстве $Sc = 0$, функция $\Phi(c)$ строго положительна.*

Доказательство. Из определения функции $\psi_1(c)$ и из равенства (5.7) вытекает, что

$$\Phi(c) = \sum_{k,k'=1}^{N} G(x^{(k)} - x^{(k')}) c_k c_{k'}. \tag{5.9}$$

Рассмотрим линейную комбинацию δ-функций:

$$\delta_c(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}). \tag{5.10}$$

В силу условия (5.8) этот функционал принадлежит $L_2^{(m)*}$. Значит, он имеет экстремальную функцию $u_c(x) \in L_2^{(m)}$, которая является решением уравнения

$$\Delta^m u_c(x) = (-1)^m \delta_c(x). \tag{5.11}$$

Ясно, что в качестве $u_c(x)$ можно взять следующую линейную комбинацию сдвигов фундаментального решения:

$$u_c(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k G(x - x^{(k)}).$$

Квадрат ее нормы в $L_2^{(m)}$ совпадает с $\Phi(c)$:

$$\left\|u_c \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = (\delta_c(x), u_c(x)) = \sum_{k,k'=1}^{N} G(x^{(k)} - x^{(k')})c_k c_{k'}.$$

Отсюда очевидно, что при ненулевом c функция $\Phi(c)$ строго положительна.

Лемма I.8 доказана.

Если узлы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$ подобраны так, что матрица S имеет правую обратную, то система (5.6) имеет единственное решение.

Лемма I.9. *Если матрица S имеет правую обратную, то матрица Q системы* (5.6) *невырожденная.*

Доказательство. Обозначив через G матрицу квадратичной формы (5.9), запишем однородную систему, соответствующую (5.6), в следующем виде:

$$Q\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} G & S^* \\ \hline S & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = 0. \tag{5.12}$$

Проверим, что единственное решение (5.12) — это тождественный нуль.

Итак, пусть c, v — решение (5.12). Пользуясь формулой (5.10), образуем соответствующую вектору c обобщенную функцию $\delta_c(x)$. Она, очевидно, принадлежит $L_2^{(m)*}$. В качестве экстремальной функции для $\delta_c(x)$ возьмем следующую:

$$u_c(x) = \sum_{k=1}^{N} G(x - x^{(k)})c_k + \sum_{j=1}^{M} v_j x^{\alpha^{(j)}},$$

Это возможно, поскольку $u_c(x)$ принадлежит $L_2^{(m)}$ и является решением уравнения (5.11). Первые N уравнений системы (5.12) означают, что $u_c(x)$ принимает нулевые значения во всех узлах $x^{(k)}$. Тогда относительно нормы в $L_2^{(m*)}$ функционала $\delta_c(x)$ имеем

$$\left\|\delta_c \mid L_2^{(m)*}\right\|^2 = (\delta_c, u_c) = \sum_{k=1}^{N} c_k u(x^{(k)}) = 0,$$

что возможно лишь при $c = 0$. Учитывая это, из первых N уравнений системы (5.12) получаем

$$S^* v = 0. \tag{5.13}$$

По условию матрица S имеет правую обратную, но тогда S^* имеет левую обратную. Отсюда и из (5.13) заключаем, что решение v также равно нулю.

Лемма I.8 доказана.

Таким образом, система (5.6) имеет единственное решение $c^{(0)}$, $v^{(0)}$. При этом вектор $c^{(0)}$ доставляет локальный минимум квадратичной функции $\psi(c)$ на множестве решений системы (5.5), и тем самым его координаты совпадают с коэффициентами оптимальной в $L_2^{(m)}$ кубатурной формулы.

Норма оптимального функционала погрешности представляет собой функцию числа узлов N и алгебраического порядка точности m. Получение явных выражений этой функции, точных хотя бы асимптотически при N и m, стремящихся к бесконечности, — это трудная задача. До тех пор, пока она не решена, мы не можем обоснованно судить о том, насколько конкретная кубатурная формула хуже оптимальной.

Отметим, что в случае кубатурных формул, соответствующих решетке узлов $hH\gamma$, в гл. V получено выражение нормы оптимального функционала погрешности в пространстве $L_2^{(m)*}$, асимптотически точное при $h \to 0$ и фиксированном значении m. Для случая, когда m неограниченно возрастает, в гл. VII приведены лишь оценки сверху нормы оптимального функционала погрешности и только в одномерном случае.

§ 6. Коэффициенты оптимальных кубатурных формул с заданной решеткой узлов

Мы показали в § 2, каким образом строятся асимптотически оптимальные кубатурные формулы при заданной решетке узлов $hH\gamma$. При нашем подходе к построению формул с регулярным пограничным слоем число действий, необходимых для получения коэффициентов, по порядку в $1/h$ раз меньше числа действий, нужных для выполнения приближенного интегрирования. В некоторых случаях, например, когда Ω представляет собой рациональный многогранник,

это число действий остается конечным и при $h \to 0$. Однако из указанного способа не видно, каково асимптотическое при $h \to 0$ поведение истинных оптимальных коэффициентов $c_0[\gamma]$. Для прояснения этого вопроса рассмотрим линейную систему для коэффициентов оптимальной кубатурной формулы с заданной решеткой узлов. В этом случае система (5.6) принимает следующий вид:

$$h^n \sum_{\gamma' \in B} c_0[\gamma] G(hH(\gamma - \gamma')) - \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha (hH\gamma)^\alpha = \int_\Omega G(hH\gamma - y)\, dy,$$
$$h^n \sum_{\gamma' \in B} c_0[\gamma'](hH\gamma')^\alpha = \int_\Omega y^\alpha\, dy, \quad |\alpha| < m, \tag{6.1}$$

где B — множество тех мультииндексов γ, для которых $hH\gamma$ лежит в замыкании $\overline{\Omega}$. Это система с числом неизвестных, растущим как h^{-n} при $h \to 0$. Коэффициенты системы (6.1) не стремятся к нулю, и прямое ее решение, равно как и исследование, затруднительно. Поэтому мы предложим другой, не алгебраический способ решения (6.1).

Определим функцию дискретной переменной $c_0[\gamma]$ для всех значений γ, положив ее равной нулю для γ, лежащих вне B. Пусть, кроме того, $G[\gamma] = G(hH\gamma)$. Тогда систему (6.1) можно записать в сверточном виде:

$$h^n c_0[\gamma] * G[\gamma] = w[\gamma], \quad \gamma \in B,$$
$$h^n \sum_\gamma c_0[\gamma](hH\gamma)^\alpha = f_\alpha, \qquad |\alpha| < m, \tag{6.2}$$

где

$$w[\gamma] = \int_\Omega G(hH\gamma - y)\, dy + \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha (hH\gamma)^\alpha, \quad f_\alpha = \int_\Omega y^\alpha\, dy.$$

Нам удобнее рассмотреть более общую задачу, чем только что поставленная. Введем кроме $c_0[\gamma]$ еще одну неизвестную функцию $w[\gamma]$, а систему (6.2) заменим аналогичной, но с произвольными правыми частями.

Задача B_1. *Найти решение системы уравнений*

$$h^n c[\gamma] * G[\gamma] = w[\gamma], \quad hH\gamma \in \mathbb{R}^n,$$
$$h^n \sum_{\gamma} c[\gamma](hH\gamma)^\alpha = f_\alpha, \quad |\alpha| < m, \tag{6.3}$$
$$c[\gamma] = 0, \quad hH\gamma \notin \overline{\Omega}, \quad w[\gamma] = f[\gamma] + \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha (hH\gamma)^\alpha, \quad hH\gamma \in \overline{\Omega},$$

с неизвестными $c[\gamma]$, $w[\gamma]$, v_α. *В этой системе* f_α *— заданные числа, а функция* $f[\gamma]$ *известна внутри* Ω.

Внутри области Ω неизвестны функция $c[\gamma]$ и многочлен $P[\gamma] = \sum\limits_{|\alpha|<m} v_\alpha (hH\gamma)^\alpha$. Функция $w[\gamma]$ внутри области Ω выражается через многочлен $P[\gamma]$ и функцию $f[\gamma]$ с помощью последнего из соотношений (6.3).

Задача B_1 допускает непрерывный аналог, исследование которого и дает ключ к решению системы (6.3).

Заменим функции $c[\gamma]$ и $w[\gamma]$ функциями непрерывного аргумента $c(x)$ и $w(x)$, а вместо $G[\beta]$ и $f[\beta]$ используем $G(x)$ и $f(x)$. Тогда придем к следующей задаче.

Задача A_1. *Найти в области* Ω *обобщенную функцию* $c(x)$ *и многочлен* $P(x) = \sum\limits_{|\alpha|<m} v_\alpha x^\alpha$, *а в дополнении* Ω^* *к* Ω *— функцию* $w(x)$ *так, чтобы выполнялась система равенств*

$$c(x) * G(x) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \int c(x) x^\alpha \, dx = f_\alpha, \quad |\alpha| < m,$$
$$c(x) = 0, \quad x \notin \Omega, \quad w(x) = f(x) + P(x), \quad x \in \Omega. \tag{6.4}$$

Решение задачи A_1 не единственно, как не единственно и решение задачи B_1. Чтобы избежать этого, наложим дополнительные условия на искомые функции. Эти условия позволят рассматривать задачу A_1 в каком-то смысле как предельную для задачи B_1. В частности, можно будет делать заключения об асимптотическом поведении при $h \to 0$ коэффициентов оптимальных формул. Точнее, потребуем, чтобы производные порядка m от $w(x)$ были интегрируемы с квадратом по любой ограниченной области. Второе же из равенств (6.4) задает некоторые ограничения на поведение функции $w(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Из полигармоничности функции $w(x)$ вне Ω вытекает, что она растет на бесконечности не быстрее чем $|x|^{2m-n}\ln|x|$. Второе из равенств (6.4) дает при этом явное выражение нескольких первых членов разложения функции $w(x)$ в ряд по убывающим степеням $|x|$.

В самом деле, функцию $w(x)$ можно представить вне Ω в виде свертки:

$$w(x) = \int G(x-y)c(y)\,dy.$$

Разлагая $G(x-y)$ по степеням y, получим, что

$$w(x) = \sum_{|\alpha|<m} \int D^\alpha G(x)\frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}c(y)\,dy + w_1(x). \tag{6.5}$$

Ряд Тейлора для $G(x-y)$ при достаточно больших x, а y из Ω, сходится. С помощью (6.4) равенство (6.5) можно переписать в следующем виде:

$$w(x) = \sum_{|\alpha|<m} (-1)^{|\alpha|} f_\alpha \frac{D^\alpha G(x)}{\alpha!} + w_1(x). \tag{6.6}$$

При нечетном n или $n > m$ функция $w_1(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит $K|x|^{m-n}$, т. е. при всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|w_1(x)| \le K(1+|x|^2)^{(m-n)/2}. \tag{6.7}$$

Если же n четно и $n \le m$, то в правой части (6.7) добавляется множитель $\ln|x|$.

Легко видеть, что $w_1(x)$ имеет производные порядка m, интегрируемые с квадратом в окрестности бесконечности.

Таким образом, функция $w(x)$ — это решение следующей задачи продолжения.

Задача T_c. *Найти функцию $w(x)$, удовлетворяющую условиям:*

1) *всюду вне Ω функция $w(x)$ — полигармоническая:*

$$\Delta^m w(x) = 0, \quad x \notin \overline{\Omega}; \tag{6.8}$$

2) *внутри области* Ω *выполняется равенство*

$$w(x) = f(x) + \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha x^\alpha,$$

где $f(x)$ *— известная функция;*

3) *всюду вне* Ω *функция* $w(x)$ *представима в виде суммы* (6.6), *слагаемое* $w_1(x)$ *которой удовлетворяет оценке* (6.7).

По известным теоремам вложения все производные $w(x)$ до порядка $m-1$ включительно непрерывны при переходе через поверхность $\partial\Omega$. Отсюда вытекают граничные условия, которым должна удовлетворять на $\partial\Omega$ функция $w_1(x)$, полигармоническая вне $\overline{\Omega}$. Несложно убедиться, что эти условия имеют вид

$$D^\beta w_1|_{\partial\Omega} = -D^\beta \left\{ \sum_{|\alpha|<m} (-1)^{|\alpha|} f_\alpha \frac{D^\alpha G(x)}{\alpha!} \right\}\Bigg|_{\partial\Omega} + D^\beta \left\{ f(x) + \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha x^\alpha \right\}\Bigg|_{\partial\Omega}, \quad |\beta| < m. \quad (6.9)$$

В теории полигармонического уравнения доказывается, что функция $w_1(x)$, вне $\overline{\Omega}$ удовлетворяющая (6.8), а на границе $\partial\Omega$ — условиям (6.9), существует лишь при специальном выборе постоянных v_α и при этом единственна. Коэффициенты v_α определяются однозначно. Следовательно, задача T_c разрешима.

Функцию $c(x)$ находим как результат применения к $w(x)$ оператора Δ^m. Она будет, вообще говоря, обобщенной функцией, даже если $f(x)$ имеет непрерывные производные любого порядка и обращается в нуль на границе области Ω.

Действительно, производные функции $w(x)$ порядка m и выше претерпевают скачки при переходе через $\partial\Omega$. Поэтому полигармонический оператор Δ^m действует на $w(x)$ так:

$$\Delta^m w(x) = \Delta^m f(x) + \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x) D^\alpha \delta_{\partial\Omega}(x), \quad (6.10)$$

где $\delta_{\partial\Omega}(x)$ — функция Дирака, сосредоточенная на границе области Ω, а $\Delta^m f(x)$ — непрерывная функция внутри Ω.

Формула (6.10) подсказывает причину появления пограничного слоя в задаче об оптимальных кубатурных формулах и вместе с тем дает естественное объяснение асимптотической оптимальности формул с регулярным пограничным слоем. Действительно, первое слагаемое в (6.10) представляет собой гладкую функцию и в нашем конкретном случае близко к постоянной. Слагаемые, содержащие производные $\delta_{\partial\Omega}(x)$, аппроксимируются конечными разностями, т. е. колеблющимися величинами.

Перейдем теперь к рассмотрению задач с функциями дискретного аргумента.

Оператор свертки с $G[\beta]$ допускает обратный, который также является сверткой, но с функцией $\sigma[\beta]$, которую можно подсчитать, пользуясь преобразованием Фурье. Функция $\sigma[\beta]$ зависит не только от дискретного аргумента β, но и от матрицы H и шага h. Приведем важнейшие свойства функции $\sigma[\beta]$.

1. При неограниченном возрастании $|\beta|$ функция $\sigma[\beta]$ экспоненциально убывает:

$$|\sigma[\beta]| \leq Ke^{-\eta|\beta|}.$$

Здесь постоянные K, η положительны и не зависят от β.

2. Существует свертка $\sigma[\beta]$ с $G[\beta]$, совпадающая при домножении на h^{-2m} с функцией $\delta[\beta]$ — дискретным аналогом δ-функции Дирака:

$$h^{-2m}\sigma[\beta] * G[\beta] = \delta[\beta].$$

3. Существует свертка $h^{-2m}\sigma[\beta]$ с любой функцией $\varphi(hH\beta)$, растущей на бесконечности не быстрее полинома, и предел этой свертки при $h \to 0$ совпадает со значением полигармонического оператора на $\varphi(x)$:

$$\lim_{h\to 0} h^{-2m}\sigma[\beta] * \varphi(hH\beta) = \Delta^m\varphi(hH\beta).$$

4. Функция $\sigma[\beta]$ допускает представление в «дивергентном» виде, т. е.

$$\sigma[\beta] = \sum_{|\alpha|=m} L^{(\alpha)}[\beta] * L^{(\alpha)}[-\beta],$$

где функции $L^{(\alpha)}[\beta]$ убывают на бесконечности экспоненциально. Предел свертки $h^{-m}L^{(\alpha)}[\beta]$ с $\varphi(hH\beta)$ при $h \to 0$ равен частной производной $D^\alpha\varphi(x)$:

$$\lim_{h\to 0} h^{-m}L^{(\alpha)}[\beta] * \varphi(hH\beta) = D^\alpha\varphi(hH\beta).$$

5. Справедлива формула, аналогичная формуле Грина для полигармонического оператора:

$$\sum_{\beta} \varphi[\beta](\sigma[\beta] * \varphi[\beta]) = \sum_{\beta} \sum_{|\alpha|=m} (L^{(\alpha)}[\beta] * \varphi[\beta], L^{(\alpha)}[\beta] * \varphi[\beta]).$$

Перечисленные свойства функции $\sigma[\beta]$ показывают, что оператор свертки с ней служит дискретным аналогом взятию полигармонического оператора.

Таким образом, указан способ разностного приближения полигармонического оператора, отличный от тех, которые, как правило, применяются в теории. Обычно в качестве приближения к полигармоническому оператору используются разностные схемы с конечным числом узловых точек. Иными словами, строится финитная функция дискретного аргумента $\sigma^*[\beta]$, свертка с которой переходит в Δ^m при $h \to 0$. Наш подход отличается тем, что сначала строится не разностное приближение Δ^m, а дискретизация соответствующего ему потенциала $G(x)$. При этом свертка непрерывных функций с $G(x)$ заменяется сверткой дискретных функций с $G[\beta]$, и лишь затем дискретизированный потенциал обращается. Такой подход приводит к нефинитному приближению Δ^m.

Сформулируем теперь задачу, служащую дискретным аналогом задачи продолжения T_c.

Задача T_D. *Найти функцию $w[\gamma]$, удовлетворяющую трем условиям:*

1) *при $\gamma \in B$ функция $w[\gamma]$ принимает заданные с точностью до полиномиального слагаемого значения, т. е.*

$$w[\gamma] = \int_{\Omega} G(hH\gamma - y)\, dy + \sum_{|\alpha|<m} v_\alpha x^\alpha;$$

2) *везде вне B функция $w[\gamma]$ — решение сверточного уравнения*

$$\sigma[\gamma] * w[\gamma] = 0, \quad \gamma \notin B;$$

3) *на бесконечности выполняется неравенство*

$$\left| w[\gamma] - \int_{\Omega} G(hH\gamma - y)\, dy \right| \le K|hH\gamma|^{m-n}.$$

На задачу T_D переносятся все те методы исследования, которые использовались и в непрерывном случае. В частности, доказываются существование и единственность решения задачи T_D.

Таким образом, задача нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул при заданной решетке сведена к дискретному аналогу одной из классических краевых задач теории полигармонического уравнения. Анализ задачи об оптимальных коэффициентах на основе предложенного подхода подсказывает, каким может быть их асимптотическое поведение. Подчеркнем, что речь идет об асимптотике при $h \to 0$ и фиксированном значении m. Наша гипотеза такова. Во внутренних точках области Ω коэффициенты $c_0[\gamma]$ близки к постоянной, отличаясь от нее на величину, экспоненциально убывающую внутри области с удалением дискретной переменной γ от границы Ω, причем показатель экспоненты зависит только от h. Таким образом, при убывании h толщина пограничного слоя в оптимальной кубатурной формуле из $L_2^{(m)*}$, по всей видимости, убывает пропорционально h. В случае же, если m и h изменяются согласованно, например $mh = q < 1$, высказанное нами предположение необходимо существенно корректировать.

Глава II

Кубатурные формулы алгебраического порядка точности

В теории вычислений традиционно рассматриваются две задачи: интерполирования и приближенного интегрирования функций. Мы видели, что эти задачи тесно связаны одна с другой, если подходить к ним чисто алгебраически. В этом случае задача о приближенном интегрировании сводится к построению кубатурных формул, точных на многочленах степени не выше m. Получаемые при таком подходе кубатурные формулы часто называют ***формулами интерполяционного типа***. Мы рассмотрим их в § 1.

Если область интегрирования допускает достаточно простую конечную группу преобразований на себя, то можно поставить вопрос о построении кубатурных формул, инвариантных относительно этой группы преобразований. Вычисление узлов и коэффициентов таких формул может быть очень экономным, что позволяет достичь высокой степени точности при заданном объеме вычислений. Ниже в § 2, 3 мы изучим алгебраически точные формулы, инвариантные относительно конечных групп вращений пространства.

§ 1. Формулы интерполяционного типа

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в некоторой области $\widetilde{\Omega}$ из $\mathbb{R}^n$ и интегрируема по подобласти Ω, вложенной в $\widetilde{\Omega}$. Интеграл по Ω от этой функции будем приближенно заменять линейной комбинацией

значений $\varphi(x)$ в точках множества $K = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}\} \subset \widetilde{\Omega}$. Мы не исключаем случая, когда некоторые узлы системы K лежат вне Ω.

Кубатурной формулой для приближенного вычисления интеграла

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, dx \tag{1.1}$$

мы называем сумму

$$I_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi(x^{(k)}), \quad x^{(k)} \in K, \tag{1.2}$$

обеспечивающую приближенное равенство

$$I(\varphi) \cong I_N(\varphi).$$

Точки системы K — это узлы кубатурной формулы, а числа $c_1, \ldots, c_N$ — ее коэффициенты. *Погрешность кубатурной формулы* определяется разностью

$$(l_N, \varphi) = I(\varphi) - I_N(\varphi). \tag{1.3}$$

Будем говорить, что *кубатурная формула точна на функции* $\varphi(x)$, если разность (1.3) равна нулю. Таким образом, функции, на которых точна кубатурная формула (1.2), образуют *ядро функционала погрешности* l_N.

Естественно рассматривать не изолированные кубатурные формулы, а их последовательности при увеличении числа узлов N. В этом случае будем говорить о *кубатурном процессе*. Будем говорить, что *кубатурный процесс*, в котором узлы и коэффициенты определены каким-либо образом, *сходится*, если для любой непрерывной в $\widetilde{\Omega}$ и интегрируемой по области Ω функции φ величина $I_N(\varphi)$ сходится к $I(\varphi)$ при $N \to \infty$.

Для определения узлов и коэффициентов кубатурных формул в алгебраической постановке используются различные подходы. Опишем те из них, которые применяются наиболее часто.

Постановка I. При заданной системе узлов K требуется найти коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_N$ кубатурной формулы таким образом,

чтобы она была точна на всех многочленах степени не выше m (обозначим их пространство через $\mathbf{P}_m$) при возможно большем m.

Постановка II. Требуется найти коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_N$ и узлы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)} \in K$ кубатурной формулы таким образом, чтобы она была точна на всех многочленах из пространства $\mathbf{P}_m$ при возможно большем m.

Постановка III. При $c_k = |\Omega|/N$, $k = 1, \ldots, N$, требуется найти узлы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)} \in K$ кубатурной формулы таким образом, чтобы она была точна на всех многочленах из пространства $\mathbf{P}_m$ при возможно большем m.

Постановка IV. При заданных узлах $x^{(i)} \in K$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$, где $1 \leq N_1 \leq N$, требуется найти коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_N$ и узлы $x^{(N_1+1)}, \ldots, x^{(N)}$ кубатурной формулы таким образом, чтобы она была точна на всех многочленах из пространства $\mathbf{P}_m$ при возможно большем m.

По аналогии с одномерным случаем кубатурные формулы, если они существуют и являются решением задач в постановках I–IV, назовем соответственно *кубатурными формулами типа Ньютона — Котеса, Гаусса, Чебышёва, Маркова.*

В формулировках задач I–IV вместо $\mathbf{P}_m$ можно выбирать другое конечномерное пространство функций, например пространство тригонометрических многочленов. Величина m при этом характеризует размерность этого пространства.

Кубатурные формулы для приближенного вычисления интеграла (1.1) не исчерпываются выражениями вида (1.2). Рассматриваются, например, *эрмитовы кубатурные формулы*, в которых к сумме (1.2) добавляются слагаемые, содержащие производные от функции $\varphi(x)$, взятые в узлах $x^{(k)}$.

Число m называется *алгебраическим порядком точности* кубатурной формулы (1.2), если, во-первых, соответствующий функционал погрешности точен на полиномах степени, меньшей m, и, во-вторых, найдется полином степени m, на котором погрешность (1.3) не равна нулю.

В случае, когда рассматривается кубатурный процесс, алгебраический порядок точности m зависит от числа узлов N, т. е. $m = \psi(N)$. Как правило, функция $m = \psi(N)$ при этом неубывающая и при $N \to \infty$ неограниченно возрастает.

Сформулируем критерий сходимости погрешностей кубатурных

формул на непрерывных функциях.

Теорема II.1. *Кубатурный процесс* (1.3) *сходится на любой функции* φ *из* $C(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда*

1) *существует постоянная* $L > 0$ *такая, что одновременно для всех* N *выполняется оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k| \leq L, \tag{1.4}$$

2) *последовательность* $I_N(\varphi)$ *сходится к* $I(\varphi)$ *для всех* φ *из некоторого всюду плотного в* $C(\Omega)$ *подмножества.*

Доказательство несложно и основано на применении классической теоремы Банаха — Штейнгауза [179].

В случае, когда кубатурному процессу соответствует функция $m = \psi(N)$, имеющая при заданном N смысл алгебраического порядка точности, в качестве плотного в $C(\Omega)$ подмножества можно взять пространство многочленов. Неравенство (1.6) при этом равносильно оценке норм последовательности функционалов l_N в пространстве $C(\Omega)^*$.

Теорема II.2. *Для того чтобы система узлов* $x^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, *позволяла построить кубатурную формулу* (1.2), *точную на всех многочленах* P_α *из* $\mathbf{P}_m$, *необходимо и достаточно равенства нулю интегралов от всех тех многочленов* P_α, *которые обращаются в нуль во всех точках* $x^{(k)}$.

Доказательство. Необходимым и достаточным условием разрешимости системы (I.1.7) является ортогональность b всем решениям однородной союзной системы:

$$aS = 0. \tag{1.5}$$

Множество решений a при этом определяет подпространство полиномов $P(x) = ax^\alpha$ степени, не превосходящей m. Каждый такой полином в силу (1.5) обращается в нуль во всех точках $x^{(k)}$. Условие ортогональности векторов a и b в $\mathbb{R}^M$ означает равенство нулю интегралов $I(ax^\alpha)$.

Теорема II.2 доказана.

Ранг $r(S)$ матрицы S может равняться M или быть меньше его. В первом случае: $r(S) = M$ — задача нахождения коэффициентов c_k кубатурной формулы всегда разрешима. Это следует из теоремы II.2, так как единственное решение системы (1.5) в рассматриваемом случае равно нулю. При $r(S) = M$ число точек системы K не меньше числа M, т. е. $N \geq M$.

Во втором случае: $r(S) < M$ — кубатурные формулы удобно строить в предположении, что $r(S) = N$. Тогда условием разрешимости системы (I.1.7) служит равенство

$$r(S \times b) = r(S) = N, \tag{1.6}$$

где $S \times b$ — расширенная матрица системы (I.1.7). Как известно, условие (1.6) состоит в равенстве нулю $M - N$ определителей матрицы $S \times b$ и дает, таким образом, $M - N$ условий на числа $b_1, b_2, \ldots, b_M$. Числа b_j представляют собой систему моментов индикатора области Ω.

Если $n = 1$, а область Ω — отрезок, то числа b_j легко представить как функции двух его концов. В этом случае множество всех b будет двумерным многообразием в M-мерном пространстве; некоторые из векторов b могут удовлетворять условию (1.6).

Пример. Пусть $n = 1$, $\Omega = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$, $m = 3$, $x^{(1)} = -1$, $x^{(2)} = 0$, $x^{(3)} = 1$. Система уравнений (I.1.7) примет вид

$$\begin{array}{rrrcl} c_1 & + c_2 & + c_3 & = & 2, \\ -c_1 & & + c_3 & = & 0, \\ c_1 & & + c_3 & = & 2/3, \\ -c_1 & & + c_3 & = & 0. \end{array} \tag{1.7}$$

Ранг матрицы S равен трем — числу узлов множества K — и меньше $M = 4$. Тем не менее система (1.7) разрешима. При этом $c_1 = 1/3$, $c_2 = 4/3$, $c_3 = 1/3$. Получается известная формула Симпсона:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx \cong \frac{1}{3}\varphi(-1) + \frac{4}{3}\varphi(0) + \frac{1}{3}\varphi(1),$$

точная на многочленах третьей степени.

В случае, когда размерность пространства независимых переменных больше единицы, найти вектор b сложнее — это задача многомерной теории моментов. Тем не менее для конкретной области Ω, особенно если она обладает симметрией того или иного рода, часто удается найти множество узлов из $N < M$ элементов, для которого система (I.1.7) автоматически разрешима. В многомерном случае этот вопрос изучался различными авторами, из которых укажем И. Радона [215; 71, гл. 22, § 4], а также И. П. Мысовских [85].

В постановках II–IV задача отыскания коэффициентов и узлов кубатурной формулы как решений системы (I.1.7) значительно более трудна, ибо является нелинейной. Например, в постановке II задача имеет $(n+1)N$ подлежащих отысканию параметров кубатурной формулы (1.2). За счет такого количества неопределенных параметров можно значительно повысить алгебраическую степень точности кубатурной формулы при заданном числе узлов в ней.

Систематическое исследование формул интерполяционного типа содержится в работах И. П. Мысовских. С его результатами, а также с библиографией можно ознакомиться в монографии [85].

§ 2. Кубатурные формулы, инвариантные относительно групп вращений

Пусть G — какая-нибудь группа вращений в $\mathbb{R}^n$ с элементами $g_1, g_2, \ldots, g_M$, а M — ее порядок. Для любого $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ все точки вида $g_i x^{(k)}$ (некоторые из них могут совпадать друг с другом) образуют G-орбиту.

Кубатурная формула (1.2) называется *инвариантной относительно группы* G, если область интегрирования Ω инвариантна относительно G, совокупность узлов $x^{(k)}$ представляет собой объединение G-орбит, и при этом узлам $x^{(k)}$ одной и той же орбиты сопоставлены одинаковые коэффициенты c_k.

Пусть задано N-мерное линейное подпространство L в $C(\Omega)$, образованное линейными комбинациями непрерывных функций $\varphi_i(x)$. Будем считать, что $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, линейно независимы. Справедлива следующая

Теорема II.3. *Пусть L — конечномерное пространство, инвариантное относительно группы G. Кубатурная формула* (1.2), *инвариантная относительно группы G, точна на всех функциях из L*

тогда и только тогда, когда ее функционал погрешности l_N обращается в нуль на подпространстве, составленном из всех функций L, инвариантных относительно группы вращений G.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C(\Omega)$ и положим

$$\varphi_G(x) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\varphi(g_j x). \tag{2.1}$$

Множество точек $g_1x, g_2x, \ldots, g_Mx$ при умножении слева на любой элемент g_a группы G переходит само в себя. Следовательно, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{M}\varphi(g_j x) = \sum_{j=1}^{M}\varphi(g_a g_j x).$$

Таким образом, средняя по группе G функция $\varphi_G(x)$ инвариантна относительно преобразований группы G, т. е.

$$\varphi_G(gx) = \varphi_G(x) \quad \forall g \in G.$$

Пусть кубатурная формула (1.2) инвариантна относительно группы G. Тогда

$$I(\varphi) = I(\varphi_G), \quad I_N(\varphi) = I_N(\varphi_G).$$

Значит, погрешность формулы на функции φ совпадает с ее погрешностью на соответствующей средней функции φ_G, т. е.

$$(l_N, \varphi) = (l_N, \varphi_G). \tag{2.2}$$

Если функционал l_N точен на всех инвариантных относительно G функциях, то он равен нулю и на φ_G. Отсюда и из (2.2) следует наше утверждение.

Теорема II.3 доказана.

Следствие 2.1. *Если среднее значение непрерывной функции φ, взятое по группе G или какой-нибудь ее подгруппе G^*, равно нулю, то функционал погрешности l_N точен на φ.*

В самом деле, погрешность (l_N, φ), будучи инвариантной по группе G, останется таковой и при преобразованиях подгруппы G^*. Это означает, что для φ_{G^*} имеет место равенство, аналогичное (2.2). Тем самым следствие 2.1 доказано.

Группы вращений удобно представлять как группы преобразований единичной сферы S_n в $\mathbb{R}^n$ на себя. Как известно, существует

бесконечная серия циклических групп вращений сферы S_n целых порядков (см., например, [47]). При $n \geq 3$ имеются также конечные группы вращений правильных многогранников. Будем обозначать группу, соответствующую n-мерному N-граннику, через G_n^N.

При $n = 3$ существуют следующие неэквивалентные конечные группы вращений сферы S_3, оставляющие на месте некоторый правильный многогранник: тетраэдр с группой G_3^4, октаэдр с группой G_3^8 и икосаэдр с группой G_3^{20} [47, гл. 3, § 20]. Группа вращений куба G_3^6 эквивалентна группе G_3^8, а группа додекаэдра G_3^{12} — группе G_3^{20}.

При $n = 4$ существуют группы тетраэдра G_4^5, октаэдра G_4^{16} и куба G_4^8, причем $G_4^8 = G_4^{16}$. Кроме того, рассматриваются группы G_4^{24}, G_4^{120}, G_4^{600}, причем $G_4^{120} = G_4^{600}$.

При $n \geq 5$ существуют лишь три группы: тетраэдра G_n^{n+1}, куба G_n^{2n} и октаэдра $G_n^{2^n}$, причем $G_n^{2n} = G_n^{2^n}$.

Обозначим через $\mathbf{P}_{m_G}$ пространство многочленов степени не более m, инвариантных относительно преобразований группы G.

Если в постановках I–IV потребовать инвариантность кубатурной формулы относительно группы вращений G, то задача определения ее узлов и коэффициентов значительно упрощается. Это происходит по двум причинам. Во-первых, число независимых параметров инвариантной кубатурной формулы при фиксированном количестве узлов меньше, чем в общем случае. Во-вторых, число многочленов, на которых кубатурная формула должна быть точной, равно M_G — размерности пространства $\mathbf{P}_{m_G}$, т. е. меньше M.

Найдем размерность M_G пространства $\mathbf{P}_{m_G}$ для некоторых групп вращений G. Нам удобно использовать понятие шаровых многочленов переменной x из $\mathbb{R}^n$. Напомним, что однородный многочлен $Z_s(x)$ степени s называется *шаровым*, если он гармонический. При этом значение многочлена $Z_s(x)$ на единичной сфере совпадает со сферической гармоникой порядка s. Имеет место следующая

Теорема II.4. *Любой однородный многочлен ψ_k степени k может быть представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$\psi_k(x) = \sum_{s=0}^{[k/2]} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2s} Z_{k-2s}(x), \tag{2.3}$$

где $Z_{k-2s}(x)$ — шаровые многочлены степени $k - 2s$, $s = 0, 1, \ldots$.

Представление вида (2.3) называется *гауссовым*. Доказательство теоремы II.4 приведено, например, в [167].

Квадратные скобки в (2.3) и далее во всей главе означают взятие целой части.

В силу равенства (2.3) произвольный однородный многочлен степени k может быть представлен на единичной сфере линейной комбинацией сферических гармоник порядков не выше k. Зная, сколько всего имеется линейно независимых инвариантных относительно группы G сферических гармоник степени k, и пользуясь формулой (2.3), можно найти размерность M_G.

Реализуем намеченный план действий для случая трехмерного пространства и циклической группы C_α порядка α. Эта группа образована степенями поворотов сферы вокруг фиксированной оси на угол $2\pi/\alpha$. При этом остаются неподвижными две точки сферы — P_N и P_S. Одну из них — точку P_N — считаем северным полюсом, другую — точку P_S — южным. Введем на сфере полярные координаты θ, φ. Тогда любое преобразование g_a группы C_α определяется одним из равенств:

$$g_a^s(\theta,\varphi) = \left(\theta, \varphi + \frac{2\pi s}{\alpha}\right), \quad s = 1, 2, \ldots, \alpha. \tag{2.4}$$

Известно, что в пространстве сферических гармоник порядка k базис образуют функции вида

$$P_k^{(|m|)}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm k, \tag{2.5}$$

где $P_k^{(|m|)}(\cdot)$ — присоединенные функции Лежандра. При любом преобразовании (2.4) каждая из функций (2.5) умножается на экспоненту вида $e^{i2s\pi m/\alpha}$. Следовательно, инвариантны относительно преобразований (2.4) те и только те из сферических гармоник (2.5), у которых m делится на α без остатка. Это замечание позволяет найти общее число $S(k)$ линейно независимых и инвариантных относительно группы C_α сферических гармоник. Имеет место очевидная

Теорема II.5. *Число $S(k)$ линейно независимых сферических гармоник порядка k, инвариантных при преобразованиях циклической группы G^* порядка α, выражается формулой*

$$S(k) = 2\left[\frac{k}{\alpha}\right] + 1. \tag{2.6}$$

Прежде чем найти $S(k)$ для случая групп вращений правильных многогранников в трехмерном пространстве, рассмотрим некоторые простейшие свойства этих групп.

Каждая конечная группа вращений G правильного многогранника помимо тождественного преобразования состоит из вращений вокруг осей, проходящих через вершины этого многогранника, вращений вокруг осей, проходящих через центры его граней, и наконец, из вращений вокруг осей, проходящих через середины его ребер. Пусть число вершин многогранника равно t_1, число граней — t_2, число ребер — t_3, а углы вращения задаются числами $2\pi k_1/q_1$, $2\pi k_2/q_2$, $2\pi k_3/q_3$ соответственно, где k_j изменяется от нуля до $q_j - 1$. Имеет место следующая

Лемма П.1. *Порядок группы G можно получить перемножением соответствующих друг другу параметров t_j и q_j:*

$$M = t_1 q_1 = t_2 q_2 = t_3 q_3. \tag{2.7}$$

Доказательство. Любое вращение группы G можно осуществить, сначала перенося заданную вершину (грань, ребро) в то место, где она окажется в конце концов, а затем поворачивая многограник вокруг оси, проходящей через эту вершину (центр грани, середину ребра). Угол поворота при этом совпадает с величиной $2\pi k_j/q_j$, где k_j изменяется от нуля до $q_j - 1$. Следовательно, все возможные вращения группы G можно осуществить ровно $t_j q_j$ различными способами. Лемма доказана.

В трехмерном пространстве формулу (2.7) можно также проверить непосредственным вычислением. Приведем значения соответствующих параметров:

для группы тетраэдра G_3^4:

$$\begin{aligned} t_1 &= 4, \quad q_1 = 3, \\ t_2 &= 4, \quad q_2 = 3, \quad M = 12, \\ t_3 &= 6, \quad q_3 = 2; \end{aligned}$$

для группы октаэдра G_3^8:

$$\begin{aligned} t_1 &= 6, \quad q_1 = 4, \\ t_2 &= 8, \quad q_2 = 3, \quad M = 24, \\ t_3 &= 12, \quad q_3 = 2; \end{aligned}$$

для группы икосаэдра G_3^{20}:

$$\begin{aligned} t_1 &= 12, \quad q_1 = 5, \\ t_2 &= 20, \quad q_2 = 3, \quad M = 60. \\ t_3 &= 30, \quad q_3 = 2. \end{aligned}$$

Порядок группы G можно подсчитать еще одним способом.

Лемма II.2. *Суммарное значение числа вершин инвариантного многогранника, его граней и ребер совпадает с порядком группы G, увеличенным на два:*

$$t_1 + t_2 + t_3 = M + 2. \tag{2.8}$$

Доказательство. Группа G состоит из тождественного преобразования и указанных выше вращений на ненулевые углы вокруг каждой из осей, проходящих через вершины, центры граней и середины ребер правильного многогранника. Каждому полюсу отвечают $q_j - 1$ таких вращений. Их общее число, очевидно, задается величиной $\sum(q_j - 1)/2$, где суммирование проводится по всевозможным полюсам (делить на два необходимо потому, что в сумме каждое вращение подсчитывается дважды, так как каждая ось имеет два полюса). Таким образом, порядок группы G задается формулой

$$M = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} t_j(q_j - 1).$$

Отсюда и из (2.7) получаем равенство (2.8). Лемма II.2 доказана.

Число M всегда делится на $2q_j$. В самом деле, группа G содержит подгруппы порядка $2q_j$, порождаемые элементами циклической подгруппы G порядка q_j и поворотом, меняющим северный и южный полюсы оси вращения. Но порядок подгруппы всегда является делителем порядка группы, т. е. M должно делиться на $2q_j$.

Перейдем к выводу явных формул для функции $S(k)$.

Теорема II.6. *Число линейно независимых сферических гармоник порядка k, инвариантных при всех вращениях группы G, равно*

$$S(k) = \left[\frac{k}{q_1}\right] + \left[\frac{k}{q_2}\right] + \left[\frac{k}{q_3}\right] + 1 - k. \tag{2.9}$$

Доказательство. Для вывода формулы (2.9) воспользуемся теорией представлений групп. Элементарное изложение необходимых сведений имеется, например, в [40].

В качестве пространства представления группы G выберем пространство R_{2k+1} сферических гармоник порядка k. Любому вращению g из G сопоста́вим линейный оператор T_g на R_{2k+1}, положив его значение на любой сферической гармонике $Y(\theta, \varphi)$ порядка k равным гармонике $Y(g(\theta, \varphi))$. Тем самым получаем представление группы G порядка $2k+1$. Выбрав в R_{2k+1} какой-либо базис, найдем соответствующее ему матричное представление оператора T_g. Обозначим эту матрицу через A_g.

Как известно, всякое конечномерное представление распадается на неприводимые. В нашем случае это означает, что R_{2k+1} разлагается в прямую сумму подпространств, каждое из которых инвариантно относительно всех линейных операторов T_g, $g \in G$:

$$R_{2k+1} = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_I. \tag{2.10}$$

При этом ни в одном из R_j, $1 \le j \le I$, нельзя выделить нетривиального подпространства, также инвариантного относительно всех операторов T_g, $g \in G$. В соответствии с этим матрица A_g также распадается в прямую сумму:

$$A_g = A_g^{(1)} \oplus A_g^{(2)} \oplus \cdots \oplus A_g^{(I)}. \tag{2.11}$$

Среди R_j находятся, вообще говоря, несколько одномерных подпространств. Соответствующая матрица $A_g^{(j)}$ при этом сводится к числу, равному единице. Количество таких слагаемых в (2.11) в точности равно $S(k)$. Используем это обстоятельство и выведем нужную формулу.

След матрицы A_g, обозначаемый как $\chi(A_g)$, в силу (2.11) можно записать в виде суммы следов $\chi\big(A_g^{(s)}\big)$:

$$\chi(A_g) = \sum_{s=1}^{I} \chi\big(A_g^{(s)}\big). \tag{2.12}$$

Напомним, что величина $\chi\big(A_g^{(j)}\big)$ называется *характером* представления G в пространстве R_j и при этом имеет место ортогональность характеров, отвечающих различным представлениям. Сформулируем последнее утверждение точнее.

Пусть

$$\chi(A_{g_1}^{(j)}), \chi(A_{g_2}^{(j)}), \ldots, \chi(A_{g_M}^{(j)}), \quad \chi(A_{g_1}^{(k)}), \chi(A_{g_2}^{(k)}), \ldots, \chi(A_{g_M}^{(k)})$$

— совокупности характеров неприводимых представлений группы G в пространствах R_j и R_k соответственно. Два представления называют *эквивалентными*, если все матрицы $A_{g_s}^{(j)}$ и $A_{g_s}^{(k)}$, $s = 1, 2, \ldots, M$, имеют один и тот же порядок и подобны:

$$A_{g_s}^{(j)} = B A_{g_s}^{(k)} B^{-1}.$$

Справедливы равенства

$$\sum_{g \in G} \chi(A_g^{(j)}) \bar{\chi}(A_g^{(k)}) = \begin{cases} M, & \text{если представления } \{A_g^{(j)}\} \text{ и } \{A_g^{(k)}\} \\ & \text{эквивалентны,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Если пространство R_j одномерно, то характер $\chi(A_g^{(j)})$ равен единице. Учитывая это и суммируя обе части (2.12) по всем $g \in G$, получим равенство

$$\sum_{g \in G} \chi(A_g) = \sum_{s=1}^{I} \Big\{ \sum_{g \in G} \chi(A_g^{(s)}) \bar{\chi}(A_g^{(j)}) \Big\}. \tag{2.14}$$

В силу (2.13) внутренняя сумма в правой части (2.14) равна M при тех s, для которых R_s имеет единичную размерность, и обращается в нуль для всех остальных s. Число одномерных пространств R в сумме (2.10) равно $S(k)$. Следовательно, имеет место формула

$$S(k) = \frac{1}{M} \sum_{g \in G} \chi(A_g). \tag{2.15}$$

Этот способ вычисления $S(k)$ и формула (2.15) были предложены Д. К. Фаддеевым.

Подсчитаем выражение в правой части равенства (2.15). Идея дальнейших рассуждений состоит в том, что для конкретного вращения $g \in G$ следует выбирать такой базис пространства представления R_{2k+1}, в котором матрица A_g принимает наиболее простой вид, а затем явно найти ее след.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^3$ декартовы координаты (x, y, z), направив ось z по оси, вокруг которой происходит поворот g на некоторый угол. С этой системой свяжем сферические координаты (r, θ, φ) и базис (2.5) в пространстве R_{2k+1}. Вычислим матрицу A_g в этом базисе. Пусть g — это поворот на угол $2\pi s/q_j$, где $s = 0, 1, \ldots, q_j - 1$, а $Y_{k,m}(\theta, \varphi)$ — сферическая функция (2.5). Тогда гармонику $Y_{k,m}(g(\theta, \varphi))$ можно найти по формуле

$$Y_{k,m}(g(\theta, \varphi)) = e^{i2\pi ms/q_j} Y_{k,m}(\theta, \varphi).$$

Это значит, что матрица A_g диагональна с элементами $e^{i2\pi ms/q_j}$ на диагонали. Ее след, таким образом, равен сумме этих экспонент по всем m от $-k$ до k:

$$\chi(A_g) = \sum_{m=-k}^{k} e^{i2\pi ms/q_j} = \frac{\sin((2k+1)\pi s/q_j)}{\sin(\pi s/q_j)}. \qquad (2.16)$$

Используя равенство (2.16), преобразуем правую часть формулы (2.15). Суммирование в ней происходит по матрицам A_g, соответствующим всевозможным элементам $g \in G$. Напомним, что G состоит из t_1 вращений вокруг осей, проходящих через вершины инвариантного многоугольника, t_2 вращений вокруг осей, проведенных через центры его граней, и, наконец, из t_3 вращений вокруг осей, проходящих через середины ребер. Вокруг каждой оси возможны ровно q_j различных поворотов на углы $2\pi s/q_j$, где $s = 0, 1, \ldots, q_j - 1$. Учтем все такие вращения и сложим следы соответствующих им матриц A_g. При этом каждому элементу группы, кроме единичного, будут соответствовать два слагаемых: первое возникает при подсчете поворотов вокруг одного полюса, второе — при подсчете поворотов вокруг другого полюса. Единичному элементу группы G в подсчитываемой сумме следов будут соответствовать $t_1 + t_2 + t_3$ слагаемых. След матрицы A_0, сопоставленной тождественному преобразованию, в силу (2.16) равен $2k + 1$. Таким образом, равенство (2.15) можно записать в эквивалентном виде:

$$S(k) = \frac{1}{M}\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{3} t_j \left(\sum_{s=0}^{q_j-1} \sum_{m=-k}^{k} e^{i2\pi ms/q_j}\right) - (2k+1)(t_1 + t_2 + t_3)\right] + 2k + 1\right\}. \qquad (2.17)$$

Двойная сумма в круглых скобках, как несложно подсчитать, равна величине

$$\left(2\left[\frac{k}{q_j}\right]+1\right)q_j.$$

Подставляя это выражение в равенство (2.17), а также вспоминая соотношения (2.7), (2.8), приходим к формуле (2.9).

Теорема II.6 доказана.

Получим еще одно представление функции $S(k)$. Обозначим через Q^* множество тех q_j, которые не являются делителями k.

Теорема II.7. *Число $S(k)$ представляет собой целую часть величины*

$$\frac{1}{M}\Big(2k-\sum_{q_j\in Q^*}t_j\Big)+1. \tag{2.18}$$

Доказательство. Выразив в формуле (2.9) целую часть $[k/q_j]$ через дробную, получим

$$S(k)=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{k}{q_j}-\left\{\frac{k}{q_j}\right\}\right)+1-k.$$

В силу равенств (2.7), (2.8) имеем

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{k}{q_j}=k\left(1+\frac{2}{M}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{k}{q_j}\right\}=\sum_{q_j\in Q^*}\left\{\frac{k}{q_j}\right\}=\sum_{q_j\in Q^*}\frac{1}{q_j}+\sum_{q_j\in Q^*}\frac{\eta_j}{q_j}.$$

Здесь $0\le\eta_j\le q_j-2$. Таким образом,

$$S(k)=1+\frac{1}{M}\Big(2k-\sum_{q_j\in Q^*}t_j\Big)-\sum_{q_j\in Q^*}\frac{\eta_j}{q_j}.$$

При этом

$$0\le\sum_{q_j\in Q^*}\frac{\eta_j}{q_j}\le\sum_{j=1}^{3}\frac{q_j-2}{q_j}=1-\frac{4}{M}<1.$$

Следовательно, $S(k)$ представляет собой целое число, не превосходящее (2.18), причем разность величин (2.18) и $S(k)$ меньше единицы. Значит, $S(k)$ есть целая часть (2.18).

Теорема II.7 доказана.

Из полученного представления функции $S(k)$ в виде целой части от (2.18) непосредственно вытекает еще одно свойство $S(k)$:

$$S(k + M/2) = S(k) + 1.$$

Отсюда, в частности, получаем следующую формулу:

$$S(k) = \begin{cases} p & \text{при } 2k + 1 \leq \sum\limits_{q_j \in Q^*} t_j, \\ p + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.19}$$

Здесь через p обозначена целая часть дроби $(2k + 1)/M$.

На этом закончим вывод различных представлений числа $S(k)$ и рассмотрим вопрос о том, как в трехмерном случае построить все инвариантные относительно группы G сферические гармоники заданного порядка k.

Нам понадобится специальная система гармонических полиномов. Помимо исходных координат (x, y, z) рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ декартовы координаты (x_k, y_k, z_k). При любом натуральном n и любом выборе осей x_k, y_k, z_k функции

$$\zeta_k^n = (x_k + iy_k)^n \tag{2.20}$$

являются однородными гармоническими многочленами степени n от исходных переменных (x, y, z). Их значения на единичной сфере задают набор сферических гармоник порядка n. Имеет место следующая

Теорема II.8. *Любые из $2n+1$ наперед взятых полиномов вида (2.20) линейно независимы между собой, если направления осей $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ различны.*

Доказательство. Воспользуемся комплексным представлением точек единичной сферы S_3 при помощи стереографической проекции. Лучами, проходящими через южный полюс сферы, отобразим ее однозначно на плоскость, проведенную через экватор. Введя на

S_3 полярные координаты (θ, φ), для любой точки (x, y, z), лежащей на сфере, получим равенства

$$x = \cos\varphi \sin\theta, \ y = \sin\varphi \sin\theta, \ z = \cos\theta. \tag{2.21}$$

Сопоставим вектору (x, y, z) комплексное число w, положив

$$w = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \tag{2.22}$$

Если точка (x, y, z) пробегает всевозможные значения на единичной сфере, то число w, определяемое формулой (2.22), принимает всевозможные значения в комплексной плоскости. Это соответствие однозначно.

Любое вращение сферы означает дробно-линейное преобразование комплексной плоскости вида

$$w_1 = \frac{aw - \bar{c}}{cw + \bar{a}}, \tag{2.23}$$

где числа a, c удовлетворяют условию нормировки:

$$a\bar{a} + c\bar{c} = 1. \tag{2.24}$$

Выразим через w функцию $(x + iy)^n$. Из равенств (2.21), (2.22) следует, что

$$(x + iy)^n = \frac{2^n w^n}{(1 + w\overline{w})^n}. \tag{2.25}$$

Пусть система координат (x_1, y_1, z_1) получается поворотом системы (x, y, z) на некоторый угол. Этому вращению соответствует дробно-линейное преобразование в комплексной плоскости (2.23), (2.24). Используя это, выразим функцию $\zeta_1^n = (x_1 + iy_1)^n$ через w. Из (2.25) и (2.23) имеем

$$x_1 + iy_1 = \frac{2w_1}{1 + w_1\overline{w}_1} = 2a\bar{c}\frac{(w\overline{w} - 1) + w/w^{(0)} - \overline{w}w^{(0)}}{1 + w\overline{w}}. \tag{2.26}$$

Здесь через $w^{(0)}$ обозначена дробь $\bar{c}/a$. Возводя обе части равенства (2.26) в степень n, получим

$$\zeta_1^n = \frac{2^n}{(1 + w\overline{w})^n}(a\bar{c})^n \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!\ l!\ m!}(w\overline{w} - 1)^k w^l (-\overline{w})^m (w^{(0)})^{m-l}. \tag{2.27}$$

Располагая слагаемые в правой части (2.27) в порядке возрастания степеней $w^{(0)}$, после несложных выкладок придем к равенству

$$\zeta_1^n = \frac{(2a\bar{c})^n}{(1+w\overline{w})^n} \sum_{m=-n}^{n} (w^{(0)})^m \left(-\frac{\overline{w}}{w}\right)^{m/2} Q_n^{(|m|)}(w\overline{w}), \tag{2.28}$$

где функция $Q_n^{(s)}(w\overline{w})$ обозначает сумму

$$\sum_{\substack{|s|\le j\le n \\ j\equiv s(\mathrm{mod}\,2)}} \frac{n!}{(n-j)!\,((s+j)/2)!\,((j-s)/2)!}(w\overline{w}-1)^{n-j}(-w\overline{w})^{j/2}.$$

Заметим, что при всех $s=-n,-n+1,\ldots,n$ функция

$$R_n^{(s)}(w\overline{w}) = 2^n \left(-\frac{\overline{w}}{w}\right)^{s/2} \frac{Q_n^{(|s|)}(w\overline{w})}{(1+w\overline{w})^n}, \tag{2.29}$$

будучи выраженной в переменных θ, φ, отличается лишь постоянным множителем от сферической гармоники $e^{-is\varphi}P_n^{(|s|)}(\cos\theta)$. Таким образом, система функций (2.29) порождает базис в пространстве всех сферических гармоник порядка n.

Обозначим через a_k, c_k параметры дробно-линейного преобразования (2.23), отвечающего системе координат (x_k, y_k, z_k). Тогда, пользуясь (2.29), можно разложить функцию ζ_k^n по формуле (2.28):

$$\zeta_k^n = \sum_{m=-n}^{n} a_k^{n-m}\bar{c}_k^{n+m} R_n^{(|m|)}(w\overline{w}). \tag{2.30}$$

Линейная независимость функций $\zeta_1^n,\ldots,\zeta_{2n+1}^n$ имеет место тогда и только тогда, когда определитель Δ соответствующей разложению (2.30) матрицы $\left(a_k^{2n-q}\bar{c}_k^q\right)$, $k=1,2,\ldots,2n+1$, $q=0,1,\ldots,2n$, отличен от нуля. Определитель Δ легко свести к определителю Вандермонда, вынося из каждой строки постоянный множитель вида a_k^{2n}. Несложно установить, что

$$\Delta = \prod_{i<j}(a_j\bar{c}_i - a_i\bar{c}_j). \tag{2.31}$$

Произведение в (2.31) равно нулю только в том случае, когда найдутся разные числа k, l такие, что $a_k/\bar{c}_k = a_l/\bar{c}_l$. Предположим, что это имеет место. Тогда двум разным системам координат будет соответствовать одно и то же дробно-линейное преобразование вида (2.23). Это невозможно, и, значит, определитель (2.31) не обращается в нуль. Теорема II.8 доказана.

С помощью гармонических многочленов вида (2.20) построим базис в пространстве сферических гармоник степени n, инвариантных относительно группы G.

Обозначим целую часть дроби $(2n+1)/M$ через p, а разность $(2n+1) - pM$ через q. Рассмотрим произвольное множество точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}$ на единичной сфере, не эквивалентных одна другой относительно группы G. Составим объединение орбит этих точек:

$$gx^{(1)}, gx^{(2)}, \ldots, gx^{(p)}, \quad g \in G. \tag{2.32}$$

Множество (2.32) состоит, очевидно, из pM различных векторов. Добавим к ним еще q векторов:

$$x^{(2n+1)}, x^{(2n)}, \ldots, x^{(pM+1)}. \tag{2.33}$$

Их выбор будет зависеть от того, больше число $2n+1$ суммы $\sum\limits_{q_j \in Q^*} t_j$ или нет. Более подробно условия, которым должны удовлетворять векторы (2.33), мы сформулируем ниже.

Для каждой из точек $x^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, p$, найдем такое вращение $h(s)$, для которого вектор $h(s)x^{(s)}$ совпадает с направлением оси z. Рассмотрим систему гармонических многочленов

$$\zeta(\mathbf{x}) = x + iy, \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \zeta^n_{g,s} = \zeta^n(h(s)g^{-1}\mathbf{x}), \quad g \in G. \tag{2.34}$$

Средняя функция от $\zeta^n_{g,s}(\mathbf{x})$ по группе G, определяемая формулой

$$\frac{1}{M} \sum_{g_1 \in G} \zeta^n_{g,s}(g_1\mathbf{x}),$$

не зависит от элемента g. Это следует из цепочки равенств

$$\frac{1}{M} \sum_{g_1 \in G} \zeta^n_{g,s}(g_1\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{g_1 \in G} \zeta_{g_1^{-1}g,s}(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{g_3 \in G} \zeta^n_{g_3,s}(\mathbf{x}),$$

первое из которых вытекает из определения (2.34), второе — из замечания, что элемент $g_3 = g_1^{-1}g$ при изменении g_1 по всей группе G также пробегает все значения этой группы. Таким образом, определена не зависящая от $g \in G$ совокупность сферических гармоник

$$Y_n^{(s)}(\theta,\varphi) = \frac{1}{M}\sum_{g_1\in G}\zeta_{g,s}^n(g_1\mathbf{x}); \quad s = 1,2,\ldots,p, \tag{2.35}$$

каждая из которых инвариантна относительно группы G. Эти функции входят в искомый базис.

Лемма II.3. *Если $S(n) = p$, то любая инвариантная относительно G сферическая гармоника $Y_n^*(\theta,\varphi)$ степени n представима линейной комбинацией функций* (2.35).

Доказательство. Выберем в качестве (2.33) точки, расположенные в тех вершинах, центрах граней и серединах ребер многоугольника, для которых $q_j \in Q^*$. Это возможно, так как по условию $S(n) = p$, т. е., как следует из (2.19), $2n+1 \le \sum\limits_{q_j\in Q^*} t_j$. Каждой из точек $\boldsymbol{x}^{(s)}$ при $s = p+1,\ldots,2n+1$, сопоставим гармонический полином

$$\zeta_s^n(\mathbf{x}) = \zeta^n(h(s)\mathbf{x}), \quad s = p+1,\ldots,2n+1. \tag{2.36}$$

Здесь вращение $h(s)$ переводит вектор $\boldsymbol{x}^{(s)}$ в направляющий для оси z, а функция $\zeta(\mathbf{x})$ определена соотношением (2.34).

Каждой точке $x^{(s)}$ при $s \ge p+1$ соответствует циклическая подгруппа G_q в G, состоящая из вращений вокруг оси с концом в $\boldsymbol{x}^{(s)}$ на углы вида $2\pi k/q$, где $k = 0,1,\ldots,q-1$. Поворот системы $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_s)$ вокруг оси $\boldsymbol{z}_s$ на угол φ умножает $\zeta_s^n(\mathbf{x})$ на величину $e^{in\varphi}$. Подсчитаем среднее значение $\zeta_s^n(\mathbf{x})$ по циклической подгруппе C_α:

$$\sum_{g\in C_\alpha}\zeta_s^n(g\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{i2\pi kn/\alpha}\zeta_s^n(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.37}$$

Выделим в G множество K элементов $g^{(k)}, k = 1,\ldots,M/\alpha$, таких, что G разбивается на непересекающиеся смежные классы $g^{(k)}C_\alpha$, $k = 1,\ldots,M/\alpha$, группы G по подгруппе C_α. Тогда

$$\sum_{g\in G}\zeta_s^n(g\mathbf{x}) = \sum_{g_2\in K}\sum_{g_1\in C_\alpha}\zeta_s^n(g_1(g_2\mathbf{x})) = 0.$$

Таким образом, среднее значение по всей группе G от любой функции вида (2.36) обращается в нуль:

$$\sum_{g\in G} \zeta_s^n(g\mathbf{x}) = 0. \tag{2.38}$$

К множеству (2.36) из q однородных гармонических полиномов степени n добавим pM функций $\zeta_{g,s}^n(\mathbf{x})$, определяемых формулой (2.34). Получим $p + q = 2n + 1$ гармонических многочленов. Несложно убедиться в том, что каждый из них можно записать в виде (2.20), причем оси z_k соответствующих координат (x_k, y_k, z_k) будут различны для всех k от 1 до $2n+1$. По теореме II.8 исходную гармонику $Y_n^*(\theta,\varphi)$ можно представить в виде линейной комбинации рассматриваемых многочленов:

$$Y_n^*(\theta,\varphi) = \sum_{s=1}^{p}\sum_{g\in G} a_{g,s}\zeta_{g,s}^n(\mathbf{x}) + \sum_{k=p+1}^{2n+1} a_k\zeta_k^n(\mathbf{x}). \tag{2.39}$$

По условию гармоника $Y_n^*(\theta,\varphi)$ инвариантна относительно группы G. Поэтому среднее значение Y_n^* по этой группе совпадает с ней самой. Учитывая это, из (2.39) получим равенство

$$Y_n^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{p}\sum_{g\in G} a_{g,s}\sum_{g_1\in G}\zeta_{g,s}^n(g_1\mathbf{x}) + \frac{1}{M}\sum_{k=p+1}^{2n+1} a_k\sum_{g_1\in G}\zeta_k^n(g_1\mathbf{x}), \tag{2.40}$$

или, используя (2.35) и (2.38), — равенство

$$Y_n^*(\theta,\varphi) = \sum_{s=1}^{p}\Big(\sum_{g\in G} a_{g,s}\Big)Y_n^{(s)}(\theta,\varphi).$$

Лемма II.3 доказана.

Рассмотрим случай, когда $S(n) = p + 1$. Пусть $x^{(pM+1)}$ — произвольная точка единичной сферы, не совпадающая ни с одним из векторов (2.32). Найдем вращение $h(pM+1)$, переводящее $x^{(pM+1)}$ в направляющий вектор оси z, и положим

$$\zeta_{p+1}^n(\mathbf{x}) = \zeta^n(h(pM+1)\mathbf{x}). \tag{2.41}$$

Среднее значение этой функции по группе G обозначим символом $Y_n^{(p+1)}(\theta,\varphi)$, т. е.

$$Y_n^{(p+1)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{M}\sum_{g\in G}\zeta_{p+1}^n(g\mathbf{x}). \tag{2.42}$$

Очевидно, что это инвариантная сферическая гармоника порядка n.

Лемма II.4. Если $S(n)=p+1$, то любая инвариантная относительно G сферическая гармоника $Y_n^*(\theta,\varphi)$ порядка n представима линейной комбинацией функций $Y_n^{(s)}(\theta,\varphi)$, где $s=1,2,\ldots,p,p+1$.

Доказательство. Выберем в качестве (2.33) систему эквивалентных друг другу точек:

$$x^{(pM+1)},\, g_2x^{(pM+1)},\ldots,g_qx^{(pM+1)}. \tag{2.43}$$

Элементы $g_2,g_3,\ldots,g_q$ произвольны в G. Добавив к ним единицу группы G, получим множество K, состоящее из q элементов. Заметим, что вращение $h(g)=h(pM+1)g^{-1}$ переводит точку $gx^{(pM+1)}$ в вектор, направляющий для оси z. Построим гармонические многочлены $\zeta_g^n(\mathbf{x})$ степени n:

$$\zeta_g^n(\mathbf{x})=\zeta^n(h(pM+1)g^{-1}\mathbf{x}),\quad g\in K. \tag{2.44}$$

Средняя функция от $\zeta_g^n(\mathbf{x})$ по группе G, определяемая формулой

$$\frac{1}{M}\sum_{g_*\in G}\zeta_g^n(g_*\mathbf{x}), \tag{2.45}$$

не зависит от g из K. Это следует из цепочки равенств

$$\sum_{g_*\in G}\zeta_g^n(g_*\mathbf{x})=\sum_{g_*\in G}\zeta_{g_*^{-1}g}^n(\mathbf{x})=\sum_{g\in G}\zeta_g^n(\mathbf{x}).$$

Первое из них вытекает из определения (2.44), а второе — из того факта, что элемент $g_*^{-1}g$ при изменении g по всей группе G также пробегает все значения этой группы. Таким образом, функция (2.45) действительно не зависит от $g\in K$.

Если g совпадает с g_1 — единичным элементом G, то $\zeta_{g_1}^n(\mathbf{x})=\zeta_{p+1}^n(\mathbf{x})$ и, значит, для любого $g\in G$ имеет место равенство

$$\frac{1}{M}\sum_{g_*\in G}\zeta_g^n(g_*\mathbf{x})=\frac{1}{M}\sum_{g_*\in G}\zeta_{p+1}^n(g_*\mathbf{x})=Y_n^{(p+1)}(\theta,\varphi). \tag{2.46}$$

Сферическую гармонику $Y_n^*(\theta,\varphi)$, инвариантную относительно

G, можно представить формулой, аналогичной (2.39):

$$Y_n^*(\theta,\varphi) = \sum_{s=1}^{p}\sum_{g\in G} a_{g,s}\zeta_{g,s}^n(\mathbf{x}) + \sum_{g\in K} a_g\zeta_g^n(\mathbf{x}).$$

Взяв среднее значение по группе G от обеих частей этого равенства, получим

$$Y_n^*(\theta,\varphi) = \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{p}\Big(\sum_{g\in G} a_{g,s}\Big)Y_n^{(s)}(\theta,\varphi) + \frac{1}{M}\sum_{g\in K} a_g \sum_{g_1\in G}\zeta_g^n(g_1\mathbf{x}).$$

Используя равенство (2.46), видим, что $Y_n^*(\theta,\varphi)$ действительно представима линейной комбинацией функций $Y_n^{(s)}(\theta,\varphi)$, $s = 1,\ldots,p+1$.

Лемма II.4 доказана.

Мы рассмотрели пока лишь группы собственных вращений многогранников без отражений. *Отражением* называется преобразование, сопоставляющее точке единичной сферы с координатами (θ,φ) точку (θ_1,φ_1), где $\theta_1 = \pi - \theta$, $\varphi_1 = \pi + \varphi$. Группа G и отражение порождают полную группу G^*, содержащую в два раза больше элементов.

Теорема II.9. *Инвариантные функции группы G^* четного порядка n совпадают с инвариантными функциями группы G. Группа G^* не допускает инвариантных сферических гармоник нечетного порядка.*

Доказательство. Преобразование отражения равносильно замене $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Многочлены четной степени не меняются при таком преобразовании, а многочлены нечетной степени меняют знак. Таким образом, функции базиса (2.5) при четном k инвариантны относительно отражения, а при нечетном — меняют знак. Поэтому среднее арифметическое по группе G^* от гармоники четного порядка, т. е. инвариантная гармоника четного порядка, будет совпадать со средней функцией по группе G. Для гармоник нечетного порядка это среднее будет равно нулю.

Теорема II.9 доказана.

Аналогичными исследованиями на пространствах размерностей больше трех занимался Г. Н. Салихов [146]. Он получил формулы линейного представления групп, углов поворота и размерностей $S(k)$

в случае правильных многогранников, расположенных в четырех-, пятимерных пространствах. Например, для 600-гранника четырехмерного пространства при четном k функцию $S(k)$ можно вычислить по формуле

$$S(k) = \frac{1}{240}[120\tau_1(k) + 24\tau_2(k) + 24\tau_3(k) + 40\tau_4(k) + \tau_5(k)],$$

где величины $\tau_j(k)$ задаются равенствами

$$\tau_1(k) = \left(2\left[\frac{k}{10}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{k}{6}\right]+1\right) + \left(2\left[\frac{k}{10}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{k}{4}\right]+1\right) + \left(2\left[\frac{k}{6}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{k}{4}\right]+1\right),$$

$$\tau_2(k) = 4\left(\sum_{r=0}^{4}\left(\left[\frac{k-2r}{10}\right]+1\right)^2 + \left[\frac{k-8}{10}\right] - \left[\frac{k-2}{10}\right] - \left[\frac{k}{10}\right]\right) - 3,$$

$$\tau_3(k) = \left(2(k-4) - 5\left[\frac{k-4}{5}\right]\right) + \left(1 + \left[\frac{k-4}{5}\right]\right) + k + 1,$$

$$\tau_4(k) = \left(2(k-2) - 3\left[\frac{k-2}{3}\right]\right)\left(1 + \left[\frac{k-2}{3}\right]\right) + k + 1,$$

$$\tau_5(k) = 13(k+1)^2 - 4(k+1)\left(59 + 48\left[\frac{k}{10}\right] + 40\left[\frac{k}{6}\right] + 30\left[\frac{k}{4}\right]\right) + 15.$$

Если же k нечетно, то функция $S(k)$ равна нулю.

Задачу о построении кубатурных формул, инвариантных относительно групп вращений, рассматривали В. И. Лебедев [73–78], И. П. Мысовских [84, 85], С. И. Коняев [66–68]. В. И. Лебедев предложил использовать при построении кубатурных формул систему образующих элементов алгебры многочленов, инвариантных относительно группы G (см. [204]), применив при этом ряд оригинальных приемов. Во-первых, в качестве новой системы искомых величин было предложено взять множество значений образующих элементов алгебры в узлах кубатурной формулы. Во-вторых, среди всех инвариантных многочленов особо выделены те, которые обращаются в нуль на осях и плоскостях симметрии группы G. Переход от значений таких «симметричных» многочленов в узлах к значениям элементарных симметрических функций позволил значительно упростить систему уравнений (I.1.7) и существенно понизить ее порядок.

Предложен был также некоторый способ подсчета размерности пространства многочленов, инвариантных относительно группы G.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ группу октаэдра с отражениями $\left(G_n^{2^n}\right)^*$. Образующими элементами алгебры многочленов, инвариантных относительно этой группы, являются следующие элементарные симметрические функции:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2, \ \ldots, \quad \sigma_n^2 = x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2.$$

Любой многочлен $P(x)$, инвариантный относительно группы $\left(G_n^{2^n}\right)^*$, единственным образом представим в виде многочлена от переменных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$:

$$P(x) = Q(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots, \sigma_n(x)).$$

При этом размерность пространства инвариантных многочленов степени k совпадает с числом решений в неотрицательных целых числах следующего уравнения:

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \cdots + 2n\alpha_n = k.$$

Любой многочлен $P(x) = Q(\sigma(x))$ на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^n$, очевидно, представляет собой функцию от $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$. Поэтому размерность пространства инвариантных сферических гармоник порядка k совпадает с числом решений уравнения

$$4\alpha_2 + \cdots + 2n\alpha_n = k$$

в неотрицательных целых числах. В этом случае система уравнений (I.1.7) эквивалентна следующей системе с неизвестными c_k и $\sigma_k = (\sigma_1(x^{(k)}), \ldots, \sigma_n(x^{(k)}))$, $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$I_N(Q(\sigma)) = I(Q(\sigma)). \tag{2.47}$$

Конечное множество, которому принадлежит полином $Q(\sigma(x))$, следует выбирать так, чтобы соответствующее множество полиномов $P(x) = Q(\sigma(x))$ представляло собой базис пространства $\mathbf{P}_{m_G}$. Уравнений в системе (2.47) значительно меньше, чем в (I.1.7).

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ группу икосаэдра с отражениями $(G_3^{20})^*$. Система образующих алгебры инвариантных многочленов задается следующими функциями:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2;\\
I_6 &= 5x_1^4x_3^2 + 5x_2^4x_3^2 + x_3^6 + 10x_1^2x_2^2x_3^2\\
&\qquad - 5x_1^2x_3^4 - 5x_2^2x_3^4 + 2x_1^5x_3 + 10x_1x_2^4x_3 - 20x_1^3x_2^2x_3;\\
I_{10} &= \left(4x_1^2 - 6x_1x_3 + x_3^2\right)\left(x_1^4 + 5x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^3x_3\right.\\
&\qquad - 2x_1x_3^3 - 10x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - 30x_1x_2^2x_3 - 25x_2^2x_3^2\big)\big(x_1^4 + 5x_2^4\\
&\qquad \left. + x_3^4 - 8x_1^3x_3 + 8x_1x_3^3 - 10x_1^2x_2^2 + 14x_1^2x_3^2 - 10x_2^2x_3^2\right).
\end{aligned}
$$

Число линейно независимых сферических гармоник порядка k в этом случае равно числу решений в целых числах уравнения

$$6\alpha_2 + 10\alpha_3 = k.$$

Система образующих алгебры многочленов, инвариантных относительно группы тетраэдра G_n^{n+1}, приведена в [85].

§ 3. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно групп вращений

В этом параграфе мы укажем некоторые простейшие кубатурные формулы на поверхности единичной сферы трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, инвариантные по отношению к преобразованиям группы G^*, совпадающей с G_3^{8*} либо с G_3^{20*}. Кроме того, будут получены некоторые асимптотические соотношения между числом узлов рассматриваемых кубатурных формул и числом линейно независимых сферических гармоник, интегрируемых точно этими формулами.

Обозначим через S единичную сферу пространства $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Интеграл $I(f)$, взятый от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по S, будем приближать линейной комбинацией

$$I_N(f) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x^{(k)}),$$

где $x^{(k)}$ — узлы, расположенные на S. Кубатурную формулу

$$I(f) = \int\limits_S f(x,y,z)\,dS \cong I_N(f) \tag{3.1}$$

сконструируем так, чтобы она была инвариантной относительно преобразований группы G^*. Иными словами, множество узлов $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, должно быть объединением орбит рассматриваемой группы G^*, а коэффициенты формулы, соответствующие точкам $x^{(k)}$ одной и той же орбиты, должны совпадать.

Правильный многогранник, вращения которого порождают группу G^*, обозначим как $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — октаэдр, то его вершины в сферических координатах (θ, φ) запишем следующим образом:

$$\theta = 0;\ \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}; \quad \theta = \pi. \tag{3.2}$$

Если же $\mathfrak{M}$ — икосаэдр, то его вершины имеют следующие сферические координаты:

$$\theta = 0; \quad \theta = \operatorname{arctg} 2, \quad \varphi = 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5};$$

$$\theta = \pi - \operatorname{arctg} 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}; \qquad \theta = \pi.$$

Отметим, что относительно преобразований группы G^* инвариантно не только множество всех вершин $\mathfrak{M}$, но и множество всех центров граней $\mathfrak{M}$, а также множество середин ребер $\mathfrak{M}$. Координаты соответствующих точек мы здесь не выписываем.

Рассмотрим два способа построения узлов формулы (3.1). Заметим, что поверхность многогранника $\mathfrak{M}$ состоит из правильных треугольников, прилегающих к его вершинам (по четыре в октаэдре и по пять — в икосаэдре). Будем называть любой из этих треугольников *основным*.

Первый способ. Пусть k — натуральное число, $k \geq 2$, а Δ — основной треугольник многогранника $\mathfrak{M}$. На каждой из сторон Δ разместим на одинаковом расстоянии друг от друга $k-1$ точек. Через каждую из этих точек, лежащих на одной из сторон Δ, проведем внутри Δ два отрезка, параллельные двум остальным его сторонам. В результате получим некоторое разбиение R треугольника Δ на мелкие части. Вершины мелких треугольников разбиения R образуют *решетку узлов* $R(k)$. Ее вид зависит от величины остатка, получающегося при делении k на 6. Центр основного треугольника

и середины его сторон могут входить или не входить в $R(k)$.

Проделав аналогичные построения для каждого из основных треугольников, образующих границу $\mathfrak{M}$, получим некоторое множество $R(k)$ точек, расположенных на поверхности многогранника $\mathfrak{M}$. Ясно, что это множество инвариантно относительно преобразований группы G^*. Выпустим из центра сферы S лучи, проходящие через точки множества $R(k)$, и возьмем в качестве узлов $x^{(k)}$ кубатурной формулы (3.1) точки пересечения этих лучей со сферой S. Будем говорить, что получившаяся кубатурная формула (3.1) *имеет решетку узлов* I-*го типа*.

Второй способ задания узлов $x^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, мало отличается от первого. Задавшись натуральным $k \geq 2$, основным треугольником Δ и разбиением каждой из сторон Δ на $k-1$ равных частей, проведем через любую точку этого разбиения два отрезка, параллельных высотам основного треугольника, а не его сторонам, как в первом случае. Вид получающегося разбиения R зависит от четности k.

Спроектировав лучами решетку узлов $R(k)$, получившуюся на поверхности многогранника $\mathfrak{M}$, в точки сферы S, получим кубатурную формулу с *решеткой узлов* II-*го типа*. Ясно, что при увеличении числа k множества узлов как I-го, так и II-го типа сгущаются.

Подсчитаем число узлов $N = N(k)$ кубатурной формулы (3.1), а также число $L = L(k)$ различных орбит группы G^*, образующих множество этих узлов. Для инвариантной относительно G^* кубатурной формулы число $L(k)$ совпадает, очевидно, с числом независимых коэффициентов c_k.

Для решетки I-го типа в основном треугольнике вместе с его вершинами содержится S_{I} точек, где

$$S_{\mathrm{I}} = (k+1) + k + (k-1) + \cdots + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Для группы G^* элементарные вычисления дают соотношения

$$N_{\mathrm{I}} = t_2 S_{\mathrm{I}}(k) - t_3(k-1) - t_1(q_1 - 1) = \frac{M}{6}k^2 + 2,$$
$$L_{\mathrm{I}} = \begin{cases} (s+1)(k-3s) + 1, & \text{если } k = 6s, \\ (s+1)(k-3s), & \text{если } k \neq 6s. \end{cases} \tag{3.3}$$

Аналогичные формулы имеют место и для решетки II-го типа:

$$S_{\mathrm{II}} = \frac{3k^2 + 3k + 2}{2}.$$

Те же вычисления, что и в первом случае, приводят к формулам

$$N_{\mathrm{II}} = t_2 S_{\mathrm{II}}(k) - t_3(k-1) - t_1(q_1 - 1) = \frac{M}{2}k^2 + 2,$$
$$L_{\mathrm{II}} = \begin{cases} (s+1)^2, & \text{если } k = 2s, \\ (s+1)(s+2), & \text{если } k = 2s+1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Исключив L из равенств (3.3) и (3.4), выразим N как функцию переменной L. Соответствующая формула будет асимптотически точной при $L \to \infty$ или, что то же самое, при $k \to \infty$

$$N_{\mathrm{I}}(L) = 2M(L - \sqrt{3}\,L^{1/2} + \ldots), \quad N_{\mathrm{II}}(L) = 2M(L - 2L^{1/2} + \ldots). \tag{3.5}$$

Пусть множество узлов кубатурной формулы (3.1) построено одним из описанных выше способов. Потребуем, чтобы формула (3.1) была точна на полиномах до порядка n включительно или, что по теореме II.4 то же самое, на сферических гармониках степени не более n. Среди таких гармоник имеется $(n+1)^2$ линейно независимых. Выбрав соответствующий базис, запишем условия точности на его функциях рассматриваемой кубатурной формулы в виде системы линейных уравнений относительно ее коэффициентов. Эта система состоит из $(n+1)^2$ уравнений. Решив ее, можно получить окончательный вид формулы (3.1).

Заметим, однако, что при таком подходе мы никак не воспользовались инвариантностью кубатурной формулы относительно группы G^*. Между тем, как мы сейчас покажем, это условие позволяет значительно уменьшить размеры решаемой линейной системы.

Согласно теореме II.3 кубатурная формула (3.1), точная на сферических гармониках порядка не больше n, инвариантных относительно группы G^*, будет точна на всех сферических гармониках до порядка n включительно. Общее число $\sigma^*(n)$ инвариантных относительно G^* линейно независимых гармоник порядка не больше n существенно меньше $(n+1)^2$. Эту величину можно вычислить по формуле

$$\sigma^*(n) = \sum_{k=0}^{n} S^*(k),$$

где $S^*(k)$ — общее число сферических гармоник порядка k, инвариантных относительно G^*. По теореме II.9 величина $S^*(k)$ совпадает с $S(k)$ при четном k и равна нулю в противном случае. Таким образом, для подсчета $\sigma^*(n)$ можно использовать все полученные в предыдущем параграфе представления величины $S(k)$. В частности,

из равенства $S(k+M/2) = S(k)+1$ несложно вывести следующее соотношение, верное при $n = kM/2 - 2j + 1$ и $j = 1, 2, \ldots, [M/4]$:

$$\sigma^*(n) = (k-1)\sigma^*\left(\frac{M}{2}-1\right) + \sigma^*\left(\frac{M}{2}-2j+1\right) + \frac{k(k-1)}{2}\frac{M}{4} - k(j-1). \quad (3.6)$$

Взяв теперь какую-нибудь систему из $\sigma^*(n)$ линейно независимых инвариантных относительно G^* гармоник порядка не больше n, запишем условие точности на этих функциях кубатурной формулы (3.1). В результате получим совокупность из $\sigma^*(n)$ уравнений. Инвариантность формулы (3.1) означает, что среди ее коэффициентов имеется не более L различных. Таким образом, матрица получившейся линейной системы имеет размер $\sigma^*(n) \times L$. Будем считать, что она квадратная, т. е. $\sigma^*(n) = L$. Наибольший номер n, удовлетворяющий последнему равенству, обозначим через $n^*(L)$.

В качестве примера полной реализации предложенного алгоритма приведем формулу, инвариантную относительно группы икосаэдра G_3^{20*}. Ее узлы расположены в вершинах икосаэдра и в проекциях на S центров его граней. При этом $L = 2$, и если в «вершинных» узлах коэффициент c_1 равен $5\pi/42$, а в остальных узлах коэффициент c_2 равен $9\pi/70$, то формула (3.1) точна на полиномах до 9-го порядка включительно. (В этом случае решение n^* уравнения $\sigma^*(n) = 2$ равно 9.) Эта формула была предложена В. А. Диткиным и Л. А. Люстерником в работе [44].

Вторая кубатурная формула имеет узлы в вершинах икосаэдра и в проекциях на S середин его ребер, центров граней и точек, разделяющих медиану основного треугольника в отношении один к двум. При этом $L = 4$ и формула точна на полиномах до 15-й степени включительно, если ее коэффициенты заданы равенствами

$$c_1 \cong 0.0154324\pi,\ c_2 \cong 0.0364968\pi,\ c_3 \cong 0.0381004\pi,\ c_4 \cong 0.0326315\pi.$$

Предложим теперь некоторый количественный критерий оценки свойств кубатурной формулы (3.1). Полное использование всех ее свободных параметров, в число которых входят две координаты любого из узлов $x^{(k)}$ и коэффициенты c_k, позволяет добиться точности кубатурной формулы на всех многочленах до степени n включительно, где n удовлетворяет равенству

$$(n+1)^2 = 3N.$$

Таблица 1

Параметры кубатурной формулы, инвариантной относительно G_3^{8*}

I				II			
L	$N(L)$	$n^*(L)$	$(n^*+1)^2$	L	$N(L)$	$n^*(L)$	$(n^*+1)^2$
1	6	3	16	2	14	5	36
2	18	5	36	4	50	9	100
3	38	7	64	6	110	11	144
4	66	9	100	9	194	15	256
5	102	11	144	12	302	19	400
7	146	13	196	16	434	23	576
8	198	15	256	20	590	25	676
10	258	17	324	25	770	29	900
12	326	19	400	30	974	33	1156
14	402	21	484	36	1202	35	1296
16	486	23	576	42	1454	39	1600
19	578	25	676	49	1730	43	1936
21	678	27	784	56	2030	47	2304
24	786	29	900	64	2354	49	2500
27	902	31	1024	72	2702	53	2916
30	1026	32	1089	81	3074	57	3364
33	1158	35	1296				

В связи с этим для заданной кубатурной формулы, имеющей N узлов и точной на полиномах до степени n_* включительно, введем отношение

$$\eta = \frac{(n_*+1)^2}{3N},$$

которое назовем *коэффициентом эффективности.*

О величине коэффициента эффективности для инвариантных относительно G^* формул, соответствующих малым значениям L, можно судить по табл. 1, 2. Если же L велико, то имеет смысл воспользоваться асимптотическим представлением коэффициента η, которое мы сейчас выведем.

Таблица 2

Параметры кубатурной формулы, инвариантной относительно G_3^{20*}

I				II			
L	$N(L)$	$n^*(L)$	$(n^*+1)^2$	L	$N(L)$	$n^*(L)$	$(n^*+1)^2$
1	12	5	36	2	32	9	100
2	42	9	100	4	122	15	256
3	92	11	144	6	272	19	400
4	162	15	258	9	482	25	676
5	252	17	324	12	762	29	900
7	362	21	484	16	1082	35	1296
8	492	23	576	20	1472	41	1764
10	642	27	784	25	1922	47	2304
12	812	29	900	30	2432	51	2704
14	1002	33	1156	36	3002	57	3364
16	1212	35	1296				
19	1442	39	1600				
21	1692	41	1764				
24	1962	45	2116				
27	2252	49	2500				
30	2562	51	2704				
33	2892	55	3136				
37	3242	59	3600				

Пусть $n = kM/2 - 1$, тогда из (3.6) следует, что

$$\sigma^*(n) = k\sigma^*\left(\frac{M}{2} - 1\right) + \frac{k(k-1)}{2}\frac{M}{4}.$$

При этом справедливы равенства

$$(n+1)^2 = \frac{k^2M^2}{4}, \quad 2M\sigma^*(n) = \frac{k^2M^2}{4} + \left(2M\sigma^*\left(\frac{M}{2} - 1\right) - \frac{M^2}{4}\right)k.$$

Исключая из них параметр k, придем к асимптотической формуле

$$(n+1)^2 = 2M\sigma^*(n) + \left(\frac{M}{2} - 4\sigma^*\left(\frac{M}{2} - 1\right)\right)(2M\sigma^*(n))^{1/2} + O(1).$$

При $n = n_*(L)$ величина $\sigma^*(n)$ «почти» совпадает с L, т. е. велика при больших L. В случае октаэдра, когда $M = 24$, имеем

$$(n_* + 1)^2 = 2M(L - \sqrt{4/3}\, L^{1/2} + \dots).$$

В случае икосаэдра, когда $M = 60$, справедливо равенство

$$(n_* + 1)^2 = 2M(L - \sqrt{49/30}\, L^{1/2} + \dots).$$

Отсюда и из соотношений (3.5) несложно получить асимптотическое представление коэффициента эффективности для формул с решеткой как I-го, так и II-го типа.

Опишем схему построения кубатурных формул, обладающих наивысшим порядком точности и инвариантных относительно группы G_3^{8*}. Будем считать, что вершины октаэдра $\mathfrak{M}$ лежат на осях координат, т. е. заданы соотношениями (3.2). Искомая кубатурная формула имеет вид

$$I(f) \cong I_N(f) = A_1 \sum_{i=1}^{6} f\big(a_i^{(1)}\big) + A_2 \sum_{i=1}^{12} f\big(a_i^{(2)}\big) + A_3 \sum_{i=1}^{8} f\big(a_i^{(3)}\big)$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_1} B_k \sum_{i=1}^{24} f\big(b_i^{(k)}\big) + \sum_{k=1}^{N_2} C_k \sum_{i=1}^{24} f\big(c_i^{(k)}\big) + \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sum_{i=1}^{36} \big(d_i^{(k)}\big). \quad (3.7)$$

Узлы $a_i^{(1)}$ находятся в вершинах $\mathfrak{M}$, точки $a_i^{(2)}$, $a_i^{(3)}$ получаются проектированием на S соответственно середин ребер и центров граней. Прообразы точек $b_i^{(k)}$ и $c_i^{(k)}$ лежат соответственно на биссектрисах углов основных треугольников и на ребрах $\mathfrak{M}$. Точки $d_i^{(k)}$ — это узлы общего положения.

При заданном k любое из множеств $\{a_i^{(k)}\}$, $\{b_i^{(k)}\}$, $\{c_i^{(k)}\}$ и $\{d_i^{(k)}\}$ инвариантно относительно G_3^{8*}. Это означает, что

$$b_i^{(k)} \in \{(\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k), (\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k), (\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k)\},$$

где $2l_k^2 + m_k^2 = 1$. Далее,

$$c_i^{(k)} \in \{(\pm p_k, \pm q_k, 0), (\pm p_k, 0, \pm q_k),$$
$$(0, \pm p_k, \pm q_k), (\pm q_k, \pm p_k, 0), (\pm q_k, 0, \pm p_k), (0, \pm q_k, \pm p_k)\},$$

где $p_k^2 + q_k^2 = 1$. Кроме того,

$$d_i^{(k)} = \{(\pm r_k, \pm u_k, \pm w_k), (\pm r_k, \pm w_k, \pm u_k), (\pm u_k, \pm r_k, \pm w_k),$$
$$(\pm u_k, \pm w_k, \pm r_k), (\pm w_k, \pm u_k, \pm r_k), (\pm w_k, \pm r_k, \pm u_k)\}.$$

Тем самым множество искомых параметров кубатурной формулы (3.7) полностью определено. Искать их следует из системы нелинейных уравнений, эквивалентной условию точности формулы (3.7) на выбранных базисных функциях.

В рассматриваемом случае удается существенно уточнить вид базисных элементов. При этом удобно пользоваться тем, что след на сфере S любого многочлена, инвариантного относительно группы G_3^{8*}, представляет собой полином от переменных σ_2, σ_3, где

$$\sigma_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2, \quad \sigma_3 = x^2y^2z^2.$$

Отметим, что общую теорему о представимости инвариантных многочленов через базисные доказал К. Шевалле [204].

Базис в пространстве $\mathbf{P}_{n,G^*}$ при $n \geq 6$ зададим как объединение четырех групп A, B, C, D. Группа A состоит из функций

$$a_1 = 9\sigma_3 - 4\sigma_2 + 1, \quad a_2 = \sigma_2 - 9\sigma_3, \quad a_3 = \frac{4}{3}\left(\sigma_3 + \frac{\sigma_2}{3}(1 - 4\sigma_2)\right). \tag{3.8}$$

Группу B образуют элементы

$$b_{4i+6} = 4\sigma_3 b_4^i, \quad b_{4j+12} = 4\sigma_3 b_6 b_4^j, \tag{3.9}$$

где

$$b_4 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3} - \sigma_2\right), \quad b_6 = \frac{4}{9}\left(9\sigma_3 - 3\sigma_2 + \frac{2}{3}\right),$$

а индексы i, j меняются в пределах от 1 до $(n-6)/4$ и от 1 до $(n-12)/4$ соответственно. Группа C такова:

$$c_{4i} = \sigma_2^i c_{12}, \tag{3.10}$$

где $c_{12} = \sigma_2^2(1-4\sigma_2) - \sigma_3(4+27\sigma_3-18\sigma_2)$, а индекс i лежит на отрезке от нуля до $(n-12)/4$. Элементы группы D имеют вид

$$d_{ij} = \sigma_2^i \sigma_3^i c_{12}, \quad j \geq 1, \ 6 \leq 4i + 6j \leq n - 12. \tag{3.11}$$

Искомую систему нелинейных уравнений получим после подстановки в равенство $I(f) = I_N(f)$ вместо f функций (3.8)–(3.11). Благодаря специальному выбору базисных элементов, получающаяся система распадается на треугольные подсистемы.

Пусть N — общее число узлов формулы (3.7). Значения N, N_1, N_2, N_3, следует подбирать так, чтобы общее число искомых величин равнялось числу уравнений системы. Для этого в некоторых случаях приходится полагать коэффициент A_2 равным нулю. В табл. 3 приведены значения коэффициента эффективности кубатурных формул вида (3.7).

Алгебраический порядок точности n кубатурной формулы (3.7) удобно представить в виде суммы:

$$n = 12m + 2l + 1, \quad l = 0, 1, \ldots, 5. \tag{3.12}$$

В случаях, когда $l = 2$ и $l = 5$, получаем особенно простые выражения для параметров N, N_j. Именно, если $l = 2$, то

$$N_1 = 3m, \quad N_2 = m, \quad N_3 = m(m-1), \quad N = \frac{n^2 + 2n + 7}{3}, \quad A_2 = 0.$$

Здесь m — параметр из разложения (3.12). Если же $l = 5$, то

$$N_1 = 3m + 1, \quad N_2 = m, \quad N_3 = (n^2 + 2n + 7)/3.$$

Интересно отметить, что при этих значениях l множество узлов кубатурной формулы (3.7) с точностью до непрерывного преобразования, инвариантного относительно группы G_3^{8*}, совпадает с решеткой узлов II-го типа, описанной в начале этого параграфа.

В последнее время В. И. Лебедев и А. Л. Скороходов нашли кубатурные формулы, инвариантные относительно группы G_3^{8*} и имеющие 41-й, 47-й, 53-й и 59-й порядки точности.

Кубатурную формулу типа Гаусса, инвариантную относительно группы G_3^{20} с алгебраическим порядком точности 14 и с 72 узлами, получил Мак-Ларен [213]. Формулами, инвариантными относительно группы икосаэдра, занимался также С. И. Коняев [66–68]. Он нашел формулы до 29-го порядка точности [80].

Г. Н. Салихов [138–146] получил кубатурные формулы для четырех- и пятимерной сфер, инвариантные относительно конечных

Таблица 3

Параметры кубатурной формулы наивысшего порядка точности n, инвариантной относительно G_3^{8*}

n	N_1	N_2	N_3	N	η
9	0	1	0	38	0.877
11	1	0	0	50	0.960
13	1	1	0	75	0.928
15	2	1	0	86	0.992
19	3	0	1	146	0.913
21	3	1	1	170	0.949
23	4	1	1	194	0.990
25	5	2	1	230	0.980
27	5	1	2	266	0.982
29	6	2	2	302	0.993
31	6	2	3	350	0.975
33	6	3	3	386	0.998
35	7	2	4	434	0.995
37	7	4	4	482	0.999
39	8	3	5	530	1.006
41	9	3	6	590	0.997
43	9	3	7	650	0.998
45	9	5	7	698	1.011
47	10	3	9	770	0.997
49	11	5	9	830	1.004
51	11	5	10	840	1.013
53	12	4	12	974	0.998
59	13	4	16	1202	0.998

групп вращений. В частности, для четырехмерной сферы S была получена формула

$$\int\limits_S f(x_1, x_2, x_3, x_4)\, dS = \frac{\pi^2}{60} \sum_{j=1}^{120} f(x^{(j)}), \tag{3.13}$$

инвариантная относительно группы вращений 600-гранника G_4^{600}. Эта формула точно интегрирует все сферические гармоники до

11-го порядка включительно, т. е. 650 гармоник. Множество узлов $x^{(j)}$ при этом состоит из вершин 600-гранника и из 24 точек, получаемых в результате всевозможных расстановок знаков в векторах $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$, $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$, а также из 96 точек, получаемых в результате четных перестановок координат вектора

$$(\pm t/2, \pm 1/2, \pm t^{-1}/2, 0),$$

где t обозначает какой-нибудь корень уравнения $t^2 + t^{-2} = 3$.

Построенные Г. Н. Салиховым кубатурные формулы обладают высоким коэффициентом эффективности и позволяют точно интегрировать все гармоники до 19-го порядка включительно. В формуле 19-го порядка коэффициент эффективности η равен 0.9965.

Кубатурные формулы, инвариантные относительно преобразований группы n-мерного симплекса G_n^{n+1}, нашел И. П. Мысовских [85]. Таблицы параметров различных инвариантных кубатурных формул имеются в монографиях И. П. Мысовских [85] и Л. Строуда [226].

Глава III

Формулы с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников

Одним из основных результатов развиваемой нами теории является построение асимптотически оптимальных формул. Как было отмечено ранее и будет строго доказано в гл. V, асимптотически оптимальными в $L_2^{(m)}$ являются функционалы погрешности с регулярным пограничным слоем. Определение их, приведенное в гл. I, конструктивно и задает способ построения соответствующих формул. Для построения необходимо найти локальные функционалы $l_\gamma(y)$, которых, вообще говоря, столько же, сколько точек решетки в пограничном слое. Для кусочно гладких границ это величина порядка $O(h^{1-n})$. Таким же по порядку будет и число различных коэффициентов кубатурной формулы.

Для вычисления интеграла требуется знать значения подынтегральной функции $\varphi(x)$ во всех узлах решетки, число которых имеет порядок h^{-n}, т. е. более высокий, чем h^{-n+1}. Поэтому определение локальных функционалов и коэффициентов кубатурной формулы в пограничном слое требует действий, объем которых при малых h пренебрежимо мал по сравнению с общим числом действий при интегрировании. Однако нахождение всех коэффициентов остается все же довольно громоздкой задачей.

Есть такие случаи, когда процесс построения кубатурных фор-

мул можно значительно упростить, так как оказывается возможным ограничиться нахождением лишь конечного множества различных функционалов $l_\gamma(y)$, не зависящего, вообще говоря, от шага h. Число различных коэффициентов у таких формул и число действий, нужных для их получения, также не зависят от h. Все это имеет место для некоторых специальных многогранников и является объектом изучения в настоящей главе. Для таких многогранников оказывается также возможным непосредственно находить коэффициенты кубатурных формул, минуя промежуточный этап построения малых функционалов.

§ 1. Рациональные многогранники

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многогранники. Но большую часть излагаемых результатов можно перенести и на невыпуклый случай.

Выпуклый многогранник $\overline{\mathfrak{M}}$ представляет собою множество точек, определяемое произвольной непротиворечивой системой линейных неравенств

$$\Lambda_k \equiv a_k x - b_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, M, \tag{1.1}$$

где a_k — вектор-строка размерности n, а x, как всегда, вектор-столбец. Будем считать систему (1.1) *допустимой*, если существует хотя бы одна точка, в которой все неравенства выполнены строго. Множество точек $\mathfrak{M}$, в котором все неравенства (1.1) выполняются строго, представляет собой множество внутренних точек многогранника.

Если множество векторов x, удовлетворяющих (1.1), ограничено, то многогранник будем называть *ограниченным* или *компактным*.

Из наперед заданной системы неравенств (1.1) всегда можно выделить, и притом единственным образом, некоторую *независимую подсистему* — множество неравенств, ни одно из которых нельзя отбросить без изменения исходного многогранника.

В теории линейных неравенств имеется алгоритм, с помощью которого можно выполнить приведение системы (1.1) к независимой подсистеме. Суть этого алгоритма заключается в следующем. Левая часть каждого неравенства системы (1.1) по очереди рассматривается как некоторая функция, заданная в области, определяемой

остальными неравенствами. Исследуются максимум и минимум этой функции. Если минимум неотрицателен, то соответствующее неравенство можно отбросить. Если максимум неположителен, то система недопустима. В остальных случаях исследуемое неравенство должно быть сохранено. Отбрасывая одно за другим все лишние неравенства, получим независимую подсистему.

В дальнейшем систему (1.1) будем считать независимой.

Множества точек x, в которых несколько функций Λ_k обращаются в нуль, а остальные неотрицательны, будем называть *гранями* многогранника $\overline{\mathfrak{M}}$. *Размерностью грани* будем называть число $s = n - r$, где r — ранг матрицы, составленной из коэффициентов тех функций Λ_k, которые обращаются в нуль на всей данной грани. Иными словами, s будет указывать число независимых параметров, от которых зависят точки грани.

Легко видеть, что все грани любой размерности некоторого выпуклого многогранника $\overline{\mathfrak{M}}$ являются также выпуклыми многогранниками в подпространствах меньшей размерности. Сам многогранник будем считать гранью размерности n.

Обозначим через $\mu(s)$ число всех граней размерности s. Пронумеруем все грани и обозначим каждую через $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$, $s = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, \mu(s)$. Обозначим через $K_{j,s}$ множество номеров тех функций Λ_k из системы (1.1), которые обращаются в нуль во всех точках грани $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$, а через $L_{j,s}$ — множество всех остальных номеров:

$$L_{j,s} = \{k : 1 \le k \le M\} \setminus K_{j,s}.$$

Тогда грань $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$ определяется системой соотношений

$$\Lambda_k = 0, \quad k \in K_{j,s}, \tag{1.2}$$

$$\Lambda_k \ge 0, \quad k \in L_{j,s}. \tag{1.3}$$

В случае $s = n - 1$ каждая функция Λ_k, $k \in K_{j,s}$, соответствует некоторой грани размерности $n - 1$, и поэтому $K_{j,n-1}$ при любом j состоит из одного элемента. При других s множество $K_{j,s}$ может содержать различное число элементов, не меньшее $n - s$. Условия (1.2) при этом могут не быть независимыми. Например, 0-мерные грани (т. е. вершины) какого-либо правильного октаэдра в $\mathbb{R}^3$ будут определяться каждая четырьмя уравнениями граней, проходящих через эту вершину, из которых для ее нахождения достаточны любые три.

Линейное многообразие (1.2) будем называть *плоскостью* $R_{j,s}$ *грани* $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$. На плоскости $R_{j,s}$ неравенства (1.3) определяют выпуклый многогранник, который и будет гранью $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$. Очевидно, что система неравенств (1.3) не всегда будет независимой, и часть неравенств может быть отброшена.

При практическом нахождении независимой системы неравенств для грани можно использовать упомянутый выше прием для отыскания независимой системы неравенств, описывающей n-мерный многогранник $\overline{\mathfrak{M}}$.

Система (1.2) и строгие неравенства $\Lambda_k > 0$, $k \in L_{j,s}$, определяют множество внутренних точек грани $\mathfrak{M}_{j,s}$, т. е. внутренность s-мерного многогранника $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$.

Рассмотрим еще одну систему, получающуюся из (1.2) заменой каждого равенства следующим неравенством:

$$\Lambda_k \geq 0, \quad k \in K_{j,s}. \tag{1.4}$$

Система соответствующих (1.4) строгих неравенств имеет вид

$$\Lambda_k > 0, \quad k \in K_{j,s}. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.4) определяют множество, которое будем называть *замкнутым телесным углом* $\overline{\Omega}_{j,s}$ многогранника $\overline{\mathfrak{M}}$. Неравенства (1.5) определяют множество $\Omega_{j,s}$ внутренних точек $\overline{\Omega}_{j,s}$, которое будем называть *телесным углом* многогранника $\overline{\mathfrak{M}}$. Плоскость $R_{j,s}$ — это *острие* телесного угла. *Порядком* телесного угла $\overline{\Omega}_{j,s}$ или $\Omega_{j,s}$ называется число $n - s$.

В качестве примера рассмотрим треугольник на плоскости:

$$\mathfrak{M} = \{x : x = (x_1, x_2),\ \Lambda_1 \equiv 3x_1 - 2x_2 \geq 0,$$
$$\Lambda_2 \equiv x_2 \geq 0,\ \Lambda_3 \equiv -3x_1 - x_2 + 3 \geq 0\}.$$

Три его вершины O, A, B являются нульмерными гранями $\{\mathfrak{M}_{j,0}\}_{j=1}^3$, три стороны — одномерными $\{\mathfrak{M}_{j,1}\}_{j=1}^3$, а сам треугольник тождествен своей двумерной грани $\mathfrak{M}_{1,2}$ (см. табл. 4).

Важную роль в характеристике свойств любого многогранника играет альтернированная сумма чисел $\mu(s)$. Положим $\mu(n) = 1$ и составим сумму

$$\mu(0) - \mu(1) + \cdots + (-1)^n \mu(n) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \mu(s). \tag{1.6}$$

Таблица 4

s	j		
	1	2	3
0	$\mathfrak{M}_{1,0} = \{O\}$ $\Omega_{1,0} = \angle O$ $R_{1,0} = \{O\}$	$\mathfrak{M}_{2,0} = \{A\}$ $\Omega_{2,0} = \angle A$ $R_{2,0} = \{A\}$	$\mathfrak{M}_{3,0} = \{B\}$ $\Omega_{3,0} = \angle B$ $R_{3,0} = \{B\}$
1	$\mathfrak{M}_{1,1} = [AB]$ $\Omega_{1,1}$— полуплоскость $AB(O)$ $R_{1,1}$ — прямая AB	$\mathfrak{M}_{2,1} = [OB]$ $\Omega_{2,1}$— полуплоскость $OB(A)$ $R_{2,1}$ — прямая OB	$\mathfrak{M}_{3,1} = [OA]$ $\Omega_{3,1}$— полуплоскость $OA(B)$ $R_{3,1}$ — прямая OA
2	$\mathfrak{M}_{1,2} = \triangle OAB$ $\Omega_{1,2} = \mathbb{R}^2$ $R_{1,2} = \varnothing$		

Теорема III.1 (Эйлер). *Для любого компактного выпуклого многогранника альтернированная сумма* (1.6) *равна единице*:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s) = 1. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы можно найти, например, в [135].

Пусть многогранник $\mathfrak{M}$ разбит каким-нибудь образом на конечное число выпуклых многогранников меньшего размера. Границы между этими частями состоят из многогранников размерности, меньшей n. Назовем множество всех составляющих $\mathfrak{M}$ многогранников и их границ *комплексом*. В комплекс входят многогранники, совпадающие с вновь образованными при делении $\mathfrak{M}$ границами между малыми многогранниками размерности n, а также старые грани $\mathfrak{M}$ или части, на которые они разбиваются.

Подсчитаем, сколько в таком комплексе имеется элементов (граней) каждой размерности от 0 до n. Число элементов размерности s

обозначим, как и в случае ровно одного многогранника, через $\mu(s)$. Тогда справедлива

Теорема III.2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s) = 1. \tag{1.8}$$

Отметим, что частный случай равенства (1.8) — это равенство (1.7).

Сформулируем еще одну теорему, относящуюся к некомпактным многогранникам.

Теорема III.3. *Пусть выпуклый некомпактный многогранник не содержит ни одной бесконечной прямой; пусть он разбит на конечное число выпуклых многогранников, как в теореме* III.2. *Для такого многогранника альтернированная сумма* (1.6) *равна нулю*:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s) = 0. \tag{1.9}$$

Обозначим через $\chi_{\overline{j,s}}(x)$ характеристическую функцию замкнутого телесного угла $\overline{\Omega}_{j,s}$, включающего точки его граней всех размерностей:

$$\chi_{\overline{j,s}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Omega}_{j,s}, \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}_{j,s}. \end{cases}$$

Из теоремы Эйлера и ее обобщений следует полезная для нас

Теорема III.4. *Характеристическая функция* $\chi_{\overline{\mathfrak{M}}}(x)$ *компактного многогранника* $\overline{\mathfrak{M}}$ *допускает представление*

$$\chi_{\overline{\mathfrak{M}}}(x) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\sum_{j=1}^{\mu(s)}\chi_{\overline{j,s}}(x). \tag{1.10}$$

Иными словами, характеристическая функция многогранника равна альтернированной сумме характеристических функций всех его телесных углов разных порядков.

Доказательство. Пусть точка x принадлежит многограннику $\mathfrak{M}$. Подставим ее в правую часть предполагаемого равенства (1.10). При этом все характеристические функции $\chi_{\overline{j,s}}(x)$ обратятся в единицу. Число функций $\chi_{\overline{j,s}}(x)$, относящихся к граням размерности s, равняется $\mu(s)$. Поэтому правая часть (1.10) будет равна сумме $\sum\limits_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s)$ и на основании формулы (1.7) обратится в единицу.

Рассмотрим теперь случай, когда точка x лежит вне множества $\overline{\mathfrak{M}}$. Подставляя ее в правую часть (1.10), видим, что одни слагаемые равны единице, а другие обращаются в нуль. Число последних обозначим через $\mu_1(s)$. Перепишем сумму (1.10) в виде

$$\sum_{s=0}^{n}[\mu(s)-\mu_1(s)](-1)^s=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s)-\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\mu_1(s).$$

Покажем, что правая часть этого равенства равна нулю.

Действительно, по теореме Эйлера имеем

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mu(s)-\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\mu_1(s)=1-\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\mu_1(s).$$

Рассмотрим альтернированную сумму, стоящую справа в этом равенстве. Легко видеть, что характеристическая функция $\chi_{\overline{j,s}}(x)$ некоторого телесного угла обращается в нуль в том и только в том случае, когда его острие непосредственно видно из точки x, т. е. прямая, соединяющая любую точку этого острия с точкой x, лежит вне $\overline{\Omega}_{j,s}$. Построим пучок всех прямых, проходящих через точку x и встречающих многогранник $\overline{\mathfrak{M}}$. Пересечем этот пучок какой-нибудь $(n-1)$-мерной плоскостью. Построенный пучок спроектирует на эту плоскость весь многогранник $\overline{\mathfrak{M}}$ в качестве нового $(n-1)$-мерного многогранника $\mathfrak{M}_1$. Те грани, которые были видны из точки x, при таком проектировании перейдут в некоторое разбиение $\mathfrak{M}_1$ на конечное число выпуклых многогранников с сохранением размерности. Таким образом, величина $\mu_1(s)$ равна числу граней размерности s некоторого комплекса, построенного для многогранника размерности $n-1$. На основании теоремы III.2 справедлива формула

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\mu_1(s)=1.$$

Отсюда следует (1.10).

Теорема III.4 доказана.

Следствие 1.1. *Характеристическая функция $\chi_{\mathfrak{M}}(x)$ внутренности некоторого многогранника $\mathfrak{M}$ равна альтернированной сумме характеристических функций $\chi_{j,s}(x)$ внутренностей всех его телесных углов:*

$$\chi_{\mathfrak{M}}(x) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{j=1}^{\mu(s)} \chi_{j,s}(x). \tag{1.11}$$

Действительно, каждая внутренняя точка многогранника будет внутренней точкой всех телесных углов. В таких точках формула проверяется так же, как и (1.10). Для точек границы эта формула проверяется так же, как (1.10) в случае внешней точки x.

Любопытно заметить, что в альтернированной сумме характеристических функций замкнутых телесных углов элементы границы, принадлежащие какой-либо замкнутой грани $\overline{\mathfrak{M}}_{j,s}$, можно подсчитать, пользуясь формулой Эйлера. Вычитая из (1.10) формулу (1.11), получим выражение для характеристической функции границы многогранника $\mathfrak{M}$. При этом для каждой грани $\mathfrak{M}_{j,s}$ сумма характеристических функций телесных углов в плоскости этой грани дает характеристическую функцию этой же грани. В остальных точках сумма, как читатель может убедиться сам, обращается в нуль.

Вернемся к исследованию кубатурных формул. Пусть $l(x)$ — функционал погрешности некоторой такой формулы. Проведем аффинную замену независимых переменных, положив $x = By$, где определитель матрицы B равен единице. При этом функционал преобразуется по формуле

$$l(x) = l(By) = \bar{l}(y),$$

где $\bar{l}(y)$ снова функционал погрешности кубатурной формулы. Вообще говоря, решетка узлов при этом изменится. Имеет место

Теорема III.5. *Аффинное преобразование переводит формулу с регулярным пограничным слоем порядка m в формулу с регулярным пограничным слоем того же порядка и, быть может, с другими постоянными L и A.*

Доказательство. При аффинном преобразовании $x = By$ функционал

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = \chi_\Omega(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega} h^n c[\gamma]\delta(x - hH\gamma),$$

где $l_\gamma(t) = \chi_{\Omega_\gamma}(t) - \sum\limits_{\gamma'} c^\gamma[\gamma']\delta(t - H\gamma')$, переходит в функционал

$$\bar{l}(y) = l(By) = \sum_\gamma l_\gamma(By/h - H\gamma).$$

Пусть

$$\bar{l}_\gamma(z) = l_\gamma(Bz), \quad \overline{H} = B^{-1}H.$$

Имеем

$$l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = \bar{l}_\gamma\left(\frac{y}{h} - \overline{H}\gamma\right).$$

Поскольку $\chi_{\Omega_\gamma}(t)$ переходит в $\chi_{\overline{\Omega}_\gamma}(z)$, а $\delta(x)$ — однородная функция порядка $-n$, функционал $\bar{l}_\gamma(z)$ снова будет функционалом погрешности:

$$\bar{l}_\gamma(z) = \chi_{\overline{\Omega}_\gamma}(z) - \sum_{\gamma'} c^\gamma[\gamma']\delta(z - \overline{H}\gamma').$$

Таким образом, элементарный функционал l_γ с матрицей H преобразуется в элементарный функционал $\bar{l}_\gamma$ с матрицей $\overline{H}$. Легко видеть, что

$$\|\bar{l}_\gamma(z) \mid C^*(\mathbb{R}^n)\| = \|l_\gamma(t) \mid C^*(\mathbb{R}^n)\| \le A,$$

а носитель функционала $\bar{l}_\gamma$ сосредоточен в области $|Bz| < L$. Проверим еще, что $\bar{l}_\gamma$ ортогонален многочленам степени m. Имеем

$$(\bar{l}_\gamma(z), P_{m-1}(z)) = (l_\gamma(t), P_{m-1}(B^{-1}t)) = 0,$$

поскольку $P_{m-1}(B^{-1}t)$ является многочленом степени ниже m.

Теорема III.5 доказана.

Сохранение регулярного пограничного слоя при аффинных преобразованиях позволяет сводить построение кубатурных формул по решетке с матрицей H к построению формул с кубической решеткой. Поэтому всюду в данной главе будем рассматривать формулы с кубической решеткой, если только не оговаривается иное.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы по возможности упростить и стандартизировать вычисление коэффициентов кубатурных формул. Для этого элементарные функционалы, составляющие $l(x)$, следует выбирать по возможности одинаковыми. Совпадение этих функционалов означает, что все они получаются из какого-нибудь одного при помощи преобразований группы G_0 сдвигов пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих решетку узлов. Ниже рассматриваются подгруппы $G_{j,s}$ группы G_0, каждая из которых оставляет инвариантной плоскость какой-либо грани $R_{j,s}$. Если такая подгруппа окажется зависящей от s параметров, то все элементарные функционалы с носителями вблизи грани $R_{j,s}$ можно получить из нескольких из них при помощи преобразований группы $G_{j,s}$. Перейдем к осуществлению этой идеи.

Рассмотрим произвольную систему s целочисленных вектор-столбцов $U_1, U_2, \ldots, U_s$, образующих матрицу U размера $n \times s$. Пусть ранг матрицы U равен s. Через векторы U_j проходит гиперплоскость

$$x = U\lambda, \tag{1.12}$$

где λ — произвольный s-мерный вектор. В этой гиперплоскости лежит бесконечное множество целочисленных точек, образующих, очевидно, подрешетку Γ_U основной кубической решетки Γ. Например, Γ_U принадлежат все векторы, получаемые по формуле (1.12) при целочисленных λ. Может случиться, что других точек основной кубической решетки в гиперплоскости (1.12) нет. Тогда векторы U_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, образуют базис подрешетки Γ_U. В общем случае этого может и не быть. Однако всегда можно при помощи простого процесса построить для Γ_U базисную систему $U^{(1)}$, состоящую из s векторов.

Группа $G_{U^{(1)}}$ сдвигов, задаваемых формулами

$$y = x + U^{(1)}\beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}, \tag{1.13}$$

является подгруппой группы G_0 всех сдвигов, оставляющих инвариантной решетку Γ. Произвольное преобразование группы G_0 имеет вид

$$y = x + \beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

Нас будут интересовать многогранники, у которых каждая s-мерная плоскость $R_{j,s}$ грани $\mathfrak{M}_{j,s}$ для $s = 1, \ldots, n-1$ остается ин-

вариантной при преобразованиях некоторой s-параметрической подгруппы $G_{j,s}$ группы сдвигов G_0. Легко видеть, что плоскость грани $R_{j,s}$ в таком многограннике можно задать соотношениями

$$x = U_{j,s}\lambda + f,$$

где матрица $U_{j,s}$ определяет группу сдвигов $G_{j,s}$, относительно которой $R_{j,s}$ инвариантна. Элементы матрицы $U_{j,s}$ — целые числа. Отсюда следует, что все компоненты вектора a_k в системе неравенств (1.1) можно сделать целыми числами. Покажем, почему это так.

Пусть для определенности $s = n - 1$. Тогда плоскость $R_{j,n-1}$ грани $\mathfrak{M}_{j,n-1}$ будет задана соотношениями

$$x = U_{j,n-1}\lambda + f. \tag{1.14}$$

Получим систему соотношений вида (1.2) между независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$, эквивалентную (1.14). Для этого запишем условие разрешимости системы (1.14) относительно неизвестных λ.

Из линейной алгебры известно, что система (1.14) разрешима относительно λ тогда и только тогда, когда значение специальной матрицы $R_л$, называемой *левым аннулятором для* $U_{j,n-1}$, на разности векторов x и f обращается в нуль:

$$R_л x = R_л f. \tag{1.15}$$

По условию ранг $U_{j,n-1}$ равен $n-1$, поэтому существует левая обратная к $U_{j,n-1}$ матрица $U^{-1}_{j,n-1,n}$. Аннулятор $R_л$ при этом имеет вид

$$R_л = I - U_{j,n-1}U^{-1}_{j,n-1,n}.$$

Ясно, что все компоненты $R_л$ рациональны, и после избавления от знаменателей в равенствах (1.15) получим систему уравнений с целыми коэффициентами.

Для простоты ограничимся в дальнейшем такими многогранниками, у которых на гранях любых размерностей лежат точки исходной кубической решетки. Наше предположение подразумевает, что вершины многогранника, т. е. его нульмерные грани, — это также точки исходной решетки. Ясно, что при этом на каждой плоскости $R_{j,s}$ лежит s-мерная подрешетка Γ, а плоскости всех граней выражаются уравнениями с целыми коэффициентами. Такие многогранники будем называть *рациональными*.

§ 2. Построение формул для рациональных многогранников

В этом и следующем параграфах подробно излагается способ построения кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников.

Укажем, прежде всего, как можно стандартизировать малые функционалы, из которых составляется функционал погрешности $l(x)$ кубатурной формулы, и тем самым обойтись лишь небольшим набором различных элементарных функционалов $l_\gamma(x)$. При этом докажем, что если получать новые решетки из старых с помощью дробления, то и число различных малых функционалов, и число различных коэффициентов возникающих кубатурных формул постоянны, т. е. не зависят от числа узлов.

Коэффициенты искомой формулы представляют собой сумму функций $c^{j,s}[\beta]$ дискретной переменной, соответствующих граням $\mathfrak{M}_{j,s}$ исходного многогранника. Носитель функции $c^{j,s}[\beta]$ сосредоточен на подрешетке $\Gamma_{j,s}$, лежащей в плоскости $R_{j,s}$, и в нескольких параллельных ей близких подрешетках, пересекающих исходный многогранник $\mathfrak{M}$, т. е. расположенных с внутренней стороны плоскости $R_{j,s}$. При этом функция $c^{j,s}[\beta]$ задается только в точках, лежащих внутри многогранника, и на каждой подрешетке, параллельной $R_{j,s}$, принимает постоянное значение.

Удобно несколько обобщить данное в гл. I понятие кубатурных формул с регулярным пограничным слоем. Вновь будем рассматривать элементарные функционалы вида

$$l_\gamma(y) = \chi_\gamma(y) - \sum_{|H\gamma'|<L} c^\gamma[\gamma']\delta(y - H\gamma'),$$

удовлетворяющие условиям

$$\|l_\gamma(y) \mid C^*(\mathbb{R}^n)\| \le A, \quad \operatorname{supp} l_\gamma(y) \subset \{y : |y| < L\},$$
$$(l_\gamma(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| \le k(\gamma).$$

Пусть область Ω имеет кусочно гладкую границу S_{n-1} и на этой границе задано конечное множество кусочно гладких многообразий $S_{j,s}$ различных размерностей s, где $s = 0, 1, \ldots, n-2$. В рассматриваемом случае за $S_{j,s}$ можно взять грани многогранника $\mathfrak{M}$. Окружим

каждое такое многообразие окрестностью $\omega_{j,s,L}$, состоящей из всех точек, расстояние от которых до $S_{j,s}$ не превосходит Lh. Составим множество $B_{j,s}$ значений γ, при которых $hH\gamma$ лежит в $\omega_{j,s,L}$ и не принадлежит ни одной окрестности $\omega_{j,s-1,L}$. Число таких значений γ будет величиной порядка $O(h^{-n+s})$.

Допустим, что для всех $\gamma \in B_{j,s}$ порядок $k(\gamma)$ равен $m-n+s$. Это значит, что для всех γ таких, что точки $hH\gamma$ лежат в окрестности $S_{j,n-1}$; порядок $k(\gamma)$ равен $m-1$; в окрестности $S_{j,n-2}$ он равен $m-2$ и т. д. Напомним, что в гл. I порядок $k(\gamma)$ элементарного функционала $l_\gamma(x)$ равнялся $m-1$ вблизи всей границы Ω. Будем считать это единственным отличием данного случая от рассмотренного ранее. В частности, для всех γ из $B_L^{(i)}$, т. е. таких, для которых точка $hH\gamma$ удалена от границы более чем на Lh, элементарные функционалы получаются из какого-то одного по формуле

$$l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = l_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Сумма всех элементарных функционалов представляет собой функционал погрешности некоторой кубатурной формулы в области Ω:

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L} l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Как и ранее, будем называть его функционалом с регулярным пограничным слоем.

Таким образом, мы несколько обобщили понятие функционала с регулярным пограничным слоем, допустив, что часть элементарных функционалов с носителем вблизи границы может иметь меньший порядок точности. Доказательство асимптотической оптимальности функционалов с регулярным пограничным слоем, которое мы приведем в гл. V, это учитывает.

Вернемся к рассмотрению рациональных многогранников. В классе функционалов с регулярным пограничным слоем выделим подклассы, обладающие еще более стандартизированными элементарными функционалами.

Пусть $\Gamma_{j,s}$ — подрешетка кубической решетки, составленная из всех целочисленных точек, лежащих в плоскости грани $R_{j,s}$, и $U_{s+1}, \ldots, U_n$ — система векторов, дополняющая систему $U_1, \ldots, U_s$

до базиса решетки Γ. Тогда решетку Γ можно представить в виде объединения подрешеток, каждая из которых получается из $\Gamma_{j,s}$ сдвигом на целочисленную линейную комбинацию векторов $U_{s+1}, \ldots, U_n$ и лежит, таким образом, в плоскости, параллельной $R_{j,s}$. Очевидно, что функционал $l(x)$ можно построить так, чтобы все элементарные функционалы $l_\gamma(x)$ при $\gamma \in B_{j,s}$ в точках, принадлежащих одной и той же параллельной $\Gamma_{j,s}$ подрешетке, совпадали. Если это условие выполнено для $s = n, n-1, \ldots, k$ и $j = 1, \ldots, \mu(s)$, будем говорить, что функционал $l(x)$ *имеет регулярный пограничный слой до размерности* k. Регулярный пограничный слой, определенный в гл. I, был регулярен до размерности n.

Теорема III.6. *В кубатурных формулах для многогранника $\mathfrak{M}$ с регулярным пограничным слоем до размерности k коэффициенты в точках, лежащих в окрестности каждой s-мерной грани $\mathfrak{M}_{j,s}$, $s = k, k+1, \ldots, n$, и отстоящих не менее чем на Lh от всех граней размерности $k-1$, зависят только от подрешетки, параллельной этой грани. На каждой такой подрешетке они принимают постоянное значение.*

Доказательство. В каждой точке решетки, находящейся в окрестности грани $\mathfrak{M}_{j,s}$, $s = k, k+1, \ldots, n$, и удаленной от всех граней низшей размерности, значение коэффициентов $c[\beta]$ получается суммированием соответствующих коэффициентов $l_\gamma(x/h - \gamma)$, где $h\gamma$ лежит в такой же окрестности. Но такие функционалы инвариантны при сдвиге γ на любой вектор подрешетки $\Gamma_{j,s}$. Следовательно, коэффициенты $c[\beta]$ в точках, расположенных на одной и той же параллельной $R_{j,s}$ плоскости, инвариантны при таких сдвигах, будучи просто суммой одних и тех же величин.

Очевидно, что число параллельных $R_{j,s}$ плоскостей, расположенных в окрестности грани $\mathfrak{M}_{j,s}$ и содержащих подрешетки кубической решетки, зависит лишь от L и не зависит от h. Значит, и число различных коэффициентов в окрестности грани $\mathfrak{M}_{j,s}$ не зависит от h.

Теорема III.6 доказана.

Из этой теоремы следует, что при $k = 0$ мощность множества различных коэффициентов такой формулы не зависит от параметра h, т. е. от числа узлов. В самом деле, количество различных коэффициентов вблизи всех граней любой размерности не зависит

от h. Поскольку число граней также не зависит от h, наше утверждение доказано.

Рассмотрим все телесные углы некоторого рационального многогранника и построим для каждого из них функционал погрешности кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем. Такое построение выполним единообразно для всех углов. Это значит, что если какая-нибудь s-мерная плоскость участвует в нескольких телесных углах, то элементарные функционалы с носителями вблизи этой плоскости, отстоящими на Lh от любых граней размерности $s-1$, следует взять одинаковыми.

Теорема III.7. *Функционал погрешности кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем в рациональном многограннике представим в виде суммы:*

$$l(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \sum_{j=1}^{\mu(s)} l^{(j,s)}(x), \tag{2.1}$$

где $l^{(j,s)}(x)$ — единообразно построенные функционалы погрешности с регулярным пограничным слоем для всех телесных углов различных размерностей многогранника $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Обозначим через M множество элементарных функционалов, входящих в состав функционала $l(x)$, и через $M_{j,s}$ — множество элементарных функционалов, составляющих $l^{(j,s)}(x)$. Каждому целочисленному вектору γ может соответствовать несколько различных элементарных функционалов. Например, точке $h\gamma$, лежащей вблизи плоскости какой-либо $(n-1)$-мерной грани, соответствуют функционал $l_0\,(x/h-\gamma)$, входящий в состав формулы для угла нулевого порядка, т. е. для всего пространства, и функционал $l_\gamma\,(x/h-\gamma)$, входящий в разложение функционала $l^{(j,n-1)}(x)$.

Пронумеруем индексом t все элементарные функционалы, отвечающие одному и тому же γ, обозначив их через $l_\gamma^t\,(x/h-\gamma)$. На множестве пар (γ, t) определим характеристические функции многогранника и его телесных углов:

$$\chi_{\mathfrak{M}}(\gamma, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_\gamma^t(x/h-\gamma) \in M, \\ 0, & \text{если } l_\gamma^t(x/h-\gamma) \notin M, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\chi_{j,s}(\gamma,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } l_\gamma^t(x/h-\gamma) \in M_{j,s}, \\ 0, & \text{если } l_\gamma^t(x/h-\gamma) \notin M_{j,s}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Для этих характеристических функций, как следует из теоремы III.4, справедливо тождество

$$\chi_{\mathfrak{M}}(\gamma,t) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{\mu(s)}(-1)^s\chi_{j,s}(\gamma,t). \tag{2.4}$$

Поясним формулу (2.4) примером. Самый простой случай соответствует отрезку $[a,b]$, на который нанесены равностоящие друг от друга узлы $h\gamma$, $\gamma = 0, \pm 1, \ldots$. Здесь возможны три типа элементарных функционалов, отличающихся по вариантам пересечения элементарных ячеек $\{x : \gamma < x/h < \gamma+1\}$ с интервалом (a,b). Ячейкам, лежащим в (a,b), соответствует локальный функционал l_0. Если ячейка содержит точку a, то локальный функционал обозначим через l_1, а если содержит точку b — то через l_2. Индекс t может принимать одно или два значения. При каждом γ функционал l_0 будет присутствовать в множестве $\{l_\gamma^t\}$. Для любого γ положим $l_\gamma^1 = l_0$. Для простоты возьмем $L = 1$. Тогда при $t = 2$ имеем

$$l_\gamma^2 = \begin{cases} l_1 & \text{в точке } h\gamma, \text{ расположенной справа от } a, \\ l_2 & \text{в точке } h\gamma, \text{ расположенной слева от } b. \end{cases}$$

В рассматриваемом примере многогранник $\mathfrak{M}$ — это отрезок $[a,b]$, телесный угол $\Omega_{1,0}$ — это луч $[a,\infty)$, телесный угол $\Omega_{2,0}$ — луч $(-\infty,b]$, $\Omega_{1,1} = \mathbb{R}^1$, а формула (2.4) имеет вид

$$\chi_{[a,b]}(\gamma,1) = \chi_{[a,\infty)}(\gamma,1) + \chi_{(-\infty,b]}(\gamma,1) - \chi_{\mathbb{R}^1}(\gamma,1),$$
$$\chi_{[a,b]}(\gamma,2) = \chi_{[a,\infty)}(\gamma,2) + \chi_{(-\infty,b]}(\gamma,2).$$

Оба последних равенства легко проверяемы.

Продолжим доказательство теоремы III.7. Из тождества (2.4)

следует, что

$$l(x) = \sum_{\gamma,t} \chi_{\mathfrak{M}}(\gamma,t) l_\gamma^t \left(\frac{x}{h} - \gamma\right)$$

$$= \sum_{\gamma,t} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{\mu(s)} (-1)^s \chi_{j,s}(\gamma,t) l_\gamma^t \left(\frac{x}{h} - \gamma\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{\mu(s)} (-1)^s \sum_{\gamma,t} \chi_{j,s}(\gamma,t) l_\gamma^t \left(\frac{x}{h} - \gamma\right) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{\mu(s)} (-1)^s l^{(j,s)}(x).$$

Теорема III.7 доказана.

§ 3. Формальный пограничный слой

Пусть $l(x)$ — некоторый функционал погрешности кубатурной формулы для ограниченного многогранника $\mathfrak{M}$ с параллелепипедальной решеткой узлов, т. е. вида

$$\chi_{\mathfrak{M}}(x) - \sum_{\gamma \in B} c[\gamma] h^n \delta(x - hH\gamma). \tag{3.1}$$

Пусть он также ортогонален всем многочленам степени не выше m:

$$(l(x), x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| \le m. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что это свойство сохраняется для любой линейной комбинации таких функционалов.

Для обобщенных функций вида (3.1) справедлив некоторый признак ортогональности многочленам (3.2), основанный на преобразовании Фурье. Для ортогональности $l(x)$ многочленам степени $\le m$ необходимо и достаточно, чтобы в точке $x = 0$ все производные его преобразования Фурье до порядка m включительно обращались в нуль. Будем называть это условие *формальной ортогональностью* $l(x)$ *многочленам степеней не выше* m.

Воспользуемся понятием формальной ортогональности многочленам и установим, когда функционал погрешности кубатурной формулы для области Ω, представляющей собой рациональный многогранник, обладает регулярным пограничным слоем.

Построим функционалы погрешности

$$l^{(j,s)}(x) = \sum_{hH\gamma\in\Omega_{j,s}} c^{j,s}[\gamma]\delta\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right)$$

для всех телесных углов $\Omega_{j,s}$ рационального многогранника $\mathfrak{M}$ так, чтобы они обладали следующими свойствами:

(а) коэффициенты $c^{j,s}[\gamma]$ во всех точках, которые лежат вблизи какой-нибудь грани телесного угла $\Omega_{j,s}$ на расстоянии не более $2Lh$ от нее и отстоят от ее границ не менее чем на $2Lh$, постоянны на любой гиперплоскости, параллельной этой грани;

(б) если два телесных угла (быть может, разных порядков) имеют общую грань, то вблизи этой грани совпадают коэффициенты функционалов для обоих углов.

Теорема III.8. *Альтернированная сумма функционалов погрешности для телесных углов многогранника $\mathfrak{M}$ при условиях* (а) *и* (б) *является функционалом погрешности кубатурной формулы для этого многогранника*:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{j=1}^{\mu(s)} l^{(j,s)}(x) = l(x). \tag{3.3}$$

Доказательство. Из теоремы III.4 следует, что равенство (3.3) достаточно установить для точечной части функционалов. Необходимые рассуждения совпадают с доказательством теоремы III.7, если только заменить функционалы $l^t_\gamma(x/h - \gamma)$ на $c^t[\gamma]\delta(x/h - \gamma)$.

Теорема III.8 доказана.

Кубатурную формулу с функционалом погрешности $l(x)$ вида (3.3) назовем *кубатурной формулой с формальным пограничным слоем*, если каждый функционал $l^{(j,s)}(x)$ формально ортогонален всем многочленам степени не выше $m - n + s$.

Из данного определения следует, что всякий функционал погрешности с регулярным пограничным слоем для рационального многогранника при условии совпадения малых функционалов, лежащих в окрестности его граней, является в то же время и функционалом с формальным пограничным слоем. Докажем обратную теорему, считая при этом выполненными условия (а) и (б).

Теорема III.9. *Всякий функционал погрешности кубатурной формулы с формальным пограничным слоем является одновременно функционалом погрешности с регулярным пограничным слоем.*

Полезность этой теоремы ясна. Из нее следует, что функционалы с формальным пограничным слоем асимптотически оптимальны. С другой стороны, их построить проще, чем формулу с регулярным пограничным слоем.

Доказательство теоремы III.9 дано Л. В. Войтишек. Оно опирается на ряд лемм.

Лемма III.1. *Пусть тригонометрический многочлен $Q^{(k)}(p')$ от k переменных $p' = (p_1, \ldots, p_k)$ таков, что его производные до порядка r включительно обращаются в нуль в начале координат. Тогда тригонометрический многочлен $Q(p)$ от n переменных $p = (p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n) = (p', p'')$, $p'' = (p_{k+1}, \ldots, p_n)$, задаваемый равенством*

$$Q(p) = e^{2\pi i \alpha'' p''} Q^{(k)}(p'),$$

имеет в начале координат равные нулю производные до порядка r включительно.

Справедливость леммы III.1 совершенно очевидна.

Введем понятие *функционала погрешности нуля*. Под этим будем понимать линейную комбинацию вида

$$m(x) = \sum_{\gamma \in B} c[\gamma] \delta\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right),$$

обращающуюся в нуль на всех многочленах степени ниже m. Будем говорить о *функционале погрешности нуля с регулярным пограничным слоем*, если

$$m(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} m_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} m_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \qquad (3.4)$$

Здесь $m_0(x)$ и $m_\gamma(x)$ — локальные функционалы погрешности нуля для элементарных ячеек $\mathfrak{M}$, причем $m_\gamma(x)$, $\gamma \in B_{j,s}$, ортогональны многочленам степени не выше $m - n + s$, а $m_0(x)$ — многочленам степени не выше m. Число s обозначает размерность той грани $\mathfrak{M}$,

вблизи которой расположен участок пограничного слоя, содержащий $m_\gamma(x)$.

Нетрудно проверить, что в функционале погрешности нуля с регулярным пограничным слоем все коэффициенты в точках $hH\gamma$, лежащих внутри $\mathfrak{M}$ и отстоящих от границы $\mathfrak{M}$ больше чем на Lh, обращаются в нуль. (Эти коэффициенты равны сумме всех коэффициентов функционала $m_0(x)$, который по условию ортогонален постоянной.)

Лемма III.2. *Сумма любого функционала погрешности кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем и функционала погрешности нуля с регулярным пограничным слоем является функционалом погрешности формулы с регулярным пограничным слоем.*

Доказательство. Сумма $l_\gamma(x/h - H\gamma) + m_\gamma(x/h - H\gamma) = l_\gamma^{(1)}(x/h - H\gamma)$ — это вновь функционал погрешности рассматриваемого вида, ортогональный всем многочленам степени не выше $m - n + s$. Мы имеем очевидное равенство

$$m(x) + l(x) = \sum_\gamma l_\gamma^{(1)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right),$$

из которого и следует лемма III.2.

Будем говорить о $m(x)$ как о *функционале погрешности нуля с формальным пограничным слоем для многогранника*, если

$$m(x) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{j=1}^{\mu(s)} m^{(j,s)}(x)$$

и при этом любой функционал

$$m^{(j,s)}(x) = \sum_{hH\gamma\in\Omega_{j,s}} a^{j,s}[\gamma]\delta\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) \tag{3.5}$$

финитен и формально ортогонален полиномам до степени $m - n + s$ включительно.

Пусть коэффициенты $a^{j,s}[\gamma]$ удовлетворяют условиям (а) и (б) теоремы III.8, а коэффициенты $a^{1,s}[\gamma]$ нулевые. Тогда имеет место

Лемма III.3. Всякий функционал погрешности нуля с формальным пограничным слоем является одновременно функционалом погрешности нуля с регулярным пограничным слоем.

Доказательство. Из теоремы III.8 следует, что лемму достаточно доказать для телесных углов многогранника $\mathfrak{M}$. Доказательство проведем по индукции, начиная с $s = n$. При $s = n$ исходный функционал $m^{(n)}(x)$ тождественно нулевой и, следовательно, представим в виде (3.4), где все $m_\gamma^{(n)}(x) \equiv 0$.

Допустим теперь, что функционалы $m^{(j,s)}(x)$ при $s = n, n-1, \ldots, k+1$, $j = 1, \ldots, \mu(s)$ представлены в виде (3.4). Рассмотрим функционал $m^{(l,k)}(x)$ для угла $\Omega_{l,k}$ с k-мерным острием. Обозначим через $m_1^{(l,k)}(x)$ сумму тех элементарных функционалов $m_\gamma^{(j,s)}(x)$, $s = n, \ldots, k+1$, носители которых расположены внутри $\Omega_{l,k}$. Разность $\overline{m}^{(l,k)}(x) = m^{(l,k)}(x) - m_1^{(l,k)}(x)$ будет снова функционалом погрешности вида (3.5) для угла $\Omega_{l,k}$, формально ортогональным многочленам степени не выше $m-n+k$. Носитель функционала $\overline{m}^{(l,k)}(x)$ сосредоточен на конечном числе плоскостей, параллельных плоскости $R_{l,k}$, являющейся острием угла $\Omega_{l,k}$. Осталось доказать, что $\overline{m}^{(l,k)}(x)$ представим в виде суммы элементарных функционалов.

Аффинное преобразование не нарушает свойства регулярности пограничного слоя и преобразует формальный пограничный слой в формальный. Поэтому доказательство можно провести лишь для случая кубической решетки, когда $h = 1$, а острие $R_{l,k}$ лежит в плоскости $\{x : x_j = 0, j = k+1, \ldots, n\}$. При этом формальный пограничный слой в функционале погрешности имеет коэффициенты, зависящие только от $\gamma'' = (\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n)$, и $\overline{m}^{(l,k)}(x)$ записывается в виде

$$\overline{m}^{(l,k)}(x) = c(x) = \sum_{\gamma'} \sum_{\gamma''} a^{(k)}[\gamma'']\delta(x' - \gamma')\delta(x'' - \gamma'')$$

$$= \Phi_0(x') \sum_{\gamma''} a^{(k)}[\gamma'']\delta(x'' - \gamma'').$$

Здесь $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, а через $\Phi_0(x')$ обозначена обобщенная функция вида $\Phi_0(x_1) \ldots \Phi_0(x_k)$, где

$$\Phi_0(x_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x_i - j).$$

Функционал $c(x)$ по условию формально ортогонален всем многочленам степени не выше $m-n+k$, т. е. его образ Фурье $\tilde{c}(p)$ обращается в нуль в начале координат вместе со всеми своими производными до порядка $m-n+k$ включительно. Вычислим этот образ Фурье. Согласно определению

$$\tilde{c}(p) = \Phi_0(p') \sum_{\gamma''} a^{(k)}[\gamma''] e^{2\pi i p'' \gamma''} = \Phi_0(p') Q^{(k)}(p'').$$

Поскольку значения производных функции $\tilde{c}(p)$ нужно вычислить только в начале координат, можно заменить $\Phi_0(p')$ на $\delta(p')$. Условие формальной ортогональности запишется так:

$$D^{\alpha}[\delta(p') Q^{(k)}(p'')]|_{p=0} = 0, \quad |\alpha| \le m-n+k. \tag{3.6}$$

Условие обращения в нуль производных, взятых только по p'', приводит к равенствам

$$D^{\alpha''} Q^{(k)}(p'')|_{p''=0} = 0, \quad |\alpha''| \le m-n+k.$$

Оставшиеся условия (3.6) выполняются автоматически, поскольку производные вида $D_{p'}^{\alpha'} D_{p''}^{\alpha''} Q^{(k)}(p'')$ представляют собой производные по p' от функции, которая в действительности от p' не зависит, и, следовательно, тождественно равны нулю.

Нетрудно видеть, что функция $c(x)$ представлена в виде суммы:

$$c(x) = \sum_{\gamma'} \Big\{ \sum_{\gamma''} a^{(k)}[\gamma''] \delta(x-\gamma) \Big\} = \sum_{\gamma'} m_{\gamma'}(x).$$

Каждое слагаемое здесь является элементарным функционалом, формально ортогональным многочленам степени не выше $m-n+k$. Действительно, образ Фурье $m_{\gamma'}(x)$ равен $e^{2\pi i \gamma' p'} Q^{(k)}(p'')$ и по лемме III.1 обращается в нуль вместе со всеми своими производными до порядка $m-n+k$ в начале координат. Но функционал $m_{\gamma'}(x)$ финитен, так как его носитель сосредоточен в ограниченной области $|x''| < L$, $x' = \gamma'$. Следовательно, он ортогонален таким многочленам не только формально, но и фактически.

Таким образом, функционал $c(x)$ представлен в виде суммы элементарных функционалов, ортогональных к многочленам степени не

выше $m-n+k$, т. е. является функционалом погрешности нуля с регулярным пограничным слоем.

Лемма III.3 доказана.

Обратимся к доказательству теоремы III.9. Пусть l_Φ — функционал погрешности кубатурной формулы с формальным пограничным слоем для многогранника $\mathfrak{M}$. Рассмотрим произвольный функционал погрешности l_p с регулярным пограничным слоем для этого же многогранника. Имеем

$$l_\Phi(x) = l_p(x) + (l_\Phi(x) - l_p(x)). \tag{3.7}$$

Разность $l_\Phi(x) - l_p(x)$ представляет собой, очевидно, функционал погрешности нуля с формальным пограничным слоем, который по лемме III.3 имеет регулярный пограничный слой. Далее, сумма в формуле (3.7) по лемме III.2 является, в свою очередь, функционалом с регулярным пограничным слоем для многогранника $\mathfrak{M}$.

Теорема III.9 доказана.

Опишем для телесных углов способ явного построения кубатурных формул с формальным, а значит, и с регулярным пограничным слоем. Функционал погрешности с формальным пограничным слоем удобно строить, составляя последовательно пограничные слои разных размерностей, начиная с $n-1$ и далее в порядке убывания, т. е. для $n-2, n-3, \ldots, 0$.

Заметим, что функционал погрешности для любого телесного угла представляется как сумма характеристической функции этого угла и линейной комбинации произведений функций одной переменной вида $\delta(x_s - \gamma_s)$,

$$\Phi_0(x_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x_k - j)$$

и

$$\Phi_1(x_t - \gamma_t) = \frac{1}{2}\delta(x_t - \gamma_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta(x_t - \gamma_t - j).$$

Построение нужного функционала сводится, таким образом, к нахождению коэффициентов этой линейной комбинации.

Сделаем несколько замечаний о способах вычисления преобразования Фурье от рассматриваемых функционалов погрешности.

Рассмотрим отдельно преобразование Фурье для характеристической функции телесного угла и для точечной части функционала погрешности этого угла, но предварительно введем понятие простейшего угла.

Телесные углы порядка $n-s$, образованные ровно s гранями размерности $n-1$, будем называть *простейшими углами*. В трехмерном пространстве примерами многогранников, у которых все телесные углы простейшие, служат тетраэдр, куб, правильный додекаэдр и др.

Преобразование Фурье характеристической функции простейшего угла осуществляется очень легко. Линейной заменой переменных простейший угол превращается в координатный, а характеристическая функция становится при этом произведением функций вида $(1/2 + 1/2 \operatorname{sign} x_j)$ с преобразованием Фурье, равным $1/2\delta(p_j) + 1/(i2\pi p_j)$. Отсюда сразу получается явное представление искомого преобразования как произведения функций вида $\delta(p_k)$ и $1/2\delta(p_j) + 1/(i2\pi p_j)$. Преобразование Фурье для точечной части функционала погрешности простейшего угла вычисляется элементарно.

Если многогранник содержит не только простейшие углы, его всегда можно разбить на части, которые этим свойством обладают, например на симплексы. Затем следует отдельно преобразовать характеристические функции каждого такого симплекса и сложить их. Тем самым преобразование Фурье характеристической функции любого выпуклого многогранника будет найдено в явной форме.

Вычисляя преобразование Фурье точечной части функционала погрешности для многогранника, удобно опять разбить соответствующий многогранник на простейшие углы, с тем чтобы дальше складывать функционалы погрешности для этих углов.

Чтобы избавиться от появления внутренних пограничных слоев на границах соединения простейших телесных углов, можно, составляя функционалы погрешности для каждого из них, воспользоваться формулами с внешним пограничным слоем, выходящим за рассматриваемый простейший телесный угол. При этом возможно добиться, чтобы нежелательные пограничные слои сокращались при сложении соответствующих функционалов. Подобный подход реализован для телесных углов, представимых в виде суммы двух простейших [21]. К случаю именно таких телесных углов преобразуется задача построения кубатурных формул с формальным пограничным слоем

для любого рационального многогранника в трехмерном пространстве.

Вопросы, возникающие при непосредственном численном построении кубатурных формул с формальным и регулярным пограничным слоем для многогранников, рассмотрены в [21]. В этой же работе задача построения кубатурной формулы для рационального угла сведена к построению кубатурной формулы для координатного угла с решеткой узлов, получающейся объединением нескольких кубических решеток. Последняя задача решена в [33].

Коэффициенты кубатурных формул для куба с центрированной кубической решеткой узлов вычислены в работе [20]. Центрированную кубическую решетку составляют две кубические же подрешетки, сдвинутые друг относительно друга на полшага по всем осям. Найденные кубатурные формулы реализованы в виде компьютерных программ [18].

Глава IV

Порядок сходимости кубатурных формул

В этой главе рассматривается вопрос о порядке убывания нормы функционала погрешности при возрастании числа узлов кубатурной формулы. Для формул с заданной решеткой узлов $hH\gamma$ устанавливаются точные по порядку оценки сильной сходимости на банаховом пространстве периодических функций, удовлетворяющем ряду естественных условий. Аналогичные результаты доказываются для периодических невесовых банаховых пространств из бесселевых шкал. Получены также оценки норм функционалов погрешности с равномерным распределением узлов, действующих в пространстве $L_2^{(m)}$ непериодических функций.

§ 1. Универсальная оценка снизу порядка сходимости

Исследуем норму произвольного функционала погрешности с заданной решеткой узлов $hH\gamma$, действующего в банаховом пространстве $\widetilde{B}$ периодических функций. Это пространство удовлетворяет следующим условиям.

1. Пространство $\widetilde{B}$ состоит из функций с ортогональной матрицей периодов H, т. е. таких функций $\varphi(x)$, что для любого целочисленного мультииндекса γ выполнено равенство

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, любая тождественно постоянная функция принадлежит $\widetilde{B}$.

2. Норма в $\widetilde{B}$ инвариантна относительно сдвигов. Иными словами, для любых $y \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi(x) \in \widetilde{B}$ функция $\varphi(x+y)$ принадлежит $\widetilde{B}$ и при этом

$$\|\varphi(x+y) \mid \widetilde{B}\| = \|\varphi(x) \mid \widetilde{B}\|. \tag{1.1}$$

3. Пространство $\widetilde{B}$ вполне непрерывно вложено в пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega}_0)$, где Ω_0 — фундаментальный параллелепипед матрицы H.

4. Для любой функции $\varphi(x)$ с нулевым средним значением φ_0 по Ω_0, т. е. такой, что

$$\varphi_0 = \frac{1}{|\Omega_0|} \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\, dx = 0,$$

и для любой постоянной C выполняется неравенство

$$\|\varphi \mid \widetilde{B}\| \leq \|\varphi + C \mid \widetilde{B}\|. \tag{1.2}$$

Пространство $\widetilde{B}$ может содержать комплекснозначные элементы. В этом случае потребуем, чтобы вместе с функцией $\varphi(x)$ пространству $\widetilde{B}$ принадлежала сопряженная с ней функция $\overline{\varphi}(x)$. Нормы этих функций в $\widetilde{B}$ должны совпадать:

$$\|\varphi(x) \mid \widetilde{B}\| = \|\overline{\varphi}(x) \mid \widetilde{B}\|. \tag{1.3}$$

Рассмотрим в $\widetilde{B}$ кубатурную формулу с решеткой узлов $hH\gamma$ и областью интегрирования Ω, содержащейся в Ω_0. Будем считать, что при заданном h среди соответствующих функционалов погрешности существует оптимальный, т. е. такой, норма которого в $\widetilde{B}$ минимальна.

Отметим, что наложенным на $\widetilde{B}$ условиям удовлетворяют, например, пространства $\widetilde{W}_2^{(m)}$, определенные в гл. I, § 4, а также их обобщения — пространства $\widetilde{W}_p^{(m)}$, $1 < p < \infty$, о которых речь пойдет в следующем параграфе.

Зададим положительное h таким образом, чтобы отношение $1/h$ было натуральным числом, и исследуем действие на $\varphi(x) \in \widetilde{B}$ следующего функционала погрешности:

$$l_\infty(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} h^n \delta(x - hH\gamma). \tag{1.4}$$

При сделанных предположениях о пространстве $\widetilde{B}$ справедлива

Теорема IV.1. *Функционал погрешности $l_\infty(x)$ асимптотически оптимален в $\widetilde{B}$, т. е. его норма в $\widetilde{B}^*$ отличается от нормы оптимального в $\widetilde{B}$ функционала погрешности на величину, бесконечно малую при $h \to 0$.*

Доказательство. По условию при данном h существует функционал погрешности $l_0(x)$, оптимальный в $\widetilde{B}$, т. е. имеющий минимальную норму в $\widetilde{B}^*$. Образуем среднее арифметическое его сдвигов, т. е. функционалов $l_0(x - hH\gamma)$, по всем $hH\gamma \in \Omega_0$. Иными словами, положим

$$l^0(x) = \frac{1}{N} \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} l_0(x - hH\gamma), \tag{1.5}$$

где N — общее число точек $hH\gamma$ в Ω_0, т. е. $Nh^n = |H| = 1$. Благодаря свойствам нормы в $\widetilde{B}$, и в частности ее инвариантности относительно сдвигов, функционал $l^0(x)$ также оптимален в $\widetilde{B}$. Кроме того, как несложно убедиться, $l^0(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} l^0(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - h^n c_0(h) \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} \delta(x - hH\gamma) \\ = (1 - c_0)\chi_{\Omega_0}(x) + c_0 l_\infty(x). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Выясним, как ведет себя функция $c_0(h)$ из этого равенства при $h \to 0$.

Функционал $l_\infty(x)$ обращается в нуль на тождественной единице. Пользуясь этим, из (1.6) получаем

$$|\Omega_0|\,|1 - c_0(h)| = |(l^0(x), 1)| \le K\|l^0 \mid \widetilde{B}^*\| \le K\|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|. \tag{1.7}$$

Из компактности вложения $\widetilde{B}$ в $C(\overline{\Omega}_0)$ так же, как в лемме I.5, следует, что норма $l_\infty(x)$ в $\widetilde{B}^*$ стремится к нулю при неограниченном убывании шага h. Отсюда и из (1.7) заключаем, что

$$c_0(h) = 1 + O(h). \tag{1.8}$$

Сравним нормы функционалов $l_\infty(x)$ и $l^0(x)$. Согласно равенству (1.6) имеем

$$\|l^0 \mid \widetilde{B}^*\| = \sup_{\varphi\in\widetilde{B}} \frac{|((1-c_0)\chi_{\Omega_0}(x) + c_0 l_\infty(x), \varphi(x))|}{\|\varphi \mid \widetilde{B}\|}.$$

Возьмем супремум справа по подмножеству $\widetilde{B}$, состоящему из тех φ, для которых среднее φ_0 по Ω_0 равно нулю:

$$\varphi_0 = \frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Тогда

$$\|l_0 \mid \widetilde{B}^*\| \geq \sup_{\varphi\in\widetilde{B},\,\varphi_0=0} \frac{|(c_0 l_\infty(x), \varphi(x))|}{\|\varphi \mid \widetilde{B}\|}. \tag{1.9}$$

Учитывая, что кубатурная формула, соответствующая $l_\infty(x)$, точна на любой постоянной, перепишем точную верхнюю границу в правой части (1.9) следующим образом:

$$|c_0| \sup_{\varphi\in\widetilde{B}} \frac{|(l_\infty, \varphi(x) - \varphi_0)|}{\|\varphi(x) - \varphi_0 \mid \widetilde{B}\|} = |c_0| \sup_{\varphi\in\widetilde{B}} \frac{|(l_\infty, \varphi)|}{\|\varphi(x) - \varphi_0 \mid \widetilde{B}\|}. \tag{1.10}$$

Среднее значение функции $\varphi(x) - \varphi_0$ по Ω_0 равно нулю. Отсюда и из условия (1.2) вытекает, что

$$\|\varphi - \varphi_0 \mid \widetilde{B}\| \leq \|\varphi \mid \widetilde{B}\|.$$

Подставляя это неравенство в (1.10), из (1.9) получим

$$\|l_0 \mid \widetilde{B}^*\| \geq |c_0| \sup_{\varphi\in\widetilde{B}} \frac{|(l_\infty, \varphi)|}{\|\varphi \mid \widetilde{B}\|} = |c_0|\,\|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|.$$

Из последнего соотношения, оптимальности l_0 в $\widetilde{B}$ и равенства (1.8) имеем

$$1 \leq \frac{\|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|}{\|l_0 \mid \widetilde{B}^*\|} = \frac{1}{|c_0|} = 1 + O(h).$$

Переходя здесь к пределу по $h \to 0$, видим, что функционал $l_\infty(x)$ действительно асимптотически оптимален в $\widetilde{B}^*$.

Теорема IV.1 доказана.

Можно показать, что при достаточно малом h функционал $l_\infty(x)$ является не только асимптотически оптимальным, но и просто оптимальным в случае, если норма в $\widetilde{B}$ удовлетворяет более сильному условию, чем (1.2). Именно, сформулированное утверждение справедливо, если норма любой функции $\varphi \in \widetilde{B}$ удовлетворяет соотношению

$$||\varphi \mid \widetilde{B}|| = \max\{||\varphi - \varphi_0 \mid \widetilde{B}||, |\varphi_0|\}.$$

Выполнения этого условия либо неравенства (1.2) можно добиться, вводя в $\widetilde{B}$ новую нормировку по формуле

$$||\varphi \mid \widetilde{B}||_1 = \max\{||\varphi - \varphi_0 \mid \widetilde{B}||, |\varphi_0|\}.$$

Рассмотрим действие в пространстве $\widetilde{B}$ произвольного функционала погрешности $l(x)$ с решеткой узлов $hH\gamma$ и областью интегрирования Ω, лежащей строго внутри Ω_0:

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{hH\gamma \in \Omega} c[\gamma]\delta(x - hH\gamma). \tag{1.11}$$

Для $l(x)$ нетрудно определить понятие экстремальной функции в пространстве $\widetilde{B}$, однако в общем случае необходимо доказывать ее существование. Чтобы избежать этого, определим понятие максимизирующей последовательности для $l(x)$ в $\widetilde{B}$.

Будем говорить, что последовательность $\{u_j\}$ является *максимизирующей для* $l(x)$ *в* $\widetilde{B}$, если все u_j лежат в единичном шаре $\widetilde{B}$ и при этом выполняется хотя бы одно из двух равенств:

$$||l \mid \widetilde{B}^*|| = \lim_{j\to\infty} \frac{(l, u_j)}{||u_j \mid \widetilde{B}||}, \quad ||l \mid \widetilde{B}^*|| = \lim_{j\to\infty} \frac{|(l, u_j)|}{||u_j \mid \widetilde{B}||}. \tag{1.12}$$

Существование максимизирующей последовательности непосредственно следует из определения нормы в $\widetilde{B}^*$. Для функционала $l_\infty(x)$ ее можно выбрать специальным образом. Покажем, что имеет место

Лемма IV.1. *Функционал погрешности $l_\infty(x)$ имеет максимизирующую последовательность $\{v_j\}$, удовлетворяющую следующим свойствам:*

1) *любая функция $v_j(x)$ вещественнозначна, а значение на ней функционала $l_\infty(x)$ неотрицательно:*

$$(l_\infty, v_j) \geq 0; \tag{1.13}$$

2) *среднее значение любой функции v_j по Ω_0 равно нулю, а ее норма в $\widetilde{B}$ — единице:*

$$\frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} v_j(x)\,dx = 0, \quad \|v_j \mid \widetilde{B}\| = 1; \tag{1.14}$$

3) *все функции $v_j(x)$ периодичны не только с матрицей H, но и с матрицей hH, т. е.*

$$v_j(x + hH\gamma) = v_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{1.15}$$

4) *нижний предел при $j \to \infty$ разности между функцией $v_j(x)$ и ее значением в нуле неотрицателен:*

$$\varliminf_{j\to\infty} (v_j(x) - v_j(0)) \geq 0. \tag{1.16}$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь максимизирующую последовательность $\{u_j\}$ функционала $l_\infty(x)$ в $\widetilde{B}$, удовлетворяющую первому из равенств (1.12). Преобразуем ее так, чтобы выполнялись все условия (1.13)–(1.16).

Заметим, что любую функцию $u_j(x)$ можно считать вещественнозначной. В противном случае вместо $\{u_j\}$ достаточно рассмотреть последовательность, образованную из вещественных частей функции $u_j(x)$, которая, как мы сейчас покажем, также является максимизирующей для $l_\infty(x)$. В самом деле, выпуклость единичного шара в $\widetilde{B}$ и условие (1.3) дают соотношение

$$\|\operatorname{Re} u_j \mid \widetilde{B}\| = \frac{1}{2}\|u_j + \bar{u}_j \mid \widetilde{B}\| \leq \|u_j \mid \widetilde{B}\| \leq 1,$$

из которого, в частности, следует, что

$$\frac{|(l_\infty, \operatorname{Re} u_j)|}{\|\operatorname{Re} u_j \mid \widetilde{B}\|} \geq \frac{|(l_\infty, \operatorname{Re} u_j)|}{\|u_j \mid \widetilde{B}\|} = \left|\operatorname{Re} \frac{(l_\infty, u_j)}{\|u_j \mid \widetilde{B}\|}\right|.$$

Переходя здесь к пределу по $j \to \infty$ и пользуясь определением (1.12), получим

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|(l_\infty, \operatorname{Re} u_j)|}{\|\operatorname{Re} u_j \mid \widetilde{B}\|} \geq \|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|.$$

Отсюда следует, что для последовательности $\{\operatorname{Re} u_j\}$ выполнено второе из равенств (1.12), т. е. она действительно максимизирующая для $l_\infty(x)$.

Учитывая вещественность функции $u_j(x)$, построим три новые максимизирующие последовательности, положив

$$z_j^{(1)}(x) = u_j(x) \operatorname{sign}(l_\infty, u_j),$$

$$z_j^{(2)}(x) = z_j^{(1)}(x) - \frac{1}{|\Omega_0|} \int\limits_{\Omega_0} z_j^{(1)}(x)\, dx,$$

$$z_j^{(3)}(x) = h^n \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} z_j^{(2)}(x - hH\gamma).$$

Несложно проверить, что $z_j^{(3)}(x)$ удовлетворяет условиям (1.13) и (1.15), а также первому из условий (1.14). Оценим норму $z_j^{(3)}(x)$ в $\widetilde{B}$. Из выпуклости единичного шара в $\widetilde{B}$ следует, что

$$\|z_j^{(3)} \mid \widetilde{B}\| \leq \|z_j^{(2)} \mid \widetilde{B}\|. \tag{1.17}$$

Условие (1.2) дает оценку

$$\|z_j^{(2)} \mid \widetilde{B}\| \leq \|z_j^{(1)} \mid \widetilde{B}\| \leq \|u_j \mid \widetilde{B}\|. \tag{1.18}$$

Объединяя (1.17) и (1.18), получаем искомую оценку нормы $z_j^{(3)}(x)$.

Функционал погрешности $l_\infty(x)$, очевидно, инвариантен относительно сдвига на вектор $hH\gamma \in \Omega_0$ и обращается в нуль на любой постоянной. Поэтому

$$(l_\infty, z_j^{(3)}) = (l_\infty, z_j^{(2)}) = |(l_\infty, u_j)|. \tag{1.19}$$

Из (1.17)–(1.19) следует, что $\{z_j^{(3)}(x)\}$ — максимизирующая последовательность в $\widetilde{B}$ для $l_\infty(x)$. Значит, таковой же является и последовательность функций

$$v_j(x) = \frac{z_j^{(3)}(x)}{\|z_j^{(3)} \mid \widetilde{B}\|}. \tag{1.20}$$

Легко убедиться, что $\{v_j(x)\}$ удовлетворяет условиям (1.13)–(1.15). Осталось проверить неравенство (1.16), и тем самым будет доказано, что $\{v_j\}$ — искомая последовательность.

Возьмем произвольную точку $x \in \Omega_0$ и рассмотрим функцию $v_j(y+x) - v_j(x)$ аргумента $y \in \mathbb{R}^n$. Согласно условию (1.15) эта разность обращается в нуль в узловых точках $hH\gamma$ решетки, и потому значение на ней функционала $l_\infty(y)$ совпадает с интегралом по Ω_0:

$$\begin{aligned}(l_\infty(y), v_j(y+x) - v_j(x)) &= \int\limits_{\Omega_0} (v_j(y+x) - v_j(x))\, dy \\ &= \int\limits_{\Omega_0} v_j(y)\, dy - |\Omega_0| v_j(x). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Равенство (1.21) справедливо, в частности, при $x = 0$. Отсюда следует, что

$$(l_\infty(y), v_j(y)) = (l_\infty(y), v_j(y) - v_j(0)) = \int\limits_{\Omega_0} v_j(y)\, dy - |\Omega_0| v_j(0). \tag{1.22}$$

Выразив из этого соотношения интеграл от $v_j(y)$ по Ω_0, подставив результат в (1.21) и учитывая, что значение функционала погрешности $l_\infty(y)$ на постоянной по y функции $v_j(x)$ равно нулю, получаем

$$\begin{aligned}(l_\infty(y), v_j(y+x)) &= (l_\infty(y), v_j(y+x) - v_j(x)) \\ &= (l_\infty(y), v_j(y)) - |\Omega_0|(v_j(x) - v_j(0)). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Оценим сверху левую часть равенства (1.23). Из условий (1.1) и (1.14) имеем

$$|(l_\infty(y), v_j(y+x))| \le \|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\| \, \|v_j(y+x) \mid \widetilde{B}\| \le \|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|.$$

Используя это неравенство, а также тот факт, что последовательность $\{v_j(y)\}$ максимизирующая для функционала погрешности $l_\infty(y)$, и переходя к пределу по j в обеих частях (1.23), получим требуемое соотношение (1.16).

Лемма IV.1 доказана.

Вернемся к функционалу погрешности $l(x)$, определенному равенством (1.11). Пусть область интегрирования Ω обладает кусочно гладкой границей. Тогда справедлива

Теорема IV.2. *Норма функционала погрешности $l(x)$ в пространстве $\widetilde{B}^*$ допускает следующую оценку снизу:*

$$\|l(x) \mid \widetilde{B}^*\| \geq \frac{|\Omega|}{|\Omega_0|}\|l_\infty(x) \mid \widetilde{B}^*\|(1 + O(1)), \tag{1.24}$$

где величина $O(1)$ стремится к нулю при убывании h.

Доказательство. Построим максимизирующую последовательность $v_j(x)$ для функционала погрешности $l_\infty(x)$, обладающую свойствами, перечисленными в лемме IV.1. Из равенства (1.22) и условия (1.14) следует, что

$$|v_j(0)| \leq \frac{1}{|\Omega_0|}|(l_\infty, v_j)| \leq \frac{1}{|\Omega_0|}\|l_\infty \mid \widetilde{B}^*\|.$$

Последняя величина, как мы уже отмечали, стремится к нулю при убывании h. Поэтому

$$\|v_j(x) - v_j(0) \mid \widetilde{B}\| \leq \|v_j \mid \widetilde{B}\| + |v_j(0)|\,\|1 \mid \widetilde{B}\| = 1 + O(1), \tag{1.25}$$

причем $O(1)$ стремится к нулю равномерно по j.

Учитывая это, несложно оценить норму $l(x)$ в $\widetilde{B}^*$ снизу. Из определения нормы и неравенства (1.25) имеем

$$\|l \mid \widetilde{B}^*\| \geq \overline{\lim_{j\to\infty}} \int_\Omega (v_j(x) - v_j(0))\,dx(1 + O(1)). \tag{1.26}$$

Интеграл в (1.26) разобьем на сумму двух интегралов, взятых по непересекающимся подмножествам Ω. Первое из подмножеств — $\Omega^{(1)}$ — получается объединением всех элементарных ячеек решетки

$hH\gamma$, целиком лежащих внутри Ω, а второе — $\Omega^{(2)}$ — является дополнением к $\Omega^{(1)}$ в Ω. Согласно неравенству (1.16) и лемме Фату имеем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \int\limits_{\Omega^{(2)}} (v_j(x) - v_j(0))\,dx \geq \int\limits_{\Omega^{(2)}} \overline{\lim_{j\to\infty}} (v_j(x) - v_j(0))\,dx \geq 0.$$

Поэтому отбрасывание интеграла по $\Omega^{(2)}$ лишь усиливает неравенство (1.26).

Интеграл же по $\Omega^{(1)}$ от разности $v_j(x) - v_j(0)$ сравним с интегралом от той же функции, но по Ω_0. Если N_1 — число элементарных ячеек, составляющих $\Omega^{(1)}$, а N — общее число таких ячеек в Ω_0, то согласно условию периодичности (1.15) имеем

$$\int\limits_{\Omega^{(1)}} (v_j(x) - v_j(0))\,dx = \frac{N_1}{N} \int\limits_{\Omega_0} (v_j(x) - v_j(0))\,dx. \tag{1.27}$$

В силу гладкости границы области Ω_0 выполняется равенство

$$N_1 h^n = |\Omega^{(1)}| = |\Omega|(1 + O(h)).$$

Учитывая, что $Nh^n = |\Omega_0|$, а интеграл в правой части (1.27) совпадает со значением функционала $l_\infty(x)$ на функции $v_j(x) - v_j(0)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Omega^{(1)}} (v_j(x) - v_j(0))\,dx = \frac{|\Omega|}{|\Omega_0|}(l_\infty(x), v_j(x))(1 + O(h)).$$

Переходя в нем к пределу по $j \to \infty$ и пользуясь оценкой (1.26), получаем (1.24).

Теорема IV.2 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы IV.2 остается в силе, если область Ω заменить множеством типа $\Omega^{(1)}$, т. е. объединением конечного числа ячеек решетки $hH\gamma$. Иными словами, оценка (1.24) справедлива для последовательности функционалов погрешности вида (1.11), у которых не только решетка, но и область интегрирования может зависеть от h, разбиваясь при каждом h на целое число элементарных ячеек.

Теорема IV.2 справедлива также в случае, когда некоторые узлы рассматриваемого функционала погрешности содержатся в Ω_0, а не только в Ω, т. е. когда

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{hH\gamma\in\Omega_0} c[\gamma]\delta(x - hH\gamma).$$

Дадим определение бесселевой шкалы банаховых пространств и на любом пространстве $\widetilde{B}$ такой шкалы оценим снизу норму функционала погрешности $l_\infty(x)$.

Пусть $\widetilde{B}_0$ — некоторое банахово пространство функций $\varphi(x)$ с ортогональной матрицей периодов H:

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Будем предполагать, что произвольная функция $\varphi(x) \in \widetilde{C}(\overline{\Omega}_0)$, т. е. непрерывная периодическая, принадлежит $\widetilde{B}_0$, и при этом имеет место оценка

$$\|\varphi \mid \widetilde{B}_0\| \le K\|\varphi \mid \widetilde{C}(\overline{\Omega}_0)\|. \tag{1.28}$$

Считаем также, что любая функция $\varphi(x) \in \widetilde{B}_0$ представима рядом Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_\gamma \varphi[\gamma]e^{i2\pi H^{-1}x\gamma}. \tag{1.29}$$

Пусть задана функция $\mu(\xi)$ переменной ξ из $\mathbb{R}^n$, которую мы назовем *весовой*. Будем говорить, что $\varphi(x)$ принадлежит множеству $\widetilde{B}_0^\mu$, если конечна величина

$$\|\varphi \mid \widetilde{B}_0^\mu\| = \left\|\sum_\gamma \varphi[\gamma]\mu(H^{-1*}\gamma)e^{i2\pi\gamma H^{-1}x} \mid \widetilde{B}_0\right\|. \tag{1.30}$$

Если $\mu(\xi) \ne 0$, то равенство (1.30) определяет на $\widetilde{B}_0^\mu$ норму. Будем говорить, что совокупность пространств $\widetilde{B}_0^\mu$ образует *бесселеву шкалу* с нулевым пространством $\widetilde{B}_0$.

Весовую функцию $\mu(\xi)$ подчиним нескольким условиям.

1. Функция $\mu(\xi)$ положительна и на бесконечности имеет степенной рост. Точнее, существуют положительные постоянные K_1, m_1, m_2 такие, что $m_1 < m_2$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$K_1^{-1}(1 + |\xi|)^{m_1} \le \mu(\xi) \le K_1(1 + |\xi|)^{m_2}. \tag{1.31}$$

2. Существует положительная постоянная K_2 такая, что при $t \geq K_2$ и $j = 1$ функция

$$f_j(t) = (1+t)^{-m_j} \min_{|\xi|=t} \mu(\xi) \tag{1.32}$$

монотонно растет, а при $t \geq K_2$ и $j = 2$ монотонно убывает.

3. Функция $\mu(\xi)$ согласована с геометрией решетки $H^{-1*}\gamma$. Именно, найдутся такие постоянные $R > 1$, $K > 0$ и ненулевой целочисленный мультииндекс β_0, что

$$\mu(H^{-1*}\beta_0/h) \leq K \min_{1/R \leq |\xi| \leq R} \mu(\xi/h). \tag{1.33}$$

Если взять в качестве $\widetilde{B}_0$ пространство $\widetilde{L}_p(\Omega_0)$, $1 < p < \infty$, а функцию $\mu(\xi)$ взять равной $(1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$, где $m_1 < m < m_2$, то получим пространство $\widetilde{W}_p^{(m)}$. Если к тому же решетка кубическая, т. е. H — единичная матрица, то все условия (1.31)–(1.33) выполнены.

Отметим, что из всех трех условий на функцию $\mu(\xi)$ наиболее ограничительным является условие (1.33). Оно, например, не выполняется в случае $n = 2$, когда $\widetilde{B}_0^\mu$ совпадает с $\widetilde{W}_2^{1,2}(\Omega_0)$, а матрица H соответствует повороту плоскости на угол $\pi/3$, т.е.

$$H = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Теорема IV.3. *Норма функционала погрешности $l_\infty(x)$, действующего в произвольном банаховом пространстве $\widetilde{B}_0^\mu$ бесселевой шкалы, допускает следующую оценку снизу:*

$$\left\| l_\infty(x) \mid \widetilde{B}_0^{\mu*} \right\| \geq K \sup_\xi \psi(\xi, h), \tag{1.34}$$

где

$$\psi(\xi, h) = \frac{1}{\mu(\xi)} \frac{1}{[h(1+|\xi|)]^{-m_1} + [h(1+|\xi|)]^{-m_2}}. \tag{1.35}$$

Доказательство. Согласно условию $1/h$ — это целое число, а любая непрерывная периодическая функция принадлежит пространству $\widetilde{B}_0$. В частности, его элементом является экспонента с показателем $i2\pi\beta H^{-1}x/h$. При этом в силу (1.28) справедливо соотношение

$$\|e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h} \mid \widetilde{B}_0\| \leq K \|e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h} \mid \widetilde{C}\| = K, \tag{1.36}$$

где K не зависит от h. По определению (1.30) нормы в $\widetilde{B}_0^\mu$ имеем

$$\left\|e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h} \mid \widetilde{B}_0^\mu\right\| = \mu(H^{-1*}\beta/h)\|e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h} \mid \widetilde{B}_0\|. \tag{1.37}$$

В случае, когда β — целочисленный ненулевой мультииндекс, значение на соответствующей экспоненте функционала погрешности $l_\infty(x)$ равно -1. Отсюда и из (1.36), (1.37) заключаем, что норма $l_\infty(x)$ допускает следующую оценку снизу:

$$\left\|l_\infty \mid \widetilde{B}_0^{\mu*}\right\| \geq \frac{|(l_\infty(x), e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h})|}{\left\|e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h} \mid \widetilde{B}_0^\mu\right\|} \geq \frac{K}{\mu(H^{-1*}\beta/h)}. \tag{1.38}$$

Рассмотрим функцию $\psi(\xi, h)$, определенную соотношением (1.35). Элементарные рассуждения показывают, что имеет место оценка

$$\sup_\xi \psi(\xi, h) \leq \sup_{t\geq 0} \frac{1}{h^{-m_1}f_1(t) + h^{-m_2}f_2(t)}, \tag{1.39}$$

где функции $f_j(t)$ заданы равенством (1.32). Согласно условию функция $f_1(t)$ монотонно растет, а $f_2(t)$ монотонно убывает. Пользуясь этим, несложно получить две оценки:

$$\begin{aligned}\sup_{t\leq t_0} \frac{1}{h^{-m_1}f_1(t) + h^{-m_2}f_2(t)} &= \sup_{t\leq t_0} \frac{h^{m_2}}{f_2(t)} \frac{1}{1 + (h(t+1))^{m_2-m_1}} \\ &\leq h^{m_2}/f_2(t_0),\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq t_0} \frac{1}{h^{-m_1}f_1(t) + h^{-m_2}f_2(t)} &= \sup_{t\geq t_0} \frac{h^{m_1}}{f_1(t)} \frac{1}{1 + (h(t+1))^{m_1-m_2}} \\ &\leq h^{m_1}/f_1(t_0).\end{aligned}$$

Выберем точку t_0 так, чтобы значения функций $h^{-m_1}f_1(t)$, $h^{-m_2}f_2(t)$ в ней совпадали. Это возможно лишь при $t_0 = 1/h - 1$. Тогда из (1.39), (1.40) следует, что

$$\sup_\xi \psi(\xi, h) \leq \max\left\{\frac{h^{m_1}}{f_1(t_0)}, \frac{h^{m_2}}{f_2(t_0)}\right\} = \frac{1}{\min\limits_{|\xi|=t_0} \mu(\xi)} = \frac{1}{\min\limits_{|\xi|=1-h} \mu(\xi/h)}. \tag{1.41}$$

Воспользовавшись условием (1.33), при малых h получим

$$\min_{|\xi|=1-h} \mu(\xi/h) \geq \min_{1/R\leq|\xi|\leq R} \mu(\xi/h) \geq \mu(H^{-1*}\beta_0/h).$$

Из этого неравенства и формул (1.38), (1.41) следует оценка (1.34).

Теорема IV.3 доказана.

§ 2. Порядок сходимости однородного функционала погрешности

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеются решетка узлов $hH\gamma$, множество ω, лежащее строго внутри соответствующего H фундаментального параллелепипеда Ω_0, и функционал погрешности $l(x)$, получающийся суммированием одного и того же элементарного функционала по всевозможным сдвигам на вектор $hH\gamma \in \omega$:

$$l(x) = \sum_{hH\gamma\in\omega} l_0\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что функционал $l_0(y)$ представим линейной комбинацией характеристической функции $\chi_0(y)$ множества Ω_0 и δ-функций Дирака:

$$l_0(y) = \chi_0(y) - \sum_{|H\gamma'|\le L} a[\gamma']\delta(y - H\gamma'). \tag{2.2}$$

Определяемый равенством (2.1) функционал погрешности $l(x)$ назовем *однородным порядка* M, если $l_0(y)$ имеет порядок M, т. е. значения $l_0(y)$ на полиномах степени не больше M равны нулю:

$$(l_0(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| \le M.$$

Величина L в (2.2) не зависит от h, а ω лежит внутри Ω_0. Поэтому носитель однородного функционала (2.1) при достаточно малых h лежит строго внутри Ω_0. Отметим, что однородный функционал $l(x)$ порядка $M \ge m$ равномерно распределен в Ω.

Ниже, в § 4 этой главы, мы исследуем норму в $L_2^{(M)*}$ более общего функционала погрешности, чем однородный функционал (2.1), и, в частности, докажем существование постоянной K такой, что

$$\left\| l \mid L_2^{(M)*} \right\| \le K h^M \tag{2.3}$$

для всех достаточно малых h.

Исследуем действие однородного функционала в пространствах периодических функций $\widetilde{W}_p^{(m)}$, являющихся обобщением гильбертовых пространств $\widetilde{W}_2^{(m)}$, и докажем, пользуясь (2.3), справедливость

аналогичных неравенств для норм $l(x)$ в сопряженных пространствах $\widetilde{W}_p^{(m)*}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда множество $\widetilde{W}_p^{(m)}$ состоит из функций $\varphi(x)$ с матрицей периодов H:

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

При этом каждый элемент $\varphi(x)$ представим рядом Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_\gamma \varphi[\gamma] e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}$$

и имеет следующую конечную норму:

$$\|\varphi \mid \widetilde{W}_p^{(m)}\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_\gamma \varphi[\gamma](1 + |2\pi H^{-1*}\gamma|^2)^{m/2} e^{i2\pi\gamma H^{-1}x} \right|^p dx \right\}^{1/p}$$

Таким образом определенное пространство $\widetilde{W}_p^{(m)}$ является банаховым и входит в бесселеву шкалу с нулевым пространством $\widetilde{L}_p(\Omega_0)$.

Нас интересуют оценки сверху норм функционала погрешности (2.1) в сопряженном к $\widetilde{W}_p^{(m)}$ пространстве $\widetilde{W}_p^{(m)*}$. Для их получения введем в рассмотрение две важные функции $G_m(x)$ и $\widetilde{G}_m(x)$, служащие аналогами фундаментального решения полигармонического уравнения класса $L_2^{(m)}$ и соответствующей ему периодической функции. Положим $m > n$ и

$$G_m(x) = \int (1 + |2\pi\xi|^2)^{-m/2} e^{i2\pi\xi x}\, d\xi, \quad \widetilde{G}_m(x) = \sum_\gamma G_m(x - H\gamma).$$

Функция $G_m(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и непрерывна везде при $m > n$. На бесконечности функция $G_m(x)$ и все ее производные убывают экспоненциально [22, 199].

Производные высоких порядков функции $G_m(x)$ имеют в нуле такие же особенности, как и фундаментальное решение полигармонического оператора $\Delta^{m/2}$. Именно, если $|\alpha| > m - n$, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|D^\alpha G_m(x)| \leq K|x|^{m-n-|\alpha|}. \tag{2.4}$$

Если m четное, то $G_m(x)$ — это фундаментальное решение дифференциального уравнения $(1 - \Delta)^{m/2} G_m(x) = \delta(x)$. Докажем, что имеет место следующая

Лемма IV.2. *Пусть четное m больше n и порядок M однородного функционала $l(x)$ больше $2m-n+1$. Тогда для любого p, $1<p<\infty$, найдется такая постоянная K, что при всех малых h справедливо неравенство*

$$\left\| l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le Kh^m. \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим свертку функции $\widetilde{G}_m(x)$ и функционала погрешности $l(x)$, т. е. функцию

$$\tilde{u}(x) = \widetilde{G}_m(x) * l(x) = \sum_\gamma (l(y), G_m(x-y-H\gamma)). \tag{2.6}$$

Проверим, что ряд по γ сходится. Обозначим через $u(x)$ значение $l(y)$ на $G_m(x-y)$,

$$u(x) = (l(y), G_m(x-y)),$$

и оценим функцию $u(x)$ в точке x, лежащей вне $\overline{\Omega}_0$.

Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\zeta(y)$ равна единице в окрестности носителя $l(y)$ и нулю вне некоторого множества ω_1, внутреннего по отношению к Ω_0. Функцию с аналогичными свойствами мы определили в гл. I, § 2, использовав стандартное ядро усреднения. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |(l(y), G_m(x-y))| &= |(l(y), \zeta(y) G_m(x-y))| \\ &\le \left\| l \mid L_2^{(M)*} \right\| \left\| \zeta(y) G_m(x-y) \mid L_2^{(M)}(\omega_1) \right\|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Согласно определению нормы в $L_2^{(M)}(\omega_1)$, второй сомножитель в правой части (2.7) представим интегралом

$$\left\{ \int\limits_{\omega_1} \sum_{|\alpha|=M} \frac{M!}{\alpha!} \left(D_y^\alpha [\zeta(y) G_m(x-y)] \right)^2 dy \right\}^{1/2} \tag{2.8}$$

По условию x принадлежит $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_0$, поэтому для всех $y \in \omega_1$ имеем $|x-y| \ge \delta > 0$, где δ не зависит от h. Отсюда и из (2.4) следует, что подынтегральная функция в (2.8) не превосходит отношения $K/(1+|x|)^{2(M-m+n)}$ с постоянной K, не зависящей от h.

Таким образом, доказано, что для всех x вне $\overline{\Omega}_0$ имеет место оценка

$$|u(x)| \le K \frac{\|l \mid L_2^{(M)*}\|}{(1+|x|)^{M-m+n}}. \tag{2.9}$$

Равенство (2.6) эквивалентно следующему:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\gamma} u(x - H\gamma). \tag{2.10}$$

Применив для оценки $u(x - H\gamma)$ при больших γ неравенство (2.9), получим

$$|\tilde{u}(x)| \le \sum_{|\gamma|\le N} |u(x - H\gamma)| + K\|l \mid L_2^{(M)*}\| \sum_{|\gamma|\ge N} \frac{1}{(1+|x - H\gamma|)^{M-m+n}}.$$

Заметим, что при данном x ряд в правой части мажорируется суммой вида

$$\sum_{\gamma\ne 0} \frac{1}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_n^2)^{(M-m+n)/2}}. \tag{2.11}$$

Пользуясь известным неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_n^2 \ge n\gamma_1^{2/n}\gamma_2^{2/n} \cdot \ldots \cdot \gamma_n^{2/n},$$

несложно убедиться в сходимости рядов (2.11) и (2.6).

По условию $1 < p < \infty$, поэтому показатель $p' = p/(p-1)$ также лежит в интервале $(1, \infty)$. При этом равномерная выпуклость единичной сферы пространства $L_p^{(m)}$ позволяет доказать, что

$$\|l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\| = \|\tilde{u}(x) \mid L_{p'}(\Omega_0)\|. \tag{2.12}$$

Промажорируем норму $\tilde{u}(x)$ в $L_{p'}(\Omega_0)$ суммой норм слагаемых из (2.10):

$$\|\tilde{u} \mid L_{p'}(\Omega_0)\| \le \sum_{\gamma\ne 0} \|u(x - H\gamma) \mid L_{p'}(\Omega_0)\| + \|u(x) \mid L_{p'}(\Omega_0)\|. \tag{2.13}$$

Каждое слагаемое в правой части (2.13) оценим отдельно. Если $\gamma \neq 0$, то с помощью неравенств (2.9) и (2.3) получим

$$\sum_{\gamma\neq 0} \|u(x - H\gamma) \mid L_{p'}(\Omega_0)\| \leq Kh^M \sum_{\gamma\neq 0} \frac{1}{(1+|x-H\gamma|)^{M-m+n}} = K_1 h^M. \tag{2.14}$$

Для оценки нормы $u(x)$ в $L_{p'}(\Omega_0)$ разобьем однородный функционал $l(y)$ на сумму двух:

$$l(y) = \sum_{\gamma\in B_L^{(1)}} l_0\left(\frac{y}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} l_0\left(\frac{y}{h} - H\gamma\right).$$

Множества $B_L^{(1)}$, $B_L^{(2)}$ зависят от точки x, взятой внутри Ω_0. Именно, $B_L^{(1)}$ состоит из тех γ, для которых $hH\gamma \in \omega$ и при этом $|x - hH\gamma| \leq 2Lh$. Если же $hH\gamma \in \omega$, но $|x - hH\gamma| > 2Lh$, то множество таких γ составляет $B_L^{(2)}$. Напомним, что постоянная L согласно (2.2) характеризует размеры носителя $l_0(y)$. Имеем

$$|u(x)| = |(l(y), G_m(x-y))| \leq \sum_{\gamma\in B_L^{(1)}} \left|\left(l_0\left(\frac{y}{h} - H\gamma\right), G_m(x-y)\right)\right|$$
$$+ \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} \left|\left(l_0\left(\frac{y}{h} - H\gamma\right), G_m(x-y)\right)\right| \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{2.15}$$

В сумму Σ_1 входит не более $(2L+1)^n$ слагаемых. Выбрав среди них максимальное по $\gamma \in B_L^{(1)}$, а затем взяв максимум по всем $x \in \overline{\Omega}_0$, получим

$$\Sigma_1 \leq (2L+1)^n \max_{x\in\overline{\Omega}_0,\gamma} \left|\left(l_0\left(\frac{y}{h}\right), G_m(x - y - hH\gamma)\right)\right|. \tag{2.16}$$

Функция $G_m(x)$ обладает свойством $G_m(-x) = G_m(x)$. Пользуясь им, преобразуем величину под знаком максимума в (2.16) следующим образом:

$$\left(l_0\left(y/h\right), G_m(x - y - hH\gamma)\right) = h^n(l_0(y), G_m(hy - x + hH\gamma)). \tag{2.17}$$

Имея в виду применить к выражению в правой части (2.17) формулу Планшереля, вычислим преобразование Фурье по y от функции $G_m(hy-z)$. По определению

$$F_y[G_m(hy-z)](\xi) = h^{-n}e^{i2\pi\xi z/h}\int G_m(y)e^{i2\pi y\xi/h}\,dy$$
$$= h^{-n}e^{i2\pi\xi z/h}(1+|2\pi\xi/h|^2)^{-m/2}. \qquad (2.18)$$

Обозначив через $\tilde{l}_0(\xi)$ преобразование Фурье функционала погрешности $l_0(y)$, из (2.17), (2.18) получим

$$|(l_0(y/h), G_m(x-y-hH\gamma))|$$
$$= \left|\int (1+|2\pi\xi/h|^2)^{-m/2}\tilde{l}_0(\xi)e^{i2\pi\xi(x-hH\gamma)/h}\,d\xi\right|$$
$$\le h^m\int (h^2+|2\pi\xi|^2)^{-m/2}|\tilde{l}_0(\xi)|\,d\xi. \qquad (2.19)$$

Преобразование Фурье $\tilde{l}_0(\xi)$ финитной обобщенной функции $l_0(y)$, равной нулю на полиномах степени не больше M, имеет в начале координат нуль порядка M и ограничено на всей вещественной оси. Иными словами, справедливо неравенство

$$|\tilde{l}_0(\xi)| \le K\min\{1, |\xi|^M\}. \qquad (2.20)$$

Разобьем мажорирующий интеграл в (2.19) на сумму двух: по шару $|\xi| \le 1$ и по его внешности, а затем применим оценку (2.20). Тогда получим

$$|(l_0(y/h), G_m(x-y-hH\gamma))|$$
$$\le Kh^m\left\{\int\limits_{|\xi|\le 1} |\xi|^M/(h^2+|2\pi\xi|^2)^{m/2}\,d\xi + \int\limits_{|\xi|\ge 1} 1/(h^2+|2\pi\xi|^2)^{m/2}\,d\xi\right\}. \qquad (2.21)$$

Выражение в фигурных скобках ограничено равномерно по h и $x \in \overline{\Omega}_0$. Для интеграла по внешности единичного шара это очевидно, интеграл же по его внутренности мажорируется величиной

$$\int\limits_{|\xi|\le 1} |\xi|^{M-m}\,d\xi,$$

которая конечна в силу условия $M > m$. Из (2.21), (2.16) следует, что величина Σ_1 убывает при $h \to 0$ не медленнее, чем h^m, т. е.

$$\Sigma_1 \leq K h^m, \tag{2.22}$$

где K не зависит от h.

Рассмотрим слагаемое Σ_2 из (2.15). Напомним, что точка x в этой формуле принадлежит Ω_0. Возьмем произвольное $\gamma \in B_L^{(2)}$, тогда для любой точки y, принадлежащей носителю элементарного функционала $l_0(y/h - H\gamma)$, имеет место неравенство

$$|x - y| \geq |x - hH\gamma| - |y - hH\gamma| \geq L_1 h, \tag{2.23}$$

где постоянная L_1 не зависит от h. Точка $hH\gamma$ лежит внутри носителя $l_0(y/h - H\gamma)$. Поэтому из (2.23) следует, что $G_m(x - y)$ бесконечно дифференцируема по y в окрестности $y_0 = hH\gamma$. Значит, имеет место разложение $G_m(x - y)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме [23], т. е.

$$G_m(x-y) = \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{D^\alpha G_m(x - y_0)}{\alpha!}\bigg|_{y_0 = hH\gamma} (y_0 - y)^\alpha + R_M(x, y), \tag{2.24}$$

где

$$R_M(x, y) = (M+1) \int_0^1 (1-s)^M \\ \times \sum_{|\alpha| = M+1} \frac{D^\alpha G_m(x - hH\gamma + s(hH\gamma - y))}{\alpha!} (y_0 - y)^\alpha \, ds. \tag{2.25}$$

Равенство (2.24) справедливо одновременно для всех y, принадлежащих носителю элементарного функционала $l_0(y/h - H\gamma)$. Из обращения в нуль $l_0(y)$ на многочленах степени не больше M следует, что

$$(l_0(y/h - H\gamma), G_m(x - y)) = (l_0(y/h - H\gamma), R_M(x, y)) \\ = h^n (l_0(y), R_M(x, hy + hH\gamma)).$$

Представление (2.2) функционала $l_0(y)$ позволяет утверждать, что

$$\left|\left(l_0\left(\frac{y}{h}-H\gamma\right), G_m(x-y)\right)\right| \\ \leq h^n \|l_0(y) \mid C^*\| \max_{y\in \operatorname{supp} l_0(y)} |R_M(x, hy+hH\gamma)|. \quad (2.26)$$

Величину под знаком максимума выразим интегралом по формуле (2.25):

$$R_M(x, hy+hH\gamma) = (M+1)h^{M+1} \\ \times \int_0^1 (1-s)^M \sum_{|\alpha|=M+1} (-y)^\alpha \frac{D^\alpha G_m(x-hH\gamma-sh\gamma)}{\alpha!}\, ds. \quad (2.27)$$

Согласно неравенству (2.4) при $|\alpha| = M+1$ имеем

$$|D^\alpha G_m(x-hH\gamma-shy)| \leq K|x-hHy-shy|^{m-n-M-1}.$$

Точка y лежит в носителе $l_0(y)$, поэтому $|y| \leq \sqrt{n}\, L$. Далее, из принадлежности γ множеству $B_L^{(2)}$ следует, что для данного $x \in \overline{\Omega}_0$ имеют место неравенства

$$|x-hH\gamma| \geq 2\sqrt{n}\, Lh \geq 2|yh|,$$
$$|x-hH\gamma-shy| \geq |x-hH\gamma| - sh|y| \geq \frac{1}{2}|x-hH\gamma|.$$

Подставляя второе из них в полученную оценку для модуля производной G_m и учитывая, что $M > m-n-1$, приходим к оценке

$$|D^\alpha G_m(x-hH\gamma-shy)| \leq K|x-hH\gamma|^{m-n-M-1},$$

из которой в силу (2.27) вытекает, что

$$\max_{y\in \operatorname{supp} l_0(y)} |R_M(x, hy+hH\gamma)| \leq K\frac{h^{M+1}}{|x-hH\gamma|^{M-m+n+1}}.$$

Используя эту оценку в (2.26) и суммируя обе части получившегося при этом неравенства по всем $\gamma \in B_L^{(2)}$, получаем мажоранту величины Σ_2:

$$\Sigma_2 \leq Kh^{n+M+1} \sum_{\gamma \in B_L^{(2)}} \frac{1}{|x - hH\gamma|^{M-m+n+1}}. \tag{2.28}$$

Заметим, что при данном $x \in \overline{\Omega}_0$ найдется такой номер N, что для всех γ, $|\gamma| \geq N$, имеет место оценка

$$|x - hH\gamma| \geq |hH\gamma|/2.$$

Если же $|\gamma| \leq N$ и $\gamma \in B_L^{(2)}$, то

$$|x - hH\gamma| \geq 2L\sqrt{n}\, h.$$

Подставляя два последних неравенства в (2.28), получаем

$$\Sigma_2 \leq Kh^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{|\gamma|^{M+1+n-m}} = K_2 h^m. \tag{2.29}$$

Ряд по γ в этой формуле сходится в силу условий $M \geq 2m - n + 1$, $m > n$.

Неравенства (2.29), (2.22) и (2.15) позволяют оценить при $x \in \overline{\Omega}_0$ функцию $u(x)$, а значит, и ее норму в $L_{p'}(\Omega_0)$:

$$||u \mid L_{p'}(\Omega_0)|| \leq Kh^m.$$

Эта оценка, а также неравенства (2.14) и (2.13) дают при $M \geq 2m-n$ мажоранту нормы в $L_{p'}(\Omega_0)$ функции $\tilde{u}(x)$:

$$||\tilde{u}(x) \mid L_{p'}(\Omega_0)|| \leq Kh^m.$$

Отсюда и из равенства (2.12) следует (2.5).

Лемма IV.2 доказана.

Следствие 2.1. *Однородный функционал $l(x)$ при выполнении условий леммы IV.2 оптимален по порядку в классе $\widetilde{W}_p^{(m)}$. Иными словами, существуют такие положительные постоянные K_1, K_2, что для всех h выполняются неравенства*

$$K_1 h^m \le \left\| l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le K_2 h^m. \tag{2.30}$$

Доказательство. Оценка сверху в (2.30) совпадает с уже полученным соотношением (2.5). Установим справедливость оценки нормы снизу.

Согласно теореме IV.2 существует постоянная K такая, что

$$\left\| l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \ge K \left\| l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\|, \tag{2.31}$$

где функционал погрешности $l_\infty(x)$ определен равенством (1.4). Найдем представление его нормы в $\widetilde{W}_p^{(m)*}$, асимптотически точное при $h \to 0$. Функцию $\tilde{u}(x)$ с матрицей периодов H, являющуюся решением уравнения $(1-\Delta)^{m/2}\tilde{u}(x) = l_\infty(x)$, запишем в виде свертки:

$$\tilde{u}(x) = \int l_\infty(y) \widetilde{G}_m(x-y)\, dy. \tag{2.32}$$

Представим $\widetilde{G}_m(x)$ рядом Фурье:

$$\widetilde{G}_m(x) = \sum_\gamma (1 + |2\pi H^{-1*}\gamma|^2)^{-m/2} e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}.$$

Подставив это разложение в (2.32), получим

$$\tilde{u}(x) = \sum_\gamma L[\gamma](1 + |2\pi H^{-1*}\gamma|^2)^{-m/2} e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}. \tag{2.33}$$

Здесь через $L[\gamma]$ обозначен коэффициент Фурье функционала $l_\infty(y)$, т. е. значение $l_\infty(y)$ на экспоненте с показателем $i2\pi\gamma H^{-1}y$. Несложно убедиться, что в случае, когда γh представляет собой ненулевой целочисленный мультииндекс, коэффициент $L[\gamma]$ равен $-1/|H|$, а при всех остальных γ он обращается в нуль. Таким образом, из (2.33) следует, что

$$\tilde{u}(x) = -h^m \sum_{\beta \ne 0} (h^2 + |2\pi H^{-1*}\beta|^2)^{-m/2} e^{i2\pi\beta H^{-1}x/h}.$$

Используя последнее равенство, несложно получить представление нормы $\tilde{u}(x)$ в пространстве $L_{p'}(\Omega_0)$, асимптотически точное при $h \to 0$:

$$||\tilde{u}(x) \mid L_{p'}(\Omega_0)|| = Kh^m(1 + O(1)).$$

Из этого представления, равенства (2.12), взятого при $l(x) = l_\infty(x)$, а также из оценки (2.31) имеем (2.30).

Следствие 2.1 доказано.

Обобщим результат о порядковой оптимальности однородного функционала (2.1) на случай нечетных и дробных значений m. Нам понадобятся некоторые новые определения.

Пусть $\widetilde{B}$ — пространство функций с матрицей периодов H, удовлетворяющее условиям из § 1 этой главы. Линейный ограниченный оператор M, действующий из $\widetilde{B}$ в $\widetilde{B}$ по формуле

$$M : \sum_\gamma \varphi[\gamma] e^{i2\pi\gamma H^{-1}x} \mapsto \sum_\gamma \psi[\gamma]\varphi[\gamma] e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}, \tag{2.34}$$

назовем *мультипликатором Фурье в* $\widetilde{B}$.

Функцию $\psi(\xi)$ назовем *мультипликатором в* $\widetilde{B}$, если оператор (2.34), построенный по последовательности $\psi[\gamma] = \psi(H^{-1*}\gamma)$, ограничен в $\widetilde{B}$.

Пусть пространство $\widetilde{B}_0^\mu$ принадлежит бесселевой шкале. Определим при любом $h > 0$ три вспомогательные функции, положив

$$\psi(\xi, h) = \frac{1}{\mu(\xi)} \frac{1}{[h(1 + |\xi|)]^{-m_1} + [h(1 + |\xi|)]^{-m_2}},$$

$$\psi_j(\xi, h) = \psi(\xi, h) \frac{(1 + |\xi|^2)^{m_j/2}}{(1 + |\xi|)^{m_j}}, \quad j = 1, 2.$$

Будем предполагать, что $\psi_1(\xi, h)$ и $\psi_2(\xi, h)$ являются мультипликаторами пространства $\widetilde{B}_0$, при этом нормы соответствующих им линейных операторов $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ допускают оценку

$$||M^{(j)}|| \le K \sup_\xi \psi_j(\xi, h), \tag{2.35}$$

где постоянная K не зависит от h.

Это условие выполняется, например, в случае, когда $\widetilde{B}$ совпадает с $\widetilde{L}_p(\Omega_0)$, а $\mu(\xi)$ — рациональная функция, подчиненная условиям (1.31)–(1.33).

Пусть имеется бесселева шкала, нулевое пространство B_0 которой удовлетворяет условиям из § 1 этой главы. Условимся обозначать через $\widetilde{B}_0^m$ пространство $\widetilde{B}_0^\mu$, соответствующее весовой функции

$$\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{m/2}. \tag{2.36}$$

Предположим, что пространство $\widetilde{B}_0^\mu$ принадлежит рассматриваемой шкале, а действие функционала $l(x) \in \widetilde{B}_0^{\mu*}$ на функцию $\varphi(x) \in \widetilde{B}_0^\mu$ задается равенством

$$(l(x), \varphi(x)) = \sum_\gamma L[\gamma]\overline{\varphi[\gamma]}, \tag{2.37}$$

где $\varphi[\gamma]$ — коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$, а $L[\gamma]$ — значение функционала $l(x)$ на экспоненте с показателем $i2\pi\gamma H^{-1}x$. Пользуясь формулой (2.37) и сходимостью ряда Фурье функции $\varphi(x)$ по норме пространства $\widetilde{B}_0^\mu$, несложно убедиться, что ряд Фурье с коэффициентами $L[\gamma]$ сходится к $l(x)$ слабо в $\widetilde{B}_0^{\mu*}$, т. е.

$$l(x) = \sum_\gamma L[\gamma]e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}. \tag{2.38}$$

При сделанных предположениях имеет место следующая

Теорема IV.4. *Пусть линейный функционал $l_h(x)$ ограничен в $\widetilde{B}_0^\mu$, а весовая функция $\mu(\xi)$ подчинена условиям (1.31)–(1.33) с показателями m_1, m_2 и условию (2.35). Если при этом нормы функционала $l_h(x)$ в пространствах $\left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_1}$ и $\left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_2}$ удовлетворяют оценке*

$$\left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_j} \right\| \le K_j h^{m_j}, \quad j = 1, 2, \tag{2.39}$$

то норма функционала $l_h(x)$ в пространстве $\left(\widetilde{B}_0^*\right)^{1/\mu}$ убывает при $h \to 0$ не медленнее, чем норма функционала погрешности $l_\infty(x)$ в пространстве $\left(\widetilde{B}_0^\mu\right)^*$:

$$\left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{1/\mu} \right\| \le K \left\| l_\infty \mid \widetilde{B}_0^{\mu*} \right\|. \tag{2.40}$$

Здесь K не зависит ни от h, ни от l_h.

Доказательство. Пусть при $j = 1, 2$ оператор M_j действует из $\left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_j}$ в $\widetilde{B}_0^*$ по формуле

$$M_j : \sum_\gamma L[\gamma] e^{i2\pi\gamma H^{-1}x} \mapsto \sum_\gamma L[\gamma] \frac{e^{i2\pi\gamma H^{-1}x}}{(1 + |H^{-1}\gamma|^2)^{m_j/2}}.$$

Тогда для функционала $l_h(x)$, представленного рядом (2.38) и принадлежащего пространству $\left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_j}$, имеют место равенства

$$\begin{gathered} \left\| M_j(l_h) \mid \widetilde{B}_0^* \right\| = \left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_j} \right\|, \\ \left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{1/\mu} \right\| = \left\| \sum_\gamma \frac{1}{\mu(H^{-1*}\gamma)} L[\gamma] e^{i2\pi\gamma H^{-1}x} \mid \widetilde{B}_0^* \right\|. \end{gathered} \tag{2.41}$$

Пользуясь определением функции $\psi(\xi, h)$, второе из них перепишем в виде

$$\left\| l_h \mid (\widetilde{B}_0^*)^{1/\mu} \right\| = \left\| h^{-m_1} M^{(1)} M_1(l_h) + h^{-m_2} M^{(2)} M_2(l_h) \mid \widetilde{B}_0^* \right\|. \tag{2.42}$$

Оператор $M^{(j)}$ действует из $\widetilde{B}_0^*$ в $\widetilde{B}_0^*$ согласно соответствию (2.34), в котором $\psi[\gamma] = \psi_j(H^{-1*}\gamma, h)$. Ввиду (2.35) он ограничен, и при этом

$$\|M^{(j)}\| \le K \sup_\xi \psi(\xi, h),$$

где K не зависит от h. Отсюда и из теоремы IV.3 получаем

$$\|M^{(j)}\| \le K \left\| l_\infty(x) \mid \widetilde{B}_0^{\mu*} \right\|.$$

Теперь из равенств (2.42), (2.41) и условия (2.39) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| l_h \mid (\widetilde{B}_0^*)^{1/\mu} \right\| &\le h^{-m_1} \|M^{(1)}\| \left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_1} \right\| \\ &+ h^{-m_2} \|M^{(2)}\| \left\| l_h \mid \left(\widetilde{B}_0^*\right)^{-m_2} \right\| \le K \left\| l_\infty \mid \widetilde{B}_0^{\mu*} \right\|. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Таким образом, оценка (2.40) получена, и теорема IV.4 доказана.

Следствие 2.2. Пусть $m > 2([n/2]+1)$. Тогда норма однородного функционала погрешности $l(x)$ в пространстве $\widetilde{W}_p^{(m)*}$, $1 < p < \infty$, удовлетворяет неравенству

$$\|l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\| \le K\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\|. \tag{2.44}$$

Доказательство. Положим $\widetilde{B}_0 = \widetilde{L}_p(\Omega_0)$ и возьмем m_1 равным $2([n/2]+1)$, а m_2 — любому четному числу, большему m. Известно, что $\widetilde{B}_0^*$ совпадает с $\widetilde{L}_{p'}(\Omega_0)$, $p' = p/(p-1)$. Пользуясь этим, несложно убедиться, что ряд (2.37) сходится и для любого m справедливо равенство

$$(\widetilde{B}_0^*)^{-m} = \widetilde{B}_0^{m*}.$$

Норма однородного функционала погрешности $l(x)$ порядка $M > 2m_2 - n + 1$ подчинена соотношению (2.5) при $m = m_1$ и $m = m_2$. В частности, этот функционал удовлетворяет оценке (2.39).

Будем считать, что весовая функция $\mu(\xi)$ определена равенством (2.36). Тогда, как несложно заметить, выполнены все условия теоремы IV.4. Значит, справедливо неравенство (2.40), принимающее в рассматриваемом случае вид (2.44).

Следствие 2.2 доказано.

Из (2.44) и теоремы IV.2 заключаем, что при $1 < p < \infty$ и $m > 2([n/2]+1)$ однородный функционал погрешности оптимален по порядку в пространстве $\widetilde{W}_p^{(m)}$.

Рассмотрим семейство функционалов погрешности

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{hH\gamma\in\omega} c[\gamma]\delta(x - hH\gamma), \tag{2.45}$$

у которых множества Ω и ω лежат строго внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0. В таком виде можно, в частности, записать любой однородный функционал погрешности.

Будем говорить, что семейство (2.45) *оптимально по порядку в классе $\widetilde{W}_p^{(m)}(\Omega_0)$ равномерно по Ω*, если существует постоянная K такая, что для всех $h > 0$ и Ω имеет место оценка

$$h^m/K \le \|l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\| \le Kh^m. \tag{2.46}$$

Пусть выполнены предположения теоремы IV.4 и, в частности, функция $\mu(\xi)$ подчинена условиям (1.31)–(1.33), (2.35) с показателями m_1, m_2. Тогда имеет место следующая

Теорема IV.5. *Если функционал погрешности $l(x)$ оптимален по порядку в пространствах $\widetilde{W}_p^{(m)}$, $1 < p < \infty$, равномерно по Ω при $m = m_1, m_2, m_3$, где $m_3 > m_2$, а пространство $\widetilde{B}_0$ совпадает с $\widetilde{L}_q(\Omega_0)$, $q \geq p$, то справедливо неравенство*

$$\|l \mid \widetilde{B}_0^{\mu*}\| \leq K|\Omega|^{1/p-1/q}\|l_\infty \mid \widetilde{B}_0^{\mu*}\|(1 + O(h^{m_3-m_2})), \tag{2.47}$$

где постоянная K не зависит ни от Ω, ни от h.

Доказательство. Для $\widetilde{B}_0 = \widetilde{L}_q(\Omega_0)$ пространство $\widetilde{B}_0^{\mu*}$ совпадает с $(\widetilde{B}_0^*)^{1/\mu}$, а $\widetilde{B}_0^m$ — с $\widetilde{W}_q^{(m)}$. Применив к $l(x)$ оценки (2.43) и (2.46), получим

$$\|l \mid \widetilde{B}_0^{\mu*}\| \leq K\|l_\infty \mid \widetilde{B}_0^{\mu*}\| \sup_h \{h^{-m_1}\|l \mid \widetilde{W}_p^{(m_1)*}\| + h^{-m_2}\|l \mid \widetilde{W}_p^{(m_2)*}\|\}. \tag{2.48}$$

Здесь K не зависит ни от h, ни от l. Промажорируем сумму в фигурных скобках.

Будем считать, что $m = m_1$ либо $m = m_2$. Положим $\tilde{u}_m(x) = (l(y), \widetilde{G}_m(x-y))$ и выразим норму функционала $l(x)$ в $\widetilde{W}_p^{(m)*}$ по формуле (2.12):

$$\|l \mid \widetilde{W}_q^{(m)*}\| = \left\{\int_{\Omega_0} |\tilde{u}_m(x)|^{q'} dx\right\}^{1/q'}, \tag{2.49}$$

где $q' = q/(q-1)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и обозначим через Ω_ε множество точек, отстоящих от Ω на расстояние не больше ε. Будем считать ε достаточно малым, чтобы окрестность $\Omega_{2\varepsilon}$ лежала строго внутри Ω_0, а объем $\Omega_{2\varepsilon}$ не превосходил двух объемов Ω:

$$|\Omega_{2\varepsilon}| \leq 2|\Omega|. \tag{2.50}$$

Кроме того, предположим, что $\omega \subset \Omega_\varepsilon$. Из (2.49) следует оценка

$$\|l \mid \widetilde{W}_q^{(m)*}\| \leq \|\tilde{u}_m \mid L_{q'}(\Omega_{2\varepsilon})\| + \|\tilde{u}_m \mid L_{q'}(\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon})\|. \tag{2.51}$$

Учитывая, что функционал погрешности $l(x)$ ограничен в $\widetilde{W}_p^{(m)}$, т. е. $\tilde{u}_m(x) \in L_{p'}(\Omega_0)$, где $p' = p/(p-1)$, оценим первое слагаемое из правой части (2.51) по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_m \mid L_{q'}(\Omega_{2\varepsilon})\| &\leq |\Omega_{2\varepsilon}|^{1/p-1/q}\|\tilde{u}_m \mid L_{p'}(\Omega_0)\| \\ &= |\Omega_{2\varepsilon}|^{1/p-1/q}\|l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\|.\end{aligned}$$

Взяв здесь $m = m_1$ или $m = m_2$, пользуясь (2.50) и условием (2.46), приходим к соотношению

$$h^{-m}\|\tilde{u}_m(x) \mid L_{q'}(\Omega_{2\varepsilon})\| \le K|\Omega|^{1/p-1/q}, \tag{2.52}$$

где K не зависит от h и Ω.

Рассмотрим второе слагаемое из правой части (2.51). Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\zeta(y)$ равна единице в Ω_ε и нулю вне $\Omega_{2\varepsilon}$. Тогда для $\tilde{u}_m(x)$ справедливо представление

$$\tilde{u}_m(x) = (l(y), \zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y)). \tag{2.53}$$

Заметим, что для всех x из $\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon}$ и y из носителя $l(y)$, вложенного в Ω_ε, имеет место соотношение $|x-y| \ge \varepsilon$. Отсюда, из (2.53) и свойств функции $G_m(x)$ следует, что $\tilde{u}_m(x)$ принадлежит пространству $W_p^{(M)}(\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon})$ для некоторого $M \ge m_3$. Возьмем M четным и следующим образом оценим норму $\tilde{u}_m(x)$ в $L_{q'}(\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon})$:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}_m \mid L_{q'}(\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon})\| \\
&\quad \le |\Omega_0|^{1/q'} \max_{x\in\Omega_0\setminus\Omega_{2\varepsilon}} |\tilde{u}_m(x)| \le |\Omega_0|^{1/q'} \left\| l(y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon)^* \right\| \\
&\qquad \times \max_{x\in\Omega_0\setminus\Omega_{2\varepsilon}} \left\| \zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon) \right\|.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Носитель $l(y)$ вложен в Ω_ε, поэтому

$$\left\| l(y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon)^* \right\| = \left\| l(y) \mid \widetilde{W}_p^{(M)}(\Omega_0)^* \right\|.$$

Поскольку $M \ge m_3$, норма справа мажорируется нормой $l(x)$ в $\widetilde{W}_p^{(m_3)*}$, т. е.

$$\left\| l \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon)^* \right\| \le \left\| l \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le Kh^{m_3}, \tag{2.55}$$

где K не зависит от h, Ω. Последнее неравенство справедливо по условию доказываемой теоремы.

Пусть $x \in \Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left\| \zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon) \right\| \\
&\qquad \le K\left\{ \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|\alpha|\le M} \left| D_y^\alpha[\zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y)] \right|^p dy \right\}^{1/p}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Для любого $y \in \Omega_\varepsilon$ точка $x - y$ лежит в ограниченном множестве, из которого удален шар радиуса ε с центром в начале координат. Положим

$$c(\varepsilon) = \max_{x \in \overline{\Omega}_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon},\, y \in \Omega_\varepsilon} \{|D^\alpha[\zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y)]|,\ |\alpha| \le M\}.$$

Из свойств функции $G_m(x)$ следует, что $c(\varepsilon)$ — это конечная величина. Продолжая оценку (2.56) и пользуясь неравенством (2.50), получим

$$\max_{x \in \Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon}} \left\| \zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon) \right\| \le Kc(\varepsilon)|\Omega|^{1/p}. \tag{2.57}$$

Поскольку $|\Omega| \le |\Omega_0|$, справедливо соотношение

$$|\Omega|^{1/p} \le |\Omega_0|^{1/q}|\Omega|^{1/p-1/q}.$$

Подставив его в (2.57), приходим к неравенству

$$\max_{x \in \Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon}} \left\| \zeta(y)\widetilde{G}_m(x-y) \mid W_p^{(M)}(\Omega_\varepsilon) \right\| \le K_1(\varepsilon)|\Omega|^{1/p-1/q},$$

где $K_1(\varepsilon)$ не зависит от Ω. Отсюда и из (2.54), (2.55) получаем

$$h^{-m}\|\tilde{u}_m \mid L_{q'}(\Omega_0 \setminus \Omega_{2\varepsilon})\| \le K(\varepsilon)h^{m_3-m}|\Omega|^{1/p-1/q}.$$

Теперь из (2.51), (2.52) заключаем, что

$$h^{-m}\left\| l \mid \widetilde{W}_q^{(m)*} \right\| \le K|\Omega|^{1/p-1/q}(1 + O(h^{m_3-m})).$$

Полагая здесь $m = m_1$ и $m = m_2$, а затем подставляя результат в (2.48), приходим к (2.47).

Теорема IV.5 доказана.

§ 3. Теорема Бахвалова

Пусть в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ дана некоторая последовательность кубатурных формул с функционалами погрешности

$$(l_N(x), \varphi(x)) = \int \left(\chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \delta(x - x^{(k,N)}) \right) \varphi(x)\, dx \tag{3.1}$$

и переменным числом узлов N. Объем области обозначим через $|\Omega|$ и положим

$$h = (|\Omega|/N)^{1/n}. \tag{3.2}$$

Нас будет интересовать поведение нормы функционала $l_N(x)$ в пространстве $L_2^{(m)*}$ при неограниченном возрастании числа узлов N. Основная теорема этого параграфа касается оценки нормы $l_N(x)$ снизу и принадлежит Н. С. Бахвалову. Доказательства, которые мы здесь приводим, почти не отличаются от доказательств Бахвалова.

Прежде чем дать формулировку теоремы, приведем несколько определений и докажем важную лемму.

Пусть k — некоторая постоянная. Построим область Ω_k'', состоящую из всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, отстоящих от Ω не более чем на k, и область Ω_k', образованную теми точками Ω, которые отстоят от дополнения к Ω больше чем на k. Пусть $\Omega_k = \Omega_k'' \setminus \Omega_k'$. Если существует постоянная K такая, что для всех $k \le k_0$ справедливо неравенство

$$|\Omega_k| = |\Omega_k'' \setminus \Omega_k'| \le Kk|\partial\Omega|,$$

то будем говорить, что Ω *имеет правильную границу*. Нетрудно проверить, что если граница Ω липшицева, то область имеет правильную границу.

Пусть число N пробегает некоторую возрастающую последовательность натуральных значений $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots$. Для каждого N рассмотрим в области Ω систему кубов $\Omega_{i,N}$ с вершинами в точках $a^{(i,N)}$ и длиной ребра k_N:

$$\left|x_j - a_j^{(i,N)}\right| < k_N/2,\ j = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, N_1(N).$$

Будем называть ее *системой с недостаточным заданием функционала* $l_N(x)$, если выполнены условия:

1) значение функционала погрешности на характеристической функции любого из кубов $\Omega_{i,N}$ строго положительно:

$$\int \chi_{\Omega_{i,N}}(x) l_N(x)\, dx > 0;$$

2) все узлы $x^{(k,N)}$ кубатурной формулы с функционалом погрешности $l_N(x)$ лежат либо строго внутри куба $\Omega_{i,N}$, либо вне его, но не на границе.

Будем говорить, что серия таких систем *имеет равномерно недостаточное по всем N из последовательности $\{N^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ задание функционала $l_N(x)$*, если существуют две положительные постоянные η_0 и η_1, строго меньшие единицы, такие, что выполнены условия:

1) ошибка при интегрировании единицы по каждому кубу из любой системы рассматриваемой серии составляет конечную долю объема этого куба, т. е.

$$\int \chi_{\Omega_{i,N}}(x) l_N(x)\, dx \geq \eta_0 k_N^n; \tag{3.3}$$

2) все узлы кубатурной формулы, лежащие в $\Omega_{i,N}$, не выходят за пределы внутреннего куба, задаваемого неравенствами

$$\left|x_j - a_j^{(i,N)}\right| \leq \frac{\eta_1 k_N}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Имеет место следующая

Лемма IV.3. *Пусть при каждом N из последовательности $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots$ сумма объемов неперекрывающихся кубов из соответствующей системы, принадлежащей серии с равномерно недостаточным заданием функционала $l_N(x)$, больше некоторой положительной постоянной T, не зависящей от N, т. е.*

$$N_1 k_N^n > T, \tag{3.5}$$

где N_1 — число неперекрывающихся кубов. Тогда можно указать такую положительную постоянную K, зависящую от η_0, η_1, n, m, но не от N, что

$$\left\| l_N \mid L_2^{(m)*} \right\| \geq K k_N^m \sqrt{T}.$$

Доказательство. Прежде всего, найдем такую положительную постоянную $\eta < 1$, что

$$(1-\eta) \geq \eta_1, \quad (1-\eta)^n - (1-\eta_0) = \varepsilon_0 > 0.$$

Здесь η_0, η_1 — постоянные из неравенств (3.3), (3.4). Задавшись найденным значением η, построим бесконечно дифференцируемую функцию $\lambda(\xi)$ одномерного аргумента ξ, обладающую свойствами:

$$\begin{gathered} \lambda(\xi) = 1 \quad \text{при } |\xi| \leq (1-\eta)/2, \\ \lambda(\xi) = 0 \quad \text{при } |\xi| \geq 1/2, \\ 0 \leq \lambda(\xi) \leq 1 \quad \text{при остальных } \xi. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Такая функция, очевидно, существует и строится по той же схеме, что и стандартное ядро усреднения, о котором упоминалось в гл. I.

Построим множество функций $\omega_{i,N}(x)$, положив

$$\omega_{i,N}(x) = \prod_{j=1}^{n} \lambda\left(\frac{x_j - a_j^{(i,N)}}{k_N}\right).$$

Ясно, что вне куба $\Omega_{i,N}$ функция $\omega_{i,N}(x)$ обращается в нуль. Подсчитаем значение функционала $l_N(x)$ на $\omega_{i,N}(x)$.

Из неравенства (3.4) и свойств (3.6) функции $\lambda(\xi)$ следует, что для любого узла $x^{(k,N)}$, попадающего внутрь $\Omega_{i,N}$, величина $\omega_{i,N}(x^{(k,N)})$ равна единице. Поэтому

$$(l_N, \omega_{i,N}) = \int\limits_{\Omega_{i,N}} \omega_{i,N}(x)\,dx - \sum_{x^{(k,N)} \in \Omega_{i,N}} c_k^{(N)}. \tag{3.7}$$

Воспользовавшись первым из свойств (3.6), получим

$$\int\limits_{\Omega_{i,N}} \omega_{i,N}(x)\,dx > (1-\eta)^n k_N^n. \tag{3.8}$$

Поскольку функционал $l_N(x)$ задан в $\Omega_{i,N}$ недостаточно, из (3.3) следует, что

$$\sum_{x^{(k,N)} \in \Omega_{i,N}} c_k^{(N)} \le k_N^n (1-\eta_0).$$

Отсюда и из (3.7), (3.8), выводим, что

$$(l_N, \omega_{i,N}) > k_N^n[(1-\eta)^n - (1-\eta_0)] = \varepsilon_0 k_N^n. \tag{3.9}$$

Норму функции $\omega_{i,N}(x)$ в $L_2^{(m)}$ несложно оценить сверху, пользуясь определением:

$$\left\|\omega_{i,N}(x) \mid L_2^{(m)}\right\| \le K k_N^{n/2-m}.$$

Обозначив через N_1 общее число неперекрывающихся кубов $\Omega_{i,N}$ при заданном N, оценим значение функционала $l_N(x)$ на сумме

$$\omega_N(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \omega_{i,N}(x).$$

С помощью неравенства (3.9) получим

$$(l_N, \omega_N) = \sum_{i=1}^{N_1} (l_N, \omega_{i,N}) \geq N_1 \varepsilon_0 k_N^n.$$

Кубы $\Omega_{i,N}$ взаимно не перекрываются, поэтому

$$\left\| \omega_N(x) \mid L_2^{(m)} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \left\| \omega_{i,N}(x) \mid L_2^{(m)} \right\|^2 \leq K N_1 k_N^{n-2m}.$$

Используя условие (3.5) леммы, приходим к окончательной формуле:

$$\frac{|(l_N, \omega_N)|}{\left\| \omega_N \mid L_2^{(m)} \right\|} \geq K \sqrt{N_1}\, k_N^{n/2+m} \geq K \sqrt{T}\, k_N^m. \tag{3.10}$$

Лемма IV.3 доказана.

Теорема IV.6. *Для любой последовательности функционалов погрешности $l_N(x)$ вида (3.1) существует такая постоянная $K > 0$, что*

$$\left\| l_N \mid L_2^{(m)*} \right\| \geq K h^m. \tag{3.11}$$

Доказательство. Покроем область Ω системой кубов $\Omega_{i,h/2}$, образующих кубическую решетку со стороной $h/2$. Подсчитаем число кубов, целиком попадающих внутрь Ω.

Пусть B_2 — множество тех i, для которых $\Omega_{i,h/2}$ имеет хотя бы одну общую точку с Ω, а B_3 — множество тех i, для которых $\Omega_{i,h/2}$ имеет хотя бы одну общую точку с границей $\partial\Omega$. Число элементов в B_2 и B_3 обозначим через N_2 и N_3 соответственно. Пусть B_1 — множество тех точек из B_2, которые не принадлежат B_3, т. е. $B_1 = B_2 \setminus B_3$. Очевидно, что B_1 — это множество номеров кубов, лежащих целиком внутри Ω. Всего таких кубов $N_1 = N_2 - N_3$.

Объем объединения кубов $\Omega_{i,h/2}$ по всем $i \in B_2$ не меньше объема Ω:

$$\left| \bigcup_{i \in B_2} \Omega_{i,h/2} \right| \geq |\Omega|.$$

Область Ω обладает правильной границей, поэтому справедливо неравенство

$$\left| \bigcup_{i \in B_3} \Omega_{i,h/2} \right| \leq \left| \Omega''_{\sqrt{n}\,h/2} \setminus \Omega'_{\sqrt{n}\,h/2} \right| = \left| \Omega_{\sqrt{n}\,h/2} \right| \leq K h.$$

Пользуясь тем, что объем элементарного куба равен $(h/2)^n$, получим

$$N_2 \geq |\Omega| 2^n / h^n, \quad N_3 \leq K/h^{n-1}.$$

Эти соотношения позволяют оценить снизу число N_1. Очевидно, что

$$N_1 \geq 2^n |\Omega| / h^n - K/h^{n-1} = N 2^n [1 + O(1/N^{1/n})]. \tag{3.12}$$

Обозначив через N_0 число лежащих внутри Ω кубов, которые не содержат ни одного узла функционала (3.1), оценим N_0 снизу. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, тогда из (3.12) следует, что

$$N_0 \geq N_1 - N \geq (2^n - 1 - \varepsilon) N \tag{3.13}$$

для всех достаточно больших N.

В каждом из этих N_0 кубов выберем внутренний кубик меньших размеров с ребром $h/3$. Таким образом, для заданного N построена система кубов

$$\Omega_{j,h/3}, \quad j = 1, 2, \ldots, N_0,$$

причем серия этих систем имеет равномерно недостаточное задание функционала $l_N(x)$.

Далее, все кубы $\Omega_{j,h/3}$ не перекрываются. Поэтому их суммарный объем $|\Omega^*|$ ограничен снизу некоторой долей объема $|\Omega|$, не зависящей от N, т. е.

$$|\Omega^*| \geq N_0 (h/3)^n \geq \varepsilon_0 |\Omega|.$$

Последнее неравенство справедливо в силу (3.13) и определения (3.2) с постоянной $\varepsilon_0 = (2^n - 1 - \varepsilon)/3^n > 0$. Таким образом, условия леммы IV.3 выполнены, значит, для нормы функционала погрешности справедлива оценка

$$\left\| l_N \mid L_2^{(m)*} \right\| \geq K (h/3)^m = K_1 h^m.$$

Теорема IV.6 доказана.

Следствие 3.1. *Если в области Ω найдется система кубов $\Omega_{i,N}$ с равномерно недостаточным заданием функционала $l_N(x)$, причем последовательность $\{k_N\}$ такова, что $k_N/h \to \infty$ при $h \to 0$ и сумма объемов $\Omega_{i,N}$ больше $\Theta|\Omega|$, то погрешность кубатурных формул будет убывать медленнее, чем степенная функция h^m.*

Пока мы рассматривали лишь функционалы с недостаточным заданием на системе кубов. Аналогично можно рассмотреть и систему кубов $\Omega'_{i,N}$ с избыточным заданием функционала $l_N(x)$.

Будем говорить, что *на системе кубов* $\Omega'_{i,N}$ *задание функционала* $l_N(x)$ *избыточно на* η_0, если

$$\int \chi_{\Omega'_{i,N}}(x) l_N(x)\, dx < -\eta_0 k_N^n.$$

Дословно повторяя доказательства леммы IV.3 и теоремы IV.6, получим

$$(l_N(x), \omega_{i,N}(x)) < -\varepsilon_0 k_N^n.$$

Продолжая оценки таким же способом, как и прежде, докажем, что оценка (3.10) сохраняет силу и в том случае, когда вместо кубов с недостаточным заданием функционала $l_N(x)$ имеется система кубов с избыточным заданием, суммарный объем которой не меньше некоторой фиксированной доли объема $|\Omega|$.

Какова бы ни была система N точек, систему кубов с избыточным заданием функционала $l_N(x)$ можно построить так, чтобы выполнялись условия, сходные с условиями леммы IV.3.

Покажем теперь, что существуют формулы, для которых указанный выше порядок погрешности практически достигается.

§ 4. Порядок сходимости равномерно распределенных функционалов

Пусть функционал погрешности $l(x)$ принадлежит последовательности равномерно распределенных в области Ω функционалов. В этом параграфе мы покажем, что норма функционала $l(x)$ удовлетворяет неравенству, обратному к (3.11), т. е. $l(x)$ оптимален по порядку в пространстве $L_2^{(m)*}$.

Согласно определению, данному в гл. I, § 2, равномерно распределенный в области Ω функционал погрешности представим суммой элементарных функционалов:

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L} l_\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{4.1}$$

При этом будем считать, что любой функционал $l_\gamma(y)$ имеет порядок $m+1$, его носитель вложен в шар радиуса L с центром в начале

координат, а норма в C^* ограничена одной и той же для всех γ постоянной A:

$$(l_\gamma(y), y^\alpha) = 0, \ |\alpha| \le m; \quad \operatorname{supp} l_\gamma(y) \subset \{y : |y| \le L\}, \\ \|l_\gamma(y) \mid C^*\| \le A. \tag{4.2}$$

Множество B_L состоит из тех γ, для которых расстояние от точки $hH\gamma$ до Ω не превосходит Lh.

Прежде чем оценивать норму функционала (4.1), сделаем одно простое замечание об изменении нормы произвольного функционала погрешности из $L_2^{(m)*}$ при сжатии независимой переменной. Пусть $l_0(x) \in L_2^{(m)*}$, тогда имеет место формула

$$\left\| l_0\left(\frac{x}{h}\right) \mid L_2^{(m)*} \right\| = h^{n/2+m} \| l_0(x) \mid L_2^{(m)*} \|. \tag{4.3}$$

Докажем ее.

Пусть $\varphi(x) \in L_2^{(m)}$, тогда по определению справедливы равенства

$$\left(l_0\left(\frac{x}{h}\right), \varphi(x)\right) = h^n (l_0(y), \varphi(hy)), \\ (l_0(y), \varphi(y)) = h^{-n}\left(l_0\left(\frac{x}{h}\right), \varphi\left(\frac{x}{h}\right)\right). \tag{4.4}$$

Кроме того, как легко проверить непосредственным вычислением, выполняются соотношения

$$\|\varphi(x) \mid L_2^{(m)}\| = h^{n/2-m} \|\varphi(hy) \mid L_2^{(m)}\|, \\ \|\varphi(y) \mid L_2^{(m)}\| = h^{m-n/2} \left\|\varphi\left(\frac{y}{h}\right) \mid L_2^{(m)}\right\|. \tag{4.5}$$

Разделив обе части первого из равенств (4.4) на соответствующие части первого из соотношений (4.5), получим

$$\frac{(l_0(x/h), \varphi(x))}{\|\varphi(x) \mid L_2^{(m)}\|} = h^{m+n/2} \frac{(l_0(y), \varphi(hy))}{\|\varphi(hy) \mid L_2^{(m)}\|} \le h^{m+n/2} \|l_0(y) \mid L_2^{(m)*}\|.$$

Поскольку функция $\varphi(x) \in L_2^{(m)}$ произвольная, отсюда следует, что

$$\left\| l_0\left(\frac{x}{h}\right) \mid L_2^{(m)*} \right\| \le h^{m+n/2} \|l_0(y) \mid L_2^{(m)*}\|. \tag{4.6}$$

Далее, разделив обе части второго из равенств (4.4) на соответствующие части второго из соотношений (4.5), получим

$$\frac{(l_0(y), \varphi(y))}{\left\|\varphi(y) \mid L_2^{(m)}\right\|} = h^{-m-n/2} \frac{(l_0(x/h), \varphi(x/h))}{\left\|\varphi(x/h) \mid L_2^{(m)}\right\|} \leq h^{-m-n/2} \left\| l_0\left(\frac{x}{h}\right) \mid L_2^{(m)*} \right\|.$$

Отсюда вытекает неравенство, обратное к (4.6). Это означает, что формула (4.3) действительно имеет место.

Рассмотрим произвольный функционал $l_\gamma(y)$ из разложения (4.1). В силу условия $m > n/2$ пространство $L_2^{(m)}$ вложено в $C(\Omega_*)$ для любого компактного множества Ω_*. Оператор вложения при этом ограничен. Отсюда и из условия (4.2) следует, что

$$\left\|l_\gamma(y) \mid L_2^{(m)*}\right\| \leq K\|l_\gamma(y) \mid C^*\| \leq KA,$$

где K не зависит от γ. Воспользовавшись этим неравенством и соотношением (4.3), получим

$$\left\| l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) \mid L_2^{(m)*} \right\| \leq KAh^{m+n/2}. \tag{4.7}$$

Приведем некоторые соображения, которые в дальнейшем позволят сформулировать гипотезу об оценке сверху нормы функционала погрешности, равномерно распределенного в Ω.

Любой из элементарных функционалов $l_\gamma(x/h - H\gamma)$ допускает реализацию в гильбертовом пространстве $L_2^{(m)}$ в виде экстремальной функции $\psi_\gamma(x)$. Если функции $\psi_\gamma(x)$, $\gamma \in B_L$, взаимно ортогональны в $L_2^{(m)}$, то

$$\left\|l(x) \mid L_2^{(m)*}\right\|^2 = \sum_{\gamma \in B_L} \left\| l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) \mid L_2^{(m)*} \right\|^2. \tag{4.8}$$

Число N_1 элементов множества B_L при достаточно малых h удовлетворяет неравенству $N_1 h^n \leq 2|\Omega|$. Отсюда и из (4.7), (4.8) следует, что

$$\left\|l(x) \mid L_2^{(m)*}\right\|^2 \leq K^2 A^2 N_1 h^{n+2m} \leq 2K^2 A^2 |\Omega| h^m.$$

Последнее неравенство позволяет предположить, что норма равномерно распределенного функционала погрешности убывает при уменьшении шага решетки как h^m.

Покажем, что эта гипотеза действительно верна, причем без условия взаимной ортогональности экстремальных функций $\psi_\gamma(x)$, $\gamma \in B_L$. Вместо него дадим оценку скалярного произведения соответствующих экстремальных функций и убедимся, что оно убывает по мере взаимного удаления носителей элементарных функционалов.

Для доказательства основной теоремы, которую мы сформулируем позже, нам надо исследовать тройную свертку элементарных функционалов с функцией $G(x)$, являющейся решением уравнения

$$\Delta^m G(x) = (-1)^m \delta(x).$$

Пусть $l_1(x)$ и $l_2(x)$ — две нетривиальные финитные обобщенные функции, определяющие в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ ограниченные линейные функционалы, причем

$$\operatorname{supp} l_j(x) \subset \{x : |x| \le L_j\}, \quad \|l_j \mid C\| \le A_j, \quad j = 1, 2. \tag{4.9}$$

Будем считать, кроме того, что значения $l_j(x)$ на полиномах степени ниже s_j равно нулю:

$$(l_j(x), x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s_j, \quad j = 1, 2. \tag{4.10}$$

Сформулируем и докажем ряд простейших свойств свертки. Положим $l_3(x) = l_1(x) * l_2(x)$.

1. *Функционал $l_3(x)$ существует и финитен, причем его носитель содержится в шаре радиуса $L_1 + L_2$ с центром в начале координат:*

$$\operatorname{supp} l_3(x) \subset \{x : |x| \le L_1 + L_2\}. \tag{4.11}$$

Фиксируем точку x вне этого шара, т. е. такую, что $|x| > L_1 + L_2$. Тогда носители обобщенных функций $l_1(x-y)$ и $l_2(y)$ переменной y не пересекаются в силу условия (4.9). Это значит, что

$$\int l_1(x-y) l_2(y)\, dy = 0,$$

т. е. вложение (4.11) действительно справедливо.

2. *Функционал $l_3(x)$ ограничен в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$, и при этом его норма не превосходит произведения норм сверточных сомножителей*:

$$\|l_3(x) \mid C^*\| \le \|l_1(x) \mid C^*\| \, \|l_2(x) \mid C^*\|. \tag{4.12}$$

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\varphi(-x)$ также обладает этими свойствами. Образуем две свертки:

$$\varphi_1(x) = \varphi(-x) * l_1(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(x) * l_2(x).$$

Поскольку $l_1(x) \in C^*$, функция $\varphi_1(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, причем

$$|\varphi_1(x)| \le \|l_1(y) \mid C^*\| \, \|\varphi(y-x) \mid C\| = \|l_1 \mid C^*\| \, \|\varphi \mid C\|.$$

Аналогичным свойством обладает и функция $\varphi_2(x)$:

$$|\varphi_2(x)| \le \|l_2 \mid C^*\| \, \|\varphi_1 \mid C\| \le \|l_2 \mid C^*\| \, \|l_1 \mid C^*\| \, \|\varphi \mid C\|. \tag{4.13}$$

В силу финитности функционалов $l_j(x)$ имеет место равенство

$$\varphi_2(x) = (\varphi(-x) * l_1(x)) * l_2(x) = \varphi(-x) * l_3(x). \tag{4.14}$$

Взяв в нем x равным нулю, из (4.13) получим

$$|(l_3(y), \varphi(y))| = |\varphi_2(0)| \le \|l_1 \mid C^*\| \, \|l_2 \mid C^*\| \, \|\varphi \mid C\|,$$

откуда и следует неравенство (4.12).

3. *Функционал $l_3(x)$ имеет порядок $s_1 + s_2$, т. е. его значение на любом многочлене степени, меньшей $s_1 + s_2$, равно нулю*:

$$(l_3(x), x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s_1 + s_2. \tag{4.15}$$

Из определения свертки и свойства (4.10) легко следует, что свертка любого многочлена степени s с функционалом $l_1(x)$ снова является многочленом, но степени $s - s_1$:

$$\begin{aligned} x^\alpha * l_1(x) &= ((x-y)^\alpha, l_1(y)) \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} x^{\alpha-\beta} (l_1(y), (-y)^\alpha) = \sum_{|\gamma| \le |\alpha| - s_1} a[\gamma] x^\gamma. \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для функционала $l_2(x)$. Взяв теперь в (4.14) вместо $\varphi(x)$ одночлен x^α, где $|\alpha| < s_1 + s_2$, приходим к (4.15).

4. *Имеют место равенства*

$$\left\| l_j\left(\frac{x}{h}\right) \mid C^* \right\| = h^n \| l_j(y) \mid C^* \|, \; l_3\left(\frac{x}{h}\right) = h^{-n} l_1\left(\frac{x}{h}\right) * l_2\left(\frac{x}{h}\right). \quad (4.16)$$

С помощью обычной замены переменных несложно убедиться в справедливости равенств (4.16).

Предполагая, что функционалы $l_1(x)$ и $l_2(x)$ удовлетворяют условиям (4.9), (4.10), оценим по модулю решение $\Phi(x \mid l_1, l_2)$ уравнения

$$\Delta^m \Phi = (-1)^m h^n l_3\left(\frac{x}{h}\right). \quad (4.17)$$

Из (4.16) следует, что это решение представимо тройной сверткой:

$$\Phi(x \mid l_1, l_2) = G(x) * l_1\left(\frac{x}{h}\right) * l_2\left(\frac{x}{h}\right). \quad (4.18)$$

В силу финитности функционалов $l_j(x)$ эта свертка ассоциативна. Имеет место

Лемма IV.4. *Если n нечетно либо $s_1 + s_2 > 2m - n$, то функция $\Phi(x \mid l_1, l_2)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi(x \mid l_1, l_2)| \le K \frac{A_1 A_2 h^{2n+s_1+s_2}}{(h^2 + |x|^2)^{-m+(n+s_1+s_2)/2}}, \quad (4.19)$$

где постоянная K не зависит от h, l_1, l_2.

Доказательство. Будем считать, что $A_1 = 1$ и $A_2 = 1$. Если это не так, вместо $l_j(x)$ следует рассмотреть функционалы $l_j(x)/A_j$.

Правая часть уравнения (4.17) — это финитная обобщенная функция. В лемме I.1 приведена оценка (I.2.20) решения подобного уравнения. Прежде чем применить ее к нашему случаю, проведем несложные рассуждения. Представляя функцию $\Phi(x \mid l_1, l_2)$ в виде свертки и делая замену переменных $z = y/h$, получим

$$\Phi(x \mid l_1, l_2) = h^n \int G(x-y) l_3\left(\frac{y}{h}\right) dy = h^{2n} \int G\left(h\left(\frac{x}{h} - z\right)\right) l_3(z)\, dz. \quad (4.20)$$

Далее, из (I.2.18), (I.2.19) следует, что для функции $G_{m,n}(w) = (-1)^m G(w)$ при любом положительном h справедливо равенство

$$G(hw) = h^{2m-n}G(w) + (-1)^m \varkappa_{m,n}(\ln h)P_{|2m-n|}(hw). \qquad (4.21)$$

Здесь $P_{|2m-n|}(w)$ — многочлен степени $|2m-n|$. Он тождественно нулевой, если n нечетно или $2m < n$, и совпадает с $|w|^{2m-n}$, если n четно и $2m \geq n$. Подставляя разложение (4.21) в (4.20) и учитывая (4.15), получим

$$\Phi(x \mid l_1, l_2) = h^{2m+n} \int G\left(\frac{x}{h} - z\right) l_3(z)\, dz, \qquad (4.22)$$

где сверточный интеграл в правой части представляет собой значение в точке x/h решения $u(x)$ уравнения

$$\Delta^m u(x) = (-1)^m l_3(x).$$

Применив к $u(x/h)$ оценку (I.2.20) и подставив результат в (4.22), придем к искомому соотношению (4.19).

Лемма IV.4 доказана.

Замечание. При $n = 1$ лемму IV.4 можно усилить. В этом случае функция $G(x)$ имеет вид $|x|^{2m-1}/2(2m-1)!$, и поэтому $\Phi(x \mid l_1, l_2) = 0$ при $|x| > (L_1 + L_2)h$. Если же $|x| \leq (L_1 + L_2)h$, то

$$|\Phi(x \mid l_1, l_2)| \leq h^{2m+1} \frac{(2L_1 + 2L_2)^{2m-1}}{2(2m-1)!} A_1 A_2.$$

Приведем явную оценку постоянной K в неравенстве (4.19) при $n \geq 2$. В [56] доказано, что при $2m - n < s_1 + s_2 \leq 4m + 2$ неравенство (4.19) справедливо с постоянной K, равной величине

$$|\varkappa_{m,n}| \left(\frac{n}{4}\right)^{[(n-3)/2]/2} 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^{2m} (1 + (4L)^2)^{(s_1+s_2)/2},$$

где L равно максимальному из L_1 и L_2, а постоянная $\varkappa_{m,n}$ определена в гл. I, § 2.

Лемма IV.5. Если n четно и $s_3 = s_1 + s_2 \le 2m - n$, то имеет место оценка

$$|\Phi(x \mid l_1, l_2)| \le K \begin{cases} h^{2m+n}|\ln h|, & |x| \le 2(L_1 + L_2)h, \\ |x|^{2m-n-s_3}|\ln|x||h^{2n+s_3}, & |x| > 2(L_1 + L_2)h. \end{cases}$$

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательства лемм IV.4 и I.1, поэтому мы его не приводим.

Теорема IV.7. Пусть область Ω имеет правильную границу, а обобщенная функция $l(x)$, заданная равенством (4.1), принадлежит последовательности функционалов, равномерно распределенных в области Ω, причем соответствующие ей параметры L и A не зависят от h. Тогда норма функционала погрешности $l(x)$ в $L_2^{(m)*}$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| \le K\sqrt{|\Omega|}\, h^m (1 + hK_1|\partial\Omega|/|\Omega|), \tag{4.23}$$

где постоянные K, K_1 зависят от A, L, но не от h, Ω.

Доказательство. Функционал погрешности $l(x)$ обладает в пространстве $L_2^{(m)}$ экстремальной функцией

$$\psi_l(x) = (l(y), G(x-y)) = l(x) * G(x).$$

При этом квадрат нормы $l(x)$ в $L_2^{(m)*}$ совпадает со значением $l(x)$ на функции $\psi_l(x)$:

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = (l(x), \psi_l(x)) = (l(x), l(x) * G(x)).$$

Подставив сюда разложение (4.1), получим

$$\|l \mid L^{(m)*}\|^2 = \sum_{\gamma,\gamma' \in B_L} \left(l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), l_{\gamma'}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) * G(x) \right). \tag{4.24}$$

Слагаемое в правой части (4.24), соответствующее значениям γ и γ', запишем, используя обозначение (4.18):

$$\left(l_\gamma\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), l_{\gamma'}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) * G(x) \right) = \Phi(hH(\gamma' - \gamma) \mid l_\gamma, \hat{l}_{\gamma'}). \tag{4.25}$$

Здесь $\hat{l}_{\gamma'}(x)$ определяется как $l_{\gamma'}(-x)$.

Согласно определению равномерно распределенного функционала соответствующие ему элементарные обобщенные функции $l_\gamma(y)$, $\gamma \in B_L$, обращаются в нуль на многочленах степени, меньшей $m+1$, обладают компактными носителями и имеют одну и ту же величину A мажорантой норм в пространстве C^*. Тем самым для оценки величин вида (4.25) применима лемма IV.4, и для любых γ, $\gamma' \in B_L$ справедливо соотношение

$$|\Phi(hH(\gamma'-\gamma) \mid l_\gamma, \hat{l}_{\gamma'})| \le KA^2 \frac{h^{2n}}{(h^2+|hH(\gamma-\gamma')|^2)^{n/2+1}} h^{2m+2}. \quad (4.26)$$

Здесь K, A не зависят от h, γ, γ'.

Подставив (4.25), (4.26) в (4.24), несложно убедиться, что исследуемая норма убывает при $h \to 0$ не медленнее произведения $h^{m+n/2}$ на корень из числа $N_L(h)$ точек в B_L:

$$\begin{aligned} \left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 &\le KA^2 h^{2m+n} \sum_{\gamma,\gamma' \in B_L} \frac{1}{(1+|H(\gamma-\gamma')|^2)^{n/2+1}} \\ &\le KA^2 h^{2m+n} N_L(h). \end{aligned}$$

Чтобы уточнить зависимость полученной мажоранты от Ω, оценим величину в правой части (4.26) некоторым интегралом. Запишем его в явном виде.

Обозначим через $\Omega_{h,\gamma}$ элементарную ячейку решетки $hH\gamma$. Несложно убедиться, что существует положительная постоянная M такая, что для всех γ, $\gamma' \in B_L$ и точек $x \in \Omega_{h,\gamma}$, $y \in \Omega_{h,\gamma'}$ справедливо неравенство

$$|x-y|^2 + h^2 \le M(|hH(\gamma-\gamma')|^2 + h^2). \quad (4.27)$$

Далее, по теореме о среднем для любых двух множеств $\Omega_{h,\gamma}$ и $\Omega_{h,\gamma'}$ найдутся точки $x_* \in \Omega_{h,\gamma}$ и $y_* \in \Omega_{h,\gamma'}$ такие, что

$$\int\limits_{\Omega_{h,\gamma}} \int\limits_{\Omega_{h,\gamma'}} \frac{dxdy}{(|x-y|^2+h^2)^{n/2+1}} = \frac{h^{2n}|\Omega_0|^2}{(|x_*-y_*|^2+h^2)^{n/2+1}}.$$

Применив к отношению справа оценку (4.27), а результат подставив в (4.26), получим

$$|\Phi(hH(\gamma'-\gamma) \mid l_\gamma, \hat{l}_{\gamma'})| \le Kh^{2m+2} \int\limits_{\Omega_{h,\gamma}} \int\limits_{\Omega_{h,\gamma'}} \frac{dxdy}{(|x-y|^2+h^2)^{n/2+1}}. \tag{4.28}$$

Объединение множеств $\Omega_{h,\gamma}$ по всем $\gamma \in B_L$ состоит из точек, расстояние от которых до Ω не превосходит $L_1 h$, где $L_1 = (\sqrt{n}+1)h$. Иными словами, указанное объединение содержится в множестве $\Omega''_{L_1 h}$. Учитывая это и подставляя (4.28) в (4.25), а результат — в (4.24), приходим к следующей оценке:

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 \le Kh^{2m+2} \int\limits_{\Omega''_{L_1 h}} \int\limits_{\Omega''_{L_1 h}} \frac{dxdy}{(|x-y|^2+h^2)^{n/2+1}}. \tag{4.29}$$

Здесь постоянная K не зависит от h, Ω. Перейдя во внутреннем интеграле по dx к сферическим координатам ρ, θ с центром в точке y, получим

$$\int\limits_{\Omega''_{L_1 h}} \frac{dx}{(|x-y|^2+h^2)^{n/2+1}} \le \omega_n \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-1}\,d\rho}{(\rho^2+h^2)^{n/2+1}}$$

$$= \frac{\omega_n}{h^2} \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{n-1}\,d\rho}{(1+\rho^2)^{n/2+1}},$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Проинтегрировав обе части последнего неравенства по $y \in \Omega''_{L_1 h}$ и подставив результат в (4.29), имеем

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 \le K \left|\Omega''_{L_1 h}\right| h^{2m}. \tag{4.30}$$

Множество Ω по условию обладает правильной границей. Значит,

$$\left|\Omega''_{L_1 h}\right| \le |\Omega| + K_1 L_1 h |\partial\Omega|.$$

Отсюда и из (4.30) следует (4.23).

Теорема IV.7 доказана.

Замечание. В теореме IV.7 мы оценили норму функционала, составленного из элементарных функционалов порядка $m+1$. Если потребовать выполнения более слабого условия, а именно обращения элементарных функционалов в нуль на многочленах степени $m-1$, то аналогично оценке (4.29) выводится неравенство

$$\|l \mid L_2^{(m)*}\|^2 \leq Kh^{2m} \int\limits_{\Omega''_{L_1 h}} \int\limits_{\Omega''_{L_1 h}} \frac{dxdy}{(|x-y|^2+h^2)^{n/2}},$$

из которого следует, что

$$\|l \mid L_2^{(m)*}\| \leq Kh^m \sqrt{|\ln h||\Omega|}.$$

Это неравенство более слабое, чем (4.23).

Пусть произвольный функционал погрешности $l(x)$ из последовательности равномерно распределенных в области Ω функционалов представлен формулой (I.2.14). Тогда, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы IV.7, приходим к оценке

$$\|l \mid L_2^{(m)*}\| \leq Kh^m \sqrt{|\Omega|}(1+K_2\sqrt{h|\ln h|}),$$

в которой постоянная K не зависит от h, Ω.

Глава V

Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем

В этой главе мы покажем, что кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в $L_2^{(m)}$ при неограниченном уменьшении шага решетки.

Теорема Бахвалова, доказанная в гл. IV, § 3, и теорема о существовании кубатурных формул с $L_2^{(m)*}$-нормой функционала погрешности, убывающей как h^m, подсказывают путь к построению наилучших в определенном смысле кубатурных формул. Такими будут формулы с погрешностью, распределенной по области интегрирования наиболее одинаково и равномерно.

§ 1. Свойства экстремальной функции оптимального в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ функционала погрешности

Рассмотрим задачу приближенного интегрирования периодических функций из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Напомним, что функция $\varphi(x)$ принадлежит $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, если она периодична с матрицей H, т. е.

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

и при этом конечна величина

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}(H)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

Напомним также, что под Ω_0 мы понимаем фундаментальный параллелепипед матрицы H, т. е. образ при линейном преобразовании $x = Hy$ единичного куба

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \le y_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ранее было показано, что на пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}$ периодических функций, норма в котором инвариантна относительно произвольного сдвига аргумента функции, оптимальным будет функционал погрешности с равными коэффициентами

$$l_\infty(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - h^n \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} \delta(x - hH\gamma). \tag{1.1}$$

Здесь и далее будем рассматривать только такие значения параметра h, при которых $1/h$ является натуральным числом.

Оптимальный в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ функционал погрешности единствен. Действительно, пусть имеются два функционала l_1 и l_2, нормы которых минимальны в $\widetilde{L}_2^{(m)}$ и, следовательно, равны между собой. Согласно тождеству Аполлония

$$\left\| \frac{l_1 + l_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|l_1\|^2 + \frac{1}{2}\|l_2\|^2 - \left\| \frac{l_1 - l_2}{2} \right\|^2$$

функционал погрешности, равный среднему арифметическому l_1 и l_2, должен при $l_1 \ne l_2$ иметь норму, меньшую, чем любой из l_j:

$$\left\| \frac{l_1 + l_2}{2} \right\| < \|l_1\| = \|l_2\|.$$

Но это невозможно, так как противоречит оптимальности l_j. Следовательно, l_1 и l_2 совпадают.

Исследуем свойства экстремальной функции оптимального функционала (1.1).

В гл. I доказано, что экстремальная функция $u(x)$ любого ограниченного функционала $l(x)$ является решением в $L_2^{(m)}$ полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = (-1)^m l(x). \tag{1.2}$$

Периодическое решение этого уравнения определено однозначно с точностью до аддитивной постоянной. Представляя $l(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)*}$ рядом Фурье:

$$l(x) = \sum_{\beta \neq 0} L[\beta] e^{i2\pi H^{-1} x\beta},$$

получаем аналогичное разложение экстремальной функции:

$$u(x) = c_0 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{L[\beta]}{|2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}} e^{i2\pi H^{-1} x\beta}.$$

Несложно подсчитать, что оптимальный функционал погрешности $l_\infty(x)$ имеет такие коэффициенты Фурье:

$$L[\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = 0 \text{ или } \beta \text{ не кратно } 1/h, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, экстремальная функция для $l_\infty(x)$ периодична с матрицей периодов hH и задается равенством

$$u_\infty(x) = c - h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}} e^{i2\pi H^{-1} x\beta/h}.$$

Сгруппируем попарно слагаемые в правой части этого равенства, взяв вместе с номером β соответствующий ему номер $-\beta$. Тогда $u_\infty(x)$ примет следующий вид:

$$u_\infty(x) = c - h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\cos 2\pi H^{-1} x\beta/h}{|2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}}.$$

Эта функция вещественнозначна, если вещественна постоянная c. Задав c равенством

$$c = h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}},$$

несложно убедиться, что

$$u_\infty(x) = 2h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi H^{-1*}\beta|^{2m}} \sin^2 \pi H^{-1} x \cdot \beta/h. \qquad (1.3)$$

Функция $u_\infty(x)$ строго больше нуля всюду за исключением узлов решетки $hH\gamma$, в которых она обращается в нуль.

Норма функционала $l_\infty(x)$ в $\widetilde{L}_2^{(m)*}$ совпадает с квадратным корнем из величины (l_∞, u_∞). Вычисляя ее, приходим к равенству

$$\|l_\infty \mid \widetilde{L}_2^{(m)*}\| = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \sqrt{\sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|H^{-1*}\beta|^{2m}}}, \tag{1.4}$$

представляющему собой точное значение минимума норм в $\widetilde{L}_2^{(m)*}$ всевозможных функционалов погрешности с решеткой узлов $hH\gamma$.

Экстремальную функцию $u(x)$, являющуюся периодическим решением полигармонического уравнения (1.2), можно также получить суммированием локальных функционалов погрешности с малым носителем.

Локальным функционалом погрешности назовем обобщенную функцию вида

$$l^{(0)}(y) = \chi_{\Omega_0}(y) - \sum_{\gamma\in B_0} c[\gamma]\delta(y - H\gamma), \tag{1.5}$$

где B_0 — некоторое конечное множество целочисленных векторов. Будем рассматривать только такие $l^{(0)}(y)$, которые обращаются в нуль на многочленах степени $2m$:

$$(l^{(0)}(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < 2m + 1. \tag{1.6}$$

Пусть функционал погрешности $l(y)$ вида (1.5) удовлетворяет условиям

$$\operatorname{supp} l(y) \subset \{y : |y| \leq L\}, \tag{1.7}$$

$$\|l(y) \mid C^*\| \leq A, \tag{1.8}$$

$$(l(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s. \tag{1.9}$$

Множество всех таких функционалов обозначим через $R(L, A, s)$.

Локальный функционал погрешности (1.5) по определению принадлежит классу $R(L, A, 2m + 1)$. Поскольку $2m > n$, функционал $l^{(0)}(y)$ определен на любой непрерывной функции и имеет в C^* ограниченную норму.

Отметим, что при заданном s класс $R(L, A, s)$ непуст лишь при условии, что L и A достаточно велики. Нижняя грань допустимых значений L и A зависит от s и неограниченно возрастает при увеличении s.

Функционалы $l_\gamma(x) = l^{(0)}(x/h - H\gamma)$ имеют в C^* норму, являющуюся однородной функцией параметра h:

$$\left\| l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) \mid C^* \right\| = h^n \| l^{(0)}(y) \mid C^* \|.$$

Их носитель сосредоточен в шаре радиуса Lh с центром в точке $hH\gamma$:

$$\operatorname{supp} l_\gamma(x) \subset \{x : |x - hH\gamma| \le Lh\}.$$

Функционалы $l_\gamma(x)$ по-прежнему будут ортогональны всем многочленам степени $2m$.

Составим сумму элементарных функционалов:

$$\sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right)$$
$$= \sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} \left\{ \chi_{\Omega_0}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) - \sum_{\gamma \in B_0} c[\gamma] h^n \delta(x - hH\gamma - hH\gamma') \right\}.$$

Характеристические функции элементарных ячеек дают в сумме характеристическую функцию всего фундаментального параллелепипеда:

$$\sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} \chi_{\Omega_0}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) = \chi_{\Omega_0}(x).$$

Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} \sum_{\gamma \in B_0} c[\gamma] h^n \delta(x - hH(\gamma + \gamma')).$$

Меняя в нем порядок суммирования и переходя во внутренней сумме от переменной $\gamma + \gamma'$ к индексу γ'', получим

$$\sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma'\right) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{\gamma''} \left[h^n \delta(x - hH\gamma'') \sum_{\gamma \in B_0} c[\gamma] \right].$$

Значение функционала погрешности $l(x)$ в правой части этого равенства на произвольной функции $\varphi(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ вычислим по формуле

$$(l, \varphi) = \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\, dx - \sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} h^n \varphi(hH\gamma) \Big(\sum_{\gamma \in B_0} c[\gamma] \Big).$$

Сумма коэффициентов $c[\gamma]$ в правой части равна единице, что следует из условия обращения в нуль локального функционала $l^{(0)}$ на постоянной. Окончательно имеем

$$\sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} l^{(0)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma' \right) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{\gamma''} h^n \delta(x - hH\gamma'') = l_\infty(x).$$

Отсюда следует, что экстремальную функцию $u_\infty(x)$ в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}$ можно построить в виде суммы:

$$u_\infty(x) = \sum_{hH\gamma' \in \Omega_0} u_{\gamma'}(x) + c, \tag{1.10}$$

где $u_{\gamma'}(x) = u_0(x - hH\gamma')$, а функция $u_0(x)$ представляет собой убывающее на бесконечности решение уравнения

$$\Delta^m u_0(x) = (-1)^m l^{(0)}(x/h). \tag{1.11}$$

Точнее, $u_0(x)$ выражается формулой

$$u_0(x) = (l^{(0)}(y/h), G(x-y)) = (-1)^m \int l^{(0)}(y/h)\, G(x-y)\, dy,$$

где $(-1)^m G(x)$ — фундаментальное решение полигармонического оператора, определенное в гл. I.

Поведение свертки фундаментального решения $G(x)$ с финитной обобщенной функцией $\rho(y)$, подчиненной условиям (1.7)–(1.9), т. е. поведение функции

$$u(x) = \int G(x-y)\rho(y)\, dy,$$

удобно исследовать, используя разложение Тейлора функции $G(x-y)$ и ее производных по степеням y:

$$D^\beta G(x-y) = \sum_{|\alpha|\le s-1} D^{\alpha+\beta}G(x)\frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} + R_s(y,x). \tag{1.12}$$

Остаточный член $R_s(y,x)$ при заданном x и $|y| \le L$ имеет следующую мажоранту:

$$|R_s(y,x)| \le \frac{|y|^s}{s!}\max_{|z|\le L}|T_{s+|\beta|}(G(x-z))|,$$

где

$$|T_s(G)|^2 = \sum_{|\gamma|=s}\frac{s!}{\gamma!}|D^\gamma G|^2.$$

Нетрудно получить оценку $R_s(y,x)$ в области $|y| \le L$, $|x| > 2L$:

$$|R_s(y,x)| \le K|x|^{2m-n-|\beta|-s}\ln|x|.$$

Ее можно улучшить при нечетном n, а также в случае, когда $2m-n-|\beta|-s < 0$. В обоих случаях логарифмический член исчезает.

Установим важное свойство функции свертки $u(x)$, которым будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Теорема V.1. *Пусть $\rho(x)$ — финитная обобщенная функция, удовлетворяющая для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ неравенству*

$$|(\rho(x), f(x))| \le K\max_{x\in\operatorname{supp}\rho}|f(x)|, \tag{1.13}$$

и пусть $\rho(x)$ обращается в нуль на всех многочленах степени $s-1$:

$$(\rho(x), x^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s. \tag{1.14}$$

Тогда производные порядка l от свертки

$$u(x) = \int G(x-y)\rho(y)\,dy \tag{1.15}$$

при достаточно большом $|x|$ убывают как $|x|^{2m-n-l-s}$, если n нечетно или $l+s > 2m-n$, и как $|x|^{2m-n-l-s}\ln|x|$, если $l+s \le 2m-n$ и n четно.

Доказательство. Продифференцируем l раз представление (1.15) функции $u(x)$ и подставим вместо $D^\beta G(x-y)$, $|\beta| = l$, разложение (1.12). Получим

$$D^\beta u_0(x) = (\rho(y), D^\beta G(x-y))$$
$$= \left(\rho(y), \sum_{|\alpha|\le s-1} D^{\alpha+\beta} G(x) \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}\right) + (\rho(y), R_s(y,x)). \quad (1.16)$$

В первом слагаемом, стоящем справа в (1.16), все интегралы обращаются в нуль в силу (1.14). Воспользовавшись свойством (1.13) и оценкой остаточного члена $R_s(y,x)$ при $|x| > 2A$, $|y| \le A$, для четного n и $l \le 2m-n-s$ будем иметь

$$D^\beta u(x) = O(|x|^{2m-n-s-|\beta|} \ln |x|). \quad (1.17)$$

В случае если $l+s > 2m-n$ или n нечетно получится более сильная оценка:

$$D^\beta u(x) = O(|x|^{2m-n-s-|\beta|}). \quad (1.18)$$

Теорема V.1 доказана.

Как следствие этой теоремы получаем при $|x - hH\gamma| \ge 2Lh$ оценку функции $u_\gamma(x)$ из разложения (1.10):

$$|u_\gamma(x)| \le \frac{KAh^{n+2m+1}}{(L^2h^2 + |x-hH\gamma|^2)^{(n+1)/2}}. \quad (1.19)$$

Оценка (1.19) показывает, что ряд $\sum\limits_\gamma u_\gamma(x)$ сходится при любом x, так как члены его убывают быстрее, чем $|\gamma|^{-(n+1)}$.

Полезно отметить, что найденное решение $u_0(x)$ уравнения (1.11) можно получить непосредственно заменой переменных из $u^{(0)}(y)$ — решения уравнения

$$\Delta^m u^{(0)}(y) = (-1)^m l^{(0)}(y).$$

В самом деле, функция $u^{(0)}(x)$ представима в виде свертки:

$$u^{(0)}(x) = \int l^{(0)}(y) G(x-y)\, dy.$$

С другой стороны, решение $u_0(x)$ уравнения (1.11) можно записать следующим образом:

$$u_0(x) = h^n \int l^{(0)}(y) G\left(\left(\frac{x}{h} - y\right) h\right) dy.$$

Фундаментальное решение $G(x)$ для нечетных n — это однородная функция порядка $2m-n$, поэтому для таких n справедливо равенство

$$u_0(x) = h^{2m}(l^{(0)}(y), G(x/h - y)) = h^{2m} u^{(0)}(x/h). \tag{1.20}$$

При четном n этот же результат получится, если воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} G(x) &= (-1)^m \varkappa_{m,n} \left|\frac{x}{h}\right|^{2m-n} h^{2m-n} \left[\ln\left(\frac{|x|}{h}\right) + \ln h\right] \\ &= h^{2m-n} G\left(\frac{x}{h}\right) + \varkappa_{m,n} |x|^{2m-n} \ln h. \end{aligned}$$

Поскольку здесь функция $|x|^{2m-n}$ является многочленом степени $2m-n$, т. е. степени ниже $2m+1$, имеем

$$(l^{(0)}(y), G((x/h - y)h)) = h^{2m-n}(l^{(0)}(y), G(x/h - y)),$$

откуда снова следует равенство (1.20).

Выясним, как ведет себя произведение экстремальной функции $u_\infty(x)$ на срезающий множитель $\psi_h(x)$, введенный в гл. I, § 2. Для ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей положим

$$\psi_h(x) = \varkappa h^n \int\limits_{\Omega'_{2h}} \omega\left(\frac{x - x'}{h}\right) dx'.$$

Здесь $\varkappa$ — постоянная, $\omega(x)$ — стандартное ядро усреднения, а интегрирование проводится по множеству точек Ω, отстоящих от границы не менее чем на $2h$. Напомним, что $\psi_h(x) = 1$ во всех точках Ω, отстоящих от границы более чем на $3h$. Функция $\psi_h(x)$ бесконечно дифференцируема, а ее производные удовлетворяют неравенству

$$|D^\gamma \psi_h(x)| \le K h^{-|\gamma|}. \tag{1.21}$$

Кроме того, она равна нулю вне Ω и в точках Ω, отстоящих от границы не более чем на h.

Исследуем произведение

$$\varphi^{(h)}(x) = \psi_h(x) u_\infty(x).$$

Оценим норму функции $\varphi^{(h)}(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$. Дифференцируя ее, получим

$$D^\alpha \varphi^{(h)}(x) = \begin{cases} D^\alpha u_\infty(x), & \text{если } x \in \Omega'_{3h}, \\ J_\alpha(x), & \text{если } x \in \Omega'_h \setminus \Omega'_{3h}, \\ 0 & \text{при всех остальных } x. \end{cases}$$

Здесь

$$J_\alpha(x) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \psi_h(x) D^{\alpha-\beta} u_\infty(x).$$

Промажорируем норму функции $J_\alpha(x)$ в пространстве $L_2(\Omega_\gamma)$, где Ω_γ — какой-нибудь параллелепипед решетки $hH\gamma$, имеющий общие точки с множеством $\Omega'_h \setminus \Omega'_{3h}$. Очевидно, что

$$\|J_\alpha \mid L_2(\Omega_\gamma)\| \le \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \|D^\beta \psi_h(x) D^{\alpha-\beta} u_\infty(x) \mid L_2(\Omega_\gamma)\|.$$

Согласно равенству (1.3) справедлива оценка

$$|D^{\alpha-\beta} u_\infty(x)| \le K h^{2m-|\alpha-\beta|}$$

с постоянной K, не зависящей от h. Используя последнее соотношение и неравенство (1.21), при $|\alpha| = m$ получим

$$\|D^\beta \psi_h D^{\alpha-\beta} u_\infty \mid L_2(\Omega_\gamma)\|^2 \le K h^{n+2m}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\|J_\alpha \mid L_2(\Omega_\gamma)\|^2 \le K h^{n+2m}. \tag{1.22}$$

Обозначим через $N^{(b)}$ число тех ячеек Ω_γ, пересечение которых с множеством $\Omega'_h \setminus \Omega'_{3h}$ непусто. В силу предположения о кусочной

гладкости границы Ω выполняется неравенство $N^{(b)}h^n \le K_1 h$. Отсюда и из (1.22) имеем

$$\left\| J_\alpha \mid L_2(\Omega'_h \setminus \Omega'_{3h}) \right\|^2 \le K h^{2m+1},$$

где K не зависит от h. Это позволяет утверждать, что норма срезанной функции $\varphi^{(h)}(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega'_h \setminus \Omega'_{3h})$ убывает не медленнее чем $h^{m+1/2}$:

$$\left\| \varphi^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega'_h \setminus \Omega'_{3h}) \right\|^2 \le K h^{2m+1}.$$

Оценим норму функции $\varphi^{(h)}(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega'_{3h})$. Обозначим через $N^{(i)}$ число ячеек Ω_γ, лежащих целиком в области Ω'_{3h}, а через $N^{(l)}$ — число ячеек решетки, имеющих хотя бы одну общую точку с множеством Ω'_h. Очевидно, что

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\| \varphi^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega'_{3h}) \right\|^2 - N^{(i)} \left\| u_\infty(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|^2 \\ &\le (N^{(l)} - N^{(i)}) \left\| u_\infty \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|^2. \end{aligned}$$

Вычисляя с помощью соотношения (1.4) интеграл, представляющий норму функции $u_\infty(x)$ по ее фундаментальному параллелепипеду Ω_γ, а также пользуясь оценками

$$\begin{gathered} |D^\alpha u_\infty(x)| \le K h^m, \quad |\alpha| = m; \\ |\Omega| - N^{(i)} h^n \le K h, \quad (N^{(l)} - N^{(i)}) h^n \le K h, \end{gathered}$$

приходим к равенству

$$\left\| \varphi^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega'_{3h}) \right\|^2 = B_{n,m}^2(\Omega) h^{2m} + O(h^{2m+1}).$$

Под $B_{n,m}(\Omega)$ мы понимаем здесь следующую величину:

$$B_{n,m}(\Omega) = (2\pi)^{-m} \Big[|\Omega| \sum_{\beta \ne 0} |H^{-1*}\beta|^{-2m} \Big]^{1/2}. \tag{1.23}$$

Таким образом, доказано, что норма срезанной экстремальной функции в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ представима в виде

$$\left\| \psi_h(x) u_\infty(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\| = B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h)). \tag{1.24}$$

Норма же разности $w^{(h)}(x)$ между экстремальной функцией $u_\infty(x)$ и срезкой $\varphi^{(h)}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| w^{(h)} \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\| \le K h^{m+1/2},$$

где K не зависит от h. Прямым вычислением получается также следующая оценка скалярного произведения в $L_2^{(m)}(\Omega)$ функций $\varphi^{(h)}(x)$ и $w^{(h)}(x)$:

$$\left| \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi^{(h)}(x) D^\alpha w^{(h)}(x)\, dx \right| \le K h^{2m+1}.$$

Таким образом, при малых h функции $\varphi^{(h)}(x)$ и $w^{(h)}(x)$ почти ортогональны в $L_2^{(m)}(\Omega)$.

Используя свойства срезки $\varphi^{(h)}(x)$ экстремальной функции $u_\infty(x)$, уточним оценку снизу нормы произвольного функционала погрешности с решеткой $hH\gamma$. Пусть этот функционал имеет вид

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{hH\gamma \in \Omega} c[\gamma] \delta(x - hH\gamma),$$

а область Ω лежит внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0, соответствующего матрице H. Граница области Ω кусочно гладкая. Имеет место следующая

Теорема V.2. *Нормы функционала погрешности $l(x)$ кубатурной формулы с решеткой узлов $hH\gamma$ в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} \left\| l \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| &\ge B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h)), \\ \left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| &\ge B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h)). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Доказательство. Нормы функционала $l(x)$ в пространствах $\widetilde{L}_2^{(m)*}$ и $L_2^{(m)*}$ ограничены снизу отношением

$$\frac{(l, \varphi^{(h)}(x))}{\left\| \varphi^{(h)} \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\|}.$$

Это следует из совпадения норм срезки $\varphi^{(h)}(x)$ в пространствах $L_2^{(m)}$, $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ и $L_2^{(m)}(\Omega)$. Поведение знаменателя в рассматриваемом отношении мы уже исследовали и получили равенство (1.24). Найдем теперь значение $(l, \varphi^{(h)})$.

Функция $\varphi^{(h)}(x)$, как и $u_\infty(x)$, в узлах $hH\gamma$ решетки равна нулю. Поэтому

$$(l, \varphi^{(h)}) = \int\limits_{\Omega} \varphi^{(h)}(x)\, dx.$$

Далее, функции $u_\infty(x)$ и $\psi_h(x)$ неотрицательны и, кроме того, $u_\infty(x)$ периодична с матрицей периодов hH. Учитывая это, имеем

$$N^{(i)} \int\limits_{\Omega_\gamma} u_\infty(x)\, dx \le \int\limits_{\Omega} \varphi^{(h)}(x)\, dx \le N^{(l)} \int\limits_{\Omega_\gamma} u_\infty(x)\, dx. \tag{1.26}$$

Интеграл от $u_\infty(x)$ по ячейке Ω_γ можно вычислить точно:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} u_\infty(x)\, dx = h^n \int\limits_{\Omega_0} u_\infty(y)\, dy = h^{2m+n}\, (1/\,2\pi)^{2m}\, \zeta(H^{-1*} \mid 2m).$$

Подставив это выражение в (1.26), а также пользуясь равенствами

$$N^{(i)} h^n = |\Omega| + O(h), \quad N^{(l)} h^n = |\Omega| + O(h),$$

получаем

$$\left|(l, \varphi^{(h)}) - B_{n,m}^2(\Omega) h^{2m}\right| \le K h^{2m+1}.$$

Отсюда и из (1.24) следует, что

$$\frac{(l, \varphi^{(h)})}{\left\|\varphi^{(h)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|} = B_{n,m}(\Omega) h^m + O(h^{m+1/2}). \tag{1.27}$$

Теорема V.2 доказана.

Заметим в заключение, что срезка $\varphi^{(h)}(x)$ принадлежит замыканию по норме пространства $L_2^{(m)}(\Omega)$ множества финитных в Ω функций. Это пространство будем обозначать через $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$. Из (1.27)

заключаем, что для нормы функционала $l(x)$ в $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)$ также справедлива оценка, аналогичная (1.25):

$$\left\| l(x) \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega) \right\| \geq B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h)). \tag{1.28}$$

Таким образом, во всех четырех пространствах $\widetilde{L}_2^{(m)}$, $L_2^{(m)}$, $L_2^{(m)}(\Omega)$, $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ получены одинаковые оценки снизу нормы функционала погрешности.

§ 2. Погрешность в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ финитных функций

В этом параграфе мы получим представление нормы функционала погрешности $l_\infty(x)$ в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)$, асимптотически точное при стремлении шага решетки к нулю. Это позволит нам дать аналогичную формулу для точной нижней границы норм функционалов погрешности с заданной решеткой узлов $hH\gamma$. Прежде чем формулировать соответствующие теоремы, укажем, каким условиям должна удовлетворять область Ω.

Пусть область Ω ограничена и лежит внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0 матрицы H. Множество всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, отстоящих от Ω менее чем на η, обозначим через Ω''_η. Пусть, кроме того, Ω'_η — множество точек Ω, отстоящих от границы Ω не меньше чем на η. Ясно, что Ω'_η вложено в область Ω, которая, в свою очередь, вкладывается в Ω''_η. Будем говорить, что Ω *имеет порядок q, $0 < q \leq 1$, толщины пограничного слоя*, если объем полосы, лежащей между Ω''_η и Ω'_η, при $\eta \to 0$ уменьшается не медленнее чем $K\eta^q$:

$$\left| \Omega''_\eta \setminus \Omega'_\eta \right| \leq K\eta^q.$$

Области с кусочно гладкой границей имеют порядок толщины пограничного слоя, равный единице.

Обозначим через $S_1(\Omega)$ множество, состоящее из тех ячеек Ω_γ решетки $hH\gamma$, которые имеют с Ω общие точки. Очевидно, что для области Ω, имеющей порядок q толщины пограничного слоя, справедливо соотношение

$$|S_1(\Omega)| = |\Omega|(1 + O(h^q)). \tag{2.1}$$

Будем считать далее, что область Ω имеет порядок q толщины пограничного слоя.

Теорема V.3. *На любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ функционал погрешности $l_\infty(x)$ принимает значение, допускающее следующую оценку сверху:*

$$|(l_\infty, \varphi)| \le \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m [\zeta(H^{-1*} \mid 2m)]^{1/2} |S_1(\operatorname{supp}\varphi)|^{1/2} \|\varphi(x) \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)\|. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$. Продолжим ее на все множество Ω_0, положив вне Ω равной нулю. Значение l_∞ на φ выразим интегралом:

$$(l_\infty, \varphi) = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha u_\infty(x)\, dx. \tag{2.3}$$

Экстремальная функция $u_\infty(x)$ имеет все производные до порядка m, каждая из которых является однородной функцией параметра h. Точнее, имеет место равенство

$$D^\alpha u_\infty(x) = h^{2m-|\alpha|}(D^\alpha u^{(\infty)})(x/h), \quad |\alpha| \le m, \tag{2.4}$$

где через $u^{(\infty)}(x)$ обозначена функция $u_\infty(x)$, соответствующая значению $h = 1$.

В интеграле (2.3) областью интегрирования служит, очевидно, носитель функции $\varphi(x)$. Все пространство $\mathbb{R}^n$ разбито на элементарные ячейки Ω_γ исходной решетки $hH\gamma$:

$$\Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le (H^{-1}x)_j - h\gamma_j < h,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Множество тех γ, для которых пересечение Ω_γ с носителем φ непусто, обозначим через $B\varphi$.

Равенство (2.3) с учетом (2.4) можно продолжить следующим образом:

$$(l_\infty, \varphi) = h^m \sum_{\gamma \in B\varphi} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha u^{(\infty)}(x/h)\, dx. \tag{2.5}$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, для каждого $\gamma \in B\varphi$ имеем

$$\left| \int\limits_{\Omega_\gamma} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha u^{(\infty)}(x/h)\, dx \right|$$
$$\leq \left\| \varphi(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\| \left\| u^{(\infty)}(x/h) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|. \quad (2.6)$$

Проведя в соответствующем интеграле замену переменных $x = hy$, несложно подсчитать, что

$$\left\| u^{(\infty)}(x/h) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|^2$$
$$= h^n \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha u^{(\infty)}(y)|^2\, dy = h^n (l_\infty(y), u^{(\infty)}(y)). \quad (2.7)$$

Функционал $l_\infty(y)$ здесь соответствует значению $h = 1$. Учитывая это, а также полагая, что интеграл от функции $u^{(\infty)}(x)$ по фундаментальному параллелепипеду Ω_0 равен нулю, получим

$$(l_\infty(y), u^{(\infty)}(y)) = -u^{(\infty)}(0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m} \zeta(H^{-1*} \mid 2m).$$

Подставляя этот результат в (2.7), а то, что получится, — в (2.6), приходим к неравенству

$$\left| \int\limits_{\Omega_\gamma} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) (D^\alpha u^{(\infty)}) \left(\frac{x}{h}\right) dx \right|$$
$$\leq h^{n/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m [\zeta(H^{-1*} \mid 2m)]^{1/2} \left\| \varphi(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|.$$

Суммируя эти неравенства по всем $\gamma \in B\varphi$, из (2.5) получаем

$$|(l_\infty(x), \varphi(x))|$$
$$\leq h^{n/2+m} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m [\zeta(H^{-1*} \mid 2m)]^{1/2} \sum_{\gamma \in B\varphi} \left\| \varphi(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma) \right\|. \quad (2.8)$$

Обозначим через N_1 число ячеек Ω_γ, имеющих общие точки с носителем функции $\varphi(x)$. Согласно известному неравенству Коши для сумм имеем

$$\sum_{\gamma\in B\varphi} \|\varphi(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma)\| \le N_1^{1/2}\Big[\sum_\gamma \|\varphi(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega_\gamma)\|^2\Big]^{1/2}.$$

Подставляя эту оценку в (2.8) и учитывая, что объем множества $S_1(\operatorname{supp}\varphi)$ равен произведению $N_1 h^n$, приходим к (2.2).

Теорема V.3 доказана.

Следствие 2.1. *Справедливо следующее асимптотически точное представление нормы функционала погрешности $l_\infty(x)$ в пространстве финитных функций $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$:*

$$\|l_\infty \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)\| = B_{n,m}(\Omega)h^m(1+O(h^q)). \tag{2.9}$$

Доказательство. В предыдущем параграфе установлено, что разность между нормой $\|l_\infty(x) \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)\|$ и $B_{n,m}(\Omega)h^m$ неотрицательна. С другой стороны, согласно (2.2) она не превосходит величины

$$\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m [\zeta(H^{-1*} \mid 2m)]^{1/2}(|S_1(\Omega)|^{1/2} - |\Omega|^{1/2}).$$

Отсюда и из (2.1) получаем (2.9).

Представление (2.9) в некоторых случаях можно уточнить. Пусть Ω — целая часть фундаментального параллелепипеда Ω_0, т. е.

$$\Omega = \{x : 0 \le (KH^{-1}x)_j < 1/h,\ j = 1,\dots,n\},$$

где K — диагональная матрица с натуральными числами k_j на диагонали.

Для такой области Ω любая функция $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ периодически продолжима на всё $\mathbb{R}^n$ с матрицей периодов $K^{-1}H$, в связи с чем ее можно рассматривать как функцию $\varphi_K(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. При этом отношение квадратов ее норм в большем и меньшем пространствах равно определителю K, т. е.

$$\|\varphi_K(x) \mid \widetilde{L}_2^{(m)}(H)\| = \sqrt{\det K}\,\|\varphi(x) \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)\|.$$

Положим

$$l_\infty^\Omega(x) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{hH\gamma\in\Omega} \delta(x - hH\gamma).$$

Промажорируем норму в $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)$ этого функционала погрешности. Заметим, что значение $l_\infty^\Omega(x)$ на любой функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ можно найти по формуле

$$(l_\infty^\Omega, \varphi) = \frac{(l_\infty, \varphi_K)}{\det K}.$$

Поэтому справедливо равенство

$$\frac{(l_\infty^\Omega, \varphi)}{\|\varphi \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)\|} = \frac{1}{\sqrt{\det K}} \frac{(l_\infty, \varphi_K)}{\|\varphi_K \mid \widetilde{L}_2^{(m)}(H)\|}.$$

Взяв супремум от обеих частей по множеству всех ненулевых $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$, установим оценку

$$\|l_\infty^\Omega \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)\| \le \frac{1}{(\det K)^{1/2}} \|l_\infty \mid \widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\| = B_{n,m}(\Omega) h^m.$$

Очевидно, что нормы в $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)$ функционалов $l_\infty^\Omega(x)$ и $l_\infty(x)$ совпадают. Учитывая это, получаем представление более точное, чем (2.9), а именно:

$$\|l_\infty \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)\| = B_{n,m}(\Omega) h^m. \tag{2.10}$$

Опираясь на двусторонние оценки норм функционалов погрешностей, установленные в этом и предыдущем параграфах, сформулируем следующую теорему.

Теорема V.4. *Нижняя грань норм всех функционалов погрешности с решеткой узлов $hH\gamma$, рассматриваемых в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$, асимптотически точно представляется формулой*

$$\inf \|l \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega)\| = B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h^q)). \tag{2.11}$$

Доказательство. Представление (2.11) сразу следует из оценки снизу (1.28), справедливой для любого функционала погрешности $l(x)$ с решеткой узлов $hH\gamma$, и из равенства (2.9).

Подчеркнем, что асимптотически точные оценки скорости сходимости к нулю нормы функционала погрешности $l_\infty(x)$ получены при условии, что h стремится к нулю, а m постоянно. Тем самым эти оценки характеризуют стремление к нулю максимально возможной погрешности кубатурной формулы на функциях единичной сферы в $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$. При этом для каждого h экстремальная функция, на которой максимум погрешности достигается, будет своя, а множество таких функций некомпактно при $h \to 0$. Поэтому для фиксированной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ сходимость погрешности к нулю при $h \to 0$ оказывается более быстрой, чем это гарантируется оценкой

$$|(l_\infty, \varphi)| \le \left\| l_\infty \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega) \right\| \left\| \varphi \mid \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)*}(\Omega) \right\|.$$

В заключение этого параграфа установим еще одно свойство экстремальной функции $u_\infty(x)$. Как известно, любая функция $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(\Omega)$ может быть продолжена на всё $\mathbb{R}^n$ до функции класса $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$. Среди всех таких продолжений существует минимальное по норме $L_2^{(m)}$, обозначаемое через $\overline{\varphi}$. Функция $\overline{\varphi}$ полигармоническая вне Ω и имеет производные порядка m, которые убывают на бесконечности не медленнее чем $|x|^{-n} \ln |x|$.

Применим описанную операцию продолжения к функции $\chi_\Omega(x) u_\infty(x)$, принадлежащей, очевидно, пространству $L_2^{(m)}(\Omega)$. Ее результат обозначим как $\bar{u}_\infty(x)$. Оказывается, справедливо следующее асимптотически точное представление:

$$\left\| \bar{u}_\infty \mid L_2^{(m)} \right\| = B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h^{q/2})). \tag{2.12}$$

Докажем формулу (2.12). Нам понадобятся некоторые сведения об устройстве пространства $L_2^{(m)}$.

Выделим в $L_2^{(m)}$ собственное подпространство $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \Omega)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в замыкании $\overline{\Omega}$. Это подпространство замкнуто в $L_2^{(m)}$ и ортогонально другому подпространству, которое мы обозначим через $H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \partial\Omega)$.

Пространство $H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \partial\Omega)$ состоит из функций $\varphi(x)$, полигармонических внутри и вне Ω и имеющих производные порядка m, которые убывают на бесконечности не медленнее чем $|x|^{-n}\ln|x|$. Отметим, что функция $\varphi(x) \in H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \partial\Omega)$ не обязана быть полигармонической во всем $\mathbb{R}^n$, поскольку производные функции $\varphi(x)$ порядка m и выше на границе Ω могут быть разрывными.

Таким образом, функцию $\bar{u}_\infty(x) \in L_2^{(m)}$ можно представить в виде суммы своих проекций:

$$\bar{u}_\infty(x) = \bar{u}_\infty^{(0)}(x) + \bar{u}_\infty^{(1)}(x), \tag{2.13}$$

где $\bar{u}_\infty^{(0)} \in L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \Omega)$ и $\bar{u}_\infty^{(1)} \in H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \partial\Omega)$. В силу взаимной ортогональности слагаемых из (2.13) в пространстве $L_2^{(m)}$ справедливо равенство

$$\left\|\bar{u}_\infty \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|\bar{u}_\infty^{(0)} \mid L_2^{(m)}\right\|^2 + \left\|\bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}\right\|^2. \tag{2.14}$$

Нормы функции $\bar{u}_\infty^{(0)}$ в пространствах $L_2^{(m)}$ и $L_2^{(m)}(\Omega)$, очевидно, совпадают:

$$\left\|\bar{u}_\infty^{(0)} \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|\bar{u}_\infty^{(0)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2. \tag{2.15}$$

Далее, пространство $L_2^{(m)}(\Omega)$ разложимо в прямую сумму пространства $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ и его ортогонального дополнения $H_2^{(m)}(\Omega)$, состоящего из полигармонических в Ω функций. Значит, функция $\bar{u}_\infty(x)$ как элемент $L_2^{(m)}(\Omega)$ может быть разложена в сумму своих проекций на пространства $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ и $H_2^{(m)}(\Omega)$. В качестве таковых выступают, очевидно, сужения функций $\bar{u}_\infty^{(0)}(x)$ и $\bar{u}_\infty^{(1)}(x)$ на область Ω. Пользуясь их ортогональностью в $L_2^{(m)}(\Omega)$, приходим к соотношению

$$\left\|\bar{u}_\infty^{(0)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2 = \left\|u_\infty \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2 - \left\|\bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2.$$

Подставляя его в (2.15), а результат — в (2.14), получаем

$$\left\|\bar{u}_\infty \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|u_\infty \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2 + \left\|\bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}\right\|^2 - \left\|\bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|^2. \tag{2.16}$$

Асимптотически точное представление первой нормы из правой части (2.16) уже найдено в § 1. Напомним, что

$$\left\| u_\infty \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\|^2 = B_{n,m}^2(\Omega) h^{2m}(1 + O(h^q)). \tag{2.17}$$

Оценим два оставшихся в (2.16) слагаемых. С этой целью укажем функцию $w^{(h)}(x) \in L_2^{(m)}$, имеющую ту же проекцию на $H_2^{(m)}(\Omega)$, что и функция $\bar{u}_\infty(x)$. Отметим, что для совпадения проекций достаточно, чтобы функции $w^{(h)}(x)$ и $\bar{u}_\infty(x)$ были равны в малой окрестности границы Ω.

Построим функцию $w^{(h)}(x)$ для точек $x \in \Omega$. Положим

$$w_i^{(h)}(x) = u_\infty(x) - \psi_h(x) u_\infty(x), \quad x \in \Omega.$$

Здесь $\psi_h(x)$ — построенный в § 1 срезающий множитель. Для области Ω с порядком q толщины пограничного слоя имеет место оценка

$$\left\| w_i^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\| \le K h^{m+q/2}. \tag{2.18}$$

Способ ее доказательства аналогичен уже описанному в § 1.

По такой же схеме построим функцию $w_e^{(h)}(x) \in L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, совпадающую с $\bar{u}_\infty(x)$ вблизи границы Ω и удовлетворяющую неравенству

$$\left\| w_e^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \right\| \le K h^{m+q/2}. \tag{2.19}$$

Положим

$$w^{(h)}(x) = \begin{cases} w_i^{(h)}(x), & \text{если } x \in \Omega, \\ w_e^{(h)}(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Ясно, что это функция из $L_2^{(m)}$, причем в силу (2.18), (2.19) ее норма мажорируется следующим образом:

$$\left\| w^{(h)}(x) \mid L_2^{(m)} \right\| \le K h^{m+q/2}.$$

Проекция функции $w^{(h)}(x)$ на $H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \Omega)$ совпадает с $\bar{u}_\infty^{(1)}(x)$, причем ее норма не превосходит нормы проектируемой функции, т. е.

$$\left\| \bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)} \right\| \le K h^{m+q/2}. \tag{2.20}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}(\Omega) \right\| \le K h^{m+q/2}. \tag{2.21}$$

Подставляя (2.20), (2.21), (2.17) в (2.16), приходим к искомой формуле (2.12).

§ 3. Построение формул с регулярным пограничным слоем

Мы уже показали, что оптимальные кубатурные формулы для периодических функций имеют равные коэффициенты и соответствующий им функционал погрешности можно построить, суммируя сдвиги одного и того же локального функционала. Область интегрирования при этом совпадает с фундаментальным параллелепипедом матрицы решетки. Опишем процесс, позволяющий построить такие же, почти оптимальные для данной решетки узлов формулы, в которых область интегрирования может иметь произвольную форму, лишь бы ее граница была достаточно гладкой. Погрешность таких формул будем характеризовать нормой соответствующего функционала $l(x)$, для которой выведем следующее асимптотическое представление:

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| = B_{n,m}(\Omega) h^m (1 + O(h)). \tag{3.1}$$

Ячейки Ω_γ исходной решетки $hH\gamma$ частично лежат внутри Ω, а частично — вне Ω. Множество тех γ, которым соответствуют узлы $hH\gamma$ из Ω, отстоящие от границы Ω не менее чем на Lh, обозначим через $B_L^{(i)}$. Если же точка $hH\gamma$ содержится в дополнении к Ω и лежит на расстоянии от границы Ω, не меньшем Lh, то будем считать γ принадлежащим множеству $B_L^{(e)}$. Все оставшиеся целочисленные мультиндексы γ образуют множество $B_L^{(l)}$. Ясно, что им соответствуют узлы $hH\gamma$, отстоящие от границы Ω не более чем на Lh.

Рассмотрим функционал погрешности вида

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{\gamma \in B_{2L}^{(i)} \cup B_{2L}^{(l)}} h^n c[\gamma] \delta(x - hH\gamma). \tag{3.2}$$

Рассуждения, которые мы сейчас проведем, не зависят от того, будет ли носитель $l(x)$ лежать целиком в Ω или нет. Но при интегрировании функций, заданных в Ω, от кубатурной формулы часто требуется, чтобы все ее узлы принадлежали той области, по которой происходит интегрирование, т. е. области Ω. В этом случае от коэффициентов $c[\gamma]$ разложения (3.2), соответствующих точкам $hH\gamma$ и лежащим вне Ω, потребуем равенства нулю.

Будем называть обобщенную функцию (3.2) *функционалом погрешности с регулярным пограничным слоем толщины* $2L$ *порядка*

s с оценкой A, если она допускает представление в виде суммы:

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(e)}} l^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \qquad (3.3)$$

в которой элементарные, или локальные, функционалы $l^{(\gamma)}(y)$, $l^{(0)}(y)$ принадлежат классам $R(L, A, s)$ и $R(L, A, s+1)$ соответственно.

Напомним, что функционал погрешности $l_0(y)$ принадлежит $R(L, A, m)$, если выполнены три условия.

1. Носитель обобщенной функции $l_0(y)$ содержится в шаре радиуса L с центром в начале координат:

$$\operatorname{supp} l_0(y) \subset \{y : |y| \leq L\}.$$

2. Максимально возможная погрешность формулы на непрерывных функциях из единичного шара пространства C не превосходит A:

$$\|l_0(y) \mid C^*\| \leq A.$$

3. Значения обобщенной функции $l_0(y)$ на всех многочленах степени, меньшей m, равны нулю:

$$(l(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < m.$$

Кубатурную формулу, соответствующую функционалу погрешности (3.3), также будем называть ***кубатурной формулой с регулярным пограничным слоем*** .

Укажем некоторый способ построения элементарных функционалов $l^{(0)}(x/h - H\gamma)$ и $l^{(\gamma)}(x/h - H\gamma)$.

Разобьем область Ω на порции, заключенные в различных ячейках Ω_γ решетки $hH\gamma$:

$$\Omega = \bigcup_{\gamma \in B} (\Omega \cap \Omega_\gamma),$$

где B — множество тех γ, для которых $\Omega \cap \Omega_\gamma$ непусто. Очевидно, что B вложено в $B_L^{(i)} \cup B_L^{(l)}$.

Функционал $l^{(0)}(x/h - H\gamma)$ построим так же, как в § 1. Для всех $\gamma \in B_L^{(i)}$ он будет иметь носитель, вложенный в Ω. Если для

некоторого $\gamma \in B_L^{(l)}$ этот носитель также лежит в Ω, то в качестве функционала $l^{(\gamma)}(x/h - H\gamma)$ возьмем по-прежнему функционал $l^{(0)}(x/h - H\gamma)$. В противном случае поступим по-другому.

Среди всех ограниченных областей выделим класс областей с резкой границей. Будем говорить, что область Ω *имеет резкую границу*, если существует такое положительное число q, что, какова бы ни была точка $x^{(0)} \in \overline{\Omega}$ и каково бы ни было число $\rho > 0$, в шаре радиуса ρ с центром в точке $x^{(0)}$ найдется куб с длиной ребра $q\rho$, целиком лежащий в Ω. В этот класс входит, очевидно, любая область с кусочно гладкой границей.

Пусть область интегрирования Ω обладает резкой границей, а для $\gamma \in B_L^{(l)}$ носитель функционала $l^{(0)}(x/h - H\gamma)$ имеет непустое пересечение с дополнением $\overline{\Omega}$. Построим соответствующий этому γ элементарный функционал $l^{(\gamma)}(x/h - H\gamma)$. Положим

$$l^{(\gamma)}(y) = \chi_\gamma(y) - \sum_{\gamma' \in B_\gamma} c^{(\gamma)}[\gamma']\delta(y - H\gamma'), \tag{3.4}$$

где $\chi_\gamma(y)$ — характеристическая функция той части Ω_0, в которую переходит множество $\Omega \cap \Omega_\gamma$ при замене переменных $x = hH\gamma + hy$, т. е.

$$\chi_\gamma(y) = \chi_\Omega(hH\gamma + hy)\chi_{\Omega_0}(y).$$

Множество B_γ допустимых значений γ' в представлении (3.4) выберем конечным. При этом, очевидно, найдется шар радиуса L с центром в начале координат, целиком содержащий носитель $l^{(\gamma)}(y)$. Далее, во всех точках $\gamma' \in B_\gamma$, для которых узел $hH(\gamma' + \gamma)$ не принадлежит $\overline{\Omega}$, положим коэффициент $c^{(\gamma)}[\gamma']$ равным нулю. Тогда носитель функционала $l^{(\gamma)}(x/h - H\gamma)$, очевидно, целиком расположен в $\overline{\Omega}$. Оставшиеся неопределенными коэффициенты $c^{(\gamma)}[\gamma']$ зададим так, чтобы выполнялись условия ортогональности $l^{(\gamma)}(y)$ полиномам степени, меньшей s:

$$(l^{(\gamma)}(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s. \tag{3.5}$$

Покажем, что это возможно.

Как мы выяснили в гл. I, условия (3.5) равносильны системе линейных уравнений

$$S_\gamma c^{(\gamma)} = f^{(\gamma)} \tag{3.6}$$

относительно вектора неизвестных $c^{(\gamma)}$, составленного из оставшихся неопределенными коэффициентов $c^{(\gamma)}[\gamma']$. Решение системы (3.6) заведомо существует, если ранг матрицы S_γ достаточно велик и матрица имеет правую обратную. В нашем случае этого можно добиться, взяв при данном s достаточно большое L. В самом деле, по условию область Ω обладает резкой границей. Значит, найдется куб с ребром qLh, вложенный в Ω и содержащий внутри себя s^n узлов решетки $hH\gamma'$. Соответствующая матрица S_γ будет при этом вандермондовой с элементами вида $(hH\gamma^{(j)})^{\alpha^{(i)}}$, где $hH\gamma^{(j)}$ пробегает все точки решетки, лежащие в кубе. В частности, система точек $hH\gamma^{(j)}$ содержит ньютонову подсистему. В этом случае, как известно, матрица S_γ имеет правую обратную.

Отыскав решение системы (3.6), полностью построим функционал (3.4). В силу конечности множества B_γ существует постоянная A такая, что

$$\|l^{(\gamma)}(y) \mid C^*\| \leq A.$$

Ясно, что A ограничена снизу суммой модулей коэффициентов $c^{(\gamma)}[\gamma']$, т. е. зависит от порядка s.

Таким образом, для области с резкой границей сконструированы элементарные функционалы $l^{(\gamma)}(x/h - H\gamma)$ с нужными нам свойствами и, значит, доказано существование последовательности функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем.

Разложение данного функционала погрешности с регулярным пограничным слоем в сумму вида (3.3) не единственно. В качестве внутреннего элементарного функционала $l^{(0)}(x/h - H\gamma)$ можно брать любую обобщенную функцию класса $R(L, A, N)$, где $N > s$. При этом, однако, надо одновременно подбирать значения L и A, пригодные как для N, так и для s. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим разность двух функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем, построенных для одной и той же области Ω. Оказывается, эта разность представляет собой линейную комбинацию δ-функций, сосредоточенную вблизи границы $\partial\Omega$.

Теорема V.5. *Для данной области Ω разность двух функционалов погрешности с регулярным пограничным слоем толщины L и порядка s может быть представлена в виде*

$$l_1(x) - l_2(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(1)}} m^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \tag{3.7}$$

где

$$m^{(\gamma)}(y) = \sum_{\gamma' \in B\gamma} c^{(\gamma)}[\gamma']\delta(y - H\gamma').$$

Носитель обобщенной функции $m^{(\gamma)}(y)$ сосредоточен внутри шара радиуса L с центром в начале координат, а ее значения на полиномах степени, меньшей s, равны нулю:

$$(m^{(\gamma)}(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| < s.$$

Доказательство. Будем считать, что область Ω лежит внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0, соответствующего матрице решетки H. При этом ни один из узлов $hH\gamma$ не принадлежит границе Ω.

Сравним действие функционалов $l_1(x)$, $l_2(x)$ и $l_\infty(x)$ в пространстве $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$. Любую функцию $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ доопределим нулем в точках Ω_0, лежащих вне Ω. Таким образом, значение функционала $l_\infty(x)$ на $\varphi(x)$ без труда можно подсчитать.

Пусть функционалу $l_1(x)$ в разложении (3.3) соответствует внутренний элементарный функционал $l_1^{(0)}(x/h - H\gamma)$. Рассуждения, аналогичные проведенным в § 1 при выводе формулы (1.10), позволяют утверждать, что

$$l_\infty(x) = \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} l_1^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{3.8}$$

В частности, эта формула верна для всех функций $\varphi(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$. Отсюда и из разложения (3.3) получим

$$(l_1 - l_\infty, \varphi) = \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} \left(l_1^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) - l_1^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \varphi\right)$$
$$- \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} \left(l_1^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \varphi\right). \tag{3.9}$$

В этом равенстве сумма по $\gamma \in B_L^{(l)}$ тождественно нулевая, так как при этих γ носители функционала $l_1^{(0)}(x/h - H\gamma)$ и функции $\varphi(x)$ не пересекаются.

Аналогичные рассуждения можно провести для функционала погрешности с регулярным пограничным слоем $l_2(x)$. При этом

$$(l_j(x) - l_\infty(x), \varphi) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} \left(l_j^{(\gamma)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) - l_j^{(0)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right), \varphi \right),$$

где $j = 1, 2$. Вычитая первое из этих равенств из второго, будем иметь

$$(l_1 - l_2, \varphi) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} \left(m^{(\gamma)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right), \varphi \right), \tag{3.10}$$

где $m^{(\gamma)}(y) = l_1^{(\gamma)}(y) - l_1^{(0)}(y) - l_2^{(\gamma)}(y) + l_2^{(0)}(y)$. Несложно убедиться, что $m^{(\gamma)}(y)$ — это линейная комбинация δ-функций, обладающая нужными свойствами.

Носитель разности $l_1 - l_2$, очевидно, содержится в Ω, поэтому равенства (3.7) и (3.10) эквивалентны.

Теорема V.5 доказана.

Пусть натуральное число N больше s, а числа L, A подобраны так, что классы $R(L, A, s)$ и $R(L, A, N)$ непусты. Возьмем любой локальный функционал погрешности $l_*^{(0)}(y)$ из $R(L, A, N)$. Справедлива

Лемма V.1. *Любой функционал погрешности с регулярным пограничным слоем толщины $2L$ порядка s с оценкой A можно представить в виде*

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l_*^{(0)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l^{(\gamma)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right), \tag{3.11}$$

где $l^{(\gamma)}(y) \in R(L, A, s)$.

Эта формула отличается от (3.3) лишь тем, что внутренние элементарные функционалы $l_*^{(0)}(x/h - H\gamma)$ в ней обращаются в нуль на полиномах степени большей s.

Доказательство. Пользуясь приведенным в начале этого параграфа алгоритмом, построим по заданному локальному функционалу $l_*^{(0)}(y)$какой-нибудь функционал погрешности с регулярным по-

граничным слоем толщины $2L$ порядка $N-1$ с оценкой A:

$$l_1(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l_*^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} l_1^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \qquad (3.12)$$

Этот функционал, очевидно, будет иметь и порядок s. Разность $l(x) - l_1(x)$ согласно теореме V.5 можно представить в виде

$$l(x) - l_1(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} m^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Следовательно, для $l(x)$ имеет место равенство (3.11), в котором пограничные элементарные функционалы — это обобщенные функции вида

$$l^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = l_1^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + m^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right).$$

Очевидно, что $l^{(\gamma)}(y)$ принадлежит классу $R(L, A, s)$.

Лемма V.1 доказана.

Отметим, что в кубатурной формуле с регулярным пограничным слоем толщины $2L$ коэффициент $c[\gamma]$, для которого точка $hH\gamma$ удалена от границы Ω более чем на $2Lh$, равен единице. Это легко следует из сравнения функционалов $l(x)$ и $l_\infty(x)$, проведенного так же, как при доказательстве теоремы V.5.

Множество тех точек $hH\gamma$, которые или лежат вне Ω, или имеют коэффициент $c[\gamma]$, отличный от единицы, будем называть *пограничным слоем функционала* $l(x)$. Пограничный слой может быть *внутренним*, если все его точки лежат в Ω, *внешним*, если все они лежат вне Ω, и *двусторонним*, если среди точек есть как те, так и другие.

Всякий функционал, представленный в виде (3.3) и имеющий порядок больший единицы, обладает внутренним пограничным слоем.

В случае произвольной области Ω мы не даем рекомендаций, как определить, обладает ли данная кубатурная формула регулярным пограничным слоем или нет. Однако для рациональных многогранников некоторый подход к решению этого вопроса был указан в гл. III, где мы выяснили, что формальный пограничный слой эквивалентен специального вида регулярному пограничному слою.

Отметим в заключение, что свойство кубатурной формулы обладать формальным пограничным слоем может быть обнаружено за конечное число шагов, не зависящее от h.

§ 4. Асимптотические представления норм функционала погрешности с регулярным пограничным слоем

В этом параграфе мы получим представления норм произвольного функционала погрешности с регулярным пограничным слоем в пространствах $L_2^{(m)}$ и $L_2^{(m)}(\Omega)$. Эти представления асимптотически точны при стремлении шага решетки к нулю. Прежде чем доказывать соответствующие теоремы, условимся, какой должна быть область интегрирования Ω.

Пусть, как и ранее в этой главе, область Ω ограничена и лежит внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0, соответствующего матрице решетки H. Диаметр области Ω обозначим через D. Возьмем произвольную точку y, лежащую внутри или на границе области Ω, и положительное число $\eta \leq D$. Множество точек x, отстоящих от границы области Ω не более чем на η и принадлежащих шару радиуса τ с центром в y, обозначим через $B(y, \tau, \eta)$,

$$B(y, \tau, \eta) = \{x : \rho(x, \partial\Omega) \leq \eta,\ \rho(x, y) < \tau\}.$$

Объем этого множества представляет собой функцию аргументов y, τ, η; обозначим ее через $\psi(y, \tau, \eta)$.

Будем говорить, что область Ω *удовлетворяет условию регулярности*, если при некотором q, $0 < q \leq 1$, справедлива оценка

$$\psi(y, \tau, \eta) \leq K \frac{\tau^n \eta^q}{(\tau^2 + \eta^{2q})^{1/2}(D^2 + \tau^2)^{n/2}}. \tag{4.1}$$

Условие регулярности выражает собой тот факт, что приграничная полоса $\Omega''_\eta \setminus \Omega'_\eta$ распределена равномерно вдоль всей границы и при малом η мера той ее порции, которая попадает в шар радиуса τ, имеет порядок $\tau^{n-1}\eta^q$. Фиксируя $\tau > 0$ и устремляя η к нулю, несложно получить из (4.1) следующее соотношение:

$$\left|\Omega''_\eta \setminus \Omega'_\eta\right| \leq K\eta^q.$$

Иными словами, область Ω при условии (4.1) заведомо имеет порядок q толщины пограничного слоя. В частности, к ней применимы оценки из § 2 этой главы.

Для областей Ω с кусочно гладкой границей условие регулярности (4.1) выполняется при $q = 1$.

Пусть теперь функционал погрешности $l(x)$ имеет в области Ω регулярный пограничный слой толщины $2L$ порядка m с оценкой A. Иначе говоря, функционал $l(x)$ разложи́м в сумму элементарных функционалов:

$$l(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(1)}} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(2)}} l^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \qquad (4.2)$$

где $l^{(0)}(y)$ и $l^{(\gamma)}(y)$ при $\gamma \in B_L^{(2)}$ принадлежат классам $R(L, A, 2m+1)$ и $R(L, A, m)$ соответственно. Справедлива следующая

Теорема V.6. *Пусть область Ω удовлетворяет условию регулярности. Тогда норма функционала погрешности $l(x)$ в пространстве $L_2^{(m)*}$ выражается формулой*

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\| = B_{n,m}(\Omega) h^m + O(h^{m+q}), \qquad (4.3)$$

где величина $B_{n,m}(\Omega)$ определена равенством (1.23).

Доказательству теоремы V.6 предпошлем две леммы.

Лемма V.2. *Экстремальная функция $u(x)$ функционала погрешности $l(x)$ может быть представлена линейной комбинацией экстремальных функций, соответствующих элементарным функционалам $l^{(0)}(y)$ и $l^{(\gamma)}(y)$ из разложения* (4.2):

$$u(x) = \sum_{\gamma \in B_L^{(1)}} h^{2m} u^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma \in B_L^{(2)}} h^{2m} u^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \qquad (4.4)$$

Доказательство. Как мы знаем, экстремальные функции $u(x)$, $u^{(0)}(y)$, $u^{(\gamma)}(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^m u(x) = (-1)^m l(x), \quad \Delta^m u^{(0)}(y) = (-1)^m l^{(0)}(y),$$
$$\Delta^m u^{(\gamma)}(y) = (-1)^m l^{(\gamma)}(y), \quad \gamma \in B_L^{(2)}.$$

Отсюда и из (4.2) сразу следует (4.4).

Лемма V.2 доказана.

Отметим, что разложение (4.4) имеет место и для неограниченной области Ω, обладающей компактной границей. Хотя множество $B_L^{(1)}$ при этом и бесконечно, соответствующий ему ряд сходится абсолютно и равномерно. Это несложно установить, воспользовавшись неравенством $2m > n$, представлением $u^{(0)}(y)$ в виде свертки

$$u^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) = \int G\left(\frac{x}{h} - H\gamma - y\right) l^{(0)}(y)\, dy$$

и оценкой (I.2.20).

Функционал погрешности $l(x)$ можно рассматривать как элемент пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)^*$, поскольку область Ω лежит внутри фундаментального параллелепипеда Ω_0. Имея это в виду, разло́жим функционал погрешности $l_\infty(x)$, соответствующий оптимальной в $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ кубатурной формуле с решеткой узлов $hH\gamma$, в сумму элементарных функционалов:

$$l_\infty(x) = \sum_{hH\gamma\in\Omega_0} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right),$$

а затем вычтем из последнего равенства соотношение (4.2). Получим представление разности $l_*(x) = l_\infty(x) - l(x)$ в виде линейной комбинации элементарных функционалов:

$$l_*(x) = \sum_{\gamma\in B_L^{(3)}} l^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} l_*^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right). \tag{4.5}$$

Здесь множество $B_L^{(3)} = B_L^{(e)}$ состоит из тех γ, для которых точка $hH\gamma$ лежит внутри Ω_0 на расстоянии от границы Ω, большем чем Lh. Элементарный функционал $l_*^{(\gamma)}(y)$, очевидно, принадлежит классу $R(L, 2A, m)$. Из разложения (4.5) сразу следует

Лемма V.3. *Экстремальная функция $u_*(x)$ функционала $l_*(x)$ представима формулой*

$$u_*(x) = \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} h^{2m} u_*^{(\gamma)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right) + \sum_{\gamma\in B_L^{(3)}} h^{2m} u^{(0)}\left(\frac{x}{h} - H\gamma\right), \tag{4.6}$$

где $u^{(0)}(y)$ и $u_*^{(\gamma)}(y)$ — экстремальные функции для $l^{(0)}(y)$ и $l_*^{(\gamma)}(y)$ соответственно.

Доказательство теоремы V.6. Представим экстремальную функцию $u(x)$ функционала $l(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}$ в виде разности:

$$u(x) = u_\infty(x) - u_*(x) = h^{2m} u^{(\infty)}\left(\frac{x}{h}\right) - u_*(x).$$

Напомним, что функция $u_\infty(x)$ определена ранее равенством (1.3), а функция $u^{(\infty)}(x)$ совпадает с $u_\infty(x)$ при $h = 1$. Квадрат нормы функционала погрешности $l(x)$ можно получить по формуле

$$\left\| l \mid L_2^{(m)*} \right\|^2 = (l, u) = (l(x), u_\infty(x)) - (l, u_*). \tag{4.7}$$

Рассмотрим по очереди обе величины в правой части этого равенства. Вычисляя первую из них, воспользуемся неотрицательностью функции $u_\infty(x)$, а также тем, что в узлах $hH\gamma$ она обращается в нуль. Поэтому

$$(l, u_\infty) = \int\limits_\Omega u_\infty(x)\, dx = h^{2m} \int\limits_\Omega u^{(\infty)}\left(\frac{x}{h}\right) dx. \tag{4.8}$$

Интеграл в правой части (4.8) разобьем на два: по множеству Ω_1, представляющему собой объединение элементарных ячеек Ω_γ решетки $hH\gamma$, целиком лежащих внутри Ω, и по множеству Ω_2, являющемуся дополнением к Ω_1 в Ω:

$$\int\limits_\Omega u_\infty(x)\, dx = \int\limits_{\Omega_1} u_\infty(x)\, dx + \int\limits_{\Omega_2} u_\infty(x)\, dx. \tag{4.9}$$

Пусть Ω_γ вложено в Ω_1, тогда из (1.3) следует равенство

$$h^{2m} \int\limits_{\Omega_\gamma} u^{(\infty)}\left(\frac{x}{h}\right) dx = h^{2m+n} \int\limits_{\Omega_0} u^{(\infty)}(y)\, dy = h^{2m+n} B_{n,m}^2. \tag{4.10}$$

Пусть в Ω_1 содержится ровно N_1 различных ячеек Ω_γ, тогда из (4.10) получим

$$\int\limits_{\Omega_1} u_\infty(x)\, dx = B_{n,m}^2 N_1 h^{n+2m}. \tag{4.11}$$

Далее, интеграл от $u_\infty(x)$ по Ω_2 заменим интегралом по большему множеству, получаемому объединением всех ячеек Ω_γ, имеющих непустое пересечение с границей Ω. Если общее число таких ячеек равно N_2, то справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega_2} u_\infty(x)\,dx\right| \le B^2_{n,m} N_2 h^{n+2m}. \tag{4.12}$$

Вспомним теперь, что область Ω по условию имеет порядок q толщины пограничного слоя. Поэтому справедливы соотношения

$$N_1 h^n = |\Omega|(1 + O(h^q)), \quad N_2 h^n = O(h^q).$$

Подставляя их в (4.11) и (4.12), получим из (4.8), (4.9) асимптотически точное равенство

$$(l, u_\infty) = B^2_{n,m}(\Omega) h^{2m} + O(h^{2m+q}). \tag{4.13}$$

Оценим теперь значение функционала $l(x)$ на функции $u_*(x)$. Для этого воспользуемся разложениями (4.2) и (4.6), а также введенным в гл. IV обозначением $\Phi(x \mid l_1, l_2)$ и равенством (IV.4.25). Получим

$$\begin{aligned}(l, u_*) = &\sum_{\gamma\in B_L^{(1)}} \sum_{\gamma'\in B_L^{(3)}} \Phi(x_{\gamma,\gamma'} \mid l^{(0)}, \tilde{l}^{(0)}) \\ &+ \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} \sum_{\gamma'\in B_L^{(3)}} \Phi(x_{\gamma,\gamma'} \mid l^{(\gamma)}, \tilde{l}^{(0)}) \\ &+ \sum_{\gamma\in B_L^{(1)}} \sum_{\gamma'\in B_L^{(2)}} \Phi(x_{\gamma,\gamma'} \mid l^{(0)}, \tilde{l}^{(\gamma')}) \\ &+ \sum_{\gamma\in B_L^{(2)}} \sum_{\gamma'\in B_L^{(2)}} \Phi(x_{\gamma,\gamma'} \mid l^{(\gamma)}, \tilde{l}^{(\gamma')}).\end{aligned}$$

Здесь через $x_{\gamma,\gamma'}$ обозначена разность $hH\gamma' - hH\gamma$.

Применив лемму IV.4 об оценке тройной свертки, промажорируем погрешность (l, u_*) следующим образом:

$$|(l, u_*)| \le K(U_{1,3} + U_{1,2} + U_{2,3} + U_{2,2}), \tag{4.14}$$

где через $U_{k,m}$ обозначена двойная сумма вида

$$U_{k,m} = \sum_{\gamma \in B_L^{(k)}} \sum_{\gamma' \in B_L^{(m)}} \frac{h^{2n+s_{k,m}}}{(h^2 + |x_{\gamma,\gamma'}|^2)^{(n+p_{k,m})/2}}, \tag{4.15}$$

а числа $s_{k,m}$, $p_{k,m}$ задаются равенствами

$$s_{1,3} = 4m+2, \quad s_{1,2} = s_{2,3} = 3m+1, \quad s_{2,2} = 2m, \quad p_{k,m} = s_{k,m} - 2m.$$

Вместе с числами $U_{k,m}$ рассмотрим систему интегралов

$$J_{k,m} = \int\limits_{\Omega^{(k)}} \int\limits_{\Omega^{(m)}} \frac{h^{s_{k,m}}}{(h^2 + |x-y|^2)^{(n+p_{k,m})/2}}\, dxdy. \tag{4.16}$$

Здесь через $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ и $\Omega^{(3)}$ обозначены соответственно область Ω, граничная полоса $\Omega''_{Lh} \setminus \Omega'_{Lh}$ и дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Покажем, что существует такая постоянная K, что для всех рассматриваемых значений k и m справедливо неравенство

$$U_{k,m} \le K J_{k,m}. \tag{4.17}$$

Для этого оценим снизу значение $J_{k,m}$ суммой интегралов вида

$$J_{k,m}^{\gamma,\gamma'} = \int\limits_{\Omega^{(\gamma)}} \int\limits_{\Omega^{(\gamma')}} \frac{h^{s_{k,m}}}{(h^2 + |x-y|^2)^{(n+p_{k,m})/2}}\, dxdy, \tag{4.18}$$

взятых по элементарным ячейкам Ω_γ, $\Omega_{\gamma'}$ решетки $hH\gamma$. Несложно убедиться, что при $h \to 0$ имеет место формула

$$J_{k,m} = \Big(\sum_{\gamma \in B_L^{(k)}} \sum_{\gamma' \in B_L^{(m)}} J_{k,m}^{\gamma,\gamma'} \Big)(1 + O(h^q)). \tag{4.19}$$

Поскольку объем прямого произведения элементарных ячеек Ω_γ и $\Omega_{\gamma'}$ равен h^{2n}, интеграл (4.18) по теореме о среднем можно записать в виде

$$J_{k,m}^{\gamma,\gamma'} = \frac{h^{2n+s_{k,m}}}{(h^2 + |x_c - y_c|^2)^{(n+p_{k,m})/2}}, \tag{4.20}$$

где $x_c \in \Omega_\gamma$ и $y_c \in \Omega_{\gamma'}$.

Далее, при любых $x_c \in \Omega_\gamma$ и $y_c \in \Omega_{\gamma'}$ справедлива двусторонняя оценка

$$M_1(|x_{\gamma,\gamma'}|^2 + h^2) \le |x_c - y_c|^2 \le M_2(|x_{\gamma,\gamma'}|^2 + h^2).$$

Из этой оценки, формул (4.20), (4.19) и определения (4.15) следует неравенство (4.17).

Оценим интегралы $J_{k,m}$. Начнем с $J_{1,3}$. Пусть $x \in \Omega^{(1)}$ и $y \in \Omega^{(3)}$. Вводя сферические координаты с центром в точке x, получим

$$\int\limits_{\Omega^{(3)}} \frac{h^{4m+2}}{(h^2 + |x-y|^2)^{n/2+m+1}}\, dy \le K \int\limits_{\rho(x)}^{\infty} \frac{h^{4m+2} r^{n-1}}{(h^2 + r^2)^{n/2+m+1}}\, dr, \quad (4.21)$$

где $\rho(x)$ — расстояние от x до границы области Ω. Пользуясь тем, что при всех положительных r и h имеют место соотношения

$$r < r + h, \quad r^2 + h^2 \ge (r+h)^2/2,$$

видим, что правая часть (4.21) допускает мажоранту вида

$$K h^{4m+2} \int\limits_{\rho(x)}^{\infty} (r+h)^{-2m-3}\, dr = K h^{4m+2} (\rho(x) + h)^{-2m-2}.$$

Учитывая это обстоятельство, получаем

$$J_{1,3} \le K \int\limits_{\Omega} h^{4m+2} (\rho(x) + h)^{-2m-2}\, dx = K h^{4m+2} \int\limits_{0}^{D_1} \frac{d\varphi(\rho)}{(\rho + h)^{2m+2}}. \quad (4.22)$$

Здесь D_1 — максимально возможное значение $\rho(x)$ при $x \in \Omega$, а $\varphi(\eta)$ — объем множества $\{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) \le \eta\}$.

Величину $\varphi(\eta)$ оценим с помощью неравенства (4.1). Взяв любую точку x внутри Ω, будем иметь

$$\varphi(\eta) \le \psi(x, D, \eta) \le K \eta^q.$$

Поэтому

$$J_{1,3} \le Kh^{4m+2}\frac{\varphi(D_1)}{(D_1+h)^{2m+2}} + Kh^{4m+2}\int\limits_0^{D_1}\frac{\rho^q\,d\rho}{(\rho+h)^{2m+3}} \le Kh^{4m+2}$$

$$+ Kh^{4m+2}\int\limits_0^{D_1}(\rho+h)^{q-2m-3}\,d\rho \le Kh^{4m+2}(1+h^{q-2m-2}) \le Kh^{q+2m}. \tag{4.23}$$

Оценим остальные интегралы $J_{k,m}$. Очевидно, что для $j=1$ или $j=3$

$$\int\limits_{\Omega^{(j)}}\frac{h^{3m+1}}{(h^2+|x-y|^2)^{(m+n+1)/2}}\,dx \le K\int\limits_0^{\infty}\frac{h^{3m+1}r^{n-1}\,dr}{(h^2+r^2)^{(m+n+1)/2}}$$

$$\le Kh^{3m+1}\int\limits_0^{\infty}(r+h)^{-m-2}\,dr \le Kh^{2m}. \tag{4.24}$$

Взяв здесь j равным единице, из (4.16) получим

$$J_{1,2} \le Kh^{2m}|\Omega^{(2)}| \le Kh^{2m+q}. \tag{4.25}$$

Положив в (4.24) j равным трем, приходим к оценке

$$J_{2,3} \le Kh^{2m}|\Omega^{(2)}| \le Kh^{2m+q}. \tag{4.26}$$

Промажорируем последний интеграл $J_{2,2}$. Пусть точка x принадлежит полосе $\Omega^{(2)}$, $\rho(x)$ обозначает расстояние от x до границы области Ω, а D_1 — максимальное значение $\rho(x)$ при $x \in \Omega^{(2)}$. Проводя те же рассуждения, что и при оценке интеграла $J_{1,3}$, получаем формулу

$$\int\limits_{\Omega^{(2)}}\frac{h^{2m}}{(h^2+|x-y|^2)^{n/2}}\,dy = h^{2m}\int\limits_0^{D_1}\frac{d_\rho\psi(x,\rho,(L+1)h)}{(h^2+\rho^2)^{n/2}}$$

Интегрируя ее по частям и пользуясь оценкой (4.1), приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega^{(2)}}\frac{h^{2m}}{(h^2+|x-y|^2)^{n/2}}\,dy \le Kh^{2m+q}.$$

Интегрируя обе его части по $x \in \Omega^{(2)}$, получаем

$$|J_{2,2}| \leq Kh^{2m+2q}.$$

Двойные суммы $U_{k,m}$ согласно неравенству (4.17) также не превосходят величины Kh^{2m+q}. В соответствии с (4.14) аналогичная оценка имеет место и для погрешности (l, u_*):

$$|(l, u_*)| \leq Kh^{2m+q}.$$

Из этой оценки, представления (4.7) и формулы (4.13) заключаем, что асимптотическое выражение (4.3) действительно имеет место.

Теорема V.6 доказана.

Из (4.3) следует, в частности, что кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в пространстве $L_2^{(m)}$. Выясним, сохранится ли это свойство при переходе к пространству $L_2^{(m)}(\Omega)$, где Ω — область интегрирования, обладающая помимо регулярности еще одним свойством. В § 2 мы ввели специальный оператор продолжения функции $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(\Omega)$ до функции $\overline{\varphi}(x) \in L_2^{(m)}$. Будем считать, что этот оператор непрерывен, т. е. существует постоянная K_1 такая, что для любой $\varphi \in L_2^{(m)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\overline{\varphi}(x) \mid L_2^{(m)}\| \leq K_1 \|\varphi \mid L_2^{(m)}(\Omega)\|.$$

В этих предположениях верна

Теорема V.7 (В. И. Половинкин). *Норма в $L_2^{(m)}(\Omega)^*$ функционала погрешности $l(x)$ с регулярным пограничным слоем в Ω допускает следующее асимптотическое представление:*

$$\|l \mid L_2^{(m)}(\Omega)^*\| = B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}). \tag{4.27}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что для нормы $l(x)$ в $L_2^{(m)}(\Omega)^*$ справедлива аналогичная (1.28) оценка снизу:

$$\|l \mid L_2^{(m)}(\Omega)^*\| \geq B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}). \tag{4.28}$$

Таким образом, для обоснования (4.27) достаточно доказать, что величина в правой части мажорирует норму $l(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)^*$. Прежде чем это сделать, получим ряд свойств экстремальной функции $\psi_l(x)$ функционала $l(x)$.

Как мы знаем, она задается сверткой

$$\psi_l(x) = \int G(x-y)l(y)\,dy,$$

удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ уравнению

$$\Delta^m \psi_l(x) = (-1)^m l(x),$$

а ее производные порядка m убывают на бесконечности не медленнее чем $|x|^{-n}\ln|x|$. Отсюда следует, что ее продолжение $\overline{\psi}_l(x)$ с области Ω на всё $\mathbb{R}^n$ совпадает с $\psi_l(x)$ и вне Ω.

Далее, равенство (4.3) эквивалентно следующему:

$$\{\psi_l, \psi_l\}_{L_2^{(m)}} = B^2_{n,m}(\Omega)h^{2m} + O(h^{2m+q}). \tag{4.29}$$

Рассмотрим функцию $u_\infty(x)$, определенную равенством (1.3) и экстремальную для $l_\infty(x)$ в $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Мы исследовали ее продолжение $\bar{u}_\infty(x)$ в § 2 этой главы. Скалярное произведение $\varphi_l(x)$ и $\bar{u}_\infty(x)$ удобно представить по формуле (4.13):

$$\{\psi_l, \bar{u}_\infty\}_{L_2^{(m)}} = B^2_{n,m}(\Omega)h^{2m} + O(h^{2m+q}). \tag{4.30}$$

Вычитая из (4.30) равенство (4.29), получаем асимптотическое представление еще одного скалярного произведения:

$$\{\psi_l, \bar{u}_\infty(x) - \overline{\psi}_l(x)\}_{L_2^{(m)}} = O(h^{2m+q}). \tag{4.31}$$

Возводя в квадрат обе части равенства (2.12), приходим к соотношению

$$\left\|\bar{u}_\infty \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = B^2_{n,m}(\Omega)h^{2m} + O(h^{2m+q}).$$

Вычитая отсюда (4.30), запишем равенство

$$\{\bar{u}_\infty(x) - \psi_l(x), \bar{u}_\infty(x)\}_{L_2^{(m)}} = O(h^{2m+q}). \tag{4.32}$$

Из (4.32) и (4.31) еще одним вычитанием получим

$$\{\bar{u}_\infty - \psi_l, \bar{u}_\infty - \psi_l\}_{L_2^{(m)}} = O(h^{2m+q}). \tag{4.33}$$

Разложим функцию $\psi_l(x)$ в сумму проекций на подпространства $\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \Omega)$ и $H_2^{(m)}(\mathbb{R}^n \mid \partial\Omega)$:

$$\psi_l(x) = \psi_l^{(0)}(x) + \psi_l^{(1)}(x).$$

Выясним, как ведут себя $L_2^{(m)}$-нормы проекций $\psi_l^{(0)}$ и $\psi_l^{(1)}$ при малых h. Очевидно, что

$$\|\psi_l^{(1)} \mid L_2^{(m)}\| \le \|\bar{u}_\infty^{(1)} \mid L_2^{(m)}\| + \|\bar{u}_\infty^{(1)} - \psi_l^{(1)} \mid L_2^{(m)}\|.$$

Применяя к первой норме в правой части неравенство (2.20), а второе слагаемое оценивая с помощью (4.33), получим

$$\|\psi_l^{(1)} \mid L_2^{(m)}\| \le Kh^{m+q/2}. \tag{4.34}$$

Функции $\psi_l^{(0)}$ и $\psi_l^{(1)}$ ортогональны в $L_2^{(m)}$, и поэтому

$$\|\psi_l^{(0)} \mid L_2^{(m)}\|^2 = \|\psi_l \mid L_2^{(m)}\|^2 - \|\psi_l^{(1)} \mid L_2^{(m)}\|^2.$$

Первая норма в правой части представлена формулой (4.29), для второй справедлива оценка (4.34). Значит, имеет место равенство

$$\|\psi_l^{(0)} \mid L_2^{(m)}\| = B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}). \tag{4.35}$$

Теперь мы в состоянии промажорировать норму $l(x)$ в $L_2^{(m)*}(\Omega)$. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит единичной сфере пространства $L_2^{(m)}(\Omega)$. Разложим ее в сумму:

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \varphi^{(1)}(x),$$

где $\varphi^{(0)}(x) \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(\Omega)$ и $\varphi^{(1)}(x) \in H_2^{(m)}(\Omega)$. Продолжая $\varphi(x)$ на всё $\mathbb{R}^n$ с минимальной нормой, будем иметь

$$(l, \varphi) = (l, \overline{\varphi}) = \{\psi_l^{(0)}, \overline{\varphi}^{(0)}\}_{L_2^{(m)}} + \{\psi_l^{(1)}, \overline{\varphi}^{(1)}\}_{L_2^{(m)}}. \tag{4.36}$$

Оценим скалярные произведения в правой части (4.36).

Применив сначала неравенство Коши — Буняковского, затем оценку (4.34) и воспользовавшись непрерывностью рассматриваемого оператора продолжения из $L_2^{(m)}(\Omega)$ в $L_2^{(m)}$, получим

$$\left|\left\{\psi_l^{(1)}, \overline{\varphi}^{(1)}\right\}_{L_2^{(m)}}\right| \leq K h^{m+q/2} \left\|\varphi^{(1)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|. \tag{4.37}$$

Имея в виду, что $\left\|\overline{\varphi}^{(0)} \mid L_2^{(m)}\right\| = \left\|\varphi^{(0)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|$, а также пользуясь равенством (4.35), промажорируем оставшееся скалярное произведение из (4.36):

$$\left|\left\{\psi_l^{(0)}, \overline{\varphi}^{(0)}\right\}_{L_2^{(m)}}\right| \leq [B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q})]\left\|\varphi^{(0)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\|. \tag{4.38}$$

Так как функция $\varphi(x)$ принадлежит единичной сфере пространства $L_2^{(m)}(\Omega)$, найдется такой угол θ, что

$$\left\|\varphi^{(0)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\| = \cos\theta, \quad \left\|\varphi^{(1)} \mid L_2^{(m)}(\Omega)\right\| = \sin\theta.$$

Учитывая это, из (4.36)–(4.38) получим

$$\begin{aligned} |(l, \varphi)| &\leq \max_{\theta}[K h^{m+q/2} \sin\theta + (B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}))\cos\theta] \\ &= B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}). \end{aligned}$$

Иными словами, справедлива следующая оценка нормы $l(x)$ сверху:

$$\left\|l \mid L_2^{(m)}(\Omega)^*\right\| \leq B_{n,m}(\Omega)h^m + O(h^{m+q}).$$

Из этой оценки и (4.28) следует (4.27).

Теорема V.7 доказана.

В заключение этой главы отметим, что асимптотически точные представления норм функционала погрешности с регулярным пограничным слоем в смысле определения, данного в гл. III, можно получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в работе [100].

Глава VI

Универсальная асимптотическая оптимальность

Кубатурная формула, имеющая оптимальный порядок сходимости в заданном банаховом пространстве, конечно, сохраняет это свойство при эквивалентных перенормировках. Часто оказывается верным более сильное утверждение: формула является оптимальной по порядку в разных не эквивалентных друг другу пространствах. Например, однородный функционал погрешности порядка M имеет оптимальный порядок сходимости $O(h^m)$ во всех пространствах $W_p^{(m)}$ при $m \in (n, M]$, $p \in [1, \infty]$. Был замечен и более глубокий факт: одна и та же кубатурная формула может быть асимптотически оптимальной сразу во многих пространствах, не обязательно эквивалентных друг другу. Ранее мы убедились в этом на примере формулы с функционалом погрешности $l_\infty(x)$, действующим на периодических пространствах $\widetilde{B}$, определенных в гл. IV, § 1. Подобные результаты позволили предположить, что понятие асимптотической оптимальности устойчиво к выбору пространств функций, а также выдвинуть гипотезу существования *универсально асимптотически оптимальных формул.* В нашем понимании это формулы, сохраняющие свойство асимптотической оптимальности на широком классе пространств интегрируемых функций.

§ 1. Достаточное условие асимптотической оптимальности в гильбертовом пространстве

Правомерность понятия универсальной асимптотической оптимальности обоснована И. Бабушкой на примере пространств $\widetilde{H}_2^{\mu}$. С. Л. Соболев установил универсальную оптимальность кубатурной формулы с функционалом погрешности $l_\infty(x)$ в пространствах $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Позднее появилось много работ, устанавливающих асимптотическую оптимальность формул с регулярным пограничным слоем в различных конкретных пространствах функций.

Однако, в конечном счете, оказалось, что свойство данного функционала погрешности быть асимптотически оптимальным существенно зависит от выбора нормы. Первый подтверждающий это пример построил В. И. Половинкин. Он показал, что в периодическом случае кубатурная формула с функционалом погрешности $l_\infty(x)$ не является асимптотически оптимальной в пространствах $\widetilde{W}_p^{(m)}$, $p \neq 2$.

Приведем доказательство этого факта, ограничившись одномерным случаем, четным m и $p = 2q/(2q-1)$ с целым $q > 1$. Норма в пространстве $\widetilde{W}_p^{(m)}$ задается равенством

$$\|f \mid \widetilde{W}_p^{(m)}\| = \left\{ \int_0^1 |f(x) + (-1)^{m/2} D^m f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

Пусть $1/h$ — целое число, тогда оптимальный в $\widetilde{W}_p^{(m)}$ функционал имеет вид

$$l_h^0(x) = 1 - c_0 h \sum_{k=1}^{1/h} \delta(x - hk) = (1 - c_0) + c_0 l_\infty(x) = \sum_s L_0[s] e^{i2\pi x s}.$$

Его коэффициенты Фурье определены равенством

$$L_0[s] = \left(l_h^0(x), e^{-i2\pi x s}\right) = \begin{cases} 1 - c_0 & \text{при} \quad s = 0, \\ -c_0 & \text{при} \quad s, \text{ кратном } 1/h, \\ 0 & \text{при} \quad \text{остальных } s. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|l_h^0 \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\| = \Big\|1 - c_0 - c_0 \sum_{s\neq 0} e^{i2\pi xs/h}\{1 + (2\pi s/h)^m\}^{-1} \mid \widetilde{L}_{2q}\Big\|.$$

Удобно обозначить

$$1 - c_0 = \varepsilon, \quad g_m(x) = \sum_{s\neq 0} e^{i2\pi xs/h}\{1 + (2\pi s/h)^m\}^{-1}.$$

Функция от ε, представленная интегралом

$$\|l_h^0 \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\|^{2q} = \int_0^1 (\varepsilon - (1-\varepsilon)g_m(x))^{2q}\,dx$$

$$= \int_0^1 [\varepsilon(1 + g_m(x)) - g_m(x)]^{2q}dx,$$

является вещественным многочленом четной степени. Необходимое условие минимума этой функции при некотором ε запишется в виде

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^1 [\varepsilon(1 + g_m(x)) - g_m(x)]^{2q}\,dx$$

$$= 2q\int_0^1 [\varepsilon(1 + g_m(x)) - g_m(x)]^{2q-1}(1 + g_m(x))\,dx = 0,$$

или

$$\sum_{l=0}^{2q-1}\binom{2q-1}{l}\varepsilon^{2q-1-l}\int_0^1 (1 + g_m(x))^{2q-l}(-g_m(x))^l\,dx = 0.$$

Заметим, что $\int_0^1 g_m(x)\,dx = 0$, а при $l > 1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int_0^1 g_m^l(x)\,dx = h^{ml}\sum_{\substack{s_1\cdot\ldots\cdot s_l\neq 0\\ s_1+\cdots+s_l=0}}\prod_{j=1}^{l}[h^m + (2\pi s_j)^m]^{-1} = b_l h^{ml}(1 + o(1)),$$

в котором

$$b_l = \sum_{\substack{s_1\cdot\ldots\cdot s_l\neq 0\\ s_1+\cdots+s_l=0}} \prod_{j=1}^{l}(2\pi s_j)^{-m} > 0.$$

Поэтому для неизвестной $\gamma = \varepsilon h^{-m}$ получаем уравнение

$$\sum_{l=0}^{2q-1}\binom{2q-1}{l}\gamma^{2q-1-l}(-1)^l b_l(1+o(1)) = 0.$$

Очевидно, что при $q > 1$ у него не существует решения порядка $o(1)$ при $h \to 0$ и все возможные решения γ этого уравнения имеют порядок $O(1)$. Одно из них — это величина $\gamma_0(1+o(1))$ с ненулевой постоянной γ_0, которой соответствует оптимальное значение c_0, задаваемое равенством

$$c_0(h) = 1 - \gamma_0 h^m(1+o(1)).$$

Поэтому можно записать оценку

$$\begin{aligned}\left\|l_\infty - l_h^0 \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\| &= \left\|(c_0-1)(1-l_\infty) \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\| \\ &\geq |1-c_0|\left(1-\left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|\right) = |\gamma_0|h^m(1+o(1)).\end{aligned}$$

Имеет место также аналогичная оценка сверху. В гл. IV доказано, что норма $\left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|$ является величиной порядка $O(h^m)$ и при этом

$$\frac{|\gamma_0|h^m(1+o(1))}{\left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|} = \gamma_1(1+o(1))$$

с некоторой постоянной $\gamma_1 > 0$.

Покажем, что l_∞ не асимптотически оптимален в $\widetilde{W}_p^{(m)}$, т. е. отношение $\left\|l_h^0 \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\| / \left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|$ не стремится к 1 при $h \to 0$. Предположим противное и, введя обозначения

$$\|e\| = \|e \mid \widetilde{L}_{2q}\|, \quad \widetilde{G}_m(x) = \sum_k \frac{e^{i2\pi kx}}{[1+(2\pi k)^m]},$$

$$e^0(x) = \frac{(l_h^0(y), \widetilde{G}_m(x-y))}{\left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|}, \quad e^1(x) = \frac{(l_\infty(y), \widetilde{G}_m(x-y))}{\left\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\right\|},$$

получим $\|e^0\| = 1 + o(1)$, $\|e^1\| = 1$. Выше было доказано, что

$$\|e^0 - e^1\| = \frac{|1 - c_0|}{\|l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\|}(1 + o(1)) = \gamma_1 + o(1), \quad \gamma_1 > 0.$$

Используем обобщение неравенства Кларксона, справедливое для любых $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\rho = 2q > 2$ (см. [167, гл. III, § 3]):

$$\left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^\rho + \left\|\frac{\varphi - \psi}{2}\right\|^\rho \le \left\{\frac{\|\varphi\|^{\rho/(\rho-1)} + \|\psi\|^{\rho/(\rho-1)}}{2}\right\}^{\rho-1}$$

Взяв $\varphi = e^0$, $\psi = e^1$, имеем

$$\left\|\frac{e^0 + e^1}{2}\right\|^{2q} + \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^{2q} + o(1) \le 1 + o(1).$$

Из оптимальности функционала погрешности l_h^0 вытекает, что

$$\left\|\frac{e^0 + e^1}{2}\right\| \ge \|e^0\| = 1 + o(1).$$

Тогда $1 + (\gamma_1/2)^{2q} \le 1 + o(1)$ или $\gamma_1 = 0$, что противоречит условию $\gamma_1 > 0$. Значит, $l_\infty(x)$ не асимптотически оптимален в $\widetilde{W}_p^{(m)}$ при $p = 2q/(2q-1)$, $q > 1$.

Опишем класс кубатурных формул, которые будут исследованы в этой главе. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и матрицы H будем рассматривать кубатурные формулы вида

$$I^*(f) = h^n|H| \sum_{hH\gamma \in \Omega} c_\gamma(h) f(hH\gamma)$$

с условиями

$$\exists K\, \forall h\, \forall \gamma \quad |c_\gamma(h)| \le K, \tag{1.1}$$

$$\exists L\, \forall h \quad \rho(hH\gamma, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \ge Lh \Rightarrow c_\gamma(h) = 1. \tag{1.2}$$

Будем называть их *формулами с ограниченным пограничным слоем* (ОПС-формулы). Понятие ОПС-формул возникло как обобщение понятия формул с регулярным пограничным слоем.

Покажем, что существуют ОПС-формулы, универсально асимптотически оптимальные в пространствах $W_p^{(m)}$ и в классах Гёльдера $(\widetilde{C}^\gamma)^m$, снабженных одной из эквивалентных нормировок. В частности, формула из разобранного выше примера является асимптотически оптимальной в $\widetilde{W}_p^{(m)}$ с нормой

$$\|f\| = \left\| f(x) - \int_0^1 f(x)\,dx \mid \widetilde{W}_p^{(m)} \right\| + \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right|.$$

Асимптотически оптимальные формулы будем исследовать в бесселевых шкалах пространств $\widetilde{B}_0^\mu = F^{-1}\mu F \widetilde{B}_0$. Определение бесселевой шкалы дано в гл. IV, § 1. Нулевое пространство $\widetilde{B}_0$ содержит $\widetilde{C}$ и вложено в $\widetilde{L}_1$. Пространство $\widetilde{B}_0$ невесовое, т. е. его норма инвариантна по сдвигам аргумента функции. От функции μ потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям степенного роста (IV.1.31), монотонности (IV.1.32), согласованности с решеткой (IV.1.33) и мультипликаторности (IV.2.35).

Потребуем дополнительно, чтобы функция μ была *гипоэллиптической*, т. е. чтобы $\mu(\xi)$ была бесконечно дифференцируемой при $|\xi| \geq T$, а ее производные оценивались следующим образом:

$$\exists \delta > 0\, \forall \alpha\, \exists K_\alpha \quad |D^\alpha \mu(\xi)| \leq K_\alpha (1 + |\xi|)^{-\delta|\alpha| + m_2}. \tag{1.3}$$

Число m_2 в этой оценке такое же, как в оценках (IV.1.31) и (IV.1.32).

Отметим, что все эти ограничения выполняются для обычных пространств $\widetilde{W}_p^{(m)}$ и гёльдеровых классов $(\widetilde{C}^\gamma)^m$.

Некоторые из условий наложены на μ по техническим причинам. Наиболее существенными являются, по нашему мнению, условия инвариантности нормы по сдвигам, степенного роста и гипоэллиптичности μ.

Укажем для любой ограниченной области с кусочно гладкой границей универсально асимптотически оптимальную ОПС-формулу. Она не обязательно будет обладать регулярным пограничным слоем, но любая формула с регулярным пограничным слоем порядка $M > m_2$ будет универсально асимптотически оптимальной.

Главным результатом этой главы является, на наш взгляд, получение простых достаточных условий универсальной асимптотической оптимальности. Поясним, в чем они состоят.

В классе ОПС-формул любые две из них отличаются друг от друга на функционал, сосредоточенный в узкой приграничной полосе $\Omega_h = \{x : \rho(x, \delta\Omega) \le Lh\}$. А в естественных классах, например в пространствах $\widetilde{W}_p^{(m)*}$, главный член асимптотики нормы оптимального по порядку функционала непрерывно зависит от объема носителя этого функционала. Это, по существу, следствие неравенства Гёльдера:

$$\|f \mid L_{p_1}(\Omega)\| \le |\Omega|^{1/p_1 - 1/p_2} \|f \mid L_{p_2}(\Omega)\|, \quad p_1 > p_2,$$

перенесенного на нормы функционалов в сопряженных пространствах. Заметим еще, что в подклассе оптимальных по порядку функционалов и разность $l_h^{\Omega,1} - l_h^{\Omega,2}$ будет по крайней мере того же порядка. Для ОПС-формул малость объема носителя разности их функционалов погрешности приводит к увеличению порядка малости нормы этой разности. Таким образом, в пересечении классов ОПС-формул и оптимальных по порядку формул любые две последовательности функционалов погрешности отличаются друг от друга на слагаемые более высоких порядков малости. Иными словами, на классе ОПС-формул порядковая оптимальность совпадает с асимптотической.

Обоснование этого утверждения будет дано при дополнительных ограничениях, в основном, технического характера. Отметим пока лишь одно из них, которое мы считаем принципиальным. Для того чтобы установить непрерывность норм последовательности функционалов погрешности по объему носителей в рассматриваемом пространстве B_1 нам нужна равномерная по носителям порядковая оптимальность этих функционалов в пространстве B_2, компактно вложенном в B_1.

Проведем доказательство для бесселевой шкалы $\widetilde{B}_0^\mu$ гильбертовых пространств с основным пространством $\widetilde{B}_0 = \widetilde{L}_2$. Эту шкалу принято обозначать через $\widetilde{H}_2^\mu$. Пространство $\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$ состоит из сужений на область Ω, лежащую в фундаментальном параллелепипеде Ω_0, функций f из $\widetilde{H}_2^\mu$. При этом норма задается равенством

$$\|f \mid \widetilde{H}_2^\mu(\Omega)\| = \inf \|g \mid \widetilde{H}_2^\mu\|.$$

Нижняя грань берется по всем $g \in \widetilde{H}_2^\mu$, удовлетворяющим условию $g|_\Omega = f|_\Omega$. Оказывается, инфимум здесь достигается, а функция,

реализующая его, обладает вне Ω дополнительными нужными нам свойствами.

Пусть P_Ω — оператор, действующий в сопряженном к $\widetilde{H}_2^\mu$ подпространстве $\widetilde{H}_2^{1/\mu}$ и ортогонально проектирующий на подпространство элементов, сосредоточенных в Ω. Пусть, кроме того, P_Ω^* — сопряженный к P_Ω оператор, действующий в $\widetilde{H}_2^\mu$.

Лемма VI.1. *Оператор P_Ω^* отображает $\widetilde{H}_2^\mu$ на $\widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$, и при этом*

$$\|P_\Omega^* f \mid \widetilde{H}_2^\mu(\Omega)\| = \inf\{\|g \mid \widetilde{H}_2^\mu\| : g \in \widetilde{H}_2^\mu,\, g|_\Omega = f|_\Omega\}.$$

Пусть $|\mu(D)|^2$ — псевдодифференциальный оператор, определяемый равенством

$$|\mu(D)|^2 = F^{-1}|\mu(\xi)|^2 F,$$

где F — преобразование Фурье, и действующий из $\widetilde{H}_2^\mu$ в $\widetilde{H}_2^{1/\mu}$. Тогда для любой функции $f \in \widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$ имеет место равенство

$$(|\mu(D)|^2 f)|_{\Omega_0 \setminus \Omega} = 0.$$

Доказательство. Оператор P_Ω^* является проектором как сопряженный к проектору. Обозначим через $[\cdot,\cdot]_\mu$ скалярное произведение в $\widetilde{H}_2^\mu$. Пусть $\zeta \in \widetilde{H}_2^\mu$ и $\operatorname{supp}\zeta \subset \Omega_0 \setminus \Omega$. По определению оператора P_Ω для любого $f \in \widetilde{H}_2^\mu$ имеем

$$(P_\Omega \mid \mu(D)|^2 f, \zeta) = 0.$$

Продолжим это равенство:

$$(P_\Omega|\mu(D)|^2 f, \zeta) = (|\mu(D)|^2 f, P_\Omega^*\zeta) = [f, P_\Omega^*\zeta]_\mu = [P_\Omega^* f, \zeta]_\mu = 0,$$

и получим

$$\|P_\Omega^* f + \zeta \mid \widetilde{H}_2^\mu\|^2 = \|P_\Omega^* f \mid \widetilde{H}_2^\mu\|^2 + \|\zeta \mid \widetilde{H}_2^\mu\|^2 \geq \|P_\Omega^* f \mid \widetilde{H}_2^\mu\|^2,$$

т. е. $P_\Omega^* f \in \widetilde{H}_2^\mu(\Omega)$.

Для доказательства второй части леммы используем тот факт, что любая функция $f \in \widetilde{H}_2^{\mu}(\Omega)$ представима как $f = P_{\Omega}^{*} f$. Если $\zeta \in C_0^{(\infty)}(\Omega_0 \setminus \Omega)$, а $f \in \widetilde{H}_2^{\mu}(\Omega)$, то

$$(|\mu(D)|^2 f, \zeta) = (|\mu(D)|^2 P_{\Omega}^{*} f, \zeta) = \left[P_{\Omega}^{*} f, \zeta\right]_{\mu}$$
$$= \left[f, P_{\Omega}^{*}\zeta\right]_{\mu} = \left(|\mu(D)|^2 f, P_{\Omega}^{*}\zeta\right) = (P_{\Omega}|\mu(D)|^2 f, \zeta) = 0.$$

Лемма VI.1 доказана.

Нам понадобится следующая лемма, которую мы приведем здесь без доказательства.

Лемма VI.2. *Пусть функция $\nu(\xi)$ удовлетворяет условию гипоэллиптичности, а $\nu(D) = F^{-1}\nu(\xi)F$. Если в некоторой области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $\nu(D)u(x)|_{\omega}$ равна нулю, то функция u бесконечно дифференцируема в ω и для любого компакта $K \subset \omega$ и любого α выполняется оценка*

$$\left(\int\limits_K |D^{\alpha} u(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \le C_{\alpha,K}\left(\int\limits_{\omega} |u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема VI.1. *Пусть последовательность l_{hH}^{Ω} функционалов погрешности с ограниченным пограничным слоем оптимальна по порядку в пространствах $W_p^{(m_1)}$, где $m \in [m_1, m_3]$, числа m_1, m_3 четны, а $p < 2$. Пусть также функция $\mu(\xi)$ гипоэллиптична и удовлетворяет условиям* (IV.1.31)–(IV.1.33) *и* (IV.2.35), *а $m_2 \in (m_1, m_3)$. Тогда последовательность $\left\{l_{hH}^{\Omega}\right\}$ асимптотически оптимальна в $\widetilde{H}_2^{\mu}(\Omega)$.*

Доказательство. Для краткости обозначим

$$\left\|l \mid \widetilde{H}_2^{\mu *}\right\| = \|l\|_{1/\mu}, \quad \|l_{\infty}\|_{1/\mu} = \psi(h).$$

Оптимальность функционала $l_{hH}^{\Omega,0}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_2^{\mu *}$ приводит, в частности, к равенству

$$\left\|l_{hH}^{\Omega}\right\|_{1/\mu}^2 - \left\|l_{hH}^{\Omega,0}\right\|_{1/\mu}^2 = \left\|l_{hH}^{\Omega} - l_{hH}^{\Omega,0}\right\|_{1/\mu}^2.$$

Поэтому асимптотическая оптимальность l_{hH}^{Ω} эквивалентна соотношению $\left\| l_{hH}^{\Omega} - l_{hH}^{\Omega,0} \right\|_{1/\mu} = o(\psi(h))$ при $h \to 0$, которое и будем доказывать.

Возьмем в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_2^{1/\mu}$ проекторы: P_1 — на подпространство элементов вида $\sum\limits_{hHk \in \Omega} a_k \delta(x - hHk)$ и P_2 — на подпространство $\sum\limits_{hHk \in \Omega_0} a_k \delta(x - hHk)$. Здесь h фиксировано, а a_k — произвольные коэффициенты. Имеем

$$\begin{aligned} l_{hH}^{\Omega,0}(x) &= \chi_\Omega(x) - P_1 \chi_\Omega(x), \\ l_{hH}^{\Omega}(x) - l_{hH}^{\Omega,0}(x) &= P_1 \chi_\Omega(x) - h^n |H| \sum_{hHk \in \Omega} c_k(h) \delta(x - hHk) \\ &= \left(P_1 l_{hH}^{\Omega}\right)(x). \end{aligned}$$

Возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и положим

$$\Gamma_\varepsilon = \{x : x \in \Omega_0 \setminus \Omega,\ \rho(x, \Omega) \le \varepsilon\}, \quad \omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus (\Omega \cup \Gamma_\varepsilon).$$

Рассмотрим однородный функционал

$$l_{hH}^{\omega_\varepsilon, h}(x) = \sum_{hHk \in \omega_\varepsilon} \lambda(H^{-1}x/h - k)$$

порядка M и образуем разность

$$l_{hH}^{\Gamma_\varepsilon}(x) = l_\infty(x) - l_{hH}^{\Omega}(x) - l_{hH}^{\omega_\varepsilon, h}(x).$$

Как нам известно, для всех $m \in [m_1, m_3]$ имеют место равенства

$$\left\| l_\infty \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| = O(h^m), \quad \left\| l_h^{\omega_\varepsilon, h} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| = O(h^m).$$

Поэтому

$$\left\| l_{hH}^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| = O(h^m), \quad m \in [m_1, m_3].$$

По теореме IV.5, примененной с $\widetilde{B}_0 = \widetilde{L}_2$, имеем

$$\left\| l_{hH}^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| \le K |\Gamma_\varepsilon|^{1/p - 1/2} \psi(h) [1 + K(\varepsilon) h^{m_3 - m_2}].$$

Обратимся к основной оценке. Очевидно, что

$$\left\|P_1 l_{hH}^{\Omega}\right\|_{1/\mu} = \|P_1 l_\infty\|_{1/\mu} + \left\|P_1 l_{hH}^{\Gamma_\varepsilon}\right\|_{1/\mu} + \left\|P_1 l_{hH}^{\omega_{\varepsilon,h}}\right\|_{1/\mu} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Для оценки слагаемого I используем теорему о трех перпендикулярах в гильбертовом пространстве: $P_1 = P_1 P_2$. Имеем

$$\mathrm{I} = \|P_1 P_2 l_\infty\|_{1/\mu} \le \|P_2 l_\infty\|_{1/\mu}.$$

Функционал l_∞ асимптотически оптимален в $\widetilde{H}_2^\mu$, поэтому

$$\left\|l_\infty - l_{hH}^0\right\|_{1/\mu} = \left\{\|l_\infty\|_{1/\mu}^2 - \left\|l_{hH}^0\right\|_{1/\mu}^2\right\}^{1/2} = o(\psi(h)).$$

Заметив, что $P_2 l_\infty = P_2\big(l_\infty - l_{hH}^0\big)$, придем к оценке

$$\mathrm{I} \le \left\|P_2\big(l_\infty - l_{hH}^0\big)\right\|_{1/\mu} \le \left\|l_\infty - l_{hH}^0\right\|_{1/\mu} = o(\psi(h)).$$

Для оценки слагаемого II воспользуемся тем, что норма проекционного оператора равна единице, а $|\Gamma_\varepsilon| \le K\varepsilon$. Получим

$$\mathrm{II} \le \left\|l_{hH}^{\Gamma_\varepsilon}\right\|_{1/\mu} \le K\varepsilon^{1/p-1/2}\psi(h)\big\{1 + K(\varepsilon)h^{m_3-m_2}\big\}.$$

Так как P_Ω — ортогональный проектор в $\widetilde{H}_2^{\mu*}$ на подпространство функционалов, сосредоточенных в Ω, по теореме о трех перпендикулярах получим, что $P_1 = P_1 P_\Omega$. Значит, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= \left\|P_1 P_\Omega l_{hH}^{\omega_{\varepsilon,h}}\right\|_{1/\mu} \le \left\|P_\Omega l_{hH}^{\omega_{\varepsilon,h}}\right\|_{1/\mu} \\ &= \sup_f \frac{\left|\big(P_\Omega l_{hH}^{\omega_{\varepsilon,h}}, f\big)\right|}{\|f\|_\mu} = \sup_f \frac{\left|\big(l_{hH}^{\omega_{\varepsilon,h}}, P_\Omega^* f\big)\right|}{\|f\|_\mu}. \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Согласно леммам VI.1 и VI.2 функция $u = P_\Omega^* f$ в области $\Omega_0 \setminus \Omega$ удовлетворяет уравнению

$$(|\mu(D)|^2 u)|_{\Omega_0\setminus\Omega} = 0.$$

При этом для любой функции $\zeta \in \widetilde{C}_0^{(\infty)}$ с носителем, удаленным от Ω на положительное расстояние δ, и любого целого m выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha(\zeta u) \mid \widetilde{L}_2\| \le K(m,\delta,\Omega)\|u \mid \widetilde{L}_2\|. \tag{1.5}$$

Продолжим оценку (1.4), использовав (1.5) при $m = m_3$, $\delta = \varepsilon/4$ и с некоторой функцией ζ, обращающейся в единицу на носителе $l_{hH}^{\omega_\varepsilon,h}$. Очевидно, что

$$\mathrm{III} \le \sup_f \left\{ \frac{|(l_{hH}^{\omega_\varepsilon}, \zeta P_\Omega^* f)|}{\|\zeta P_\Omega^* f \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)}\|} \frac{\|\zeta P_\Omega^* f \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)}\|}{\|P_\Omega^* f \mid \widetilde{L}_2\|} \frac{\|P_\Omega^* f \mid \widetilde{L}_2\|}{\|P_\Omega^* f\|_\mu} \frac{\|P_\Omega^* f\|_\mu}{\|f\|_\mu} \right\}.$$

Первый сомножитель в фигурных скобках не превосходит величины $O(h^{m_3})$, т. е.

$$\|l_{hH}^{\omega_\varepsilon,h} \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)*}\| = o(\psi(h)).$$

Второй по лемме VI.2 оценивается абсолютной постоянной. Ограничен и третий сомножитель, так как $\widetilde{H}_2^\mu$ вложено в $\widetilde{L}_2$. Четвертый не превосходит нормы оператора P_Ω^*, равной единице. Таким образом, слагаемое III — это величина порядка $o(\psi(h))$. Объединяя полученные оценки, имеем

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \le K\varepsilon^{1/p-1/2}\psi(h) + K(\varepsilon)o(\psi(h)) \quad \text{при } h \to 0.$$

Теорема VI.1 доказана.

Вычислим главную часть нормы оптимального в $\widetilde{H}_2^\mu$ функционала погрешности $l_{hH}^{\Omega,0}$ при $h \to 0$. Для этого достаточно рассмотреть асимптотически оптимальные формулы. Сначала установим монотонность нормы функционала по вложению областей, принадлежащих некоторому простому классу. Затем получим точные оценки $\|l_{hH}^{\Omega,a}\|_{1/\mu}$, приближая Ω изнутри и снаружи областями простого вида.

Лемма VI.3. *Пусть ω_1 и ω_2 — ограниченные кусочно гладкие области и $\overline{\omega}_1 \subset \omega_2$. Пусть также $l_{hH}^{\omega_1}$ и $l_{hH}^{\omega_2}$ оптимальны по порядку в $W_p^{(m)*}$ при некотором $p < 2$ и $m \in [m_1, m_3]$. Тогда*

$$\|l_{hH}^{\omega_1}\|_{1/\mu} \le \|l_{hH}^{\omega_2}\|_{1/\mu}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Для простоты будем считать решетку кубической, а матрицу H единичной. Возьмем элементарный функционал λ порядка M и образуем однородный функционал, соответствующий области ω_2, положив

$$l_h^{\omega_2,h}(x) = \sum_{\operatorname{supp}\lambda(x/h-k)\subset\omega_2} \lambda(x/h-k).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, а множество ω_3 состоит из тех точек ω_2, которые отстоят от ω_1 больше, чем на ε. Положим

$$l_h^{\omega_3,h}(x) = \sum_{\operatorname{supp}\lambda(x/h-k)\subset\omega_3} \lambda(x/h-k).$$

Образуем еще два функционала:

$$l_h^{\gamma_1} = l_h^{\omega_2,h} - l_h^{\omega_3,h} - l_h^{\omega_1}, \quad l_h^{\gamma_2} = l_h^{\omega_2} - l_h^{\omega_2,h}.$$

Ясно, что $l_h^{\gamma_1}$ сосредоточен вблизи границы γ_1 области ω_1, а $l_h^{\gamma_2}$ — вблизи границы γ_2 области ω_2. При этом имеет место равенство

$$l_h^{\omega_2} = l_h^{\omega_1} + l_h^{\gamma_1} + l_h^{\omega_3,h} + l_h^{\gamma_2}.$$

Для любого функционала $l \in \widetilde{H}_2^{\mu^*}$ и любого подмножества ω единичного куба имеем

$$\|l \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\| \geq \|l \mid H_2^{\mu^*}(\omega)\|.$$

Поэтому справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\|l_h^{\omega_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\| &\geq \|l_h^{\omega_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_1)\| \geq \|l_h^{\omega_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_1)\| \\ &\quad - \{\|l_h^{\gamma_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_2)\| + \|l_h^{\omega_3,h} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_1)\| + \|l_h^{\gamma_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_1)\|\} \\ &\geq \|l_h^{\omega_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\| - \{\|l_h^{\gamma_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\| + \|l_h^{\omega_3,h} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}(\omega_1)\| + \|l_h^{\gamma_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\|\}.\end{aligned}$$

Нормы функционалов $l_h^{\gamma_1}$ и $l_h^{\gamma_2}$ в $W_2^{(m)}$ при $m \in [m_1, m_3]$ — это величины порядка $O(1)$. Отсюда и из теорем IV.4 и IV.5 следует, что

$$\|l_h^{\gamma_j} \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\| \leq K|\operatorname{supp} l_h^{\gamma_j}|^{1/p-1/2}\|l_h^j \mid \widetilde{H}_2^{\mu^*}\|(1+o(1)), \quad j = 1, 2.$$

При этом $\left|\operatorname{supp} l_h^{\gamma_1}\right| \le K\varepsilon$, а $\left|\operatorname{supp} l_h^{\gamma_2}\right| = o(1)$ при $h \to 0$. Пусть P_{ω_1} — проектор пространства $\widetilde{H}_2^{\mu*}$ на его же подпространство, состоящее из функционалов с носителями в ω_1. Тогда $P_{\omega_1}^*$ проектирует $\widetilde{H}_2^{\mu}$ на $\widetilde{H}_2^{\mu}(\omega_1)$. Возьмем бесконечно дифференцируемую функцию ζ, финитную, равную единице на носителе $l_h^{\omega_{\varepsilon,h}}$ и нулю при $\rho(x,\omega_1) < \varepsilon/4$. Тогда

$$\left\|l_h^{\omega_{3,h}} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}(\omega_1)\right\| = \sup_{f\in\widetilde{H}_2^{\mu}(\omega_1)} \frac{\left|(l_h^{\omega_{3,h}}, f)\right|}{\left\|f \mid \widetilde{H}_2^{\mu}\right\|} = \sup_{f\in\widetilde{H}_2^{\mu}} \frac{\left|(l_h^{\omega_{3,h}}, P_{\omega_1}^* f)\right|}{\left\|P_{\omega_1}^* f \mid \widetilde{H}_2^{\mu}\right\|}$$

$$= \sup_{f\in\widetilde{H}_2^{\mu}} \left\{ \frac{\left|(l_h^{\omega_{3,h}}, \zeta P_{\omega_1}^* f)\right|}{\left\|\zeta P_{\omega_1}^* f \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)}\right\|} \frac{\left\|\zeta P_{\omega_1}^* f \mid W_2^{(m_3)}\right\|}{\left\|P_{\omega_1}^* f \mid \widetilde{H}_2^{\mu}\right\|} \right\}.$$

Согласно леммам VI.1 и VI.2 произведение $\zeta P_{\omega_1}^* f$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_2^{(m_3)}$, причем

$$\left\|\zeta P_{\omega_1}^* f \mid W_2^{(m_3)}\right\| \le K\left\|P_{\omega_1}^* f \mid \widetilde{H}_2^{\mu}\right\|.$$

Первый сомножитель в фигурных скобках последнего равенства не превосходит Kh^{m_3}, а второй ограничен равномерно по f. Таким образом,

$$\left\|l_h^{\omega_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\| \ge \left\|l_h^{\omega_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\|(1 - K\varepsilon^{1/p-1/2} + o(1)).$$

Отсюда в силу произвольности ε следует лемма VI.3.

Теорема VI.2. *Пусть Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей Γ, H — единичная матрица, а $l_h^{\Omega,0}$ — соответствующий оптимальный функционал. Тогда*

$$\left\|l_h^{\Omega,0} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\| = |\Omega|^{1/2}\left\|l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\|(1 + o(1)). \tag{1.6}$$

Доказательство. Для вычисления главной части нормы в $\widetilde{H}_2^{\mu*}$ заменим $l_h^{\Omega,0}$ функционалом $l_h^{\Omega,a}$ с ограниченным пограничным слоем, оптимальным по порядку в $W_p^{(m)*}$ с некоторым $p < 2$ и $m \in [m_1, m_3]$. Функционал $l_h^{\Omega,a}$ асимптотически оптимален в $\widetilde{H}_2^{\mu*}$. Существование такого функционала докажем позже, в теореме VI.6.

Используем лемму VI.3, задав специальным образом области ω_1 и ω_2. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $h_0 = [\varepsilon/h]h$. Пусть Q — единичный куб, а $h_0(Q+k)$ обозначает внутренность множества

$$\{x : \exists y \in Q \; x = h_0(y+k)\}.$$

Положим

$$\Gamma_{h_0} = \bigcup_{h_0(Q+k)\cap\Gamma\neq\varnothing} h_0(Q+k), \quad \omega_1 = \Omega \setminus \Gamma_{h_0}, \quad \omega_2 = \Omega \cup \Gamma_{h_0}.$$

Если $\psi(h) = \left\| l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|$, а однородные функционалы $l_h^{\omega_1}(x)$ и $l_h^{\omega_2}(x)$ задаются равенствами

$$l_h^{\omega_j}(x) = \sum_{\operatorname{supp}\lambda_M(x/h-k)\subset\omega_j} \lambda_M\left(\frac{x}{h}-k\right), \quad j = 1, 2,$$

то справедливы следующие соотношения:

$$\varliminf_{h\to 0} \frac{\left\| l_h^{\omega_1} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|}{\psi(h)} \le \varliminf_{h\to 0} \frac{\left\| l_h^{\Omega,a} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|}{\psi(h)}$$
$$\le \varlimsup_{h\to 0} \frac{\left\| l_h^{\Omega,a} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|}{\psi(h)} \le \varlimsup_{h\to 0} \left\| l_h^{\omega_2} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|.$$

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$, т. е. когда $h_0 \to 0$, крайние члены этой цепочки неравенств имеют одинаковый предел, равный $|\Omega|^{1/2}$. Тем самым будет доказана справедливость равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\| l_h^{\Omega,a} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|}{\psi(h)} = |\Omega|^{1/2}.$$

Подсчитаем нормы функционалов $l_h^{\omega_1}(x)$ и $l_h^{\omega_2}(x)$. Преимущество этих функционалов в том, что ω_1 и ω_2 разбиваются на целое число кубов вида $h_0(Q+k)$ (и $h(Q+k)$) при любых h. Пусть $l_h^{\omega_j}(x)$ является суммой элементарных функционалов порядка $M \ge m_3$ и

$$l_h^{h_0}(x) = \sum_{hk\in h_0 Q} \lambda\left(\frac{x}{h}-k\right), \quad l_h^{\omega_h}(x) = \sum_{h_0 s\in\omega} l_h^{h_0}(x-h_0 s).$$

Обозначим через $[\cdot,\cdot]_{1/\mu}$ скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}_2^{\mu*} = \widetilde{H}_2^{1/\mu}$ и положим

$$\mathrm{I} = \left[l_h^{h_0}(x-h_0s), l_h^{h_0}(x-h_0r)\right]_{1/\mu} = \left(l_h^{h_0}(x-h_0s), \mu^{-2}(D)l_h^{h_0}(x-h_0r)\right).$$

Покажем, что если $s \neq r$, то I является величиной порядка $o(\psi^2(h))$. Положив

$$\gamma_\delta = \{x : x \in h_0Q,\, \rho(x, \mathbb{R}^n \setminus h_0Q) < \delta\}, \quad l_h^{\gamma_\delta}(x) = \sum_{hk\in\gamma_\delta} \lambda(x/h-k),$$

имеем

$$l_h^{h_0}(x-h_0s) = l_h^{\gamma_\delta}(x-h_0s) + \left[l_h^{h_0}(x-h_0s) - l_h^{\gamma_\delta}(x-h_0s)\right].$$

Таким образом, скалярное произведение I допускает оценку

$$|\mathrm{I}| \le \left|\left(l_h^{\gamma_\delta}(x-h_0s), \mu^{-2}(D)l_h^{h_0}(x-h_0r)\right)\right| + \left|\left(l_h^{h_0}(x-h_0s) - l_h^{\gamma_\delta}(x-h_0s), \mu^{-2}(D)l_h^{h_0}(x-h_0r)\right)\right|.$$

По теоремам IV.4 и IV.5 норму функционала $l_h^{\gamma_\delta}(x)$ можно промажорировать следующим образом:

$$\left\|l_h^{\gamma_\delta} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\| \le K\delta^{1/p-1/2}\psi(h)(1+o(1)).$$

Это позволяет оценить первое слагаемое в предыдущем неравенстве нужной величиной. Второе слагаемое оценим через норму разности функционалов $l_h^{h_0}(x-h_0s)$ и $l_h^{\gamma_\delta}(x-h_0s)$ в $\widetilde{W}_2^{(m_3)*}$.

Используем то обстоятельство, что в $\delta/2$-окрестности носителя указанной разности функция $u(x) = \mu^{-2}(D)l_h^{h_0}(x-h_0r)$ является решением однородного псевдодифференциального гипоэллиптического уравнения $|\mu^2(D)|u(x) = 0$. Значит, по лемме VI.2 функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема в $\delta/2$-окрестности, и при этом

$$\left\|u \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)*}\right\| \le K\left\|u \mid \widetilde{H}_2^{\mu*}\right\|.$$

Таким образом, итоговая оценка скалярного произведения I имеет вид

$$|\mathrm{I}| \le K\delta^{1/p-1/2}\psi^2(h) + Kh^{m_3}\psi(h)$$

и I действительно является величиной порядка $o(\psi^2(h))$.

Покажем теперь, что

$$\left\| l_h^\omega \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 = \sum_{hs\in\omega} \left\| l_h^{h_0}(x-h_0s) \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 + o(\psi^2(h)),$$
$$\left\| l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 = \sum_{hs\in Q} \left\| l_h^{h_0}(x-h_0s) \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 + o(\psi^2(h)).$$

Действительно, если левые части этих равенств выразить через скалярные произведения в $\widetilde{H}_2^{\mu*}$ и заменить l_h^ω и l_∞ суммами функционалов вида $l_h^{h_0}(x-h_0s)$, то остается лишь воспользоваться уже установленным свойством малости скалярных произведений различных функционалов $l_h^{h_0}(x-h_0s)$ и получить нужные асимптотические представления норм. Заметим также, что нормы функционалов $l_h^{h_0}(x-h_0s)$ не зависят от параметра s аргумента. Поэтому

$$\left\| l_h^\omega \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 = |\omega| h_0^{-n} \left\| l_h^{h_0} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| + o(\psi^2(h)),$$
$$\left\| l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 = h_0^{-n} \left\| l_h^{h_0} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\|^2 + o(\psi^2(h)).$$

Значит,

$$\left\| l_h^\omega \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| = |\omega|^{1/2} \left\| l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| (1+o(1))$$

как для $\omega=\omega_1$, так и для $\omega=\omega_2$. Объемы $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ стремятся к $|\omega|$ при $h_0\to 0$. Таким образом, теорема VI.2 доказана.

Замечания. 1. Для произвольной матрицы H решетки имеет место равенство

$$\left\| l_{hH}^{\Omega,0} \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| = \left(\frac{|\Omega|}{|H|} \right)^{1/2} \left\| l_\infty \mid \widetilde{H}_2^{\mu*} \right\| (1+o(1)).$$

2. Для пространства $\widetilde{W}_2^{(m)}$ с целым m формула (1.6) принимает вид

$$\left\| l_{hH}^{\Omega,0} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*} \right\| = |\Omega|^{1/2} \left(\sum_{k\neq 0} \frac{1}{|2\pi H^{-1*}k|^{2m}} \right)^{1/2} h^m (1+o(1)).$$

Это равенство аналогично формуле (V.3.1).

3. Формула вида (1.6) верна и для однородного функционала

$$l_{hH}^{\Omega}(x) = \sum_{hHk\in\Omega} \lambda\left(H^{-1}\frac{x}{h} - k\right)$$

порядка M.

Порядок сходимости кубатурных формул на анизотропных пространствах существенно зависит от выбора решетки узлов. Проиллюстрируем это утверждение примером. Рассмотрим пространство функций двух переменных, у которых производные 3-го порядка по x_1 и 4-го порядка по x_2 суммируемы с квадратом. Введем норму в этом пространстве, положив

$$\|f \mid \widetilde{W}_2^{3,4}\| = \left\{\int_Q \left(|f(x)|^2 + \left|D_1^3 f(x)\right|^2 + \left|D_2^4 f(x)\right|^2\right) dx\right\}^{1/2}$$

Кубатурная формула с равными коэффициентами для кубической решетки имеет асимптотически оптимальный функционал погрешности, порядок стремления к нулю которого определен равенством

$$\|l_\infty \mid (\widetilde{W}_2^{3,4})^*\| = \left\{\sum_{k\neq 0} \frac{1}{1 + (k_1/h)^6 + (k_2/h)^8}\right\}^{1/2} = O(h^3).$$

Это соотношение сохраняется для любых решеток с постоянными по h матрицами H.

Рассмотрим теперь решетку с векторным шагом $\bar{h} = (h_1, h_2)$. Ее узлами будут точки вида (k_1h_1, k_2h_2), $k \in \mathbb{Z}^2$. Норма аналогичного $l_\infty(x)$ функционала погрешности задается равенством

$$\|l_{\bar{h}} \mid (\widetilde{W}_2^{3,4})^*\| = \left\{\sum_{k\neq 0} \frac{1}{1 + (k_1/h_1)^6 + (k_2/h_2)^8}\right\}^{1/2}$$

Наилучшего стремления к нулю эта величина достигает при одинаковых порядках слагаемых $(k_1/h_1)^6$ и $(k_2/h_2)^8$. Положив, например, $h_1 = h_2^{4/3}$, имеем $\|l_{\bar{h}} \mid (\widetilde{W}_2^{3,4})^*\| = O(h_2^4)$.

Чтобы иметь возможность сравнивать порядки сходимости для разных решеток, перейдем от параметров шага решетки к числу узлов кубатурной формулы N. Для скалярного шага h имеем $N = h^{-2}$,

для векторного — $N = 1/h_1h_2$. Норма функционала погрешности при скалярном шаге равна $O(N^{-3/2})$, а при векторном шаге $\bar{h}$ с условием $h_1 = h_2^{4/3}$ — это величина $O(N^{-12/7})$.

Для завершенности исследования необходимо знать свойства кубатурных формул с решетками узлов, дающими наилучший при растущем N порядок сходимости на данном пространстве $\widetilde{H}_2^{\mu}$. Допуская произвольную зависимость матрицы решетки от N, приходим к необходимости расширить определение асимптотической оптимальности.

Пусть заданы пространство B и последовательность решеток с матрицами $H(N)$. Назовем последовательность функционалов погрешности

$$l_h^{\Omega,a}(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{Hk\in\Omega} a(k,N)\delta(x - Hk),$$

асимптотически оптимальной в B, если выполнено следующее условие:

$$\lim_{N\to\infty} \left\| l_N^{\Omega,a} \mid B^* \right\| / \inf_{\{b_k\}} \left\| \chi_\Omega(x) - \sum_{H(N)k\in\Omega} b_k\delta(x - H(N)k) \mid B^* \right\| = 1. \tag{1.7}$$

Основной нашей задачей остается нахождение асимптотически оптимального функционала с ограниченным пограничным слоем для данного набора Ω, B, $\{H(N)\}_{N=1}^{\infty}$. Дадим ее решение в одном важном частном случае, когда пространство H_2^{μ} совпадает с $W_2^{\overline{m}}$, а матрица H диагональна и задает решетку, состоящую из точек вида

$$(h_1k_1, h_2k_2, \ldots, h_nk_n), \quad k_j \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Вектор $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ назовем *векторным шагом решетки.* Проведя оптимизацию по решеткам такого вида, получим для анизотропного пространства асимптотически оптимальные решетчатые формулы. Они оказываются оптимальными по порядку и среди всех формул с произвольным расположением узлов.

Чтобы решетка узлов была согласована с фундаментальным параллелепипедом рассматриваемого пространства периодических функций, числа $1/h_j$ должны быть целыми, т. е.

$$N_j = 1/h_j \in \mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

На такие решетки распространяется теорема о достаточном условии асимптотической оптимальности.

Лемма VI.4. Пусть минимальное и максимальное из чисел m_1, $m_2, \ldots, m_n$ лежат внутри интервала (M_1, M_2). Если при $m = M_1, M_2$ норма функционала погрешности $l_{\bar{h}}^{\Omega}(x)$ допускает оценку

$$\left\| l_{\bar{h}}^{\Omega} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le K_1 \max_{1 \le j \le n} h_j^m, \quad p > 1, \tag{1.10}$$

то имеет место неравенство

$$\left\| l_{\bar{h}}^{\Omega} \mid \widetilde{W}_p^{m*} \right\| \le K_2 \max_{1 \le j \le n} h_j^{m_j}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Обозначив $\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(1+\xi_j^2\right)^{m_j} \right\}^{1/2}$ через $\mu(\xi)$, запишем для всех $s \in \mathbb{Z}^n$ следующее неравенство: $1/\mu^2(s) \le KI(s, \bar{h})$, где

$$I(s, \bar{h}) = \sum_{k \ne 0} \frac{1}{\mu^2(k/\bar{h})} \left\{ \frac{1}{\max\limits_j h_j^{M_1} (|s|^2 + 1)^{M_1/2}} + \frac{1}{\max\limits_j h_j^{M_2} (|s|^2 + 1)^{M_2/2}} \right\}^2.$$

Эта оценка устанавливается так же, как в теореме IV.3. Рассмотрим ряд Фурье $\sum\limits_s L[s] e^{2\pi i x s}$ функционала $l_{\bar{h}}^{\Omega}(x)$ и его $\widetilde{W}_p^{\overline{m}*}$-норму

$$\left\| \sum_s \frac{L[s]}{\mu(s)} e^{2\pi i x s} \mid \widetilde{L}_{p'} \right\| = \left\| \sum_s L[s] \frac{\mu^{-1}(s)}{\sqrt{I(s, \bar{h})}} \sqrt{I(s, \bar{h})}\, e^{2\pi i x s} \mid \widetilde{L}_{p'} \right\|.$$

Здесь, как обычно, $p' = p/(p-1)$. Линейный оператор умножения коэффициентов Фурье на отношение $(\mu(s))^{-1}/\sqrt{I(s, \bar{h})}$ является мультипликатором преобразования Фурье в $\widetilde{L}_{p'}$ при $p > 1$. Поэтому $\widetilde{W}_p^{\overline{m}*}$-норма функционала $l_{\bar{h}}^{\Omega}(x)$ не превосходит величины

$$K \sqrt{\sum_{k \ne 0} \mu^{-2}(k/\bar{h})} \left\{ (\max_j h_j)^{-M_1} \left\| l_{\bar{h}}^{\Omega} \mid \widetilde{W}_p^{(M_1)*} \right\| + (\max_j h_j)^{-M_2} \left\| l_{\bar{h}}^{\Omega} \mid \widetilde{W}_p^{(M_2)*} \right\| \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках ограничено равномерно по $\bar{h}$, а

$$\sqrt{\sum_{k\neq 0}\mu^{-2}(k/\bar{h})} = O\big(\max_j h_j^{m_j}\big).$$

Следствие 1.1. *Если оценка* (1.10) *выполнена для* $m = M_1, M_2$, *то она сохраняется и для любого* $m \in [M_1, M_2]$.

Достаточно применить лемму VI.4 при $m_1 = \cdots = m_n = m$, чтобы получить требуемое.

Теорема VI.3. *Пусть* Ω — *область с кусочно гладкой границей, расположенная в* Q. *Пусть функционал* $l_{\bar{h}}^{\Omega}(x)$ *оптимален по порядку в изотропном пространстве* $\widetilde{W}_p^{(m)}$ *при некотором* $p < 2$ *и* $m = M_1, M_2$, *где* $M_2 > M_1 > n$, M_1, M_2 *четные, т. е. имеет место оценка*

$$\big\|l_{\bar{h}} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\big\| = K \max_{1\le j\le n} h_j^m \quad 1 \le p < 2. \tag{1.12}$$

Тогда $l_{\bar{h}}^{\Omega}(x)$ *асимптотически оптимален в* $\widetilde{W}_2^{\overline{m}}$ *при* $m_j \in (M_1, M_2)$.

Доказательство. Если в условии теоремы $p = 1$, то оценка (1.12) заведомо выполняется для любого $p > 1$. Это легко следует из вложения $\widetilde{W}_p^{(m)}$ в $\widetilde{W}_1^{(m)}$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $1 < p < 2$. По следствию 1.1 неравенство (1.12) верно с любым m из $[M_1, M_2]$, в частности с m, равным некоторому M_3, заключенному между $\max_j m_j$ и M_2.

Убедимся в том, что однородный порядка $M \ge M_2$ функционал $l_{\bar{h}}^{\omega_k}$ в $\widetilde{W}_q^{(m)}$ при любых $q > 1$ и $m \in [M_1, M_2]$ имеет оптимальный порядок, равный $O(\max_j h_j^m)$. Следствие 1.1 сводит вопрос к четным $m = M_1, M_2$. Пространство $\widetilde{W}_q^{(m)}$ вложено в $\widetilde{W}_1^{(m)}$, поэтому достаточно установить оценку

$$\big\|l_{\bar{h}}^{\omega_k} \mid \widetilde{W}_1^{(m)*}\big\| \le K \max_j h_j^m. \tag{1.13}$$

По определению нормы имеем

$$\big\|l_{\bar{h}}^{\omega_k} \mid \widetilde{W}_1^{(m)*}\big\| = \sup_f \frac{\big|\big(l_{\bar{h}}^{\omega_k}, f\big)\big|}{\big\|f \mid \widetilde{W}_1^{(m)}\big\|}.$$

В отношении, стоящем под знаком супремума, сделаем замену переменных, преобразующих исходную решетку в кубическую. Пусть

$$\tau = \max_j h_j; \quad y_j = x_j\tau/h_j; \quad g(y) = f(y\bar{h}/\tau).$$

Обозначим через Ω_τ образ множества $\omega_{\bar{h}}$ при переходе от x к y. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left|(l_{\bar{h}}^{\omega_{\bar{h}}}, f)\right| / \Big\{\|f \mid \widetilde{L}_1\| + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f \mid \widetilde{L}_1\|\Big\} \\
&= \left|(l_\tau^{\Omega_\tau}, g)\right| / \Big\{\|g \mid L_1(Q\tau/\bar{h})\| + \sum_{|\alpha|=m} \tau^m \bar{h}^{-\alpha} \|D^\alpha g \mid L_1(Q\tau/\bar{h})\|\Big\} \\
&\qquad\qquad \le \left\|l_\tau^{\Omega_\tau} \mid \widetilde{W}_1^{(m)*}(Q\tau/\bar{h})\right\|.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство в этой цепочке справедливо в силу замечания, что при $|\alpha| = m$ произведение $\tau^m \bar{h}^{-\alpha}$ не меньше единицы.

При четном m возможно определение нормы в пространстве $\widetilde{W}_1^{(m)}$ через дифференциальные операторы. При этом несложно доказать, что

$$\left\|f \mid W_1^{(m)}(\Omega_\tau)\right\| \le K \left\|f \mid \widetilde{W}_1^{(m)}(Q\tau/\bar{h})\right\|,$$

где постоянная K не зависит от $\bar{h}$. Учитывая это, будем оценивать далее норму функционала $l_\tau^{\Omega_\tau}$ в пространстве $W_1^{(m)*}$. Согласно лемме IV.2 эту норму можно промажорировать функцией вида $K\tau^m$ с постоянной K, не зависящей от размеров носителя функционала $l_\tau^{\Omega_\tau}$.

Далее проведем доказательство по той же схеме, что и доказательство теоремы VI.1, пользуясь теми же обозначениями. Пусть

$$\mu^2(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 + \xi_j^2\right)^{m_j}.$$

Функционал погрешности

$$l_{\bar{h}}^1(x) = \chi_Q(x) - h_1 \ldots h_n \sum_{\bar{h}k \in Q} \delta(x - \bar{h}k)$$

асимптотически оптимален в $\widetilde{W}_2^{(m)}$, а его норма является величиной порядка $O(\max\limits_j h_j^{m_j})$. Поэтому

$$\|l_{\bar h}^{\Omega} - l_{\bar h}^{\Omega,0} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\| = \|P_\Omega l_{\bar h}^{\Omega} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\|$$
$$\leq \|l_{\bar h}^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\| + \|l_{\bar h}^{\omega_k} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}(\Omega)\| + o(\max_j h_j^{m_j}).$$

При доказательстве теоремы VI.1 установлена формула (1.4), из которой, в частности, следует, что

$$\|l_{\bar h}^{\omega_k} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}(\Omega)\| \leq K\|l_{\bar h}^{\omega_k} \mid \widetilde{W}_2^{(m_3)*}\|.$$

Последняя норма по свойству (1.13) является величиной порядка

$$O(\max_j h_j^{M_3}) = o(\max_j h_j^{m_j}).$$

Обратимся к разности $l_{\bar h}^{\Gamma_\varepsilon} \equiv l_{\bar h}^{1} - l_{\bar h}^{\Omega} - l_{\bar h}^{\omega_k}$. Функционалы $l_{\bar h}^{1}$, $l_{\bar h}^{\Omega}$, $l_{\bar h}^{\omega_k}$ имеют $W_p^{(m)*}$-нормы порядка $O(\max\limits_j h_j^m)$ при $m = M_1$, M_2, M_3. Значит, это же верно и для функционала $l_{\bar h}^{\Gamma_\varepsilon}(x)$. По теореме IV.5 для $m = M_1$, M_2 получаем теперь

$$\|l_{\bar h}^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\| \leq K\varepsilon^{1/p-1/2} \max_j h_j^m (1 + o(1)).$$

Лемма VI.4, примененная для значения $p = 2$, дает при $|\bar h| \to 0$ оценку

$$\|l_{\bar h}^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\| \leq K\varepsilon^{1/p-1/2} \max_j h_j^{m_j} (1 + o(1)).$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|l_{\bar h}^{\Omega} - l_{\bar h}^{\Omega,0} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\| \leq K\varepsilon^{1/p-1/2} \max_j h_j^{m_j} + o(\max_j h_j^{m_j}).$$

Так как ε произвольно, отсюда вытекает, что левая часть имеет порядок

$$o(\max_j h_j^{m_j}) = o(\|l_{\bar h}^{1} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\|).$$

Поэтому функционал $l_{\bar h}^{\Omega}(x)$ асимптотически оптимален.

Теорема VI.3 доказана.

Формула для нормы асимптотически оптимального функционала сохраняется и в случае анизотропных решеток:

$$\|l_{\bar{h}}^{\Omega,a} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\| = |\Omega|^{1/2}\|l_{\bar{h}}^{1} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\|(1+o(1)). \tag{1.14}$$

Таким образом, норма оптимального функционала представлена в виде

$$\|l_{\bar{h}}^{1} \mid \widetilde{W}_2^{\overline{m}*}\| = \left\{\sum_{k\neq 0}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{k_j}{h_j}\right)^{2m_j}\right]^{-1}\right\}^{1/2},$$

т. е. имеет порядок $o\big(\max\limits_j h_j^{m_j}\big)$. Оптимизируем правую часть полученной формулы по всем возможным $\bar{h}$.

Теорема VI.4. *Среди решеток вида* (1.8), (1.9) *оптимальная по порядку решетка для пространства* $\widetilde{W}_2^{\overline{m}}$ *определяется равенствами*

$$h_1^{m_1} = \dots = h_n^{m_n}, \tag{1.15}$$

если только условия (1.15), (1.9) *согласуются друг с другом. При этом выполняется равенство*

$$\|l_{\bar{h}_0}^{\Omega,a} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\| = |\Omega|^{1/2}N^{-1\Big/\sum\limits_{j=1}^{n}1/m_j}\left\{\sum_{k\neq 0}\left[\sum_{j=1}^{n}k_j^{2m_j}\right]^{-1}\right\}^{1/2}(1+o(1)),$$

где $N = N_1\dots N_n$ *— число узлов формулы в кубе* Q.

Доказательство. Оптимальной среди решеток (1.8), (1.9) будет та, которой соответствует наиболее быстрое убывание величины $\max\limits_j h_j^{m_j}$ при возрастании N. Число узлов N растет как отношение $|\Omega|/(h_1\dots h_n) = O(1/(h_1\dots h_n))$. Значит, наилучшие $h_1,\dots,h_n$ те, которые доставляют минимум функции $\max\limits_j h_j^{m_j}$ при условии, что $h_1\cdot\ldots\cdot h_n = 1/N$. Таким образом, приходим к задаче: найти $h_{10},\dots,h_{n0}$, удовлетворяющие условию

$$\max_j h_{j0}^{m_j} = \min_{h_1\cdot\ldots\cdot h_n = N^{-1}}\max_j h_j^{m_j}.$$

Если хотя бы одно из чисел $h_{j0}^{m_j}$ оказалось меньше других, то мы могли бы уменьшить все остальные за счет небольшого увеличения $h_{j0}^{m_j}$. Тем самым мы уменьшили бы $\min(\max_j h_j^{m_j})$, что невозможно. Поэтому все $h_{j0}^{m_j}$ должны равняться друг другу, т. е.

$$h_{j0}^{m_1} = \dots = h_{j0}^{m_n} = \tau, \quad N_j = \frac{1}{h_{j0}} = \tau^{-1/m_j},$$

$$N = N_1 \dots N_n = \tau^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j}}.$$

Следовательно,

$$\tau = N^{-1/\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j}}.$$

Теорема VI.4 доказана.

В приведенном примере норма функционала погрешности кубатурной формулы с равными коэффициентами в $\widetilde{W}_2^{3,4}$ при наилучшем выборе h_1 и h_2 является величиной порядка

$$O(N^{-1/(1/3+1/4)}) = O(N^{-12/7}).$$

Отметим, что требование согласованности условий (1.9) и (1.15) в теореме VI.4 носит технический характер и его можно избежать.

§ 2. Достаточное условие асимптотической оптимальности в гёльдеровых пространствах

Расширим теорию асимптотической оптимальности решетчатых кубатурных формул, рассмотрев их действие в классах функций, непрерывных вместе со своими производными до некоторого порядка. Заметим, что при точном определении нормированных пространств таких функций возникают определенные трудности. Характер этих трудностей легче всего пояснить, обратившись к теории дифференциальных уравнений.

Теория разрешимости задач для эллиптических уравнений приобретает законченный вид не в классических пространствах непрерывно дифференцируемых функций, а в гёльдеровых классах $(\widetilde{C}^{\gamma})^m$.

Здесь m — натуральное число, а показатель $\gamma > 0$ входит в условие Гёльдера, которому должны удовлетворять старшие производные порядка m от функции из $(\widetilde{C}^\gamma)^m$. Это обстоятельство связано с проблемой существования мультипликаторов преобразования Фурье, которые имеются в $(\widetilde{C}^\gamma)^m$ только при $\gamma > 0$.

В своих построениях мы используем бесселевы шкалы пространств, определение которых тесно связано с понятием мультипликатора, и поэтому мы также будем работать в гёльдеровых классах.

Вероятно, более глубокие причины отсутствия в классических пространствах $C^{(m)}$ асимптотически оптимальных кубатурных формул состоят в том, что в $C^{(m)}$ единичный шар не является строго выпуклым. Это усложняет проблему оптимизации, так как экстремальный элемент функционала, возможно, не существует или не единствен.

Введем, хотя и громоздкую, но технически удобную норму нулевого пространства, порождающего бесселеву шкалу обычных гёльдеровых пространств.

Пусть $\widetilde{B}_0 = \widetilde{C}^\gamma$ составлено из периодических функций с матрицей периодов H, являющихся пределами конечных рядов Фурье

$$f(x) = \sum_k f_k e^{2\pi i k H^{-1} x}$$

в норме

$$\|f \mid \widetilde{C}^\gamma\| = \max\Big(|f_0|, \max_x \mathscr{H}^\gamma \sum_k (1 + |H^{-1*}k|^2)^{-\gamma/2} f_k e^{2\pi i k H^{-1} x}\Big),$$

где $0 < \gamma < 1$, а

$$(\mathscr{H}^\gamma g)(x) = \sup_y \frac{|g(x+y) - g(x)|}{|y|^\gamma}$$

— гёльдерова константа порядка γ в точке x. Известно, что при любом $\gamma \in (0,1)$ и $m > 0$ норма в $(\widetilde{C}^\gamma)^m$ эквивалентна следующей:

$$\sup_{x,y} \left(|f(x)| + \frac{|\Delta_y^{[m]+1} f(x)|}{|y|^\gamma} \right),$$

где $\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x)$. Поэтому $\widetilde{B}_0^m \equiv \widetilde{C}^m$ — обычные гёльдеровы классы гладкости m. Отметим, что хотя класс $\widetilde{C}^m$ при целых m близок к классу m раз непрерывно дифференцируемых функций, однако не совпадает с ним.

Далее мы требуем от последовательности $h \to 0$, чтобы не только $1/h$ было целым числом, но и существовала бы последовательность $h_0 \to 0$ с целыми $1/h_0$ и h_0/h и возможностью h стремиться к нулю при постоянном h_0. Такой последовательностью является, например, $h_j = 2^{-j}$; тогда $h_0 = 2^{-j_0}$.

Для простоты выкладок полагаем матрицу H решетки единичной. Образуем однородный функционал, соответствующий сжатому в $1/h_0$ раз единичному кубу Q:

$$l_h^{h_0}(x) = \sum_{hk \in h_0 Q} \lambda\left(\frac{x}{h} - k\right).$$

Назовем его *функционалом погрешности непериодической формулы прямоугольников для области* $h_0 Q$. Отметим, что при $h_0 = 1$ функционал $l_h^1(x)$ совпадает с $l_\infty(x)$.

Выведем оценку

$$\left\| l_h^{h_0} \mid \widetilde{C}^{m*} \right\| \le h_0^n \left\| l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*} \right\|.$$

Основная трудность при этом состоит в том, что простейшее преобразование $x = h_0 y$, переводящее $l_h^{h_0}$ в $l_{h_1}^1$, не сохраняет периодического пространства основных функций. Чтобы обойти это препятствие, определим для $l_h^{h_0}$ в пространстве $\widetilde{C}^m(Q)$ последовательность асимптотически нормирующих функций $\Phi_j(x,h)$ с матрицей периодов $h_0 I$, обладающих свойствами

$$\left\| \Phi_j \mid \widetilde{C}^m \right\| = 1, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\left\| l_h^{h_0} \mid \widetilde{C}^{m*} \right\|}{\lim\limits_{j \to \infty} \left| \left(l_h^{h_0}, \Phi_j \right) \right|} = 1.$$

Функции $\Phi_j(x,h)$ периодичны с единичной матрицей периодов. Следовательно, имеют место соотношения

$$\left| \left(l_h^{h_0}, \Phi_j \right) \right| = h_0^n \left| \left(l_h^1, \Phi_j \right) \right| (1 + o(1)) \le h_0^n \left\| l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*} \right\| (1 + o(1)).$$

Отсюда и из определения асимптотически нормирующих функций следует искомая оценка нормы $l_h^{h_0}$ в $\widetilde{C}^{m_*}$.

Прежде чем построить нужные функции $\Phi_j(x,h)$, установим дополнительное свойство однородного функционала погрешности.

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию ζ, зависящую от параметра h так, что при $h \to +0$

$$\left|D_x^\alpha \zeta(x,h)\right| \le K_\alpha |\ln h|^{|\alpha|}, \quad |\alpha| \ge 0.$$

Назовем $\zeta(x)$ *функцией логарифмической срезки.*

На однородных функционалах $l_h^{\omega_h}$ операторы $(1-\Delta)^m$ и умножения на логарифмическую срезку коммутируют с точностью до слагаемых более высокого порядка малости при $h \to +0$. Сформулируем наше утверждение точно. Условимся коммутатор операторов $(1-\Delta)^m$ и умножения на ζ обозначать как

$$[(1-\Delta)^m, \zeta] = (1-\Delta)^m \zeta - \zeta(1-\Delta)^m.$$

Имеет место следующая

Лемма VI.5. *Пусть $l_h^{\omega_h}(x)$ — однородный функционал порядка M, $\zeta(x,h)$ — функция логарифмической срезки. Тогда для любых чисел m_1, m_2, m_3, удовлетворяющих условию $n < 2(m_3 - m_1 - m_2) < M-1$, при $h \to 0$ справедливо соотношение*

$$\left\|(1-\Delta)^{m_1}[(1-\Delta)^{m_2}, \zeta](1-\Delta)^{-m_3} l_h^{\omega_h} \mid \widetilde{L}_2\right\| = o\left(\left\|(1-\Delta)^{m_1+m_2-m_3} l_h^{\omega_h} \mid \widetilde{L}_2\right\|\right). \quad (2.1)$$

Доказательство. По теореме IV.4 и лемме IV.2 для значений m из интервала (n, M) имеем

$$\left\|(1-\Delta)^{-m} l_h^{\omega_h} \mid \widetilde{L}_2\right\| = \left\|l_h^{\omega_h} \mid \widetilde{W}_2^{(m_2)*}\right\| = Ch^m.$$

В частности, правая часть доказываемого равенства (2.1) есть величина $o(h^{m_3-m_1-m_2})$.

Если $z_1(x)$, $z_2(x)$ — периодические функции, $z_1 \in \widetilde{C}^{(\infty)}$, $z_2 \in \widetilde{W}_2^{(m)}$, то для любых $\varepsilon \in (0, m-n/2)$ и $2r \in (-1, m+1]$ справедливо неравенство

$$\left\|[(1-\Delta)^r, z_1] z_2 \mid \widetilde{L}_2\right\| \le C_r \sum_{1 \le |\alpha| \le [|2r|]} \max_x |D^\alpha z_1(x)| \left\|z_2 \mid \widetilde{W}_2^{(2r-|\alpha|)}\right\| + C_\varepsilon \sum_{|\alpha| = [|2r|]+1} \max_x |D^\alpha z_1(x)| \left\|z_2 \mid \widetilde{W}_2^{(m-\varepsilon)}\right\|. \quad (2.2)$$

При $[|2r|] = 0$ первая сумма в правой части (2.2) отсутствует.

Для обоснования (2.2) результат действия коммутатора на z_2 выразим через коэффициенты Фурье. Имеем

$$(1-\Delta)^r(z_1(x)z_2(x)) = \sum_k (1+|2\pi k|^2)^r \sum_s z_{1,k-s}z_{2,s}e^{2\pi ikx}.$$

Внесем множитель $(1+|2\pi k|^2)^r$ под знак суммы по s и представим его по формуле Тейлора в точке s с остаточным членом порядка $[|2r|]+1$ в интегральной форме. Первому члену тейлоровского разложения соответствует $z_1(x)(1-\Delta)^r z_2(x)$, всем остальным вместе взятым — результат действия коммутатора на z_2. Слагаемые, соответствующие рассматриваемой тейлоровской сумме, записываются в следующем виде:

$$\sum_{1\le|\alpha|\le[|2r|]} \frac{D^\alpha z_1(x)}{\alpha!} \sum_s \left(D_s^\alpha(|2\pi s|^2+1)^r\right) z_{2,s}e^{2\pi isx}.$$

Норму каждого такого слагаемого в пространстве $\widetilde{L}_2$ легко оценить выражеиием вида

$$C_r \sum_{1\le|\alpha|\le[|2r|]} \max_x |D^\alpha z_1(x)| \left\| z_2 \mid \widetilde{W}_2^{(|2r|-|\alpha|)} \right\|.$$

Слагаемое, соответствующее остаточному члену разложения Тейлора, записывается как интеграл

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{[|2r|]}}{[|2r|]!} \sum_{k,s} \left(2D_t^{[|2r|]+1}(|2\pi(s+t(k-s))|^2+1)^r\right) z_{1,k-s}z_{2,s}e^{2\pi ikx}\,dt.$$

Пользуясь равенством Парсеваля, оценим сверху норму этого интеграла в пространстве $\widetilde{L}_2$. Нетрудно убедиться, что соответствующая мажоранта имеет следующий вид:

$$\mathrm{I} = \max_{0\le t\le 1} \sum_{|\alpha|=[|2r|]+1} \left(\sum_k \left|\sum_s z_{1,k-s}(k-s)^\alpha z_{2,s}\psi(t,\alpha,k,s)\right|^2\right)^{1/2},$$

где $\psi(t,\alpha,k,s) = D_\xi^\alpha(|2\pi\xi|^2+1)^r$, $\xi = s + t(k-s)$, $|\alpha| = [|2r|]+1$. Легко видеть, что функция ψ ограничена равномерно по t, α, k, s. Оценивая $|\psi|$ постоянной и внося под знак суммы по s l_2-норму по k, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\le C_2 \sum_{|\alpha|=[|2r|]+1} \sum_s |z_{2,s}| \Big(\sum_k |z_{1,k}k^\alpha|^2\Big)^{1/2} \\ &\le C_3 \sum_{|\alpha|=[|2r|]+1} \max_x |D^\alpha z_2(x)| \sum_s |z_{2,s}|. \end{aligned}$$

Так как $m-\varepsilon > n/2$, то

$$\sum_s |z_{2,s}| \le C_\varepsilon \big\| z_2 \mid \widetilde{W}_2^{(m-\varepsilon)} \big\|.$$

Таким образом, неравенство (2.2) доказано. Применим его дважды: первый раз с

$$r = m_1 + m_2, \quad m = 2r-1, \quad z_1 = \zeta, \quad z_2 = (1-\Delta)^{-m_3} l_h^{\omega_h},$$

второй раз с

$$r = m_1, \quad m = r+1, \quad z_1 = \zeta, \quad z_2 = (1-\Delta)^{m_2-m_3} l_h^{\omega_h}.$$

В каждом из этих двух случаев получим мажоранту вида

$$K|\ln h|^{2(m_1+m_2)+1} \big\| l_h^{\omega_h} \mid \widetilde{W}_2^{(2(m_3-m_1-m_2)+1)*} \big\| = o(h^{2(m_3-m_1-m_2)}).$$

Используя этот результат, несложно оценить и норму коммутатора в $\widetilde{L}_2$.

Лемма VI.5 доказана.

Лемма VI.6. *Для любого числа $m \in (n, M)$ имеет место неравенство*

$$\big\| l_h^{h_0} \mid \widetilde{C}^{m*} \big\| \le h_0^n \big\| l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*} \big\| \quad \textit{при } h \to 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Зададимся функцией $\varphi(\tau) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, равной нулю при $\tau < 0$ и единице при $\tau > 1$, и образуем логарифмическую срезку $\zeta_h^{h_0}(x)$, положив

$$\zeta_h^{h_0}(x) = \prod_{j=1}^n \varphi(x_j|\ln h|)\varphi(1-x_j|\ln h|).$$

Очевидно, что $\zeta_h^{h_0}(x)$ равна нулю вне множества h_0Q, а в его внутренних точках, удаленных от границы на расстояние большее, чем $1/|\ln h|$, функция $\zeta_h^{h_0}(x)$ равна 1.

Покажем, что норма функционала

$$l_h^{h_0}(x) - (1-\Delta)^m \zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m} l_h^1(x)$$

пренебрежимо мала по сравнению с правой частью неравенства (2.3). Имеем

$$\begin{aligned}&\left\| l_h^{h_0}(x) - (1-\Delta)^m \zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m} l_h^1(x) \mid \widetilde{C}^{m*} \right\| \\ &\le K \left\| (1-\Delta)^{-m/2} l_h^{h_0}(x) - (1-\Delta)^{m/2} \zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m} l_h^1(x) \mid \widetilde{L}_2 \right\|.\end{aligned}$$

Второй член разности под знаком $\widetilde{L}_2$-нормы заменим произведением $\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m/2} l_h^1(x)$, прокоммутировав $(1-\Delta)^{m/2}$ и $\zeta_h^{h_0}(x)$. Затем всю норму разности промажорируем величиной

$$\begin{aligned}&\left\| (1-\zeta_h^{h_0}(x))(1-\Delta)^{-m/2} l_h^{h_0}(x) \mid \widetilde{L}_2 \right\| \\ &\qquad + \left\| \zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m/2} \left(l_h^1(x) - l_h^{h_0}(x) \right) \mid \widetilde{L}_2 \right\|. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Обе нормы в (2.4) оцениваются одинаково. Проведем оценку первой.

Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, разобьем функционал

$$l_h^{h_0}(x) = \sum_{hk \in h_0 Q} \lambda(x/h - k)$$

на два слагаемых:

$$l_h^{h_0}(x) = l_h^{\omega_{\varepsilon,h}}(x) + l_h^{\Gamma_{\varepsilon,h}}(x).$$

В первое из них входят только те элементарные функционалы $\lambda(x/h - k)$, для которых точка hk отстоит от носителя функции $1 - \zeta_h^{h_0}(x)$ больше чем на ε. Таким образом, для достаточно малых h носитель $\lambda(x/h - k)$ удален от носителя $1 - \zeta_h^{h_0}(x)$ не менее чем на $\varepsilon/2$. Все остальные элементарные функционалы $\lambda(x/h - k)$ образуют в сумме обобщенную функцию $l_h^{\Gamma_{\varepsilon,h}}(x)$. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ объем области $\Gamma_{\varepsilon,h}$ стремится также к нулю. Учитывая это, видим, что первое слагаемое в (2.4) мажорируется величиной

$$\left\| l_h^{\Gamma_{\varepsilon,h}} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*} \right\| + \sup_f \frac{\left| \left(l_h^{\omega_{\varepsilon,h}}(x), (1-\Delta)^{-m/2} \left(1 - \zeta_h^{h_0}(x)\right) f(x) \right) \right|}{\|f \mid \widetilde{L}_2\|}. \qquad (2.5)$$

Согласно замечанию 3 к теореме VI.2 найдется постоянная K такая, что для всех $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\|l_h^{\Gamma_{\varepsilon,h}} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\| \le K\sqrt{\varepsilon}\, h^m(1+o(1)).$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.5). Обозначим через ω множество тех x, для которых $1-\zeta_h^{h_0}(x) = 0$. Для любой функции $f \in \widetilde{L}_2$ положим

$$u(x) = (1-\Delta)^{-m/2}(1-\zeta_h^{h_0}(x))f(x).$$

Эта функция является в ω решением уравнения

$$(1-\Delta)^{m/2}u(x) = 0.$$

Следовательно, $u(x)$ бесконечно дифференцируема в ω. Учитывая, что ω удалено от носителя обобщенной функции $l_h^{\omega_{\varepsilon,h}}$ не менее чем на $\varepsilon/2$, получим оценку

$$\|u \mid \widetilde{W}_2^{(M)}(\operatorname{supp} l_h^{\omega_{\varepsilon,h}})\| \le K_2(\varepsilon)\|u \mid \widetilde{W}_2^{(m)}\| \le K_2(\varepsilon)\|f \mid \widetilde{L}_2\|.$$

Таким образом, все выражение (2.5) не превосходит величины

$$K_1\varepsilon^{1/2}h^m + K_2(\varepsilon)\|l_h^{\omega_{\varepsilon,h}} \mid \widetilde{W}_2^{(M)*}(\operatorname{supp} l_h^{\omega_{\varepsilon,h}})\| = K_1\sqrt{\varepsilon}\, h^m + K_3(\varepsilon)h^M.$$

Ввиду произвольности ε эта сумма есть величина порядка $o(h^m)$.

Для оценки второго слагаемого в выражении (2.4) следует взять $\omega = Q \setminus h_0Q$, а функционал $l_h^{\omega_{\varepsilon,h}}$ составить как сумму тех элементарных функционалов $\lambda(x/h-k)$, для которых точки hk отстоят от носителя функции $\zeta_h^{h_0}(x)$ на расстояние большее, чем ε. В результате получим, что выражение (2.4) представляет собой величину порядка $o(h^m)$.

Для обоснования оценки (2.3) достаточно получить аналогичную оценку $\widetilde{C}^{m*}$-нормы следующей обобщенной функции:

$$(1-\Delta)^m\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-m}l_h^1(x).$$

Вычитая из нее обобщенную функцию

$$(1-\Delta)^{m-\gamma/2}\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2}l_h^1(x),$$

заметим, что $\widetilde{C}^{m*}$-норма этой разности мажорируется нормой

$$\left\|(1-\Delta)^{-\gamma/2}\left[(1-\Delta)^{m+\gamma/2},\zeta_h^{h_0}(x)\right](1-\Delta)^{-m}l_h^1(x)\mid\widetilde{L}_2\right\|$$

и согласно лемме VI.5 является величиной порядка $o(h^m)$. Положим

$$\mathrm{I}=\left\|(1-\Delta)^{m-\gamma/2}\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2}l_h^1(x)\mid\widetilde{C}^{m*}\right\|$$

и оценим эту норму. По определению имеем

$$\mathrm{I}=\sup_{f\in\widetilde{C}^\gamma}\frac{\left|\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2}l_h^1(x),f(x)\right)\right|}{\max(|f_0|,\max\limits_x\mathscr{H}^\gamma f(x))},$$

где

$$\mathscr{H}^\gamma f(x)=\sup_y\frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|^\gamma}.$$

Возьмем какую-нибудь последовательность функций $f^{(j)}(x)$, нормы в $\widetilde{C}^\gamma$ которых равны единице, причем эта последовательность должна обладать свойством

$$\mathrm{I}=\lim_{j\to\infty}\left|\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2}l_h^1(x),f^{(j)}(x)\right)\right|.$$

Обобщенная функция, предел значений которой на $f^{(j)}(x)$ мы исследуем, симметрична относительно координатных плоскостей, проходящих через точку $(h_0/2,\dots,h_0/2)$. Поэтому и последовательность $f^{(j)}(x)$ можно считать обладающей этим свойством.

Ввиду компактности вложения $\widetilde{C}^\gamma$ в $\widetilde{C}$ можно считать $f^{(j)}(x)$ сходящейся в $\widetilde{C}$ последовательностью.

Покажем, что $f^{(j)}(x)$ можно заменить функциями, которые кроме всех перечисленных свойств $f^{(j)}(x)$ обладают еще периодичностью с матрицей периодов h_0H, где H — единичная матрица.

Пусть $\Phi^{(j)}(x)=f^{(j)}(x-h_0k)$ при $x\in h_0(Q+k)$. Эта функция периодична с матрицей периодов h_0H. Ввиду симметричности функции $f^{(j)}(x)$ функция $\Phi^{(j)}(x)$ непрерывна. Так как $f^{(j)}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma<1$ и константой Гёльдера $\max\limits_x\mathscr{H}^\gamma f^{(j)}(x)$, то и $\Phi^{(j)}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с тем же показателем, причем

$$\max_x\mathscr{H}^\gamma\Phi^{(j)}(x)\le\max_x\mathscr{H}^\gamma f^{(j)}(x).$$

Обозначим через $\Phi_0^{(j)}$ интеграл $\int\limits_Q \Phi^{(j)}(x)\,dx$ и рассмотрим разность $\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}$. Ясно, что

$$\max_x \mathscr{H}^\gamma\left(\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}\right) \le \max_x \mathscr{H}^\gamma f^{(j)}(x).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\left\|\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)} \mid \widetilde{C}^\gamma\right\| \le \|f^{(j)} \mid \widetilde{C}^\gamma\| = 1.$$

Действие обобщенной функции $\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x)$ на разность $\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}$, определяется равенством

$$\begin{aligned}\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), \Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}\right)\\ = \left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), f^{(j)}(x)\right)\\ - \Phi_0^{(j)}\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), 1\right).\end{aligned}$$

Покажем, что последнее слагаемое — это величина порядка $o(h^m)$ равномерно по j. Для этого заметим, во-первых, что

$$\left|\Phi_0^{(j)}\right| \le \max_x |\Phi^{(j)}(x)| \le \max_x |f^{(j)}(x)| \le K\|f^{(j)} \mid \widetilde{C}^\gamma\| = K,$$

где K не зависит от j. Во-вторых, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\left|\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), 1\right)\right| = \left|\left(l_h^1(x), (1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2}\zeta_h^{h_0}(x)\right)\right|\\ \le \left\|l_h^1 \mid \widetilde{W}_2^{(m+2-\gamma)*}\right\| \left\|\zeta_h^{h_0} \mid \widetilde{W}_2^{(2)}\right\| \le K h^{m+2-\gamma} |\ln h|^2 = o(h^m).\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$\lim_{j\to\infty}\left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), \Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}\right) = \mathrm{I} + o(h^m).$$

Образуем теперь функции

$$g^{(j)}(x) = \left(\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)}\right) / \left\|\Phi^{(j)}(x) - \Phi_0^{(j)} \mid \widetilde{C}^\gamma\right\|.$$

Последовательность $g^{(j)}$ обладает следующими свойствами:

$$\|g^{(j)} \mid \widetilde{C}^{\gamma}\| = 1,$$
$$\lim_{j\to\infty} \left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), g^{(j)}(x)\right) = \mathrm{I} + o(h^m).$$

При этом функции $g^{(j)}(x)$ периодичны с матрицей периодов $h_0 H$, где H — единичная матрица. Продолжим функцию $\zeta_h^{h_0}(x)$ с $h_0 Q$ на все пространство с тем же периодом. Иными словами, определим новую функцию $z_h^{h_0}(x)$, положив

$$z_h^{h_0}(x) = \zeta_h^{h_0}(x - h_0 k) \quad \text{при } x - h_0 k \in Q.$$

Тогда величина I удовлетворяет следующей оценке:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + o(h) &= \lim_{j\to\infty} \left(\zeta_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), g^{(j)}(x)\right) \\
&= h_0^n \lim_{j\to\infty} \left(z_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), g^{(j)}(x)\right) \\
&\le h_0^n \left\| z_h^{h_0}(x)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x) \mid \widetilde{C}^{\gamma *}\right\|.
\end{aligned}$$

Последнюю норму можно оценить суммой норм двух обобщенных функций

$$(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x), \quad \left(1 - z_h^{h_0}(x)\right)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x).$$

Норма первой из них вычисляется по формуле

$$h_0^n \left\|(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1 \mid \widetilde{C}^{\gamma *}\right\| = h_0^n \left\| l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m *}\right\|,$$

вторая мажорируется величиной

$$\mathrm{II} = K \left\| \left(1 - z_h^{h_0}(x)\right)(1-\Delta)^{-(m-\gamma)/2} l_h^1(x) \mid \widetilde{W}_2^{(\gamma)*}\right\|.$$

Поменяв в II местами оператор умножения на функцию $\left(1 - z_h^{h_0}(x)\right)$ и дифференциальный оператор, с помощью леммы VI.5 получим неравенство

$$\mathrm{II} \le \mathrm{III} + o(h^m),$$

где

$$\mathrm{III} = \left\|(1 - z_h^{h_0}(x))(1-\Delta)^{-m/2} l_h^1(x) \mid \widetilde{L}_2\right\|.$$

Для оценки нормы III повторим схему рассуждений, примененную при оценке выражения (2.4).

Пусть множество Γ_ε является объединением элементарных ячеек вида $h(k+Q)$, вершины hk которых удалены от носителя разности $1 - z_h^{h_0}(x)$ меньше чем на ε. Положим

$$l_h^{\Gamma_\varepsilon}(x) = \sum_{hk \in \Gamma_\varepsilon} \lambda(x/h - k), \quad l_h^{\omega_\varepsilon}(x) = l_h^1(x) - l_h^{\Gamma_\varepsilon}(x).$$

Очевидно, что имеют место оценки

$$\left\|(1 - z_h^{h_0}(x))(1-\Delta)^{-m/2} l_h^1(x) \mid \widetilde{L}_2\right\| \le \left\|l_h^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\right\|$$
$$+ \left\|(1 - z_h^{h_0}(x))(1-\Delta)^{-m/2} l_h^{\omega_\varepsilon}(x) \mid \widetilde{L}_2\right\|; \quad \left\|l_h^{\Gamma_\varepsilon} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*}\right\| \le K\sqrt{\varepsilon}\, h^m.$$

Второе слагаемое в предпоследнем неравенстве оценим так:

$$\sup_f \frac{\left|\left(l_h^{\omega_\varepsilon}(x), (1-\Delta)^{-m/2}(1 - z_h^{h_0}(x)) f(x)\right)\right|}{\|f \mid \widetilde{L}_2\|}$$
$$\le K h^M \sup_f \frac{\left\|(1-\Delta)^{-m/2}(1 - z_h^{h_0}(x)) f(x) \mid W_2^{(M)}(\operatorname{supp} l_h^{\omega_\varepsilon})\right\|}{\|f \mid \widetilde{L}_2\|}.$$

Образуем множество ω, дополнительное в кубе Q к носителю функции $1 - z_h^{h_0}(x)$. Пусть функция $f(x)$ любая из $\widetilde{L}_2$. Положим

$$u(x) = (1-\Delta)^{-m/2}(1 - z_h^{h_0}(x)) f(x).$$

Тогда $u(x)$ является в ω решением уравнения

$$(1-\Delta)^{m/2} u(x) = 0.$$

Замечая, что носитель $l_h^{\omega_\varepsilon}(x)$ компактно вложен в ω, получим оценку

$$\left\|u \mid \widetilde{W}_2^{(M)}(\operatorname{supp} l_h^{\omega_\varepsilon})\right\| \le K(\varepsilon)\|f \mid \widetilde{L}_2\|,$$

где постоянная $K(\varepsilon)$ не зависит от f. Таким образом, введенную ранее величину II можно промажорировать следующим образом:

$$\mathrm{II} \le o(h^m) + K_1\sqrt{\varepsilon}\, h^m + K_2(\varepsilon) h^M.$$

Ввиду произвольности ε это выражение является величиной порядка $o(h^m)$.

Лемма VI.6 доказана.

Теорема VI.5. *Пусть для некоторого $p < 2$ и $m = m_1, m_3$, где $n < m_1 \le m_2 < m_3$, функционал погрешности $l_h^\Omega(x)$ допускает оценку*

$$\left\| l_h^\Omega \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le K h^m, \quad 1 \le p < 2.$$

Тогда он асимптотически оптимален на любом пространстве $\widetilde{C}^m$ при $m \in [m_1, m_2]$.

Доказательство. Теорема IV.2 дает оценку снизу любого функционала погрешности:

$$|\Omega| \left\| l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*} \right\| (1 + o(1)) \le \left\| l_h^\Omega \mid \widetilde{C}^{m*} \right\|.$$

Ясно, что для установления асимптотической оптимальности l_h^Ω нам достаточно получить для него такую же оценку сверху. Приблизим Q изнутри множеством

$$\Omega_{h_0} = \bigcup_{\rho(h_0 k, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \sqrt{n}\, h_0} h_0 (Q + k).$$

Очевидно, что $\Omega_{h_0} \subset \Omega$ и $|\Omega \setminus \Omega_{h_0}| \to 0$ при $h_0 \to 0$. Представим $l_h^\Omega(x)$ в виде суммы функционалов погрешности:

$$l_h^\Omega(x) = l_h^{\Omega_{h_0}}(x) + l_h^{\Omega \setminus \Omega_{h_0}}(x),$$

где

$$l_h^{\Omega_{h_0}}(x) = \sum_{hk \in \Omega_{h_0}} \lambda\left(\frac{x}{h} - k\right).$$

Согласно следствию IV.2.2 и лемме IV.2 имеет место неравенство

$$\left\| l_h^{\Omega_{h_0}} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le K_1 h^m + o(h^m),$$

причем постоянная K_1 здесь не зависит ни от h, ни от h_0.

Так как норма функционала $l_h^{\Omega \setminus \Omega_{h_0}}$ не превосходит суммы норм l_h^Ω и $l_h^{\Omega_{h_0}}$, то

$$\left\| l_h^{\Omega \setminus \Omega_{h_0}} \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| \le K_2 h^m + o(h^m).$$

По теореме IV.5 для $m \in [m_1, m_2]$ имеем

$$\left\| l_h^{\Omega \setminus \Omega_{h_0}} \mid \widetilde{W}_2^{(m)*} \right\| \le K_2 \mid \Omega \setminus \Omega_{h_0} \mid^{1/p - 1/2} h^m + o(h^m).$$

Согласно вложению пространства $\widetilde{C}^m$ в $\widetilde{W}_2^{(m)}$ последнее неравенство выполняется также и для $\widetilde{C}^{m*}$-нормы функционала $l_h^{\Omega\setminus\Omega_{h_0}}$.

Возьмем какую-нибудь бесконечно дифференцируемую финитную в Q функцию $\zeta(x)$ и положим

$$\psi(x) = \sum_{hk\in Q} \zeta\left(\frac{x}{h} - k\right).$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|\psi \mid \widetilde{C}^m\| \le K_3 h^m,$$

а значит, и оценка

$$\left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^m\right\| \ge \frac{1}{\|\psi \mid \widetilde{C}^m\|}\left|\int\limits_Q \psi(x)\,dx\right| \ge Kh^m \int \zeta(y)\,dy.$$

Поэтому норму обобщенной функции можно промажорировать следующим образом:

$$\left\|l_h^{\Omega\setminus\Omega_{h_0}} \mid \widetilde{C}^{m*}\right\| \le K|\Omega\setminus\Omega_{h_0}|^{1/p-1/2}(1+o(1))\left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|. \qquad (2.6)$$

Оценим теперь $\widetilde{C}^{m*}$-норму однородного функционала $l_h^{\Omega_{h_0}}(x)$. Применяя к обобщенной функции $l_h^{\Omega_{h_0}}(x)$ неравенство треугольника и лемму VI.5, получаем

$$\left\|l_h^{\Omega_{h_0}} \mid \widetilde{C}^{m*}\right\| \le |\Omega_{h_0}|h_0^{-n}\left\|l_h^{h_0} \mid \widetilde{C}^{m*}\right\| \le |\Omega|\left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|(1+o(1)). \quad (2.7)$$

Объединяя (2.6) и (2.7), имеем

$$\left\|l_h^{\Omega} \mid \widetilde{C}^{m*}\right\| \le \left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|\{|\Omega| + K|\Omega\setminus\Omega_{h_0}|^{1/p-1/2} + o(1)\}.$$

Разделив обе части последнего неравенства на $\left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|$ и устремив h к нулю, приходим к неравенству

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\left\|l_h^{\Omega} \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|}{\left\|l_h^1 \mid \widetilde{C}^{m*}\right\|} \le |\Omega| + K|\Omega\setminus\Omega_{h_0}|^{1/p-1/2}.$$

Устремляя здесь h_0 к нулю, получаем требуемое.

Теорема VI.5 доказана.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае решетки с произвольной матрицей H.

§ 3. Построение универсально асимптотически оптимальных формул

Рассматриваемая нами область интегрирования Ω всегда является ограниченной областью с кусочно гладкой границей. Пусть последовательность кубатурных формул такова, что их функционалы погрешности $l_{hH}^{\Omega}(x)$, во-первых, обладают ограниченным пограничным слоем, во-вторых, имеют порядок $O(h^m)$ в пространстве $W_p^{(m)}$ при некотором $p < 2$, $p \geq 1$ и $m = M_1, M_2$, где $n < M_1 < M_2$. Тогда эти кубатурные формулы асимптотически оптимальны как в пространствах $\widetilde{W}_2^{(m)}$, $\widetilde{C}^m$ при $m \in [M_1, M_2)$, так и в пространстве $\widetilde{H}_2^{\mu}$ с функцией μ из теоремы VI.1.

Формулы с регулярным пограничным слоем удовлетворяют этим достаточным условиям универсальной асимптотической оптимальности. Программы вычисления интегралов по таким формулам для рациональных многогранников составлены Л. В. Войтишек [33], а для плоских областей с гладкой границей — Н. И. Блиновым [18].

Опишем построение кубатурных формул из другого класса, тоже универсально асимптотически оптимальных. Как мы убедимся, это будут формулы с ограниченным пограничным слоем. Неопределенность констант, присутствующих в определении ОПС-формул, позволяет привлечь к построению этих формул обычные операции анализа. В частности, можно использовать гладкие замены переменных и другие линейные операторы, ограниченные в соответствующих пространствах.

Будем считать матрицу H единичной, а решетку кубической. Рассмотрим ограниченную область Ω с гладкой границей Γ. Для каждой точки $x \in \overline{\Omega}$ можно указать окрестность $U(x)$ такую, что попавшая в нее часть границы $\Gamma \cap U(x)$ может быть выпрямлена в одну из координатных плоскостей. Благодаря компактности поверхности Γ существует ее конечное покрытие $U_t = U(x^t)$, $t = 1, \ldots, T$. Пусть разбиение единицы $\{\varphi_t\}_{t=1}^T$, подчинено этому покрытию, т. е.

$$\forall \varphi_t \in C_0^{(\infty)} \quad \operatorname{supp} \varphi_t \subset U_t, \quad \sum_t \varphi_t(x) = 1.$$

Построим функционал погрешности $l_h^{\Omega \cap U_t}(x)$ в каждой окрестности U_t, а кубатурную формулу для всей области Ω получим, суммируя

найденные локальные формулы с весом $\varphi_t(x)$ Иными словами, положим

$$l_h^{\Omega}(x) = \sum_{t=1}^{T} \varphi_t(x) l_h^{\Omega \cap U_t}(x). \tag{3.1}$$

Если $c_k^t(h)$ — коэффициенты кубатурной формулы, соответствующей функционалу $l_h^{\Omega \cap U_t}(x)$, то $l_h^{\Omega}(x)$ имеет коэффициенты $c_k^a(h)$, подчиненные условию

$$c_k^a(h) = \sum_{t=1}^{T} \varphi_t(hk) c_k^t(h). \tag{3.2}$$

Остается объяснить, как именно следует строить локальные функционалы погрешности $l_h^{\Omega \cap U_t}(x)$.

Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$. Условимся отмечать штрихом $(n-1)$-мерный вариант того или иного обозначения. Например, через $\delta'(x')$ обозначим δ-функцию Дирака в $(n-1)$-мерном пространстве переменных x', т. е.

$$(\delta'(x'), \varphi(x)) = \varphi(0', x_n).$$

Пусть также $\delta_n(x_n)$ — одномерная δ-функция Дирака, действующая по n-й координате, $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ — целая и дробная части действительного числа α.

Для определенности считаем окрестность U такой, что

$$\overline{\Gamma \cap U} = \{x : x_n = \gamma(x'),\ \gamma \in C^{(M)}\}.$$

Пусть диффеоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ окрестности U отображает множество $\Gamma \cap U$ в часть координатной плоскости. Для $y = \Phi(x)$ имеем

$$y' = \Phi'(x') = x', \quad y_n = \Phi_n(x) = x_n - \gamma(x').$$

Будем считать, что множество $\Omega \cap U$ расположено с одной стороны границы $\Gamma \cap U$. Для определенности предположим, что при всех $x \in \Omega \cap U$ справедливо неравенство $x_n > \gamma(x')$.

Получим функционал погрешности $l_h^{\Omega\cap U}(x)$ заменой переменных $y = \Phi(x)$ из функционала $l^\omega(y)$, где $\omega = \Phi^{-1}(\overline{\Omega}\cap U)$ и

$$l^\omega(y) = \chi_\omega(y) - h^n \sum_{hk\in\Omega\cap U} c_k^t \delta'(y' - hk')\delta_n(y_n - hk_n + \gamma(hk'))$$

$$= \chi_\omega(y) - h^n \sum_{hk\in\omega} c^t_{k',k_n+[\gamma(hk')/h]}\delta'(y'-hk')\delta_n(y_n - hk_n + h\{\gamma(hk')/h\}).$$

При задании коэффициентов функционала $l^\omega(y)$ следует учесть два обстоятельства. Во-первых, узлы $l^\omega(y)$ должны лежать на «криволинейной» решетке, т. е. в точках множества

$$\{(hk', h(k_n - \{\gamma(hk')/h\})) : k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Во-вторых, в последней сумме по k условие $hk \in \omega$ можно заменить условием $k_n > \{\gamma(hk')/h\}$, потому что при умножении на срезающую функцию $\varphi \circ \Phi^{-1}$ автоматически сохранятся только коэффициенты при δ-функциях с носителями в ω. Более того, в формуле для $l^\omega(y)$ множество ω можно заменить произвольной ограниченной подобластью $\widehat{\omega}$ в полупространстве $y_n \geq 0$, лишь бы множество $\Phi^{-1}(\widehat{\omega})$ содержало пересечение $\overline{\Omega}\cap U$.

Вместо неравенства $k_n > \{\gamma(hk')/h\}$ потребуем, чтобы $k_n \geq 1$. Это условие гарантирует выполнение предыдущего неравенства, так как $0 \leq \{\gamma(hk')/h\} < 1$.

Коэффициенты $b'_k = c_{k',k_n} - [\gamma(hk')/h]$ зададим так, чтобы обеспечить асимптотическое равенство $\left\| l^\omega \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\| = O(h^m)$. При замене переменных $x = \Phi^{-1}(y)$, умножении на $\varphi_t(x)$ с последующим суммированием по t это равенство, очевидно, сохранится. Иными словами, аналогичное асимптотическое соотношение справедливо и для нормы $\left\| l_h^\Omega \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \right\|$.

Построим в пространстве переменных y вспомогательный однородный функционал с узлами в точках обычной кубической решетки:

$$q_h^{\omega_h}(y) = \sum_{hk\in\omega} \lambda(y/h - k) = \sum_k \sum_{k_n\geq 0} \lambda(y/h - k). \qquad (3.3)$$

Элементарный функционал $\lambda(y)$ в равенстве (3.3) имеет порядок M, а его носитель содержится в полупространстве $y_n > 0$, т. е.

$$\lambda(y) = \chi_Q(y) - \sum_{k_n\geq 1} a_k \delta(y - k), \quad (\lambda(y), y^\alpha) = 0, \quad |\alpha| \leq M. \qquad (3.4)$$

Таким образом, суммирование в выражении (3.3) производится по таким индексам k, у которых $k_n \geq 1$, т. е.

$$q_h^{\omega_h}(y) = \chi_{\omega_h}(y) - h^n \sum_{k, k_n \geq 1} b_k(y - hk). \tag{3.5}$$

Сформируем выражение, которое в сумме с $q_h^{\omega_h}(y)$ дает функционал $l^{\omega_h}(y)$:

$$\Delta(y) \equiv l^{\omega_h}(y) - q_h^{\omega_h}(y).$$

Функция $\Delta(y)$ — это линейная комбинация δ-функций. Задавая $\Delta(y)$, следует обеспечить замену δ-функций, сосредоточенных в узлах вспомогательной кубической решетки, δ-функциями, расположенными в узлах «криволинейной» решетки $(hk', hk_n - h\{\gamma(hk')/h\})$. Проведем эту операцию отдельно на каждом луче $\{y : y' = hk',\ y_n \geq 0\}$ с помощью однородной обобщенной функции

$$\Delta_n(y_n) = \delta_n(y_n) - \sum_{j=1}^{J} v_j \delta_n(y_n - h(j - \eta)), \tag{3.6}$$

где $\eta = \{\gamma(hk')/h\}$.

Таким образом, функция $\Delta(y)$ должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta(y) = h^n \sum_{k, k_n \geq 1} \{ & b_k \delta(y - hk) \\ & - c_{k', k_n + [\gamma(hk')/h]} \delta'(y' - hk') \delta_n(y_n - h(k_n - \eta))\} \\ = h^{n-1} \sum_{k'} & \delta'(y' - hk') h \sum_{k_n \geq 1} \Delta_n(y_n - hk_n).\end{aligned}$$

Прежние неизвестные коэффициенты c_k являются линейными комбинациями новых неизвестных v_j, зависящих от η.

Основное требование при выборе v_j — это требование порядковой оптимальности функционала $l^{\omega_h}(y)$ в пространстве $\widetilde{W}_p^{(m)}$. Для этого достаточно, чтобы $\widetilde{W}_p^{(m)*}$-норма обобщенной функции $\Delta(y)$ была величиной порядка $O(h^m)$. Этого можно добиться, потребовав, чтобы выражение $(\Delta_n(y_n), f(y_n))$ являлось конечной разностью высокого порядка с переменным шагом. Узел $y_n = 0$ этой конечной разности не должен принадлежать множеству узлов решетки

$\{h(j-\eta)\}_{j=1}^{J}$. Коэффициенты v_j подчиним условиям $(\Delta_n(\tau), \tau^\alpha) = 0$, $|\alpha| \le M$, т. е. потребуем выполнения следующих равенств:

$$\sum_{j=1}^{J} v_j j^\alpha = \eta^\alpha, \quad |\alpha| \le M. \tag{3.7}$$

Очевидно, что при $J \ge M+1$ эта система линейных уравнений относительно неизвестных v_j, $j = 1, \ldots, J$, разрешима. Возьмем $J = M+1$, тогда v_j определяются однозначно. Совокупность условий (3.3)–(3.7) позволяет построить искомый функционал $\varphi(x) l_h^{\Omega \cap U}(x)$.

Это утверждение обоснуем позже, а сейчас приведем итоговую формулу для коэффициента c_k^t кубатурной формулы в узле hk, принадлежащем окрестности U_t такой, что $\Omega \cap U_t \subset \{x : x_n > \gamma(x')\}$. Как мы уже видели, коэффициенты a_k n-мерного функционала $\lambda(x)$ можно получить как произведение коэффициентов его одномерного аналога: $a_{(k_1,\ldots,k_n)} = a_{k_1} a_{k_2} \cdot \ldots \cdot a_{k_n}$, где

$$\sum_{j=1}^{M+1} a_j j^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \quad |\alpha| \le M.$$

Такой способ задания a_k удобен потому, что матрица B алгебраической системы, определяющей a_j, совпадает с матрицей системы (3.7). Обозначив через a_{ij} элементы обратной матрицы B^{-1}, получим

$$v_i = \sum_{j=1}^{M+1} a_{ij} j^{i-1}, \quad a_i = \sum_{j=1}^{M+1} \frac{a_{ij}}{j}, \quad i = 1, 2, \ldots, M+1. \tag{3.8}$$

Коэффициенты a_i, $i \notin [1, M+1]$, удобно положить равными нулю. Подставив (3.4) в (3.3) и приведя подобные члены, вычислим b_k:

$$b_k = \sum_{t'} \sum_{t_n=0}^{\min(k_n, M+1)} a_{t', t_n} = \sum_{t'} a_{t_1} \ldots a_{t_{n-1}} \sum_{t_n=1}^{\min(k_n, M+1)} a_{t_n}.$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{M+1} a_j = 1$, имеем

$$b_k = \sum_{j=1}^{\min(k_n, M+1)} a_j.$$

Иначе говоря, значение b_k определяется только n-й компонентой индекса k, т. е. $b_k = b_{k_n}$. Итоговая формула для функционала погрешности $l^{\omega_h}(y)$ получается подстановкой b_k, v_j в выражения, определяющие функции Δ_k и Δ. Таким образом, коэффициенты c_k^t в рассматриваемом случае имеют вид

$$c_k^t = \sum_{p=1}^{M+1} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{M+1} \eta^{q-1} \sum_{r=1}^{\min(k_n-\xi-1,M+1)} a_{rp} \sum_{s=1}^{\min(k_n-\xi-r,M+1)} a_{sq}, \quad (3.9)$$

где $\xi = [\gamma(hk')/h]$, $\eta = \{\gamma(hk')/h\}$. Формула (3.9) верна при условии, что $k_n > \xi + 1$. Если же $k_n \le \xi + 1$, то $c_k^t = 0$.

Проверим выполнение условий, достаточных для асимптотической оптимальности функционала $l_h^{\Omega}(x)$ с коэффициентами $c_k^a(h)$, рассчитанными по формуле (3.2). Очевидно, что коэффициенты $c_k^a(h)$ равномерно по k и h ограничены. Заметим, что в формуле (3.9) все суммирования ведутся до $M+1$, если только узел hk лежит далеко от границы, т. е. при $hk_n > \gamma(hk') - 2h(M+1)$. При этом справедливо равенство

$$c_k^t = \sum_{r=1}^{M+1} \sum_{p=1}^{M+1} a_{rp} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{M+1} \sum_{q=1}^{M+1} a_{sq} \eta^{q-1} = \sum_{r=1}^{M+1} a_r \sum_{s=1}^{M+1} v_s = 1.$$

Аналогичное равенство справедливо и для коэффициентов $c_k^a(h)$, получаемых по формуле (3.2). Это легко установить с помощью свойств функций $\varphi_t(x)$, $t = 1, \ldots, T$. Действительно, если в формуле (3.2) $c_k^t = 1$, то

$$c_k^a(h) = \sum_{t=1}^{T} \varphi_t(hk) = 1.$$

Таким образом, рассмотренное нами построение приводит к формулам с ограниченным пограничным слоем.

Теорема VI.6. Функционал $l_h^{\Omega,a}(x)$ оптимален по порядку в $\widetilde{W}_p^{(m)}$ для любых $p \ge 1$ и $m \in [M_1, M_2]$ с целыми M_1, M_2, подчиненными условию $n < M_1 \le M_2 \le M$.

Доказательство. Из предыдущих построений видно, что достаточно получить следующую оценку:

$$\|\varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y) \mid \widetilde{W}_p^{(m)*}\| \le Kh^m.$$

Применяя теорему IV.4 к $l(y,h) = \varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y)$, сводим задачу к двум крайним случаям: $m = M_1, M_2$, т. е. к целочисленному m. Для произвольной функции $f \in \widetilde{W}_p^{(m)}$ положим $g(y) = \varphi(\Phi^{-1}(y))f(y)$. Тогда справедливо равенство

$$(\varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y), f(y)) = h^n \sum_{k'} \sum_{k_n \ge 1} b_k \Bigg\{ g(hk', hk_n) - \sum_{j=1}^{M+1} v_j g(hk', hk_n + h_j - h\{\gamma(hk')/h\}) \Bigg\}. \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$q(y', k, h) = g(y', hk_n) - \sum_{j=1}^{M+1} v_j g(y', hk_n + hj - h\{\gamma(hk')/h\}).$$

Правая часть равенства (3.10) содержит в фигурных скобках значение $q(hk', k, h)$. Выразим его через интегралы по области

$$\omega = h(Q' + k') = \{y' : 0 \le y_j - k_j < h,\ j = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Имеем, очевидно, следующие равенства:

$$h^{n-1} q(hk', k, h) = \int_\omega q(y', k, h)\, dy + \int_\omega (q(hk', k, h) - q(y', k, h))\, dy$$

$$= \int_\omega q(y', k, h)\, dy' + \int_\omega \int_0^1 D_t q(y' + t(hk' - y'), k, h)\, dt dy'$$

$$= \int_\omega q(y', k, h)\, dy' + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \int_\omega D_i q(y' + t(hk' - y'), k, h) h(k_i - y_i)\, dt' dt.$$

Подставив это выражение в (3.10), получим

$$(\varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y), f(y))$$

$$= \sum_{k'} \int\limits_{h(Q'+k')} h \sum_{k_n \geq 1} b_k \left\{ g(y', hk_n) - \sum_{j=1}^{M+1} v_j g(y', hk_n + hj - h\eta) \right\} dy'$$

$$+ \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k'} \int\limits_{h(Q'+k')} h^2 \sum_{k_n \geq 1} b_k \left[D_i g(y' + t(hk' - y'), hk_n) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{M+1} v_j D_i g(y' + t(hk' - y'), hk_n + hj - h\eta) \right] (k_i - y_i) dy' \right\} dt,$$

где $\eta = \{\gamma(hk')/h\}$. Заменим g и $D_i g$ их тейлоровскими разложениями по последнему аргументу в точке hk_n с остаточными членами порядков m и $m-1$ соответственно. Благодаря условиям на v_j все члены разложения, кроме остаточного, исчезают. Огрубляя оценки, в частности, заменяя b_{k_n}, v_j одной постоянной, получим

$$|(\varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y), f(y))|$$

$$\leq Kh^m \left\{ \sum_{k'} \int\limits_{h(Q'+k')} \left(\sum_{j=1}^{M+1} \int\limits_{hk_n}^{hk_n+(j-\eta)h} \left| D_n^m(\varphi f)(y's) \right| ds \right) dy' \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k'} \int\limits_{h(Q'+k')} \int\limits_{hk_n}^{hk_n+(j-\eta)h} \left| D_n^{m-1} D_i(\varphi f)(y' + t(hk' - y'), s) \right| ds dy dt \right\}$$

$$\leq Kh^m \| \varphi f \mid \widetilde{W}_p^{(m)} \|.$$

Это и означает, что $\| \varphi(\Phi^{-1}(y))\Delta(y) \mid \widetilde{W}_p^{(m)*} \| \leq Kh^m$.

Теорема VI.6 доказана.

Приведенный алгоритм построения универсально асимптотически оптимальных формул реализован И. Умархановым в виде программы вычисления многомерных интегралов по ограниченным областям с гладкими границами. Алгоритм был обобщен им же на ограниченные области с кусочно гладкими границами. Приведем здесь результаты И. Умарханова.

Под областью Ω с кусочно гладкой границей Γ мы понимаем такую область в $\mathbb{R}^n$, для каждой точки x замыкания которой су-

ществуют окрестность U_x и диффеоморфизм $y = \Phi(x)$ класса $C^{(M)}$, отображающий эту окрестность на открытый единичный шар с центром в нуле. Образ множества $\Omega \cap U_x$ при этом задается одним из соотношений

$$V_0 = \{y : y_1^2 + \dots + y_n^2 < 1\},$$
$$V_j = \{y : y_1 \geq 0, \dots, y_j \geq 0;\ y_1^2 + \dots + y_n^2 < 1\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Отметим, что этому определению не удовлетворяет, например, четырехгранная пирамида в трехмерном пространстве. Окрестность с нужным свойством не существует для вершины, являющейся общей точкой четырех граней пирамиды.

Далее, используя разбиение единицы, получим искомую кубатурную формулу суммированием локальных формул, построенных для отдельных окрестностей U_t некоторого конечного покрытия множества $\overline{\Omega}$. Объясним, как можно построить эти локальные формулы.

Если $\Phi(\overline{\Omega} \cap U)$ совпадает со всем единичным шаром в $\mathbb{R}^n$, то полагаем

$$l^U(x) = \chi_U(x) - h^n \sum_{hk \in U} \delta(x/h - k).$$

Если образ $\Phi(\overline{\Omega} \cap U)$ совпадает с V_1, т. е. в рассматриваемой окрестности граница Γ гладкая, то проводим построение, как и раньше. Остается рассмотреть варианты, когда $\Phi(\overline{\Omega} \cap U) = V_j$, $j = 2, \dots, n$.

Подробно объясним дальнейшие действия для случая, когда $n = 2$ и множества $\Phi(\overline{\Omega} \cap U)$ и V_2 совпадают:

$$\Phi(\overline{\Omega} \cap U) = V_2 = \{y : y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1^2 + y_2^2 < 1\}.$$

Пусть сначала один из двух гладких кусков границы, попавшей в U, является координатной линией, т. е.

$$\begin{gathered} \Gamma \cap U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \{x : x_1 = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{x : x_2 = \gamma(x_1)\}, \\ \overline{\Omega} \cap U = \{x : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \gamma(x_1),\ x \in U\}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Построим локальную кубатурную формулу тем же способом, что и в случае окрестности гладкой границы $x_2 = \gamma(x_1)$. Внесем в рассуждения лишь два небольших изменения. Во-первых, будем считать функцию $\gamma(x_1)$ определенной не только для $x_1 \geq 0$, но и для всех x_1 из множества, получающегося проекцией U на ось x_1. Во-вторых, носитель используемого элементарного функционала $\lambda(y)$ подчиним условиям

$$\operatorname{supp} \lambda \subset \{y : y_2 \geq 0\}, \quad \operatorname{supp} \lambda \subset \{y : y_1 \geq 0\}.$$

Нетрудно проверить, что такие свойства функционала погрешности, как ограниченный пограничный слой и оптимальность по порядку, сохраняются. Остаются верными и равенства (3.2) и (3.9) для коэффициентов кубатурной формулы. Таким образом, задача построения универсально асимптотически оптимальных формул для плоских областей вида (3.11) полностью решена.

Общий случай сведем к частному (3.11). Исходные переменные обозначим через $z = (z_1, z_2)$, окрестность — через W, границу — через G. При этом имеем

$$G \cap W = G_1 \cup G_2, \quad G_1 = \{z : z_1 = g_1(z_2)\}, \quad G_2 = \{z : z_2 = g_2(z_1)\}.$$

Пусть G_1 и G_2 пересекаются в начале координат под углом α. Если этот угол острый, преобразуем его в тупой, сделав замену переменных $z' = Az$ с унимодулярной матрицей A. Элементы A целочисленны, а ее определитель равен 1. Такое преобразование сохраняет решетку узлов, а значит, и класс рассматриваемых кубатурных формул. Если же угол α тупой, т. е. $\pi/2 < \alpha < \pi$, искомую формулу получим из некоторой другой формулы с помощью замены переменных $y_1 = z_1 - g_1(z_2)$, $y_2 = z_2$. Функцию $g_1(z_2)$ считаем гладкой и определенной на всей проекции W на ось z_2. В переменных y возникает задача построения оптимальной по порядку ОПС-формулы для области вида (3.11), но с узлами в точках «криволинейной» решетки. Процедура получения такой формулы из вспомогательной, с узлами в точках кубической решетки, обоснована в теореме VI.6. Поэтому достаточно построить решетчатую формулу для случая области вида (3.11). Но эта задача только что решена.

Если граница состоит из двух гладких кусков, построение заключается в двукратном применении алгоритма, уже рассмотренного в случае гладкой границы.

Эти рассуждения переносятся на случай n-мерной области. При этом k-гранный кусок границы потребует k процедур распрямления граней и пересчетов коэффициентов линейных комбинаций δ-функций. Соответствующие процедуры описаны ранее в этой главе для случая гладкой границы.

Глава VII

Сходимость кубатурных формул на отдельных функциях и на классах бесконечно дифференцируемых функций

В этой главе мы остановимся на исследовании порядка сходимости последовательностей вида (l_h, φ) при $h \to 0$, где φ — периодическая функция. Оценка погрешностей формул приближенного интегрирования с помощью нормы функционала погрешности является неулучшаемой до тех пор, пока рассматривается пространство $L_2^{(m)}$ в целом. Однако для всякой индивидуальной функции φ из $L_2^{(m)}$ сходимость к нулю величины (l_h, φ) при $h \to 0$, т. е. слабая сходимость, всегда оказывается более быстрой.

§ 1. Слабая сходимость кубатурных формул

В гл. I найдено точное значение нормы оптимального функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ периодических функций. Напомним, что этот функционал погрешности имеет вид

$$l_h(x) = \chi_{\Omega_0}(x) - \sum_{hH\gamma \in \Omega_0} h^n \delta(x - hH\gamma), \tag{1.1}$$

где Ω_0 — фундаментальный параллелепипед, соответствующий ортогональной матрице H. Для числа h пригодны только значения

вида $h = 1/N$, где N целое, так как решетка $hH\gamma$ также должна быть периодической с матрицей H.

При каждом h погрешность достигает своего максимального значения на некотором элементе $u_h(x)$ единичной сферы из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Функция $u_h(x)$ является экстремальной для функционала погрешности $l_h(x)$. При этом

$$u_h(x) = N^{-m} u_1(x/h).$$

Считая объем фундаментального параллелепипеда единичным, т. е. $|\Omega_0| = 1$, имеем

$$(l_h, u_h) = \left\| l_h \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| \left\| u_h \mid \widetilde{L}_2^{(m)} \right\| = (h/2\pi)^m \sqrt{\zeta(H^{-1*} \mid 2m)}.$$

Множество экстремальных функций, отвечающих всевозможным N, некомпактно. Более того, в нем нет ни одного предельного элемента. В этом читатель может убедиться сам, проделав несложную оценку нормы разности между любыми двумя его элементами. Следовательно, при $h \to 0$ в оценке

$$|(l_h, \varphi)| \le \left\| l_h \mid \widetilde{L}_2^{(m)*} \right\| \left\| \varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)} \right\| \tag{1.2}$$

равенство недостижимо. Более того, мы сейчас покажем, что на любом фиксированном элементе $\varphi \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ выражение $h^{-m}(l_h(x), \varphi(x))$ (обозначим его через $g_\varphi[N]$) стремится к нулю быстрее, чем это следует из (1.2), причем скорость сходимости зависит от m.

Имеет место следующая

Теорема VII.1. *Если $m > n$, то последовательность $g_\varphi[N]$, $N = 1, 2, \ldots$, принадлежит l_2 и для ее нормы справедлива оценка*

$$\|g_\varphi[N] \mid l_2\| = \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^2 \right\}^{1/2} \le K(m) \left\| \varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)} \right\|, \tag{1.3}$$

где $K(m)$ не зависит от φ.

Доказательство. Для простоты выкладок ограничимся случаем, когда матрица периодов H единичная. Общность от этого не пострадает.

Функция $\varphi(x)$ разлагается в следующий ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{c[\beta]}{|\beta|^m} e^{i2\pi\beta x} + c[0]. \tag{1.4}$$

Суммирование здесь ведется по всем целочисленным мультииндексам β. Норма в $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ функции $\varphi(x)$, представленной в виде (1.4), выражается равенством

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\| = (2\pi)^m \Big\{ \sum_{\beta \neq 0} |c[\beta]|^2 \Big\}^{1/2}. \tag{1.5}$$

Очевидно, что сходимость ряда в правой части (1.5) равносильна принадлежности φ пространству $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$.

Подсчитаем величину погрешности оптимальной кубатурной формулы на функции $\varphi(x)$, выраженной рядом (1.4). Вместе с этим полезно рассмотреть погрешность несколько более общей кубатурной формулы с разными шагами по разным координатам. Пусть

$$l(x \mid \Gamma) = \chi_Q(x) - \Phi_0(\Gamma x)\chi_Q(x),$$

где Q — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, Γ — диагональная матрица с натуральными диагональными элементами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Для обобщенной функции $\Phi_0(\Gamma x)$ согласно определению имеем

$$\Phi_0(\Gamma x) = \sum_{\alpha} \delta(\Gamma x - \alpha) = \frac{1}{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} \sum_{\alpha} \delta(x - \Gamma^{-1}\alpha),$$

где α — целочисленный вектор.

Чтобы найти значение функционала $l(x \mid \Gamma)$ на функции $\varphi(x)$, вычислим величину $(l(x \mid \Gamma), e^{i2\pi\beta x})$, а затем воспользуемся разложением (1.4). При $\beta \neq 0$ справедливо равенство

$$L_\Gamma[\beta] \equiv (l(x \mid \Gamma), e^{i2\pi\beta x})$$

$$= -\frac{1}{\gamma_1 \cdots \gamma_n} \sum_{\alpha_j = 0, \ldots, \gamma_j - 1} e^{i2\pi \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j / \gamma_j} = -\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j} \sum_{\alpha_j = 0}^{\gamma_j - 1} e^{i2\pi\beta_j\alpha_j/\gamma_j}.$$

Его внутренняя сумма равна нулю, если β_j не кратно γ_j, и равна γ_j в противном случае. Отсюда получаем

$$(l(x \mid \Gamma), e^{i2\pi\beta x}) = \begin{cases} -1, & \text{если } \beta_j \text{ кратно } \gamma_j \text{ при любом } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возвращаясь к значению $l(x \mid \Gamma)$ на $\varphi(x)$, имеем

$$(l(x \mid \Gamma), \varphi(x)) = -\sum_{\beta \neq 0} \frac{c[\Gamma\beta]}{|\Gamma\beta|^m}. \tag{1.6}$$

В случае, когда $\Gamma = NI$, где I — единичная матрица порядка n, справедливо равенство

$$g_\varphi[N] = -\sum_{\beta \neq 0} \frac{c[N\beta]}{|\beta|^{m/2}} \frac{1}{|\beta|^{m/2}}. \tag{1.7}$$

Применив к правой части (1.7) неравенство Коши, получим

$$|g_\varphi[N]|^2 \leq \sum_{\beta \neq 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|\beta|^m}.$$

По условию $m > n$, поэтому второй сомножитель в правой части последнего неравенства конечен:

$$\sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|\beta|^m} = K_1(m) < \infty.$$

Отсюда и из определения нормы в l_2 следует, что

$$\|g_\varphi \mid l_2\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^2 \leq K_1(m) \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\beta \neq 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^m}.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\|g_\varphi \mid l_2\|^2 \leq K_1^2(m) \sum_{\lambda \neq 0} |c[\lambda]|^2 \leq K_1^2(m) \frac{\left\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\right\|^2}{(2\pi)^{2m}}$$

(во втором неравенстве использовано представление (1.5)).

Таким образом, оценка (1.3) получена, и теорема VII.1 доказана.

Оценка (1.3) неулучшаема в том смысле, что ни при каких $q > 2$ нельзя утверждать конечность нормы $\|g_\varphi \mid l_q\|$.

Теорема VII.2. *Если $n/2 < m \le n$, то для любого числа $q_* > q = 2n/(2m-n)$ справедливо неравенство*

$$\|g_\varphi \mid l_{q_*}\| = \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^{q_*} \right\}^{1/q_*} \le K \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|, \tag{1.8}$$

где K не зависит от φ.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < m - n/2$ и $0 < \mu < 1$. Вспомним, что для функции $\varphi \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ справедливо равенство (1.7). Заменив в нем коэффициент $c[N\beta]$ его модулем и сгруппировав определенным образом сомножители, приходим к неравенству

$$|g_\varphi[N]| \le \sum_{\beta \ne 0} |c[N\beta]|^{1-\mu} \left(\frac{|c[N\beta]|}{|\beta|^{(m-n/2-\varepsilon)/\mu}} \right)^{\mu} \frac{1}{|\beta|^{n/2+\varepsilon}}.$$

Применив к сумме в его правой части неравенство Гёльдера для произведения трех функций с показателями $1/p_1 = (1-\mu)/2$, $1/p_2 = \mu/2$, $1/p_3 = 1/2$ и учитывая, что $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$, получим

$$|g_\varphi[N]| \le \Big(\sum_{\beta \ne 0} |c[N\beta]|^2 \Big)^{(1-\mu)/2} \Big(\sum_{\beta \ne 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{2\varepsilon_*}} \Big)^{\mu/2} \Big(\sum_{\beta \ne 0} 1/|\beta|^{n+2\varepsilon} \Big)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Здесь через ε_* обозначена величина $(m-n/2-\varepsilon)/\mu$. Заметим теперь, что

$$\sum_{\beta \ne 0} |c[N\beta]|^2 \le \frac{\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2}{(2\pi)^{2m}}, \quad \sum_{\beta \ne 0} \frac{1}{|\beta|^{n+2\varepsilon}} = K_1(\varepsilon) < +\infty.$$

Подставляя их в (1.9), приходим к оценке

$$|g_\varphi[N]|^2 \le (2\pi)^{-2m(1-\mu)} \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^{2(1-\mu)} K_1(\varepsilon) \Big(\sum_{\beta \ne 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{2\varepsilon_*}} \Big)^{\mu}. \tag{1.10}$$

Пусть $\varepsilon = ((m-n/2)q_* - n)/(1+q_*)$ и $\mu = 2/q_*$. Используя условие $q_* > q$, несложно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$0 < \varepsilon < m - n/2, \quad 0 < \mu < 1, \quad 2\varepsilon_* = n + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Возводя обе части неравенства (1.10) в степень $1/\mu$, а затем суммируя результат по всем натуральным значениям N, получим оценку

$$\sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^{q_*} \le K \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^{2(1/\mu-1)} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\beta\neq 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{n+\varepsilon_1}}.$$

Вводя в этом неравенстве переменную $\lambda = N\beta$ и осуществляя перестановку сумм, получим неравенство

$$\sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^{q_*} \le K \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^{q_*}.$$

Таким образом, оценка (1.8) установлена и теорема VII.2 доказана.

Сопоставив любой функции $\varphi \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ последовательность погрешностей $g_\varphi[N]$, мы тем самым определили некоторый оператор вложения в l_2 (при $m > n$) или в l_{q_*} (при $n/2 < m \le n$). В теоремах VII.1 и VII.2 доказано, что такой оператор непрерывен. Интересен вопрос, является ли рассматриваемое вложение взаимно однозначным и обратимым или нет. Не касаясь его решения в общем виде, покажем, что формула (1.6) позволяет в принципе построить все коэффициенты Фурье $a[\gamma]$ функции $\varphi(x)$ по заданной системе погрешностей.

Если $\varphi(x) = \sum_\gamma a[\gamma] e^{i2\pi\gamma x}$, то

$$b_\varphi[\gamma] \equiv (l(x \mid \Gamma), \varphi(x)) = \sum_{\beta\neq 0} a[\Gamma\beta]. \tag{1.11}$$

Напомним, что Γ — диагональная матрица с натуральными числами γ_j по диагонали. При $\Gamma = NI$ и $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ справедливо равенство

$$b_\varphi[N\mathbf{e}] = g_\varphi[N].$$

Выразим коэффициенты Фурье $a[\gamma]$ функции $\varphi(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ через погрешности $b_\varphi[\gamma]$, т. е. обратим оператор $\mathscr{E}$, задаваемый формулой (1.11). Заметим, что оператор $\mathscr{E}$ естественным образом определен на множестве достаточно быстро убывающих функций $a[\gamma]$.

Нам понадобится следующая формула для индикатора объединения конечного числа множеств $\mathscr{E}_j$, принадлежащих некоторой σ-алгебре:

$$\chi\left(\bigcup_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right)=\sum_{j_1=1}^{n}\chi(\mathscr{E}_{j_1})-\sum_{j_1\neq j_2}\chi(\mathscr{E}_{j_1}\cap\mathscr{E}_{j_2})+$$
$$\cdots+(-1)^{s+1}\sum_{j_k\neq j_l}\chi\left(\bigcap_{t=1}^{s}\mathscr{E}_{j_t}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\chi\left(\bigcap_{t=1}^{n}\mathscr{E}_t\right). \quad (1.12)$$

(Индикатор $\chi_A(a)\equiv\chi(a\mid A)$ множества A — это числовая функция элементов $a\in A$. В формуле (1.12) аргумент a опущен с целью несколько сократить запись.)

Для доказательства (1.12) рассмотрим множество E_k, каждый элемент которого входит ровно в k из множеств $\mathscr{E}_1,\ldots,\mathscr{E}_n$. На множестве E_k, как легко видеть,

$$\sum_{j_k\neq j_l}\chi\left(\bigcap_{t=1}^{s}\mathscr{E}_{j_t}\right)=\binom{k}{s}.$$

Таким образом, на E_k правая часть формулы (1.12) принимает вид

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^{k+1}\binom{k}{k}=1,$$

т. е. совпадает с левой частью.

Обозначим объединение множеств $\mathscr{E}_j$, $j=1,\ldots,n$, через $\mathscr{E}_0$. Несложно убедиться, что

$$\mathscr{E}_0=\bigcup_{k=1}^{n}E_k,\quad E_i\cap E_j=\varnothing\quad\text{при}\quad i\neq j.$$

Равенство (1.12), справедливое на множествах E_k, имеет место и на их объединении $\mathscr{E}_0$. На элементах же, не принадлежащих $\mathscr{E}_0$, обе части формулы (1.12) равны нулю. Таким образом, равенство (1.12) доказано.

Рассмотрим наборы чисел $\vec{L}=\{l_1,\ldots,l_t\}$, составленные из разных элементов множества индексов $\{1,2,\ldots,n\}$. Каждому такому

набору сопоставим его мощность — число $t = t(\vec{L})$. При фиксированном n множество наборов $\vec{L}$ конечно. Пронумеруем его элементы индексом j:

$$\vec{L}_1, \vec{L}_2, \ldots, \vec{L}_j, \ldots, \vec{L}_{2^n},$$

потребовав, чтобы $t_j = t(\vec{L}_j)$ не превосходило t_{j+1}. Используя введенные обозначения, равенство (1.12) перепишем в виде

$$\chi(\mathscr{E}_0) = \sum_{\vec{L}} (-1)^{t(\vec{L})+1} \chi\Big(\bigcap_{l \in \vec{L}} \mathscr{E}_l\Big) = \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{t_j+1} \chi\Big(\bigcap_{l \in \vec{L}_j} \mathscr{E}_l\Big). \qquad (1.13)$$

Вернемся к задаче выражения коэффициентов Фурье $a[\gamma]$ функции $\varphi \in \widetilde{L}_2^{(m)}$ через погрешности $b_\varphi[\gamma]$. Пронумеруем все простые числа в естественном порядке, т. е. по возрастанию:

$$p_0 = 1; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 3; \quad p_3 = 5, \ldots.$$

Рассмотрим множество $E(\gamma, s)$ таких векторов $\beta \neq \gamma$, в которых каждая компонента β_j делится хотя бы на одно из произведений $\gamma_j p_{t_j}$, $t_j = 0, 1, \ldots, s$. Образуем следующую разность:

$$b_\varphi[\gamma] - \sum_{\beta \in E(\gamma, s)} a[\beta]. \qquad (1.14)$$

Очевидно, что сумма в (1.14) с ростом s сколь угодно мало отличается от суммы значений $a[\beta]$, взятой по всем β, кратным γ, но не равным самому γ. Отсюда и из (1.11) следует, что

$$\lim_{s \to \infty} \Big\{ b_\varphi[\gamma] - \sum_{\beta \in E(\gamma, s)} a[\beta] \Big\} = a[\gamma]. \qquad (1.15)$$

Сумму, стоящую в этом равенстве под знаком предела, преобразуем с помощью следующей формулы:

$$\sum_{\beta \in E(\gamma, s)} a[\beta] = \sum_{\beta} \chi(\beta \mid E(\gamma, s)) a[\beta],$$

где $\chi(\cdot \mid E(\gamma, s))$ — индикатор множества $E(\gamma, s)$, расположенного в пространстве $\mathbb{Z}^n$ всех целочисленных векторов β.

Фиксировав значение s, рассмотрим систему множеств $B_j(\gamma \mid l)$, $1 \le j \le n$, $1 \le l \le s$. Множество $B_j(\gamma \mid l)$ состоит из всех таких векторов $\beta \in E(\gamma, s)$, у которых компонента β_j делится на $\gamma_j p_l$. Легко видеть, что $E(\gamma, s)$ является объединением множеств $B_j(\gamma \mid l)$ по всем рассматриваемым l, j:

$$E(\gamma, s) = \bigcup_{\substack{1 \le l \le s \\ 1 \le j \le n}} B_j(\gamma \mid l).$$

Следовательно,

$$\sum_{\beta \in E(\gamma, s)} a[\beta] = \sum_{\beta} \chi\Big(\beta \mid \bigcup_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le l \le s}} B_j(\gamma \mid l)\Big) a[\beta]. \tag{1.16}$$

Существенно, что множества $B_j(\gamma \mid l)$ и всевозможные их пересечения представляют собой объединения всех таких целочисленных векторов β, каждая компонента β_j которых делится на один и тот же множитель. Поясним, что это за множитель на примере пересечения

$$\bigcap_{k \in \vec{M}} \bigcap_{l \in \vec{L}_j} B_k(\gamma \mid l),$$

где $\vec{L}_j = \big(l_1^{(j)}, l_2^{(j)}, \ldots, l_{t_j}^{(j)}\big)$ — некоторый набор неотрицательных целых чисел, каждое из которых не больше s, а подмножество индексов $\vec{M}$ вложено в $\{1, 2, \ldots, n\}$. Как вытекает из определения множеств $B_k(\gamma \mid l)$, это пересечение состоит из всех таких мультииндексов $\beta \in E(\gamma, s)$, каждая компонента β_k которых при $k \in \vec{M}$ делится на величину $\gamma_k p_{l_1^{(j)}} p_{l_2^{(j)}} \ldots p_{l_{t_j}^{(j)}}$. Иными словами, любой вектор β из пересечения представим в виде

$$\beta = \Gamma Q \vec{\alpha}. \tag{1.17}$$

Здесь $\vec{\alpha}$ — ненулевой целочисленный мультииндекс, а ΓQ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$(\gamma Q)_k = \gamma_k p_{l_1^{(j)}} p_{l_2^{(j)}} \ldots p_{l_{t_j}^{(j)}}, \ k \in \vec{M}; \quad (\gamma Q)_k = \gamma_k, \ k \notin \vec{M}. \tag{1.18}$$

Любой мультииндекс вида (1.17) принадлежит рассматриваемому пересечению множеств $B_k(\gamma \mid l)$.

Применив к индикатору объединения $E(\gamma, s)$ множеств $B_k(\gamma \mid l)$ равенство (1.13), из (1.16) получим

$$\sum_{\beta \in E(\gamma,s)} a[\beta] = \sum_{\vec{L},\vec{M}} (-1)^{t(\vec{L})+t(\vec{M})+1} \sum_{\beta \in \bigcap\limits_{k \in \vec{M}} \bigcap\limits_{l \in \vec{L}} B_k(\gamma|l)} a[\beta]. \tag{1.19}$$

Суммирование справа в этом равенстве ведется по всевозможным наборам $\vec{L}$, вложенным в $\{1, 2, \ldots, s\}$, и всевозможным подмножествам $\vec{M}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Внутреннее суммирование в правой части (1.19) несложно выполнить, воспользовавшись формулами (1.17) и (1.11):

$$\sum_{\beta \in \bigcap\limits_{k \in \vec{M}} \bigcap\limits_{l \in \vec{L}} B_k(\gamma|l)} a[\beta] = b[\gamma Q], \tag{1.20}$$

где целочисленные координаты $(\gamma Q)_j$ вектора γQ определены равенством (1.18). Подставив соотношение (1.20) в (1.19), а результат — в формулу (1.15), окончательно получим

$$a[\gamma] = b_\varphi[\gamma] - \lim_{s \to \infty} \sum_{\vec{L} = \vec{L}(s)} \sum_{\vec{M}} (-1)^{t(\vec{L})+t(\vec{M})+1} b_\varphi[\gamma Q(\vec{L}, \vec{M})].$$

Таким образом, коэффициенты $a[\gamma]$ выражены через $b_\varphi[\gamma]$, что и требовалось.

Условия принадлежности пространству $\widetilde{L}_2^{(m)}$ функции $\varphi(x)$ с коэффициентами Фурье $a[\gamma]$, выраженными в терминах погрешностей $b_\varphi[\gamma]$, трудно проверяемы.

Исследовав сходимость кубатурных формул на фиксированных функциях из $\widetilde{L}_2^{(m)}$, рассмотрим вопрос о сходимости такого рода формул на бесконечно дифференцируемых функциях из $\widetilde{L}_2^{(m)}$.

Для любой заданной периодической бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ имеются различные оценки погрешности, задаваемой формулой (1.1). Эти оценки зависят от выбранного значения m:

$$|(l_h, \varphi)| \le K_m h^m \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|. \tag{1.21}$$

Делая различные предположения о скорости роста нормы $\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|$ при возрастании m, получаем серию неравенств (1.21). Зная, как ведет себя K_m, можно для каждого h выбрать самое сильное из этих неравенств и при этом установить оценку

$$|(l_h, \varphi)| \leq \inf_m \{K_m \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\| h^m\} = \eta(h, \varphi). \tag{1.22}$$

Построение функции $\eta(h, \varphi)$ представляет собой важную задачу. Обратная к $\eta(h, \varphi)$ функция $\eta^{-1}(\varepsilon, \varphi)$, т. е. такая, что $\eta^{-1}(\eta(h, \varphi), \varphi) = h$, дает значение h, которое необходимо выбрать для достижения требуемой точности $\varepsilon = \eta(h, \varphi)$.

Поскольку для бесконечно дифференцируемых функций число m любое, очевидно, что погрешность (l_h, φ) кубатурной формулы для любой такой функции стремится к нулю быстрее любой степени h.

Как правило, при фиксированном значении h среди оценок (1.21), отвечающих различным m, имеется наилучшая, причем номер этой оценки $m_0(h)$ зависит от h. В противном случае формула будет абсолютно точной для достаточно малых h. Обозначим

$$K(m, \varphi) = K_m \|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|.$$

Лемма VII.1. *Если для некоторой функции φ при заданном значении $h = h_0$ найдется бесконечное множество значений $m = m_j$, для которых $K(m, \varphi) h_0^m$ остается ограниченным, то для такой φ при всех $h < h_0$ кубатурная формула будет точной, т. е.*

$$(l_h, \varphi) = 0.$$

Эта лемма сразу следует из оценки

$$|(l_h, \varphi)| < K(m_j, \varphi) h^{m_j} = (h/h_0)^{m_j} \left[K(m_j, \varphi) h_0^{m_j}\right],$$

и ясно, что (l_h, φ) при $h < h_0$ меньше любого наперед заданного числа.

§ 2. Классы функций $H(\kappa, A, \lambda)$ и $C(\kappa, A, \lambda)$

Рассмотрим некоторые специальные пространства бесконечно дифференцируемых функций, определяемые скоростью роста их производных в зависимости от порядка.

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$, заданная в области Ω и бесконечно дифференцируемая в замыкании $\overline{\Omega}$, ***принадлежит*** там *классу* $H(\varkappa, A, \lambda)$, если для любого $m \geq 1$ удовлетворяются неравенства

$$\|\varphi \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| \equiv \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq K m^{\varkappa m} A^m m^\lambda,$$

где постоянная K не зависит от m. Несложно убедиться, что множество $H(\varkappa, A, \lambda)$ представляет собой линейное пространство, и при этом выполняется

Лемма VII.2. *Для любых вещественных* λ_1, λ_2, A_1, A_2 *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы вложения*

$$\begin{gathered} H(\varkappa, A, \lambda - \varepsilon) \subset H(\varkappa, A, \lambda); \quad H(\varkappa, A - \varepsilon, \lambda_1) \subset H(\varkappa, A, \lambda_2); \\ H(\varkappa - \varepsilon, A_1, \lambda_1) \subset H(\varkappa, A_2, \lambda_2). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) следуют из определения классов $H(\varkappa, A, \lambda)$.

Мы будем пользоваться естественными обозначениями:

$$H(\varkappa, A) = \bigcup_{\lambda} H(\varkappa, A, \lambda), \quad H(\varkappa) = \bigcup_{A} H(\varkappa, A).$$

Наряду с классом $H(\varkappa, A, \lambda)$ рассмотрим множество $C(\varkappa, A, \lambda)$, состоящее из функций, для которых при любом $m \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|\varphi \mid C^{(m)}(\Omega)\| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \right\}^{1/2} \leq K m^{\varkappa m} A^m m^\lambda. \tag{2.2}$$

Пространства $C(\varkappa, A, \lambda)$ удовлетворяют соотношениям вложения, подобным (2.1). Классы $C(\varkappa, A)$ и $C(\varkappa)$ определим следующим образом:

$$C(\varkappa, A) = \bigcup_{\lambda} C(\varkappa, A, \lambda), \quad C(\varkappa) = \bigcup_{A} C(\varkappa, A).$$

Неравенство (2.2) позволяет получить очевидную оценку каждой производной порядка m от φ в произвольной точке $x \in \overline{\Omega}$. Для любой $\varphi \in C(\varkappa, A, \lambda)$ при $m \geq 1$ имеем

$$\sqrt{m!/\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)| \leq K m^{\varkappa m} A^m m^\lambda. \tag{2.3}$$

Обратно, для любой функции $\varphi(x)$, заданной в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющей (2.3), элементарным путем получим

$$\|\varphi \mid C^{(m)}(\Omega)\| \le K m^{\varkappa m} A^m m^{\lambda} \Big(\sum_{|\alpha|=m} 1 \Big)^{1/2},$$

где величина

$$\sum_{|\alpha|=m} 1 = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

представляет собой полином от m степени $n-1$. Значит, функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.3), принадлежит пространству $C(\varkappa, A, \lambda + (n-1)/2)$.

Теорема VII.3. *Пусть $k = [n/2] + 1$, тогда справедливы вложения*

$$C(\varkappa, A, \lambda - (n-1)/2) \subset H(\varkappa, A, \lambda) \subset C(\varkappa, A, \lambda + k\varkappa). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Первое из вложений (2.4) несложно получить из определения нормы $\|\varphi \mid L_2^{(m)}(\Omega)\|$, воспользовавшись оценками производных типа (2.3), вытекающими из принадлежности φ пространству $C(\varkappa, A, \lambda - (n-1)/2)$.

Докажем второе из вложений (2.4). Преобразовав выражение нормы для $\varphi \in H(\varkappa, A, \lambda)$, получим

$$\|\varphi \mid L_2^{(m+k)}(\Omega)\|^2 = \int_{\Omega} \sum_{\substack{1 \le j_s \le n \\ s=1,2,\dots,m+k}} \left(\frac{\partial^{m+k}\varphi}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_{m+k}}} \right)^2 dx$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_s \le n \\ s=1,2,\dots,m}} \int_{\Omega} \sum_{\substack{1 \le j_s \le n \\ m+1 \le s \le m+k}} \left[\frac{\partial^k}{\partial x_{j_{m+1}} \dots \partial x_{j_{m+k}}} \left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \right) \right]^2 dx$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_s \le n \\ s=1,2,\dots,m}} \left\| \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \mid L_2^{(k)}(\Omega) \right\|^2$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \|D^{\alpha}\varphi \mid L_2^{(k)}(\Omega)\|^2. \qquad (2.5)$$

По условию производная $D^\alpha\varphi(x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и принадлежит пространству $L_2^{(k)}(\Omega)$. Применив к ней первую теорему вложения [179], получим

$$|D^\alpha\varphi(x)|^2 \le K\left[\|D^\alpha\varphi \mid L_2(\Omega)\| + \left\|D^\alpha\varphi \mid L_2^{(k)}(\Omega)\right\|\right]^2,$$

где $x \in \overline{\Omega}$ и постоянная K не зависит от m. Отсюда и из (2.5) при любом $m \ge 1$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|\varphi \mid C^{(m)}(\Omega)\|^2 &\le \sup_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|D^\alpha\varphi(x)|^2 \\ &\le K(m+k)^{2\varkappa(m+k)}A^{2(m+k)}(m+k)^{2\lambda}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Оценим выражение в правой части этого неравенства. Очевидно, что $(m+k)^{2\lambda} \le Km^{2\lambda}$. Далее,

$$\begin{aligned}(m+k)^{\varkappa(m+k)} &= m^{\varkappa(m+k)}\left[\left(1-\frac{k}{m+k}\right)^{(m+k)/k}\right]^{-\varkappa k} \\ &\le m^{\varkappa(m+k)}e^{k\varkappa(1+\eta)},\end{aligned}$$

где η сколь угодно мало при большом m. Отсюда и из (2.6) следует, что φ действительно принадлежит пространству $C(\varkappa, A, \lambda + k\varkappa)$.

Теорема VII.3 доказана.

Из теоремы VII.3 вытекает, что классы $H(\varkappa, A)$ и $C(\varkappa, A)$, а также классы $H(\varkappa)$ и $C(\varkappa)$, совпадают друг с другом. Отметим, что множество $H(\varkappa) = C(\varkappa)$ известно в литературе как класс функций Жевре [182]. Важным свойством этого класса является то, что $H(\varkappa)$ представляет собой алгебру. Сумма двух функций из $H(\varkappa)$, а также произведение функции из $H(\varkappa)$ на комплексное число также являются элементом класса $H(\varkappa)$. Кроме того, справедлива

Теорема VII.4. *Произведение любых двух функций класса $H(\varkappa)$ является элементом этого класса.*

Доказательство. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ принадлежат $C(\varkappa, A, \lambda)$. Производная порядка α от их произведения представима равенством

$$D^\alpha(\varphi_1\varphi_2) = \sum_{0\le\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta\varphi_1(x)D^{\alpha-\beta}\varphi_2(x).$$

Пользуясь имеющимися по условию оценками для $D^\beta\varphi_1(x)$ и $D^{\alpha-\beta}\varphi_2(x)$, получаем в любой точке $x \in \overline{\Omega}$ следующее неравенство:

$$|D^\alpha(\varphi_1\varphi_2)(x)| \\ \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}|\beta|^{\varkappa|\beta|}A^{|\beta|}|\beta|^\lambda|\alpha-\beta|^{\varkappa|\alpha-\beta|}A^{|\alpha-\beta|}|\alpha-\beta|^\lambda.$$

Заменяя в правой части этого неравенства $|\beta|$ и $|\alpha-\beta|$ в основаниях степеней на $|\alpha|$, отчего оно только возрастает, получим

$$|D^\alpha(\varphi_1\varphi_2)(x)| \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(|\alpha|^\varkappa A)^{|\beta|+|\alpha-\beta|}|\alpha|^{2\lambda} \\ = |\alpha|^{\varkappa|\alpha|}A^{|\alpha|}|\alpha|^{2\lambda}\left(\sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\right),$$

где сумма в круглых скобках равна $2^{|\alpha|}$. Таким образом, произведение функций $\varphi_1\varphi_2$ принадлежит пространству $H(\varkappa)$.

Теорема VII.4 доказана.

Замена $x = Ky$ — изменение масштаба — переводит класс $C(\varkappa, A, \lambda)$ по x в класс $C(\varkappa, A_1, \lambda)$ по y, где $A_1 = KA$. Функции класса $C(\varkappa, A, \lambda)$ удовлетворяют некоторому условию инвариантности при замене переменных. Имеет место

Теорема VII.5. *При $\varkappa \geq 1$ аналитическая вплоть до границы области Ω замена переменных $x = \chi(y)$ переводит функцию $\varphi(x)$ класса $C(\varkappa, A, \lambda)$ в функцию $\psi(y)$ класса $C(\varkappa, A_2, \lambda_2)$ с тем же значением $\varkappa$.*

Доказательство. Для простоты выкладок поместим начало координат в выбранную точку x пространства, и пусть эта точка отвечает также началу координат y, т. е. $\chi(0) = 0$. Рассмотрим многочлен

$$T_m(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{D^\alpha\varphi(0)x^\alpha}{\alpha!},$$

являющийся отрезком разложения Тейлора для $\varphi(x)$. Положим $Q_m(y) = T_m(\chi(y))$. Функция $Q_m(y)$ имеет в начале координат те же производные по y до порядка m включительно, что и функция

$\psi(y) = \varphi(\chi(y))$. В этом легко убедиться, записав $\psi(y)$ в виде суммы функции $Q_m(y)$ и остаточного члена $R_m(\chi(y))$ разложения Тейлора для $\varphi(x)$. Функция $R_m(x)$ в начале координат имеет нуль степени $m+1$. Так как $\chi(0) = 0$, то $R_m(\chi(y))$ также имеет при $y = 0$ нуль порядка $m+1$.

Таким образом, достаточно оценить производные до порядка m от функции $Q_m(y)$, чтобы получить оценку сверху соответствующих производных от $\psi(y)$. Займемся этим.

Построим общую мажоранту для всех компонент вектор-функции $\chi(y) = (\chi_1(y), \ldots, \chi_n(y))$, т. е. такую функцию $Y(y)$, что для всех $j = 1, \ldots, n$ и любого α в окрестности начала координат имеет место неравенство

$$|D^\alpha \chi_j(y)| \le D^\alpha Y(|y_1|, \ldots, |y_n|).$$

Такой общей мажорантой при достаточно большом M и достаточно малом R будет, как это можно доказать, пользуясь аналитичностью $\chi(y)$, следующая дробь:

$$Y(y) = M \Big/ \left[1 - \frac{1}{R}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right].$$

Пусть $\xi = y_1 + \cdots + y_n$ и $f(\xi) = RM/(R-\xi)$, тогда $Y(y) = f(\xi)$. Несложно подсчитать, что при $|\alpha| = m$

$$D^\alpha Y(y) = \frac{d^m f}{d\xi^m} = \frac{RMm!}{(R-\xi)^{m+1}}. \tag{2.7}$$

Все производные от $(\chi(y))^\alpha$ представляют собой многочлены от производных $\chi_j(y)$ с положительными коэффициентами. Так как в начале координат производные от $Y(y)$ положительны и больше соответствующих производных от $\chi_j(y)$, то функция

$$M_m(y) = \sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{|\alpha|=l} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}(Y(y))^{|\alpha|}\right] = \sum_{l=0}^{m} b_l \left(\frac{RM}{R-\xi}\right)^l \equiv \Lambda_m(\xi),$$

где $b_l = \sum\limits_{|\alpha|=l} D^\alpha \varphi(0)/\alpha!$, является мажорантой для $Q_m(y)$. Приняв также во внимание, что все производные по y от $M_m(y)$ равны производным того же порядка от $\Lambda_m(\xi)$ по ξ, при $|\alpha| = m$ получим

$$|D^\alpha \psi(y)|\,|_{y=0} = |D^\alpha Q_m(y)|\,|_{y=0} \le \frac{d^m \Lambda_m}{d\xi^m}(\xi)\bigg|_{\xi=0}. \tag{2.8}$$

Пользуясь неравенством Коши для сумм и тем, что по условию $\varphi(x)$ принадлежит $C(\varkappa)$, приходим к соотношению

$$|b_l| \le \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!}|D^\alpha \varphi(0)|$$
$$\le \frac{1}{l!}\left\{\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!}|D^\alpha \varphi(0)|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!}\right\}^{1/2} \le \frac{K l^{\varkappa l} A^l l^\lambda n^{l/2}}{l!}.$$

Отсюда и из формулы Стирлинга вытекает неравенство

$$\left.\frac{d^m \Lambda_m}{d\xi^m}(\xi)\right|_{\xi=0} \le K \sum_{l=0}^{m} l^{(\varkappa-1)l} R^{-m} (e\sqrt{n}AM)^l l^{\lambda-1/2} \frac{(m+l-1)!}{(l-1)!}.$$

Слагаемые в его правой части возрастают вместе с l в силу предположения $\varkappa \ge 1$. Заменяя их самым большим, т. е. таким, для которого $l = m$, имеем

$$\left.\frac{d^m \Lambda_m}{d\xi^m}\right|_{\xi=0} \le K m^{(\varkappa-1)m} A_1^m m^{\lambda+1/2} \frac{(2m-1)!}{(m-1)!},$$

где $A_1 = e\sqrt{n}AM/R$. Применив к факториалам в этом неравенстве формулу Стирлинга, получим искомую оценку:

$$\left.\frac{d^m \Lambda_m}{d\xi^m}\right|_{\xi=0} \le K m^{\varkappa m} A_2^m m^{\lambda_2}.$$

Подставив ее в (2.8), видим, что $\psi(y) \in C(\varkappa, A_2, \lambda_2)$.

Теорема VII.5 доказана.

§ 3. Свойства классов $H(\kappa, A)$ и $C(\kappa, A)$ при $\kappa \ge 1$

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ограниченную гладкой аналитической поверхностью $\mathscr{F}(x) = 0$. При этом $\mathscr{F}(x) < 0$ внутри Ω и $\mathscr{F}(x) > 0$ вне этой области. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $H(\varkappa, A, \lambda)$ в области Ω_1, содержащей Ω внутри себя. Тогда имеет место

Теорема VII.6. *Функцию $\varphi(x) \in H(\varkappa, A, \lambda)$ при $\varkappa > 1$ можно продолжить финитным образом на любую область $\Omega_2 \supset \overline{\Omega}_1$, чтобы в Ω_2 она была элементом некоторого пространства $H(\varkappa, A_1, \lambda_1)$.*

Из этой теоремы вытекает как следствие тот факт, что значения функции $\varphi(x) \in H(\varkappa)$ в двух гладких аналитических непересекающихся областях Ω_1 и Ω_2 можно задавать независимо друг от друга.

Доказательству теоремы VII.6 предпошлем следующую лемму.

Лемма VII.3. *Функция $\varphi_m(y) = e^{-1/y^m}$, заданная на полуоси $0 \le y < \infty$, является в этом промежутке элементом пространства $C(1 + 1/m, A, \lambda)$.*

Доказательство. Производная от $\varphi_m(y)$ порядка k имеет вид

$$\frac{d^k \varphi_m}{dy^k}(y) = \left(\sum_{s=1}^{k} A_s^{(k)} y^{-sm-k} \right) e^{-1/y^m}. \tag{3.1}$$

Это очевидно при $k = 1$, а дифференцирование равенства (3.1) показывает, что эта формула, будучи верной для k, остается верной и для $k+1$. Таким образом, согласно принципу математической индукции равенство (3.1) справедливо для любого k.

Дифференцируя равенство (3.1) один раз, получим рекуррентную формулу, связывающую две последовательные производные от функции $\varphi_m(y)$:

$$\begin{aligned} e^{1/y^m} \frac{d^{k+1}\varphi_m}{dy^{k+1}}(y) = -\big\{ &(m+k)A_1^{(k)} y^{-m-k-1} + \\ &\cdots + (sm+k)A_s^{(k)} y^{-sm-k-1} + \cdots + (mk+k)A_k^{(k)} y^{-mk-k-1} \big\} \\ &+ \big\{ mA_1^{(k)} y^{-2m-k-1} + \cdots + mA_s^{(k)} y^{-(s+1)m-k-1} + \\ &\cdots + mA_k^{(k)} y^{-(k+1)m-k-1} \big\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что коэффициенты $A_s^{(k)}$ суть решения разностного уравнения

$$A_s^{(k+1)} = -(sm+k)A_s^{(k)} + mA_{s-1}^{(k)} \tag{3.3}$$

при условиях

$$A_s^{(k)} = 0 \quad \text{при } s \le 0; \quad A_s^{(k)} = 0 \quad \text{при } s > k; \quad A_1^{(1)} = m. \tag{3.4}$$

Сделав в (3.3) замену $A_s^{(k)} = (-1)^{k+s} m^k C_s^{(k)}$, с учетом условий (3.4) получим

$$C_s^{(k+1)} = \left(s + \frac{k}{m}\right) C_s^{(k)} + C_{s-1}^{(k)}; \quad C_1^{(1)} = 1;$$
$$C_s^{(k)} = 0 \text{ при } s \le 0 \text{ или } s > k.$$

Покажем, что при $0 < s \le k$ для решения этой задачи справедлива формула

$$C_s^{(k)} = \sum_{0<j_1<\dots<j_{s-1}<k} \left[\prod_{0<t<j_1} \left(1 + \frac{t}{m}\right) \dots \right.$$
$$\left. \times \prod_{j_{l-1}<t<j_l} \left(l + \frac{t}{m}\right) \cdots \prod_{j_{s-1}<t<k} \left(s + \frac{t}{m}\right) \right]. \quad (3.5)$$

Каждое слагаемое в правой ее части — это произведение $k-s$ сомножителей. При этом переменная t, по которой проводится умножение, пробегает все значения от 1 до $k-1$, исключая $j_1, j_2, \dots, j_{s-1}$. При каждом пропущенном значении t происходит увеличение числа l в множителях вида $l+t/m$ на единицу. Справедливость формулы (3.5) установим индукцией по k.

Пусть (3.5) верна для всех $C_{s-1}^{(k)}$ и $C_s^{(k)}$. Вычислим сумму

$$(s + k/m) C_s^{(k)} + C_{s-1}^{(k)}, \quad (3.6)$$

подставляя в нее значения $C_s^{(k)}$ и $C_{s-1}^{(k)}$ из (3.5).

Величина $C_{s-1}^{(k)}$ равна сумме произведений $k+1-s$ сомножителей типа $l+t/m$ с пропуском $s-2$ значений $j_1, j_2, \dots, j_{s-2}$. Произведения таких же множителей с пропуском $s-1$ значений $j_1, j_2, \dots, j_{s-1}$, где $j_{s-1} = k < k+1$, присутствуют и в сумме вида (3.5), составленной для параметров s и $k+1$.

В сумме, соответствующей первому слагаемому выражения (3.6), содержится также $k+1-s$ множителей типа $l+t/m$, следующих друг за другом по старому образцу с пропуском произвольных $s-1$ чисел: $j_1, j_2, \dots, j_{s-1}$. При этом если $j_{s-1} < k-1$, то новый множитель $s + k/m$ удлиняет последнее произведение в каждом слагаемом

на один множитель, а для $j_{s-1} = k-1$ вводит это произведение, отсутствующее в $C_s^{(k)}$. Таким образом,

$$\frac{k+s}{m}C_s^{(k)} + C_{s-1}^{(k)} = \sum_{0<j_1<\cdots<j_{s-1}<k+1} \left\{ \prod_{l=1}^{s} \prod_{j_{l-1}<t<j_l} \left(l + \frac{t}{m}\right) \right\}.$$

Тем самым справедливость формулы (3.5) установлена.

Оценим величину коэффициента $C_s^{(k)}$ сверху. Заменяя во всех множителях правой части (3.5) сумму $l + t/m$ на $s + k/m$ и замечая, что общее число произведений под знаком суммы в (3.5) равно числу выборок $j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}$ из чисел $1, 2, \ldots, k-1$, т. е. равно

$$\frac{(k-1)!}{(s-1)!(k-s)!} < 2^k,$$

получим

$$C_s^{(k)} \le 2^k(s+k/m)^{k-s}, \quad \left|A_s^{(k)}\right| = m^k C_s^{(k)} \le (2m)^k(s+k/m)^{k-s}. \quad (3.7)$$

Вернемся к оценке производных от $\varphi_m(y)$. Легко проверить, что

$$\max_{y\ge 0} y^{-k-sm}e^{-1/y^m} = \left(\frac{sm+k}{me}\right)^{(sm+k)/m}$$
$$= \left(s + \frac{k}{m}\right)^{s+k/m} e^{-(s+k/m)}.$$

Отсюда, используя равенство (3.1) и оценку (3.7), получаем

$$\left|\frac{d^k\varphi_m}{dy^k}(y)\right| \le \sum_{s=1}^{k}(2m)^k \left(s + \frac{k}{m}\right)^{k+k/m} e^{-(s+k/m)}$$
$$\le k(2m)^k \left[k\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]^{k(1+1/m)} e^{-k(1+1/m)}.$$

Но это и означает, что функция $\varphi_m(y)$ принадлежит пространству $C(\varkappa, A, \lambda)$ при $\varkappa = 1 + 1/m$, $A = 2m[(1+1/m)/e]^{1+1/m}$, $\lambda = 1$.

Лемма VII.3 доказана.

Следствие 3.1. *Функция $\varphi_{0,m}(y)$, равная нулю вне отрезка $[0,1]$, а внутри него совпадающая с произведением $\varphi_m(y)\varphi_m(1-y)$, принадлежит пространству $C(1+1/m)$ на всей оси $-\infty < y < \infty$.*

Из формулы (3.1) следует, что функция $\varphi_{0,m}(y)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные при $y=0$ и $y=1$ равны нулю. Пользуясь теоремой VII.4 и леммой VII.3, видим, что $\varphi_{0,m}(y)$ действительно принадлежит классу $C(1+1/m)$.

Следствие 3.2. *Функция $\psi_m(y)$, задаваемая равенством*

$$\psi_m(y) = \frac{1}{c_{m,0}} \int\limits_y^\infty \varphi_{0,m}(\xi)\, d\xi, \tag{3.8}$$

где

$$c_{m,0} = \int\limits_0^1 \varphi_{0,m}(\xi)\, d\xi,$$

представляет собой элемент пространства $C(1+1/m)$, равный нулю при $y \geq 1$ и единице при $y \leq 0$.

Следствие 3.3. *Пусть Ω — ограниченная область с аналитической границей, определяемой уравнением $\mathscr{F}(x) = 0$. При этом $\mathscr{F}(x) < 0$ внутри Ω и $\mathscr{F}(x) > 0$ вне этой области. Пусть, кроме того, система равенств $\mathscr{F}(x) = \varepsilon$ при малых ε определяет аналитическое семейство поверхностей, близких к границе Ω. Тогда при любом $m > 0$ существует функция, которая финитна в ограниченной области Ω_1, включающей в себя Ω, равна единице в Ω и принадлежит классу $C(1+1/m)$.*

Несложно убедиться, что в качестве такой функции можно взять следующую: $\psi_m(\mathscr{F}(x)/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, а $\psi_m(y)$ определена равенством (3.8). Принадлежность этой функции классу $C(1+1/m)$ следует из теоремы VII.5.

Доказательство теоремы VII.6. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $C(\varkappa)$, где $\varkappa = 1+1/m$, а область Ω ограничена аналитической поверхностью $\mathscr{F}(x) = 0$. Рассмотрим произведение $\psi_m(\mathscr{F}(x)/\varepsilon)\varphi(x)$. По теореме VII.4 это элемент класса $C(\varkappa)$, а в силу следствия 3.2 этот элемент равен $\varphi(x)$ внутри Ω и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ равен нулю вне Ω_2.

Теорема VII.6 доказана.

Рассмотрим случай, когда $\varkappa = 1$.

Теорема VII.7. *Класс $H(1, A)$ состоит из функций, аналитических в области Ω.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Omega$. Оценим член степени m ряда Тейлора функции $\varphi \in H(1, A)$ в точке x_0. Не ограничивая общности, можно считать, что x_0 совпадает с началом координат. Используя неравенство Коши, получим

$$\left|\sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right| \le \left\{\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(0)|^2\right\}^{1/2} \frac{1}{m!} \left\{\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^{2\alpha}\right\}^{1/2}$$
$$= \frac{|x|^m}{m!} \left\{\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(0)|^2\right\}^{1/2}$$

Функция φ принадлежит пространству $H(1, A)$, поэтому последнее неравенство можно продолжить следующим образом:

$$\left|\sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right| \le \frac{|x|^m}{m!} m^m A^m m^\lambda. \tag{3.9}$$

Согласно формуле Стирлинга найдутся постоянные K_1, K_2 такие, что для любого $m \ge 1$ справедливо неравенство

$$K_1 (m/e)^m \sqrt{m} < m! < K_2 (m/e)^m \sqrt{m+1}. \tag{3.10}$$

Пользуясь оценкой $m!$ снизу, из (3.9) получим неравенство

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{\alpha} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right| \le K \sum_{m=0}^{\infty} (A|x|e)^m \, m^{\lambda - 1/2}. \tag{3.11}$$

Таким образом, ряд Тейлора для $\varphi(x)$ заведомо сходится при $|x| < 1/(Ae)$.

Теорема VII.7 доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема VII.8. *При $\varkappa < 1$ класс $C(\varkappa, A, \lambda)$ состоит из целых функций.*

Более подробно свойства классов $C(\varkappa, A)$ при $\varkappa < 1$ будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 4. Классы функций $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$

Оценки роста функций одной независимой переменной, принадлежащих пространству $C(\varkappa, A)$ при $\varkappa < 1$, получены в ряде классических работ [82, 83, 87]. Аналогичные оценки оказываются верными и в случае функций многих переменных. Приведем их здесь.

Будем говорить, что *целая функция $\varphi(x)$ от n переменных принадлежит классу* $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, если существует такая постоянная K, что для всех комплексных x выполнено неравенство

$$|\varphi(x)| \leq K|x|^{\mu} e^{\sigma|x|^{\rho}}. \tag{4.1}$$

Величины ρ и σ принято называть соответственно *порядком* и *типом роста* целой функции $\varphi(x)$.

Объединение классов $\Psi(\rho, \sigma, \lambda)$ по всем λ обозначим как $\Psi(\rho, \sigma)$. Справедлива следующая

Теорема VII.9. *Если целая функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, где ρ и σ положительны, то в любой ограниченной области Ω эта функция принадлежит $C(\varkappa, A, \lambda)$, где*

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{\rho}, \quad A = \frac{(\sigma\rho e)^{1/\rho}}{e}, \quad \lambda = \frac{5n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\mu}{\rho}. \tag{4.2}$$

Доказательству теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма VII.4. *Пусть θ — единичный вектор в n-мерном пространстве с неотрицательными компонентами $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Для функции*

$$\Phi(\theta) = \theta^y = \theta_1^{y_1}\theta_2^{y_2}\ldots\theta_n^{y_n},$$

где $y_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = s$, справедливо равенство

$$\max_{|\theta|=1}\Phi(\theta) = \frac{y^{y/2}}{s^{s/2}} = \frac{y_1^{y_1/2}y_2^{y_2/2}\ldots y_n^{y_n/2}}{s^{s/2}}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Отыщем максимум функции $\Phi(\theta)$ по правилу Лагранжа. Обозначим

$$\Psi(\theta) = \Phi(\theta) - \frac{\mu}{2}\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2.$$

Дифференцируя $\Psi(\theta)$ по θ_j и приравнивая соответствующие производные нулю, получим систему уравнений

$$y_j \frac{\Phi(\theta)}{\theta_j} - \mu\theta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда по свойству пропорций приходим к равенству

$$\Phi(\theta) = \mu \frac{\theta_j^2}{y_j} = \mu \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j} = \frac{\mu}{s}.$$

Таким образом, координаты θ_j точки максимума функций $\Phi(\theta)$ удовлетворяют условиям

$$\theta_j^2 = \frac{y_j}{s}, \quad \text{или} \quad \theta_j^{y_j} = \frac{y^{y_j/2}}{s^{y_j/2}}.$$

Из этих равенств следует (4.3).

Лемма VII.4 доказана.

В частности, при $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ имеем

$$\max_{|\theta|=1}(\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n) = \frac{1}{n^{n/2}}.$$

Наконец, для произвольных неотрицательных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, полагая $\theta_j^2 = \alpha_j / \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, получим

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{n} \right)^{n/2}$$

Это — известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Доказательство теоремы VII.9. Оценим при $|\alpha| = s$ значение производной $D^\alpha \varphi(0)/\alpha!$. Представим функцию $\varphi(x)$ контурным

интегралом, взятым в каждой плоскости комплексной переменной x по окружности $\Gamma_k = \{x_k : |x_k| = r\theta_k, \theta_k \geq 0\}$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \cdots \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n}{(x_1 - z_1) \ldots (x_n - z_n)}. \tag{4.4}$$

Окружности $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ выберем так, чтобы выполнялось нормировочное условие

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j^2 = |\theta|^2 = 1. \tag{4.5}$$

Дифференцируя равенство (4.4) и полагая $z = 0$, получим

$$\left| \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \right| \leq \frac{r^{-s}}{\theta^\alpha} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \cdots \int\limits_{\Gamma_n} |\varphi(x)| \frac{|dx_1|}{r\theta_1} \cdots \frac{|dx_n|}{r\theta_n}.$$

Функция $\varphi(x)$ по условию принадлежит классу $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, поэтому последнюю оценку можно продолжить следующим образом:

$$\left| \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \right| \leq K r^{\mu - s} e^{\sigma r^\rho} \theta^{-\alpha}. \tag{4.6}$$

Здесь $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — произвольный вектор с неотрицательными компонентами θ_j, удовлетворяющими условию (4.5). Выберем его так, чтобы правая часть (4.6) оказалась минимальной. Согласно лемме VII.4 получим неравенство

$$\left| \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \right| \leq K \alpha^{-\alpha/2} s^{s/2} r^{\mu - s} e^{\sigma r^\rho}, \tag{4.7}$$

где постоянная K не зависит ни от α, ни от r.

Будем считать, что $s = |\alpha| > \mu$, и минимизируем по $r > 0$ правую часть неравенства (4.7). При $\lambda > 0$ минимум функции $z^{-\lambda} e^z$ достигается в точке $z = \lambda$, т. е. равен $\lambda^{-\lambda} e^\lambda$. Положив $z = \sigma r^\rho$, т. е. $r = (z/\sigma)^{1/\rho}$, получим

$$\min_{r>0} r^{\mu - s} e^{\sigma r^\rho} = \min_{z>0} \left(\frac{z}{\sigma} \right)^{(\mu - s)/\rho} e^z = (\sigma \rho e)^{(s-\mu)/\rho} (s - \mu)^{(\mu - s)/\rho}.$$

Отсюда и из (4.7) следует неравенство

$$\left|\frac{D^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}\right| \le K\alpha^{-\alpha/2}(\sigma\rho e)^{(s-\mu)/\rho}s^{s/2+(\mu-s)/\rho}, \quad |\alpha| = s. \tag{4.8}$$

Из оценки (3.10) вытекает, что

$$s! \le K_2(s/e)^s\sqrt{s+1}, \quad \alpha! \le K_2\alpha^\alpha e^{-s}\prod_{j=1}^n\sqrt{\alpha_j+1}.$$

Отсюда и из (4.8) после простых выкладок приходим к неравенству

$$\sqrt{\frac{s!}{\alpha!}}|D^\alpha\varphi(0)| \le Ks^{(1-1/\rho)s}\left[\frac{1}{e}(\sigma\rho e)^{1/\rho}\right]^s s^{(n+1)/4+\mu/\rho}.$$

Возводя в квадрат обе его части, суммируя по α и замечая, что число различных α: $|\alpha| = s$ равно $(s+n-1)!/s!(n-1)!$, т. е. не больше Ks^{n-1}, приходим к оценке

$$\left\{\sum_{|\alpha|=s}\frac{s!}{\alpha!}|D^\alpha\varphi(0)|^2\right\}^{1/2} \le Ks^{(1-1/\rho)s}\left(\frac{1}{e}(\sigma\rho e)^{1/\rho}\right)^s s^{5n/4-3/4+\mu/\rho}.$$

Теорема VII.9 доказана.

Справедлива следующая в некотором смысле обратная к предыдущей

Теорема VII.10. *Целая функция $\varphi(x)$, принадлежащая классу $C(\varkappa, A, \lambda)$ при $\varkappa < 1$ и $\lambda \le -1/2$, является также элементом класса $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$,* где

$$\varkappa = 1 - 1/\rho, \quad (\sigma\rho e)^{1/\rho} = Ae, \quad \mu = (\lambda + 1/2)\rho. \tag{4.9}$$

Отметим, что $\varkappa$ и A связаны с ρ и σ той же зависимостью, что и в теореме VII.9, а из показателя λ вычитается $(5n+1)/4$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C(\varkappa, A, \lambda)$. Будем считать, что $\varphi(0) = 0$. Это не повлияет на общность рассуждений, так как по

условию $\mu \leq 0$ и поэтому любая постоянная принадлежит $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$. Рассмотрим ряд Тейлора в начале координат для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=s} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha. \tag{4.10}$$

Оценим однородный многочлен степени s в этом выражении. При $s \geq 1$ имеем неравенства

$$\left\{ \sum_{|\alpha|=s} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right\} \leq \left\{ \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(0)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{|\alpha|=s} \frac{1}{s!\alpha!} x^{2\alpha} \right\}^{1/2}$$
$$\leq K \frac{s^{\varkappa s} (A|x|)^s s^\lambda}{s!}.$$

Таким образом, сумма

$$\sum_{s=1}^{\infty} g(s) \equiv K \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^{\varkappa s} (A|x|)^s s^\lambda}{s!} \tag{4.11}$$

мажорирует ряд (4.10). Найдем отношение двух последовательных значений функции $g(s)$:

$$\frac{g(s+1)}{g(s)} = \frac{A|x|}{s^{1-\varkappa}} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{\varkappa s + \varkappa + \lambda - 1}$$

Для этой величины при $\varkappa \geq 0$ и $\lambda \geq 1 - \varkappa$ имеют место неравенства

$$2^\varkappa \frac{A|x|}{s^{1-\varkappa}} \leq \frac{g(s+1)}{g(s)} \leq e^\varkappa 2^{\varkappa+\lambda-1} \frac{A|x|}{s^{1-\varkappa}}.$$

Если же $\varkappa \geq 0$ и $\lambda < 1 - \varkappa$, то

$$2^\varkappa 2^{\varkappa+\lambda-1} \frac{A|x|}{s^{1-\varkappa}} \leq \frac{g(s+1)}{g(s)} \leq e^\varkappa \frac{A|x|}{s^{1-\varkappa}}.$$

Таким образом, при любых λ и $\varkappa$, $0 \leq \varkappa < 1$, найдутся два положительных числа $\eta_1 < \eta_2$ такие, что

$$\frac{g(s+1)}{g(s)} > 2 \quad \text{при} \quad s < \eta_1 (A|x|)^{1/(1-\varkappa)},$$
$$\frac{g(s+1)}{g(s)} < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad s < \eta_2 (A|x|)^{1/(1-\varkappa)}.$$

Несложно убедиться, что аналогичные постоянные η_1, η_2 существуют и при $\varkappa \le 0$. Имея это в виду, оценим сумму ряда (4.11).

Заметим, прежде всего, что все его члены при $s > s_2$, где $s_2 = [\eta_2(A|x|)^{1/(1-\varkappa)} + 1]$, убывают быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$. Следовательно, их сумма меньше чем $2g(s_2)$. Точно так же при $s < s_1 = [\eta_1(A|x|)^{1/(1-\varkappa)}]$ члены этого ряда будут убывать быстрее геометрической прогрессии с тем же знаменателем при убывании s от s_1 до единицы. Таким образом, их сумма будет меньше чем $2g(s_1)$. Значит, сумму s_1 первых членов и весь остаток ряда (4.11), начиная с члена s_2, можно заменить суммой оставшихся слагаемых, получив при этом неравенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} g(s) \le 2 \sum_{s=s_1}^{s_2} g(s). \tag{4.12}$$

Оценим последнюю сумму в (4.12), заменив в ней каждое слагаемое максимальным:

$$\sum_{s=s_1}^{s_2} g(s) \le K(s_2 - s_1) \max_{s_1 \le s \le s_2} \frac{s^{\varkappa s}(A|x|)^s s^{\lambda}}{s!}.$$

Пользуясь оценкой (3.10) для $s!$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{s=s_1}^{s_2} g(s) &\le K(s_2 - s_1) \max_{s_1 \le s \le s_2} s^{(\varkappa-1)s}(A|x|e)^s s^{\lambda-1/2} \\ &\le K(s_2 - s_1) \max_{s_1 \le s \le s_2} s^{\lambda-1/2} \max_{s_1 \le s \le s_2} s^{(\varkappa-1)s}(A|x|e)^s. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Из определения номеров s_1 и s_2 следует очевидное неравенство

$$(s_2 - s_1) \max_{s_1 \le s \le s_2} s^{\lambda-1/2} \le K|x|^{(\lambda+1/2)/(1-\varkappa)}. \tag{4.14}$$

Чтобы оценить второй максимум в (4.13), сделаем замену

$$s = z(Ae|x|)^{1/(1-\varkappa)}, \quad \text{или} \quad z = s(Ae|x|)^{-1/(1-\varkappa)}.$$

Тогда

$$\max_{s_1 \le s \le s_2} s^{(\varkappa-1)s}(A|x|e)^s \le \max_{z \ge 0}(z^{-z})^{(1-\varkappa)(Ae|x|)^{1/(1-\varkappa)}}.$$

Максимум функции z^{-z} достигается при $z = 1/e$, поэтому последнее неравенство можно продолжить следующим образом:

$$\max_{s_1 \le s \le s_2} s^{(\varkappa-1)s}(A|x|e)^s \le e^{(1-\varkappa)e^{-1}(Ae|x|)^{1/(1-\varkappa)}}. \tag{4.15}$$

После подстановки неравенств (4.14), (4.15) в (4.13), а результата — в (4.12), получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} g(s) \le K|x|^{(\lambda+1/2)/(1-\varkappa)} e^{(1-\varkappa)e^{-1}(Ae)^{1/(1-\varkappa)}|x|^{1/(1-\varkappa)}}.$$

Положив здесь $\rho = 1/(1-\varkappa)$, $\sigma\rho e = (Ae)^\rho$, $\mu = (\lambda + 1/2)\rho$ и вспоминая, что ряд слева является мажорантой для $\varphi(x)$, видим, что $\varphi(x)$ действительно принадлежит классу $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$.

Теорема VII.10 доказана.

§ 5. Классы периодических функций $\widetilde{H}(\kappa, A, \lambda)$

До сих пор в этой главе не предполагалась периодичность функции $\varphi(x) \in H(\varkappa, A, \lambda)$. Сейчас будем считать это условие выполненным. При этом область определения Ω функции $\varphi(x)$ представляет собой фундаментальный параллелепипед ортогональной матрицы H.

Множество всех периодических функций с матрицей периодов H образует в $H(\varkappa, A, \lambda)$ подпространство, которое будем обозначать через $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Изучим более подробно его устройство.

Сначала рассмотрим случай $\varkappa = 0$. Пусть имеется тригонометрический многочлен n комплексных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$P(x) = \sum_{\xi \in \Xi} a[\xi] e^{i2\pi\xi x}, \tag{5.1}$$

где Ξ — некоторое конечное множество в $\mathbb{Z}^n$, на котором определена функция $a[\xi]$.

Множество $N_P = \{\xi \in \Xi : a[\xi] \ne 0\}$ будем называть *носителем коэффициентов многочлена* $P(x)$, а число $R_P = \max\limits_{\xi \in N_P} |\xi|$ — *радиусом носителя* N_P.

Многочлен $P(x)$, очевидно, можно записать в виде

$$P(x) = \sum_{\xi \in N_P} a[\xi] e^{i2\pi\xi x}. \tag{5.2}$$

Радиус носителя коэффициентов для тригонометрических многочленов аналогичен степени обычного алгебраического многочлена.

Лемма VII.5. *Многочлен $P(x)$ с радиусом носителя коэффициентов R_P представляет собой целую функцию с порядком роста $\rho = 1$ и типом $\sigma = 2\pi R_P$.*

Доказательство. Оценим отдельно каждое слагаемое, входящее в состав суммы (5.2). Пусть $x_k = u_k + iv_k$, тогда

$$|a[\xi]e^{i2\pi\xi x}| = |a[\xi]|e^{2\pi\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j v_j} \le e^{2\pi|\xi|\,|v|}|a[\xi]| \le |a[\xi]|e^{2\pi R_P|x|}.$$

Таким образом, $|P(x)| \le \Big(\sum\limits_{\xi\in N_P}|a[\xi]|\Big)e^{2\pi R_P|x|}$. Отсюда сразу вытекает неравенство (4.1) со значениями $\rho = 1$, $\sigma = 2\pi R_P$ и $\mu = 0$.

Лемма VII.5 доказана.

Лемма VII.6. *У всякого многочлена вида (5.2), имеющего порядок роста $\rho = 1$ и тип σ, носитель коэффициентов N_P лежит в шаре радиуса $R_P = \sigma/2\pi$.*

Доказательство. Все слагаемые, входящие в состав $P(x)$, линейно независимы. Поэтому достаточно показать, что каждая функция $e^{i2\pi\xi x}$, имеющая порядок роста $\rho = 1$, может иметь тип σ лишь в том случае, когда $|\xi| \le \sigma/2\pi$.

Предположим противное, т. е. что $|\xi| > \sigma/2\pi$. Пусть $x = -iv\xi$ и $v > 0$, тогда имеют место равенства

$$|x| = v|\xi|, \quad e^{i2\pi\xi x} = e^{2\pi|\xi|\,|x|} = e^{(\sigma+\varepsilon_0)|x|},$$

где число $\varepsilon_0 = 2\pi|\xi| - \sigma$ положительно. Следовательно, функция $e^{i2\pi\xi x}$ не может удовлетворять неравенству (4.1) при $\rho = 1$ ни при каком μ. Значит, эта функция и многочлен $P(x)$ не принадлежат $\Psi(\rho, \sigma)$.

Лемма VII.6 доказана.

Теорема VII.11. *Всякая периодическая функция $\varphi(x)$ с матрицей периодов H порядка роста $\rho = 1$ и типа σ, принимающая вещественные значения при $x \in \mathbb{R}^n$, представляет собой тригонометрический многочлен вида*

$$\varphi(x) = \sum_{|H^{-1*}\alpha|\le\sigma/2\pi} a[\alpha]e^{i2\pi\alpha H^{-1}x}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Предположим для упрощения выкладок, что $\varphi(x)$ — периодическая функция с единичной матрицей периодов, причем $|\varphi(x)| \le e^{\sigma|x|}$. Введем новые переменные

$$x_k = \frac{1}{2\pi i}\ln z_k, \quad z_k = e^{i2\pi x_k}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \tag{5.4}$$

и положим

$$\psi(z) = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\ln z_1, \dots, \frac{1}{2\pi i}\ln z_n\right) = \sum_{|\alpha|\le\sigma/2\pi} a[\alpha]z^\alpha.$$

Этой заменой множество $\{x : -1/2 \le \operatorname{Re} x_k < 1/2,\ k = 1, \dots, n\}$, являющееся фундаментальной областью периодов функции $\varphi(x)$ в пространстве $\mathbb{C}^n_x$ комплексных переменных x, отображается на все пространство $\mathbb{C}^n_z$ комплексных переменных z.

В силу периодичности $\varphi(x)$ функция $\psi(z)$ однозначна в $\mathbb{C}^n_z$. Ясно также, что $\psi(z)$ регулярна всюду на конечном расстоянии от начала координат, кроме, может быть, тех точек, где хотя бы одна из переменных z_k обращается в нуль. Рассмотрим произведение

$$(z_1 z_2 \dots z_n)^{[\sigma/2\pi]+1}\psi(z) = \Psi(z)$$

и покажем, что оно ограничено в кубе $\{z : |z_k| < 1,\ k = 1, \dots, n\}$. Заметим, что

$$(z_1 z_2 \dots z_n)^{[\sigma/2\pi]+1}\psi(z) = \varphi(x)e^{i2\pi([\sigma/2\pi]+1)\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}. \tag{5.5}$$

Оценим правую часть (5.5) в области $\{x : \operatorname{Im} x_k > 0,\ k = 1, \dots, n\}$.

Пусть $x_k = u_k + iv_k$, где $v_k > 0$. Воспользуемся тем, что сумма n положительных чисел, т. е. длина ломаной в n-мерном пространстве, больше, чем длина вектора, соединяющего ее концы:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k > |v|.$$

Имея в виду, что $2\pi[\sigma/2\pi] + 2\pi \ge \sigma$, получим оценку

$$\begin{aligned} |\Psi(z)| &\le |z_1 z_2 \dots z_n|^{[\sigma/2\pi]+1}|\psi(z)| \\ &\le Ke^{\sigma|x|-2\pi([\sigma/2\pi]+1)\sum\limits_{j=1}^{n} v_j} \le Ke^{\sigma(|x|-|v|)}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Далее, в полосе $\{x : -1/2 \le u_k = \operatorname{Re} x_k \le 1/2,\ k = 1, \dots, n\}$ имеют место соотношения

$$|x| \le \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2 + n/4\right)^{1/2} = \frac{n/4}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^2 + n/4\right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2}}$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2}, \quad |x| - \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{1/2} \le \frac{n}{4|v| + 2\sqrt{n}}. \qquad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в (5.6), видим, что функция $\Psi(z)$ действительно ограничена при $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$.

Функция $\psi(z)$ вещественна при условии $|z_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, ее значения в точках, сопряженных относительно единичного круга, сопряжены:

$$\overline{\psi}(1/\bar{z}_1, 1/\bar{z}_2, \dots, 1/\bar{z}_n) = \psi(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Отсюда и из ограниченности функции $\Psi(w) = (w_1 \dots w_n)^{[\sigma/2\pi]+1} \psi(w)$ в области

$$\{w : |w_k| < 1,\ k = 1, \dots, n\}$$

следует, что произведение $(z_1 z_2 \dots z_n)^{-([\sigma/2\pi]+1)} \psi(z)$ ограничено в области $\{z : |z_k| > 1,\ k = 1, \dots, n\}$.

Таким образом, $\psi(z)$ — целая функция, растущая на бесконечности не быстрее полинома. Как известно из теории функций, в этом случае она представляет собой многочлен, т. е.

$$\psi(z) = \sum_{0 \le |\alpha| \le M} a[\alpha] z^{\alpha}.$$

Подставляя сюда выражение z через x из формул (5.4), видим, что $\varphi(x)$ — это тригонометрический многочлен следующего вида:

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta| \le M_1} a[\beta] e^{i 2\pi \beta x}. \qquad (5.8)$$

Согласно лемме VII.6 носитель коэффициентов многочлена $\varphi(x)$ лежит в шаре радиуса $\sigma/2\pi$, т. е. в равенстве (5.8) можно взять $M_1 \le \sigma/2\pi$.

Если $\varphi(x)$ такова, что

$$|\varphi(x)| \leq K|x|^{\mu}e^{\sigma|x|^{\rho}},$$

где $\mu \neq 0$, то приведенное выше доказательство следует очевидным образом видоизменить.

Случай, когда матрица периодов H функции $\varphi(x)$ не обязательно единичная, сводится к уже рассмотренному с помощью замены $x = Hy$.

Теорема VII.11 доказана.

Следствие 5.1. *Целая вещественная функция $\varphi(x)$ с ортогональной матрицей периодов H порядка роста $\rho = 1$ и типа $\sigma < 2\pi$ равна постоянной.*

Следствие 5.2. *Целая вещественная периодическая функция $\varphi(x)$ с порядком роста $\rho < 1$ равна постоянной.*

В самом деле, каждая такая функция одновременно будет функцией порядка роста $\rho = 1$ со сколь угодно малым типом σ. По следствию 5.1 она постоянна.

Следствие 5.3. *Функция $\varphi(x)$ из пространства $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ с ортогональной матрицей периодов H при $\varkappa = 0$ и $\lambda \leq -1/2$ представляет собой тригонометрический многочлен вида*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq A/2\pi} a[\alpha]e^{i2\pi\alpha H^{-1}x}.$$

Если же $\varkappa < 0$, то класс $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ состоит из тождественно постоянных функций.

Это утверждение легко обосновать, применив последовательно теоремы VII.3, VII.10 и VII.11.

Пусть $\varkappa > 0$. Разложим функцию $\varphi(x) \in \widetilde{H}(\varkappa, A)$ с единичной матрицей периодов в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{\beta} c_{\varphi}[\beta]e^{i2\pi\beta x}. \tag{5.9}$$

Общий случай сводится к этому заменой $x = Hy$. Сформулируем условие на коэффициенты $c_{\varphi}[\beta]$ разложения (5.9), выполнение которого необходимо и достаточно для принадлежности $\varphi(x)$ классу $\widetilde{H}(\varkappa, A)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть последовательность чисел a_m определена равенствами

$$a_0 = 1, \quad a_m = m^{\varkappa m} A^m m^\lambda \quad \text{при} \quad m \geq 1.$$

Для любой функции $\varphi(x) \in \widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ конечна следующая величина:

$$[\varphi]_H = \sup_{m \geq 0} \frac{\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|}{a_m}. \tag{5.10}$$

Если координаты мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \neq 0$ изменяются на множестве целых чисел независимо друг от друга, то квадрат его евклидовой нормы $|\beta|^2 = \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$, очевидно, пробегает некоторое подмножество натурального ряда. Элементы этого подмножества обозначим через N_j, полагая при этом $N_j < N_{j+1}$. Очевидно, что любое N_j не меньше, чем j. Имеет место следующая

Теорема VII.12. *Коэффициенты Фурье $c_\varphi[\beta]$ функции $\varphi(x)$ из пространства $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ при $\varkappa > 0$ удовлетворяют оценке*

$$\Big(\sum_{|\beta|^2 = N_j} |c_\varphi[\beta]|^2 \Big)^{1/2} \leq C[\varphi]_H N_j^{v_0/2} e^{-sN_j^{1/(2\varkappa)}}, \tag{5.11}$$

где постоянная C не зависит ни от φ, ни от j, а числа s, $\varkappa$, A, λ, v_0 связаны друг с другом соотношениями

$$s = \frac{\varkappa}{e} \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{1/\varkappa}, \quad v_0 = \lambda/\varkappa. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in \widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ при $\varkappa > 0$. Пользуясь периодичностью $\varphi(x)$, несложно убедиться, что коэффициенты $c_\varphi[\beta]$ разложения (5.9) убывают с ростом $|\beta|$ быстрее любой степени $|\beta|$. Следовательно, ряд (5.9) можно дифференцировать любое число раз, получая при этом равномерно сходящиеся ряды. Пользуясь этим замечанием, подсчитаем норму функции $\varphi(x)$.

Согласно равенству Парсеваля

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2 = \sum_{\beta \neq 0} \Big[\sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} (2\pi\beta)^{2\alpha} \Big] |c_\varphi[\beta]|^2.$$

Сумма в квадратных скобках по известной формуле полинома запишется в виде $(2\pi|\beta|)^{2m}$. Учитывая это, перегруппируем сумму по β следующим образом:

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(2\pi\sqrt{N_j})^{2m}\Big(\sum_{|\beta|^2=N_j}|c_\varphi[\beta]|^2\Big). \tag{5.13}$$

Отсюда и из определения $[\varphi]_H$ сразу вытекает неравенство

$$\Big(\sum_{|\beta|^2=N_j}|c_\varphi[\beta]|^2\Big)^{1/2} \le \frac{\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|}{(2\pi\sqrt{N_j})^m} \le [\varphi]_H\frac{a_m}{(2\pi\sqrt{N_j})^m}. \tag{5.14}$$

Минимизируем по m последовательность в правой части (5.14), считая N_j достаточно большим.

Отношение $(m+1)$-го члена этой последовательности к предыдущему представляет собой дробь $a_{m+1}/(2\pi\sqrt{N_j}a_m)$, которая, как несложно убедиться, при $1 \le m \le m_0(N_j)$ не превосходит единицы, а затем становится строго больше ее. При этом последовательность $m_0(N_j)$ эквивалентна последовательности $(s/\varkappa)N_j^{1/(2\varkappa)}$, когда $j \to \infty$. Таким образом, минимум правой части (5.14) достигается при $m = m_0(N_j)$ и равен величине $m_0^\lambda(N_j)e^{-\varkappa m_0(N_j)}$.

Подставив в найденное выражение минимума главный член асимптотики функции $m_0(N_j)$, придем к требуемой оценке (5.11).

Теорема VII.12 доказана.

Справедлива следующая в некотором смысле обратная к предыдущей

Теорема VII.13. *Пусть коэффициенты $c_\varphi[\beta]$ разложения* (5.9) *периодической функции $\varphi(x)$ удовлетворяют условию*

$$\Big(\sum_{|\beta|^2=N_j}|c_\varphi[\beta]|^2\Big)^{1/2} \le CN_j^{(v_0+v_1)/2}e^{-sN_j^{1/2\varkappa}}, \tag{5.15}$$

где постоянные s, $\varkappa$, A, λ, v_0 связаны между собой равенствами (5.12), а $v_1 = \min\{0, 1/(4\varkappa)-1\}$. *Тогда функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$.*

Доказательство. Воспользуемся равенством (5.13) и оценим норму $\varphi(x)$ в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Согласно (5.15)

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2 \le C(2\pi)^{2m} \sum_{j=1}^{\infty} N_j^{m+v} e^{-2sN_j^{1/2\varkappa}}, \tag{5.16}$$

где $v = v_0 + v_1$. Исследуем ряд в правой части (5.16).

Вспомнив, что N_j натуральное и тем самым рассматриваемая сумма не уменьшится при добавлении к ней значений суммируемой функции во всех остальных точках натурального ряда, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} N_j^{m+v} e^{-2sN_j^{1/2\varkappa}} \le \sum_{j=1}^{\infty} j^{m+v} e^{-2sj^{1/2\varkappa}}. \tag{5.17}$$

При $n \ge 4$ оценка (5.17) превращается в точное равенство, что следует из известной теоремы Лагранжа о представимости любого натурального числа суммой четырех квадратов. Выясним, как изменяется с ростом m сумма ряда (5.17).

Положим $\mu = m + v$, $q = 2s$ и рассмотрим при $\mu > 0$ функцию $\psi(r) = r^{\mu} e^{-qr^{1/(2\varkappa)}}$. Ряд (5.17) представляет собой сумму значений $\psi(r)$ во всех точках натурального ряда. Несложно подсчитать производную $\psi(r)$:

$$\psi'(r) = \left(\mu - \frac{q}{2\varkappa} r^{1/(2\varkappa)}\right) \frac{\psi(r)}{r}.$$

Таким образом, $\psi(r)$ монотонно возрастает при $0 \le r \le r_0(\mu)$, где $r_0(\mu) = (2\varkappa\mu/q)^{2\varkappa}$, и монотонно убывает при бо́льших значениях r. Интеграл от $\psi(r)$, взятый по положительной полуоси, выражается через гамма-функцию Эйлера:

$$\int_0^{\infty} \psi(r)\, dr = \frac{2\varkappa}{q^{2\varkappa(\mu+1)}} \int_0^{\infty} t^{2\varkappa(\mu+1)-1} e^{-t}\, dt = \frac{2\varkappa\Gamma(2\varkappa(\mu+1))}{q^{2\varkappa(\mu+1)}}.$$

Разобьем его на сумму интегралов по отрезкам вида $[j, j+1]$ и на каждом из отрезков оценим $\psi(r)$ снизу. Рассмотрев отдельно случай, когда $r_0(\mu)$ натурально, придем к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi(j) \le \frac{2\varkappa\Gamma(2\varkappa(\mu+1))}{q^{2\varkappa(\mu+1)}} + \psi(r_0(\mu)). \tag{5.18}$$

При больших значениях μ воспользуемся формулой Стирлинга и установим асимптотику правой части (5.18).

Если $\varkappa > 1/4$, то главный вклад в асимптотику суммы вносит первое слагаемое, при $0 < \varkappa \leq 1/4$ — второе слагаемое из правой части (5.18). Неравенство, пригодное в обоих случаях, можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\mu} e^{-qj^{1/2\varkappa}} \leq C \left(\frac{2\varkappa}{qe}\right)^{2\varkappa\mu} \mu^{2\varkappa(\mu - v_1')}, \tag{5.19}$$

где $v_1' = \min\{0, 1/(4\varkappa) - 1\}$. Подставив (5.19) в (5.17), а результат — в (5.16), получим оценку

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2 \leq C(2\pi)^{2m} (\varkappa/se)^{2\varkappa m} m^{2\varkappa(m+v_0)}.$$

Вспомнив соотношения (5.12), связывающие числа s, v, $\varkappa$, A, λ, видим, что функция $\varphi(x)$ действительно принадлежит $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$.

Теорема VII.13 доказана.

Следствие 5.4. *Если $0 < \varkappa \leq 1/4$, то пространство $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ совпадает с классом рядов Фурье* (5.9), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям* (5.11).

Доказательство очевидно, если заметить, что при рассматриваемых значениях $\varkappa$ параметр v_1 в (5.15) равен нулю.

Если $\varkappa > 1/4$, то формулы (5.11) и (5.15) не совпадают. Интересно выяснить, насколько это отличие существенно и нельзя ли уточнить какую-нибудь из оценок (5.11) и (5.15).

Следствие 5.5. *Функция $\varphi(x)$ одной переменной принадлежит классу $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$, если ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию* (5.15), *в котором $v_1 = \min\{1/(4\varkappa) - 1/2, 0\}$.*

Одномерность независимой переменной позволяет уточнить вид последовательности N_j. Очевидно, что N_j равно j^2. Поэтому оценка (5.16) нормы $\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|$ примет следующий вид:

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\|^2 \leq C(2\pi)^{2m} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(m+v)} e^{-2sj^{1/\varkappa}},$$

где $v = \lambda/\varkappa + v_1$. Далее следует применить неравенство (5.19) при подходящих значениях параметров μ, q и $\varkappa$.

Следствие 5.6. Функция

$$\varphi_*(x) = \sum_{\beta\neq 0} |\beta|^v e^{-s|\beta|^{1/\varkappa}} a[\beta] e^{i2\pi\beta x} \tag{5.20}$$

принадлежит пространству $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$, *если выполнены следующие условия:*

$$s = \frac{\varkappa}{e}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{1/\varkappa}, \quad v = \frac{\lambda}{\varkappa} + v_1, \quad \sum_{|\beta|^2=N_j} |a[\beta]|^2 = 1. \tag{5.21}$$

Напомним, что параметр v_1 определяется в зависимости от размерности пространства независимых переменных. Доказываемое утверждение сразу следует из теоремы VII.13, если заметить, что

$$\sum_{|\beta|^2=N_j} |c_{\varphi_*}[\beta]|^2 = N_j^{\nu} e^{-2sN_j^{1/2\varkappa}}.$$

§ 6. Сходимость кубатурных формул на пространствах $\widetilde{H}(\kappa, A, \lambda)$

В § 1 этой главы исследовано поведение последовательности погрешностей (l_h, φ), соответствующих произвольной функции φ из $\widetilde{L}_2^{(m)}$. Оказалось, что при возрастании N эта последовательность стремится к нулю быстрее, чем это следует из оценки нормы функционала погрешности l_h в $\widetilde{L}_2^{(m)*}$. Интересно выяснить, какие свойства функции $\varphi(x)$ существенно влияют на скорость этой сходимости. Мы покажем сейчас, что периодичность функции $\varphi(x)$, ее бесконечная дифференцируемость и определенный рост производных в зависимости от порядка дифференцирования обеспечивают экспоненциальное, а не степенное убывание погрешностей с ростом N.

Теорема VII.14. *Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Тогда имеет место неравенство*

$$|(l_h, \varphi)| \leq K[\varphi]_H N^{v_0} e^{-sN^{1/\varkappa}}, \tag{6.1}$$

где постоянные s, v_0 определены соотношением (5.12), *а постоянная K не зависит ни от φ, ни от N.*

Доказательство. К погрешности (l_h, φ) применима оценка (1.22). Более того, ее можно уточнить следующим образом:

$$|(l_h, \varphi)| \le K[\varphi]_H \inf_{m \ge 0} \{a_m/(2\pi N)^m\}, \tag{6.2}$$

где постоянная K не зависит ни от φ, ни от m и N. При выводе (6.2) следует использовать, во-первых, неравенство

$$\|\varphi \mid \widetilde{L}_2^{(m)}\| \le [\varphi]_H a_m,$$

вытекающее из (5.10), и, во-вторых, известное представление квадрата нормы функционала погрешности (1.1):

$$\|l_h \mid \widetilde{L}_2^{(m)*}\|^2 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{\beta \ne 0} \frac{1}{|H^{-1*}\beta|^{2m}}.$$

Последовательность $a_m/(2\pi N)^m$, как это уже отмечалось при доказательстве теоремы VII.12, достигает минимального значения при m, равном $m_0(N) \sim (s/\varkappa)N^{1/\varkappa}$. Тем самым минимум в правой части (6.2) при больших N равен величине $m_0^\lambda(N)e^{-\varkappa m_0(N)}$. Подставляя сюда главный член асимптотики $m_0(N)$, приходим к искомой оценке (6.1).

Теорема VII.14 доказана.

Функция $\varphi(x)$ в (6.1) любая из пространства $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$, поэтому имеет место соотношение

$$\sup_{\varphi \in \widetilde{H}} \frac{(l_h, \varphi)}{[\varphi]_H} \le K N^{v_0} e^{-sN^{1/\varkappa}}. \tag{6.3}$$

Слева в неравенстве (6.3) стоит величина, представляющая собой норму функционала погрешности (1.1) в пространстве $\widetilde{H}^*(\varkappa, A, \lambda)$. Следовательно, нормы $\|l_h \mid \widetilde{H}^*(\varkappa, A, \lambda)\|$ экспоненциально стремятся к нулю при $h \to 0$. Выясним, насколько неулучшаемы оценки (6.1) и (6.3), ограничившись случаем единичной матрицы H.

Рассмотрим функцию $\varphi_*(x)$, заданную рядом Фурье (5.20). Коэффициенты $a[\beta]$ при этом должны удовлетворять равенству (5.21). Согласно следствию 5.6 функция $\varphi_*(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Норма $[\varphi_*]_H$, очевидно, ненулевая.

Вычислим значение функционала погрешности (1.1) с $H = I$ на функции φ_*. Имеем

$$(l_h, \varphi_*) = \sum_{\beta \neq 0} |\beta|^v e^{-s|\beta|^{1/\varkappa}} a[\beta] L_N[\beta], \tag{6.4}$$

где $L_N[\beta]$ — значение функционала l_h на экспоненте $e^{i2\pi\beta x}$. Как отмечалось в § 1, $L_N[\beta]$ равно нулю, если какая-нибудь из компонент β_j мультииндекса β не кратна N, и равно -1 в противном случае. Поэтому

$$(l_h, \varphi_*) = -\sum_{\alpha \neq 0} N^v |\alpha|^v e^{-sN^{1/\varkappa}|\alpha|^{1/\varkappa}} a[N\alpha]. \tag{6.5}$$

Пусть квадрат евклидовой нормы β равен N_j. Среди всех коэффициентов $a[\beta]$ с такими β один положим равным единице, а остальные — равными нулю. Ясно, что равенство (5.21) при этом не нарушится, а формулу (6.5) можно продолжить следующим образом:

$$(l_h, \varphi_*) = -N^v \sum_{j=1}^{\infty} N_j^{v/2} e^{-sN^{1/\varkappa} N_j^{1/2\varkappa}}. \tag{6.6}$$

При достаточно большом N основной вклад в погрешность дает первое слагаемое ряда в правой части (6.6). Учитывая, что $N_1 = 1$, получаем неравенство

$$|(l_h, \varphi_*)| \geq CN^v e^{-sN^{1/\varkappa}}, \tag{6.7}$$

где постоянная C не зависит от N, а параметры s и v определены равенствами (5.21). Отсюда, в частности, несложно вывести оценку снизу нормы функционала l_h в пространстве $\widetilde{H}^*(\varkappa, A, \lambda)$:

$$\|l_h \mid \widetilde{H}^*(\varkappa, A, \lambda)\| \geq CN^v e^{-sN^{1/\varkappa}}. \tag{6.8}$$

Сравним попарно неравенства (6.1) и (6.7), а также (6.3) и (6.8). Как видно, экспоненциальные показатели во всех этих неравенствах совпадают. Различие имеется лишь в степенях параметра N. Напомним, что разность между v и v_0 обозначена нами как v_1, и при этом

$$v_1 = \begin{cases} \min\{1/4\varkappa - 1, 0\}, & \text{если} \quad n \geq 2, \\ \min\{1/4\varkappa - 1/2, 0\}, & \text{если} \quad n = 1. \end{cases}$$

В частности, разность v_1 неположительна, а при некоторых $\varkappa$ в точности равна нулю. В этом случае оценки (6.1) и (6.7), а также (6.3) и (6.8) отличаются друг от друга только постоянными K и C.

Таким образом, максимальное значение функционала погрешности l_h на единичной сфере банахова пространства $\widetilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$ почти достигается на функции $\varphi_*/[\varphi_*]_H$. Иными словами, эта функция является «почти экстремальной» одновременно для всех функционалов l_h.

Выясним теперь, в какой степени результаты, полученные для периодических функций, переносятся на пространства $H(\varkappa, A, \lambda)$, содержащие и непериодические элементы. Если и в этом случае мы хотим воспользоваться серией неравенств, аналогичных (1.21), то в качестве кубатурной формулы следует брать такую, функционал погрешности которой точен на полиномах степени, меньшей m. Это приводит к необходимости рассматривать двухиндексные последовательности функционалов погрешности $l_{m,N}(x)$, где первый индекс указывает на алгебраический порядок точности, а второй — на число узлов кубатурной формулы.

Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ независимых переменных x одномерно, т. е. $n = 1$. В качестве двухиндексной последовательности рассмотрим функционалы погрешности $l_{m,N}^{EM}$, соответствующие известной *формуле Эйлера — Маклорена*:

$$\left(l_{m,N}^{EM}, \varphi\right) = \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx - T_N(\varphi) + \sum_{k=1}^{\nu-1} h^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!}[\varphi^{(2k-1)}(1) - \varphi^{(2k-1)}(0)]. \quad (6.9)$$

Здесь B_{2k} — число Бернулли с номером k, ν целое, $m = 2\nu$,

$$T_N(\varphi) = h\frac{\varphi(0) + \varphi(1)}{2} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} h\varphi(\alpha h).$$

Пусть функция φ определена на единичном отрезке и принадлежит пространству $H(\varkappa, A, \lambda)$. Тогда имеет место серия оценок, аналогичная (1.21):

$$\left|\left(l_{m,N}^{EM}, \varphi\right)\right| \le \left\|l_{m,N}^{EM} \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\| \left\|\varphi \mid L_2^{(m)}[0,1]\right\| \le [\varphi]_H \left\|l_{m,N}^{EM} \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\| a_m. \quad (6.10)$$

Известно, что квадрат нормы функционала погрешности (6.9) допускает представление

$$\left\| l_{m,n}^{EM} \mid L_2^{(m)}[0,1]^* \right\|^2 = h^{2m} \left\{ \left(\sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{(2\pi\beta)^m} \right)^2 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}} \right\} \quad (6.11)$$

Подставляя это равенство в (6.10), получим

$$\left| \left(l_{m,N}^{EM}, \varphi \right) \right| \leq K[\varphi]_H a_m / (2\pi N)^m. \quad (6.12)$$

Минимум правой части (6.12) достигается при четном m, равном $m_0(N) \sim (s/\varkappa) N^{1/\varkappa}$, и совпадает с величиной $m_0^\lambda(N) e^{-\varkappa m_0(N)}$. Таким образом, для любой функции $\varphi \in H(\varkappa, A, \lambda)$ имеет место оценка

$$\left| \left(l_{m_0(N),N}^{EM}, \varphi \right) \right| \leq K[\varphi]_H N^{v_0} e^{-sN^{1/\varkappa}}. \quad (6.13)$$

Постоянные s, v_0 определены равенствами (5.12), а постоянная K не зависит от N.

Таким образом, при подходящем выборе алгебраического порядка точности сходимость погрешности (6.9) к нулю оказывается экспоненциальной. Покажем, что при этом экспоненциальный показатель в правой части (6.13) уменьшить невозможно.

Вычислим значение функционала (6.9) на функции φ_*, задаваемой рядом Фурье (5.20). Коэффициенты $a[\beta]$ в этом разложении подберем так, чтобы имело место равенство (6.6). Заметим, что на любой периодической бесконечно дифференцируемой функции значения функционалов $l_{m,N}^{EM}(x)$ и $l_h(x)$ совпадают. Поэтому равенство (6.6) имеет место и для погрешности на φ_* формулы Эйлера — Маклорена, т. е.

$$\left(l_{m,N}^{EM}, \varphi_* \right) = -N^v \sum_{j=1}^{\infty} N_j^{1/2\varkappa} e^{-sN^{1/\varkappa} N_j^{1/2\varkappa}}. \quad (6.14)$$

В одномерном случае $N_j = j^2$ и при больших N основной вклад в сумму (6.14) дает первое слагаемое. Отсюда следует оценка нормы функционала $l_{m,N}^{EM}$ снизу:

$$\left\| l_{m,N}^{EM} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \geq \frac{\left| \left(l_{m,N}^{EM}, \varphi_* \right) \right|}{[\varphi_*]_H} \geq K N^v e^{-sN^{1/\varkappa}}. \quad (6.15)$$

Таким образом, при $m = m_0(N)$ справедлива двусторонняя оценка нормы $\left\| l^{EM}_{m_0(N),N} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\|$, вытекающая из (6.13) и (6.15).

Возникает вопрос, насколько существенно при этом, что алгебраический порядок точности функционала равен $m_0(N)$, и не будут ли обладать подобным свойством функционалы с другим, гораздо большим m. Оказывается, норма $\left\| l^{EM}_{m,N} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\|$ при фиксированном N и $m \to \infty$ неограниченно возрастает, и ее рост регулируется оценкой

$$\left\| l^{EM}_{m,N} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \geq C \frac{m^\gamma N^2 a_m}{(2\pi N)^m}, \tag{6.16}$$

где постоянные C и γ не зависят ни от m, ни от N. Отсюда, в частности, следует, что увеличение алгебраического порядка точности формулы приближенного интегрирования при фиксированном числе узлов N не только не уменьшает норму функционала погрешности, но, напротив, неограниченно ее увеличивает.

Оценка (6.16) дает теоретическое объяснение эффекта, известного из практики вычисления определенных интегралов и состоящего в том, что начиная с некоторого значения $m = m_0(N)$ точность результата не повышается при увеличении m. Чтобы вывести неравенство (6.16) и уточнить величину коэффициента γ, нужна более подробная информация об устройстве пространства $H(\varkappa, A, \lambda)$.

§ 7. Классы функций Жевре одной независимой переменной

Пусть множество Ω компактно в $\mathbb{R}^n$ и ограничено гладким аналитическим контуром. Говорят, что функция φ *принадлежит классу Жевре* $G_\varkappa(\Omega)$, $\varkappa \geq 1$, если φ бесконечно дифференцируема в окрестности Ω и при некотором L имеет место серия оценок [182]

$$\|D^\alpha \varphi \mid L_2(\Omega)\| \leq L^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^\varkappa, \quad |\alpha| \geq 0. \tag{7.1}$$

При $\varkappa > 1$ класс $G_\varkappa(\Omega)$ совпадает с пространством $H(\varkappa)$, получающимся объединением $H(\varkappa, A, \lambda)$ по всем A и λ. В самом деле, вложение $G_\varkappa(\Omega) \subset H(\varkappa)$ следует из (7.1) и формулы Стирлинга. Обратно, если функция φ принадлежит классу $H(\varkappa)$ в области Ω, то согласно теореме VII.6 ее можно продолжить с сохранением класса в окрестность Ω. Очевидно, что неравенство (7.1) при этом выполняется.

Пусть $n = 1$, а множество Ω совпадает с единичным отрезком числовой оси. Погрешность квадратурной формулы на любой функции $\varphi \in G_\varkappa[0,1]$ можно оценить по описанной выше схеме, используя принадлежность φ банахову пространству $H(\varkappa, A, \lambda)$ с некоторыми A и λ. При этом, однако, остается неясным, насколько полученные оценки неулучшаемы. Поэтому используем несколько иной подход.

Как мы уже убедились, сходимость кубатурных формул удобнее исследовать в гильбертовом пространстве. В этом случае любой ограниченный линейный функционал допускает представление в виде экстремальной функции, норму которой несложно оценить как сверху, так и снизу, если известен ортогональный базис исходного пространства. Чтобы воспользоваться возникающими при таком подходе преимуществами, сведем рассматриваемую задачу к оценке нормы функционала погрешности, действующего в гильбертовом пространстве.

Будем говорить, что *функция φ принадлежит пространству $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ на единичном отрезке*, если φ бесконечно дифференцируема на нем и при этом сходится следующий ряд:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left\| \varphi \mid L_2^{(m)}[0,1] \right\|^2}{c_m^2} + \frac{\left| D^m \varphi \big|_0^1 \right|^2}{b_m^2} \right\} < \infty, \tag{7.2}$$

где

$$D^m \varphi \big|_0^1 = D^m \varphi(1) - D^m \varphi(0).$$

Последовательности b_m и c_m в его левой части устроены аналогично последовательности a_m, т. е.

$$b_0 = c_0 = 1, \quad b_m = m^{\varkappa m} A^m m^{\mu_2}, \quad c_m = m^{\varkappa m} A^m m^{\mu_1}. \tag{7.3}$$

Показатели степени μ_1 и μ_2 зависят от величин $\varkappa$ и λ:

$$\mu_1 = \lambda + \varkappa + 2, \quad \mu_2 = \lambda + \frac{3\varkappa}{2} + \frac{1}{2}. \tag{7.4}$$

Отметим, что μ_1 и μ_2 удовлетворяют следующим неравенствам, которые мы используем далее:

$$\mu_1 - \lambda + \frac{\varkappa}{2} > \mu_1 - \lambda > \frac{1}{2}, \ \mu_2 - \lambda - \varkappa > \frac{1}{2}, \ \mu_1 - \mu_2 > 1 - \frac{\varkappa}{2}. \tag{7.5}$$

Условия типа (7.2) часто применяются для задания классов бесконечно дифференцируемых функций. Например, убрав из (7.2) слагаемые, включающие в себя приращения производных функций φ, получим класс, известный как пространство Соболева бесконечного порядка [46].

Скалярное произведение функций $\varphi, \psi \in \overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ определим равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c_m^2} \int_0^1 D^m \varphi \overline{D^m \psi}\, dx + \frac{1}{b_m^2} \left(D^m \varphi\big|_0^1\right) \left(\overline{D^m \psi}\big|_0^1\right) \right\}. \quad (7.6)$$

Соответствующую ему норму обозначим через $\langle \cdot \rangle_1$. Несложно убедиться, что по этой норме пространство $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ полно и тем самым гильбертово.

Пусть $\varphi \in H(\varkappa, A, \lambda)$. Тогда для любого $m \geq 0$ имеем

$$|D^m \varphi(1) - D^m \varphi(0)| \leq \left\| \varphi \mid L_2^{(m+1)}[0,1] \right\| \leq [\varphi]_H a_{m+1}.$$

Используя эти оценки, промажорируем норму $\langle \varphi \rangle_1$:

$$\langle \varphi \rangle_1 \leq [\varphi]_H \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_m}{c_m} \right)^2 + \left(\frac{a_{m+1}}{b_m} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Как следует из условий (7.5), ряд в правой части последнего неравенства сходится. Таким образом, банахово пространство $H(\varkappa, A, \lambda)$ непрерывно вложено в гильбертово пространство $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$.

Пусть $\varphi \in \overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Очевидно, что для любого $m \geq 0$ имеет место соотношение

$$\left\| \varphi \mid L_2^{(m)}[0,1] \right\| \leq \langle \varphi \rangle_1 c_m. \quad (7.7)$$

Последовательность c_m определена равенством (7.3), поэтому из (7.7) можно заключить, что $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ непрерывно вложено в пространство $H(\varkappa, A, \mu_1)$.

Таким образом, объединение классов $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ по всем A, λ совпадает с классом $G_\varkappa[0,1]$.

Исследуем структуру пространства $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ при фиксированных значениях $\varkappa$, A, λ. Опишем ее, построив специальный базис этого пространства.

Рассмотрим в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ совокупность периодических элементов, т. е. таких функций φ, приращения производных любого порядка которых на единичном отрезке равны нулю. Эти функции образуют в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ замкнутое подпространство, которое мы обозначим через $\tilde{\tilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$.

Пример функций, принадлежащих $\tilde{\tilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$, дают экспоненты вида $e^{i2\pi\beta x}$, $\beta = 0, \pm 1, \ldots$. Из определения скалярного произведения в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ следует, что экспоненты, соответствующие различным номерам β, ортогональны друг другу. Квадрат нормы экспоненты с номером β представляется значением некоторой целой функции в точке $z = 2\pi\beta$:

$$\langle e^{i2\pi\beta x}\rangle_1^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{c_m^2} \equiv A_0[\beta]. \tag{7.8}$$

Разложим произвольную функцию $\varphi(x) \in \tilde{\tilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{\beta} c_\varphi[\beta] e^{-i2\pi\beta x}. \tag{7.9}$$

Как и в случае пространств $\tilde{H}(\varkappa, A, \lambda)$, это разложение можно дифференцировать любое число раз, получая ряды, равномерно сходящиеся на единичном отрезке. Докажем, что ряд (7.9) сходится к $\varphi(x)$ по норме пространства $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$, т. е. что экспоненты вида $e^{-i2\pi\beta x}$, $\beta = 0, \pm 1, \ldots$, образуют в $\tilde{\tilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ ортогональный базис.

Теорема VII.15. *Функция $\varphi(x)$ одной переменной принадлежит пространству $\tilde{\tilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ тогда и только тогда, когда ее ряд Фурье сходится по норме $\langle\cdot\rangle$, т. е. когда коэффициенты Фурье $c_\varphi[\beta]$ удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{\beta} A_0[\beta] |c_\varphi[\beta]|^2 < +\infty, \tag{7.10}$$

где функция $A_0[\beta]$ определена равенством (7.8).

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in \overline{\overline{H}}(\varkappa, A, \lambda)$. Ее ряд Фурье (7.9), как уже отмечалось, сходится по норме пространства $C[0,1]$. Обозначим через φ_M частичную сумму ряда (7.9), в которой суммирование ведется по целым β, $|\beta| \le M$. Пользуясь ортогональностью системы экспонент, а также равенством (7.8), получим

$$\langle \varphi_M \rangle_1^2 = \sum_{|\beta| \le M} |c_\varphi[\beta]|^2 A_0[\beta]. \tag{7.11}$$

Учитывая очевидное соотношение $\langle \varphi_M \rangle_1 \le \langle \varphi \rangle_1$ и переходя в (7.11) к пределу при $M \to \infty$, заключаем, что неравенство (7.10) действительно имеет место.

Если коэффициенты Фурье функции φ удовлетворяют условию (7.10), то, пользуясь представлением (7.11), несложно убедиться в фундаментальности последовательности частичных сумм ряда (7.9). Предел этой последовательности по норме $\langle \cdot \rangle_1$ принадлежит $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ и совпадает с φ.

Теорема VII.15 доказана.

Следствие 7.1. *Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ из пространства $\overline{\overline{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ представимы в виде следующей дроби:*

$$c_\varphi[\beta] = \frac{\langle \varphi, e^{-i2\pi\beta x} \rangle_1}{A_0[\beta]}, \quad \beta = 0, \pm 1, \ldots. \tag{7.12}$$

Любой полином Бернулли $B_{m+1}(x)$ степени $m+1$, очевидно, принадлежит классу $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Разделив его на $(m+1)!$, найдем проекцию $\widetilde{\varphi}_m(x)$ получившейся функции на подпространство $\overline{\overline{H}}(\varkappa, A, \lambda)$. Коэффициенты разложения функции $\widetilde{\varphi}_m(x)$ в ряд Фурье обозначим через $\tilde{c}_m[\beta]$. Согласно равенству (7.12) имеем

$$\tilde{c}_m[\beta] = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\langle B_{m+1}(x), e^{-i2\pi\beta x} \rangle_1}{A_0[\beta]}. \tag{7.13}$$

Вычислим скалярное произведение в правой части этого равенства. Последовательность приращений производных полинома $B_{m+1}(x)$ на единичном отрезке удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{(m+1)!}(D^\alpha B_{m+1}(1) - D^\alpha B_{m+1}(0)) = \delta_m^\alpha. \tag{7.14}$$

Внутри же единичного отрезка справедливо разложение

$$\frac{1}{(m+1)!}B_{m+1}(x) = (-1)^m \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{(i2\pi\beta)^{m+1}} e^{-i2\pi\beta x}. \tag{7.15}$$

Пользуясь равенствами (7.14), (7.15) и формулой интегрирования по частям, несложно явно вычислить любой интеграл вида

$$\frac{1}{(m+1)!}\int_0^1 D^\alpha B_{m+1}(x) D^\alpha(e^{i2\pi\beta x})\,dx. \tag{7.16}$$

Подставив найденные значения интегралов вида (7.16) в определение скалярного произведения $\langle B_{m+1}(x), e^{-i2\pi\beta x}\rangle_1$, а получившийся результат — в формулу (7.13), придем к равенству

$$\tilde{c}_m[\beta] = \frac{(-1)^m}{(i2\pi\beta)^{m+1}} \frac{A_0^m[\beta]}{A_0[\beta]}, \quad \beta \neq 0. \tag{7.17}$$

Здесь через $A_0^m[\beta]$ обозначена частичная сумма ряда (7.8):

$$A_0^m[\beta] = \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{c_\alpha^2}. \tag{7.18}$$

Представим пространство $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ как прямую сумму подпространства $\tilde{\overline{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ и соответствующего ему ортогонального дополнения $\tilde{\overline{H}}^\perp(\varkappa, A, \lambda)$. Проекцию полинома $B_{m+1}(x)/(m+1)!$ на это дополнение обозначим через $\varphi_m(x)$. Ясно, что проектируемый полином представим суммой функций $\varphi_m(x)$ и $\tilde{\varphi}_m(x)$, ортогональных друг другу. Коэффициенты Фурье $c_m[\beta]$ функции $\varphi_m(x)$, как вытекает из равенств (7.15) и (7.17), можно найти следующим образом:

$$c_m[\beta] = \frac{(-1)^m}{(i2\pi\beta)^{m+1}} \frac{A_{m+1}[\beta]}{A_0[\beta]}, \quad \beta \neq 0, \tag{7.19}$$

где через $A_{m+1}[\beta]$ обозначена разность между $A_0[\beta]$ и $A_0^m[\beta]$. Коэффициент $c_m[0]$, соответствующий функции $\varphi_m(x)$, равен нулю в силу ортогональности $\varphi_m(x)$ тождественной постоянной:

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\,dx = \langle \varphi_m, 1\rangle_1 = 0, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{7.20}$$

Интеграл по единичному отрезку от производной $D^{\alpha+1}\varphi_m$ в силу равенств (7.14) можно вычислить по формуле

$$\int_0^1 D^{\alpha+1}\varphi_m(x)\,dx = D^\alpha\varphi_m(1) - D^\alpha\varphi_m(0) = \delta_m^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots. \tag{7.21}$$

Теорема VII.16. *Любая функция φ из ортогонального дополнения к пространству $\widetilde{\widetilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ разлагается в ряд по функциям $\varphi_m(x)$. При этом коэффициент при функции $\varphi_m(x)$ равен приращению на единичном отрезке производной φ порядка m:*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(D^m\varphi(1) - D^m\varphi(0)\right)\varphi_m(x). \tag{7.22}$$

Ряд (7.22) сходится по норме пространства $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$.

Доказательству теоремы VII.16 предпошлем несколько лемм.

Введем в пространстве $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ вспомогательное скалярное произведение, положив для любых функций φ, ψ

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{c_m^2} \int_0^1 D^m\varphi(x)\overline{D^m\varphi(x)}\,dx. \tag{7.23}$$

Лемма VII.7. *Норма функции φ_m, соответствующая скалярному произведению (7.23), находится по формуле*

$$\langle\varphi_m\rangle^2 = \frac{1}{c_{m+1}^2} + 2\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{A_0^m[\beta]A_{m+1}[\beta]}{(2\pi\beta)^{2(m+1)}A_0[\beta]}. \tag{7.24}$$

Доказательство. Используя равенства (7.19)–(7.21), несложно выразить через значения функций $A_m[\beta]$, $A_0^m[\beta]$ и $A_0[\beta]$ квадрат нормы функции φ_m в пространстве $L_2^{(k)}[0, 1]$. Подставив результат в определение нормы $\langle\varphi_m\rangle$ и проведя несложные выкладки, придем к искомой формуле (7.24).

Лемма VII.7 доказана.

Исследуем поведение нормы $\langle\varphi_m\rangle$ при неограниченном возрастании m. Из равенства (7.24) вытекает, что достаточно исследовать

поведение при таких m представленного рядом слагаемого в правой части (7.24). При этом удобнее иметь дело не с функциями $A_m[\beta]$, $A_0^m[\beta]$, а с некоторыми другими, близкими к ним.

Введем в рассмотрение числовую последовательность d_m, взяв

$$d_0 = 1, \quad d_m = L^m[(m-1)!]^{\varkappa} m^{\mu}, \quad m \geq 1. \tag{7.25}$$

Если $L = Ae^{\varkappa}$ и $\mu = \mu_1 + \varkappa/2$, то последовательности d_m и c_m эквивалентны в силу формулы Стирлинга. Последовательности d_m сопоставим целую функцию переменной $z = 2\pi\beta$, положив

$$\widetilde{A}_0[\beta] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2}. \tag{7.26}$$

Через $\widetilde{A}_0^{\alpha}[\beta]$ обозначим частичную сумму ряда (7.26), в которой m изменяется от нуля до α. Разность между $\widetilde{A}_0[\beta]$ и $\widetilde{A}_0^{\alpha}[\beta]$ обозначим как $\widetilde{A}_{\alpha+1}[\beta]$.

Последовательности d_m и c_m эквивалентны, поэтому найдутся такие положительные постоянные K_1 и K_2, что для всех α, β одновременно выполняются неравенства

$$K_1\widetilde{A}_{\alpha}[\beta] \leq A_{\alpha}[\beta] \leq K_2\widetilde{A}_{\alpha}[\beta], \quad K_1\widetilde{A}_0^{\alpha}[\beta] \leq A_0^{\alpha}[\beta] \leq K_2\widetilde{A}_0^{\alpha}[\beta].$$

Таким образом, для оценки нормы $\langle\varphi_{\alpha}\rangle_1$ сверху достаточно исследовать поведение при $\alpha \to \infty$ следующей суммы:

$$\widetilde{S}[\alpha] = \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{\widetilde{A}_0^{\alpha}[\beta]\widetilde{A}_{\alpha+1}[\beta]}{(2\pi\beta)^{2(\alpha+1)}\widetilde{A}_0[\beta]}. \tag{7.27}$$

С этой задачей мы справимся, исследовав отношение соседних членов ряда (7.26). Несложно подсчитать, что отношение m-го члена к $(m+1)$-му равно квадрату величины $\beta_{\mu}(m)/\beta$, где

$$\beta_{\mu}(m) = \frac{L}{2\pi} m^{\varkappa} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\mu}. \tag{7.28}$$

Лемма VII.8. *Для любого положительного числа q на интервале $(\beta_q, +\infty)$ определена монотонно возрастающая функция $\alpha_{\mu,q}(\beta)$.*

обладающая следующим свойством. Отношение m-го члена ряда (7.26) к последующему не больше q, если $m \in [1, \alpha_{\mu,q}(\beta)]$, и не меньше $1/q$, если $m \in (\alpha_{\mu,1/q}(\beta), +\infty)$. Асимптотическое поведение функции $\alpha_{\mu,q}(\beta)$ при больших β задается соотношением

$$\alpha_{\mu,q}(\beta) = (2\pi q\beta/L)^{1/\varkappa}\left(1 + O(\beta^{-1/\varkappa})\right), \quad \beta \to \infty. \tag{7.29}$$

Доказательство. Положим $\beta_{\mu,q}(\alpha) = \beta_\mu(\alpha)/q$ и подсчитаем логарифмическую производную:

$$\frac{d}{d\alpha}[\ln \beta_{\mu,q}(\alpha)] = \frac{\varkappa - \mu}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}\left(\varkappa - \frac{\mu}{\alpha+1}\right).$$

Она неотрицательна при $\alpha \geq \alpha_0$, где α_0 — наибольшее из двух чисел: 0 и $\mu/\varkappa - 1$. Таким образом, при $\alpha \geq \alpha_0$ функция $\beta_{\mu,q}(\alpha)$ монотонно возрастает. Значит, существует обратная к ней функция, которую мы и обозначим через $\alpha_{\mu,q}(\beta)$.

Функция $\alpha_{\mu,q}(\beta)$ заведомо определена и монотонна на интервале $(\beta_q, +\infty)$, где $\beta_q = \beta_{\mu,q}(\alpha_0)$. Проверим, что она обладает и другими требуемыми свойствами.

Отношение m-го члена ряда (7.26) к последующему равно, как уже отмечалось, квадрату величины

$$\frac{\beta_\mu(m)}{\beta} = q\frac{\beta_{\mu,q}(m)}{\beta}. \tag{7.30}$$

Если при данном β аргумент m не больше $\alpha_{\mu,q}(\beta)$, то в силу монотонности функции $\beta_{\mu,q}(m)$ отношение, стоящее в круглых скобках в равенстве (7.30), не превышает величины $\beta_{\mu,q}(\alpha_{\mu,q}(\beta))/\beta = 1$. Если же m не меньше $\alpha_{\mu,1/q}(\beta)$, то следует использовать другую оценку:

$$\frac{\beta_\mu(m)}{\beta} = \frac{1}{q}\frac{\beta_{\mu,1/q}(m)}{\beta} \geq \frac{1}{q}\frac{\beta_{\mu,1/q}(\alpha_{\mu,1/q}(\beta))}{\beta} = \frac{1}{q}.$$

Установим, наконец, асимптотику функции $\alpha_{\mu,q}(\beta)$. Согласно определению имеет место равенство

$$\alpha_{\mu,q}(\beta) = \left(\frac{2\pi q\beta}{L}\right)^{1/\varkappa}\left(1 + \frac{1}{\alpha_{\mu,q}(\beta)}\right)^{-\mu/\varkappa} \tag{7.31}$$

Так как при больших β функция $\alpha_{\mu,q}(\beta)$ неограниченно возрастает, из (7.31) следует искомое соотношение (7.29).

Лемма VII.8 доказана.

Следствие 7.2. *Функции $\widetilde{A}_0^\alpha[\beta]$ и $\widetilde{A}_\alpha[\beta]$ растут при больших β не быстрее, чем позволяют следующие оценки:*

$$\widetilde{A}_\alpha[\beta] \le K\alpha_\mu(\beta) \max_{\alpha\le m<\infty} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2}, \tag{7.32}$$

$$\widetilde{A}_0^\alpha[\beta] \le K\alpha_\mu(\beta) \max_{0\le m\le\alpha} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2}. \tag{7.33}$$

Здесь K — постоянная, не зависящая ни от α, ни от β, функция $\alpha_\mu(\beta) = \alpha_{\mu,1}(\beta)$ определена в лемме VII.8.

Доказательство. Оценку роста модуля целой функции через максимальный член соответствующего ей ряда Тейлора можно получить, опираясь на известные факты из теории целых функций (см., например, [81] или [87]). Мы сделаем то же самое с помощью леммы VII.8. Сначала получим неравенство (7.32) при $\alpha = 0$.

Разобьем функцию $\widetilde{A}_0[\beta]$ на сумму трех частей. Первая из них — это частичная сумма ряда (7.26), в которой индекс m изменяется от 1 до $\alpha_{\mu,1/2}(\beta)$. Максимальное слагаемое при этом имеет номер $m_* = [\alpha_{\mu,1/2}(\beta)]$. Вынося его за знак частичной суммы и пользуясь леммой VII.8, получим мажоранту вида

$$\frac{(2\pi\beta)^{2m_*}}{d_{m_*}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}. \tag{7.34}$$

Аналогичные рассуждения, примененные к третьей части, где суммирование происходит по всем m, бо́льшим $\alpha_{\mu,2}(\beta)$, позволяют промажорировать ее величиной вида

$$\frac{(2\pi\beta)^{2m_{**}}}{d_{m_{**}}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}, \tag{7.35}$$

где m_{**} — целое число, ближайшее к $\alpha_{\mu,2}(\beta)$. Суммирование во второй, центральной части ведется по целым m из интервала $(\alpha_{\mu,1/2}(\beta), \alpha_{\mu,2}(\beta))$, и максимум достигается при m, равном $\alpha_\mu(\beta)$. Таким образом, мажоранта центральной части имеет вид

$$(\alpha_{\mu,2}(\beta) - \alpha_{\mu,1/2}(\beta)) \max_{0\le m<\infty} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2}. \tag{7.36}$$

Из трех величин (7.34)–(7.36) максимальна последняя. Вспомнив асимптотику функции $\alpha_{\mu,q}(\beta)$, задаваемую соотношением (7.29), видим, что функция $\widetilde{A}_0[\beta]$ действительно удовлетворяет оценке (7.32).

Аналогичным образом мажорируются функции $\widetilde{A}_0^\alpha[\beta]$ и $\widetilde{A}_\alpha[\beta]$.

Следствие 7.2 доказано.

Сделаем несколько замечаний о максимумах в неравенствах (7.32) и (7.33). Функцией вида

$$T(z) = \max_{0\le m\le\infty} \frac{z^m}{d_m}$$

пользовался А. М. Островский при изучении различных классов квазианалитических функций [192]. В случае, когда последовательность d_m удовлетворяет равенствам (7.25), функция Островского $T(z)$ при больших z эквивалентна функции $\beta^\nu e^{s\beta^{1/\varkappa}}$, где $\nu = 1/2 - \mu/\varkappa$, $\beta = z/2\pi$. Тем самым, как следует из (7.32), целая функция $\widetilde{A}_0[\beta]$ имеет в окрестности бесконечности порядок $\beta = 1/\varkappa$ и тип $\sigma = 2s$.

Лемма VII.9. *Существует постоянная K такая, что одновременно для всех α выполняется неравенство*

$$\langle\varphi_\alpha\rangle \le K\frac{\alpha^{(1-\varkappa)/2}}{c_\alpha}. \tag{7.37}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (7.24) нормы $\langle\varphi_\alpha\rangle$. Как следует из определения последовательности c_α и неравенств (7.5), первое слагаемое в формуле (7.24) имеет мажорантой функцию вида $K\alpha^{-2\varkappa}/c_\alpha^2$. Таким образом, достаточно исследовать при больших α поведение второго слагаемого в (7.24), задаваемого рядом. Как уже отмечалось, эта задача равносильна оценке функции $\widetilde{S}[\alpha]$, определяемой равенством (7.27).

Разобьем соответствующий ряд на две части. В первой из них β изменяется от 1 до $\beta_{\mu_1}(\alpha)$, отношение $\widetilde{A}_0^\alpha[\beta]$ к $\widetilde{A}_0[\beta]$ не превосходит единицы, а функция $\widetilde{A}_{\alpha+1}[\beta]$ допускает оценку (7.32). В этом случае $\alpha_{\mu_1}(\beta) \le \alpha$ и неравенство (7.32) упрощается:

$$\widetilde{A}_{\alpha+1}[\beta] \le K\frac{(2\pi\beta)^{2(\alpha+1)}}{d_{\alpha+1}^2}\alpha_{\mu_1}(\beta_{\mu_1}(\alpha)) \le K\frac{(2\pi\beta)^{2(\alpha+1)}}{d_{\alpha+1}^2}\alpha.$$

Таким образом, первая выделенная в $\widetilde{S}[\alpha]$ часть допускает мажоранту вида

$$K \sum_{\beta=1}^{\beta_{\mu_1}(\alpha)} \frac{\alpha}{d_{\alpha+1}^2} = K \frac{\alpha \beta_{\mu_1}(\alpha)}{d_{\alpha+1}^2} \sim K \frac{\alpha^{1-\varkappa}}{c_\alpha^2}. \tag{7.38}$$

Во второй выделяемой в $\widetilde{S}[\alpha]$ части индекс суммирования β больше $\beta_{\mu_1}(\alpha)$, отношение $\widetilde{A}_{\alpha+1}[\beta]$ к $\widetilde{A}_\alpha[\beta]$ не превосходит единицы, а функция $\widetilde{A}_0^\alpha[\beta]$ удовлетворяет неравенству (7.33). В этом случае $\alpha \le \alpha_{\mu_1}(\beta)$ и оценка (7.33) упрощается:

$$\widetilde{A}_0^\alpha[\beta] \le K \frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{d_\alpha^2} \beta^{1/\varkappa}. \tag{7.39}$$

Уточним соотношение (7.39) при больших значениях α. Возьмем любое натуральное $\gamma \le \alpha$ и разобьем функцию $\widetilde{A}_0^\alpha[\beta]$ на две части:

$$\widetilde{A}_0^\alpha[\beta] = \widetilde{A}_0^{\alpha-\gamma}[\beta] + \sum_{m=\alpha-\gamma+1}^{\alpha} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2}. \tag{7.40}$$

Применив к первому слагаемому неравенство (7.39), получим

$$\widetilde{A}_0^{\alpha-\gamma}[\beta] \le K \frac{(2\pi\beta)^{2(\alpha-\gamma)}}{d_{\alpha-\gamma}^2} \beta^{1/\varkappa} \sim K \frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{d_\alpha^2} \beta^{1/\varkappa-2\gamma} \alpha^{2\varkappa\gamma}. \tag{7.41}$$

Вторая сумма в правой части (7.40) состоит ровно из γ слагаемых, максимальное из которых в силу условия $\alpha \le \alpha_{\mu_1}(\beta)$ достигается при $m = \alpha$. Поэтому

$$\sum_{m=\alpha-\gamma+1}^{\alpha} \frac{(2\pi\beta)^{2m}}{d_m^2} \le \gamma \frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{d_\alpha^2}. \tag{7.42}$$

Из (7.40)–(7.42) следует, что при $\gamma \le \alpha \le \alpha_{\mu_1}(\beta)$ справедлива оценка

$$\widetilde{A}_0^\alpha[\beta] \le K \frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{d_\alpha^2} \alpha^{2\varkappa\gamma} \beta^{1/\varkappa-2\gamma},$$

где постоянная K не зависит ни от α, ни от β.

Таким образом, вторая выделенная в $\widetilde{S}[\alpha]$ часть допускает следующую мажоранту:

$$K \sum_{\beta \geq \beta_{\mu_1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\alpha^{2\varkappa\gamma}}{\beta^{2+2\gamma-1/\varkappa} d_\alpha^2}. \tag{7.43}$$

Ряд в (7.43) сходится, если величина $m = 2 + 2\gamma - 1/\varkappa$ больше единицы. Сумму ряда (7.43) можно оценить сверху интегралом вида

$$\int_{\beta_{\mu_1}(\alpha)-1}^{\infty} x^{-m}\, dx \sim \frac{\beta_{\mu_1}^{1-m}(\alpha)}{m-1}.$$

Тем самым выражение (7.43) при больших α допускает оценку сверху функцией вида

$$K \frac{\alpha^{2\varkappa\gamma}(\beta_{\mu_1}(\alpha))^{1-m}}{d_\alpha^2} \sim K \frac{\alpha^{1-\varkappa}}{c_\alpha^2}. \tag{7.44}$$

Это означает, что мажоранта функции $\widetilde{S}[\alpha]$ при больших α имеет вид $\alpha^{1-\varkappa}/c_\alpha^2$.

Лемма VII.9 доказана.

Пользуясь неравенством (7.37), оценим скалярное произведение $\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$:

$$|\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle| \leq \langle \varphi_\alpha \rangle \langle \varphi_\beta \rangle \leq K \frac{(\alpha\beta)^{(1-\varkappa)/2}}{c_\alpha c_\beta}. \tag{7.45}$$

Доказательство теоремы VII.16. Пусть функция φ принадлежит пространству $\widetilde{\widetilde{H}}(\varkappa, A, \lambda)$. Образуем частичную сумму $S_N(x)$ соответствующего функции φ ряда (7.22):

$$S_N(x) = \sum_{m=0}^{N} \left(D^m \varphi\big|_0^1\right) \varphi_m(x).$$

Докажем, что последовательность S_N фундаментальна в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$.

Пусть $N_2 > N_1$, тогда, пользуясь (7.37), несложно оценить норму разности между $S_{N_2}(x)$ и $S_{N_1}(x)$:

$$\langle S_{N_1} - S_{N_1} \rangle \leq K \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{m^{(1-\varkappa)/2} \left| D^m \varphi \right|_0^1 \right|}{c_m}.$$

Применив к правой части неравенство Коши для сумм, получим

$$\langle S_{N_2} - S_{N_1} \rangle \leq K \left\{ \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\left| D^m \varphi \right|_0^1 \right|^2}{b_m^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{m=N_1+1}^{N_2} m^{1-\varkappa} \left(\frac{b_m}{c_m} \right)^2 \right\}^{1/2} \tag{7.46}$$

Согласно равенству (7.3) отношение b_m/c_m при $m \to \infty$ эквивалентно величине $1/m^{\mu_1-\mu_2}$. Кроме того, как было отмечено в (7.5), имеет место соотношение $2(\mu_1-\mu_2)+\varkappa-1 > 1$. Поэтому последнему сомножителю в правой части (7.46) соответствует сходящийся ряд.

Далее, по определению нормы $\langle \cdot \rangle_1$ имеем

$$\langle S_{N_2} - S_{N_1} \rangle_1^2 = \langle S_{N_2} - S_{N_1} \rangle^2 + \sum_{m=N_1+1}^{N_2} \frac{\left| D^m \varphi \right|_0^1 \right|^2}{b_m^2}.$$

Отсюда и из (7.46) следует, что последовательность частичных сумм $S_N(x)$ фундаментальна в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$. Ее предел $S(x)$, очевидно, принадлежит ортогональному дополнению $\overline{\overline{H}}^{\perp}(\varkappa, A, \lambda)$. Убедимся, что исходная функция $\varphi(x)$ совпадает с $S(x)$.

Покажем, что коэффициенты Фурье $c_\varphi[\beta]$ удовлетворяют равенству

$$c_\varphi[\beta] = \sum_{m=0}^{\infty} \left(D^m \varphi \big|_0^1 \right) c_m[\beta], \tag{7.47}$$

где $c_m[\beta]$ — коэффициент Фурье функции $\varphi_m(x)$, определенный формулой (7.19). Ряд в правой части (7.47) сходится абсолютно. Это можно доказать, воспользовавшись неравенством

$$|c_m[\beta]|^2 \leq \int_0^1 \varphi_m^2 \, dx \leq \langle \varphi_m \rangle^2 \leq K \frac{m^{1-\varkappa}}{c_m^2},$$

и проведя дальнейшие рассуждения по схеме, аналогичной обоснованию фундаментальности последовательности S_N. Скалярное произведение функции φ и экспоненты $e^{-i2\pi\beta x}$ выражается через коэффициент $c_\varphi[\beta]$ и приращения производных φ следующим образом:

$$\langle \varphi, e^{-i2\pi\beta x}\rangle_1 = A_0[\beta]\left\{c_\varphi[\beta] - \sum_{m=0}^{\infty} c_m[\beta] D^m \varphi\Big|_0^1\right\}.$$

Отсюда и из ортогональности функции φ экспонентам вытекает справедливость равенства (7.47).

Любой коэффициент Фурье функции $S(x)$, очевидно, представляет собой предел последовательности коэффициентов Фурье частичных сумм $S_N(x)$, т. е. также выражается рядом из правой части (7.47). Это возможно лишь в случае совпадения $S(x)$ и $\varphi(x)$.

Теорема VII.16 доказана.

Следствие 7.3. *Множество, состоящее из функций $\varphi_m(x)$ и экспонент вида $e^{i2\pi\beta x}$, $\beta = 0, \pm 1, \ldots$, образует базис в пространстве $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$.*

Скалярное произведение базисных функций φ_m и φ_n, определяемое формулой (7.23), обозначим через $A_{m,n}$, а эту же величину, умноженную на $b_m b_n$, — через $A^*_{m,n}$, т. е. положим

$$A^*_{m,n} = b_m b_n A_{m,n} = b_m b_n \langle \varphi_m, \varphi_n\rangle.$$

Бесконечная матрица $\left(A^*_{m,n}\right)$ задает ограниченный самосопряженный линейный оператор Гильберта — Шмидта в пространстве l_2 числовых последовательностей, суммируемых с квадратом. Это утверждение легко доказать, пользуясь следующей оценкой, вытекающей из неравенства (7.45):

$$\left(\sum_{\alpha,\gamma=0}^{\infty} \left|A^*_{\alpha,\gamma}\right|^2\right)^{1/2} \le C \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2(\mu_1-\mu_2)+\varkappa-1}}. \tag{7.48}$$

Ряд в правой части сходится в силу условия (7.5).

Для любой функции φ из ортогонального дополнения $\overline{\overline{H}}^{\perp}(\varkappa, A, \lambda)$ величину $(\varphi)^2$ можно выразить через приращения производных этой

функции по формуле

$$\langle\varphi\rangle^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} A^*_{m,n} \frac{D^m\varphi\big|_0^1 \overline{D^n\varphi}\big|_0^1}{b_m b_n}. \tag{7.49}$$

Для обоснования равенства (7.49) достаточно разложить функцию φ в ряд вида (7.22) и воспользоваться его сходимостью к φ по норме $\langle\cdot\rangle_1$, а значит, и по норме $\langle\cdot\rangle$.

Не все функции построенного в пространстве $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ базиса ортогональны друг другу. Этот недостаток, однако, можно исправить, определив в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ новое скалярное произведение. Имеет место следующая

Теорема VII.17. *Функции $\varphi_m(x)$, $m = 0, 1, \ldots$, и экспоненты $e^{i2\pi\beta x}$, $\beta = 0, \pm 1, \ldots$, образуют в пространстве $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ базис Рисса. Иными словами, существует такое скалярное произведение в этом пространстве, которое порождает норму, эквивалентную исходной, и в котором базисные функции взаимно ортогональны.*

Доказательство. Для любых функций $\varphi, \psi \in \overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ определим новую билинейную форму, положив

$$\langle\varphi, \psi\rangle_2 = \langle\varphi, \psi\rangle_1 - \sum_{m,n=0}^{\infty} A^*_{m,n} \frac{D^m\varphi\big|_0^1 \overline{D^n\psi}\big|_0^1}{b_m b_n}. \tag{7.50}$$

Проекции функций φ, ψ на $\widetilde{\overline{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ обозначим через $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ соответственно. Пользуясь (7.49), несложно убедиться, что имеет место формула

$$\langle\varphi, \psi\rangle_2 = \langle\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\rangle_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m\varphi\big|_0^1 \overline{D^m\psi}\big|_0^1}{b_m^2}. \tag{7.51}$$

Отсюда и из (7.21) следует, что равенство (7.50) действительно определяет в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ скалярное произведение, в котором функции построенного базиса ортогональны друг другу. Проверим, что новое скалярное произведение порождает в $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ норму, эквивалентную исходной.

Квадрат нормы функции φ представим в виде

$$\langle\varphi\rangle_1^2 = \langle\widetilde{\varphi}\rangle_1^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|D^m\varphi\big|_0^1\right|^2}{b_m^2} + \langle\varphi - \widetilde{\varphi}\rangle^2. \tag{7.52}$$

Сравнивая представления (7.51) и (7.52) норм одной и той же функции φ, приходим к выводу, что

$$\langle\varphi\rangle_2 \le \langle\varphi\rangle_1. \tag{7.53}$$

Установим оценку, обратную к (7.53). Преобразуем разность квадратов норм функции φ, используя представления (7.51) и (7.52):

$$\langle\varphi\rangle_1^2 - \langle\varphi\rangle_2^2 = \langle\varphi - \widetilde{\varphi}\rangle^2. \tag{7.54}$$

Разложив величину $\langle\varphi - \widetilde{\varphi}\rangle^2$ в ряд по формуле (7.49), а затем воспользовавшись оценкой (7.48), получим неравенство

$$\langle\varphi - \widetilde{\varphi}\rangle^2 \le C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|D^m\varphi|_0^1\right|^2}{b_m^2} \le C\langle\varphi\rangle_2^2.$$

Отсюда и из (7.54) следует искомая оценка нормы $\langle\varphi\rangle_1$ через $\langle\varphi\rangle_2$.

Теорема VII.17 доказана.

§ 8. Сходимость квадратурных формул Эйлера — Маклорена и Грегори на классах Жевре

Вернемся к исследованию последовательностей квадратурных формул на функциях, принадлежащих классу $G_\varkappa[0,1]$. Рассмотрев в § 6 функционалы погрешности, соответствующие классическим формулам Эйлера — Маклорена, мы убедились, что для любой функции φ из пространства $H(\varkappa, A, \lambda)$ при неограниченном возрастании числа узлов N погрешность формулы стремится к нулю экспоненциально. Кроме того, утверждалось, что при фиксированном N увеличивать алгебраический порядок точности m формулы не всегда целесообразно. В подтверждение этого была приведена без доказательства оценка снизу (6.16) нормы функционала $l_{m,N}^{EM}$ в пространстве $H^*(\varkappa, A, \lambda)$. Дадим сейчас ее обоснование.

Рассмотрим гильбертово пространство $\overline{H}(\varkappa, A, \mu)$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. В нем имеется ортогональный базис, включающий в себя функции φ_α. Норму любой из этих функций легко вычислить по формуле $\langle\varphi_\alpha\rangle_2 = 1/b_\alpha$.

Если $\mu \le \lambda - \varkappa - 2$, то пространство $\overline{H}(\varkappa, A, \mu)$ вложено в $H(\varkappa, A, \lambda)$, и при этом оператор вложения ограничен. Поэтому отношение норм функционала погрешности $l_{m,N}^{EM}$ в пространствах, сопряженных к $H(\varkappa, A, \lambda)$ и $\overline{H}(\varkappa, A, \mu)$ соответственно, ограничено снизу положительной постоянной K, не зависящей ни от m, ни от N, т. е.

$$\left\| l_{m,N}^{EM} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \ge K \left\| l_{m,N}^{EM} \mid \overline{H}^*(\varkappa, A, \mu) \right\|.$$

Продолжим эту оценку, заметив, что

$$\left\| l_{m,N}^{EM} \mid \overline{H}^*(\varkappa, A, \mu) \right\| \ge \frac{\left| (l_{m,N}^{EM}, \varphi_\alpha) \right|}{\langle \varphi_\alpha \rangle_2} = b_\alpha \left| (l_{m,N}^{EM}, \varphi_\alpha) \right|.$$

Подсчитаем погрешность формулы Эйлера — Маклорена на базисной функции φ_α.

Пусть $\alpha \le m - 2$, тогда функционал $l_{m,N}^{EM}$ точен на полиноме $B_{\alpha+1}(x)/(\alpha+1)!$ и, значит, его значения на проекциях φ_α и $\widetilde{\varphi}_\alpha$ отличаются только знаком:

$$(l_{m,N}^{EM}, \varphi_\alpha) = -(l_{m,N}^{EM}, \widetilde{\varphi}_\alpha).$$

На любой периодической бесконечно дифференцируемой функции $\widetilde{\varphi}$ значение функционала $l_{m,N}^{EM}$ совпадает с погрешностью $(l_h(x), \widetilde{\varphi})$, где функционал l_h определен равенством (1.1). Учитывая это и разлагая функцию $\widetilde{\varphi}_\alpha$ в ряд Фурье, получим равенство

$$(l_{m,N}^{EM}, \varphi_\alpha) = -\sum_{\beta \ne 0} \tilde{c}_\alpha[\beta](l_h, e^{-i2\pi\beta x}).$$

Значение l_h на экспоненте $e^{-i2\pi\beta x}$, как уже отмечалось ранее, равно нулю, если β не кратно N, и равно -1 в противном случае. Учитывая это и пользуясь формулой (7.17) для коэффициентов Фурье функции $\widetilde{\varphi}_\alpha$, получим

$$(l_{m,N}^{EM}, \varphi_\alpha) = \sum_{k \ne 0} \frac{(-1)^\alpha}{(i2\pi kN)^{\alpha+1}} \frac{A_0^\alpha[kN]}{A_0[kN]}.$$

Взяв в последнем равенстве α нечетным и равным $m-3$, придем к следующему представлению модуля погрешности:

$$\left| (l_{m,N}^{EM}, \varphi_{m-3}) \right| = 2h^{m-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^{m-2}} \frac{A_0^{m-3}[kN]}{A_0[kN]}.$$

Ряд в его правой части получается суммированием положительных слагаемых, и, значит, его сумма заведомо больше члена с номером $k = 1$. Поэтому

$$\left\| l_{m,N}^{EM} \mid \overline{H}^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \geq 2b_{m-3} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{m-2} \frac{A_0^{m-3}[N]}{A_0[N]}.$$

Пусть алгебраический порядок точности m больше $\alpha_{\mu,2}(N)+3$, тогда отношение функций $A_0^{m-3}[N]$ и $A_0[N]$ ограничено снизу положительной постоянной, не зависящей от N.

Таким образом, мы убедились в существовании постоянной K такой, что при всех m, бóльших $\alpha_{\mu,2}(N)+3$, справедливо неравенство

$$\left\| l_{m,N}^{EM} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \geq K \frac{N^2 b_{m-3}}{(2\pi N)^m}.$$

Напомним, что при больших m последовательность b_m ведет себя как функция $m^{\varkappa m + \mu_2} A^m$, где $\mu_2 = \lambda + \varkappa/2 - 3/2$. Поэтому правая часть полученной нами оценки при $m \to \infty$ эквивалентна последовательности

$$K \frac{a_m}{(2\pi N)^m} N^2 m^\gamma,$$

где $\gamma = -(5\varkappa + 3)/2$. Таким образом, при $m > \alpha_{\mu,2}(N) + 3$ система неравенств (6.16) действительно имеет место.

Исследуем теперь, как ведет себя на функциях класса Жевре двухиндексная последовательность погрешностей, соответствующих *квадратурным формулам Грегори*. Положим

$$(l_{N,m}^G, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx - T_N(\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{m-2} a[\alpha] h \{ \Delta^\alpha \varphi_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha \varphi_0 \}. \tag{8.1}$$

Здесь $\varphi(x)$ может быть любой непрерывной функцией на единичном отрезке. Произведение натурального N и вещественного h равно единице, а натуральное m должно быть четным числом, не превосходящим N. Конечные разности $\Delta^\alpha \varphi_k$, как обычно, определяются равенством

$$\Delta^\alpha \varphi_k = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha - j} \binom{\alpha}{j} \varphi(kh + jh).$$

Обозначение $T_N(\varphi)$ введено в § 6.

Функционал погрешности $l^G_{N,m}$ имеет алгебраический порядок точности m тогда и только тогда, когда числовые коэффициенты $a[\alpha]$ представимы в виде следующих интегралов от ньютоновых степеней:

$$a[\alpha] = \frac{(-1)^\alpha}{(\alpha+1)!}\int\limits_0^1 t^{[\alpha+1]}\,dt, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-2. \tag{8.2}$$

Для функции $\varphi \in H(\varkappa, A, \lambda)$ имеет место серия неравенств, аналогичная (6.10):

$$\left|\left(l^G_{N,m}, \varphi\right)\right| \le K[\varphi]_H \left\|l^G_{N,m} \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\| a_m. \tag{8.3}$$

Последовательность a_m здесь та же, что и в § 6. Чтобы минимизировать правую часть (8.3) по всевозможным четным значениям m, необходимо знать, как ведут себя при фиксированном N и меняющемся m нормы функционалов $l^G_{N,m}$ в пространстве $L_2^{(m)}[0,1]^*$. Если $m \le N/2$, то квадраты этих норм можно вычислить по формуле

$$\left\|l^G_{N,m+2} \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\|^2 = h^{2m}\frac{|B_{2m}|}{(2m)!}$$
$$+ h^{2m+1}a^2[m+1]\frac{32}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m} \sin^4 t P^2_{m-2}(\cos t)\,dt. \tag{8.4}$$

Здесь B_{2m} — число Бернулли, величина $a[m+1]$ определяется интегралом (8.2) при $\alpha = m-1$, а полином $P_{m-2}(w)$ степени $m-2$ не зависит от N и отличается на единичном отрезке от полинома Чебышёва второго рода $U_{m-2}(w)$ на слагаемое порядка $O(1/m)$ при $m \to \infty$.

Из (8.4), в частности, следует оценка

$$\left\|l^G_{N,m+2} \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\| \le K\frac{h^m}{m}, \tag{8.5}$$

в которой постоянная K не зависит ни от N, ни от m.

Подставляя неравенство (8.5) в (8.3), приходим к следующему соотношению:

$$\left|\left(l^G_{N,m+2}, \varphi\right)\right| \le K[\varphi]_H m^{\varkappa m+\lambda-1}(A/N)^m.$$

Минимум функции $m^{\varkappa m+\lambda-1}(A/N)^m$ достигается при m, равном $m_0(N)$ — четному числу, ближайшему к $(s/\varkappa)(N/2\pi)^{1/\varkappa}$. Его значение совпадает с величиной $m_0^{\lambda-1}e^{-\varkappa m_0}$. Тем самым для любой функции $\varphi \in H(\varkappa, A, \lambda)$ погрешность можно промажорировать так:

$$\left|\left(l^G_{N,m_0(N)+2}, \varphi\right)\right| \le K[\varphi]_H N^{(\lambda-1)/\varkappa} e^{-s(N/2\pi)^{1/\varkappa}}, \tag{8.6}$$

где число s определено равенством (5.12), а постоянная K не зависит от N.

Таким образом, как и в случае формул Эйлера — Маклорена, сходимость погрешности формул Грегори к нулю оказывается экспоненциальной при подходящем выборе алгебраического порядка точности. При этом норма функционала погрешности, как следует из (8.6), удовлетворяет неравенству

$$\left\| l^G_{N,m_0(N)+2} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda)\right\| \le K N^{(\lambda-1)/\varkappa} e^{-s(N/2\pi)^{1/\varkappa}}. \tag{8.7}$$

Получим оценку нормы в левой части неравенства (8.7) снизу. Как и в случае формул Эйлера — Маклорена, нужно знать явный вид функции

$$L_N^{m,G}[\beta] = \left(l^G_{N,m}, e^{-i2\pi\beta x}\right). \tag{8.8}$$

Если β не кратно числу узлов N, коэффициент Фурье $L_N^{m+2,G}[\beta]$ можно выразить через полином $P_{m-2}(w)$ из равенства (8.4). Имеет место формула

$$L_N^{m+2,G}[\beta] = h2^{m+2}(-1)^{m/2+1}(\sin \pi\beta h)^{m+2} a[m+1] P_{m-2}(\cos \pi\beta h). \tag{8.9}$$

Число $a[m+1]$, как и ранее, определено интегралом (8.2). Из (8.9) получаем следующее асимптотически точное при $m \to \infty$ представление:

$$L_N^{m+2,G}[\beta] = h2^{m+2}(-1)^{m/2+1}(\sin \pi\beta h)^{m+1} a[m+1] \times \left(\sin(m-1)\pi\beta h + O\left(1/m\right)\right). \tag{8.10}$$

Рассмотрим периодическую функцию

$$\varphi_*(x) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta^{\nu_0} e^{-s\beta^{1/\varkappa}} \operatorname{sign}\left(L_N^{m+2,G}[\beta]\right) e^{-i2\pi\beta x}. \tag{8.11}$$

При некотором значении ν_0 она принадлежит $H(\varkappa, A, \lambda)$. Это несложно доказать по той же схеме, что и в § 6. Погрешность формулы Грегори на φ_* не превосходит произведения норм функции φ_* в $H(\varkappa, A, \lambda)$ и функционала $l^G_{N,m+2}$ в $H^*(\varkappa, A, \lambda)$:

$$\left|(l^G_{N,m+2}, \varphi_*)\right| \le [\varphi_*]_H \left\| l^G_{N,m+2} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\|.$$

Пользуясь (8.11), вычислим нижнюю границу в этом неравенстве:

$$\left\| l^G_{N,m+2} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \ge K \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta^{\nu_0} e^{-s\beta^{1/\varkappa}} \left| L_N^{m+2,G}[\beta] \right|.$$

Оставив в сумме ряда в правой части слагаемое, соответствующее номеру β, ближайшему к $N/6$, и воспользовавшись представлением (8.10), получим искомую оценку нормы $l^G_{N,m+2}$ снизу:

$$\left\| l^G_{N,m+2} \mid H^*(\varkappa, A, \lambda) \right\| \ge K N^{\nu_0 - 1} e^{-s(N/6)^{1/\varkappa}}, \tag{8.12}$$

где постоянная K не зависит от N.

Заметим, что показатели в экспонентах из неравенств (8.7) и (8.12) не совпадают друг с другом. Интересен вопрос, какую из оценок (8.7)–(8.12) можно уточнить. Оказывается, показатель $s(N/2\pi)^{1/\varkappa}$ в (8.7) можно увеличить до $s(N/6)^{1/\varkappa}$. Доказательство этого утверждения основано на представлении нормы функционала погрешности $l^G_{N,m+2}$ в гильбертовом пространстве $\overline{H}(\varkappa, A, \lambda)$ через сумму квадратов погрешностей на функциях из ортогонального базиса, построенного в § 7. Соответствующие выкладки технически сложны, и поэтому здесь не приводятся.

§ 9. Множество коэффициентов Фурье функционалов погрешности

Исследуя вопрос о сходимости квадратурных формул Грегори в пространстве $H(\varkappa, A, \lambda)$, мы существенно использовали два важных результата. Первый из них — формула (8.4) — дает явное выражение нормы функционала погрешности формул Грегори как функции параметров m и h. Второй — формула (8.9) — представляет погрешность на тригонометрических функциях асимптотически точно

при $m \to \infty$. Этот параграф и два последующих посвящены выводу упомянутых формул.

Нам удобно рассматривать далее функционалы погрешности $l_N^m(x)$ более общего вида, чем $l_{m,N}^G(x)$. Значение $l_N^m(x)$ на любой непрерывной функции $\varphi(x)$ определим равенством, аналогичным (8.1), но суммирование в правой части будем проводить по всем α от единицы до N, а не до m, как в случае формул Грегори. Коэффициенты $a[\alpha]$ в этом разложении погрешности при всех $\alpha = 1, \ldots, m-2$ заданы интегралами (8.2) от ньютоновых степеней, а при $\alpha > m-2$ совершенно произвольны. Условимся еще об одном обозначении. Пусть натуральное M не превосходит N. Образуем функцию дискретной переменной α, определенную на полуоси при $\alpha \geq 1$, равную нулю при $\alpha > M$ и совпадающую с коэффициентами $a[\alpha]$ при $\alpha \leq M$. Эту функцию обозначим через $a_M[\alpha]$.

Таким образом, для любой непрерывной функции φ имеет место равенство

$$(l_N^m, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - T_N(\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_N[\alpha] h \{\Delta^\alpha \varphi_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha \varphi_0\}. \tag{9.1}$$

Отметим, что любой функционал погрешности вида (9.1) четен относительно середины отрезка $[0, 1]$, т. е.

$$l_N^m(x) = l_N^m(1-x). \tag{9.2}$$

Погрешность (9.1) можно записать и по-другому:

$$(l_N^m, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \sum_{\alpha=0}^{N} c[\alpha] h \varphi(x - \alpha h). \tag{9.3}$$

В силу равенства (9.2) коэффициенты $c[\alpha]$ в этом разложении также симметричны относительно середины единичного отрезка.

Функционал погрешности $l_N^m(x)$ линеен и непрерывен в пространстве S быстро убывающих функций. На множестве всех функционалов вида (9.1), которое мы обозначим через $EF_N^{(m)}$, определены операции сложения, умножения на число, линейная замена независимой переменной, обобщенное дифференцирование, преобразование Фурье. Сужение преобразования Фурье функционала погрешности l_N^m на множество целых чисел представляет собой функцию

дискретной переменной со значениями

$$L_N^m[\beta] = \left(l_N^m(x), e^{-i2\pi\beta x}\right). \tag{9.4}$$

Будем называть $L_N^m[\beta]$ ***коэффициентом Фурье функционала погрешности*** l_N^m.

Множество всех функций вида (9.4), соответствующих функционалам $l_N^m(x) \in EF_N^{(m)}$, обозначим через $CF_N^{(m)}$. Равенство (9.4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $EF_N^{(m)}$ и $CF_N^{(m)}$. Отметим простейшие свойства коэффициентов Фурье (9.4).

При любом $l_N^m(x) \in EF_N^{(m)}$ функция $L_N^m[\beta]$ вещественна и четна:

$$L_N^m[\beta] = \left(l_N^m(x), \cos 2\pi\beta x\right), \quad L_N^m[-\beta] = L_N^m[\beta]. \tag{9.5}$$

Это замечание легко следует из равенства (9.2). Далее, согласно определению (9.4) и представлению (9.3) получаем

$$L_N^m[\beta] = \delta[\beta] - \sum_{\alpha=0}^{N} c[\alpha] h e^{-i2\pi\beta\alpha h} = \delta[\beta] - \sum_{\alpha=0}^{N} c[\alpha] h \cos 2\pi\beta\alpha h. \tag{9.6}$$

Здесь функция $\delta[\beta]$ принимает значение единица при $\beta = 0$ и нуль во всех остальных точках. Нетрудно проверить, что $\delta[\beta]$ — это последовательность коэффициентов Фурье индикатора единичного отрезка.

Несложно вычислить последовательность коэффициентов Фурье функционала $T_N(\varphi)$. Это — функция $T_N[\beta]$, равная нулю во всех целых точках, за исключением кратных N, в которых она равна единице.

Разность между $L_N^m[\beta]$ и $\delta[\beta]$, как следует из (9.6), представляет собой функцию периода N, равную -1 во всех кратных N целых точках, т. е.

$$L_N^m[\beta + N] = L_N^m[\beta], \quad L_N^m[\beta N] = -1, \quad \beta \neq 0. \tag{9.7}$$

Из (9.6) следует также, что для всех β таких, что $0 < \beta < N$, имеет место равенство

$$L_N^m[N - \beta] = L_N^m[\beta]. \tag{9.8}$$

Обозначим через $\widetilde{X}_N^{(0)}$ пространство вещественных четных функций дискретной переменной β, имеющих период N, обращающихся в нуль при β, кратном N, и симметричных относительно

середины единичного отрезка. Любая функция $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ из этого пространства однозначно определяется своими значениями при положительных β, не превосходящих целой части $N/2$. Любой функции $L_N^m[\beta] \in CF_N^{(m)}$, как это следует из равенств (9.5)–(9.8), можно сопоставить такую функцию $\widetilde{L}_N^m[\beta] \in \widetilde{X}_N^0$, что

$$L_N^m[\beta] = \delta[\beta] - T_N[\beta] + \widetilde{L}_N^m[\beta]. \tag{9.9}$$

Функции $\widetilde{L}_N^m[\beta]$, соответствующие в силу (9.9) всевозможным функционалам погрешности $l_N^m(x) \in EF_N^{(m)}$, образуют в $\widetilde{X}_N^{(0)}$ подмножество $\widetilde{CF}_N^{(m)}$.

Лемма VII.10. *Произвольная функция из $\widetilde{CF}_N^{(m)}$ представляет собой четный полином от переменной $w = \cos \pi\beta h$ степени не выше $2N$, обращающийся в нуль при $w = 1$.*

Доказательство. Согласно определению оператора Δ^α имеем

$$\Delta^\alpha(e^{\mp i2\pi\beta x})_k = (-1)^\alpha e^{\mp i2\pi\beta kh}(1 - e^{\mp i2\pi\beta h})^\alpha. \tag{9.10}$$

Из (9.1) и (9.9) следует, что

$$\widetilde{L}_N^m[\beta] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_N[\alpha]h\{\Delta^\alpha(e^{-i2\pi\beta x})_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha(e^{-i2\pi\beta x})_0\}.$$

Подставив сюда равенства (9.10), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_N^m[\beta] = \sum_{\alpha=1}^{m-2} a[\alpha]h2^{\alpha+1}(\sin \pi\beta h)^\alpha \cos \pi(\beta h - 1/2)\alpha \\ + 2^{m-1}(\sin \pi\beta h)^{m-2}(-1)^{m/2+1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_N[\alpha + m - 1]h \\ \times \operatorname{Re}[e^{-i(m-2)\pi\beta h}(1 - e^{-i2\pi\beta h})^{\alpha+1}].\end{aligned} \tag{9.11}$$

По условию $\cos \pi\beta h = w$ и соответственно $\sin \pi\beta h = (1 - w^2)^{1/2}$. Кроме того,

$$\cos \pi(\beta h - 1/2)\alpha = \begin{cases} (-1)^{\alpha/2} T_\alpha(w), & \alpha \text{ четное}, \\ (-1)^{(\alpha-1)/2}(1 - w^2)^{1/2} U_{\alpha-1}(w), & \alpha \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Здесь через $T_n(w)$ и $U_n(w)$, как обычно, обозначены полиномы Чебышёва первого и второго родов. Используя эти равенства, преобразуем формулу (9.11).

Разобьем каждую сумму в правой части равенства (9.11) на две: по четным и по нечетным α. Подставив в нее выражения тригонометрических функций через полиномы Чебышёва, получим

$$\widetilde{L}_N^m[\beta] = h\{Q^s_{2(m-2)}(w) + 2^m(w^2-1)^{m/2}Q^f_{2N-m}(w)\}. \qquad (9.12)$$

Полиномы $Q^s_{2(m-2)}(w)$ и $Q^f_{2N-m}(w)$ степеней $2(m-2)$ и $2N-m$ соответственно определяются следующими равенствами:

$$Q^s_{2(m-2)}(w) = \sum_{k=1}^{m/2-1} 2^{2k}(w^2-1)^k\{2a[2k]T_{2k}(w) - a[2k-1]U_{2(k-1)}(w)\},$$

$$Q^f_{2N-m}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(w^2-1)^k \qquad (9.13)$$

$$\times\{2a_N[2k+m]T_{2k+m}(w) - a_N[2k+m-1]U_{2(k-1)+m}(w)\}.$$

Так как по условию m четно, то и полиномы $Q^s_{2(m-2)}(w)$, $Q^f_{2N-m}(w)$ также четные. При этом, очевидно, $Q^s_{2(m-2)}(1) = 0$. Таким образом, в правой части равенства (9.12) стоит полином нужного вида.

Лемма VII.10 доказана.

Равенство (9.12) может служить критерием принадлежности произвольной функции $\widetilde{L}_N^m[\beta] \in \widetilde{X}_N^{(0)}$ множеству $\widetilde{CF}_N^{(m)}$.

Рассмотрим специальный локальный функционал погрешности $l_m^{(0)}(x)$. Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ положим

$$\left(l_m^{(0)}(x), \varphi(x)\right) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \varphi(0) - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_N[k]\Delta_1^{k+1}\varphi_0. \qquad (9.14)$$

Коэффициенты $a_N[k]$ здесь те же, что и в представлении (9.1) функционала погрешности $l_N^m(x)$, а конечные разности $\Delta_1^{k+1}\varphi_0$ берутся с шагом $h = 1$. Локальный функционал погрешности $l_m^{(0)}(x)$ имеет алгебраический порядок точности m. Это легко доказать, проинтегрировав по отрезку $[0,1]$ интерполяционный полином Ньютона для функции $\varphi(x)$, построенный на множестве узлов $\alpha = 0, 1, \ldots, m-1$.

Заменой $x = hy$, $h > 0$, получим из $l_m^{(0)}(y)$ функционал $l_m^{(0)}(x/h)$. Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\left(l_m^{(0)}(x/h), \varphi(x)\right) = \int\limits_0^h \varphi(x)\,dx - h\varphi(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h(-1)^k a_N[k]\Delta^{k+1}\varphi_0. \tag{9.15}$$

Последовательность коэффициентов Фурье функционала погрешности (9.15) обозначим через

$$\lambda_0^{m,h}[\beta] = \left(l_m^{(0)}(x/h), e^{-i2\pi\beta x}\right). \tag{9.16}$$

Справедлива следующая

Лемма VII.11. *Имеет место алгебраическое тождество*

$$i2(\sin\pi\beta h)\widetilde{L}_N^m[\beta] = e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta] - e^{-i\pi\beta h}\bar{\lambda}_0^{m,h}[\beta]. \tag{9.17}$$

Доказательство. Достаточно проверить два промежуточных равенства. Первое из них получается из (9.15) и (9.10) и имеет вид

$$\lambda_0^{m,h}[\beta] = \int\limits_0^h e^{-i2\pi\beta x}\,dx - h + \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_N[\alpha]h(1 - e^{-i2\pi\beta h})^{\alpha+1}.$$

Отсюда с помощью несложных выкладок выводим второе равенство:

$$\begin{aligned} &e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta] - e^{-i\pi\beta h}\bar{\lambda}_0^{m,h}[\beta] \\ &\qquad = i2\sin\pi\beta h \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_N[\alpha]h2^{\alpha+1}(\sin\pi\beta h)^{\alpha}\cos\pi(\beta h - 1/2)\alpha. \end{aligned}$$

Сравнивая его правую часть с (9.11), получаем (9.17).

Лемма VII.11 доказана.

Таким образом, функция $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ принадлежит множеству $\widetilde{CF}_N^{(m)}$ тогда и только тогда, когда существует локальный функционал погрешности вида (9.15), коэффициенты Фурье которого связаны с $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ равенством

$$\widetilde{L}_N^m[\beta] = \frac{1}{\sin\pi\beta h}\operatorname{Im}\left[e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta]\right], \quad \beta \neq kN. \tag{9.18}$$

Если в формуле (9.14) при $\alpha \geq m-1$ все коэффициенты $a[\alpha]$ равны нулю, то равенство (9.18) упрощается и преобразуется к следующему виду:

$$Q^s_{2(m-2)}(\cos \pi\beta h) = \frac{N}{\sin \pi\beta h} \operatorname{Im}\left[e^{i\pi\beta h} \lambda_0^{m,h}[\beta]\right]. \tag{9.19}$$

Функция $\lambda_0^{m,h}[\beta]$ в (9.19) представляет собой последовательность коэффициентов Фурье локального функционала погрешности $l_m^G(x/h)$, значение которого на непрерывной функции $\varphi(x)$ дается формулой

$$\left(l_m^G(x/h), \varphi(x)\right) = \int\limits_0^h \varphi(x)\,dx - \sum_{\alpha=0}^{m-1} hc_m[\alpha]\varphi(\alpha h). \tag{9.20}$$

Функционал $l_m^G(x/h)$ имеет алгебраический порядок точности m, а его коэффициенты $c_m[\alpha]$ допускают интегральное представление

$$c_m[\alpha] = (-1)^\alpha \int\limits_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(t+\alpha)\alpha!(m-\alpha-1)!}\,dt. \tag{9.21}$$

Равенства (9.21) несложно получить, проинтегрировав по отрезку $[-1, 0]$ интерполяционную формулу Лагранжа степени $m-1$, построенную для функции $\varphi(-x)$ на множестве узлов $\alpha = 0, \ldots, -m+1$.

§ 10. Преобразование Фурье локального функционала погрешности

Преобразование Фурье функционала погрешности $l_m^G(x/h)$, определенного формулой (9.20), — это функция вещественной переменной ξ, задаваемая равенством

$$\lambda_0^{m,h}(\xi) = \left(l_m^G(x/h), e^{-i2\pi\xi x}\right). \tag{10.1}$$

Ее сужение на множество целых точек β представляет собой последовательность $\lambda_0^{m,h}[\beta]$ коэффициентов Фурье функционала $l_m^G(x/h)$.

Далее будем рассматривать функцию $\lambda_0^m(\xi)$, связанную с $\lambda_0^{m,h}(\xi)$ соотношением

$$\lambda_0^m(\xi) = \lambda_0^{m,1}(\xi) = (1/h)\lambda_0^{m,h}(\xi/h) = \left(l_m^G(y), e^{-i2\pi\xi y}\right). \tag{10.2}$$

Получим аналитическое представление $\lambda_0^m(\xi)$, позволяющее, в частности, разлагать ее в ряды специального вида.

Лемма VII.12. При любом вещественном ξ преобразование Фурье локального функционала погрешности представимо интегралом следующего вида:

$$\lambda_0^m(\xi) = \int\limits_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(m-1)!}\psi_t^m(2\pi\xi)\,dt. \qquad (10.3)$$

Функцию $\psi_t^m(x)$ при этом можно найти по формуле

$$\psi_t^m(x) = i\int\limits_{0}^{x} e^{it(x-y)}(1-e^{-iy})^{m-1}\,dy. \qquad (10.4)$$

Доказательство. Согласно определению функционала $l_m^G(x)$ имеем

$$\lambda_0^m(\xi) = \frac{1}{i2\pi\xi}(1-e^{-i2\pi\xi}) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_m[\alpha]e^{-i2\pi\xi\alpha}.$$

Отсюда, воспользовавшись представлением (9.21) коэффициентов $c_m[\alpha]$, получим

$$\lambda_0^m(\xi) = \frac{(1-e^{-i2\pi\xi})}{i2\pi\xi} - \int\limits_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(m-1)!}\varphi_t^m(2\pi\xi)\,dt. \qquad (10.5)$$

Подынтегральная функция $\varphi_t^m(x)$ в (10.5) представляется следующей линейной комбинацией:

$$\varphi_t^m(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1}(-1)^\alpha\binom{m-1}{\alpha}\frac{1}{t+\alpha}e^{-ix\alpha}. \qquad (10.6)$$

Продифференцировав обе части (10.6) по x, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\varphi_t^m(x) = -i(1-e^{-ix})^{m-1} + it\varphi_t^m(x).$$

Решив его при фиксированном значении t, найдем, что

$$\varphi_t^m(x) = e^{itx}\varphi_t^m(0) - i\int_0^x e^{it(x-y)}(1-e^{-iy})^{m-1}\,dy. \tag{10.7}$$

Учитывая, что вычитаемое в правой части этого равенства обозначено через $\psi_t^m(x)$, и подставляя (10.7) в (10.5), получим

$$\lambda_0^m(\xi) - \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(m-1)!}\psi_t^m(2\pi\xi)\,dt$$

$$= \frac{1}{i2\pi\xi}(1-e^{-i2\pi\xi}) - \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(m-1)!}e^{it2\pi\xi}\varphi_t^m(0)\,dt. \tag{10.8}$$

Убедимся, что правая часть равенства (10.8) равна нулю. Согласно определению функции $\varphi_t^m(x)$ имеет место соотношение

$$\int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(m-1)!}e^{it2\pi\xi}\varphi_t^m(0)\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 e^{it2\pi\xi}\left[\sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(t+\alpha)\alpha!(m-1-\alpha)!}(-1)^\alpha\right]dt.$$

Но сумма в квадратных скобках под интегралом представляет собой тождественную единицу. Чтобы доказать это, достаточно применить интерполяционную формулу Лагранжа степени $m-1$, построенную для тождественной постоянной на множестве узлов $\alpha = 0, -1, \dots, -m+1$. Значит, правая часть равенства (10.8) равна нулю.

Лемма VII.12 доказана.

Введя обозначение $u(x) = 1 - e^{-ix}$ и сделав в интеграле (10.4) замену $\tau = (e^{-iy}-1)/(e^{-ix}-1)$, получим

$$\psi_t^m(x) = e^{itx}(1-e^{-ix})^m \int_0^1 \frac{\tau^{m-1}}{(1-\tau u)^{1-t}}\,d\tau. \tag{10.9}$$

Пользуясь этой формулой, найдем представление функции $\psi_t^m(x)$, асимптотически точное при $m \to \infty$.

Лемма VII.13. Для любых вещественных значений t, x функция $\psi_t^m(x)$ разлагается в ряд по ньютоновым степеням аргумента t:

$$\frac{1}{(m-1)!}\psi_t^m(x) = (1-e^{-ix})^{m-1} \times \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j^m(x)\frac{(t-1)\dots(t-j)}{j!} + \frac{1}{(m+n)!}A_n^m(x,t)\right\}. \quad (10.10)$$

Коэффициенты $a_j^m(x)$ этого разложения определяются формулой

$$a_j^m(x) = \frac{j!}{(m+j)!}(e^{ix}-1)^{j+1}. \quad (10.11)$$

Функция $A_n^m(x,t)$ равномерно ограничена, когда x изменяется на отрезке $[-\pi,\pi]$, а t — на отрезке $[-1,0]$, и при этом

$$\sup_{\substack{-\pi\le x\le\pi\\ -1\le t\le 0}} \left|A_n^m(x,t)\right| \le a_n\frac{\sin^{n+2}(x/2)}{m+n}, \quad (10.12)$$

где постоянная a_n не зависит от m.

Доказательство. Равенство (10.9) перепишем в следующем виде:

$$\psi_t^m(x) = e^{itx}(1-e^{-ix})^{m+t-1}\int_0^1 \frac{\tau^{m-1}}{(z(x)-\tau)^{1-t}}\,d\tau. \quad (10.13)$$

Здесь через $z(x)$ обозначено частное $1/u(x)$. Интегрируя по частям $n+1$ раз выражение справа в (10.13), получаем

$$\int_0^1 \frac{\tau^{m-1}}{(z-\tau)^{1-t}}\,d\tau = \frac{1}{m}\frac{1}{(z-1)^{1-t}}\left\{1+\frac{t-1}{m+1}\frac{1}{z-1}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{m!}{(m+n)!}\frac{(t-1)\dots(t-n)}{(z-1)^n}+\frac{m!}{(m+n)!}(z-1)A_n^m(x,t)\right\}. \quad (10.14)$$

Остаточный член этого разложения представим в виде

$$A_n^m(x,t) = (z-1)^{-t}(t-1)\dots(t-n-1)\int\limits_0^1 \frac{\tau^{m+n}}{(z-\tau)^{n+2-t}}\,d\tau. \quad (10.15)$$

Подставляя равенство (10.14) в (10.13), приходим к (10.10).

Проверим теперь, что при $x \in [-\pi,\pi]$ и $t \in [-1,0]$ имеет место оценка (10.12). Если $|x| \le 2\pi/3$, то при всех $\tau \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$|z(x)-\tau|^2 = \left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} \ge \frac{1}{16}\frac{1}{\sin^2 x/2}.$$

Поэтому

$$\left|A_n^m(x,t)\right| \le \frac{(n+2)!2^{2n+7}\sin^{n+2}(x/2)}{m+n}.$$

Таким образом, при $|x| \le 2\pi/3$ и $-1 \le t \le 0$ функция $A_n^m(x,t)$ ограничена величиной требуемого вида.

Пусть x принадлежит отрезку $[2\pi/3,\pi]$ или $[-\pi,-2\pi/3]$. Тогда подынтегральное выражение в равенстве (10.15) имеет особенности в точках $x = \pm\pi$, что несколько усложняет вывод необходимой оценки. Перепишем равенства (10.15) в более удобном виде, положив

$$J_n^m(x,t) = \int\limits_0^1 \frac{\tau^{n+m}}{(z(x)-\tau)^{n-t}}d\tau.$$

Отсюда и из равенства (10.15) имеем

$$A_n^m(x,t) = (z-1)^{-t}(t-1)\dots(t-n-1)J_{n+2}^{m-2}(x,t).$$

Таким образом, мажоранту функции $A_n^m(x,t)$ несложно получить, если известна оценка сверху интеграла $J_{n+2}^{m-2}(x,t)$.

Предположим, что $m = 2$, и докажем индукцией по n, что при вещественных x и t справедливо неравенство

$$\left|J_n^0(x,t)\right| \le |z(x)|^{t+1}2^n|x|. \quad (10.16)$$

В самом деле, функцию $J_0^0(x,t)$ легко найти в явном виде:

$$J_0^0(x,t) = \frac{z^{t+1}(1 - e^{-ix(t+1)})}{t+1},$$

откуда следует, что (10.16) действительно выполняется. Шаг индукции несложно провести, воспользовавшись рекуррентным соотношением

$$J_{n+1}^0(x,t) = zJ_n^0(x,t-1) - J_n^0(x,t).$$

Пусть теперь $m > 0$. Индукцией по индексу n докажем существование числовой последовательности c_n такой, что при всех $t \geq -1$ и любом натуральном m справедливо неравенство

$$\left|J_n^m(x,t)\right| \leq \frac{|z(x)|^{t+1}c_n}{m+1}. \tag{10.17}$$

Если $n = 0$, то

$$J_0^m(x,t) = z^m J_0^0(x,t) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} z^{m-1-\alpha} \int_0^1 \tau^\alpha (z-\tau)^{1+t}\, d\tau. \tag{10.18}$$

Согласно условию $1 + t \geq 0$, поэтому

$$\left|\int_0^1 (z-\tau)^{1+t}\tau^\alpha\, d\tau\right| \leq \frac{|z|^{1+t}}{\alpha+1}. \tag{10.19}$$

Подставляя неравенства (10.16), (10.19) в (10.18), получаем

$$\left|J_0^m(x,t)\right| \leq q^{m+t+1}|x| + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{q^{m-\alpha+t}}{\alpha+1}. \tag{10.20}$$

Здесь $q = |z(x)|$ не превосходит $1/\sqrt{3}$, т. е. меньше единицы. Поэтому существует постоянная c_0, не зависящая от m, x, n, такая, что отношение $q^{t+1}c_0/(m+1)$ мажорирует правую часть в неравенстве (10.20). Тем самым доказано, что оценка (10.17) справедлива при $t \geq -1$ и $n = 0$ для всех значений m.

Индукционный шаг легко провести, используя следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{n+1}^m(x,t) = z^m J_{n+1}^0(x,t) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} z^{m-1-\alpha} J_n^{\alpha+1}(x,t),$$

а также оценку (10.16). Постоянную c_{n+1} задаем равенством

$$c_{n+1} = \sup_m \left\{ (m+1)q^m 2^{n+1}\pi + c_n(m+1) \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{q^{m-\alpha}}{\alpha} \right\}.$$

По условию $q < 1$, поэтому число c_{n+1} конечно.

Таким образом, неравенство (10.17) доказано полностью. Пользуясь им, несложно убедиться в справедливости оценки (10.12).

Лемма VII.13 доказана.

Остановимся более подробно на вопросе о сходимости последовательности частичных сумм в правой части равенства (10.10). Предел, если он существует, называется *рядом Ньютона*. Как известно [39], ряд Ньютона сходится равномерно на любом ограниченном множестве в полуплоскости $\operatorname{Re} t \geq \lambda + \varepsilon$. Здесь ε положительно, а λ — числовой параметр, называемый *абсциссой сходимости* рассматриваемого ряда.

В случае, когда $|x| \leq \pi/3$, модуль комплексного числа $e^{ix} - 1$ не превосходит единицы, и поэтому имеют место неравенства

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k^m(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^m} \leq \int_{n-1}^{\infty} x^{-m}\, dx = \frac{(n-1)^{1-m}}{m-1}. \qquad (10.21)$$

При этом абсциссу сходимости λ ряда Ньютона в формуле (10.10) можно определить из соотношения [39]

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\ln n} \ln \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k^m(x) \right|.$$

Подставив сюда неравенство (10.21), получим, что $\lambda \leq -m+1 < -1$. Поэтому при всех $t > -m+1$ и x, по модулю не превосходящих $\pi/3$, в равенстве (10.10) можно перейти к пределу при $n \to \infty$.

Подставляя соответствующий разложению (10.10) ряд Ньютона в равенство (10.3) и проводя несложные выкладки, приходим к следующему представлению функции $\lambda_0^m(\xi)$:

$$\lambda_0^m(\xi) = (1 - e^{-i2\pi\xi})^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} b_m[\alpha](e^{i2\pi\xi} - 1)^{\alpha+1}, \qquad (10.22)$$

где $|\xi| \leq 1/6$, а коэффициенты ряда допускают интегральное представление вида

$$b_m[\alpha] = \frac{1}{(m+\alpha)!} \int\limits_{m-2}^{m-1} t^{[m+\alpha]}\, dt. \qquad (10.23)$$

Отметим, что коэффициент $b_m[0]$ противоположен коэффициенту $a[m-1]$, определенному равенством (8.2).

В случае, когда $\pi/3 < |x| \leq \pi$ и $-1 \leq t \leq 0$, ряд, соответствующий (10.10), расходится.

Вернемся к последовательности коэффициентов Фурье, соответствующей функционалам погрешности формул Грегори. Имеет место

Теорема VII.18. *Функция дискретного аргумента, определенная равенством* (8.8), *допускает при* β, *не кратном* N, *следующее разложение на множители*:

$$L_N^{m,G}[\beta] = h2^m(-1)^{m/2+1}(\sin \pi\beta h)^m b_m[0] P_{m-4}(\cos \pi\beta h). \qquad (10.24)$$

Коэффициент $b_m[0]$ *представляет собой интеграл вида* (10.23), *а полином* $P_{m-4}(w)$ *степени* $m-4$ *не зависит от* N *и отличается на единичном отрезке от полинома Чебышёва второго рода* $U_{m-4}(w)$ *на слагаемое порядка* $O(1/m)$ *при* $m \to \infty$.

Доказательство. Коэффициенты Фурье функционала погрешности квадратурных формул Грегори и соответствующего локального функционала погрешности связаны друг с другом соотношением (9.17). Преобразуем его правую часть. Подставляя разложение (10.10) в (10.3), получим

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\pi\xi}\lambda_0^m(\xi)\right] = 2^{m-1}(-1)^{(m-2)/2}(\sin \pi\xi)^{m-1}$$
$$\times \left\{ \sum_{\alpha=0}^{n} b_m[\alpha] \operatorname{Re}[e^{-i\pi\xi(m-2)}(e^{i2\pi\xi} - 1)^{\alpha+1}] + \frac{\Lambda_n^m(\xi)}{(m+n)!} \right\}. \qquad (10.25)$$

Функция, характеризующая остаточный член ряда в последнем равенстве, представляется следующим интегралом:

$$\Lambda_n^m(\xi) = \int\limits_{-1}^{0} t(t+1)\dots(t+m-1)\,\mathrm{Re}\big[e^{-i(m-2)\pi\xi} A_n^m(2\pi\xi, t)\big]\,dt. \quad (10.26)$$

Ее несложно промажорировать с помощью оценки (10.12).

Пусть β не кратно N и $w = \cos\pi\beta h$. Тогда из равенств (9.9) и (9.12) следует, что

$$L_N^{m,G}[\beta] = hQ^s_{2(m-2)}(w). \quad (10.27)$$

Полином $Q_{2(m-2)}(w)$ определен равенством (9.13) и не зависит от h. Докажем, что он делится без остатка на полином $(1-w^2)^{m/2}$.

Исследуем поведение в окрестности точек $w = \pm 1$ рациональной функции

$$R_{m-4}(w) = -\frac{Q^s_{2(m-2)}(w)}{2^m b_m[0](w^2-1)^{m/2}}. \quad (10.28)$$

Воспользовавшись формулами (9.19) и (10.2), получим равенство

$$R_{m-4}(\cos\pi\beta h) = \frac{\mathrm{Im}[e^{i\pi\beta h}\lambda_0^m(\beta h)]}{2^m b_m[0](-1)^{m/2}(\sin\pi\beta h)^{m+1}}.$$

Подставив в его правую часть представление (10.25) при $\xi = \beta h$, придем к соотношению

$$R_{m-4}(\cos\pi\beta h) = \left\{\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{b_m[\alpha]}{b_m[0]}\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i(m-2)\pi\beta h}(e^{i2\pi\beta h}-1)^{\alpha+1}}{2\sin^2\pi\beta h}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m+n)!}\frac{\Lambda_n^m(\beta h)}{2b_m[0]\sin^2\pi\beta h}\right\}. \quad (10.29)$$

Функция $\Lambda_n^m(\beta h)$, как это следует из формулы (10.26) и неравенства (10.12), допускает оценку

$$\sup_{|\beta|\le N/2}\big|\Lambda_n^m(\beta h)\big| \le \frac{a_n|b_m[0]|m!}{m+n}\sin^{n+2}\pi\beta h. \quad (10.30)$$

Вещественная часть величины в квадратных скобках из равенства (10.29) при четном $\alpha = 2k$ представляет собой произведение

$$2^{2k}(\cos^2 \pi\beta h - 1)^k U_{m-4-2k}(\cos \pi\beta h).$$

При нечетном же $\alpha = 2k + 1$ эта вещественная часть совпадает со значением полинома

$$-2^{2k+1}(\cos^2 \pi\beta h - 1)^k T_{m-4-2k}(\cos \pi\beta h).$$

Здесь $T_n(w)$ и $U_n(w)$, как и прежде, полиномы Чебышёва первого и второго родов.

Положив в (10.29) $\beta = 1$, устремим h к нулю. Предел выражения в правой части, как это следует из оценки (10.30), существует и конечен. Таким образом, рациональная функция $R_{m-4}(w)$ не может иметь полюс в точке $w = 1$. Функция $R_{m-4}(w)$, как следует из определения (10.28), четна. Поэтому точка $w = -1$ также не может быть полюсом $R_{m-4}(w)$. Это возможно лишь в случае, когда $R_{m-4}(w)$ является полиномом степени $m - 4$.

Далее, взяв в (10.29) $n = 0$, получим равенство

$$R_{m-4}(\cos \pi\beta h) - U_{m-4}(\cos \pi\beta h) = \frac{1}{b_m[0]m!} \frac{\Lambda_0^m(\beta h)}{2\sin^2 \pi\beta h}.$$

Отсюда и из (10.30) следует оценка

$$\sup_{|w|\le 1} |R_{m-4}(\cos \pi\beta h) - U_{m-4}(\cos \pi\beta h)| \le \frac{a_0}{2m}, \tag{10.31}$$

где a_0 — постоянная из неравенства (10.12). Таким образом, полином $P_{m-4}(w) = R_{m-4}(w)$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема VII.18 доказана.

Следствие 10.1. *Если N четно, а $m \ge a_0$, где a_0 — постоянная из оценки (10.12), то сумма модулей коэффициентов квадратурной формулы Грегори порядка точности m не может быть меньше величины $h2^{m-1}|b_m[0]|$.*

Доказательство. Заметим, что сумма модулей коэффициентов квадратурной формулы всегда не меньше модуля любого из коэффициентов Фурье соответствующего функционала погрешности. Учитывая это, применяя формулу (10.24) при $\beta = N/2$ и пользуясь оценкой (10.31), получаем требуемое.

Следствие 10.1 доказано.

§ 11. Норма функционала погрешности квадратурной формулы Грегори

Выведем формулу для нормы функционала погрешности квадратурной формулы Грегори в пространстве $L_2^{(m)}[0,1]^*$. Предварительные рассуждения проведем для функционалов общего вида (9.1).

Воспользуемся имеющимся взаимно однозначным соответствием между множеством функционалов погрешности $EF_N^{(m)}$ и множеством их коэффициентов Фурье $CF_N^{(m)}$. Норме функционала из $EF_N^{(m)}$ в пространстве $L_2^{(m)}[0,1]^*$ поставим в соответствие норму, определенную на функциях дискретного аргумента из $CF_N^{(m)}$. Таким образом, вместо оценки нормы разности двух функционалов погрешности из $EF_N^{(m)}$ можно будет оценивать норму разности их образов в $CF_N^{(m)}$.

Определим на функциях $f[\beta]$ и $g[\beta]$ дискретного аргумента следующую билинейную форму:

$$\langle f,g\rangle_m = \sum_{\beta\neq 0}\frac{f[\beta]g[\beta]}{(2\pi\beta)^{2m}} + \left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{f[\beta]}{(2\pi\beta)^m}\right)\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{g[\beta]}{(2\pi\beta)^m}\right). \tag{11.1}$$

Напомним, что m — четное натуральное число. Значение $\langle f,f\rangle_m^{1/2}$ обозначим через $\|f\|_m$ и будем рассматривать только такие функции $f[\beta]$, для которых величина $\|f\|_m$ конечна. Несложно убедиться, что функционал $\|\cdot\|_m$ выпуклый, однородный и неотрицательный. В пространстве $\widetilde{X}_N^{(0)}$ этот функционал определяет норму.

Лемма VII.14 (В. И. Половинкин [101]). *Норма произвольного функционала погрешности $l_N^m \in EF_N^{(m)}$ в пространстве, сопряженном к $L_2^{(m)}[0,1]$, совпадает с нормой $\|\cdot\|_m$ соответствующей ему последовательности коэффициентов Фурье:*

$$\left\|l_N^m \mid L_2^{(m)}[0,1]^*\right\| = \left\|L_N^m\right\|_m. \tag{11.2}$$

Доказательство. Согласно теореме Рисса о представлении ограниченного функционала в гильбертовом пространстве найдется элемент $u_N^m(x) \in L_2^m[0,1]$ такой, что для всех $\varphi \in L_2^{(m)}[0,1]$ имеет место равенство

$$(l_N^m,\varphi) = \int_0^1 D^m\varphi D^m u_N^m\,dx. \tag{11.3}$$

Норма l_N^m в пространстве, сопряженном к $L_2^{(m)}[0,1]$, совпадает с нормой его экстремальной функции:

$$\left\| l_N^m \mid L_2^{(m)}[0,1]^* \right\|^2 = \left(l_N^m, u_N^m\right) = \int\limits_0^1 \left|D^m u_N^m\right|^2 dx. \qquad (11.4)$$

Выбирая в (11.3) в качестве $\varphi(x)$ функции x^m, $\cos 2\pi\beta x$, $\sin 2\pi\beta x$, получим разложение в ряд Фурье производной m-го порядка от экстремальной функции:

$$D^m u_N^m(x) = \frac{1}{m!}\left(l_N^m, x^m\right) + 2\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{L_N^m[\beta]}{(2\pi\beta)^m} \cos 2\pi\beta x.$$

Отсюда согласно обычному равенству Парсеваля получим

$$\int\limits_0^1 \left|D^m u_N^m\right|^2 dx = \left|\frac{\left(l_N^m, x^m\right)}{m!}\right|^2 + \sum_{\beta\neq 0} \frac{\left|L_N^m[\beta]\right|^2}{(2\pi\beta)^{2m}}. \qquad (11.5)$$

Степенная функция x^m разлагается в сумму двух слагаемых, первое из которых — это полином Бернулли $B_m(x)$, а второе — полином степени не выше $m-1$:

$$x^m = B_m(x) + P_{m-1}(x).$$

Учитывая, что функционал погрешности l_N^m точен на полиномах степени не выше $m-1$ и пользуясь равенством (7.15), получим

$$\frac{\left(l_N^m, x^m\right)}{m!} = (-1)^{(m-2)/2} \sum_{\beta\neq 0} \frac{L_N^m[\beta]}{(2\pi\beta)^m}. \qquad (11.6)$$

Отсюда заключаем, что выражение в правой части (11.5) — это квадрат нормы функции $L_N^m[\beta]$. Вспоминая равенство (11.4), видим, что лемма VII.14 доказана.

Дальнейшие рассуждения имеют целью преобразовать норму функции $L_N^m[\beta]$ к виду, в котором переменные m и h разделены. Способ трансформации нормы, который мы применим, пригоден для случая произвольного функционала вида (9.1). Мы же используем его только для функционала погрешности, соответствующего квадратурной формуле Грегори. Это позволит несколько сократить итоговую формулу.

Лемма VII.15. *Погрешность квадратурной формулы Грегори алгебраического порядка точности $m \le N$ на полиноме $x^m/m!$ представима следующей суммой:*

$$\frac{(l^G_{N,m}, x^m)}{m!} = -\frac{h^m B_m}{m!} + (-1)^{m/2} h^{m+1} b_m[0] P_{m-4}(1)$$
$$+ (-1)^{m/2+1} h^m b_m[0] \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m P_{m-4}(\cos t)\, dt, \quad (11.7)$$

где коэффициент $b_m[0]$ определяется интегралом вида (10.23), *а полином $P_{m-4}(w)$ тот же, что в равенстве* (10.24).

Доказательство. Воспользовавшись равенством (11.6), разложением (9.9) и формулой (10.24), получим

$$\frac{(l^G_{N,m}, x^m)}{m!} = -h^m \frac{B_m}{m!}$$
$$- h^m \left\{ 2(-1)^{m/2} b_m[0] h \sum_{\beta=1}^\infty \left(\frac{\sin \pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^m P_{m-4}(\cos \pi\beta h) \right\}. \quad (11.8)$$

Сумму в правой части (11.8) выразим через интеграл, применив для этого *формулу суммирования Пуассона* по схеме, предложенной в работе [202]. Формула суммирования Пуассона имеет следующий вид:

$$\sqrt{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n\alpha) \right\} = \sqrt{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} g(0) + \sum_{n=1}^\infty g(n\gamma) \right\}. \quad (11.9)$$

Здесь $\alpha \ge 0$, $\alpha\gamma = 2\pi$, а функции f и g связаны между собой соотношением

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \cos \theta t dt. \quad (11.10)$$

Если суммируемая функция $f(t)$ в формуле (11.9) совпадает с функцией $(\sin t/t)^m$, ее косинус-преобразование Фурье $g(\theta)$ равно нулю при $\theta \ge m$. Соответствующая формула имеется, например, в [45]. Интеграл

$$\int\limits_0^\infty f(t) P_{m-4}(\cos t) \cos \theta t dt \quad (11.11)$$

представим линейной комбинацией слагаемых вида

$$\int_0^\infty f(t)\cos\beta t\cos\theta t dt, \tag{11.12}$$

где $0 \le \beta \le m-4$. Разложив стоящее под интегралом в (11.12) произведение косинусов в сумму, видим, что при $\theta - \beta \ge m$ величина (11.12) равна нулю. Но тогда для всех $\theta \ge 2(m-2)$ равен нулю и интеграл (11.11).

Применяя формулу Пуассона с $\alpha = \pi h$ и $\gamma = 2N$ к функции

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m P_{m-4}(\cos t),$$

получим

$$\pi h\left\{\frac{1}{2}P_{m-4}(1) + \sum_{\beta=1}^\infty \left(\frac{\sin\pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^m P_{m-4}(\cos\pi\beta h)\right\}$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m P_{m-4}(\cos t)\,dt. \tag{11.13}$$

Выражая сумму ряда по β через все остальное и подставляя результат в равенство (11.8), получаем соотношение (11.7).

Лемма VII.15 доказана.

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое в определении нормы функции $L_N^{m,G}[\beta]$. Согласно равенствам (9.9) и (10.24)

$$\sum_{\beta\ne 0}\frac{\left|L_N^{m,G}[\beta]\right|^2}{(2\pi\beta)^{2m}} = h^{2m}\left\{\frac{|B_{2m}|}{(2m)!} + 2|b_m[0]|^2\right.$$
$$\left.\times h^2\sum_{\beta=1}^\infty\left(\frac{\sin\pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^{2m}|P_{m-4}(\cos\pi\beta h)|^2\right\}. \tag{11.14}$$

Далее, взяв в формуле Пуассона (11.9) $\alpha = \pi h$, $\gamma = 2N$, а в качестве суммируемой — функцию

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m}|P_{m-4}(\cos t)|^2,$$

получим при $m \leq N$ равенство

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m} |P_{m-4}(\cos t)|^2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2Nt\right) dt$$

$$= \frac{\pi h}{2} \left\{ \frac{1}{2}|P_{m-4}(1)|^2 + \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^{2m} |P_{m-4}(\cos \pi\beta h)|^2 \right\}. \quad (11.15)$$

Выражение в его левой части естественным образом распадается на сумму двух интегралов. Несложный анализ показывает, что тот из них, в котором подынтегральное выражение имеет сомножителем $\cos 2Nt$, будет равен нулю при $m \leq (N+4)/2$. Считаем это условие выполненным. Тогда, выражая из (11.15) сумму ряда по β через все остальное и подставляя результат в (11.14), приходим к искомому представлению нормы функционала погрешности $l^G_{N,m}$ в пространстве $L_2^{(m)}[0,1]^*$. Аналогичным образом выводится формула для нормы функционала погрешности $l^G_{N,m+2}$ в пространстве $L_2^{(m)}[0,1]^*$. Ее точный вид — равенство (8.4), которым мы воспользовались ранее при оценке погрешности формул Грегори на функционалах из класса $G_\varkappa[0,1]$.

Глава VIII

Функции дискретной переменной

В этой главе областью определения исследуемых функций служит многомерная целочисленная решетка

$$\mathbb{Z}^n = \{\beta : \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n),\ \beta_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Дискретный аргумент комплекснозначной функции $\varphi[\beta]$, определенной на $\mathbb{Z}^n$, условимся ставить в квадратные скобки. Для краткости иногда будем называть такие функции дискретными.

Легко видеть, что множество дискретных функций образует бесконечномерное линейное пространство. Операции математического анализа нельзя применить непосредственно к дискретным функциям, однако возможно определить аналогичные им действия. Аналогия основывается на том, что значения $\varphi[\beta]$ часто получаются сужением некоторой определенной всюду на $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x)$ на множество

$$\{hH\beta : \beta \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Это множество сгущается, когда скалярный параметр h стремится к нулю. Очевидно, в такой интерпретации методы непрерывного математического анализа применимы к исследованию свойств функции $\varphi(hH\beta)$ естественным образом. Однако об этом удобнее забыть и аксиоматически определить необходимые действия непосредственно на дискретных функциях.

§ 1. Операции на дискретных функциях

Носителем функции $\varphi[\beta]$ назовем множество точек, в которых она отлична от нуля. Если это множество ограничено, то функцию $\varphi[\beta]$ назовем *финитной*.

Скалярным произведением $[\varphi[\beta], \psi[\beta]]$ функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ назовем сумму ряда

$$\sum_{\beta} \varphi[\beta]\overline{\psi}[\beta],$$

если только он сходится абсолютно. Всегда определено скалярное произведение сомножителей, один из которых финитен.

Сверткой $\varphi[\beta]*\psi[\beta]$ двух функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ назовем скалярное произведение

$$\chi[\beta] = \varphi[\beta] * \psi[\beta] = [\,\varphi[\gamma], \overline{\psi}[\beta - \gamma]\,], \tag{1.1}$$

где переменной суммирования считается γ. В силу этого определения ряд, задающий $\chi[\beta]$, должен сходиться абсолютно при любом β. Коммутативность свертки, т. е. равенство

$$\varphi[\beta] * \psi[\beta] = \psi[\beta] * \varphi[\beta],$$

легко проверить, положив в формуле (1.1) $\beta - \gamma = \delta$, $\gamma = \beta - \delta$. Кроме того, легко видеть, что

$$\varphi[\beta + \varepsilon] * \psi[\beta + \delta] = [\varphi[\gamma + \varepsilon], \overline{\psi}[\beta + \delta - \gamma]] = \chi[\beta + \delta + \varepsilon].$$

Иначе говоря, если аргумент одного из сверточных сомножителей сдвигается, то происходит такой же сдвиг аргумента свертки. При сдвиге аргумента у обеих функций аргумент свертки претерпевает суммарный сдвиг.

Свертка двух функций определена нами с помощью формулы (1.1) через скалярное произведение. Обратно, скалярное произведение выражается через свертку:

$$\begin{aligned}[\varphi[\beta], \psi[\beta]] &= \varphi[\beta] * \overline{\psi}[-\beta]|_{\beta=0} \\ &= \varphi[-\beta] * \overline{\psi}[\beta]|_{\beta=0} = \varphi[\beta + \varepsilon] * \overline{\psi}[\delta - \beta]|_{\beta=\delta-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Введя обозначение $\widehat{\psi}[\beta] = \psi[-\beta]$, перепишем скалярное произведение функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ в виде

$$\begin{aligned}[\varphi[\beta], \psi[\beta]] &= \varphi[\beta] * \widehat{\overline{\psi}}[\beta]|_{\beta=0} \\ &= \widehat{\varphi}[\beta] * \overline{\psi}[\beta]|_{\beta=0} = \varphi[\beta + \varepsilon] * \widehat{\overline{\psi}}[\beta - \delta]|_{\beta=\delta-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Формулы (1.2) и (1.3) имеют смысл, если хотя бы одно из выражений в их правых частях имеет смысл. При этом имеют смысл и все остальные части.

Вводя те или иные нормы, будем выделять классы функций дискретного аргумента, представляющие собой банаховы пространства. Определим класс l_p, $1 \le p < \infty$, как линейное пространство дискретных функций с конечной нормой

$$\|f \mid l_p\| = \Big\{\sum_\beta |f[\beta]|^p\Big\}^{1/p}.$$

Теорема VIII.1. *Пусть $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ принадлежат взаимно сопряженным пространствам l_p и $l_{p'}$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда их свертка $\varphi[\beta] * \psi[\beta] = \xi[\beta]$ существует и представляет собой функцию, стремящуюся к нулю при $|\beta| \to \infty$.*

Доказательство. Само существование свертки очевидно, надо лишь доказать ее стремление к нулю. Зададимся каким-нибудь положительным числом a и представим $\varphi[\beta]$ в виде

$$\varphi[\beta] = \varphi_a[\beta] + \widetilde{\varphi}_a[\beta],$$

где

$$\varphi_a[\beta] = \begin{cases} \varphi[\beta], & \text{если } |\beta| \le a, \\ 0, & \text{если } |\beta| > a. \end{cases}$$

Аналогично разложим и функцию $\psi[\beta]$. Тогда

$$\|\varphi \mid l_p\|^p = \|\varphi_a \mid l_p\|^p + \|\widetilde{\varphi}_a \mid l_p\|^p.$$

При любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом a ($a > N(\varepsilon)$) имеем

$$\|\widetilde{\varphi}_a \mid l_p\| \le \varepsilon, \quad \|\widetilde{\psi}_a \mid l_{p'}\| \le \varepsilon.$$

При достаточно большом $|\gamma|$ носители $\varphi_a[\beta]$ и $\psi_a[\gamma-\beta]$ не имеют общих точек и, значит, справедливо равенство

$$[\varphi[\beta], \overline{\widetilde{\psi}}[\gamma-\beta]] = [\varphi_a, [\beta], \overline{\widetilde{\psi}}_a[\gamma-\beta]] \\ + [\widetilde{\varphi}_a[\beta], \overline{\psi}[\gamma-\beta]] + [\widetilde{\varphi}_a[\beta], \overline{\widetilde{\psi}}_a[\gamma-\beta]].$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства легко оценить:

$$|[\varphi_a[\beta], \overline{\widetilde{\psi}}_a[\gamma-\beta]]| \le \|\varphi \mid l_p\| \, \|\widetilde{\psi}_a \mid l_{p'}\|,$$
$$|[\widetilde{\varphi}_a[\beta], \overline{\psi}_a[\gamma-\beta]]| \le \|\widetilde{\varphi}_a \mid l_p\| \, \|\psi \mid l_{p'}\|,$$
$$|[\widetilde{\varphi}_a[\beta], \overline{\widetilde{\psi}}_a[\gamma-\beta]]| \le \|\widetilde{\varphi}_a \mid l_p\| \, \|\widetilde{\psi}_a \mid l_{p'}\|.$$

Таким образом, для всех рассматриваемых значений γ свертка $\xi[\gamma]$ по модулю не превосходит величины, пропорциональной ε.

Теорема VIII.1 доказана.

Очевидна следующая

Теорема VIII.2. *Свертка функций φ и ψ существует, если при любом γ пересечение носителей $\varphi[\beta]$ и $\psi[\gamma-\beta]$ конечно.*

Условие этой теоремы выполнено, например, если у одной из функций φ, ψ носитель конечный. Приведем пример, когда пересечение носителей конечно, хотя носители каждой из функций неограничены.

Пусть носители φ и ψ суть множества значений β, у которых все компоненты ограничены снизу:

$$\beta_j \ge \beta_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

(Систему неравенств (1.4) будем записывать в виде $\beta \ge \beta^{(0)}$.) Тогда пересечение носителей $\varphi[\beta]$ и $\psi[\gamma-\beta]$ является параллелепипедом

$$\beta_j^{(0)} \le \beta_j \le \gamma_j - \beta_j^{(0)}$$

и, значит, конечно при любом γ.

Рассмотрим функции дискретного аргумента $\varphi[\beta]$, $\psi[\beta]$, $\chi[\beta]$. Из перестановочности функций в парной свертке вытекает, например, что

$$\varphi * (\psi * \chi) = \varphi * (\chi * \psi) = (\psi * \chi) * \varphi = (\chi * \psi) * \varphi.$$

Таким образом, двенадцать возможных тройных сверток сводятся на самом деле к трем:

$$\varphi * (\psi * \chi), \quad \psi * (\chi * \varphi), \quad \chi * (\varphi * \psi).$$

Следующая теорема дает условие, при котором все возможные варианты тройной свертки совпадают и, следовательно, операция свертки оказывается ассоциативной.

Теорема VIII.3. *Пусть существуют три парные свертки*

$$|\varphi[\beta]| * |\psi[\beta]|, \quad |\psi[\beta]| * |\chi[\beta]|, \quad |\chi[\beta]| * |\varphi[\beta]|$$

и хотя бы одна тройная, например, свертка $|\varphi[\beta]| * (|\psi[\beta]| * |\chi[\beta]|)$. *Тогда существуют и равны между собой тройные свертки*

$$\varphi * (\psi * \chi), \quad \psi * (\chi * \varphi), \quad \chi * (\varphi * \psi).$$

Доказательство. Теорема легко следует из абсолютной сходимости двойного ряда

$$\sum_{\gamma} \sum_{\delta} \varphi[\gamma]\, \psi[\beta - \gamma - \delta]\, \chi[\delta], \tag{1.5}$$

который можно суммировать в любом порядке. Собирая слагаемые с фиксированным сомножителем $\chi[\delta]$, получим абсолютно сходящийся ряд, равный $\chi * (\varphi * \psi)$. Группируя члены в другом порядке, получим свертку $\varphi * (\psi * \chi)$ и т. д. Итак, имеют место следующие равенства:

$$\varphi * (\psi * \chi) = \psi * (\chi * \varphi) = \chi * (\varphi * \psi). \tag{1.6}$$

Теорема VIII.3 доказана.

Заметим, что если каждая из функций φ, ψ и χ отлична от нуля хоть в одной точке, то из абсолютной сходимости двойного ряда хотя бы для одной тройной свертки следует существование всех парных сверток, упомянутых в теореме.

Следствие 1.1. *Если существуют свертка*

$$|\varphi_1| * (\,|\varphi_2| * [\,|\varphi_3| * \cdots * \{\,|\varphi_{n-1}| * |\varphi_n|\,\} \ldots]) \tag{1.7}$$

и все свертки с $n-1$ *сомножителями из числа входящих в* (1.7), *то существуют все свертки вида*

$$\varphi_{s_1} * \varphi_{s_2} * \cdots * \varphi_{s_n},$$

которые не зависят от порядка и способа сочетания их сомножителей.

По-прежнему если каждая из функций $\varphi_i[\beta]$ отлична от нуля хотя бы в одной точке, сходимость ряда (1.7) оказывается достаточной для существования всех сверток с $n-1$ сомножителями из числа упомянутых в следствии 1.1.

Свертки типа (1.7) будем называть *повторными*.

Следствие 1.2. *Повторные свертки в любом порядке существуют и равны между собой, если все сворачиваемые функции финитны, кроме, быть может, одной. При этом суммы вида* (1.5) *содержат лишь конечное число не равных нулю членов.*

Следствие 1.3. *Повторные свертки в любом порядке существуют и равны между собой, если носитель каждой функции φ_k содержится в множестве $\beta \geq \beta^{(0,k)}$, где вектор $\beta^{(0,k)}$ свой для каждого k. При этом суммы вида* (1.5) *содержат лишь конечное число слагаемых.*

Следствие 1.4. *Если переменные β_j можно разбить на две группы так, что по одной из них выполнено условие следствия* 1.2, *а по другой — условие следствия* 1.3, *то выполняются и условия теоремы* VIII.3.

Класс финитных дискретных функций замкнут относительно операции свертки, т. е. является сверточной алгеброй. Сверточной алгеброй является и класс функций, носители которых ограничены снизу в смысле условия (1.4).

Экспоненциально убывающие на бесконечности дискретные функции также образуют сверточную алгебру. Справедлива следующая

Теорема VIII.4. *Свертка двух экспоненциально убывающих функций дискретной переменной также экспоненциально убывает.*

Доказательство. Достаточно установить, что при $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ из оценок

$$|\varphi[\beta]| \leq K_1 e^{-\eta_1|\beta|}, \quad |\psi[\beta]| \leq K_2 e^{-\eta_2|\beta|} \tag{1.8}$$

следует неравенство

$$|\varphi[\beta] * \psi[\beta]| \leq K_3 e^{-\eta_3|\beta|}.$$

Получим его, ограничившись одномерным случаем, так как для многих переменных доказательство аналогично.

Взяв в правой части (1.8) одинаковые показатели экспонент, т. е. положив $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, для $\beta > 0$ имеем

$$\Big|\sum_\gamma \varphi[\gamma]\overline{\psi}[\beta-\gamma]\Big| \leq K_1 K_2 \sum_\gamma e^{-\eta|\gamma|-\eta|\beta-\gamma|}$$

$$= K_1 K_2 \Big\{ \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} e^{-\eta|\beta|} + \sum_{\gamma>\beta} e^{-2\eta|\gamma|+\eta|\beta|} + \sum_{\gamma<0} e^{2\eta\gamma-\eta|\beta|} \Big\}.$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых в правой части полученного неравенства. Имеем для любого $\eta > \eta_3$:

$$\sum_{0\le\gamma\le\beta} e^{-\eta|\beta|} = e^{-\eta\beta}(\beta+1) \le Ke^{-\eta_3\beta},$$

$$\sum_{\beta<\gamma} e^{-2\eta\gamma+\eta\beta} = e^{-\eta(\beta+2)}\frac{1}{1-e^{-2\eta}} \le Ke^{-\eta\beta},$$

$$\sum_{\gamma<0} e^{2\eta\gamma-\eta\beta} = e^{-\eta\beta}\frac{1}{1-e^{-2\eta}} \le Ke^{-\eta\beta}.$$

Справедливость подобной оценки для отрицательных β устанавливается аналогично.

Теорема VIII.4 доказана.

Рассмотрим некоторые важные дискретные функции. Как и в случае непрерывной переменной, введем одночлены и многочлены дискретного аргумента

$$[\beta]^\alpha = \beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\dots\beta_n^{\alpha_n}, \qquad P[\beta] = \sum_\alpha a_\alpha[\beta]^\alpha.$$

Свертка многочлена $P[\beta]$ степени m с произвольной финитной функцией — это снова многочлен степени не выше m. Действительно, имеет место равенство

$$P[\beta-\gamma] = \sum_k a_k[\gamma]P_k[\beta],$$

где $P_k[\beta]$ — некоторые многочлены степени не выше m. Поэтому

$$\varphi[\beta] * P[\beta] = \sum_k P_k[\beta][\varphi[\gamma], \overline{a}_k[\gamma]],$$

что и доказывает наше утверждение.

Определим дискретный аналог δ-функции Дирака. Положим

$$\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta = 0, \\ 0, & \text{если } \beta \ne 0. \end{cases}$$

Свертка функции $\delta[\beta]$ с любой функцией $\varphi[\beta]$ не меняет ее:

$$\delta[\beta] * \varphi[\beta] = [\,\delta[\gamma], \overline{\varphi}[\beta - \gamma]\,] = \varphi[\beta].$$

Таким образом, функция $\delta[\beta]$ играет роль единицы при операции свертки.

Функции δ от переменных разных размерностей связаны друг с другом соотношениями

$$\delta[\beta] = \delta[\beta_1]\delta[\beta_2]\ldots\delta[\beta_n].$$

С помощью этой формулы строятся δ-функции от любого множества координат:

$$\delta[\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_k}] = \delta[\beta_{j_1}]\delta[\beta_{j_2}]\ldots\delta[\beta_{j_k}].$$

Справедливы следующие формулы:

$$\delta[\beta_j - \gamma_j]\,\varphi[\beta] = \varphi[\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \gamma_j, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n]\,\delta[\beta_j - \gamma_j],$$
$$\delta[\beta - \gamma]\,\varphi[\beta] = \delta[\beta - \gamma]\,\varphi[\gamma].$$

Иначе говоря, при умножении $\varphi[\beta]$ на $\delta[\beta_j - \gamma_j]$ аргумент β_j функции φ фиксируется. Для значений $\beta_j \neq \gamma_j$ произведение оказывается равным нулю. При умножении $\varphi[\beta]$ на $\delta[\beta - \gamma]$ происходит фиксация всего n-мерного аргумента φ, причем в остальных точках произведение равно нулю.

Для любого вектора $\beta \in \mathbb{Z}^n$ обозначим через $\hat{\beta}_j$ мультииндекс, получающийся из β вычеркиванием его j-й координаты:

$$\hat{\beta}_j = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n).$$

Введем в рассмотрение специальную функцию дискретного аргумента, положив

$$\Delta_j[\beta] = \delta[\hat{\beta}_j]\,(\delta[\beta_j + 1] - \delta[\beta_j]). \tag{1.9}$$

Свертка $\Delta_j[\beta]$ с произвольной функцией $\varphi[\beta]$ имеет вид

$$\Delta_j[\beta] * \varphi[\beta] = \varphi[\beta + \delta_j] - \varphi[\beta],$$

где через δ_j, обозначен вектор

$$\delta_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},1,0,\ldots,0).$$

Назовем эту свертку *частной разностью функции* φ.

Для дискретной функции частная разность играет роль, аналогичную роли частной производной первого порядка функции непрерывного аргумента. Аналог дифференциального оператора произвольного порядка для дискретных функций определим с помощью следующих обозначений:

$$\Delta_j^{[\alpha_j]} = \overbrace{\Delta_j * \Delta_j * \cdots * \Delta_j}^{\alpha_j}, \quad \Delta^{[\alpha]} = \Delta_1^{[\alpha_1]} * \Delta_2^{[\alpha_2]} * \cdots * \Delta_n^{[\alpha_n]},$$

при этом $\Delta_i^{[0]}[\beta] = \delta[\beta]$.

Свертка с функцией $\Delta^{[\alpha]}$ означает взятие частной разности порядка α:

$$\begin{aligned}(\Delta^{[\alpha]} * \varphi)[\beta] &= \sum_{0\le k\le\alpha} (-1)^{|\alpha|-|k|}\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}\varphi[\beta+k] \\ &= \sum_{k_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{\alpha_n}\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{\alpha_j-k_j}\alpha_j!}{k_j!(\alpha_j-k_j)!}\right\}\varphi\left[\beta+\sum_{j=1}^{n}k_j\delta_j\right],\end{aligned}$$

где $0 \le k \le \alpha$ означает систему неравенств $0 \le k_j \le \alpha_j$, $j = 1,2,\ldots,n$. Разности $\Delta^{[\alpha]} * \varphi$ представляют собой аналоги частных производных высшего порядка.

При работе с функциями дискретной переменной удобно пользоваться ньютоновыми степенями, определенными ранее в § 4 гл. I. Пусть $y = (y_1,\ldots,y_n)$, а $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — целочисленный вектор с неотрицательными компонентами. Тогда

$$y^{[\alpha]} = y_1^{[\alpha_1]}\ldots y_n^{[\alpha_n]}.$$

Любой многочлен степени m от n переменных в силу леммы I.6 может быть разложен по ньютоновым степеням и притом единственным образом.

Одно из основных преимуществ ньютоновых степеней заключается в элементарно проверяемых формулах

$$\Delta * y^{[k]} = ky^{[k-1]}, \quad \Delta^{[\alpha]} * y^{[\gamma]} = \frac{\gamma!}{(\gamma-\alpha)!} y^{[\gamma-\alpha]}, \tag{1.10}$$

Вторая из них справедлива при $\gamma \geq \alpha$. Если же это условие нарушено, то имеет место равенство

$$\Delta^{[\alpha]} * y^{[\gamma]} = 0. \tag{1.11}$$

Формула (1.10) доказывает, что свертка разностной функции $\Delta^{[\alpha]}$ с многочленом понижает его степень на $|\alpha|$ единиц:

$$\Delta^{[\alpha]} * P_m = P_{m-|\alpha|}.$$

При $|\alpha| > m$ из (1.11) имеем

$$\Delta^{[\alpha]} * P_m = 0.$$

Формулы (1.10) и (1.11) приводят к условию биортогональности:

$$\Delta^{[\alpha]} * \frac{[\beta]^{[\gamma]}}{\gamma!}\bigg|_{\beta=0} = \delta_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \gamma, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \gamma. \end{cases}$$

Из этого условия сразу же вытекает общая формула для разложения многочлена $P_l[\beta]$ степени l по ньютоновым степеням:

$$P_l[\beta] = \sum_{|\alpha|\leq l} \Delta^{[\alpha]} * P_l[\beta]\big|_{\beta=0} \frac{[\beta]^{[\alpha]}}{\alpha!}.$$

В частности, для любых $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n$ имеет место равенство

$$[\beta+\gamma]^{[\alpha]} = \sum_{\varepsilon+\eta=\alpha} \frac{\alpha!}{\varepsilon!\eta!}[\beta]^{[\varepsilon]}[\gamma]^{[\eta]},$$

являющееся аналогом формулы бинома Ньютона.

Вернемся к теореме VIII.3 об ассоциативности свертки и покажем на примерах, что условия этой теоремы существенны и отбрасывать их нельзя.

Пример. Рассмотрим три дискретные функции одной переменной:

$$\varphi[\beta] = \beta, \quad \psi[\beta] = \delta[\beta+1] - 2\delta[\beta] + \delta[\beta-1], \quad \chi[\beta] = |\beta|.$$

Функция $\psi[\beta]$ финитна, так что обе свертки $\varphi * \psi$ и $\psi * \chi$ имеют смысл. Легко получить, что

$$\varphi * \psi = 0, \quad \psi * \chi = 2\delta[\beta].$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$\varphi * (\psi * \chi) = 2\beta; \quad (\varphi * \psi) * \chi = 0,$$

и, значит, равенства (1.6) не имеют места. Точнее, две тройные свертки в (1.6) определены, но не равны между собой, а третья — не имеет смысла. Взяв вместо функции $\varphi[\beta] = \beta$ функцию $\varphi[\beta] = \beta^2$, видим, что существует только одна из трех тройных сверток.

Для разности от произведения двух функций справедлива формула, аналогичная формуле дифференцирования произведения:

$$\Delta_j[\beta] * (\varphi[\beta]\psi[\beta]) = \varphi[\beta+\delta_j](\Delta_j[\beta] * \psi[\beta]) + \psi[\beta](\Delta_j[\beta] * \varphi[\beta]). \quad (1.12)$$

Она элементарно получается из тождества

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)\psi(x+1) - \delta(x)\psi(x) \\ = \varphi(x+1)[\psi(x+1) - \psi(x)] + \psi(x)[\varphi(x+1) - \varphi(x)].\end{aligned}$$

Меняя в (1.12) местами φ и ψ, получим также

$$\Delta_j * (\varphi[\beta]\psi[\beta]) = \psi[\beta+\delta_j](\Delta_j[\beta] * \varphi[\beta]) + \varphi[\beta](\Delta_j[\beta] * \psi[\beta]).$$

Введем в рассмотрение дискретную функцию одной переменной, аналогичную Θ-функции Хевисайда:

$$\Sigma[\beta_j] = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_j \le 0, \\ 1, & \text{если } \beta_j > 0. \end{cases}$$

Для $j = 1, \ldots, n$ и любого $\beta \in \mathbb{Z}^n$ положим также

$$\Sigma_j[\beta] = \delta[\hat{\beta}_j]\Sigma[\beta_j].$$

Функции $\Sigma[\beta_j]$ и $\Sigma_j[\beta]$ удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\Sigma[-\beta_j] = 1 - \Sigma[\beta_j + 1], \qquad \Sigma_j[-\beta] = \delta[\hat{\beta}_j] - \Sigma_j[\beta + \delta_j].$$

Функция $\Sigma_j[\beta]$ является обратной к $\Delta_j[\beta]$ по отношению к операции свертки. Верно и обратное, т. е.

$$\Sigma_j[\beta] * \Delta_j[\beta] = \Delta_j[\beta] * \Sigma_j[\beta] = \delta[\beta].$$

Доказательство этого утверждения легко провести, пользуясь формулой (1.9) и равенством

$$\Delta[\beta_j] * \Sigma[\beta_j] = \delta[\beta_j],$$

проверяемым простым подсчетом.

Легко видеть, что свертка $\varphi[\beta]$ с функцией $\Sigma_j[\beta]$ представляет собой сумму значений функции $\varphi[\beta']$ по всем β', у которых $\hat{\beta}'_j = \hat{\beta}_j$, а β'_j пробегает все значения, меньшие β_j. Иными словами, свертка с $\Sigma_j[\beta]$ есть операция частного суммирования по координате β_j:

$$\varphi[\beta] * \Sigma_j[\beta] = \sum_{\beta'_j=-\infty}^{\beta_j-1} \varphi[\hat{\beta}_j, \beta'_j].$$

Пара $\hat{\beta}_j, \beta'_j$ обозначает здесь вектор β, у которого j-я координата заменена на β'_j. Аналогичное соглашение действует и в дальнейшем.

Функция $\Sigma_j[\beta]$ не финитна и свертка с ней возможна не всегда. Свертка с $\Sigma_j[\beta]$ заведомо имеет смысл, если у носителя функции φ координата β_j ограничена снизу при любом фиксированном $\hat{\beta}_j$, т. е. если существует такая функция $k[\hat{\beta}_j]$, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{\beta : \beta_j \geq k[\hat{\beta}_j]\}.$$

Свертка $\Sigma_j[\beta]$ с $\varphi[\beta]$ — это дискретный аналог интегрирования по переменной β'_j в пределах от $-\infty$ до $\beta_j - 1$.

Интегрирование в конечных пределах аналогично другой операции — суммированию в конечных пределах, выполняемому по формуле

$$\Sigma_j[\beta] * (\varphi[\beta]\Sigma_j[\beta - \gamma]) = \sum_{\beta'_j=\gamma_j+1}^{\beta_j-1} \varphi[\hat{\beta}_j, \beta'_j]. \tag{1.13}$$

Заметим, что функция, обратная к $\Delta_j[\beta]$, определяется неоднозначно. Легко видеть, что свертка $\Delta_j[\beta]$ с любой функцией ψ, не зависящей от β_j, т. е. с любой функцией только от $\hat{\beta}_j$, дает нуль: $\Delta_j[\beta] * \psi[\hat{\beta}_j] = 0$. Поэтому сумма вида $\Sigma_j[\beta] + \psi[\hat{\beta}_j]$ также является обратной к $\Delta_j[\beta]$ в том смысле, что

$$\Delta_j[\beta] * (\Sigma_j[\beta] + \psi[\hat{\beta}_j]) = (\Sigma_j[\beta] + \psi[\hat{\beta}_j]) * \Delta_j[\beta] = \delta[\beta].$$

На функциях $\varphi[\beta]$, носитель которых ограничен по β_j сверху, т. е. удовлетворяет условию

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{\beta : \beta_j \le k[\hat{\beta}_j]\}, \tag{1.14}$$

в качестве обратной по свертке к $\Delta_j[\beta]$ можно также взять функцию

$$\begin{aligned}\Sigma_j^{(-)}[\beta] &= -\Sigma_j[\hat{\beta}_j, 1-\beta_j] = \delta[\hat{\beta}_j](-\Sigma_j[-\beta_j+1]) \\ &= \delta[\hat{\beta}_j](\Sigma_j[\beta_j]-1) = \delta[\hat{\beta}_j]\Sigma_j[\beta_j] - \delta[\hat{\beta}_j] = \Sigma_j[\beta] - \delta[\hat{\beta}_j].\end{aligned}$$

Свертка функции $\varphi[\beta]$ с $\Sigma_j^{(-)}[\beta]$, вычисляемая по формуле

$$\varphi[\beta] * \Sigma_j^{(-)}[\beta] = -\sum_{\gamma_j=\beta_j}^{\infty} \varphi[\hat{\beta}_j, \gamma_j],$$

является аналогом интеграла

$$-\int_{\beta_j}^{\infty} \varphi(\hat{x}_j, \xi_j)\, d\xi_j.$$

Для функций, удовлетворяющих условию (1.14), имеем

$$\Sigma_j^{(-)}[\beta] * (\Delta_j[\beta] * \varphi[\beta]) = \varphi[\beta], \quad \Delta_j[\beta] * (\Sigma_j^{(-)}[\beta] * \varphi[\beta]) = \varphi[\beta].$$

Рассмотрим одномерную дискретную переменную t и функцию $t^{[k]}\Sigma[t+1]$, равную нулю при отрицательных t и совпадающую с $t^{[k]}$ при остальных значениях t. В частности, при $k = 0$ эта функция задается равенством

$$t^{[0]}\Sigma[t+1] = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \ge 0. \end{cases}$$

Функцию $t^{[k]}\Sigma[t+1]$ назовем *срезанной ньютоновой степенью.*

Из (1.13) и (1.10) следует справедливость формулы

$$\Sigma[t] * \left(\frac{t^{[k]}}{k!}\Sigma[t+1]\right) = \frac{t^{[k+1]}}{(k+1)!}\Sigma[t+1].$$

В теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными, производные от какой-либо функции непрерывного аргумента часто заменяют разностными отношениями этой функции в точках некоторой кубической решетки со стороной h, т. е. частными разностями функции $\varphi_h[\beta] = \varphi(h\beta)$. Такая замена неоднозначна. Одну и ту же производную $\partial\varphi/\partial x_1$ можно заменить, например, разностью «вперед»:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \approx \frac{1}{h}\Delta_1[\beta] * \varphi_h[\beta],$$

или разностью «назад»:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \approx \frac{1}{h}(\varphi_h[\beta] - \varphi_h[\beta - h\delta_1]).$$

В качестве приближения для $\partial\varphi/\partial x_1$ можно также взять симметрическую разность, т. е. полусумму разностей «вперед» и «назад», и вообще любую линейную комбинацию значений $\Delta_1 * \varphi_h$ в нескольких точках:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \approx \frac{1}{h}\sum_{\varepsilon}\chi[\varepsilon](\Delta_1[\beta] * \varphi_h[\beta - \varepsilon]) = \frac{1}{h}\,\chi * \Delta_1 * \varphi_h,$$

где $\chi[\varepsilon]$ — финитная функция и $\sum\limits_{\varepsilon}\chi[\varepsilon] = 1$. Таким же образом аппроксимируется значение производной порядка γ данной функции:

$$D^{\gamma}\varphi \approx \frac{1}{h^{|\gamma|}}\sum_{\varepsilon}\chi[\varepsilon](\Delta^{[\gamma]}[\beta] * \varphi_h[\beta - \varepsilon]) = \frac{1}{h^{|\gamma|}}\,\chi * \Delta^{[\gamma]} * \varphi_h.$$

В правой части этого равенства отсутствует аргумент у функции $\Delta^{[\gamma]}$. Условимся там, где это не вызовет сомнений, опускать аргумент и в дальнейшем.

Пусть дискретная функция $\psi[\beta]$ финитна. Оператор свертки с $\psi[\beta]$, т. е. оператор $\psi[\beta]*$, назовем ***разностным***. Его область определения — все пространство дискретных функций.

Пусть $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, а дискретная функция $\chi_\gamma[\beta]$ финитна. Оператор вида

$$\chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}[\beta]*$$

будем называть ***разностным оператором порядка*** γ.

Пусть l — натуральное число и для любого $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ дана финитная функция $\chi_\gamma[\beta]$. Сумму операторов вида

$$\sum_{|\gamma|=l} \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}*$$

назовем ***разностным оператором скалярного порядка*** l.

Легко видеть, что для любой l раз непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедливо соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^l} \sum_{|\gamma|=l} \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}[\beta] * \varphi_h[\beta] = \sum_{|\gamma|=l} a_\gamma D^\gamma \varphi(0),$$

где $a_\gamma = \sum\limits_\beta \chi_\gamma[\beta]$. Следовательно, в пределе при $h \to 0$ разностный оператор порядка l переходит в дифференциальный оператор порядка l. Мы не исключаем возможности, когда некоторые или даже все a_γ равны нулю, так как нулевой оператор можно считать дифференциальным оператором любого порядка l.

Согласно данному нами определению разностный оператор порядка l является одновременно и разностным оператором порядков $l-1, l-2, \ldots, 1, 0$. В соответствии с этим оператору свертки

$$\psi[\beta]* = \sum_{l=0}^{k} \Big(\sum_{|\gamma|=l} \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]} \Big)*,$$

представленному в виде суммы разностных операторов порядков от 0 до k, также будем приписывать любой из порядков от 0 до k. Это естественно, поскольку для любой k раз непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ существуют пределы

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^j} \psi[\beta] * \varphi_h[\beta], \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

быть может, равные нулю.

Заметим, что данное определение порядка разностного оператора отличается от аналогичного определения порядка дифференциального оператора. Напомним, что порядок дифференциального выражения

$$\sum_{j=k}^{m} a_j \frac{d^j}{dx^j}, \quad a_k \neq 0, \ a_m \neq 0,$$

считается равным m, т. е. наивысшему из порядков входящих в него производных. Для разностных же операторов вида $\sum\limits_{j=k}^{m} \psi_j[\beta]*$, где порядок $\psi_j[\beta]$ равен в точности k и выше, порядком будет наименьший из порядков $\psi_j[\beta]$.

Формально естественным непрерывным аналогом оператора свертки, действующего на дискретную функцию $\psi[\beta]$ по формуле

$$\psi[\beta] = L\varphi[\beta] = \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}[\beta] * \varphi[\beta],$$

является интегродифференциальный оператор свертки, действующий на гладкую функцию $\varphi(y)$ следующим образом:

$$\psi(x) = L\varphi(x) = \int \chi_\gamma(x-y) D^\gamma \varphi(y)\, dy.$$

Однако для финитных коэффициентов $\chi_\gamma[\beta]$, которые мы и рассматриваем, такой интегродифференциальный оператор не получается предельным переходом из разностного. С другой стороны, как уже отмечалось, аналоги обычного дифференциального оператора строятся не единственным образом. Отчасти это объясняет, почему удобно пользоваться не сходными определениями порядков дифференциальных и разностных операторов.

Как легко видеть, финитный разностный оператор порядка l ортогонален по свертке многочленам степени ниже l. Иными словами, для финитной функции

$$\varphi[\beta] = \sum_{|\gamma|=l} \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}$$

справедлива система равенств

$$\varphi[\beta] * [\beta]^{[\alpha]} = 0, \quad |\alpha| < l. \tag{1.15}$$

Полезно заметить, что условие (1.15) равносильно условию

$$[\varphi[\beta], [\beta]^{[\alpha]}] = 0, \quad |\alpha| < l. \tag{1.16}$$

Действительно, система (1.16) сразу следует из (1.15), если вспомнить соотношения (1.2). Обратно, если выполнены условия (1.16), то согласно аналогу формулы бинома Ньютона для ньютоновых степеней получим

$$\varphi[\beta] * [\beta]^{[\alpha]} = \sum_{\gamma} \varphi[\gamma][\beta - \gamma]^{[\alpha]} = \sum_{0 \le \varepsilon \le \alpha} \sum_{\gamma} \varphi[\gamma] c_{\alpha,\varepsilon} [\beta]^{\alpha-\varepsilon} [\gamma]^{[\varepsilon]},$$

где $c_{\alpha,\varepsilon}$ — легко вычисляемые постоянные. Далее, имеем

$$\varphi[\beta] * [\beta]^{[\alpha]} = \sum_{0 \le \varepsilon \le \alpha} c_{\alpha,\varepsilon} [\beta]^{[\alpha-\varepsilon]} [\varphi[\gamma], [\gamma]^{[\varepsilon]}] = 0,$$

и, значит, из (1.16) вытекает (1.15).

Как мы сейчас докажем, свойство (1.15) является характерным для указанных операторов. Имеет место следующая

Теорема VIII.5. *Пусть $\varphi[\beta]$ — финитная функция, ортогональная по свертке всем многочленам степени ниже l:*

$$\varphi[\beta] * [\beta]^{[\gamma]} = 0, \quad |\alpha| < l, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{supp} \varphi[\beta] \subset \{\beta : |\beta_j| < L\}. \tag{1.18}$$

Тогда $\varphi[\beta]$ представима в дивергентной форме:

$$\varphi[\beta] = \sum_{|\gamma|=l} \chi_\gamma[\beta] * \Delta^{[\gamma]}[\beta], \quad \operatorname{supp} \chi_\gamma[\beta] \subset \{\beta : |\beta_j| < L\}, \tag{1.19}$$

т. е. является финитным разностным оператором скалярного порядка l.

Доказательству теоремы VIII.5 предпошлем две леммы.

Лемма VIII.1. *Пусть дискретная функция $\varphi[\beta]$ удовлетворяет условиям* (1.17) *и* (1.18). *Тогда свертка*

$$\Phi_n[\beta] = \varphi[\beta] * \Sigma_n[\beta] = \sum_{\beta'_n=-\infty}^{\beta_n-1} \varphi\left[\hat{\beta}_n, \beta'_n\right]$$

обладает следующими свойствами.

1. *Все координаты векторов* $\beta \in \operatorname{supp} \Phi_n[\beta]$, *кроме координаты* β_n, *ограничены по абсолютной величине, координата же* β_n *ограничена, вообще говоря, только снизу*:

$$\operatorname{supp} \Phi_n[\beta] \subset \{\beta : |\beta_j| < L,\ j < n;\ \beta_n > -L\}.$$

2. *При* $\beta_n > L$ *функция* $\Phi_n[\beta]$ *зависит только от* $\hat{\beta}_n$.

3. *При* $\beta_n > L$ *функция* $\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n] = \Phi_n[\beta]$ *ортогональна в пространстве дискретных функций аргумента* $\hat{\beta}_n \in \mathbb{Z}^{(n-1)}$ *всем многочленам степени ниже* l:

$$[\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n], [\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}] = 0 \quad \text{при } |\widehat{\alpha}_n| < l.$$

4. *Для срезки* $\chi_n[\beta; k]$ *функции* $\Phi_n[\beta]$ *по координате* β_n, *определяемой формулой*

$$\chi_n[\beta; k] = \Phi_n[\beta]\Sigma[k - \beta_n] = \begin{cases} \Phi_n[\beta], & \text{если } \beta_n < k, \\ 0, & \text{если } \beta_n \geq k, \end{cases} \tag{1.20}$$

справедливо равенство

$$[\chi_n[\beta; k], [\beta]^{[\alpha]}] = 0 \quad \text{при } k > L, \quad |\alpha| < l - 1. \tag{1.21}$$

Доказательство. Первые два свойства функции $\Phi_n[\beta]$ очевидно вытекают из ее определения. Докажем свойство 3.

Скалярное произведение функций $\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n]$ и $[\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}$ в пространстве дискретных функций аргумента $\hat{\beta}_n \in \mathbb{Z}^{(n-1)}$, как легко видеть, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}[\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n], [\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}] &= \sum_{\beta} \varphi[\beta][\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]} = \sum_{\beta} \varphi[\beta][\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}[\beta_n]^{[0]} \\ &= \sum_{\beta} \varphi[\beta][\beta]^{[\alpha]} = [\varphi[\beta], [\beta]^{[\alpha]}] = 0.\end{aligned}$$

Здесь через α обозначен мультииндекс $(\widehat{\alpha}_n, 0)$.

Для доказательства свойства 4 левую часть равенства (1.21) перепишем в виде

$$\begin{aligned}[\chi_n[\beta; k], [\beta]^{[\alpha]}] &= [\Phi_n[\beta]\Sigma[k - \beta_n], [\beta]^{[\alpha]}] \\ &= [\Phi_n[\beta], [\beta]^{[\alpha]}\Sigma[k - \beta_n]].\end{aligned} \tag{1.22}$$

Второй сомножитель в последнем скалярном произведении представим как результат свертки $\Delta_n[\beta]$ с некоторой дискретной функцией.

Как легко видеть, одним из решений уравнения

$$\Delta_n * \lambda[\beta] = [\beta]^{[\alpha]}\Sigma[k - \beta_n]$$

служит функция

$$\lambda_\alpha[\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_n \geq k, \\ \dfrac{[\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}}{\alpha_n + 1}\left\{[\beta_n]^{[\alpha_n+1]} - k^{[\alpha_n+1]}\right\}, & \text{если } \beta_n < k. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\beta_n \leq k$ решение $\lambda_\alpha[\beta]$ является полиномом степени ниже l. Из определения $\lambda_\alpha[\beta]$ и свойства 1 функции $\Phi_n[\beta]$ следует, что произведение $\lambda_\alpha[\beta]\Phi_n[\beta]$ — финитная функция. С помощью этого замечания легко получить равенство

$$\sum_\beta \Delta_n * (\Phi_n[\beta]\lambda_\alpha[\beta]) = 0. \tag{1.23}$$

Пользуясь формулой (1.12) при $j = n$, сумму в левой части (1.23) преобразуем к следующему виду:

$$\Delta_n * (\varphi\psi) = (\Delta_n * \varphi[\beta])\psi[\beta] + (\Delta_n * \psi[\beta])\varphi[\beta + \delta_n].$$

Полагая здесь $\varphi[\beta] = \lambda_\alpha[\beta]$ и $\psi[\beta] = \Phi_n[\beta]$ и подставляя результат в (1.23), получим

$$\sum_\beta \Phi_n[\beta](\Delta_n * \lambda_\alpha[\beta]) + \sum_\beta \lambda_\alpha[\beta + \delta_n]\Delta_n * \Phi_n[\beta]$$
$$= \sum_\beta \Phi_n[\beta][\beta]^{[\alpha]}\Sigma[k - \beta_n] + \sum_\beta \lambda_\alpha[\beta + \delta_n]\varphi[\beta] = 0.$$

Так как $\lambda_\alpha[\beta + \delta_n]$ при $k > L$ является полиномом степени ниже l во всех точках носителя $\varphi[\beta]$, то согласно условию (1.17) второе слагаемое в последнем равенстве — это нуль. Следовательно, скалярное произведение (1.22) также равно нулю.

Лемма VIII.1 доказана.

Лемма VIII.2. Пусть дискретная функция $\varphi[\beta]$ удовлетворяет условиям (1.17) *и* (1.18) *теоремы* VIII.5. *Тогда она допускает представление вида*

$$\varphi[\beta] = \sum_{j=1}^{n} (\Delta_j * \chi_j)[\beta],$$

где $\chi_j[\beta]$ суть финитные функции, ортогональные многочленам степени ниже $l-1$:

$$\operatorname{supp} \chi_j[\beta] \subset \{\beta : |\beta_j| < L\}, \quad [\chi_j[\beta], [\beta]^{[\alpha]}] = 0, \ |\alpha| < l-1. \qquad (1.24)$$

Доказательство проведем индукцией по числу независимых переменных. Докажем, что для одной переменной лемма верна. Действительно, для достаточно больших β_1 в силу условий (1.17) и (1.18) имеем

$$\psi[\beta_1] = \Sigma[\beta_1] * \varphi[\beta_1] = \sum_{\gamma_1 < \beta_1} \varphi[\gamma_1] = [\varphi[\beta_1], 1] = 0.$$

Таким образом, функция $\psi[\beta_1]$ также финитна и совпадает с функцией $\Phi_1[\beta]$ из леммы VIII.1. По лемме VIII.1 она ортогональна многочленам степени ниже $l-1$. Но, как легко видеть,

$$\varphi[\beta_1] = \Delta_1 * \psi[\beta_1],$$

что и доказывает утверждение при $n = 1$.

Покажем теперь, что из справедливости леммы VIII.2 для $n-1$ переменных следует ее справедливость для n переменных. Рассмотрим функцию $\chi_n[\beta; k]$ определяемую равенством (1.20). При $k > L$ из определения $\Delta_n[\beta]$ и равенства (1.20) имеем

$$\Delta_n * \chi_n[\beta; k] = \varphi[\beta] - \delta[\beta_n - k + 1]\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n]$$

и, значит,

$$\varphi[\beta] = \Delta_n * \chi_n[\beta; k] + \delta[\beta_n - k + 1]\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n].$$

Функция $\chi_n[\beta; k]$ согласно лемме VIII.1 финитна и ортогональна многочленам степени ниже $l-1$. В силу индуктивного предположения

функция $\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n]$, будучи функцией $n-1$ переменных, представима в виде

$$\widehat{\Phi}_n[\hat{\beta}_n] = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j * \chi_j[\hat{\beta}_n].$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\varphi[\beta] = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j * (\delta[\beta_n - k + 1]\chi_j[\hat{\beta}_n]) + \Delta_n * \chi_n[\beta]. \tag{1.25}$$

Это и есть искомое представление функции $\varphi[\beta]$.

Лемма VIII.2 доказана.

Доказательство теоремы VIII.5. Применим полную индукцию, на этот раз по степени многочленов. Для многочленов нулевой степени теорема тривиальна. Финитная функция $\varphi[\beta]$ сама служит своим представлением в виде (1.19), где $l = 0$.

Пусть теорема верна для финитных функций, ортогональных многочленам степени ниже $l-1$. Покажем, что она верна и для функций, ортогональных многочленам степени ниже l.

Действительно, из леммы VIII.2 вытекает, что функция $\varphi[\beta]$, удовлетворяющая условиям (1.17) и (1.18), допускает разложение

$$\varphi[\beta] = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j * \chi_j[\beta], \tag{1.26}$$

где сомножители $\chi_j[\beta]$ финитны и ортогональны по свертке многочленам степени ниже $l-1$, т. е. удовлетворяют условиям (1.24). Каждая функция $\chi_j[\beta]$ по предположению индукции представима в дивергентном виде:

$$\chi_j[\beta] = \sum_{|\gamma|=l-1} \chi_{j,\gamma}[\beta] * \Delta^{[\gamma]}[\beta].$$

Подставив это равенство в (1.26), получим равенство (1.19).

Теорема VIII.5 доказана.

Проследим дальнейшую аналогию между разностными операторами и операторами дифференцирования. Рассмотрим множество

всех частных разностей порядка l от данной функции дискретного аргумента, т. е. множество

$$\{\omega_\alpha[\beta] = \Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta], \quad |\alpha| = l\}.$$

Очевидно, что функции $\omega_\alpha[\beta]$ удовлетворяют соотношению

$$\Delta_k * \omega_{\alpha+\delta_j} = \Delta_j * \omega_{\alpha+\delta_k}, \tag{1.27}$$

где α — произвольный вектор такой, что $|\alpha| = l - 1$. Это соотношение является аналогом формулы $\partial w_j/\partial x_k = \partial w_k/\partial x_j$. Произвольную систему функций $\{w_\alpha, |\alpha| = l\}$, удовлетворяющих (1.27), назовем *разностным градиентом порядка* l.

Теорема VIII.6. *Каждый разностный градиент w_α порядка l представляет собой множество частных разностей порядка l некоторой функции дискретной переменной.*

Доказательство проведем для градиентов 1-го порядка, так как случай произвольного порядка l в принципе не отличается от случая $l = 1$. Пусть функции φ_k обладают свойством

$$\Delta_j * \varphi_k = \Delta_k * \varphi_j. \tag{1.28}$$

Установим, что найдется функция $\varphi_0[\beta]$, для которой имеет место следующая система равенств:

$$\varphi_k = \Delta_k * \varphi_0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Докажем это при помощи последовательного частного суммирования по каждой дискретной переменной по аналогии с тем, как это делается в классическом анализе при восстановлении функции по ее градиенту.

Пусть $\varphi_0[0]$ — произвольная постоянная и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ принадлежит $\mathbb{Z}^n$. Определим значение $\varphi_0[\beta]$ рекуррентным образом. Для $m = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$\varphi_0\left[\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k\delta_k + \beta_m\delta_m\right] = \begin{cases} \varphi_0\left[\sum\limits_{k=1}^{m-1} \beta_k\delta_k\right] + \sum\limits_{\gamma_m=0}^{\beta_m-1} \varphi_m[\gamma_m\delta_m], & \beta_m > 0, \\ \varphi_0\left[\sum\limits_{k=1}^{m-1} \beta_k\delta_k\right] - \sum\limits_{\gamma_m=0}^{-\beta_m+1} \varphi_m[\gamma_m\delta_m], & \beta_m \le 0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что при выполнении условий (1.28) функция

$$\varphi_0[\beta] = \varphi_0\left[\sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_k\right]$$

удовлетворяет системе равенств (1.29).

Теорема VIII.6 доказана.

Функцию $\varphi_0[\beta]$, соответствующую разностному градиенту порядка l в силу теоремы VIII.6, назовем *первообразной* этого градиента.

По значениям разностного градиента 1-го порядка его первообразная функция, как мы называем функцию $\varphi_0[\beta]$, удовлетворяющую равенствам (1.29), определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Зная градиент порядка l, построим градиент порядка $l-1$, который состоит из функций φ_α, $|\alpha| = l-1$, определенных каждая с точностью до постоянного слагаемого. Повторяя процесс, придем к градиенту порядка $l-2$, и т. д. Покажем, что функция $\varphi_0[\beta]$, которую мы построим в конце концов, определяется с точностью до произвольного полиномиального слагаемого степени $l-1$. Иными словами, докажем, что справедлива

Лемма VIII.3. *Первообразная любого разностного градиента порядка l определена с точностью до полиномиального слагаемого степени $l-1$.*

Доказательство. Проверим, что если для всех α таких, что $|\alpha| = l$, имеет место равенство

$$\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta] = 0,$$

то функция $\varphi[\beta]$ представляет собой многочлен степени не выше $l-1$. Проверку проведем индукцией по числу n независимых переменных. Для $n = 1$ нужное утверждение легко доказать индукцией по порядку l. Допустим, что оно верно для $n-1$ переменных. Тогда из равенства нулю всех разностей порядка l от φ по переменным $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ вытекает, что значения $\varphi[\beta]$ на любой плоскости $\beta_n = \text{const}$ совпадают со значениями некоторых многочленов от переменных $\widehat{\beta}_n$, т. е.

$$\varphi[\beta] = \sum_{|\hat{\alpha}_n| < l} a_{\hat{\alpha}_n}[\beta_n][\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}.$$

Подействовав на обе части этого равенства оператором свертки $\Delta^{[\hat{\gamma}_n]}*$, получим

$$\Delta^{[\hat{\gamma}_n]} * \varphi = \sum_{|\hat{\alpha}_n|<l} a_{\hat{\alpha}_n}[\beta_n]\Delta^{[\hat{\gamma}_n]} * [\hat{\beta}_n]^{[\hat{\alpha}_n]}.$$

Разность по β_n порядка $\gamma_n = l - |\widehat{\gamma}_n|$ от этого выражения по условию равна нулю. Значит, все коэффициенты $a_{\hat{\alpha}_n}[\beta_n]$ должны быть многочленами от β_n степени $l - |\widehat{\gamma}_n| - 1$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Лемма VIII.3 доказана.

Разность двух первообразных функций $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$ одного и того же разностного градиента порядка l, т. е. двух решений системы уравнений

$$\Delta^{[\alpha]} * \varphi_0 = \omega_\alpha, \quad |\alpha| = l,$$

удовлетворяет соответствующей однородной системе и согласно лемме VIII.3 является многочленом степени $l - 1$.

§ 2. Пространства дискретных функций

Пространства функций непрерывного аргумента принято задавать, накладывая те или иные условия на производные этих функций. По тому же образцу определяются и пространства функций дискретной переменной. Отличие состоит лишь в том, что производные заменяются разностями, а интегрирование — суммированием.

Давно и подробно изучены функции одного дискретного аргумента, т. е. последовательности. Для них хорошо известны пространства l_p, $1 \le p < \infty$, состоящие из функций $\varphi[\beta]$ целочисленного аргумента β с конечной нормой

$$||\varphi|| = \left\{ \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} |\varphi[\beta]|^p \right\}^{1/p}$$

Их естественные обобщения — пространства l_p функций нескольких дискретных переменных, обладающих конечной нормой

$$||\varphi \mid l_p|| = \left\{ \sum_{\beta} |\varphi[\beta]|^p \right\}^{1/p}.$$

Полезно рассмотреть также пространство $\tilde{l}_{p,\tau}$ периодических функций дискретного аргумента. По определению это линейное многообразие функций $\varphi[\beta]$, периодических с периодом τ, $\tau \in \mathbb{Z}^n$, обладающих конечной нормой

$$\|\varphi \mid \tilde{l}_{p,\tau}\| = \Big\{ \sum_{0 \le \beta < \tau} |\varphi[\beta]|^p \Big\}^{1/p}.$$

Кроме этих пространств рассмотрим множество $l_p^{(l)}$, состоящее из классов функций $\varphi[\beta]$, у которых разности порядка l суммируемы со степенью p:

$$\|\varphi \mid l_p^{(l)}\| = \Big\{ \sum_{|\alpha|=l} \sum_{\beta} |\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta]|^p \Big\}^{1/p} < \infty.$$

Элементы каждого класса из $l_p^{(l)}$ отличаются друг от друга на полиномиальные слагаемые степени $l-1$.

Для пространств $l_p^{(l)}$ справедливы теоремы вложения, аналогичные теоремам, имеющим место для пространств $L_p^{(l)}$ функций непрерывной переменной, определение которых аналогично данному ранее в гл. I, § 2 для случая $p = 2$. Справедлива также теорема о плотности в $l_p^{(l)}$ финитных функций. Соответствующий раздел теории пространств дискретных функций основан на нескольких теоремах, связывающих пространства $l_p^{(l)}$ и $L_p^{(l)}$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны непрерывная функция $\varphi(x)$ и целочисленная решетка $\Gamma = \{A\beta + \beta^{(0)};\ \beta \in \mathbb{Z}^n\}$. Функцию дискретной переменной $\varphi[\beta] = \varphi(A\beta + \beta^{(0)})$ назовем *следом функции* $\varphi(x)$ *на решетке* Γ. По заданной функции $\varphi[\beta]$ можно тем или иным способом определить на $\mathbb{R}^n$ непрерывную с несколькими своими производными функцию $\varphi(x)$, след которой равен исходной дискретной функции. Такую функцию $\varphi(x)$ будем называть *интерполяционной* для $\varphi[\beta]$.

Теорема VIII.7. *Если функция $\varphi(x)$ из $L_p^{(l)}$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$, то ее след $\varphi[\beta]$ на решетке Γ принадлежит $l_p^{(l)}$. Нормы $\varphi(x)$ и $\varphi[\beta]$ в соответствующих пространствах связаны неравенством*

$$\|\varphi[\beta] \mid l_p^{(l)}\| \le K \|\varphi(x) \mid L_p^{(l)}\|,$$

в котором постоянная K не зависит от φ.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — гладкая функция из $L_p^{(l)}$, а $\varphi[\beta]$ — ее след на решетке Γ. Для упрощения выкладок предположим, что решетка Γ кубическая с вершиной в начале координат, т. е. $\beta^{(0)} = 0$ и $A = I$. Выразим значения разности дискретной функции $\varphi[\beta]$ через интегралы от производных $\varphi(x)$.

Пусть $\Theta(\xi)$ — функция Хевисайда, т. е.

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi \geq 0, \\ 0, & \text{если } \xi < 0. \end{cases}$$

Для любого натурального m положим

$$\psi_m(\xi) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(\xi+k)^{m-1}}{(m-1)!} \theta(\xi+k).$$

Легко видеть, что при $\xi < -m$ функция $\psi_m(\xi)$ тождественно равна нулю. При $\xi > 0$ сумма $\psi_m(\xi)$ представляет собой m-ю разность от одночлена $\xi^{m-1}/(m-1)!$, т. е. тоже равна нулю.

Далее, для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ с натуральными координатами α_j рассмотрим произведение

$$\psi_\alpha(y) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{\alpha_j}(y_j).$$

Функция $\psi_\alpha(y)$ финитна, причем ее носитель содержится в кубе

$$\{y : -\alpha_j \leq y_j \leq 0,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

При $|\alpha| \leq l$ элементарным образом выводится формула

$$\int \psi_\alpha(x-y) D^\alpha \varphi(y)\, dy = \Delta^{[\alpha]} * \varphi(x). \tag{2.1}$$

Взяв в равенстве (2.1) $x = \beta$, перепишем его в виде

$$\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta] = \int \psi_\alpha(\beta - y) \chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)\, dy.$$

Здесь $\chi_\sigma(y)$ — характеристическая функция носителя σ функции $\psi_\alpha(y)$. Подчеркнем, что произведение $\psi_\alpha(\beta - y)\chi_\sigma(\beta - y)$ — это финитная по y функция, причем ее носитель целиком содержится в кубе

$$\{y : \beta_j \le y_j \le \beta_j + \alpha_j,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Найденное представление разности $\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta]$ позволяет записать норму функции $\varphi[\beta]$ в виде

$$\|\varphi[\beta] \mid l_p^{(l)}\| = \left\{ \sum_{|\alpha|=l} \sum_\beta \left| \int \psi_\alpha(\beta - y)\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)\, dy \right|^p \right\}^{1/p}$$

Внутренний интеграл оценим по неравенству Гёльдера:

$$\left| \int \psi_\alpha(\beta - y)\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)\, dy \right| \le \|\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y) \mid L_p\| \, \|\psi_\alpha(\beta - y) \mid L_{p'}\|.$$

Здесь $1/p + 1/p' = 1$. Так как второй сомножитель в правой части этого неравенства не зависит от β, справедливо следующее неравенство:

$$\|\varphi[\beta] \mid l_p^{(l)}\| \le \max_{|\alpha|=l} \|\psi_\alpha \mid L_{p'}\| \left\{ \sum_{|\alpha|=l} \sum_\beta \int |\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)|^p\, dy \right\}^{1/p}.$$

Каждый интеграл в правой его части допускает оценку

$$\int |\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)|^p\, dy \le \int\limits_{\beta \le y \le \beta + \alpha} |D^\alpha \varphi(y)|^p\, dy.$$

При любом $\beta \in \mathbb{Z}^n$ куб

$$\{y : \beta_j \le y_j \le \beta_j + \alpha_j,\ j = 1, \dots, n\}$$

получается объединением конечного числа c_α элементарных ячеек вида $\{y \mid \gamma \le y < \gamma + 1\}$. Величина c_α при этом от β никак не зависит. Учитывая это и суммируя по $\beta \in \mathbb{Z}^n$ полученные неравенства, приходим к соотношениям

$$\sum_\beta \int |\chi_\sigma(\beta - y) D^\alpha \varphi(y)|_p\, dy \le c_\alpha \int |D^\alpha \varphi(y)|^p\, dy, \quad |\alpha| = l.$$

Суммируя их по α, $|\alpha| = l$, окончательно получаем

$$\|\varphi[\beta] \mid l_p^{(l)}\| \le C_l \max_{|\alpha|=l} \|\psi_\alpha \mid L_{p'}\| \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha \varphi \mid L_p\| \le K \|\varphi \mid L_p^{(l)}\|.$$

Теорема VIII.7 доказана.

Следствие 2.1. *Если $lp > n$, $\varphi \in L_p^{(l)}$, то заключение теоремы VIII.7 остается в силе.*

Последнее утверждение легко следует из теоремы вложения класса $L_p^{(l)}$ в пространство непрерывных в ограниченной области функций.

Продолжим функцию дискретной переменной $\varphi[\beta]$ на всё $\mathbb{R}^n$ гладким образом, т. е. построим соответствующую $\varphi[\beta]$ интерполяционную функцию $\varphi(x)$. Для того чтобы осуществить эту интерполяцию, используем специальный линейный оператор, предложенный В. С. Рябеньким [137, 216]. Опишем его построение.

Шаг 1. Рассмотрим вспомогательную интерполяционную задачу: даны два $(l+1)$-мерных вектора

$$a^{(0)} = \left(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_l^{(0)}\right), \quad a^{(1)} = \left(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \ldots, a_l^{(1)}\right),$$

требуется найти многочлен $P(y)$ степени $2l+1$ такой, что

$$\left.\frac{d^s P(y)}{dy^s}\right|_{y=0} = a_s^{(0)}, \quad \left.\frac{d^s P(y)}{dy^s}\right|_{y=1} = a_s^{(1)}, \quad s = 0, 1, \ldots, l. \tag{2.2}$$

Докажем, что условия (2.2) всегда определяют, и притом единственный, многочлен $P(y)$ степени $2l+1$. В самом деле, знание всех производных от многочлена $P(y)$ до порядка l включительно в точках $y = 0$ и $y = 1$ всегда позволяет найти, и притом единственным способом, разложение

$$\frac{P(y)}{y^{l+1}(y-1)^{l+1}} = \frac{b_{l+1}}{y^{l+1}} + \frac{b_l}{y^l} + \cdots + \frac{b_1}{y} + \frac{c_{l+1}}{(y-1)^{l+1}} + \frac{c_l}{(y-1)^l} + \cdots + \frac{c_1}{y-1}.$$

Это соотношение полностью характеризует многочлен $P(y)$, определяемый формулой

$$\begin{aligned} P(y) = {} & (y-1)^{l+1}[b_{l+1} + b_l y + b_{l-1} y^2 + \cdots + b_1 y^l] \\ & + y^{l+1}[c_{l+1} + c_l(y-1) + c_{l-1}(y-1)^2 + \cdots + c_1(y-1)^l]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вычисление коэффициентов b_s и c_s проводится, как обычно, дифференцированием (2.3) и подстановкой вместо y значений $y = 0$ и $y = 1$.

Коэффициенты многочлена $P(y)$, равно как и его значения, не обязаны быть числами. Они могут быть элементами любой природы. Надо только уметь складывать их и умножать на скаляры.

Пусть $\mathbf{X}$ — произвольное векторное пространство (скажем, пространство многочленов от какой-нибудь дополнительной переменной z и т. п.). Рассмотрим векторы $a = (a_0, a_1, \ldots, a_l)$, координатами которых служат элементы пространства $\mathbf{X}$. Сложение таких векторов и умножение их на скаляры определяются очевидным образом. Легко видеть, что и в этом случае задача (2.2) однозначно разрешима для любых векторов $a^{(0)}$ и $a^{(1)}$ указанного типа. Коэффициенты многочлена $P(y)$ также будут элементами пространства $\mathbf{X}$.

Пусть на одномерной решетке $\mathbb{Z}$ задано $(l+1)$-мерное векторное поле $a[\beta]$, т. е. для каждого целого β определен вектор

$$a[\beta] = (a_0[\beta], a_1[\beta], \ldots, a_l[\beta]), \quad a_s[\beta] \in \mathbf{X}.$$

В каждом промежутке $\beta \le y \le \beta + 1$ построим по векторам $a[\beta]$ и $a[\beta+1]$ многочлен $R(y \mid \beta]$, решающий задачу (2.2). В результате получим кусочно-полиномиальную функцию $R(y)$ с расположенными в векторном пространстве $\mathbf{X}$ значениями, которая непрерывна вместе со своими производными до порядка l включительно. При этом значения функции $R(y)$ в целочисленных точках $y = \beta$ совпадают с $a_0[\beta]$.

Если бы в целочисленных точках были известны точные значения производных от искомой функции $\varphi(y)$, то, решив интерполяционную задачу (2.2) по кускам, мы бы построили $\varphi(y)$. Однако значения производных неизвестны, и в качестве $a_s[\beta]$ приходится выбирать разностные приближения к ним. Покажем, как это сделать.

Шаг 2. Возьмем функцию $\varphi[\beta]$, заданную на решетке, и вычислим интерполяционный многочлен Ньютона степени l по ее значениям в точках $\beta, \beta+1, \ldots, \beta+l$:

$$Q(y \mid \beta] = \sum_{k=0}^{l} \frac{\Delta^{[k]} * \varphi[\beta]}{k!} (y-\beta)^{[k]}.$$

Этому многочлену, в свою очередь, сопоставим вектор его производных в точке β:

$$\left.\frac{d^k Q(y \mid \beta]}{dy^k}\right|_{y=\beta} = a_k[\beta], \quad k = 0, 1, \ldots, l. \tag{2.4}$$

Тем самым получено векторное поле $a[\beta]$, заданное на решетке, и определен некоторый линейный оператор, преобразующий разности $\Delta^{[k]} * \varphi[\beta]$ в величины $a_k[\beta]$, $k = 0, 1, \ldots, l$.

Величины $a_k[\beta]$ служат коэффициентами разложения $Q(y \mid \beta]$ по обычным степеням:

$$Q(y \mid \beta] = \sum_{k=0}^{l} a_k[\beta] \frac{y^k}{k!}.$$

Связь между ньютоновыми и обычными степенями дается формулами

$$y^0 = y^{[0]}; \quad y^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) y^{[k]}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$y^{[0]} = y^0; \quad y^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) y^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $s(n,k)$ и $S(n,k)$ — так называемые числа Стирлинга первого и второго родов соответственно [64].

Шаг 3. Интерполятор Рябенького является простой комбинацией операторов, рассмотренных на первом и втором шагах. Построив по функции $\varphi[\beta]$ векторное поле $a[\beta]$, примем за *интерполяционный полином Рябенького* на отрезке $\beta \le y \le \beta + 1$ многочлен $R(y \mid \beta]$, построенный по векторам $a[\beta]$ и $a[\beta + 1]$ на шаге 1. Из этих полиномов склеиваем кусочно-полиномиальную функцию, определенную на всей области интерполирования, обозначив ее через $\varphi_R(y) = R(y \mid \varphi[\beta])$.

Назовем $\varphi_R(y)$ *интерполяционной функцией Рябенького*, а оператор R, переводящий $\varphi[\beta]$ в $\varphi_R(y)$, — *одномерным интерполятором Рябенького*. Итак, мы решили одномерную задачу. Интерполяционную функцию для n переменных построим по индукции.

Рассмотрим функцию n переменных $\varphi[\beta] = \varphi\big[(\beta_1, \beta_1')\big]$. Проинтерполируем ее по переменной β_1, используя интерполятор Рябенького R_1. Полученную функцию $\varphi\big(y_1, \beta_1'\big] = \varphi\big(y_1, (\beta_2, \beta_2')\big]$ проинтерполируем по β_2, используя интерполятор Рябенького R_2 по второй переменной. Применяя последовательно эту процедуру, после n шагов получим функцию $\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(y)$. Весь процесс в целом

описывается *многомерным интерполятором Рябенького*:

$$R = R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1.$$

Установим необходимые нам свойства интерполятора Рябенького.

Линейность интерполятора R сразу же вытекает из линейности всех промежуточных операций.

Из построения интерполяционной функции $R(y \mid \varphi)$ следует, что в каждой ячейке $\{y \mid \beta_j \le y_j \le \beta_j + 1, j = 1, 2, \dots, n\}$ она представляет собой многочлен степени не выше $(2l+1)n$.

Функция $R(y \mid \varphi)$ непрерывна со своими производными до порядка l включительно на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Действительно, полный оператор есть произведение n одномерных интерполяторов по отдельным переменным. Но каждый одномерный интерполятор дает в результате многочлен в промежутках с целочисленными концами. В целочисленных же точках значения производных от интерполирующих полиномов справа и слева берутся одинаковыми.

Оператор $R(y \mid \varphi)$ сопоставляет любому многочлену $P[\beta]$ степени l от дискретной переменной β многочлен от непрерывной переменной x с теми же коэффициентами, т. е. $R(y \mid P[\beta]) = P(x)$. В самом деле, многочлен Ньютона $Q(y \mid \beta]$ при любом β совпадает с самим данным полиномом. Кроме того, при всех β он удовлетворяет условиям (2.4), построенным по нему же самому. В силу единственности многочлена, удовлетворяющего таким условиям, функция $Q(y \mid \beta]$ будет своим собственным полиномом Рябенького.

Значение многочлена $R(y \mid \varphi)$ в фиксированной точке y зависит лишь от значений функции $\varphi[\beta]$ в точках некоторого конечного множества $\Omega_{\text{вл}}(y)$, которое мы будем называть *областью влияния точки* y. Множество $\Omega_{\text{вл}}(y)$ для оператора $R(y \mid \varphi)$ определяется формулой

$$\Omega_{\text{вл}}(y) = \{\beta \mid A \le \beta_j - y_j \le B, \, j = 1, 2, \dots, n\},$$

где A и B — некоторые постоянные. Иначе говоря, значение функции $R(y \mid \varphi)$ в точке y зависит лишь от значений $\varphi[\beta]$ в некотором кубе конечных размеров, не зависящих ни от y, ни от φ.

Это свойство очевидно, поскольку область влияния точки y в одномерном случае имеет вид $\Omega_{\text{вл}}(y) = \{\beta_y, \beta_y + 1, \dots, \beta_y + l\}$, где β_y — целая часть y.

Разность $\Delta^{[\gamma]} * \varphi[\beta]$, равно как и любой финитный разностный оператор $\chi_\gamma[\beta]*\varphi[\beta]$ порядка γ, полезно рассматривать как линейную комбинацию значений функции $\varphi[\varepsilon]$ в точках некоторого множества. Для $\Delta^{[\gamma]} * \varphi[\beta]$ таким множеством служит параллелепипед

$$\{\varepsilon \mid \beta_j \le \varepsilon_j \le \beta_j + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n\},$$

который мы обозначим через $[\beta, \beta + \gamma]$. Если γ — скаляр, этим же символом обозначается куб

$$\{\varepsilon \mid \beta_j \le \varepsilon_j \le \beta_j + \gamma, \quad j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Докажем, что для любого γ такого, что $\gamma_j \le l$, $j = 1, 2, \ldots, n$, справедлива оценка

$$|D^\gamma R(y \mid \varphi)| \le K \max_{[\beta, \beta+l] \subset \Omega_{\text{вл}}(y)} |\Delta^{[\gamma]} * \varphi[\beta]|. \tag{2.5}$$

Здесь максимум берется по тем точкам β, для которых куб $[\beta, \beta + l]$ попадает в область влияния точки y.

Неравенство (2.5) выведем в случае $n = 1$. Пусть $y \in \mathbb{R}$, а целое β удовлетворяет условию $[\beta, \beta + l] \subset \Omega_{\text{вл}}(y)$, т. е. β совпадает с целой частью y. Проинтерполировав функцию $\varphi[\gamma]$ с помощью многочлена Ньютона степени $l + 1$, построенного по ее значениям в $l + 2$ точках β, $\beta + 1, \ldots, \beta + l + 1$, при $\gamma = \beta, \beta + 1, \ldots, \beta + l + 1$ получим

$$\varphi[\gamma] = \sum_{k=0}^{l+1} \frac{[\gamma - \beta]^{[k]}}{k!} \Delta^{[k]} * \varphi[\beta] = Q[\gamma \mid \beta] + \frac{[\gamma - \beta]^{[l+1]}}{(l+1)!} \Delta^{[l+1]} * \varphi[\beta],$$

где $Q[\gamma \mid \beta]$ — дискретный многочлен Ньютона степени l. Значение многочлена $R(y \mid \varphi)$ в точке y определяется только значениями функции $\varphi[\beta]$ в $l + 2$ точках $\beta, \beta + 1, \ldots, \beta + l + 1$. Учитывая этот факт, а также линейность интерполятора Рябенького и его тождественность на многочленах степени l, имеем

$$R(y \mid \varphi) = Q(y \mid \beta] + \frac{\Delta^{[l+1]} * \varphi[\beta]}{(l+1)!} R(y \mid [\gamma - \beta]^{[l+1]}).$$

Оценим производные от каждого слагаемого порознь. Производная от $Q(y \mid \beta]$ порядка $k \le l$ — это линейная комбинация разностей $\Delta^{[k]} * \varphi[\gamma]$ в тех точках γ, где $[\gamma, \gamma + k] \subset [\beta, \beta + l]$. Поэтому

$$\max_{\beta \le y \le \beta+1} |Q^{(k)}(y \mid \beta]| \le K \max_{[\gamma,\gamma+k] \subset [\beta,\beta+l]} |\Delta^{[k]} * \varphi[\gamma]|.$$

Производные порядка k от функции $R(y \mid [\gamma - \beta]^{[l+1]})$ очевидно ограничены на отрезке $\beta \le y \le \beta + 1$. Кроме того, разность $\Delta^{[l+1]} * \varphi[\gamma]$ в точке $\gamma = \beta$ также не превосходит величины

$$K \max_{[\gamma,\gamma+k] \subset [\beta,\beta+l+1]} |\Delta^{[k]} * \varphi[\gamma]|.$$

Окончательно имеем оценку

$$\max_{\beta \le y \le \beta+1} |R^{(k)}(y \mid \beta]| \le K \max_{[\gamma,\gamma+k] \subset [\beta,\beta+l+1]} |\Delta^{[k]} * \varphi[\gamma]|,$$

непосредственно из которой и вытекает свойство (2.5). В случае $n > 1$ оценку (2.5) легко получить по индукции.

Теорема VIII.8 (об интерполяции). *Какова бы ни была функция $\varphi[\beta]$ из $l_p^{(l)}$, для нее существует интерполяционная функция $\varphi(x)$, принадлежащая $L_p^{(l)}$, причем между их нормами действует соотношение*

$$\left\| \varphi(x) \mid L_p^{(l)} \right\| \le K \left\| \varphi[\beta] \mid l_p^{(l)} \right\| \tag{2.6}$$

с постоянной K, не зависящей от $\varphi[\beta]$.

Доказательство заключается в проверке того, что оператор Рябенького осуществляет требуемую интерполяцию. Покажем, что функция $R(y \mid \varphi[\beta])$ является элементом $L_p^{(l)}$ и для нее выполняется неравенство (2.6).

Оценим норму $R(y \mid \varphi)$ в $L_p^{(l)}$. Пусть дана точка β, а y таково, что $\beta \le y \le \beta + 1$. По свойству (2.5) оператора Рябенького при $|\alpha| = l$ справедлива оценка

$$|D^\alpha R(y \mid \varphi)| \le K \max_{[\gamma,\gamma+\alpha] \subset [\beta,\beta+l+1]} |\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\gamma]|,$$

из которой следует, что

$$\max_{y\in[\beta,\beta+1]}\left\{\sum_{|\alpha|=l}\frac{l!}{\alpha!}|D^\alpha R(y\mid\varphi)|^2\right\}^{p/2}$$

$$\le K^p\left\{\sum_{|\alpha|=l}\frac{l!}{\alpha!}\max_{[\gamma,\gamma+\alpha]\subset[\beta,\beta+l+2]}|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|^2\right\}^{p/2}$$

$$\le C_l\{\max_{|\alpha|=l}\max_{[\gamma,\gamma+\alpha]\subset[\beta,\beta+l+2]}|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|\}^p \quad (2.7)$$

Последовательно используя следующие два неравенства для k неотрицательных чисел:

$$\max(a_1,\dots,a_k)\le\sum_{j=1}^k a_j,\quad \left(\sum_{j=1}^k a_j\right)^p\le k^{p-1}(a_1^p+\dots+a_k^p),$$

заключаем, что сумма в правой части формулы (2.7) оценивается выражением вида

$$C\sum_{|\alpha|=l}\Big\{\sum_{[\gamma,\gamma+\alpha]\subset[\beta,\beta+l+2]}|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|^p\Big\}$$

$$\le C\sum_{\beta\le\gamma\le\beta+l+2}\Big\{\sum_{|\alpha|=l}|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|^p\Big\}.$$

Пользуясь найденной мажорантой левой части неравенства (2.7), приходим к следующей серии оценок:

$$\int\limits_{\beta\le y\le\beta+1}\left\{\sum_{|\alpha|=l}\frac{l!}{\alpha!}|D^\alpha R(y\mid\varphi)|^2\right\}^{p/2}dy$$

$$\le C\sum_{\beta\le\gamma\le\beta+l+2}\Big\{\sum_{|\alpha|=l}|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|^p\Big\},$$

где C не зависит от φ и β. Суммируя эти оценки по всем $\beta\in\mathbb{Z}^n$ и пользуясь тем, что $\varphi[\gamma]\in l_p^{(l)}$, в итоге получим соотношение

$$\|R(y\mid\varphi[\beta])\mid L_p^{(l)}\|^p\le K\sum_{|\alpha|=l}\sum_\gamma|\Delta^{[\alpha]}*\varphi[\gamma]|^p=K\|\varphi[\gamma]\mid l_p^{(l)}\|^p.$$

Теорема VIII.8 доказана.

Элементами пространств $l_p^{(l)}$ и $L_p^{(l)}$ служат классы эквивалентных функций, причем класс многочленов степени ниже l имеет нулевую норму, т. е. считается нулем соответствующего пространства. В пространстве функций непрерывного аргумента $W_p^{(l)}$, определение которого аналогично данному ранее в гл. I, § 4 для случая $p = 2$, элементами служат не классы, а индивидуальные функции. Пространство $W_p^{(l)}$ строится как прямая сумма пространства $L_p^{(l)}$ и пространства многочленов $\mathbf{P}_{l-1}$, а обратный переход от $W_p^{(l)}$ к $L_p^{(l)}$ осуществляется при помощи операции проектирования.

То же самое построение естественно переносится и на пространства $l_p^{(l)}$. Его произвольный элемент — это класс функций $\varphi[\beta]$, любые два представителя которого отличаются на многочлены степени не выше $l-1$. Введем пространство $w_p^{(l)}$, состоящее из элементов вида $\varphi[\beta] + P[\beta]$, где $\varphi[\beta]$ — некоторый выбранный заранее представитель класса из $l_p^{(l)}$, а $P[\beta]$ — многочлен степени ниже l. Для данного элемента φ из пространства $w_p^{(l)}$ операция выделения соответствующего ему полинома $P[\beta]$ должна быть некоторым проектором π в пространстве $w_p^{(l)}$, переводящим его в пространство $\mathbf{P}_{l-1}$ многочленов степени не выше $l-1$. Выделение $\varphi[\beta]$ при этом осуществляется проектором $\widehat{\pi} = I - \pi$, отображающим $w_p^{(l)}$ на некоторое подпространство s_π, изоморфное $l_p^{(l)}$. Задание s_π равносильно, таким образом, заданию проекторов π или $\widehat{\pi}$.

Пространство $w_p^{(l)}$ нормируем так же, как пространство $W_p^{(l)}$, полагая

$$\left\|\varphi \mid w_p^{(l)}\right\|^p = \|\pi\varphi \mid \mathbf{P}_{l-1}\|^p + \left\|\varphi \mid l_p^{(l)}\right\|^p.$$

В качестве π можно выбрать, например, оператор

$$\pi\varphi = \sum_{|\alpha|=l-1} \left.\frac{\Delta^{[\alpha]} * \varphi}{\alpha!}\right|_{\beta=0} [\beta]^\alpha,$$

а норму в пространстве многочленов $\mathbf{P}_{l-1}$ можно задать равенством

$$\left\| \sum_{|\alpha|\le l-1} a_\alpha[\beta]^\alpha \mid \mathbf{P}_{l-1}\right\| = \sum_{|\alpha|\le l-1} |a_\alpha|.$$

Из определения пространств $w_p^{(l)}$, $W_p^{(l)}$ и теоремы VIII.7 заключаем, что след любой функции из $W_p^{(l)}$ на решетке Γ — это элемент класса $w_p^{(l)}$.

Обозначим через $\overset{\circ}{w}{}_p^{(l)}$ замыкание финитных функций в пространстве $w_p^{(l)}$, а через $\overset{\circ}{l}{}_p^{(l)}$ — замыкание в пространстве $l_p^{(l)}$ множества классов, каждый из которых содержит хотя бы одну финитную функцию. Нам понадобится еще подпространство $\overset{\bullet}{w}{}_p^{(l)}$, которое при $n \le p$ совпадает с $w_p^{(l)}$, а при $n > p$ определяется как совокупность таких функций $\varphi[\beta]$ из $w_p^{(l)}$, у которых разности $\Delta^{[\alpha]} * \varphi[\beta]$ порядков α, где $[l - n/p] + 1 \le |\alpha| \le l - 1$, стремятся к нулю при $|\beta| \to \infty$. Квадратные скобки обозначают здесь целую часть числа. Заметим, что стремление к нулю этих разностей, вообще говоря, неравномерное и понимается в том смысле, что l_p-нормы следов разностей на гранях куба $\{\beta : |\beta_j| \le N,\ j = 1, \ldots, n\}$, стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Вместе с пространством $\overset{\bullet}{w}{}_p^{(l)}$ будем рассматривать аналогичное ему пространство $\overset{\bullet}{W}{}_p^{(l)}$ функций непрерывного аргумента x. По определению при $n > p$ элементами $\overset{\bullet}{W}{}_p^{(l)}$ служат функции из $W_p^{(l)}$, производные которых порядков α, где $[l - n/p] + 1 \le |\alpha| \le l - 1$, стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Любая финитная функция из $W_p^{(l)}$ принадлежит $\overset{\bullet}{W}{}_p^{(l)}$. Таким образом, замыкание по норме пространства $W_p^{(l)}$ множества финитных функций, обозначаемое через $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}$, является подпространством $\overset{\bullet}{W}{}_p^{(l)}$.

Используя доказанные выше теоремы о следах и интерполяции, распространим на дискретный случай теоремы вложения пространств непрерывных функций.

Теорема VIII.9. *Если $n \le p$, то пространства $w_p^{(l)}$ и $\overset{\circ}{w}{}_p^{(l)}$ совпадают. При $n > p$ пространство $w_p^{(l)}$ разлагается в прямую сумму*

$$w_p^{(l)} = \overset{\bullet}{w}{}_p^{(l)} \oplus \mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]},$$

где через $\mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]}$ обозначено фактор-пространство $\mathbf{P}_{l-1}$ по подпространству $\mathbf{P}_{[l-n/p]}$, построенное с помощью проектора π: $\mathbf{P}_{l-1} \to \mathbf{P}_{[l-n/p]}$. Если $l \le n/p$, это фактор-пространство совпадает с $\mathbf{P}_{l-1}$.

Доказательство. Интерполятор Рябенького линейно отображает $w_p^{(l)}$ на некоторое множество $R[w_p^{(l)}]$, являющееся линейным подпространством в $W_p^{(l)}$. Это подпространство замкнуто, что легко доказать, пользуясь поочередно оценками из теорем VIII.7 и VIII.8. Кроме того, оно содержит все многочлены степени меньше l, а следовательно, и элементы пространства $\mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]}$.

Известно, что при $n \leq p$ пространство $W_p^{(l)}$ совпадает с $\mathring{W}_p^{(l)}$, а при $n > p$ представимо в виде прямой суммы

$$W_p^{(l)} = \dot{W}_p^{(l)} \oplus \mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]}. \tag{2.8}$$

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [179, гл. III, §4]. Будем рассматривать разложение (2.8) также и в случае, когда $n \leq p$, предполагая при этом второе слагаемое в правой части тривиальным. Из (2.8) следует, что подпространство $R[w_p^{(l)}]$ тоже разлагается в прямую сумму

$$R[w_p^{(l)}] = R[w_p^{(l)}] \cap \dot{W}_p^{(l)} \oplus \mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]}.$$

Инъективность отображения, осуществляемого интерполяционным оператором, позволяет теперь получить искомое разложение

$$w_p^{(l)} = \dot{w}_p^{(l)} \oplus \mathbf{P}_{l-1}/\mathbf{P}_{[l-n/p]}.$$

Теорема VIII.9 доказана.

Теорема VIII.10 (о плотности множества финитных функций). *Финитные функции дискретной переменной плотны в пространстве $l_p^{(l)}$. Иными словами, имеет место следующее равенство:*

$$l_p^{(l)} = \mathring{l}_p^{(l)}.$$

Доказательство. Пусть дискретная функция $\varphi[\beta]$ принадлежит $l_p^{(l)}$. Тогда согласно теореме VIII.8 интерполяционная функция $R(y \mid \varphi)$ принадлежит $L_p^{(l)}$. Известно, что финитные функции плотны в $L_p^{(l)}$. Обоснование этого утверждения можно найти, например, в

[179, гл. III, § 4]. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная функция $\varphi_\varepsilon(y) \in L_p^{(l)}$ такая, что

$$\left\| R(y \mid \varphi) - \varphi_\varepsilon(y) \mid L_p^{(l)} \right\| \le \varepsilon.$$

След $\varphi[\beta]$ функции $\varphi_\varepsilon(y)$ на решетке Γ по теореме VIII.7 принадлежит пространству $l_p^{(l)}$, и при этом справедлива оценка

$$\left\| \varphi[\beta] - \varphi_\varepsilon[\beta] \mid l_p^{(l)} \right\| \le K \left\| R(y \mid \varphi) - \varphi_\varepsilon(y) \mid L_p^{(l)} \right\|.$$

Отсюда и из финитности $\varphi_\varepsilon[\beta]$ получаем нужное равенство.

Теорема VIII.10 доказана.

§ 3. Преобразование Фурье дискретных функций

Все пространства функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, будем считать погруженными в пространство S', сопряженное к S — известному пространству Шварца. Последнее было введено Л. Шварцем и состоит из заданных на $\mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со своими производными любых порядков быстрее любой отрицательной степени аргумента. Мы предполагаем известными свойства преобразования Фурье, определяемого на функциях из S формулой

$$(Ff)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = \int f(x) e^{2\pi i x \xi}\, dx.$$

Обратное преобразование задается равенством

$$(F^{-1}\tilde{f})(x) = f(x) = \int \tilde{f}(\xi) e^{-2\pi i x \xi}\, d\xi.$$

Преобразование Фурье осуществляет изоморфизм S на себя и сохраняет скалярное произведение:

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int \tilde{f}(\xi)\overline{\tilde{g}(\xi)}\, d\xi = (\tilde{f}, \tilde{g}).$$

На элементах l пространства S' преобразование Фурье $F(l) = \tilde{l}$ определяется равенством

$$(F(l), \varphi) = (l, F^{-1}(\varphi)), \quad \varphi \in S.$$

Известно, что преобразование Фурье оставляет неизменными функции $E(x) = e^{-|x|^2/2} \in S$ и $\Phi_0(x) = \sum \delta(x-\gamma) \in S'$. Иными словами, эти функции переходят при преобразовании Фурье сами в себя:

$$\widetilde{E}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}, \quad \widetilde{\Phi}_0(\xi) = \Phi_0(\xi).$$

Расширим совокупность рассматриваемых пространств функций дискретной переменной, включив в нее различные линейные топологические пространства. Введем необходимые обозначения.

Пусть R — множество всех дискретных функций, а P — множество *боронообразных функций*, т. е. обобщенных функций вида

$$f(x) = \sum \varphi[\beta]\delta(x-\beta). \tag{3.1}$$

Если коэффициенты $\varphi[\beta]$ боронообразной функции $f(x)$ растут на бесконечности не быстрее степени своего аргумента, то $f \in S'$. Оператор соответствия (3.1) будем обозначать через I_{RP} или I_{PR} в зависимости от направления действия:

$$R \underset{I_{PR}}{\overset{I_{RP}}{\rightleftarrows}} P.$$

Гладкая функция $\varphi(x)$ превращается в боронообразную при умножении на $\Phi_0(x)$:

$$\varphi(x)\Phi_0(x) = \varphi(x)\sum_\beta \delta(x-\beta) = \sum_\beta \varphi[\beta]\delta(x-\beta).$$

Обратно, по известной боронообразной функции (3.1) с помощью интерполяционного оператора Рябенького можно построить гладкую функцию $\varphi(x)$, след которой на решетке совпадет с коэффициентами $\varphi[\beta]$.

Пусть $\mu(x)$ — какое-нибудь многомерное ядро усреднения [179], обладающее дополнительно свойствами: $\mu \in S$, $\mu(0) = 1$, $\mu(\gamma) = 0$ при $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, $\gamma \neq 0$. Тогда оператор свертки

$$\mu* : \sum_\beta \varphi[\beta]\delta(x-\beta) \longmapsto \sum_\beta \varphi[\beta]\mu(x-\beta)$$

превращает боронообразную функцию, коэффициенты которой растут степенным образом, в бесконечно дифференцируемую.

Множество периодических функций с основным параллелепипедом $Q = \{x \mid 0 \le x_j < 1, j = 1, \dots, n\}$ будем обозначать через Π, а множество периодических функций с основным параллелепипедом AQ, где A — некоторая вещественная невырожденная матрица, — через Π^A. Таким образом, при $A = I$ пространства Π^A и Π совпадают.

Отождествим в пространстве переменных $y \in \mathbb{R}^n$ все точки, сдвинутые друг относительно друга на целочисленный вектор. Иными словами, положим для $y \in \mathbb{R}^n$

$$t_j = \{y_j\} = y_j - [y_j], \quad t = V_0(y). \tag{3.2}$$

Здесь V_0 — оператор выделения дробных частей. Обратное к (3.2) отображение бесконечнократно:

$$V_0^{-1}(t) = \{y : y = t + \beta,\ \beta \in \mathbb{Z}^n\}, \quad 0 \le t_j < 1.$$

Образ $\mathbb{R}^n$ при соответствии V_0 — это тор

$$\theta^n = \{t : 0 \le t_j < 1,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Его можно рассматривать как n-мерный куб с отождествленными противоположными гранями. Таким образом, формулы (3.2) задают отображение V_0 пространства $\mathbb{R}^n$ на тор θ^n.

Тор θ^n можно превратить в односвязную область Ω_0 при помощи разрезов. Полученные таким способом области называются *фундаментальными*. Условие фундаментальности области Ω_0 имеет вид

$$\sum_\beta \chi_{\Omega_0}(y - \beta) = 1,$$

где $\chi_{\Omega_0}(y)$ — индикатор области Ω_0. Мы ограничимся рассмотрением кубической области $\Omega_0 = Q$.

Пусть $\varphi(y)$ — периодическая функция с единичной матрицей периодов, т. е. $\varphi \in \Pi$. Формула $\psi(t) = \varphi(y)$, где $y \in V_0^{-1}(t)$, определяет однозначную функцию, заданную на торе θ^n, поскольку образом $\mathbb{R}^n$

при отображении V_0 является весь тор θ^n, и во всех точках прообраза t функция $\varphi(y)$ принимает одно и то же значение. Множество Π в результате такого отображения переходит в множество T функций, заданных на θ^n. Преобразование Π в T можно также задать, ограничив область определения функции $\varphi(y)$ до куба Q, отождествленного с тором θ^n. Обозначим соответствующий оператор через $\partial_Q : \Pi \to T$.

Свертка функций $\Phi_0(x)$ и $\varphi(x) \in S$, определяемая равенством

$$(\Phi_0 * \varphi)(x) = \sum_\beta \varphi(x-\beta),$$

представляет собой периодическую бесконечно дифференцируемую функцию класса $\Pi \cap C^\infty$. Нетрудно видеть, что для элементов из Π^A аналогичным свойством обладает свертка функции φ из S с функционалом $\Phi_0(A^{-1}x)/\det A$.

Одним из правых обратных к оператору свертки Φ_0* служит оператор умножения на функцию $\lambda \in S$ со свойством $\sum\limits_\beta \lambda(x-\beta) = 1$. Действительно, для любой функции $\varphi \in \Pi \cap C^\infty$ имеем

$$\begin{aligned}(\Phi_0 * (\lambda \cdot \varphi))(x) &= \sum_\beta \varphi(x-\beta)\lambda(x-\beta) \\ &= \sum_\beta \varphi(x)\lambda(x-\beta) = \varphi(x)\sum_\beta \lambda(x-\beta) = \varphi(x),\end{aligned}$$

т. е. оператор умножения на $\lambda(y)$ действительно является правым обратным к оператору свертки с $\Phi_0(x)$. В качестве гладкого сомножителя $\lambda(x)$ можно взять, например, функцию

$$\lambda_n(x) = \int\limits_{Q-\mathrm{e}/2} e^{-\pi|x-y|^2}\,dy,$$

где $\mathrm{e} = (1,\ldots,1)$. Действительно, справедливо равенство

$$\sum_\beta \lambda_n(x-\beta) = \prod_{j=1}^n \sum_{\beta_j=-\infty}^{\infty} \lambda_1(x_j-\beta_j).$$

Выражение в его правой части равно единице. В этом легко убедиться, используя для суммирования значений функции $\lambda_1(\tau)$ одной переменной следующие равенства:

$$\sum_{\beta_j=-\infty}^{\infty} \lambda_1(x_j-\beta_j) = \sum_{\beta_j=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\pi(x_j-y_j-\beta_j)^2}\, dy_j$$

$$= \sum_{\beta_j=-\infty}^{+\infty} \int_{\beta_j-1/2}^{\beta_j+1/2} e^{-\pi(x_j-\tau)^2}\, d\tau = \int e^{-\pi\tau^2}\, d\tau = 1.$$

Применим преобразование Фурье к обобщенным функциям из $P \cap S'$. Если $f \in P \cap S'$, то $Ff \in S'$, и при этом

$$(Ff)(\xi) = \Big(\sum_{\beta} \varphi[\beta]\delta(x-\beta), e^{2\pi i x\xi}\Big) = \sum_{\beta} \varphi[\beta] e^{2\pi i\beta\xi},$$

т. е. $\tilde{f}(\xi)$ — это периодическая функция из $\Pi \cap S'$.

Представим взаимоотношения введенных нами пространств и отображений в виде следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc}
R & \underset{I_{PR}}{\overset{I_{RP}}{\rightleftarrows}} & P \cap S' & \underset{\Phi_0\cdot}{\overset{(\Phi_0\cdot)^{-1}_{\text{пр}}=\mu*}{\rightleftarrows}} & C^{(\infty)} \cap S' \\
F_1 \uparrow\downarrow F_1^{-1} & & F^{-1} \uparrow\downarrow F & & F \uparrow\downarrow F^{-1} \\
T & \underset{\partial_Q}{\overset{(\partial_Q)^{-1}}{\rightleftarrows}} & \Pi \cap S' & \underset{\Phi_0*}{\overset{(\Phi_0*)^{-1}_{\text{пр}}=\lambda\cdot}{\rightleftarrows}} & \Phi = F^{-1}(C^{(\infty)}) \cap S'.
\end{array}$$

Здесь функция $\mu(x)$ — это многомерное ядро усреднения, $\lambda(x)$ — преобразование Фурье от $\mu(x)$. Операторы F_1, F_1^{-1} определяются с помощью формул

$$F_1 = I_{PR} \circ F^{-1} \circ \partial_Q^{-1}, \quad F_1^{-1} = \partial_Q \circ F \circ I_{RP}$$

и связывают обычные ряды Фурье с последовательностями их коэффициентов. Убедимся в этом.

Для любой функции φ из $\Pi \cap S$ имеем

$$(F^{-1}\varphi)(\xi) = \sum_{\beta} \int\limits_{[\beta,\beta+1]} \varphi(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx$$

$$= \sum_{\beta} \int\limits_{Q} \varphi(y+\beta)e^{-2\pi i y\xi}\,dy\, e^{-2\pi i\beta\xi} = \Big\{\sum_{\beta} e^{-2\pi i\beta\xi}\Big\} \int\limits_{Q} \varphi(y)e^{-2\pi i y\xi}\,dy$$

$$= (F^{-1}\Phi_0)(\xi) \int\limits_{Q} \varphi(y)e^{-2\pi i y\xi}\,dy = \sum_{\beta} \int\limits_{Q} \varphi(y)e^{2\pi i y\xi}\,dy\,\delta(\xi-\beta).$$

Отсюда и из определения F_1 следует, что F_1 действительно сопоставляет функции $\varphi(\xi)$ из T последовательность ее коэффициентов Фурье. Далее, если $\varphi[\beta] \in R$, то

$$F_1^{-1}(\varphi[\beta]) = \varphi(x) = \sum_{\beta} \varphi[\beta]e^{2\pi i\beta x}, \quad x \in Q.$$

Напомним известное свойство унитарности оператора F, рассматриваемого на $L_2(Q)$, т. е. равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{Q} |\varphi(x)|^2\,dx = \sum_{\beta} |\varphi[\beta]|^2.$$

Класс периодических дискретных функций с целочисленной матрицей периодов A обозначим через $\Pi^A \cap R$. Боронообразные функции с периодическими коэффициентами $\varphi[\beta]$ образуют пространство $C\Pi \cap P$. Класс функций вида $\sum \varphi[\beta]\delta(x - A\beta)$ обозначим через P^A. Наконец, совокупность решетчатых функций из P^A с B-периодическими коэффициентами обозначим через $C\Pi^B \cap P^A$.

Определим аналог преобразования Фурье на пространстве дискретных функций $\Pi^B \cap R$. Здесь B — невырожденная матрица с целочисленными коэффициентами. Пусть матрица A также невырожденная. Сопоставим функции $\varphi[\beta]$ из $\Pi^B \cap R$ обобщенную функцию из S', определяемую равенством

$$f(x) = \sum_{\beta} \varphi[\beta]\delta(x - A\beta). \tag{3.3}$$

Оператор соответствия (3.3) обозначим через I^A_{RP}, а обратный к нему через I^A_{PR}. Взаимоотношения введенных пространств и отображений изобразим в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi^B \cap R & \longrightarrow & C\Pi^B \cap P^A \\ {\scriptstyle F_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \Pi^{B^*} \cap R & \longleftarrow & C\Pi^{B^*} \cap P^{(AB)^{*-1}}. \end{array}$$

Дадим к ней необходимые пояснения. Прежде всего, докажем формулу

$$F(C\Pi^B \cap P^A) = C\Pi^{B^*} \cap P^{(AB)^{*-1}}, \tag{3.4}$$

где F — преобразование Фурье на S'.

Пусть $\varphi[\beta] \in \Pi^B \cap R$, а функционал $f(x)$ имеет вид (3.3). Тогда справедливо равенство

$$\tilde{f}(\xi) = \sum_{\beta} \varphi[\beta] e^{2\pi i A\beta\xi}. \tag{3.5}$$

Любой вектор $\beta \in \mathbb{Z}^n$ можно разложить в сумму $\beta = \alpha + B\gamma$, где $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}^n$ и $B^{-1}\alpha \in Q$. Условимся обозначать множество таких α через BQ. По условию $\varphi[\beta] = \varphi[\alpha]$. Имея это в виду, преобразуем (3.5) к эквивалентному виду

$$\tilde{f}(\xi) = \Big\{ \sum_{\alpha \in BQ} \varphi[\alpha] e^{2\pi i A\alpha\xi} \Big\} \Big\{ \sum_{\gamma} e^{2\pi i \gamma (AB)^* \xi} \Big\}. \tag{3.6}$$

Второй сомножитель, как уже отмечалось, совпадает с функцией

$$\sum_{\gamma} \delta((AB)^*\xi - \gamma).$$

Учитывая это, продолжим (3.6):

$$\tilde{f}(\xi) = \sum_{\gamma} \frac{1}{\det AB} \Big\{ \sum_{\alpha \in BQ} \varphi[\alpha] e^{2\pi i \alpha B^{*-1}\gamma} \Big\} \delta(\xi - (AB)^{*-1}\gamma).$$

Следовательно, $\tilde{f}(\xi) \in C\Pi^{B^*} \cap P^{(AB)^{*-1}}$. Обратное вложение устанавливается аналогично. Формула (3.4) доказана.

Таким образом, композиция $F_2 = I_{PR}^{(AB)^{*-1}} \circ F \circ I_{RP}^{A}$ трех уже определенных отображений переводит $\varphi[\beta] \in \Pi^B \cap R$ в функцию

$$\psi[\beta] = (\det AB)^{-1} \sum_{\alpha \in BQ} \varphi[\alpha] e^{2\pi i \alpha (B^*)^{-1} \beta} \in \Pi^{B^*} \cap R. \tag{3.7}$$

Эта композиция служит естественным аналогом преобразования Фурье на дискретных функциях. Обратный оператор

$$F_2^{-1} = I_{PR}^{A} \circ F^{-1} \circ I_{RP}^{(AB)^{*-1}}$$

преобразует $\psi[\beta]$ в $\varphi[\beta]$ по формуле

$$\varphi[\beta] = \left(F_2^{-1}\psi\right)[\beta] = \det A \sum_{\alpha \in B^* Q} \psi[\alpha] e^{-2\pi i \alpha B^{-1} \beta}. \tag{3.8}$$

Это равенство получается из (3.3) заменой A на $(AB)^{*-1}$, B на B^*, $+i$ на $-i$.

Дискретное преобразование Фурье, используемое в теории чисел, является частным случаем преобразования F_2, получающимся из общей формулы при $A = B^{-1}$ и $B = NI$ с натуральным N. Формулы (3.7), (3.8) при этом принимают вид

$$\psi[\beta] = \sum_{0 \le \alpha < N\mathbf{e}} \varphi[\alpha] e^{2\pi i \alpha \beta / N}, \quad \varphi[\beta] = N^{-n} \sum_{0 \le \alpha < N\mathbf{e}} \psi[\alpha] e^{-2\pi i \alpha \beta / N},$$

а равенство Парсеваля записывается следующим образом:

$$\sum_{0 \le \beta < N\mathbf{e}} |\varphi[\beta]|^2 = N^{-2n} \sum_{0 \le \beta < N\mathbf{e}} \sum_{0 \le \alpha < N\mathbf{e}} \sum_{0 \le \gamma < N\mathbf{e}} \psi[\alpha] \overline{\psi[\gamma]} e^{2\pi i (\gamma - \alpha)\beta / N}$$
$$= N^{-2n} \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} \psi[\alpha] \overline{\psi[\gamma]} \sum_{\beta} e^{2\pi i (\gamma - \alpha)\beta / N} = N^{-n} \sum_{\alpha} |\psi[\alpha]|^2.$$

Здесь через $\mathbf{e}$ обозначен вектор из $\mathbb{Z}^n$ с единичными координатами.

Глава IX

Оптимальные формулы

Из вида нормы в $L_2^{(m)*}$ функционала погрешности кубатурной формулы с узлами в точках решетки следует, что при фиксированном значении шага h и фиксированной решетке квадрат нормы функционала погрешности, являясь квадратичной функцией коэффициентов $c[\beta]$, имеет минимум, и притом единственный, при некотором конкретном значении $c[\beta] = c_0[\beta]$. Формула с коэффициентами $c_0[\beta]$, соответствующая этому минимуму, будет оптимальной.

В настоящей главе исследованы оптимальные формулы с заданной решеткой узлов. Показано, что задача оптимизации коэффициентов служит аналогом задачи о продолжении в $\mathbb{R}^n$ некоторой функции $f(x)$, заданной в области Ω, причем продолжении с минимальной нормой.

§ 1. Постановка задачи об оптимальных коэффициентах

Уравнения для коэффициентов оптимальной кубатурной формулы с заданной решеткой узлов были получены в гл. I, § 6. Напомним вид соответствующей системы:

$$\sum_{\gamma} c[\gamma] G_{hH}^{(m)}[\beta - \gamma] + \sum_{|\alpha|<m} \nu_\alpha (hH\beta)^\alpha = f(hH\beta), \quad hH\beta \in \overline{\Omega}, \tag{1.1}$$

$$c[\gamma] = 0, \quad hH\beta \notin \overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

$$h^n \sum_\gamma c[\gamma](hH\gamma)^\alpha = \int\limits_\Omega y^\alpha\, dy, \quad |\alpha| < m. \tag{1.3}$$

Здесь $G_{hH}^{(m)}[\beta] = h^n G(hH\beta)$, функция $(-1)^m G(x)$ — фундаментальное решение полигармонического уравнения, матрица H ортогональна и $\det H = 1$, а $f(y) = \int\limits_\Omega G(y-x)\, dx$. Такого рода уравнения в непрерывном случае, где вместо сумм стоят интегралы, носят название *уравнений Винера — Хопфа*.

Уравнения системы (1.1)–(1.3) предпочтительнее записать в сверточном виде:

$$G_{hH}^{(m)}[\beta] * c[\beta] + P_{m-1}[\beta] = f[\beta], \quad hH\beta \in \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

$$c[\beta] = 0, \quad hH\beta \notin \overline{\Omega}, \tag{1.5}$$

$$h^n \sum_\gamma c[\gamma](hH\gamma)^\alpha = f_\alpha, \quad |\alpha| < m. \tag{1.6}$$

Здесь $P_{m-1}[\beta]$ — многочлен степени не выше $m-1$, а

$$f_\alpha = \int\limits_\Omega y^\alpha\, dy, \quad f[\beta] = \int\limits_\Omega G(hH\beta - y)\, dy.$$

Систему уравнений (1.4)–(1.6) будем называть *системой B*. Рассмотрим соответствующую задачу.

Задача B_1. *Найти функцию $c[\beta]$ и многочлен $P_{m-1}[\beta]$, удовлетворяющие системе B, при заданных $f[\beta]$ и f_α.*

Первое слагаемое из (1.4) будем называть *дискретизованным полигармоническим потенциалом*. Этот потенциал представляет собой значения функции

$$w(x) = h^n \sum_\gamma c[\gamma] G(x - hH\gamma) \tag{1.7}$$

в точках $x = hH\beta$. Введя обобщенную боронообразную функцию

$$\overline{c}(x) = h^n \sum_\gamma c[\gamma]\delta(x - hH\gamma), \tag{1.8}$$

запишем функцию $w(x)$ в виде свертки:

$$w(x) = \overline{c}(x) * G(x). \tag{1.9}$$

Таким образом, дискретизованный потенциал $w[\beta]$ совпадает со значениями в точках решетки обычного полигармонического потенциала с плотностью $\overline{c}(x)$, соответствующей коэффициентам $c[\gamma]$ по формуле (1.8).

Из представления (1.9) вытекает важное заключение о поведении на бесконечности дискретизованного потенциала с финитной плотностью. Очевидно, что он допускает в точности такое же разложение в ряд полигармонических слагаемых в окрестности бесконечно удаленной точки, как и обычный полигармонический потенциал. Отличие состоит в том, что вместо значений функций от непрерывного аргумента в разложении дискретизованного потенциала участвуют их же значения в точках решетки.

Вместе с задачей B_1 полезно рассмотреть другую, которая служит непрерывным аналогом исходной.

Задача A_1. *Найти функцию $c(x)$ непрерывного аргумента $x \in \mathbb{R}^n$ и многочлен $P_{m-1}(x)$ степени ниже m, удовлетворяющие системе уравнений*

$$G(x) * c(x) + P_{m-1}(x) = f(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.10}$$

$$c(x) = 0, \quad x \notin \overline{\Omega}, \tag{1.11}$$

$$\int c(x) x^{\alpha}\, dx = f_{\alpha}, \quad |\alpha| < m. \tag{1.12}$$

Систему (1.10)–(1.12) назовем *системой А*. Задача A_1 представляет собой *задачу Винера — Хопфа*. Исследование задачи A_1 позволит нам найти ключ к решению задачи B_1, а также даст указание на некоторые качественные свойства самих решений.

Для простоты будем считать, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема $2m$ раз, а область Ω обладает кусочно гладкой границей. Уравнение (1.10) является уравнением в свертках первого рода, причем в задаче A_1 требуется найти решение этого уравнения, равное нулю вне Ω и обладающее заданными моментами порядка ниже m.

Вообще говоря, задача A_1, как мы сейчас покажем, не имеет ни непрерывного, ни даже суммируемого решения. Мы установим,

однако, что существует, и притом единственное, обобщенное решение этой задачи, служащее производными порядка $2m$ от некоторой функции $w \in W_2^{(m)}$.

Установим сначала отсутствие ограниченного решения в общем случае. Возьмем левую часть уравнения (1.10) в качестве новой неизвестной функции

$$u(x) = G(x) * c(x) + P_{m-1}(x),$$

и пусть $v(x) = G(x) * c(x)$.

Внутри области Ω функция $u(x)$ принимает заданные значения. Всюду она отличается на многочлен $P_{m-1}(x)$ от функции $v(x)$, которая служит полигармоническим потенциалом для плотности $c(x)$, обращающейся в нуль вне Ω. Поэтому $v(x)$, а с нею и $u(x)$ — полигармонические вне Ω функции. Задачу нахождения $u(x)$ назовем *задачей* A_2.

Если бы нашлась ограниченная функция $c(x)$, удовлетворяющая системе A, то потенциал $v(x)$ был бы непрерывным с производными до порядка $2m-1$ включительно, что легко доказать обычным способом. Функция $u(x)$ должна была бы быть полигармонической вне Ω и принимать на $\partial\Omega$ предписанные значения вместе с производными до порядка $2m-1$ включительно. Но такого решения полигармоническое уравнение, вообще говоря, не имеет. Значит, решение $c(x)$ задачи A_1 в общем случае не ограничено.

Покажем теперь разрешимость задачи A_1 в обобщенных функциях. Сначала предположим, что все f_α при $|\alpha| < m$ равны нулю. Предлагаемый далее алгоритм позволяет представить обратный оператор, соответствующий системе A, в виде суперпозиции полигармонического оператора Δ^m с некоторым оператором продолжения функции $f(x)$ на всё $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что система A решена. Построим по функции $c(x)$ полигармонический потенциал $v(x) = G(x) * c(x)$ и рассмотрим его поведение в окрестности бесконечности. Используем для этого обычный прием. Пусть $|y| < A$, $|x| > 2A$. Тогда, разложив функцию $G(x-y)$ в ряд Тейлора по переменной y, получим

$$\begin{aligned} v(x) &= \int G(x-y)c(y)\,dy \\ &= \sum_\alpha \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha G(x) \int c(y)y^\alpha\,dy = z(x) + w(x), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$z(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha G(x) \int c(y) y^\alpha \, dy, \tag{1.14}$$

$$w(x) = \sum_{|\alpha|\geq m} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha G(x) \int c(y) y^\alpha \, dy. \tag{1.15}$$

Каждое слагаемое в рядах (1.13)–(1.15) представляет собой полигармоническую функцию в рассматриваемой окрестности бесконечности. В силу финитности $c(y)$ ряды (1.13) и (1.15) при достаточно большом A сходятся абсолютно и равномерно.

Будем говорить, что функция $z(x)$ представляет собой сумму конечного числа «ненужных» членов задачи A_2, а $w(x)$ содержит лишь «нужные» члены. Согласно предположению $f_\alpha = 0$ при $|\alpha| < m$, и, значит, $z(x)$ тождественно нулевая. Таким образом, разложение (1.13) функции $v(x)$ состоит только из нужных членов задачи A_2. При этом согласно теореме V.1 производные порядка l от $v(x)$ для достаточно больших $|x|$ растут не быстрее, чем $|x|^{m-n-l}$ в случае нечетного n или $l > m - n$ и не быстрее, чем $|x|^{m-n-l} \ln |x|$ при четном n, $n \leq m - l$.

Таким образом, потенциал $v(x)$ принадлежит пространству $W_2^{(m)}$ и удовлетворяет при $|x| > A$ следующей оценке:

$$|v(x) - z(x)| \leq C \begin{cases} |x|^{m-n}, & \text{если } n \text{ нечетно или } n > m, \\ |x|^{m-n} \ln |x|, & \text{если } n \text{ четно и } n \leq m. \end{cases} \tag{1.16}$$

Возьмем произвольную функцию $y(x)$ из $W_2^{(m)}$, отличающуюся от $f(x)$ внутри Ω на полиномиальное слагаемое степени $m-1$. Пусть, кроме того, $y(x)$ удовлетворяет в окрестности бесконечно удаленной точки неравенствам (1.16) и не совпадает с $v(x)$. Докажем, что

$$\left\| y \mid L_2^{(m)} \right\| > \left\| v \mid L_2^{(m)} \right\|. \tag{1.17}$$

Заметим, что внутри Ω функции $y(x)$ и $v(x)$ отличаются друг от друга на полином $Q_{m-1}(x)$ степени $m - 1$. Положим $u(x) = v(x) + Q_{m-1}(x)$ и сравним нормы $\left\| y \mid L_2^{(m)} \right\|$ и $\left\| u \mid L_2^{(m)} \right\|$.

Образуем семейство функций $u_\lambda(x) = u(x)+\lambda(y(x)-v(x))$. Ясно, что каждая из них принадлежит пространству $W_2^{(m)}$. Рассмотрим квадрат нормы u_λ в $L_2^{(m)}$:

$$\left\|u_\lambda \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|u \mid L_2^{(m)}\right\|^2 + 2\lambda(u, y-u)_m + \lambda^2\left\|y-u \mid L_2^{(m)}\right\|^2.$$

Интеграл, задающий скалярное произведение $(u, y-u)_m$, можно брать не по всему пространству, а лишь по дополнению Ω_* области Ω в $\mathbb{R}^n$:

$$(u, y-u)_m = \int\limits_{\Omega_*} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha (y-u)\, dx. \tag{1.18}$$

Это равенство справедливо, так как внутри Ω функции $y(x)$ и $u(x)$ совпадают. Применив к правой части (1.18) формулу Грина и заметив, что на границе Ω все производные от разности $y-u$ до порядка $m-1$ равны нулю, а внутри Ω_* функция $u(x)$ полигармоническая, получим

$$(u, y-u)_m = (-1)^m \int\limits_{\Omega_*} (y-u)\Delta^m u\, dx = 0.$$

Таким образом, функции $u(x)$ и $(y-u)(x)$ ортогональны в $L_2^{(m)}$. Значит, на вещественной прямой λ единственной стационарной точкой функции $\left\|u_\lambda \mid L_2^{(m)}\right\|^2$ является нуль. Вторая производная по λ от $\left\|u_\lambda \mid L_2^{(m)}\right\|^2$ в нуле строго положительна. Поэтому $\lambda = 0$ — точка минимума. В частности,

$$\left\|u_0 \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|u \mid L_2^{(m)}\right\|^2 < \left\|u_1 \mid L_2^{(m)}\right\|^2 = \left\|y \mid L_2^{(m)}\right\|^2.$$

Искомое неравенство (1.17) получено, и тем самым полигармонический потенциал $v(x)$ является в пространстве $L_2^{(m)}$ продолжением функции $f(x)$ на всё $\mathbb{R}^n$, имеющим наименьшую норму среди всех продолжений рассматриваемого класса.

Задачу о продолжении $f(x)$ можно поставить независимо, т. е. без обращения к системе A:

Задача T_c. *Требуется найти функцию $v(x)$ из $W_2^{(m)}$, отличающуюся от $f(x)$ внутри Ω на полином степени не выше $m-1$, полигармоническую вне Ω и удовлетворяющую оценке* (1.16) *в окрестности бесконечности.*

Решение такой задачи, как несложно доказать вариационным методом, существует и единственно.

Пусть функция $v(x)$ найдена как решение рассматриваемой задачи продолжения функции $f(x)$. Тогда соответствующий полином $P_{m-1}(x)$ можно найти из условия гладкости $v(x)$ и ее производных до порядка $m-1$ в точках границы Ω. После этого можно положить

$$c(x) = \Delta^m v(x) = \Delta^m u(x). \tag{1.19}$$

Полученная обобщенная функция $c(x)$ будет автоматически ортогональна всем многочленам степени ниже m, поскольку $c(x)$ финитна, а потенциал $v(x) = G(x) * c(x)$ не содержит ненужных членов в разложении (1.13) вблизи бесконечности. Таким образом, разрешимость системы A в обобщенных функциях доказана.

Общий случай, когда в системе A числа f_α ненулевые, сводится к уже рассмотренному стандартной заменой. Пусть $\overline{c}(x)$ определена равенством (1.8), а коэффициенты $c[\gamma]$ удовлетворяют (1.2), (1.3). Тогда разность $c_*(x) = c(x) - \overline{c}(x)$ решает систему A с нулевыми f_α при $|\alpha| < m$ и измененным первым уравнением. Изменение состоит лишь в том, что из $f(x)$ вычитается потенциал вида $G(x) * \overline{c}(x)$.

Пусть $v(x)$ — решение задачи о продолжении, а $u(x)$ получается как сумма $v(x)$ и полинома $P_{m-1}(x)$. Вычислим $\Delta^m u(x)$ в терминах обобщенных функций. Пусть $\varphi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема. По определению $\Delta^m u(x)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\begin{aligned}\int \Delta^m u(x)\varphi(x)\,dx &= \int u(x)\Delta^m\varphi(x)\,dx \\ &= \int\limits_{\Omega} u(x)\Delta^m\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} u(x)\Delta^m\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в классическом смысле каждое из выражений, стоящих справа, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}&(\Delta^m u(x), \varphi(x)) \\ &= \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\Delta^m u(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \varphi(x)\Delta^m u(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} \chi_j(x)\frac{\partial^j\varphi}{\partial\nu^j}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Здесь ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\chi_j(x)$ выражаются через скачки соответствующих производных функции $u(x)$, возникающие при переходе через границу $\partial\Omega$. Правая часть последнего равенства служит определением левой. Заметим еще, что в нашем случае

$$\Delta^m u(x) = \overline{\Delta^m f(x)} = \begin{cases} \Delta^m f(x), & \text{если} \quad x \in \Omega, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Таким образом,

$$c(x) = \Delta^m u(x) = \overline{\Delta^m f(x)} + \sum_{j=0}^{m-1} \rho_j(x),$$

где $\rho_j(x)$ — обобщенная функция, сосредоточенная на границе $\partial\Omega$. Скалярное произведение (ρ_j, ψ) для $\psi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ определено формулой

$$(\rho_j(x), \psi(x)) = \int\limits_{\partial\Omega} \chi_j(x) \frac{\partial^j \psi}{\partial \nu^j}(x)\, dx,$$

т. е. является поверхностным потенциалом с плотностью $\chi_j(x)$.

Из результатов, касающихся задачи A_1, следуют некоторые эвристические соображения, позволяющие предугадать характер изменения функции $c[\gamma]$ — решения системы B. Можно ожидать, что функция $c(x)$ служит пределом при $h \to 0$ для функции дискретной переменной $c[\gamma]$. При этом внутри области Ω функция $c[\gamma]$ будет «гладко» зависеть от переменной γ, а вблизи границы будет осциллировать, приближаясь к разностному оператору, аналогичному линейной комбинации нормальных производных, входящей в выражение обобщенной функции $\Delta^m u(x)$.

Перейдем к фактическому решению системы B, для которого мы предложим способ, аналогичный способу решения системы A. Главная его идея состоит в подходящей замене неизвестной функции. Именно, вместо $c[\beta]$ введем в рассмотрение дискретизованный полигармонический потенциал $v[\beta] = G_{hH}^{(m)}[\beta] * c[\beta]$ и соответствующую ему сумму $u[\beta] = v[\beta] + P_{m-1}[\beta]$. Функция $v[\beta]$ оказывается решением некоторой задачи продолжения, которую будем называть *задачей* B_2.

В такой постановке нужно будет уметь выражать $c[\beta]$ через $v[\beta]$ или $u[\beta]$, т. е. находить оператор, обратный оператору дискретизованного потенциала.

§ 2. Фундаментальное решение сверточного уравнения

Займемся построением и изучением свойств обращения оператора свертки с функцией $G_{hH}^{(m)}[\beta] = h^n G(hH\beta)$, т. е. свойств такой функции дискретной переменной $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] * G_{hH}^{(m)}[\beta] = \delta[\beta] \tag{2.1}$$

и экспоненциально убывает на бесконечности:

$$\left|D_{hH}^{(m)}[\beta]\right| \leq C|\beta|^{1/2} e^{-s|\beta|}. \tag{2.2}$$

Это позволит нам выразить $c[\beta]$ в виде $c[\beta] = D_{hH}^{(m)}[\beta] * v[\beta]$ и тем самым преобразовать задачу об отыскании коэффициентов оптимальных формул в задачу об отыскании неизвестной функции $v[\beta]$.

Для отыскания оператора, обратного к дискретизованному потенциалу, воспользуемся аппаратом преобразования Фурье в пространстве S', где S — известное пространство Шварца.

От функций дискретной переменной перейдем к боронообразным обобщенным функциям. Положим

$$\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x) = \sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta]\delta(x - hH\beta), \tag{2.3}$$

$$\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x) = \sum_{\beta} G_{hH}^{(m)}[\beta]\delta(x - hH\beta). \tag{2.4}$$

Если функция $\varphi(x)$ принадлежит S, то

$$\left(\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x), \varphi(x)\right) = \sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta]\varphi(hH\beta). \tag{2.5}$$

В силу экспоненциального убывания $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ на бесконечности числовой ряд (2.5) сходится и непрерывен по φ относительно сходимости в S. Таким образом, ряд $\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x)$ представляет собой функционал из S'.

Сложнее обстоит дело с функцией $\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x)$. Определить ее равенством, аналогичным (2.5) для произвольной $\varphi \in S$, не всегда возможно, ибо коэффициент $G_{hH}^{(m)}[\beta]$ может обращаться в бесконечность

при $\beta = 0$. Потребуем, чтобы пробная функция $\varphi(x) \in S$ имела в точке $x = 0$ нулевые производные до порядка $2m - 1$ включительно, а соответствующее подпространство S обозначим через $S(0 \mid 2m)$. Тогда для $\varphi \in S(0 \mid 2m)$ положим

$$\left(\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x), \varphi(x)\right) = \sum_{\beta \neq 0} G_{hH}^{(m)}[\beta]\varphi(hH\beta).$$

Ясно, что на $S(0 \mid 2m)$ это равенство задает линейный функционал, непрерывный в смысле сходимости пространства S. Этот функционал можно продолжить линейным непрерывным образом на всё S. Далее будем понимать под $\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x)$ какое-нибудь из таких продолжений. Таким образом, обобщенная функция $\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x)$ также принадлежит пространству S'.

Вместе с задачей (2.1)–(2.3) рассмотрим следующую: *найти функцию $\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x)$ с экспоненциально убывающими коэффициентами, являющуюся решением сверточного уравнения*

$$\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x) * \widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x) = \delta(x). \tag{2.6}$$

Задачи (2.1), (2.2) и (2.6) разрешимы или нет одновременно, и в первом случае их решения связаны между собой равенством (2.3). Докажем это.

Пусть решению $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ задачи (2.1), (2.2) соответствует боронообразная функция $\widetilde{D}_{hH}^{(m)}(x)$, тогда для любой $\varphi(x) \in S$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \sum_{\alpha}\left(D_{hH}^{(m)}[\alpha] * G_{hH}^{(m)}[\alpha]\right)\varphi(hH\alpha)\\ &= \sum_{\alpha}\Big(\sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta]G_{hH}^{(m)}[\alpha-\beta]\Big)\varphi(hH\alpha).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Функции $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ и $\varphi(hH\beta)$ убывают на бесконечности быстрее любого полинома, а $G_{hH}^{(m)}[\beta]$ растет при этом как некоторая степень $|\beta|$. Поменяв местами суммирования по α и β в равенстве (2.7), продол-

жим его следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta]\Big(\sum_{\gamma} G_{hH}^{(m)}[\gamma]\varphi(hH(\beta+\gamma))\Big)\\ &= \sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta]\big(\bar{G}_{hH}^{(m)}(y), \varphi(hH\beta+y)\big)\\ &= \big(\bar{D}_{hH}^{(m)}(x)\bar{G}_{hH}^{(m)}(y), \varphi(x+y)\big) = \big(\bar{D}_{hH}^{(m)} * \bar{G}_{hH}^{(m)}, \varphi\big).\end{aligned}$$

Это и означает, что функция $\bar{D}_{hH}^{(m)}(x)$ удовлетворяет уравнению (2.6). Обратное утверждение доказывается аналогично.

Применив к обеим частям (2.6) преобразование Фурье, получим следующее уравнение:

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p)\widetilde{\bar{G}_{hH}^{(m)}}(p) = 1. \tag{2.8}$$

Если у него существует решение — не только периодическая, но и аналитическая функция $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$, то обратное преобразование Фурье переведет $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ в боронообразную функцию $\bar{D}_{hH}^{(m)}(x)$ с экспоненциально убывающими коэффициентами $D_{hH}^{(m)}[\beta]$. Мы убедимся в этом далее, а пока построим нужную нам функцию $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ в явном виде.

Рассмотрим следующий ряд:

$$S_{hH}^{(m)}(p) = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|p-p_\gamma|^{2m}}, \tag{2.9}$$

где

$$p_\gamma = h^{-1}H^{*-1}\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.10}$$

Будем считать, что $m > n/2$, где n — размерность пространства переменных $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Это неравенство, как несложно убедиться, обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.9) во всех точках $p \in \mathbb{C}^n$ за исключением точек вида (2.10). В каждой же из точек (2.10) сумма $S_{hH}^{(m)}(p)$ имеет особенность. Положим теперь

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = \frac{1}{S_{hH}^{(m)}(p)}. \tag{2.11}$$

В частности, если $p = p_\gamma$, то функция $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ равна нулю.

Лемма IX.1. Функция $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ периодическая по p с матрицей периодов $h^{-1}H^{*-1}$, вещественная и аналитическая при всех $p \in \mathbb{R}^n$. Ее нулями служат точки (2.10), а при остальных вещественных p она положительна. В окрестности нуля справедливо представление

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = (-1)^m (2\pi|p|)^{2m} \left\{ 1 + \sum_{|\alpha|>0} \frac{b_\alpha}{\alpha!}(hp)^\alpha \right\}. \qquad (2.12)$$

Доказательство. Пусть сначала $p' \in \mathbb{R}^n$ не совпадает ни с одной из точек p_γ. В окрестности такой точки p' ряд (2.9) для $S_{hH}^{(m)}(p)$ сходится абсолютно и равномерно, так как его члены убывают не медленнее, чем $|\gamma|^{-2m} \le |\gamma|^{-n-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Каждое слагаемое в правой части (2.9) представляет собой строго положительную аналитическую функцию. Их сумма, т. е. функция $S_{hH}^{(m)}(p)$, а следовательно, и частное $\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = 1/S_{hH}^{(m)}(p)$, также положительные и аналитические функции в окрестности точки p'.

Прибавление к p какого-нибудь слагаемого вида p_γ влечет за собой лишь перестановку слагаемых в бесконечном ряде, выражающем $S_{hH}^{(m)}(p)$. Отсюда вытекает периодичность $S_{hH}^{(m)}(p)$, а следовательно, и $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$.

Перейдем к исследованию поведения $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ в окрестности точек p_γ. Благодаря периодичности, достаточно рассмотреть лишь одну из них, например начало координат. Из выражения (2.9) для функции $S_{hH}^{(m)}(p)$ получим

$$S_{hH}^{(m)}(p) = \frac{(-1)^m}{(2\pi|p|)^{2m}} \left\{ 1 + |p|^{2m} \sum_{|\gamma|>0} \frac{1}{|p-p_\gamma|^{2m}} \right\}.$$

В окрестности начала координат каждое слагаемое ряда, стоящего в фигурных скобках, является аналитической функцией. Следовательно,

$$S_{hH}^{(m)}(p) = \frac{(-1)^m}{(2\pi|p|)^{2m}} \left\{ 1 + \sum_{|\alpha|>0} \frac{c_\alpha}{\alpha!}(hp)^\alpha \right\},$$

где выражение в фигурных скобках — это аналитическая функция, обращающаяся в единицу в начале координат. Из этой формулы и равенства (2.11) следует (2.12). В фигурной скобке справа в (2.12)

стоит аналитическая функция, обращающаяся в единицу в начале координат, т. е. $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ является в окрестности этой точки аналитической функцией.

Лемма IX.1 доказана.

Разложим функцию $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ в ряд Фурье:

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = \sum_{\beta} D_{hH}^{(m)}[\beta] e^{-i2\pi hpH\beta}, \tag{2.13}$$

где p изменяется в пределах фундаментального параллелепипеда Ω_0, соответствующего матрице $h^{-1}H^{*-1}$. Коэффициенты разложения (2.13) представляются следующими интегралами:

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] = \frac{1}{|\Omega_0|} \int\limits_{\Omega_0} \Gamma_{hH}^{(m)}(p) e^{i2\pi\beta hH^* p}\, dp. \tag{2.14}$$

Из определения (2.11) функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ легко выводятся следующие два равенства:

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(-p) = \Gamma_{hH}^{(m)}(p), \quad \Gamma_{hH}^{(m)}(p) = h^{-2m}\Gamma_{H}^{(m)}(hp). \tag{2.15}$$

Разложив обе части каждого из них в ряд вида (2.13) и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим следующие соотношения:

$$D_{hH}^{(m)}[-\beta] = D_{hH}^{(m)}[\beta], \quad D_{hH}^{(m)}[\beta] = h^{-2m} D_{H}^{(m)}[\beta]. \tag{2.16}$$

Исследуем поведение на бесконечности функции $D_{H}^{(m)}[\beta]$. Справедлива следующая

Лемма IX.2. *Функция $D_{H}^{(m)}[\beta]$ убывает экспоненциально с ростом $|\beta|$, т. е. существуют положительные постоянные C и s такие, что для всех β имеет место неравенство*

$$\left|D_{H}^{(m)}[\beta]\right| \le C|\beta|^{1/2} e^{-s|\beta|}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Сделав в интеграле (2.14) при $h = 1$ замену переменной $p = H^{*-1}q$ и обозначив через $\Gamma^{(m)}(q)$ функцию $\Gamma_{H}^{(m)}(H^{*-1}q)$, получим

$$D_{H}^{(m)}[\beta] = \int\limits_{Q} \Gamma^{(m)}(q) e^{i2\pi\beta q}\, dq. \tag{2.18}$$

Здесь Q — единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Функция $\Gamma^{(m)}(q)$ и все ее производные периодичны с единичной матрицей периодов. Поэтому для любого мультииндекса α имеет место формула

$$\int\limits_Q \Gamma^{(m)}(q) D^\alpha(e^{i2\pi\beta q})\,dq = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q D^\alpha\Gamma^{(m)}(q)e^{i2\pi\beta q}\,dq. \qquad (2.19)$$

Пусть β — мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами. Рассмотрим соответствующий ему дифференциальный оператор, действующий на функциях переменной q:

$$P_\beta(D) = \sum_{j=1}^n \beta_j D_j.$$

Здесь $D_j = \partial/\partial q_j$. Несложно убедиться в том, что

$$P_\beta(D)e^{i2\pi\beta q} = i2\pi|\beta|^2 e^{i2\pi\beta q},$$
$$P_\beta^k(D) = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j D_j\right)^k = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\beta^\alpha D^\alpha. \qquad (2.20)$$

Действие k-й степени оператора $P_\beta(D)$ на функцию $\Gamma^{(m)}(q)$ можно оценить по модулю следующим образом:

$$\left|P_\beta^k(D)\Gamma^{(m)}(q)\right| \le \left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\beta^{2\alpha}\right)^{1/2}\left(\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\Gamma^{(m)}(q)\right|^2\right)^{1/2} \qquad (2.21)$$

Пользуясь поочередно соотношениями (2.19), (2.20), а также неравенством (2.21), несложно вывести из (2.18) следующую оценку, справедливую для любого натурального k:

$$\left|D_H^{(m)}[\beta]\right| = \left(\frac{1}{2\pi|\beta|^2}\right)^k\left|\int\limits_Q e^{i2\pi\beta q}P_\beta^k(D)\Gamma^{(m)}(q)\,dq\right|$$
$$\le \frac{1}{(2\pi|\beta|)^k}\left(\int\limits_Q \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}|D^\alpha\Gamma^{(m)}(q)|^2\,dq\right)^{1/2} \qquad (2.22)$$

Выберем число R так, чтобы в любой точке $q_0 \in \overline{Q}$ ряд Тейлора функции $\Gamma^{(m)}(q)$ сходился в поликруге

$$S(q_0, R) = \left\{q \in \mathbb{C}^n : \left|q_i - q_i^0\right| < R\right\},$$

сама функция $\Gamma^{(m)}(q)$ была при этом непрерывной в замыкании $\overline{S}(q_0, R)$. Существование положительного R с указанным свойством следует из аналитичности в точках $\mathbb{R}^n$ периодической функции $\Gamma^{(m)}(q)$. Для любой точки q_0 из Q имеет место неравенство Коши

$$\left|\frac{D^\alpha \Gamma^{(m)}(q_0)}{\alpha!}\right| \le R^{-|\alpha|} \max_{q \in \overline{S}(q_0, R)} |\Gamma^{(m)}(q)|.$$

Подставив эту оценку в (2.22), после несложных выкладок получим

$$\left|D_H^{(m)}[\beta]\right| \le \frac{1}{(2\pi|\beta|)^k} \left(\frac{\sqrt{n}}{R}\right)^k k! \max_{q \in S(\overline{Q}, R)} |\Gamma^{(m)}(q)|. \tag{2.23}$$

Множество $S(\overline{Q}, R)$ в правой части (2.23) представляет собой объединение поликругов $S(q_0, R)$ по всем $q_0 \in \overline{Q}$.

Полученная последовательность мажорант величины $\left|D_H^{(m)}[\beta]\right|$, как несложно убедиться, монотонно убывает при $k \le k_0(\beta)$, где $k_0(\beta) = [2\pi|\beta|R/\sqrt{n}]$, а затем монотонно возрастает. Минимальный член этой последовательности имеет номер $k_0(\beta)$. Используя формулу Стирлинга, несложно подсчитать этот минимум при больших $|\beta|$. Сделав это, получим искомую оценку (2.17), в которой $s = 2\pi R/\sqrt{n}$.

Лемма IX.2 доказана.

Построив по формуле (2.3) соответствующую $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ бороноообразную функцию $\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)$, докажем справедливость сверточного уравнения (2.6). Взяв от обеих его частей преобразование Фурье, приходим к эквивалентному соотношению (2.8).

Убедимся, что для любой функции $\varphi(p) \in S$ имеет место интегральное равенство

$$\int \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \widetilde{\overline{G}_{hH}^{(m)}}(p) \varphi(p)\, dp = \int \varphi(p)\, dp. \tag{2.24}$$

Обозначим через $\widetilde{\psi}(p)$ произведение $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)\varphi(p)$. Бесконечная дифференцируемость и периодичность функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ позволяют утверждать, что $\widetilde{\psi}(p)$ принадлежит S. При этом в окрестности каждой из точек p_γ вида (2.10) функция $\widetilde{\psi}(p)$ представима в виде произведения $(2\pi|p-p_\gamma|)^{2m}$ на некоторый бесконечно дифференцируемый сомножитель. Обратное преобразование Фурье к функции $\widetilde{\psi}(p)$ — это функция $\psi(x)$ также из S. Все ее производные до порядка $2m-1$ включительно в любой из точек p_γ равны нулю. В силу определения $\widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x)$ для $\psi(x)$ имеет место равенство

$$\int \widetilde{G}_{hH}^{(m)}(x)\psi(x)\,dx = \sum_\beta G_{hH}^{(m)}[\beta]\psi(hH\beta) = (G(x)\Phi_{hH}(x), \psi(x)). \tag{2.25}$$

Через $\Phi_{hH}(x)$ здесь обозначена следующая обобщенная функция:

$$\Phi_{hH}(x) = \sum_\beta h^n\delta(x-hH\beta) = \Phi_0(h^{-1}H^{-1}x).$$

Применив к первой и последней частям формулы (2.25) равенство Парсеваля, получим

$$\int \widetilde{\widetilde{G}_{hH}^{(m)}}(p)\widetilde{\psi}(p)\,dp = (\widetilde{G}(p) * \widetilde{\Phi}_{hH}(p), \widetilde{\psi}(p)). \tag{2.26}$$

Преобразование Фурье функции $\Phi_{hH}(x)$, как известно, задается формулой

$$\widetilde{\Phi}_{hH}(p) = \sum_\beta \delta(p - h^{-1}H^{*-1}\beta).$$

Подставив это выражение в (2.26), придем к равенству

$$\int \widetilde{\widetilde{G}_{hH}^{(m)}}(p)\widetilde{\psi}(p)\,dp = \sum_\gamma \int \widetilde{G}(p-p_\gamma)\widetilde{\psi}(p)\,dp. \tag{2.27}$$

Далее, вычисляя преобразование Фурье от обеих частей уравнения

$$\Delta^m G(x) = (-1)^m\delta(x),$$

видим, что в любой точке $p \neq p_\gamma$ функция $\widetilde{G}(p - p_\gamma)$ определяется равенством

$$\widetilde{G}(p - p_\gamma) = \frac{1}{(2\pi|p - p_\gamma|)^{2m}}.$$

Учитывая это, а также поведение функции $\widetilde{\psi}(p)$ в окрестности точек p_γ, приходим к выводу, что все интегралы в (2.27) существуют и конечны, а соответствующий ряд абсолютно сходится. При этом

$$\sum_\gamma \int \widetilde{G}(p - p_\gamma)\widetilde{\psi}(p)\,dp = \int \left(\sum_\gamma \frac{1}{(2\pi|p - p_\gamma|)^{2m}}\right)\widetilde{\psi}(p)\,dp$$
$$= \int S_{hH}^{(m)}(p)\Gamma_{hH}^{(m)}(p)\varphi(p)\,dp = \int \varphi(p)\,dp.$$

Отсюда и из (2.27) следует справедливость равенств (2.24) и (2.6).

Таким образом, функция $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ является решением исходной задачи (2.1), (2.2).

§ 3. Дискретный аналог полигармонического оператора

В пространстве дискретных функций свертка $c[\beta] * G_{hH}^{(m)}[\beta]$ аналогична полигармоничному потенциалу. В этом смысле дифференциальное уравнение

$$\Delta^m(x) * G(x) \equiv \Delta^m G(x) = (-1)^m \delta(x)$$

соответствует формуле (2.1). Следовательно, свертка $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$ является естественным дискретным аналогом полигармонического оператора.

Свойства операторов $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$ и $\Delta^m(x)$ во многом сходны, но есть и различия. Например, носителем $\Delta^m(x)$ служит одна точка, т. е. $\Delta^m(x)$ — финитная обобщенная функция. Носитель же функции $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ некомпактен, и вместо обращения в нуль в окрестности бесконечности она лишь экспоненциально убывает при возрастании $|\beta|$.

В теории конечных разностей обычно используются финитные аналоги полигармонического оператора. Функция $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ — это аналог того же оператора, но построенный другим способом и тем самым не финитный. Рассмотрим некоторые его свойства.

Теорема IX.1. Функция $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ представима в виде следующей суммы:

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D_{hH}^{\alpha}[\beta] * D_{hH}^{\alpha}[-\beta], \tag{3.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, а сверточные сомножители $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ вещественны и экспоненциально убывают с ростом $|\beta|$.

Доказательство. Вместе с функцией $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$, определенной в § 2, рассмотрим следующую сумму:

$$\Delta_{hH}^{(m)}(p) = (-1)^m \left(\frac{2}{h}\right)^{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \pi q_i\right)^m, \tag{3.2}$$

где $q = hH^*p$. Напомним, что матрица H ортогональна.

Обе рассматриваемые функции четны, аналитичны в $\mathbb{R}^n$, периодические с матрицей периодов $h^{-1}H^{*-1}$ и имеют в окрестности начала координат нуль порядка $2m$. Все эти утверждения о свойствах функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ доказаны в лемме IX.1, а их справедливость для функции $\Delta_{hH}^{(m)}(p)$ очевидна. Поведение $\Delta_{hH}^{(m)}(p)$ в окрестности нуля ясно из следующих равенств:

$$\Delta_{hH}^{(m)}(p) = (-1)^m (2/h)^{2m} |\pi q|^{2m} (1 + f(p)) = (-1)^m (2\pi|p|)^{2m} (1 + f(p)). \tag{3.3}$$

Здесь $f(p)$ — некоторая аналитическая в окрестности нуля функция, причем $f(0) = 0$.

Отношение $R(p)$ функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ к $\Delta_{hH}^{(m)}(p)$ представляет собой аналитическую строго положительную в $\mathbb{R}^n$ функцию с матрицей периодов $h^{-1}H^{*-1}$. Если точка p не совпадает ни с одной из точек p_γ, определенных равенством (2.10), отмеченные свойства частного $R(p)$ легко следуют из аналогичных свойств делимого и делителя. Если же p совпадает с p_γ при некотором целом γ, все сказанное о $R(p)$ вытекает из равенств (2.12) и (3.3).

В окрестности начала координат, как следует из (2.12) и (3.3), функция $R(p)$ представима в виде суммы

$$R(p) = 1 + \sum_{|\alpha|>0} \frac{c_\alpha}{\alpha!} (hp)^\alpha, \tag{3.4}$$

т. е. $R(p)$ аналитична и равна единице при $p = 0$.

Отмеченные свойства функции $R(p)$ позволяют утверждать, что равномерно по всем вещественным p ее можно оценить сверху и снизу положительными постоянными A_1 и A_2:

$$0 < A_1 \le R(p) \le A_2 < \infty, \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Таким образом, квадратный корень $F(p)$ из функции $R(p)$ представляет собой аналитическую в $\mathbb{R}^n$ функцию. Имея это в виду и пользуясь известной формулой полинома

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \xi^{2\alpha},$$

получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{hH}^{(m)}(p) &= (-1)^m \left(\frac{2}{h}\right)^{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \pi q_i\right)^m F^2(p) \\ &= (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left[\Gamma_{hH}^{\alpha}(p)\right]^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь через $\Gamma_{hH}^{\alpha}(p)$ обозначена следующая функция:

$$\Gamma_{hH}^{\alpha}(p) = (2/h)^m \sin^{\alpha_1} \pi q_1 \ldots \sin^{\alpha_n} \pi q_n F(p). \tag{3.7}$$

Из определения заключаем, что $\Gamma_{hH}^{\alpha}(p)$ аналитична и вещественна. Несложно проверить также, что эта функция удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered} \Gamma_{hH}^{\alpha}(p + p_\gamma) = (-1)^{\alpha\gamma} \Gamma_{hH}^{\alpha}(p), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^n, \\ \Gamma_{hH}^{\alpha}(-p) = (-1)^m \Gamma_{hH}^{\alpha}(p), \quad \Gamma_{hH}^{\alpha}(p) = h^{-m} \Gamma_{H}^{\alpha}(ph). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Положим

$$\Lambda_{hH}^{\alpha}(p) = i^m e^{i\pi p h H \alpha} \Gamma_{hH}^{\alpha}(p). \tag{3.9}$$

Функция $\Lambda_{hH}^{\alpha}(p)$ не только аналитична, но и периодическая с периодом $h^{-1}H^{*-1}$. Как следует из равенств (3.4) и (3.7), в окрестности начала координат эта функция представима в виде

$$\Lambda_{hH}^{\alpha}(p) = (i2\pi)^m (H^* p)^\alpha \left(1 + \sum_{|\gamma|>0} \frac{d_\gamma}{\gamma!} (hp)^\gamma\right). \tag{3.10}$$

Из равенств (3.6), (3.9) и (3.10) следует, что при вещественных p функция $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ разложима в сумму:

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \Lambda_{hH}^{\alpha}(p)\overline{\Lambda_{hH}^{\alpha}}(p). \tag{3.11}$$

Разложим каждый из сомножителей $\Lambda_{hH}^{\alpha}(p)$ в этой формуле в ряд Фурье:

$$\Lambda_{hH}^{\alpha}(p) = \sum_{\beta} D_{hH}^{\alpha}[\beta] e^{-i2\pi hpH\beta}. \tag{3.12}$$

Коэффициенты $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ этого разложения экспоненциально убывают на бесконечности. Это доказывается с помощью рассуждений, аналогичных примененным в лемме IX.2.

Выразив коэффициент $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ из равенства (3.12) и воспользовавшись представлением (3.9), получим

$$D_{hH}^{\alpha}[\beta] = i^m \int\limits_{\Omega_0} \Gamma_{hH}^{\alpha}(p) e^{i\pi phH(\alpha+2\beta)}\, dp. \tag{3.13}$$

Подынтегральная функция здесь периодична с матрицей периодов $h^{-1}H^{*-1}$. Поэтому интегрирование в (3.13) можно производить по параллелепипеду $\Omega_{-\mathbf{e}}$, получающемуся из Ω_0 сдвигом на вектор $-\mathbf{e} = (-1, \ldots, -1)$. Сделав в соответствующем интеграле замену $p = -p'$, воспользуемся вторым из соотношений (3.8) и сложим результат с исходным равенством (3.13). Тогда $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ представится в случае четного m как косинус-преобразование Фурье, а в случае нечетного m — как синус-преобразование Фурье от некоторой вещественной функции. Таким образом, величины $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ вещественны. Подставив разложения (2.13), (3.12) в (3.11), получим требуемое равенство (3.1).

Теорема IX.1 доказана.

Приведем еще несколько свойств функций $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ из разложения (3.1).

Каждая из функций $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ как функция параметра h удовлетворяет соотношению

$$D_{hH}^{\alpha}[\beta] = h^{-m} D_{H}^{\alpha}[\beta],$$

т. е. является однородной функцией степени $-m$. Все функции $D^{\alpha}_{hH}[\beta]$ ортогональны любому многочлену степени ниже m:

$$\left[D^{\alpha}_{hH}[\beta],[\beta]^{\gamma}\right]=0,\quad |\gamma|<m, \tag{3.14}$$

а с одночленами степени m связаны соотношениями биортогональности

$$\left[D^{\alpha}_{hH}[\beta],[\beta]^{\gamma}\right]=\gamma!\delta^{\gamma}_{\alpha}. \tag{3.15}$$

Однородность функции $D^{\alpha}_{hH}[\beta]$ по переменной h доказывается так же, как однородность $D^{(m)}_{hH}[\beta]$. При этом полезно использовать последнее из равенств (3.8).

Рассмотрим соответствующую $D^{\alpha}_{H}[\beta]$ боронообразную функцию

$$\overline{D}^{\alpha}_{H}(x)=\sum_{\beta}D^{\alpha}_{H}[\beta]\delta(x-H\beta)$$

и вычислим ее свертку с произвольным одночленом x^{γ} степени меньше m. Согласно определению получим

$$x^{\gamma}*\overline{D}^{\alpha}_{H}(x)=\sum_{\beta}D^{\alpha}_{H}[\beta](x-H\beta)^{\gamma}. \tag{3.16}$$

Ясно, что ряд справа сходится абсолютно и равномерно по x в любой ограниченной области $\mathbb{R}^n$. Вычислим преобразование Фурье от свертки (3.16):

$$F\left(x^{\gamma}*\overline{D}^{\alpha}_{H}(x)\right)(p)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\gamma|}D^{\gamma}(p)\widetilde{\overline{D}^{\alpha}_{H}}(p). \tag{3.17}$$

Умножение функции $\varphi(p)$ на $D^{\gamma}(p)$ означает взятие производной D^{γ} от $\varphi(p)$ в начале координат. Заметим, что преобразование Фурье от $\overline{D}^{\alpha}_{H}(x)$ совпадает с функцией $\Lambda^{\alpha}_{H}(p)$, для которой установлено разложение (3.10). Продифференцировав равенство (3.10) γ раз и положив $p=0$, видим, что при $|\gamma|<m$ преобразование Фурье (3.17) тождественно равно нулю. Это возможно лишь в случае, когда все коэффициенты полинома от x в правой части (3.16) равны нулю, т. е. когда справедливы равенства

$$\sum_{\beta}D^{\alpha}_{H}[\beta](H\beta)^{\gamma}=0,\quad |\gamma|<m. \tag{3.18}$$

Матрица H ортогональна, и ее определитель равен единице. Поэтому функции вида $(H\beta)^\gamma$ образуют базис в пространстве полиномов дискретной переменной β степени, меньшей m. Это означает, что системы равенств (3.14) и (3.18) эквивалентны.

Отметим, что из разложения (3.1) и равенств (3.14) следует ортогональность функции $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полиномам степени меньше $2m$:

$$\sum_\beta D_{hH}^{(m)}[\beta][\beta]^\gamma = 0, \quad |\gamma| < 2m. \tag{3.19}$$

Как мы видим, свойства операторов свертки с $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ и $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ во многом совпадают со свойствами обычных разностных операторов $\Delta^{[m]}[\beta]$ и $\Delta^{[\alpha]}[\beta]$. Их отличие состоит лишь в том, что $\Delta^{[m]}[\beta]$ и $\Delta^{[\alpha]}[\beta]$ имеют финитные носители, а $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ и $D_{hH}^{\alpha}[\beta]$ лишь экспоненциально убывают с ростом $|\beta|$.

Более точное сравнение $D_{hH}^{\alpha}[\beta]*$ с разностным оператором $\Delta^{[\alpha]}[\beta]*$ можно получить, воспользовавшись представлением

$$D_{hH}^{\alpha}[\beta] = \Delta^{[\alpha]}[\beta] * F_{hH}^{(m)}[\beta + \alpha/2], \tag{3.20}$$

где

$$F_{hH}^{(m)}[\beta] = i^m \int\limits_{\Omega_0} F(p) e^{i2\pi p h H^* \beta}\, dp,$$

а функция $F(p)$ обозначает, как и раньше, квадратный корень из отношения функций $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ и $\Delta_{hH}^{(m)}(p)$. Равенство (3.20) получается из (3.7) после несложных выкладок. Отметим, что периодичность аналитической функции $F(p)$ обеспечивает экспоненциальное убывание $F_{hH}^{(m)}[\beta]$ с ростом $|\beta|$. Это утверждение доказывается по той же схеме, что и лемма IX.2.

Рассмотрим две билинейные формы, определенные на финитных функциях $u[\beta]$ и $v[\beta]$:

$$\begin{gathered}[u,v]_m^D = (-1)^m \left[D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta], v[\beta]\right] \equiv D(u,v), \\ [u,v]_m^\Delta = \sum_{|\alpha|=m} h^{-2m} \frac{m!}{\alpha!} [\Delta^{[\alpha]}[\beta] * u[\beta], \Delta^{[\alpha]}[\beta] * v[\beta]] \equiv \Delta(u,v).\end{gathered} \tag{3.21}$$

Здесь $\Delta^{[\alpha]}[\beta]*$ — оператор частной разности порядка α от функции дискретной переменной. Исследуем свойства форм $D(u,v)$ и $\Delta(u,v)$.

(а) *Для любых финитных функций $u[\beta]$, $v[\beta]$ и соответствующих им боронообразных функций*

$$\overline{u}(x) = \sum u[\beta]\delta(x - hH\beta), \quad \overline{v}(x) = \sum v[\beta]\delta(x - hH\beta)$$

справедливы соотношения

$$[u,v] = \frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} \widetilde{\overline{u}}(p)\widetilde{\overline{v}}(p)\,dp, \tag{3.22}$$

$$D(u,u) = \frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} (-1)^m \Gamma_{hH}^{(m)}(p)|\widetilde{\overline{u}}(p)|^2\,dp, \tag{3.23}$$

$$\Delta(u,u) = \frac{1}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0} (-1)^m \Delta_{hH}^{(m)}(p)|\widetilde{\overline{u}}(p)|^2\,dp, \tag{3.24}$$

где Ω_0 — фундаментальный параллелепипед матрицы $h^{-1}H^{*-1}$, функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ и $\Delta_{hH}^{(m)}(p)$ определены равенствами (2.11) и (3.2).

Соотношение (3.22) — это не что иное, как обычное равенство Парсеваля для тригонометрических рядов. Применив его к паре функций $D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta]$ и $u[\beta]$, а также пользуясь определением $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, получим (3.23). Аналогично получается равенство (3.24). При этом надо лишь применить формулу, подобную тождеству (3.1), которая связывает коэффициенты Фурье $\Delta_H^{(m)}[\beta]$ функции $\Delta_H^{(m)}(p)$ и разностные операторы $\Delta^{[\alpha]}[\beta]*$:

$$\Delta_H^{(m)}[\beta] = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}\Delta^{[\alpha]}[\beta] * \Delta^{[\alpha]}[-\beta]. \tag{3.25}$$

(б) *Существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для любой финитной функции $u[\beta]$ выполняются оценки*

$$C_1\Delta(u,u) \le D(u,u) \le C_2\Delta(u,u). \tag{3.26}$$

Из представлений (3.23), (3.24) следует, что в качестве таких постоянных можно взять верхнюю и нижнюю границы функции $R(p)$ из неравенств (3.5).

(в) *Для любых финитных функций $u[\beta]$ и $v[\beta]$ имеет место формула Грина*

$$(-1)^m \left[D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta], v[\beta]\right] = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left[D_{hH}^{\alpha}[\beta] * u[\beta], D_{hH}^{\alpha}[\beta] * v[\beta]\right]. \tag{3.27}$$

Докажем это равенство. Обозначим свертку $(-1)^m D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta]$ через $w[\beta]$. Тогда преобразование Фурье соответствующей боронообразной функции можно найти по формуле

$$\widetilde{\widetilde{w}}(p) = (-1)^m \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \widetilde{\widetilde{u}}(p).$$

Применив к паре функций $w[\beta]$ и $u[\beta]$ соответствующий аналог равенства (3.23), получим

$$D(u, v) = \frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Omega_0} (-1)^m \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \widetilde{\widetilde{u}}(p) \overline{\widetilde{\widetilde{v}}}(p)\, dp.$$

Подставляя сюда разложение функции $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ в сумму (3.11), заключаем, что

$$D(u, v) = \frac{1}{|\Omega_0|} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega_0} \Lambda_{hH}^{\alpha}(p) \widetilde{\widetilde{u}}(p) \overline{\Lambda_{hH}^{\alpha}(p) \widetilde{\widetilde{v}}(p)}\, dp. \tag{3.28}$$

Коэффициенты Фурье произведения $\Lambda_{hH}^{\alpha}(p)\widetilde{\widetilde{u}}(p)$ — это значения дискретной функции $D_{hH}^{\alpha}[\beta] * u[\beta]$. Разложив каждый интеграл в (3.28) по формуле (3.22), получим искомое равенство (3.27).

(г) *Билинейная форма $D(u, v)$ симметрична на финитных вещественных функциях, т. е.*

$$D(u, v) = D(v, u). \tag{3.29}$$

Соответствующая ей квадратичная форма $D(u, u)$ неотрицательна.

Оба эти утверждения сразу следуют из формулы Грина (3.27).

Таким образом, форма $D(u, v)$ обладает на пространстве финитных функций дискретной переменной всеми свойствами скалярного произведения. Точнее, если $u[\beta]$ и $v[\beta]$ финитны, то

1) $D(u,u) \geq 0$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $u[\beta]$ тождественно нулевая,

2) $D(u,v)$ линейна по каждой из переменных,

3) $D(u,v)$ симметрична.

В частности, имеет место неравенство Коши — Буняковского

$$|D(u,v)| \leq |(Du,u)|^{1/2}|(Dv,v)|^{1/2}. \tag{3.30}$$

Отсюда и из (3.26) следует существование постоянной C такой, что для любых финитных $u[\beta]$, $v[\beta]$ справедливо неравенство

$$|D(u,v)| \leq C|\Delta(u,u)|^{1/2}|\Delta(v,v)|^{1/2}. \tag{3.31}$$

Приведенные свойства формы $D(u,v)$ будут использованы далее при определении специального скалярного произведения в пространстве $w_2^{(m)}$.

§ 4. Коэффициенты оптимальных формул и задача продолжения

Напомним определения и свойства некоторых пространств функций дискретной переменной. Функция $u[\beta]$ принадлежит пространству $w_2^{(m)}$, если

$$|\Delta(u,u)|^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \sum_{\beta} |\Delta^{[\alpha]}[\beta] * u[\beta]|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Функционал $|\Delta(u,u)|^{1/2}$ определяет на $w_2^{(m)}$ полунорму. Множество функций из $w_2^{(m)}$, на которых она обращается в нуль, совпадает с пространством $\mathbf{P}_{m-1}$ полиномов степени меньше m. Фактор-пространство $w_2^{(m)}$ по $\mathbf{P}_{m-1}$ обозначено в гл. VIII через $l_2^{(m)}$. Функционал $|\Delta(u,u)|^{1/2}$ задает на $l_2^{(m)}$ норму, которую далее будем обозначать через $\|\cdot \mid l_2^{(m)}\|$. Пространство $l_2^{(m)}$ полно по норме $\|\cdot \mid l_2^{(m)}\|$ и представляет собой замыкание подмножества финитных функций. Все эти утверждения можно обосновать, воспользовавшись взаимными вложениями пространств $l_2^{(m)}$ и $L_2^{(m)}$. Соответствующие теоремы приведены в гл. VIII.

Норма в $l_2^{(m)}$ порождается билинейной формой $\Delta(u,v)$, и поэтому $l_2^{(m)}$ — гильбертово пространство.

Пусть задан проектор π из $w_2^{(m)}$ в $\mathbf{P}_{m-1}$. Выбрав какую-нибудь норму в конечномерном пространстве $\mathbf{P}_{m-1}$, нормируем и пространство $w_2^{(m)}$. Положим

$$\|u \mid w_2^{(m)}\| = \left(\|\pi u \mid \mathbf{P}_{m-1}\|^2 + \|u \mid l_2^{(m)}\|^2\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $w_2^{(m)}$ полно. Если норма в $\mathbf{P}_{m-1}$ порождена каким-либо скалярным произведением, то пространство $w_2^{(m)}$ гильбертово.

Распространим билинейную форму $D(u,v)$, определенную первоначально на финитных функциях, на все функции $u[\beta]$ и $v[\beta]$ из $w_2^{(m)}$. С этой целью возьмем две последовательности $u_M[\beta]$ и $v_M[\beta]$ финитных функций, стремящиеся по норме $\|\cdot \mid l_2^{(m)}\|$ к $u[\beta]$ и $v[\beta]$ соответственно. Существование таких последовательностей следует из теоремы VIII.10 о плотности финитных функций в $l_2^{(m)}$. Рассмотрим числовую последовательность $D(u_M, v_M)$ и докажем, что она сходится.

Пользуясь дважды оценкой (3.31), получим

$$\begin{aligned}
&|D(u_{M_1}, v_{M_1}) - D(u_{M_2}, v_{M_2})| \\
&\qquad = |D(u_{M_1} - u_{M_2}, v_{M_1}) + D(u_{M_2}, v_{M_1} - v_{M_2})| \\
&\qquad\qquad \le K\big(\|v_{M_1} \mid l_2^{(m)}\|\,\|u_{M_1} - u_{M_2} \mid l_2^{(m)}\| \\
&\qquad\qquad\qquad + \|u_{M_2} \mid l_2^{(m)}\|\,\|v_{M_1} - v_{M_2} \mid l_2^{(m)}\|\big).
\end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства при больших M_1, M_2 становится сколь угодно малой, т. е. последовательность $D(u_M, v_M)$ сходится. Значит, можно положить

$$D(u,v) = \lim_{M\to\infty} D(u_M, v_M).$$

Таким образом построенная билинейная форма удовлетворяет неравенству

$$|D(u,v)| \le K\|u \mid l_2^{(m)}\|\,\|v \mid l_2^{(m)}\|$$

с постоянной K, не зависящей ни от $u[\beta]$, ни от $v[\beta]$. Тем самым эта форма непрерывна.

Для построенного расширения $D(u,v)$ остаются в силе свойства, установленные в § 3 для финитных функций. Это следствие непрерывности $D(u,v)$ и теоремы о плотности финитных функций в $l_2^{(m)}$. При этом функционал, стоящий в правой части формулы Грина (3.27), также необходимо распространить непрерывно на всё $l_2^{(m)}$. Делается это по той же схеме, что и в случае $D(u,v)$.

В частности, из оценок (3.26) следует, что $D(u,u)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция $u[\beta] \in w_2^{(m)}$ является полиномом степени $m-1$. Таким образом, форма $D(u,v)$ задает в $l_2^{(m)}$ скалярное произведение, эквивалентное первоначально введенному $\Delta(u,v)$.

Операцию свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$ также можно распространить на всё $w_2^{(m)}$. Пусть функция $u[\beta]$ принадлежит $w_2^{(m)}$, тогда положим

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta]\big|_{\beta=\beta_0} = D(u, \delta[\beta-\beta_0]). \tag{4.1}$$

Выражение в правой части (4.1) определено, ибо функция $\delta[\beta-\beta_0]$, очевидно, находится в $w_2^{(m)}$. Из неравенства

$$|D(u,\delta[\beta-\beta_0])| \le K\left\|\delta[\beta-\beta_0] \mid l_2^{(m)}\right\| \left\|u \mid l_2^{(m)}\right\|$$

следует, что оператор свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$ непрерывно действует из пространства $w_2^{(m)}$ в пространство ограниченных функций дискретной переменной.

Вернемся к задаче B_1, поставленной в § 1, и рассмотрим случай, когда все параметры f_α в условии нулевые. Иными словами, будем искать функции $c[\beta]$ и $P_{m-1}[\beta]$, удовлетворяющие системе равенств

$$G_{hH}^{(m)}[\beta] * c[\beta] + P_{m-1}[\beta] = g[\beta], \quad hH\beta \in \overline{\Omega}, \tag{4.2}$$

$$c[\beta] = 0, \quad hH\beta \notin \overline{\Omega}, \tag{4.3}$$

$$\sum_\beta c[\beta][\beta]^\alpha = 0, \quad |\alpha| < m. \tag{4.4}$$

Однозначная разрешимость этой системы уже доказана. Рассмотрим алгоритм, позволяющий представить оператор, обратный системе

(4.2)–(4.4), в виде суперпозиции некоторого оператора продолжения $g[\beta]$ на все пространство $\mathbb{Z}^n$ с оператором свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$.

Поставим в соответствие решению $c[\beta]$ системы (4.2)–(4.4) боронообразную функцию $\overline{c}(x)$, определяемую равенством (1.8), и полигармонический потенциал $w(x) = G(x) * \overline{c}(x)$. Тогда условие (4.4) эквивалентно следующему:

$$\int\limits_{\Omega} \overline{c}(x) x^{\alpha}\, dx = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| < m. \tag{4.5}$$

При этом функция $w(x)$ имеет в окрестности бесконечно удаленной точки разложение вида (1.15), содержащее лишь нужные члены, и удовлетворяет оценке (1.16). Кроме того, как уже отмечалось в § 1, функция $w(x)$ находится в $W_2^{(m)}$.

Значения потенциала $w(x)$ в точках решетки $w(hH\beta)$ представляют собой свертку $v[\beta] = G_{hH}^{(m)}[\beta] * c[\beta]$. Функция $v[\beta]$ принадлежит пространству $w_2^{(m)}$, и согласно теореме VIII.7 при $m > n/2$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| v \mid l_2^{(m)} \right\| \leq K \left\| w(x) \mid L_2^{(m)} \right\|.$$

В окрестности бесконечности $v[\beta]$ допускает разложение, аналогичное (1.13) и состоящее лишь из нужных членов. При этом имеет место оценка

$$|v[\beta]| \leq C \begin{cases} |\beta|^{m-n}, & \text{если } n \text{ нечетно или } n > m, \\ |\beta|^{m-n} \ln |\beta|, & \text{если } n \text{ четно и } m \geq n. \end{cases} \tag{4.6}$$

Пусть функция $y[\beta] \in w_2^{(m)}$ отличается от $f[\beta]$ при $hH\beta \in \overline{\Omega}$ на полином степени $m-1$, удовлетворяет при больших $|\beta|$ неравенствам (4.6) и не совпадает с $v[\beta]$. Тогда норма $\|v\|_m^D = D(v,v)^{1/2}$ строго меньше нормы $\|y\|_m^D = D(y,y)^{1/2}$, т. е.

$$\|v\|_m^D < \|y\|_m^D. \tag{4.7}$$

Это утверждение докажем так же, как неравенство (1.17). При $hH\beta \in \overline{\Omega}$ функции $y[\beta]$ и $v[\beta]$ отличаются друг от друга на полином

$Q_{m-1}[\beta]$ степени не больше $m-1$. Положим $u[\beta] = v[\beta] + Q_{m-1}[\beta]$, тогда в силу свойств оператора свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]*$ нормы $\|u\|_m^D$ и $\|v\|_m^D$ совпадают. Таким образом, достаточно установить справедливость неравенства (4.7) для функции $u[\beta]$ вместо $v[\beta]$.

Образуем множество дискретных функций, зависящих от вещественного параметра λ, положив $u_\lambda[\beta] = u[\beta] + \lambda(y[\beta] - u[\beta])$. Ясно, что при всех λ функция $u_\lambda[\beta]$ находится в $w_2^{(m)}$. Квадрат нормы $\|u_\lambda\|_m^D$ представляет собой квадратный трехчлен от переменной λ:

$$D(u_\lambda, u_\lambda) = D(u,u) + 2\lambda D(u, y-u) + \lambda^2 D(y-u, y-u).$$

Подсчитаем коэффициент при λ в этом соотношении. Согласно формуле (3.21) получим

$$D(u, y-u) = (-1)^m \sum_\beta (D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta])(y[\beta] - u[\beta]).$$

Свертка $D_{hH}^{(m)}[\beta] * u[\beta]$ совпадает с функцией $c[\beta]$ согласно определению $u[\beta]$. В частности, она равна нулю для всех β таких, что $hH\beta \notin \overline{\Omega}$. Если же $hH\beta \in \overline{\Omega}$, то равна нулю разность $y[\beta] - u[\beta]$. Тем самым функции $u[\beta]$ и $(y-u)[\beta]$ ортогональны в скалярном произведении $D(\cdot,\cdot)$.

Вернувшись к форме $D(u_\lambda, u_\lambda)$, видим, что единственной ее стационарной точкой по переменной λ является нуль. При этом вторая производная по λ в нуле положительна. Таким образом, функция $D(u_\lambda, u_\lambda)$ имеет при $\lambda = 0$ строгий минимум. В частности,

$$D(u_0, u_0) = D(u,u) < D(u_1, u_1) = D(y,y).$$

Таким образом, неравенство (4.7) получено.

Рассмотрим следующую задачу продолжения.

Задача B_2. *Найти функцию $v[\beta]$ из пространства $w_2^{(m)}$, удовлетворяющую на бесконечности оценке* (4.6), *отличающуюся при $hH\beta \in \overline{\Omega}$ от $g[\beta]$ на полиномиальное слагаемое степени $m-1$ и имеющую наименьшую норму $\|\cdot\|_m^D$ в этом классе.*

Проведенные нами рассуждения показывают, что искомое продолжение дает функция $v[\beta] = G[\beta] * c[\beta]$, где $c[\beta]$ удовлетворяет системе (4.2)–(4.4). Решение задачи B_2 единственно. В самом деле,

если $v_1[\beta]$ и $v_2[\beta]$ — две разные функции, то их полусумма принадлежит тому же множеству в $w_2^{(m)}$, что и сами слагаемые $v_1[\beta]$, $v_2[\beta]$. При этом норма полусуммы строго меньше полусуммы норм:

$$\left\| \frac{v_1 + v_2}{2} \right\|_m^D < \frac{\|v_1\|_m^D + \|v_2\|_m^D}{2}.$$

Тем самым функционал $\|\cdot\|_m^D$ не может достигать минимума одновременно на $v_1[\beta]$ и $v_2[\beta]$.

Общий случай, когда в системе B числа f_α ненулевые, сводится к уже рассмотренному стандартной заменой: $c[\beta] = c_*[\beta] + c_1[\beta]$, где $c_*[\beta]$ удовлетворяет условиям (4.3) и (4.4), а $c_1[\beta]$ — новая неизвестная функция дискретной переменной.

В заключение отметим, что формулу $c[\beta] = D_{hH}^{(m)}[\beta] * v[\beta]$ можно рассматривать как специальное представление оператора, обратного к системе (4.2)–(4.4), в виде суперпозиции свертки и оператора продолжения.

§ 5. Одномерный дискретный аналог производной четного порядка

Рассмотренный нами способ построения коэффициентов оптимальных кубатурных формул оказывается пригодным и в случае квадратур, т. е. в случае формул, приближающих интеграл по отрезку числовой оси. Исследование в этом случае удается продвинуть гораздо дальше.

Итак, пусть размерность пространства $\mathbb{R}^n$ равна единице. Область Ω при этом сводится к отрезку $[0, 1]$, а полигармоническое уравнение $\Delta^m u(x) = (-1)^m f(x)$ превращается в обыкновенное:

$$\frac{d^{2m}u}{dx^{2m}} = (-1)^m f(x).$$

Норма в пространстве $L_2^{(m)}(\mathbb{R})$ определена равенством

$$\|u \mid L_2^{(m)}(\mathbb{R})\| = \left(\int_0^1 \left| \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}} \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

Однородная система A для функций одной переменной запишется следующим образом:

$$G(x) * c(x) + P_{m-1}(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{5.1}$$

$$c(x) = 0, \quad x \notin (0,1), \tag{5.2}$$

$$\int c(x) x^{\alpha}\, dx = 0, \quad |\alpha| < m. \tag{5.3}$$

Здесь функции $G(x)$ и $f(x)$ определяются равенствами

$$G(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \quad f(x) = \int_0^1 G(x-y)\, dy. \tag{5.4}$$

Несложно убедиться, что функция $f(x)$ — это полином степени $2m-1$, удовлетворяющий условию $f(x) = f(1-x)$ при $0 \le x \le 1$. Соответствующая системе (5.1)–(5.3) задача A_2 состоит в том, чтобы найти функцию $u(x)$ из пространства $L_2^{(m)}(\mathbb{R})$, полигармоническую вне отрезка $[0,1]$ и совпадающую с $f(x)$ внутри него. Таким образом, функция $u(x)$ вне промежутка $[0,1]$ представляет собой многочлен степени $2m-1$. В этом многочлене все коэффициенты при степенях выше $m-1$ обращаются в нуль, иначе $u(x)$ не принадлежит $L_2^{(m)}(\mathbb{R})$. Теперь мы можем построить функцию $u(x)$ в явном виде.

В силу непрерывности $u(x)$ с производными до порядка $m-1$ имеем

$$u(x) = P_{m-1}^{(1)}(x) \text{ при } x < 0, \quad u(x) = P_{m-1}^{(2)}(x) \text{ при } x > 1, \tag{5.5}$$

где полиномы $P_{m-1}^{(1)}(x)$ и $P_{m-1}^{(2)}(x)$ известны:

$$P_{m-1}^{(1)}(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(0),$$

$$P_{m-1}^{(2)}(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \cdots + \frac{(x-1)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1).$$

Таким образом, $u(x)$ — кусочно-полиномиальная функция с узлами в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Очевидно, что $u(x)$ обладает наименьшей нормой в $L_2^{(m)}(\mathbb{R})$ среди всех возможных продолжений $f(x)$ на всю ось. Функция с таким свойством единственна. В самом деле, пусть минимум нормы достигается на двух разных функциях u_1 и u_2, являющихся продолжением $f(x)$ на всё $\mathbb{R}$. Тогда их полусумма также является продолжением $f(x)$ и имеет норму, строго меньшую, чем норма u_1 либо u_2. Это противоречие доказывает, что $u_1 = u_2$. Имея в виду, что норма решения задачи A_2, т. е. функции $u(x)$, совпадает с нормой функции $u(1-x)$, получаем равенство $u(x) = u(1-x)$.

Перейдем к решению задачи A_1. Положим $c(x) = d^{2m}u/dx^{2m}$ и заметим, что $c(x)$ — это обобщенная функция из пространства $L_2^{(m)}(\mathbb{R})^*$. Ее носитель, очевидно, содержится в единичном отрезке. Далее, из общей теории полигармонического уравнения следует существование такого полинома $P_{m-1}(x)$ степени $m-1$, что $u(x) = G(x) * c(x) + P_{m-1}(x)$. Тем самым первые два равенства системы A выполнены. При $x < 0$ имеем

$$P_{m-1}^{(1)}(x) - P_{m-1}(x) = G(x) * c(x) \equiv v(x),$$

т. е. функция $v(x)$ при отрицательных x представляет собой полином степени $m-1$. С другой стороны, используя прежний прием разложения свертки $G(x) * c(x)$ в ряд по производным от $G(x)$, получим

$$v(x) = \int G(x-y)c(y)\,dy = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k G(x)}{dx^k} \int c(y)y^k\,dy.$$

Выражение в правой части может быть полиномом степени $m-1$ лишь в случае, если первые m интегралов равны нулю. Таким образом, равенство (5.3) также выполнено, и задача A_2 решена.

Однородная система B записывается в следующем виде:

$$hG[\gamma] * c[\gamma] + P_{m-1}[\gamma] = f[\gamma], \quad 0 \le h\gamma \le 1, \tag{5.6}$$

$$c[\gamma] = 0, \quad h\gamma \notin [0,1], \tag{5.7}$$

$$\sum_{\gamma} c[\gamma][\gamma]^{\alpha} = 0, \quad 0 \le \alpha < m, \tag{5.8}$$

при этом

$$G[\gamma] = \frac{h^{2m-1}}{2(2m-1)!}|\gamma|^{2m-1}, \quad f[\gamma] = \int\limits_0^1 G(h\gamma - y)\,dy.$$

Функция $f[\gamma]$ — это полином степени $2m-1$.

Для решения соответствующих системе B задач B_2, B_1 требуется найти коэффициенты оператора $D_h^{(m)}[\beta]*$. Эти коэффициенты находятся из разложения в ряд Фурье функции $\Gamma_h^{(m)}(p)$, удовлетворяющей условию

$$\Gamma_h^{(m)}(p)\widetilde{\overline{G}_h^{(m)}}(p) = 1. \tag{5.9}$$

Для преобразования Фурье $\widetilde{\overline{G}_h^{(m)}}(p)$ из равенств (2.8)–(2.11) получается формула

$$\widetilde{\overline{G}_{hH}^{(m)}}(p) = \frac{(-1)^m h^{2m}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(ph-\beta)^{2m}} = h^{2m}\widetilde{\overline{G}_1^{(m)}}(hp).$$

Исследуем более подробно функцию $\widetilde{\overline{G}_1^{(m)}}(p)$. Как известно, справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p-\beta)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p}.$$

Дифференцируя обе его части $2m-2$ раз, получим

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p-\beta)^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)!}\frac{d^{2m-2}}{dp^{2m-2}}\left\{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p}\right\}. \tag{5.10}$$

Преобразуем выражение в правой части (5.10), воспользовавшись понятием многочлена Эйлера.

Полином Эйлера $E_k(\lambda)$, следуя [207], зададим формулой

$$E_k(\lambda) = \frac{(1-\lambda)^{k+2}}{\lambda}\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^k \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}. \tag{5.11}$$

Частично свойства так определенных полиномов Эйлера исследованы в работах [172–177]. Взяв в (5.11) вместо λ функцию $e^{i2\pi p}$, придем к равенству

$$\frac{d^{2m-2}}{dp^{2m-2}}\left\{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p}\right\} = \frac{\pi^{2m}}{\sin^{2m} \pi p} e^{-i2(m-1)\pi p} E_{2m-2}(e^{i2\pi p}).$$

Подставляя его в (5.10), получаем для функции $\widetilde{G_1^{(m)}}(p)$ следующее представление:

$$\widetilde{G_1^{(m)}}(p) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(2m-1)!} \frac{1}{\sin^{2m} \pi p} e^{-i2(m-1)\pi p} E_{2m-2}(e^{i2\pi p}).$$

Тем самым решение уравнения (5.9) при $h = 1$ дается формулой

$$\Gamma_1^{(m)}(p) = (2m-1)!(-2^2)^m (\sin \pi p)^{2m} \frac{e^{i(2m-2)\pi p}}{E_{2m-2}(e^{i2\pi p})}. \tag{5.12}$$

Из определения (5.11) полинома $E_k(\lambda)$ легко получить тождество

$$E_k(\lambda) = \lambda^k E_k(1/\lambda). \tag{5.13}$$

Применив его при $\lambda = e^{i2\pi p}$, перепишем равенство (5.12) в эквивалентном виде:

$$\frac{\Gamma_1^{(m)}(p)}{(2m-1)!} = (-2^2)^m (\sin \pi p)^{2m} \frac{e^{-i2\pi p(m-1)}}{E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})}. \tag{5.14}$$

Как известно, коэффициент Фурье произведения двух функций получается сверткой коэффициентов Фурье сомножителей. Таким образом, равенство (5.14) позволяет представить функцию $D_1^{(m)}[\beta]$ в виде свертки. Выпишем соответствующую формулу. Обозначим через $E_{2m-2}^{-1}[\beta]$ следующий коэффициент Фурье:

$$E_{2m-2}^{-1}[\beta] = \int_0^1 \frac{e^{i2\pi p\beta}}{E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})}\, dp, \tag{5.15}$$

а через $\Delta_2^{[m]}[\beta]$ — коэффициент Фурье функции $2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} \pi p$, т. е.

$$\Delta_2^{[m]}[\beta] = \sum_{k=-m}^{m} (-1)^{k+m} \binom{2m}{m+k} \delta[\beta - k]. \tag{5.16}$$

Используя эти обозначения, из (5.14) получаем

$$\frac{D_1^{(m)}[\beta]}{(2m-1)!} = \Delta_2^{[m]}[\beta] * E_{2m-2}^{-1}[\beta - m + 1]. \tag{5.17}$$

Функция $\Delta_2^{[m]}[\beta]$ финитна, и тем самым свертка (5.17) существует. Напомним, что свертка с $\Delta_2^{[m]}[\beta]$ означает взятие симметрической разности m-го порядка.

Если $B_{2m-2}[\gamma]$ — коэффициент Фурье произведения

$$\frac{e^{i2\pi p(m-1)} E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})}{(2m-1)!},$$

то из (5.14) следует еще одно сверточное соотношение:

$$B_{2m-2}[\beta] * D_1^{(m)}[\beta] = \Delta_2^{[m]}[\beta]. \tag{5.18}$$

Остановимся более подробно на задаче вычисления коэффициентов, задаваемых равенством (5.15). Для этого нам понадобится исследовать множество корней полинома $E_k(\lambda)$. Обозначим их через $\lambda_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Известно, что все они вещественны, отрицательны и различны:

$$\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_k^{(k)} < 0. \tag{5.19}$$

Пользуясь тождеством (5.13), несложно доказать, что корни, равноотстоящие от концов цепочки (5.19), взаимно обратны:

$$\lambda_j^{(k)} \lambda_{k+1-j}^{(k)} = 1 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.20}$$

Возьмем k равным $2m - 2$ и условимся до конца этого параграфа опускать верхний индекс корня $\lambda_j^{(2m-2)}$. Имеет место следующее разложение на простейшие дроби:

$$\frac{\lambda^{m-1}}{E_{2m-2}(\lambda)} = \sum_{j=1}^{2m-2} \frac{B_{2m-1-j}}{\lambda - \lambda_j}, \tag{5.21}$$

где

$$B_{2m-1-j} = \frac{\lambda_j^{m-1}}{E'_{2m-2}(\lambda_j)}. \tag{5.22}$$

Дифференцируя по λ равенство (5.13), полагая в полученной формуле $\lambda = \lambda_j$ и пользуясь равенством (5.20), находим следующее соотношение: $B_{2m-1-j} = -\lambda_j^2 B_j$. С помощью этого равенства и перегруппировки слагаемых в (5.21) приходим к разложению

$$\frac{\lambda^{m-1}}{E_{2m-2}(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m-1} B_j \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_{2m-1-j}} - \frac{\lambda_j^2}{\lambda - \lambda_j} \right\}.$$

Положив здесь $\lambda = e^{-i2\pi p}$ и приняв во внимание, что при всех $j = 1, \ldots, m-1$ величина $\mu_j = \lambda_{2m-1-j} = 1/\lambda_j$ по модулю меньше единицы, найдем нужный нам ряд Фурье

$$\frac{e^{-i2\pi p(m-1)}}{E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_j}{\mu_j} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\sum_{j=1}^{m-1} B_j \mu_j^{n-1} \right) \cos 2\pi n p. \tag{5.23}$$

Это равенство дает возможность вычислить в любой точке сверточный сомножитель $E_{2m-2}^{-1}[\beta - m + 1]$ из (5.17), если только заранее известны корни μ_j полинома $E_{2m-2}(\mu)$ и величины B_j, определяемые как отношения (5.22). Далее по формуле (5.17) можно вычислить и функцию $D_1^{(m)}[\beta]$.

С увеличением m трудоемкость соответствующего алгоритма существенно возрастает. Поэтому для больших m хотелось бы иметь какое-нибудь простое асимптотическое представление величин μ_j, B_j и $E_{2m-2}^{-1}[\beta]$. В следующих двух параграфах мы получим такие асимптотические формулы для корней μ_j.

§ 6. Корни полинома Эйлера

Пусть корни $\lambda_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, многочлена Эйлера $E_k(\lambda)$ упорядочены, как указано в (5.19). Изучим их асимптотическое поведение при больших значениях k. Нам удобно будет рассматривать не сами корни, а логарифмы от их абсолютных величин:

$$q_j^{(k)} = \frac{1}{\pi} \ln\left(-\lambda_j^{(k)}\right).$$

Очевидно, что эти логарифмы упорядочены следующим образом:

$$-\infty < q_k^{(k)} < q_{k-1}^{(k)} < \cdots < q_2^{(k)} < q_1^{(k)}.$$

Числа $q_j^{(k)}$ и $q_{k+1-j}^{(k)}$, равноотстоящие от концов цепочки, связаны между собой соотношением

$$q_j^{(k)} + q_{k+1-j}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Это равенство позволяет исследовать лишь положительные значения $q_j^{(k)}$, соответствующие индексам $j = 1, 2, \ldots, [k/2]$.

Будем рассматривать последовательности величин $q_j^{(k)}$, у которых индекс j является функцией параметра k, т. е. $j = j(k)$. Выведем для таких последовательностей две асимптотические формулы. Первая из них имеет вид

$$q_j^{(k)} \cong q_j^{\mathrm{I}(k)} = \operatorname{ctg} \frac{(j + 1/2)\pi}{k + 2}. \tag{6.1}$$

Эта формула пригодна для приближения таких величин $q_j^{(k)}$, отношения которых к квадратному корню из k в пределе меньше некоторого числа $\varkappa_{\max}$:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{q_j^{(k)}}{\sqrt{k}} < \varkappa_{\max} \cong 3.0215\ldots. \tag{6.2}$$

Вторую формулу запишем в двух эквивалентных вариантах:

$$q_j^{(k)} \cong q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right), \tag{6.3}$$

$$\lambda_j^{(k)} \cong -\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{k+1} \tag{6.4}$$

Она пригодна для приближения таких логарифмов $q_j^{(k)}$, отношения которых к квадратному корню из k в пределе больше некоторого числа $\varkappa_{\min}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{q_j^{(k)}}{\sqrt{k}} > \varkappa_{\min} \cong 0.3725. \tag{6.5}$$

Условие (6.5), достаточное для применения формулы (6.3), можно сформулировать и в терминах функции $j = j(k)$. Именно, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{j(k)}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\pi\varkappa_{\min}}, \tag{6.6}$$

то величина $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ сколь угодно точно приближает $q_j^{(k)}$ при достаточно больших k. Если в одном из неравенств (6.5), (6.6) можно поставить обычный предел, то такой же предел можно поставить и во втором, при этом условия (6.5), (6.6) становятся эквивалентными.

Краткое изложение результатов настоящего параграфа опубликовано в [177]. Для формулы (6.1) наш результат является расширением результатов С. Х. Сираждинова [147].

Выведем сначала асимптотическую формулу (6.3). Коэффициенты $a_s^{(k)}$ многочлена Эйлера $E_k(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{k} a_{k-s}^{(k)}\lambda^s$, как показано им самим, выражаются формулой

$$a_s^{(k)} = \sum_{j=0}^{s}(-1)^j \binom{k+2}{j}(s+1-j)^{k+1}. \tag{6.7}$$

Сравнивая равенство (6.7) с формулой (5.1.3–13) из [65], несложно убедиться в том, что $q_s^{(k)}$ — это число Эйлера $\left\langle {k+1 \atop s+1} \right\rangle$ в терминах и обозначениях из [65]. Следует отметить, что помимо чисел Эйлера из [65] рассматриваются отличные от них эйлеровы числа.

Каждый коэффициент $a_s^{(k)}$ — простейшая симметрическая функция корней $\lambda_j^{(k)}$. Выпишем ее в явном виде. Для этого пронумеруем индексом t, $t = 1, 2, \ldots, \binom{k}{s}$, всевозможные сочетания без повторений из k элементов по s. Каждому такому сочетанию соответствует набор из s различных номеров $j_1(t), j_2(t), \ldots, j_s(t)$, меняющихся на отрезке $1 \le j \le k$. Пусть

$$\nu_{s,t}^{(k)} = \left|\lambda_{j_1(t)}^{(k)}\lambda_{j_2(t)}^{(k)}\ldots\lambda_{j_s(t)}^{(k)}\right|. \tag{6.8}$$

Тогда при $0 \le s \le k$ согласно неравенствам (5.19) и формулам Виета имеет место равенство

$$a_s^{(k)} = \sum_{t=1}^{\binom{k}{s}} \nu_{s,t}^{(k)}. \tag{6.9}$$

Удобно считать, что при $s < 0$ и $s > k$ коэффициент $a_s^{(k)}$ тождественно нулевой. Используем предложенный Н. И. Лобачевским процесс квадрирования и составим многочлен

$$L_k(\mu) = b_0^{(k)}\mu^k - b_1^{(k)}\mu^{k-1} + \cdots + (-1)^k b_k^{(k)}.$$

Коэффициенты $L_k(\mu)$ выражаются через $a_s^{(k)}$ формулой

$$b_j^{(k)} = \left(a_j^{(k)}\right)^2 + 2\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t a_{j-t}^{(k)} a_{j+t}^{(k)}. \tag{6.10}$$

Ряд в правой части (6.10), очевидно, обрывается на конечном числе слагаемых. Известно, что корнями многочлена $L_k(\mu)$ служат квадраты корней многочлена $E_k(\lambda)$. Поэтому

$$b_s^{(k)} = \sum_{t=1}^{\binom{k}{s}} \left|\nu_{s,t}^{(k)}\right|^2. \tag{6.11}$$

Для оценки наибольшего из чисел, составляющих сумму (6.9), докажем, что справедлива следующая

Лемма IX.3. *Пусть* $\nu_1 > \nu_2 \geq \nu_3 \geq \cdots \geq 0$ *и*

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k+\cdots = a < \infty, \quad \nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_k^2+\cdots = b < \infty. \tag{6.12}$$

Если при этом

$$a^2 < 2b, \tag{6.13}$$

то имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}(a + \sqrt{2b - a^2}\,) \leq \nu_1 \leq \sqrt{b}. \tag{6.14}$$

Доказательство. Пусть $\nu_2^* = \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_k + \cdots = a - \nu_1$ и $b_* = \nu_1^2 + \left(\nu_2^*\right)^2$. Ввиду положительности чисел ν_j величина b_* не меньше b:

$$b_* \geq b, \quad b_* = \nu_1^2 + (a - \nu_1)^2 = 2(\nu_1 - a/2)^2 + a^2/2. \tag{6.15}$$

Поэтому $\nu_1 = {}^1\!/_2(a + \sqrt{2b_* - a^2}\,)$. Так как $b_* \geq b$, то отсюда следует нижняя оценка ν_1 в (6.14). Оценка ν_1 сверху очевидна из (6.12).

Лемма IX.3 доказана.

Применим лемму IX.3 к оценке максимума величин $\nu_{s,t}^{(k)}$, определяемых равенством (6.8). Заметим, что при фиксированном s наибольшее из чисел $\nu_{s,t}^{(k)}$ получается при $j_1(t) = 1, \ldots, j_s(t) = s$. Это легко доказать, пользуясь условием (5.19). Таким образом, неравен-

ство (6.14) в случаях, когда $s = j$ и $s = j - 1$, принимает вид

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_j^{(k)}}\right) \le \frac{\left|\lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}\dots\lambda_j^{(k)}\right|}{a_j^{(k)}} \le \sqrt{1 - 2\eta_j^{(k)}}, \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\eta_{j-1}^{(k)}}\right) \le \frac{\left|\lambda_1^{(k)}\lambda_2^{(k)}\dots\lambda_{j-1}^{(k)}\right|}{a_{j-1}^{(k)}} \le \sqrt{1 - 2\eta_{j-1}^{(k)}}. \quad (6.17)$$

Величина $\eta_s^{(k)}$ в этих соотношениях представляется как следующая сумма:

$$\eta_s^{(k)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b_s^{(k)}}{|a_s^{(k)}|^2}\right) = \sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t+1}\frac{a_{s-t}^{(k)}a_{s+t}^{(k)}}{|a_s^{(k)}|^2}. \quad (6.18)$$

Функция $a_s^{(k)}$ при этом доопределена нулем при $s < 0$ и $s > k$, и поэтому ряд (6.18) обрывается на конечном значении t. Ясно, что оценки (6.16), (6.17) применимы лишь при условии, что

$$\eta_j^{(k)} < 1/4, \quad \eta_{j-1}^{(k)} < 1/4. \quad (6.19)$$

Разделив неравенство (6.16) на (6.17) и прологарифмировав частное, получаем

$$\frac{1}{\pi}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - 4\eta_j^{(k)}}}{2\sqrt{1 - 2\eta_{j-1}^{(k)}}} \le q_j^{(k)} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{a_j^{(k)}}{a_{j-1}^{(k)}} \le \frac{1}{\pi}\ln\frac{2\sqrt{1 - 2\eta_j^{(k)}}}{1 + \sqrt{1 - 4\eta_{j-1}^{(k)}}}. \quad (6.20)$$

Докажем, что при фиксированном j и $k \to \infty$ величина $\eta_j^{(k)}$ стремится к нулю. В самом деле, из формулы (6.7) имеем

$$a_s^{(k)} = (s+1)^{k+1}\left\{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{k+2}{j}\left(1 - \frac{j}{s+1}\right)^{k+1}\right\}. \quad (6.21)$$

При фиксированном s каждое слагаемое в фигурных скобках, начиная со второго, стремится к нулю при возрастании k. Поэтому для $t = 0, 1, \dots$ и ненулевых коэффициентов $a_{s\pm t}^{(k)}$ справедливы соотношения

$$a_{s\pm t}^{(k)} = (s \pm t + 1)^{k+1}(1 + R_{s\pm t}^{(k)}),$$

$$\frac{a_{s-t}^{(k)}a_{s+t}^{(k)}}{|a_s^{(k)}|^2} = \left(1 - \left(\frac{t}{s+1}\right)^2\right)^{k+1}(1 + R_{s,t}^{(k)}).$$

Величины $R_{s\pm t}^{(k)}$ и $R_{s,t}^{(k)}$ стремятся к нулю при $k \to \infty$. Отсюда сле-

дует, что число $\eta_s^{(k)}$, представленное суммой (6.18), тоже стремится к нулю при увеличении k.

Следовательно, для данного $j = j(k)$, начиная с некоторого номера k, неравенства (6.19) и (6.20) выполнены. В частности, для любого положительного ε при $k \geq k_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\left| q_j^{(k)} - \frac{k+1}{\pi} \ln \frac{j+1}{j} \right| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $j = j(k)$ растет как $\sqrt{k}$. Оценим качество приближения величины $q_j^{(k)}$ числом $q_j^{\mathrm{II}(k)}$, определенным формулой (6.3). Положим

$$\varkappa_j'^{(k)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\pi(j+1/2)}, \quad \varkappa' = \lim_{k\to\infty} \varkappa_j'^{(k)} < +\infty.$$

При этом, очевидно, выполняется равенство

$$j = \frac{\sqrt{k+1}}{\pi\varkappa'}(1 + O(k^{-1})). \tag{6.22}$$

Оценим сверху величину $\eta_j^{(k)}$ для таких j.

В формуле (6.18) для $\eta_j^{(k)}$ участвуют слагаемые $a_{j\pm t}^{(k)}$, индекс t которых удовлетворяет условиям $j+t \leq k$ и $j-t \geq 0$. В частности, $j+t \leq \min(k, 2j)$. Тем самым номер s любого ненулевого коэффициента $a_s^{(k)}$ из (6.18) удовлетворяет при больших k неравенству

$$0 \leq s \leq 2j = \frac{2\sqrt{k+1}}{\pi\varkappa'}\left(1 + O(k^{-1})\right).$$

Для таких s несложно доказать, что в формуле (6.21) отношение ρ_{t+1} слагаемого с номером $t+1$ к предыдущему слагаемому оценивается сверху следующим образом:

$$|\rho_{t+1}| \leq (k+2)e^{-(k+1)/s} \leq (k+2)e^{-\pi\varkappa'\sqrt{k+1}/2}, \quad t \geq 1.$$

Пусть $\varkappa' \geq \varkappa_0 > 0$. Тогда для всех ненулевых коэффициентов $a_s^{(k)}$ справедливо представление

$$a_s^{(k)} = (s+1)^{k+1}\{1 + O(ke^{-\pi\varkappa_0\sqrt{k}/2})\}. \tag{6.23}$$

Величина $O(\cdot)$ в этой формуле является таковой равномерно по всем $\varkappa'$, не меньшим $\varkappa_0$. Из (6.23) следует, что

$$\frac{\left|a_{j-t}^{(k)} a_{j+t}^{(k)}\right|}{\left|a_j^{(k)}\right|^2} \leq e^{-t^2(k+1)/(j+1)^2}\{1 + O(ke^{-\pi\varkappa_0\sqrt{k}/2})\}.$$

С помощью соотношения (6.22) выразим показатель у экспоненты че-

рез $\varkappa'$, а затем распространим полученную оценку на все значения t. Подставив результат в (6.18), имеем

$$\left|\eta_j^{(k)}\right| \le \left(\sum_{t=1}^{\infty} e^{-t^2(\pi\varkappa')^2}\right)\{1 + O(ke^{-\pi\varkappa_0\sqrt{k}/2})\}.$$

Тем самым в представлении (6.18) можно перейти к пределу при $k \to \infty$, получив при этом

$$\lim_{k\to\infty} \eta_j^{(k)} \le \sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t+1}e^{-t^2(\pi\varkappa')^2} = \eta(\varkappa').$$

Это — искомая оценка сверху для $\eta_j^{(k)}$.

Укажем некоторые свойства суммы $\eta(\varkappa')$. Функция $\eta(\varkappa')$ монотонно убывает от единицы до нуля при $\varkappa' \ge 0$. В табл. 5 приведены приближенные значения $\eta(\varkappa')$ и функции

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{2\sqrt{1-2\eta}}{1+\sqrt{1-4\eta}},$$

Таблица 5

$\varkappa'$	$\eta(\varkappa')$	$\omega(\eta)$
0.37254	0.249998	0.109420
0.38	0.237137	0.053213
0.4	0.204347	0.023755
0.5	0.084753	0.001684
0.6	0.028637	0.000150
0.66	0.013579	0.000030

отвечающей в соответствии с оценками (6.20) за погрешность формулы (6.3). Отметим также, что $\eta(\varkappa')$ выражается через θ_4-функцию Якоби с отношением периодов $\tau = \pi i\varkappa'^2$.

Пусть $\varkappa_{\min}$ — корень уравнения $\eta(\varkappa') = 1/4$. Подсчет показывает, что $\varkappa_{\min} \simeq 0.3725$. Таким образом, при $\varkappa' > \varkappa_{\min}$ величина $\eta(\varkappa')$ меньше $1/4$.

Если функция $j = j(k)$ определена равенством (6.22), то при достаточно больших k величины $\eta_j^{(k)}$ и $\eta_{j-1}^{(k)}$ меньше $1/4$. Тем самым для таких k неравенства (6.20) выполнены. Погрешность формулы (6.3) при этом характеризуется максимумом модулей двух величин в левой и правой частях неравенств (6.20). Последовательности $\eta_j^{(k)}$ и $\eta_{j-1}^{(k)}$ при возрастании k становятся сколь угодно малыми. Значит, таковой же становится и погрешность формулы (6.3).

Рассмотрим подробнее вопрос об условиях применения формулы (6.3). Одно из этих условий, как только что доказано, дает неравенство $\varkappa' > \varkappa_{\min}$. Два других условия — это соотношения (6.5)

и (6.6). Убедимся в их эквивалентности. Запишем величину $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ в следующем виде:

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{j}\right) = \frac{k+1}{\pi}\ln\frac{(j+1/2)+1/2}{(j+1/2)-1/2}$$
$$= \frac{k+1}{\pi}\left(\frac{1}{j+1/2}+\frac{1}{12}\frac{1}{(j+1/2)^3}+\dots\right).$$

Вспомнив обозначение $\varkappa_j'^{(k)}$, получим

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \varkappa_j'^{(k)}\sqrt{k+1}+O(k^{-1/2}).$$

Мы видим, что погрешность $q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)}$ ограничена, а $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ растет как $\sqrt{k}$. Значит, имеет место асимптотическое равенство

$$q_j^{(k)} = q_j^{\mathrm{II}(k)} + O(1) = q_j^{\mathrm{II}(k)}(1+O(k^{-1/2})),$$

так что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{q_j^{(k)}}{\sqrt{k}} = \varliminf_{k\to\infty}\frac{q_j^{\mathrm{II}(k)}}{\sqrt{k}} = \varliminf_{k\to\infty}\varkappa_j'^{(k)} = \varkappa'.$$

Таким образом, неравенство $\varkappa' > \varkappa_{\min}$ равносильно условию (6.5), которое тем самым является достаточным условием применения формулы (6.3). Имея в виду, что

$$\frac{1}{\pi\varkappa'} = \varliminf_{k\to\infty}\frac{j(k)}{\sqrt{k}}$$

(это равенство следует из (6.22)), убеждаемся в эквивалентности формул (6.5) и (6.6).

Несложно вычислить, что разность двух соседних величин $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ удовлетворяет соотношению

$$q_{j-1}^{\mathrm{II}(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+1}{\pi}\frac{1+O(j^{-2})}{(j+1/2)(j-1/2)} = \pi\varkappa_j'^{(k)}\varkappa_{j-1}'^{(k)}(1+O(j^{-2})).$$

На этом закончим исследование асимптотической формулы (6.3) для корней полинома Эйлера и перейдем к выводу равенства (6.1).

§ 7. Первая асимптотическая формула

Запишем алгебраическое уравнение $E_k(\lambda) = 0$ в эквивалентном виде. Введем в рассмотрение новую переменную $q = \ln(-\lambda)/\pi$, т. е. положим $\lambda = -e^{\pi q}$. В случае, когда λ непрерывно изменяется на интервале $(-\infty, -1)$, переменная q пробегает положительную полуось числовой прямой: $0 < q < \infty$. Элементарными выкладками полином $E_k(\lambda)$ преобразуется в функцию переменной q:

$$E_k(\lambda) = E_k(-e^{\pi q}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{k+2} e^{k\pi q/2} \operatorname{ch}^{k+2} \frac{\pi q}{2} \frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\operatorname{ch}^2 \pi q/2}. \qquad (7.1)$$

Все величины $q_j^{(k)} = \ln\bigl(-\lambda_j^{(k)}\bigr)/\pi$ вещественны, а первые множители в выражении (7.1) вещественных нулей, очевидно, не имеют. Поэтому числа $q_j^{(k)}$ представляют собой те нули функции

$$\frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\operatorname{ch}^2 \pi q/2},$$

которые лежат на вещественной оси. Воспользуемся известным разложением на простейшие дроби функции, стоящей в предыдущем выражении под знаком производной:

$$\frac{\pi^2}{4\operatorname{ch}^2 \pi q/2} = \frac{\pi^2}{4\sin^2(\pi(1+iq)/2)} = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\beta+1+iq)^2}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства k раз и обозначая через $S_k(q)$ сумму ряда

$$S_k(q) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2},$$

получим

$$\frac{d^k}{dq^k} \frac{(\pi/2)^2}{\operatorname{ch}^2 \pi q/2} = 2(-1)^{k+1}(k+1)!S_k(q).$$

Функция $S_k(q)$ вещественна при любом k. Это легко проверить, заменив суммирование по отрицательным индексам β суммой по индексам $\beta' = -\beta - 1$. При этом получится равенство

$$2S_k(q) = \sum_{\beta=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{i}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2} + \left(\frac{-i}{2\beta+1-iq}\right)^{k+2}\right\}$$
$$= \left(\frac{i}{1+iq}\right)^{k+2}\zeta_k(q) + \left(\frac{-i}{1-iq}\right)^{k+2}\bar{\zeta}_k(q), \tag{7.2}$$

где

$$\zeta_k(q) = 1 + \sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1+iq}{2\beta+1+iq}\right)^{k+2} \tag{7.3}$$

Обозначим через α угол между вектором $1+iq$ и мнимой осью, т. е. положим

$$\alpha = \arg i/(1+iq), \quad q = \operatorname{ctg}\alpha, \quad 0 < \alpha \le \pi/2.$$

Таким образом, промежуток $0 < \alpha \le \pi/2$ отображается на полуось $q \ge 0$ взаимно однозначно.

Пусть $q_j^{(k)} = \operatorname{ctg}\alpha_j^{(k)}$. Тогда величины $\alpha_j^{(k)}$, как следует из равенства (7.2), являются корнями следующего уравнения:

$$(k+2)\alpha + \arg\zeta_k(\operatorname{ctg}\alpha) = (t+1/2)\pi, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{7.4}$$

Это и есть искомая форма записи исходного алгебраического уравнения $E_k(\lambda) = 0$.

Исследуем уравнение (7.4) более подробно при условии, что

$$0 \le \frac{q}{\sqrt{k+2}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{k+2}} \le \varkappa < +\infty. \tag{7.5}$$

Следующая лемма позволяет оценить при $k \to \infty$ поведение функции $\arg\zeta_k(\operatorname{ctg}\alpha)$.

Лемма IX.4. *Ряд* (7.3) *сходится равномерно по k при изменении q в области, задаваемой неравенствами* (7.5).

Доказательство. Обозначим частичную сумму ряда (7.3) через $\zeta_k^N(q)$, тогда

$$\left|\zeta_k(q) - \zeta_k^N(q)\right| \le \sum_{\beta=N+1}^{\infty} \left(\frac{1+q^2}{(2\beta+1)^2+q^2}\right)^{(k+2)/2}$$

Ряд в правой части — это монотонно возрастающая функция переменной q. Следовательно, имеет место оценка

$$\sup_{0\le q\le \varkappa\sqrt{k+2}} \left|\zeta_k(q) - \zeta_k^N(q)\right| \le \sum_{\beta=N+1}^{\infty} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{(k+2)/2} \tag{7.6}$$

Обозначим слагаемое ряда (7.6) с фиксированным номером $\beta \ge N+1$ через $A_\beta(k)$. Функция $A_\beta(k)$ переменной k монотонно убывает. Это утверждение легко следует из равенств

$$A_\beta(k) = \left[\left(1-\frac{1}{y(k)}\right)^{y(k)-1}\right]^{2\beta(\beta+1)/\varkappa^2} \left(\frac{y(k)}{y(k)-1}\right)^{1/2\varkappa^2},$$

$$y(k) = 1 + \frac{\varkappa^2(k+2)+1}{(2\beta+1)^2-1},$$

и того факта, что функция $g(y) = (1-1/y)^{y-1}$ монотонно убывает при $y \ge 1$. Таким образом, $A_\beta(k) \le A_\beta(2)$ при $k \ge 2$. Подставив эти неравенства в (7.6) и положив

$$x(\beta) = \frac{(2\beta+1)^2+4\varkappa^2}{4\beta(\beta+1)},$$

получим оценку

$$\sup_{0\le q\le \varkappa\sqrt{k+2}} \left|\zeta_k(q) - \zeta_k^N(q)\right| \le \sum_{\beta=N+1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{x(\beta)}\right)^2.$$

В правой части суммируются значения монотонно убывающей функции переменной β. Это позволяет заменить суммирование интегрированием и при этом не нарушить неравенства:

$$\sup_{0\le q\le \varkappa\sqrt{k+2}} \left|\zeta_k(q) - \zeta_k^N(q)\right| \le \int_N^{\infty} \left(1-\frac{1}{x(\beta)}\right)^2 d\beta.$$

Сделаем в интеграле замену, перейдя от β к переменной $x(\beta)$. Как следует из определения, при $\beta \to \infty$ функция $x(\beta)$ монотонно убывая стремится к 1. При этом

$$d\left(\frac{x(\beta)}{x(\beta)-1}\right) = \frac{4(2\beta+1)d\beta}{1+4\varkappa^2}, \quad d\beta = -\frac{(1+4\varkappa^2)dx(\beta)}{4(x(\beta)-1)^{3/2}(x(\beta)+4\varkappa^2)^{1/2}}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\sup_{0\le q\le \varkappa\sqrt{k+2}} \left|\zeta_k(q) - \zeta_k^N(q)\right|$$
$$\le \frac{1+4\varkappa^2}{4} \int\limits_1^{x(N)} \frac{(x-1)^{1/2}}{x^2(x+2\varkappa^2)^{1/2}}\,dx \le \frac{(1+4\varkappa^2)^2}{4^{5/2}}\frac{1}{N^3}. \quad (7.7)$$

Переходя здесь к пределу по $N \to \infty$, завершаем доказательство леммы IX.4.

Следствие 7.1. *Для любой переменной q из отрезка (7.5) имеет место неравенство*

$$\lim_{k\to\infty} |\zeta_k(q) - 1| \le \xi(\varkappa) = \sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-2\beta(\beta+1)/\varkappa^2}. \quad (7.8)$$

Доказательство. С помощью леммы IX.4 получаем следующие соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} |\zeta_k(q) - 1| \le \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} \left|\zeta_k^N(q) - 1\right| = \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty} \left|\zeta_k^N(q) - 1\right|$$
$$\le \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty} \sum_{\beta=1}^{N} \left(\frac{1+\varkappa^2(k+2)}{(2\beta+1)^2+\varkappa^2(k+2)}\right)^{(k+2)/2}$$

Далее, предел при $k \to \infty$ слагаемого с номером β в последней сумме можно найти по формуле

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varkappa^2(k+2)}\right)^{(k+2)/2} \Big/ \left(1+\frac{(2\beta+1)^2}{\varkappa^2(k+2)}\right)^{(k+2)/2} = e^{-2\beta(\beta+1)/\varkappa^2}.$$

Таким образом, оценка (7.8) доказана.

Таблица 6

$\varkappa$	$\xi(\varkappa)$	$\varkappa^2\xi(\varkappa)$
0.65	0.00008	0.000032
0.7	0.00030	0.000137
1.0	0.0183	0.0183
2.0	0.4204	1.6806
3.000	0.9874	8.8866
3.0215	1.00000	9.1295

Функция $\xi(\varkappa)$ при $\varkappa > 0$ монотонно возрастает. Приближенные значения функций $\xi(\varkappa)$ и $\varkappa^2\xi(\varkappa)$ даны в табл. 6.

Отметим еще, что функция $\xi(\varkappa)$ выражается через θ_1-функцию Якоби с отношением периодов $\tau = 2i/\pi\varkappa^2$ [42].

Локализуем корни уравнения (7.4) с помощью оценки (7.8). Обозначим через $\varkappa_{\max}$ величину, для которой $\xi(\varkappa_{\max}) = 1$. Подсчет показывает, что $\varkappa_{\max} \cong 3.0215$. Пусть $\varkappa < \varkappa_{\max}$, тогда, как следует из (7.8), число $\zeta_k(q)$ для достаточно больших k лежит в круге, центр которого находится в единице, а радиус r строго меньше единицы. При этом имеет место оценка

$$|\arg\zeta_k(q)| \le h < \arcsin\xi(\varkappa_{\max}) = \pi/2. \tag{7.9}$$

Величина $h = \arcsin r$ здесь тем ближе к $\arcsin\xi(\varkappa)$, чем больше k. Неравенство (7.9) очевидно из геометрического построения.

Как легко видеть, при $\varkappa > 0$ найдется промежуток $(\pi/2-\varepsilon, \pi/2]$, в котором

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{k+2}} < \operatorname{ctg}\alpha \le \varkappa. \tag{7.10}$$

Следовательно, существует положительное h такое, что для всех α из рассматриваемого промежутка и всех достаточно больших k имеет место оценка

$$|\arg\zeta_k(\operatorname{ctg}\alpha)| < h < \frac{\pi}{2}. \tag{7.11}$$

При этом для больших k величину h можно взять равной $\arcsin\xi(\varkappa)$. Если в промежутке $(\pi/2-\varepsilon, \pi/2]$ имеется корень α_* уравнения (7.4), то ввиду (7.11) он, очевидно, попадает в интервал $\left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\right)$, где

$$\alpha_1^{(k)}(t) = \frac{(t+1/2)\pi - h}{k+2}, \quad \alpha_2^{(k)}(t) = \frac{(t+1/2)\pi + h}{k+2}.$$

Пусть $t = 0, 1, \ldots, k+1$. Рассмотрим на отрезке $[0, \pi]$ точки

$$\alpha_0^{(k)}(t) = \frac{\pi(t+1/2)}{k+2}.$$

Каждая такая точка является центром интервала $\left(\alpha_1^{(k)}(t), \alpha_2^{(k)}(t)\right)$. Расстояние между правым концом $\alpha_2^{(k)}(t)$ промежутка с номером t и левым концом $\alpha_1^{(k)}(t+1)$ промежутка с номером $t+1$ равно $2(\pi/2 - h)/(k+2)$. Так как по условию $h < \pi/2$, эти промежутки не пересекаются.

Если $\alpha_0^{(k)}(t)$ удовлетворяет условию (7.10), а $\varphi(\alpha)$ обозначает выражение $(k+2)\alpha + \arg\zeta_k(\operatorname{ctg}\alpha)$, то имеют место неравенства

$$\varphi\left(\alpha_1^{(k)}(t)\right) < (t + 1/2)\pi < \varphi\left(\alpha_2^{(k)}(t)\right).$$

Отсюда следует, что в промежутке $\left(\alpha_1^{(k)}(t), \alpha_2^{(k)}(t)\right)$ имеется по крайней мере один корень α_* уравнения (7.4). При этом

$$\operatorname{ctg}\alpha_2^{(k)}(t) < q_* = \operatorname{ctg}\alpha_* < \operatorname{ctg}\alpha_1^{(k)}(t). \tag{7.12}$$

Пусть $q_t^{\mathrm{I}(k)} = \operatorname{ctg}\alpha_0^{(k)}(t)$ и $g_k = \operatorname{tg}(h/(k+2))$. Применив обычную тригонометрическую формулу для котангенса суммы двух величин, получим

$$\operatorname{ctg}\alpha_j^{(k)}(t) = q_t^{\mathrm{I}(k)} \pm g_k \frac{1 + \left(q_t^{\mathrm{I}(k)}\right)^2}{1 \mp g_k q_t^{\mathrm{I}(k)}}.$$

Верхние знаки выбираются в этой формуле при $j = 1$, а нижние — при $j = 2$. Неравенство (7.12), таким образом, эквивалентно следующему:

$$-g_k \frac{1 + \left(q_t^{\mathrm{I}(k)}\right)^2}{1 + g_k q_t^{\mathrm{I}(k)}} < q_* - q_t^{\mathrm{I}(k)} < g_k \frac{1 + \left(q_t^{\mathrm{I}(k)}\right)^2}{1 - g_k q_t^{\mathrm{I}(k)}}. \tag{7.13}$$

Последовательность g_k сходится к нулю при $k \to \infty$:

$$g_k = \frac{\arcsin\xi(\varkappa)}{k+2} + O(k^{-3}),$$

а последовательность $q_t^{\mathrm{I}(k)}$ при значениях $\alpha_0^{(k)}(t)$, удовлетворяющих условию (7.10), равномерно ограничена по k:

$$\left|q_t^{\mathrm{I}(k)}\right| = \left|\operatorname{ctg}\alpha_0^{\mathrm{I}(k)}(t)\right| \le \varkappa.$$

Тем самым погрешность формулы (7.13) становится при больших k сколь угодно малой. Ее легко оценить по модулю, воспользовавшись положительностью величин g_k и $q_t^{\mathrm{I}(k)}$:

$$\left|q_* - q_t^{\mathrm{I}(k)}\right| < g_k \frac{1 + \left(q_t^{\mathrm{I}(k)}\right)^2}{1 - g_k q_t^{\mathrm{I}(k)}}. \tag{7.14}$$

Это неравенство характеризует также погрешность первой асимптотической формулы (6.1).

Для некоторых корней λ_* полинома $E_k(\lambda)$ величины $q_* = \ln(-\lambda_*)/\pi$ могут удовлетворять одновременно двум неравенствам:

$$\varkappa_{\min} < \varkappa' \le \frac{q_*}{\sqrt{k+2}} < \frac{q_*}{\sqrt{k}} \le \varkappa < \varkappa_{\max}. \tag{7.15}$$

Для каждого такого q_* найдутся две величины $q_t^{\mathrm{I}(k)}$ и $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ с целыми t, j, пригодные для приближения q_*. В частности, величина $q_t^{\mathrm{I}(k)} = \operatorname{ctg} \alpha_0^{(k)}(t)$ не меньше $\varkappa'\sqrt{k}$, и поэтому

$$\alpha_0^{(k)}(t) \le \operatorname{arcctg}(\varkappa'\sqrt{k}) = \frac{1}{\varkappa'\sqrt{k}} + O(k^{-3/2}).$$

Таким образом, для достаточно больших k величина $\alpha_0^{(k)}(t)$ становится сколь угодно малой и, значит, $q_t^{\mathrm{I}(k)}$ допускает следующее приближение:

$$q_t^{\mathrm{I}(k)} = \frac{k+2}{\pi(t+1/2)} + O(k^{-1/2}). \tag{7.16}$$

Из (7.15) следует также, что $q_j^{\mathrm{II}(k)} \le \varkappa\sqrt{k}$. Это условие равносильно тому, что номер $j = j(k)$ с увеличением k растет не медленнее, чем $c\sqrt{k}$ с ненулевой постоянной c. Поэтому

$$q_j^{\mathrm{II}(k)} = \frac{k+2}{\pi(j+1/2)} + O(k^{-1/2}). \tag{7.17}$$

Из (7.16), (7.17) вытекает, что числа $q_t^{\mathrm{I}(k)}$ и $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ могут хорошо приближать одну и ту же величину q_* лишь в том случае, когда $j = t$; при этом разность между $q_j^{\mathrm{II}(k)}$ и $q_t^{\mathrm{I}(k)}$ имеет порядок $O(k^{-1/2})$.

Пусть для значения j_0 величина $q_* = q_{j_0}^{(k)}$ удовлетворяет неравенствам (7.15). Тогда для приближения корней $q_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, используем числа $q_j^{\mathrm{II}(k)}$. Оставшиеся корни $q_j^{(k)}$ будем аппроксимировать величинами $q_j^{\mathrm{I}(k)}$, $j = j_0+1, j_0+2, \ldots$. При этих значениях j каждое из чисел $q_j^{(k)}$ попадает в некоторую окрестность точки $q_j^{\mathrm{I}(k)}$, причем эти окрестности попарно не пересекаются. Таким образом, оставшихся корней $q_j^{(k)}$ ровно столько же, сколько точек $q_j^{\mathrm{I}(k)}$ при $j \geq j_0+1$. Значит, в каждом из промежутков $\left(\operatorname{ctg}\alpha_1^{(k)}(j), \operatorname{ctg}\alpha_2^{(k)}(j)\right)$ при $j \geq j_0+1$ содержится ровно один корень q_*, равный $q_j^{(k)}$. Отсюда и из (7.14) следует оценка

$$\left|q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{I}(k)}\right| < g_k \frac{1 + \left(q_j^{\mathrm{I}(k)}\right)^2}{1 - g_k q_j^{\mathrm{I}(k)}}, \tag{7.18}$$

где $g_k = \operatorname{tg} h/(k+2)$ и $h = \arcsin \xi(\varkappa)$.

Эта оценка доказана при условии, что $q_j^{(k)}/\sqrt{k+2} \leq \varkappa$. То же самое должно выполняться для отношения $q_j^{\mathrm{I}(k)}/\sqrt{k+2}$. Иными словами, справедливо неравенство

$$\frac{\pi(j+1/2)}{k+2} \geq \operatorname{arcctg}(\varkappa\sqrt{k+2}) = \frac{1}{\varkappa\sqrt{k+2}} + O(k^{-3/2}). \tag{7.19}$$

Имея в виду, что индекс j меняется с ростом k, т. е. $j = j(k)$, и переходя в (7.19) к пределу по $k \to \infty$, получим

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{j}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\varkappa\pi} > \frac{1}{\pi\varkappa_{\max}}.$$

Это — достаточное условие для применения первой асимптотической формулы (6.1).

Сравним формулы (6.1) и (6.3) при больших значениях k. Положим $\varkappa_j^{(k)} = q_j^{(k)}/\sqrt{k}$. В промежутке $\varkappa_{\min} < \varkappa_j^{(k)} < \varkappa_{\max}$ по мере увеличения $\varkappa_j^{(k)}$ погрешность формулы (6.3) растет, а погрешность формулы (6.1) уменьшается. В точке, где оценки погрешностей совпадают, как видно из табл. 5, 6, величина $\varkappa_j^{(k)}$ приблизительно равна 0.66. При этом имеет место приближенное равенство

$$\left|q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{I}(k)}\right| \cong \left|q_j^{(k)} - q_j^{\mathrm{II}(k)}\right| \cong 0.0001.$$

Расстояние между двумя последовательными значениями $q_j^{(k)}$ и $q_{j-1}^{(k)}$ примерно равно $\pi\varkappa_j^{(k)}\varkappa_{j-1}^{(k)} \cong 1.48$. Таким образом, погрешность оказывается более чем в 10^4 раз меньше расстояния между соседними корнями.

§ 8. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул

Рассмотрим одномерную задачу B_2, т. е. найдем функцию $u[\beta]$ полиномиального роста, продолжающую

$$f[\beta] = \int\limits_0^1 G(h\beta - y)\,dy$$

с отрезка $0 \le \beta \le N$ на все множество $\mathbb{Z}$, а также полиномы $Q_{m-1}^{(\pm)}[\beta]$ степени не больше $m-1$, удовлетворяющие двум дополнительным условиям:

1) функция $u[\beta]$ имеет на бесконечности определенную асимптотику:

$$\lim_{\beta\to\pm\infty}\left\{u[\beta] - Q_{m-1}^{(\pm)}[\beta] \pm Q_{2m-1}[\beta]\right\} = 0, \tag{8.1}$$

где

$$Q_{2m-1}[\beta] = \frac{h^{2m}[(N-\beta)^{2m} - \beta^{2m}]}{2(2m)!};$$

2) норма $\|u\|_m^D = \sqrt{D(u,u)}$ минимальна среди норм всевозможных продолжений функции $f[\beta]$, обладающих асимптотикой (8.1).

Знаки в равенстве (8.1) следует выбирать одновременно все верхние либо одновременно все нижние. Это же соглашение используем и дальше.

Существование и единственность решения задачи B_2 в случае тождественно нулевого полинома $Q_{2m-1}[\beta]$ доказаны в § 4 этой главы. Соответствующее доказательство несложно видоизменить так, чтобы оно годилось и для произвольного многочлена $Q_{2m-1}[\beta]$.

Решение задачи B_2 можно представить в виде суммы

$$u[\beta] = G_{hH}^{(m)}[\beta] * c[\beta] + P_{m-1}[\beta],$$

где функция $c[\beta]$ и полином $P_{m-1}[\beta]$ удовлетворяют системе (1.4)–(1.6). В частности, отсюда следует, что свертка дискретного полигармонического оператора $D_h^{(m)}[\beta] = h^{-2m} D_1^{(m)}[\beta]$ с функцией $u[\beta]$ обращается в нуль во всех точках β вне отрезка $[0, N]$, т. е. при $\beta < 0$ и $\beta > N$ имеет место равенство

$$v[\beta] = D_1^{(m)}[\beta] * u[\beta] = 0. \tag{8.2}$$

Дискретный полигармонический оператор $D_1^{(m)}[\beta]$ был представлен § 5 этой главы как свертка двух функций:

$$\frac{D_1^{(m)}[\beta]}{(2m-1)!} = \Delta_2^{[m]}[\beta] * E_{2m-2}^{-1}[\beta - m + 1]. \tag{8.3}$$

Здесь через $E_{2m-2}^{-1}[\beta]$ обозначены следующие коэффициенты Фурье:

$$E_{2m-2}^{-1}[\beta] = \int\limits_0^1 \frac{e^{i2\pi p\beta}}{E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})}\, dp,$$

а через $E_{2m-2}(\lambda)$ — полином Эйлера степени $2m-2$.

Свертка любой дискретной функции $\varphi[\beta]$ с финитной функцией $\Delta_2^{[m]}[\beta]$ представляет собой симметрическую разность $2m$-го порядка от $\varphi[\beta]$.

Обозначив через $B_{2m-2}[\beta]$ коэффициент Фурье произведения $e^{i2\pi p(m-1)} E_{2m-2}(e^{-i2\pi p})/(2m-1)!$, из равенства (8.3) получим

$$B_{2m-2}[\beta] * D_1^{[m]}[\beta] = \Delta_2^{(m)}[\beta]. \tag{8.4}$$

Лемма IX.5. *Решение $u[\beta]$ задачи B_2 вне отрезка $[0, N]$ представляет собой полином степени не выше $2m-1$:*

$$u[\beta] = \begin{cases} P_{2m-1}^{(-)}[\beta], & \beta < 0, \\ P_{2m-1}^{(+)}[\beta], & \beta > N. \end{cases} \tag{8.5}$$

Доказательство. Построим полином $P_{2m-1}^{(+)}[\beta]$, совпадающий с $u[\beta]$ при $\beta > N$. Из определения функции $B_{2m-2}[\beta]$ следует, что ее

носитель содержится в отрезке $[-m+1, m-1]$. Следовательно, при обращении в нуль для $\beta > N$ функции $v[\beta] = D_1^{(m)}[\beta] * u[\beta]$ свертка $B_{2m-2}[\beta] * v[\beta]$ также равна нулю, но уже при $\beta \geq N+m$. Отсюда, из (8.2) и (8.4) следует, что

$$\Delta_2^{[m]}[\beta] * u[\beta] = 0, \quad \beta \geq N+m. \tag{8.6}$$

Это соотношение представляет собой линейное однородное конечно-разностное уравнение, заданное при $\beta \geq N+m$. Размерность пространства его решений равна $2m$. Базис в этом пространстве, очевидно, образуют полиномы $[\beta]^\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Таким образом, решение $u[\beta]$ уравнения (8.6) является при $\beta \geq N+m$ многочленом степени $2m-1$:

$$u[\beta] = P_{2m-1}^{(+)}[\beta] = \sum_{\alpha=0}^{2m-1} c_\alpha [\beta]^\alpha, \quad \beta \geq N+m.$$

Коэффициенты c_α при $\alpha = m, m+1, \ldots, 2m-1$ найдем из асимптотического условия (8.1). При этом

$$P_{2m-1}^{(+)}[\beta] = -Q_{2m-1}[\beta] + Q_{m-1}^{(+)}[\beta].$$

Коэффициенты же многочлена $Q_{m-1}^{(+)}[\beta]$ степени $m-1$, очевидно, можно задать таким образом, чтобы при $\beta = N+1, N+2, \ldots, N+m$ значения полинома $P_{2m-1}^{(+)}[\beta]$ и функции $u[\beta]$ также совпадали. При этом $u[\beta] = P_{2m-1}^{(+)}[\beta]$ для всех $\beta > N$. В случае $\beta < 0$ равенство (8.5) выводится аналогично.

Лемма IX.5 доказана.

Следствие 8.1. *Многочлены $P_{2m-1}^{(\pm)}[\beta]$, задающие решение $u[\beta]$ вне отрезка $[0, N]$, можно представить в виде линейной комбинации многочленов $Q_{2m-1}[\beta]$ и $Q_{m-1}^{(\pm)}[\beta]$ из асимптотического равенства* (8.1):

$$P_{2m-1}^{(\pm)}[\beta] = \mp Q_{2m-1}[\beta] + Q_{m-1}^{(\pm)}[\beta].$$

Выведем формулы, позволяющие найти решение задачи B_1 по известному решению задачи B_2. Справедлива

Лемма IX.6. *Единственное решение* $c[\beta]$, $P_{m-1}[\beta]$ *системы* (1.4)–(1.6) *при* $n = 1$ *и* $2m \le N$ *связано с решением соответствующей задачи* B_2 *следующими соотношениями*:

$$c[\beta] = D_h^{(m)}[\beta] * u[\beta], \quad P_{m-1}[\beta] = \frac{1}{2}\big(Q_{m-1}^{(-)}[\beta] + Q_{m-1}^{(+)}[\beta]\big). \tag{8.7}$$

Доказательство. Возможность представления коэффициентов $c[\beta]$ в виде свертки $D_h^{(m)}[\beta] * u[\beta]$ обоснована в § 4 этой главы. Таким образом, достаточно доказать второе из равенств (8.7). Пусть

$$v[\beta] = G_h^{(m)}[\beta] * c[\beta],$$

где

$$G_h^{(m)}[\gamma] = \frac{h^{2m}}{2(2m-1)!}|\gamma|^{2m-1}.$$

Докажем, что при $\beta < 0$ и $\beta > N$ функция $v[\beta]$ представляет собой полином степени $2m-1$.

При $\beta < 0$ в силу свойств функции $c[\beta]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} v[\beta] &= \sum_{\gamma} G_h^{(m)}[\beta-\gamma]c[\gamma] = \frac{h}{2(2m-1)!}\sum_{\gamma=0}^{N}|\beta h - \gamma h|^{2m-1}c[\gamma] \\ &= \frac{h^{2m}}{2(2m-1)!}\sum_{\gamma=0}^{N}c[\gamma]\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{k}(-1)^k\beta^k\gamma^{2m-1-k} \\ &= \frac{h^{2m}}{2(2m-1)!}\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{k}(-1)^k\beta^k f_{2m-1-k} = R_{2m-1}[\beta], \end{aligned} \tag{8.8}$$

где

$$f_k = \sum_{\gamma=0}^{N} c[\gamma]\gamma^k. \tag{8.9}$$

Аналогичные выкладки показывают, что при $\beta > N$ функция $v[\beta]$ совпадает с полиномом $R_{2m-1}[\beta]$, взятым с противоположным знаком.

Как следует из определения функции $v[\beta]$, для всех $\beta \in \mathbb{Z}$ свертка функции $D_h^{(m)}[\beta]$ с разностью $u[\beta] - v[\beta]$ дает нуль:

$$D_h^{(m)}[\beta] * (u[\beta] - v[\beta]) = 0.$$

Это возможно лишь при условии, что $u[\beta]$ и $v[\beta]$ отличаются друг от друга на полиномиальное слагаемое степени $2m-1$, т. е.

$$u[\beta] = G_h^{(m)}[\beta] * c[\beta] + P_{2m-1}[\beta]. \tag{8.10}$$

Согласно выбору функция $u[\beta]$ при $0 \le \beta \le N$ совпадает с функцией $f[\beta]$ и при этом разность $f[\beta] - v[\beta]$ — это полином $P_{m-1}[\beta]$. Отсюда и из (8.10) заключаем, что полиномы $P_{2m-1}[\beta]$ и $P_{m-1}[\beta]$ совпадают при $0 \le \beta \le N$. Для $2m \le N$ это возможно лишь в случае, если $P_{2m-1}[\beta]$ и $P_{m-1}[\beta]$ совпадают во всех точках $\beta \in \mathbb{Z}$. Из (8.5) и (8.10) заключаем теперь, что

$$P_{2m-1}^{(\pm)}[\beta] = \mp R_{2m-1}[\beta] + P_{m-1}[\beta].$$

Подставив сюда представление полиномов $P_{2m-1}^{(\pm)}[\beta]$ из следствия 8.1, а затем сложив полученные равенства, придем к формуле (8.7).

Лемма IX.6 доказана.

Ввиду единственности оптимальной квадратурной формулы справедливо следующее очевидное равенство:

$$c[\beta] = c[N-\beta]. \tag{8.11}$$

Обозначив через $g[\beta]$ свертку $\Delta_2^{[m]}[\beta] * u[\beta]$ и пользуясь формулой (8.4), получим равенство

$$B_{2m-2}[\beta] * c[\beta] = N^{2m} g[\beta], \tag{8.12}$$

являющееся линейным конечно-разностным уравнением. Нас интересует то его решение, которое обращается в нуль при $\beta < 0$. Пользуясь этим дополнительным условием, а также (8.11), несложно получить для коэффициентов $c[\beta]$ рекуррентные соотношения.

Рассмотрим еще один алгоритм отыскания оптимальных коэффициентов. Будем считать, что отрезок $[0,1]$ преобразован в $[0,N]$, а шаг решетки h равен единице. В этом случае система B примет вид

$$\begin{gathered} G_m[\beta] * c[\beta] + P_{m-1}[\beta] = f[\beta], \quad 0 \le \beta \le N, \\ c[\beta] = 0, \quad \beta \notin [0,N], \\ \sum_{\beta=0}^{N} c[\beta]\beta^\alpha = f_\alpha, \quad \alpha = 0,1,\ldots,m-1. \end{gathered} \tag{8.13}$$

Здесь

$$G_m[\beta] = G_1^{(m)}[\beta], \quad f[\beta] = \int\limits_0^N G(\beta - y)\,dy, \quad f_\alpha = \int\limits_0^N x^\alpha\,dx.$$

Пусть, как и ранее, $u[\beta]$ — это решение задачи B_2, т. е. совпадает с дискретной функцией $P_{m-1}[\beta] + G_m[\beta] * c[\beta]$. Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = u[\beta]. \tag{8.14}$$

Если $\hat{u}[\beta]$ — его решение, то, как следует из (8.4), коэффициенты $c[\beta]$ связаны с $\hat{u}[\beta]$ соотношением

$$c[\beta] = \Delta_2^{[m]}[\beta] * \hat{u}[\beta].$$

Таким образом, искомые коэффициенты $c[\beta]$ можно найти, решив уравнение (8.14), в котором правая часть $u[\beta]$ задается следующим образом:

$$u[\beta] = \begin{cases} Q_{[m,2m-1]}[\beta] + Q_{m-1}^{(-)}[\beta], & \beta < 0, \\ [\beta^{2m} + (N-\beta)^{2m}]/2(2m)!, & 0 \le \beta \le N, \\ -Q_{[m,2m-1]}[\beta] + Q_{m-1}^{(+)}[\beta], & \beta > N. \end{cases}$$

Здесь

$$Q_{[m,2m-1]}[\beta] = \sum_{i=m}^{2m-1} q_i \beta^i,$$

где

$$q_i = \frac{(-1)^i N^{2m-i}}{2i!(2m-i)!},$$

а $Q_{m-1}^{(\pm)}[\beta]$ — некоторые многочлены степени не выше $m-1$.

Многочлен $Q_{[m,2m-1]}[\beta]$ можно записать в более удобной форме:

$$\begin{aligned} Q_{[m,2m-1]}[\beta] &= \sum_{i=0}^{2m} q_i \beta^i - \frac{\beta^{2m}}{2(2m)!} - \sum_{i=0}^{m-1} q_i \beta^i \\ &= \frac{(N-\beta)^{2m} - \beta^{2m}}{2(2m)!} - P_{m-1}^{(0)}[\beta]. \end{aligned}$$

Подставив $Q_{[m,2m-1]}[\beta]$ в предыдущую формулу для $u[\beta]$, получим

$$u[\beta] = \frac{1}{2(2m)!}\begin{cases} (N-\beta)^{2m} - \beta^{2m} + P^{(-)}_{m-1}[\beta], & \beta < 0, \\ \beta^{2m} + (N-\beta)^{2m}, & 0 \le \beta \le N, \\ \beta^{2m} - (N-\beta)^{2m} + P^{(+)}_{m-1}[\beta], & \beta > N. \end{cases}$$

Вид многочленов $P^{(\pm)}_{m-1}[\beta]$ уточнять не будем: в итоговую формулу они не войдут.

Решение уравнения (8.14) можно искать в виде

$$\hat{u}[\beta] = \hat{u}_0[\beta] + \sum_{i=1}^{m-1} a_i\lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i\lambda_i^{N-\beta},$$

где $\hat{u}_0[\beta]$ — частное решение (8.14), а λ_i — корни многочлена Эйлера $E_{2m-2}(\lambda)$, лежащие внутри отрезка $[-1,0]$. Если к тому же свертка $\Delta_2^{[m]}[\beta] * \hat{u}_0[\beta]$ совпадает с единицей, то имеем

$$c[\beta] = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_i'\lambda_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i'\lambda_i^{N-\beta}. \tag{8.15}$$

Аналогичный подход применили И. Шенберг и С. Силлиман в [219], рассчитав значения коэффициентов для $m \le 7$. При этом предполагалось, что $\beta > 0$, а $c[\beta] = 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i\lambda_i^{\beta}$. Оказалось, что величины a_i принимают большие по модулю значения с разными знаками, тогда как отклонения функции $c[\beta]$ от единицы невелики. Это замечание позволяет предположить, что при больших m представление вида (8.15) для вычисления коэффициентов может оказаться неэффективным. В связи с этим в [57] предложено при больших m не искать $c[\beta]$ в виде разложения (8.15), что сводит задачу к отысканию коэффициентов a_i', b_i', а сразу дать алгоритм вычисления первой и второй сумм в (8.15). Эта идея была реализована в [57] для значений $m \le 30$. Дадим краткое описание соответствующего алгоритма.

Представим функцию $B_{2m-2}[\beta]$ в виде следующей свертки:

$$B_{2m-2}[\beta] = \frac{1}{(2m-1)!} B^{(-)}_{m-1}[\beta] * B^{(+)}_{m-1}[\beta]. \tag{8.16}$$

Корни характеристических многочленов, соответствующих разностным операторам $B_{m-1}^{(-)}[\beta]$ и $B_{m-1}^{(+)}[\beta]$, совпадают с корнями многочлена Эйлера $E_{2m-2}(\lambda)$ степени $2m-2$, лежащими соответственно внутри и вне отрезка $[-1,0]$. Пусть характеристические многочлены для $B_{m-1}^{(\pm)}[\beta]$ имеют вид

$$E_{m-1}^{(-)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^{m-1} + k_1\lambda^{m-2} + \cdots + k_{m-1},$$

$$E_{m-1}^{(+)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda_i}\right) = \lambda^{m-1} + g_1\lambda^{m-2} + \cdots + g_{m-1}.$$

Тогда очевидно, что $g_i = k_{m-1-i}/k_{m-1}$ и

$$B_{m-1}^{(-)}[\beta] = \sum_{i=0}^{m-1} k_i\delta[\beta - i], \quad B_{m-1}^{(+)}[\beta] = \sum_{i=0}^{m-1} g_i\delta[\beta + m - 1 - i].$$

Пусть $\widehat{Q}^{(-)}[\beta]$ и $\widehat{Q}^{(+)}[\beta]$ — многочлены степени $2m-1$, заданные соответственно на интервалах $(-\infty, m-1]$ и $[N-m+1, \infty)$ и являющиеся решениями следующих уравнений:

$$B_{2m-2}[\beta] * \widehat{Q}^{(\mp)}[\beta] = \pm[(N-\beta)^{2m} - \beta^{2m}] + P_{m-1}^{(\mp)}[\beta]. \qquad (8.17)$$

На отрезке $[-m+1, N+m-1]$ решение неоднородного уравнения

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = \beta^{2m} + (N-\beta)^{2m}$$

будем искать в виде суммы

$$\hat{u}[\beta] = \hat{u}_0[\beta] + \hat{u}_-[\beta] + \hat{u}_+[\beta].$$

Здесь через $\hat{u}_0[\beta]$ обозначено частное решение уравнения

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}_0[\beta] = f[\beta], \quad 0 \le \beta \le N,$$

а функции $\hat{u}_+[\beta]$ и $\hat{u}_-[\beta]$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$B_{m-1}^{(\mp)}[\beta] * \hat{u}_\mp[\beta] = 0. \qquad (8.18)$$

Начальные условия для $\hat{u}_{\mp}[\beta]$ получим, согласовав функции $\hat{u}[\beta]$, $\widehat{Q}^{(-)}[\beta]$, $\widehat{Q}^{(+)}[\beta]$ в пересечении их областей определения:

$$\hat{u}_-[\beta] + \hat{u}_+[\beta] + \hat{u}_0[\beta] = \widehat{Q}^{(\mp)}[\beta]. \tag{8.19}$$

Здесь β изменяется на отрезке $[-m+1, m-1]$, если в правой части формулы берется знак минус. В противном случае β изменяется на отрезке $[N-m+1, N+m-1]$. Заметим, что

$$\hat{u}_-[\beta] = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{\beta}, \quad \hat{u}_+[\beta] = \sum_{i=1}^{m-1} b_i \lambda_i^{N-\beta},$$

и возьмем N настолько большим, чтобы в (8.19) можно было пренебречь или $\hat{u}_+[\beta]$, или $\hat{u}_-[\beta]$. Тогда (8.19) сведется к следующим равенствам:

$$\hat{u}_-[\beta] + \hat{u}_0[\beta] = \widehat{Q}^{(-)}[\beta], \quad -m+1 \le \beta \le m-1, \tag{8.20}$$

$$\hat{u}_+[\beta] + \hat{u}_0[\beta] = \widehat{Q}^{(+)}[\beta], \quad N-m+1 \le \beta \le N+m-1. \tag{8.21}$$

Многочлены $\widehat{Q}^{(-)}[\beta]$ и $\widehat{Q}^{(+)}[\beta]$ определены с точностью до полиномиальных слагаемых степени $m-1$, ибо только с такой точностью известна правая часть в (8.17). В связи с этим удобнее вместо $\hat{u}_-[\beta]$ и $\hat{u}_+[\beta]$ ввести новые неизвестные функции $\xi_-[\beta]$ и $\xi_+[\beta]$, являющиеся разностями m-го порядка от $\hat{u}_-[\beta]$ и $\hat{u}_+[\beta]$. При таком подходе неизвестные многочлены степени $m-1$, имеющиеся в условиях согласования (8.19)–(8.21), исчезают. Итак, положим

$$\xi_{\mp}[\beta] = \Delta_{\pm}^{(m)} * \hat{u}_{\mp}[\beta],$$

где

$$\Delta_+[\beta] = \delta[\beta+1] - \delta[\beta], \quad \Delta_-[\beta] = \delta[\beta] - \delta[\beta-1].$$

Оператор $\Delta_{\pm}^{(m)}[\beta]*$ означает последовательное взятие m раз свертки с $\Delta_{\pm}[\beta]$. Очевидно, что функции $\xi_{\pm}[\beta]$ удовлетворяют соотношениям (8.18). Начальные же условия для $\xi_-[\beta]$ и $\xi_+[\beta]$ получим из (8.20), (8.21):

$$\begin{aligned} \xi_-[\beta] + \tau_1[\beta] = 0, \quad -m+1 \le \beta \le -1, \\ \xi_+[\beta] + \tau_2[\beta] = 0, \quad N+1 \le \beta \le N+m-1, \end{aligned} \tag{8.22}$$

где через $\tau_j[\beta]$ обозначены следующие функции дискретной переменной:

$$\tau_1[\beta] = \Delta_+^{(m)}[\beta] * (\hat{u}_0[\beta] - \widehat{Q}^{(-)}[\beta]),$$
$$\tau_2[\beta] = \Delta_-^{(m)}[\beta] * (\hat{u}_0[\beta] - \widehat{Q}^{(+)}[\beta]).$$

Преобразуем условия (8.22) к более компактному виду. Для этого, во-первых, выберем решение $\hat{u}_0[\beta]$ специальным образом и, во-вторых, найдем явный вид коэффициентов при старших степенях β у многочленов $\widehat{Q}^{(\pm)}[\beta]$.

Итак, найдем при $0 \le \beta \le N$ частное решение уравнения

$$B_{2m-2}[\beta] * \hat{u}[\beta] = \frac{\beta^{2m} + (N-\beta)^{2m}}{2(2m)!}. \tag{8.23}$$

Воспользуемся известным тождеством [65, 230]:

$$\sum_{k=0}^{2m-2} \alpha_k^{(2m-2)} \binom{x+k}{2m-1} = x^{2m-1}. \tag{8.24}$$

Здесь через $\alpha_k^{(2m-2)}$ обозначены коэффициенты многочлена Эйлера

$$E_{2m-2}(\lambda) = \sum_{k=0}^{2m-2} \alpha_k^{(2m-2)} \lambda^k,$$

а величины в круглых скобках обозначают следующие полиномы от переменной x:

$$\binom{x+k}{2m-1} = \frac{(x+k)(x+k-1)\dots(x+k-2m+2)}{(2m-1)!}.$$

Тождество Ворпицкого (8.24) эквивалентно следующему конечно-разностному уравнению:

$$B_{2m-2}[\beta] * (\beta + m - 1)^{[2m-1]} = \beta^{2m-1}, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

где, как и прежде, $x^{[k]}$ обозначает ньютонову степень аргумента x. Пользуясь тождеством Ворпицкого, нетрудно убедиться, что интеграл

$$I_m[\beta] = \int_0^\beta (x+m-1)^{[2m-1]}\,dx \tag{8.25}$$

в сумме с некоторой постоянной дает решение уравнения

$$B_{m-2}[\beta] * v[\beta] = \frac{\beta^{2m}}{2m}.$$

Подынтегральная функция в (8.25) — это полином $R_{2m-1}(x)$ степени $2m-1$ с единичным коэффициентом при старшей степени x. Функция же $R_{2m-1}(-x)$ — это, как легко заметить, полином с коэффициентом -1 при старшей степени x, причем нули у $R_{2m-1}(-x)$ те же, что у многочлена $R_{2m-1}(x)$. Следовательно, $R_{2m-1}(x)$ — это нечетная функция x, и по этой причине $I_m[-\beta] = I_m[\beta]$ для всех $\beta \in \mathbb{Z}$. Далее, дискретная функция

$$\hat{u}_0[\beta] = \frac{I_m[\beta] + I_m[N-\beta]}{2(2m-1)!}$$

в сумме с постоянной дает решение неоднородного уравнения (8.23).

Аналогично доказывается, что решения уравнений (8.17)— это многочлены $\widehat{Q}^{(\mp)}[\beta]$, определяемые на промежутках $(-\infty, m-1]$ и $[N-m+1, \infty)$ соответственно с помощью равенств

$$\widehat{Q}^{(\mp)}[\beta] = \pm\frac{I_m[\beta-N] \mp I_m[\beta]}{2(2m-1)!} + \widehat{T}^{(\mp)}_{m-1}[\beta]. \tag{8.26}$$

Многочлены $\widehat{T}^{(\mp)}_{m-1}[\beta]$ степени $m-1$ в этих равенствах неизвестны.

Подставив (8.26) в (8.22), преобразуем начальные условия для $\xi_\mp[\beta]$ к нужному виду. Проведем необходимые выкладки для левого конца отрезка $[0, N]$. Для $\beta = -m+1, \ldots, -1$ имеем

$$\xi_-[\beta] = -\Delta_+^{(m)}[\beta] * \{\hat{u}_0[\beta] - \widehat{Q}^{(-)}[\beta]\} = -\frac{\Delta_+^{(m)}[\beta] * I_m[\beta]}{(2m-1)!}. \tag{8.27}$$

Легко видеть, что для любой непрерывной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\Delta_+[\beta] * \int\limits_0^\beta f(x)\,dx = \int\limits_0^\beta \Delta_+ * f(x)\,dx + \int\limits_0^1 f(x)\,dx,$$

где через $\Delta_+ * f(x)$ обозначена разность $f(x+1) - f(x)$. Это равенство несложно обобщить на случай произвольной степени оператора $\Delta_+[\beta]$. Имеем

$$\Delta_+^{(m)}[\beta] * \int\limits_0^\beta f(x)\,dx = \int\limits_0^\beta \Delta_+^{(m)} * f(x)\,dx + \int\limits_0^1 \Delta_+^{(m-1)} * f(x)\,dx.$$

Применив последнее соотношение к интегралу (8.25) и воспользовавшись формулой (VIII.1.10), получим

$$\frac{\Delta_+^{(m)}[\beta] * I_m[\beta]}{(2m-1)!} = \int\limits_0^\beta \frac{(x+m-1)^{[m-1]}}{(m-1)!}\,dx + \int\limits_0^1 \frac{(x+m-1)^{[m]}}{m!}\,dx. \tag{8.28}$$

Как известно, ньютонова степень аргумента x разложима в линейную комбинацию по обычным степеням x с коэффициентами, представляющими собой числа Стирлинга $s(m,k)$ первого рода:

$$x(x-1)\ldots(x-m+1) = \sum_{k=1}^{m} s(m,k)x^k \equiv S_m(x),$$

$$x(x+1)\ldots(x+m-1) = (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m} s(m,k)x^k \equiv \overline{S}_m(x).$$

Использовав эти обозначения в (8.28), начальные условия (8.27) для $\xi_-[\beta]$ перепишем следующим образом:

$$\xi_-[\beta] = -\int\limits_0^\beta \frac{\overline{S}_m(x)}{x(m-1)!}\,dx - \int\limits_0^1 \frac{\overline{S}_m(x)}{m!}\,dx, \quad \beta = -1,\ldots,-m+1. \tag{8.29}$$

Для данного m функцию $\xi_-[\beta]$ переобозначим через $\xi_-^{(m)}[\beta]$. Величина $\xi_-^{(m)}[0]$ при этом задается интегралом:

$$\xi_-^{(m)}[0] = -\frac{1}{m!}\int\limits_0^1 \overline{S}_m(x)\,dx.$$

При $i = 1, \ldots, m-1$ справедливо равенство

$$\xi_-^{(m)}[-i] = \xi_-^{(m)}[-i+1] - \xi_-^{(m-1)}[-i+1].$$

Эти рекуррентные соотношения для $\xi_-^{(m)}[\beta]$ легко вывести, воспользовавшись формулой $\overline{S}_m(x) = x\overline{S}_{m-1}(x) + (m-1)\overline{S}_{m-1}(x)$. Таким образом, весь набор начальных данных (8.29) при фиксированном m легко получить, вычислив лишь величины $\xi_-^{(0)}[0], \xi_-^{(1)}[0], \ldots, \xi_-^{(m)}[0]$.

Начальные условия обладают свойством симметрии либо антисимметрии относительно точки $-m/2$ при четном либо нечетном m соответственно:

$$\xi_-^{(m)}[-i] = (-1)^m \xi_-^{(m)}[i-m], \quad 1 \le i \le m-1.$$

Подведем итоги. Для отыскания коэффициентов оптимальных квадратурных формул вблизи нуля следует решить уравнение

$$B_{m-1}^{(-)}[\beta] * \xi_-[\beta] = 0$$

при начальных данных

$$\xi_-[-i] = -\int\limits_0^\beta \frac{\overline{S}_m(x)}{x(m-1)!}\,dx - \int\limits_0^1 \frac{\overline{S}_m(x)}{m!}\,dx, \quad 1 \le i \le m-1.$$

Искомые коэффициенты при этом выражаются формулой

$$c[\beta] = 1 + \Delta_-^{(m)}[\beta] * \xi_-[\beta], \quad \beta > 0. \tag{8.30}$$

Отметим, что при известных корнях λ_j многочлена Эйлера $E_{2m-2}(\lambda)$ коэффициенты k_i разностного оператора

$$B_-^{(m-1)}[\beta] = \sum_{i=0}^{m-1} k_i \delta[\beta - i]$$

можно вычислить по формуле Ньютона:

$$k_j = \frac{k_{j-1}X_1 - k_{j-2}X_2 + \cdots + (-1)^{j-1}X_j}{j},$$

где

$$X_j = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^j$$

Коэффициент $c[0]$ по формуле (8.30) вычислить не удается. Чтобы найти его, следует использовать формулу:

$$c[0] = \Delta_2^{[m]}[\beta] * \hat{u}[\beta]\big|_{\beta=0}, \tag{8.31}$$

а оператор $\Delta_2^{[m]}[\beta]$ записать в виде свертки:

$$\Delta_2^{[m]}[\beta] = \Delta_-[\beta] * \Delta_-^{(2m-1)}[\beta + m]. \tag{8.32}$$

После подстановки (8.32) в (8.31) и проведения несложных выкладок с полученными ранее представлениями функции $\hat{u}[\beta]$ на отрезках $[-m+1, N+m-1]$ и $(-\infty, m-1]$ придем к равенству

$$c[0] = \frac{1}{2} + \Delta_-^{(m-1)}[\beta] * \xi_-[\beta]\big|_{\beta=0}.$$

Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вблизи правого отрезка $[0, N]$ можно найти с помощью равенства (8.11).

Использовав описанный алгоритм, Ф. Я. Загирова вычислила коэффициенты оптимальных формул для $m \leq 30$. Соответствующие таблицы опубликованы в [57]. Для $m \leq 7$ ее результаты полностью совпали с числовыми значениями коэффициентов, полученными ранее И. Шенбергом и С. Силлиманом [219]. Особо следует отметить, что при $m \geq 7$ среди коэффициентов оптимальных квадратурных формул появляются отрицательные. Более того, как показали вычисления, при фиксированном значении N и растущем m быстро увеличивается ширина пограничного слоя, т. е. расширяется множество тех β, в которых оптимальные коэффициенты сильно отличаются от единицы. В этом слое функция $c[\beta]$ осциллирует, т. е. принимает как положительные, так и отрицательные значения, меняя при этом знак от точки к точке. Представляет интерес задача об аналитической оценке роста суммы модулей оптимальных коэффициентов при увеличении m.

Литература

1. **Акопян Г. Г.** Последовательности кубатурных формул с кубической решеткой для областей с вырожденными углами // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 27–35.
2. **Бабенко К. И.** О некоторых задачах теории приближений и математического анализа // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 33–27.
3. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
4. **Бабушка И.** Оптимальные квадратурные формулы // Докл. АН СССР. 1963. Т. 199, № 2. С. 277–289.
5. **Бабушка И., Соболев С. Л.** Оптимизация численных методов // Apl. Mat. 1965. № 10. С. 96–129.
6. **Бахвалов Н. С.** О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. МГУ. 1959. № 4. С. 3–18.
7. **Бахвалов Н. С.** Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 1. С. 64–77.
8. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальных свойствах формул Адамса и Грегори // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз, 1963. С. 9–26.
9. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы (Дополнение к «Журн. вычисл. математики и мат. физики»). 1964. № 4. С. 5–63.

10. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 5. С. 1011–1020.

11. **Бахвалов Н. С.** Постановки задач численного интегрирования // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1972. Вып. 14. С. 40–45.

12. **Бахвалов Н. С.** Оценка снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 6. С. 655–664.

13. **Бесов О. В.** Межъячеечные усреднения и оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С. Л. Соболева и их обобщениях // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1977. Т. 143. С. 42–56.

14. **Бесов О. В.** Оценки ошибок кубатурных формул по гладкости функций // Докл. Болг. АН. 1978. Т. 31, № 8. С. 949–952.

15. **Бесов О. В.** Оценки ошибок кубатурных формул весового интегрирования // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 36–45.

16. **Бесов О. В.** Оценки погрешности кубатурных формул по гладкости функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1979. Т. 150. С. 11–23.

17. **Блинов Н. И.** Алгоритм для вычисления кратных интегралов от функций с особенностями // Алгоритмы и программы Информ. бюл./ ВНТИЦентр. М., 1974. № 2.

18. **Блинов Н. И.** Приближенное вычисление двойных интегралов // Алгоритмы и программы Информ. бюл./ ВНТИЦентр. М., 1974. № 3.

19. **Блинов Н. И.** Об оптимальных по порядку сходимости кусочно-решетчатых кубатурных формулах для некоторых классов функций с особенностями // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977. № 1. С. 25–42.

20. **Блинов Н. И., Войтишек Л. В.** Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем для куба // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1970. Вып. 38. С. 8–15.

21. **Блинов Н. И., Войтишек Л. В.** О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных

многогранников // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. № 1. С. 5–15.

22. **Буренков В. И.** Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве // Итоги науки. Математический анализ, 1965. М.: Ин-т научной информации. 1966. С. 71–155.

23. **Буренков В. И.** Интегральное представление Соболева и формула Тейлора // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.

24. **Васкевич В. Л.** О норме в $L_2^{-m}[0,1]$ одного функционала погрешности с регулярным пограничным слоем // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. № 1. С. 41–59.

25. **Васкевич В. Л.** О сходимости квадратурных формул Эйлера — Маклорена на одном классе гладких функций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 1. С. 1040–1043.

26. **Васкевич В. Л.** О сходимости квадратурных формул Грегори // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1041–1043.

27. **Васкевич В. Л.** Об одной задаче теории квадратурных формул. Новосибирск, 1982. 50 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт математики; № 3).

28. **Васкевич В. Л.** Классы бесконечно дифференцируемых функций и приближенное интегрирование // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. № 2. С. 52–64.

29. **Васкевич В. Л.** Приближенное вычисление интеграла Дирихле от гармонической функции // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1991. С. 64–83.

30. **Васкевич В. Л.** Кубатурные формулы в гармонических пространствах Бергмана // Кубатурные формулы и их приложения. Тезисы семинара — совещания. Уфа — Красноярск, 1995. С. 10.

31. **Васкевич В. Л.** Кубатурныеформулы в гармонических пространствах типа Бергмана — Половинкина // Кубатурные формулы и их приложения. Доклады семинара — совещания. Уфа — Красноярск, 1996. С. 4–13.

32. **Войтишек Л. В.** О вычислении коэффициентов для формул механических кубатур // Apl. Mat. 1965. № 10.
33. **Войтишек Л. В.** Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 2. С. 417–419.
34. **Войтишек Л. В.** Вычисление ζ-функции Эпштейна // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1970. Вып. 38. С. 8–15.
35. **Войтишек Л. В.** О выборе решеток для интегрирования по формулам С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 774–781.
36. **Войтишек Л. В.** Построение кубатурных формул с переменой шага // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 46–53.
37. **Гельфанд Н. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н.** Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 32.
38. **Гельфанд Н. М., Ченцов Н. Н.** О численном вычислении континуальных интегралов // ЖЭТФ. 1956. Т. 31, № 6. С. 1106.
39. **Гельфонд А. О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
40. **Годунов С. К.** Теория спиноров и представлений группы вращений. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1978.
41. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
42. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
43. **Дидур Л. И.** Весовые эрмитовы кубатурные формулы на периодических функциях // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. № 1. С. 52–70.
44. **Диткин В. А., Люстерник Л. А.** Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере // Вычислительная математика и вычислительная техника. М.: Машгиз, 1953. № 1. С. 3–13.
45. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.

46. **Дубинский Ю. А.** Некоторые вопросы теории пространств Соболева бесконечного порядка и нелинейных уравнений // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980. С. 75–80.
47. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
48. **Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К.** Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1980.
49. **Ермаков С. М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
50. **Еругин Н. П., Соболев С. Л.** Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций // Прикл. математика и механика. 1950. Т. 14, вып 2. С. 193–196.
51. **Жамалов З. Ж.** Построение функций Грина для нахождения экстремальной функции кубатурных формул в $L_2^{(m)}(\Omega)$ // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1970. Вып. 38. С. 29–35.
52. **Жамалов З. Ж.** Об одной экстремальной задаче квадратурных формул с заданием производных // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1973.
53. **Женсыкбаев А. А.** Характеристические свойства наилучших квадратурных формул // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 1. С. 49–68.
54. **Женсыкбаев А. А.** Об оптимальных методах восстановления интеграла // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 104–107.
55. **Женсыкбаев А. А.** Моносплайны минимальной нормы и квадратурные формулы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 4. С. 171–196.
56. **Загирова Ф. Я.** Оценка остаточного члена кубатурных формул с регулярным пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1262–1275.
57. **Загирова Ф. Я.** О построении оптимальных квадратурных формул с равноотстоящими узлами. Новосибирск, 1982. 28 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт математики; № 25).

58. **Загирова Ф. Я.** Об одном представлении коэффициентов оптимальных квадратурных формул // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. № 2. С. 71–86.

59. **Исраилов М. И., Шушбаев С., Эндибаев К.** Об одном алгоритме подсчета ζ-функции Эпштейна // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1970. Вып. 38. С. 36–41.

60. **Исраилов М. И., Эндибаев К.** Ряд Фурье дзета-функции Эпштейна // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1975. Вып. 34. С. 15–38.

61. **Казаков А. Н., Лебедев В. И.** Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра // Тр. Мат. ин-та РАН. 1994. Т. 203. С. 100–112.

62. **Калмыков В. Д.** Асимптотически оптимальная квадратурная формула в пространстве // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1972. Вып. 14. С. 24–29.

63. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

64. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы. М.: Мир, 1976.

65. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978.

66. **Коняев С. И.** Квадратурные формулы для сферы 25–29-го порядка точности // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1975. Вып. 32. С. 69–76.

67. **Коняев С. И.** Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 4. С. 629–634.

68. **Коняев С. И.** Формулы численного интегрирования на сфере // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. № 1. С. 75–82.

69. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.

70. **Коробов Н. М.** Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

71. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.

72. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

73. **Лебедев В. И.** О квадратурах на сферах наивысшей алгебраической степени точности // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 31–35.

74. **Лебедев В. И.** Вычисление квадратур типа Гаусса — Маркова для областей и весов, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1975. Вып. 32. С. 77–84.

75. **Лебедев В. И.** Значение узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса — Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 48–54.

76. **Лебедев В. И.** О квадратурах на сфере // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 26, № 2. С. 293–306.

77. **Лебедев В. И.** Квадратурные формулы для сферы 25-29 порядка точности // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 132–141.

78. **Лебедев В. И.** Квадратурная формула 35-го порядка для сферы // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 110–114.

79. **Лебедев В. И.** Квадратурная формула для сферы 59-го алгебраического порядка точности // Докл. РАН. 1994. Т. 338, № 4. С. 454–456.

80. **Лебедев В. И., Скороходов А. Л.** Квадратурные формулы для сферы 41-, 47- и 53-го порядков // Докл. РАН. 1992. Т. 324, № 3. С. 519–524.

81. **Маергойз Л. С.** Элементы теории роста выпуклых и целых функций многих переменных. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1976.

82. **Мандельбройт С.** Квазианалитические классы функций. Л.; М.: ОНТИ, 1937.

83. **Мандельбройт С.** Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

84. **Мысовских И. П.** Об инвариантных кубатурных формулах // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 69–78.

85. **Мысовских И. П.** Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.

86. **Мысовских И. П.** О кубатурных формулах, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Кубатурные формулы и их приложения. Доклады семинара — совещания. Уфа — Красноярск: 1996. С. 41–51.

87. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

88. **Никольский С. М.** Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979.

89. **Носков М. В.** О декартовых произведениях кубатурных формул // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 114–116.

90. **Носков М. В.** Приближенное интегрирование функций, периодических по некоторым переменным // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. № 1. С. 83–102.

91. **Носков М. В.** Асимптотически оптимальные кубатурные формулы на решетчатых поверхностях // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. № 2. С. 103–112.

92. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы в периодическом случае // Мат. заметки. 1968. Т. 179, № 3. С. 317–322.

93. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 3. С. 542–544.

94. **Половинкин В. И.** Некоторые оценки норм функционалов ошибок кубатурных формул // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 3. С. 317–322.

95. **Половинкин В. И.** Асимптотически оптимальные в $L_2^{(m)}(\Omega)$ кубатурные формулы // Вопросы вычислительной и приклад-

ной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1970. Вып. 38. С. 88–92.

96. **Половинкин В. И.** Кубатурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 1. С. 42–44.

97. **Половинкин В. И.** Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 177–196.

98. **Половинкин В. И.** Составные кубатурные формулы // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1972. Вып. 14. С. 53–62.

99. **Половинкин В. И.** О кубатурных формулах с регулярным пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 4. С. 951–954.

100. **Половинкин В. И.** Обобщение теории Соболева на кубатурные формулы, точные на многочленах степени не выше $m - [(n+1)/2]$ // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 5. С. 1144–1148.

101. **Половинкин В. И.** Последовательности функционалов с пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 2. С. 413–429.

102. **Половинкин В. И.** Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 328–335.

103. **Половинкин В. И.** Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1255–1262.

104. **Половинкин В. И.** Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977. № 1. С. 149–158.

105. **Половинкин В. И.** Решетчатые кубатурные формулы с положительными коэффициентами // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 79–87.

106. **Половинкин В. И.** Сходимость последовательностей квадратурных формул с пограничным слоем на конкретных функциях // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 183–191.

107. **Половинкин В. И.** Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных и квадратурных формул // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 116–118.

108. **Половинкин В. И.** Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем и последовательности типа Грегори // Квадратурные и кубатурные формулы. Решение функциональных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 7–25.

109. **Половинкин В. И.** Последовательности кубатурных формул с периодическими системами узлов // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 147–155.

110. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы, соответствующие интерполяционным операторам с пограничным слоем // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. № 1. С. 103–115.

111. **Половинкин В. И.** О существовании наилучших кубатурных формул // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1982. Вып. 69. С. 145–153.

112. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы с произвольными узлами // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. № 2. С. 113–128.

113. **Половинкин В. И.** О реализации функционалов ошибок кубатурных формул в пространствах типа L_p^m // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. С. 125–136.

114. **Половинкин В. И.** Асимптотически наилучшие кубатурные формулы // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 151–160.

115. **Половинкин В. И.** Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем и универсальная асимптотическая оптимальность // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации. Пенза: Политехн. ин-т. 1991. С. 36–41.

116. **Половинкин В. И.** Асимптотически оптимальные последовательности функционалов в $L_p^m[a,b]$ при больших m // Кубатурные формулы и их приложения. Доклады семинара — совещания. Уфа — Красноярск, 1996. С. 64–69.

117. **Половинкин В. И., Дидур Л. И.** Асимптотически оптимальные последовательности эрмитовых формул // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 3. С. 663–669.

118. **Рамазанов М. Д.** Построение асимптотически оптимальных формул в $\widetilde{W}_2^m(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 290–293.

119. **Рамазанов М. Д.** Об оптимальных функционалах ошибки над периодическими функциями из банаховых пространств // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 481–484.

120. **Рамазанов М. Д.** Асимптотически оптимальный функционал ошибки над неизотропным гильбертовым пространством // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1972. Вып. 14. С. 72–82.

121. **Рамазанов М. Д.** Оптимальный функционал ошибки над периодическими функциями из пространств $\widetilde{H}_p^\mu$ // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 1. С. 225–229.

122. **Рамазанов М. Д.** Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973.

123. **Рамазанов М. Д.** Асимптотическая оптимальность решетчатых кубатурных формул на гильбертовых пространствах // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 1. С. 44–45.

124. **Рамазанов М. Д.** Асимптотическая оптимальность решетчатых кубатурных формул на пространствах непрерывно дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 2. С. 270–273.

125. **Рамазанов М. Д.** Кубатурные формулы на пространствах непрерывно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1263–1285.

126. **Рамазанов М. Д.** О порядке сходимости решетчатых кубатурных формул с доминирующей производной // Докл. АН СССР. 1984. Т. 227, № 3. С. 551–553.

127. **Рамазанов М. Д.** Универсальная оптимальность решетчатых кубатурных формул // Докл. РАН. 1992. Т. 324, № 5. С. 933–937.

128. **Рамазанов М. Д.** Функции пограничного слоя асимптотически оптимальных решетчатых кубатурных формул // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 1. С. 25–26.

129. **Рамазанов М. Д.** Оптимизация расположения узлов решетчатых кубатурных формул // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 4. С. 456–457.

130. **Рамазанов М. Д., Блинов Н. И., Войтишек Л. В. и др.** Развитие теории кубатурных формул Соболева // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 118–126.

131. **Рамазанов М. Д., Умарханов И.** Квадратурная формула с простой весовой функцией // Докл. АН УзССР. 1982. № 5. С. 4–7.

132. **Распутин Г. Г.** О точных оценках погрешности квадратурных формул // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. № 1. С. 110–115.

133. **Распутин Г. Г.** О построении интерполяционных кубатурных формул гауссова типа для приближенного вычисления двойных интегралов // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. № 1. С. 116–122.

134. **Роджерс К.** Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

135. **Розенфельд Б. А.** Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

136. **Рышков С. С.** К вопросу о финальной ζ-оптимальности решеток, дающих наиплотнейшую решетчатую упаковку n-мерных шаров // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 5. С. 1065–1075.

137. **Рябенький В. С.** Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. М.: Наука, 1987.

138. **Салихов Г. Н.** О кубатурных формулах на четырехмерной сфере, инвариантных при преобразованиях конечных групп вращений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. 1963. № 6. С. 25–29.

139. **Салихов Г. Н.** О некоторых кубатурных формулах на гиперсферах // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. 1966. № 2. С. 37–40.

140. **Салихов Г. Н.** Об одном способе повышения эффективности кубатурных формул С. Л. Соболева на сфере // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1971. Вып. 8. С. 3–9.

141. **Салихов Г. Н.** К теории групп правильных многогранников // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 1. С. 33–35.

142. **Салихов Г. Н.** Группы правильных многогранников и кубатурные формулы на гиперсферах // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1972. Вып. 14. С. 139–147.

143. **Салихов Г. Н.** К теории кубатурных формул на сферах // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 22–27.

144. **Салихов Г. Н.** Группа правильного 600-гранника и кубатурные формулы наивысшей степени точности на гиперсфере // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1975. Вып. 32. С. 139–154.

145. **Салихов Г. Н.** Кубатурные формулы для гиперсферы, инвариантные относительно группы правильного 600-гранника // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 5. С. 1075–1078.

146. **Салихов Г. Н.** Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985.

147. **Сираждинов С. Х.** О предельном распределении корней многочленов Эйлера // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 56–59.

148. **Соболев С. Л.** О формулах механических кубатур в n-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 527–530.

149. **Соболев С. Л.** Различные типы сходимости кубатурных и квадратурных формул // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 1. С. 41–42.

150. **Соболев С. Л.** О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразованиях конечных групп вращений // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 2. С. 310–313.

151. **Соболев С. Л.** О числе узлов кубатурных формул на сфере // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С. 770–773.

152. **Соболев С. Л.** О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 769–796.

153. **Соболев С. Л.** Некоторые вопросы теории кубатурных формул // Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963. 8 с.

154. **Соболев С. Л.** Об одном приеме вычисления коэффициентов для формул механических кубатур // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1238–1241.

155. **Соболев С. Л.** Лекции по теории кубатурных формул. Ч. 1. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1964.

156. **Соболев С. Л.** Сходимость формул приближенного интегрирования на функциях из $L_2^{(m)}$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 6. С. 1259–1261.

157. **Соболев С. Л.** Вычисление интегралов от ограниченно дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 1. С. 33–35.

158. **Соболев С. Л.** Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 587–590.

159. **Соболев С. Л.** Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 1. С. 54–57.

160. **Соболев С. Л.** Оптимальные формулы механических кубатур с узлами в точках правильных решеток // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 2. С. 281–284.

161. **Соболев С. Л.** Теория кубатурных формул // Wiss. Z. Hochsch. Archit. und Brauwesen Weimar. 1965. Bd 12, № 5/6. S. 537–546.

162. **Соболев С. Л.** О порядке сходимости кубатурных формул // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 1005–1008.

163. **Соболев С. Л.** Лекции по теории кубатурных формул. Ч. 2. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1965.

164. **Соболев С. Л.** О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, № 2. С. 295–297.

165. **Соболев С. Л.** Теория приближения интегралов функций многих переменных // Международный конгресс математиков: Тез. докл. М.: Наука, 1966. С. 163–168.

166. **Соболев С. Л.** Об оптимальных кубатурных формулах в конечной области // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам физики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 5–21.

167. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

168. **Соболев С. Л.** Сходимость кубатурных формул на бесконечно дифференцируемых функциях // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 4. С. 793–796.

169. **Соболев С. Л.** Сходимость кубатурных формул на элементах $\widetilde{L}_2^{(m)}$ // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 1. С. 45–47.

170. **Соболев С. Л.** Сходимость кубатурных формул на различных классах периодических функций // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1976. С. 122–140.

171. **Соболев С. Л.** Теория кубатурных формул // Фундаментальные исследования (Физ.-мат. и техн. науки). Новосибирск: Наука, 1977. С. 5–8.

172. **Соболев С. Л.** О корнях многочленов Эйлера // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 277–280.

173. **Соболев С. Л.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 1. С. 34–37.

174. **Соболев С. Л.** О крайних корнях многочленов Эйлера // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1016–1018.

175. **Соболев С. Л.** К асимптотике корней многочленов Эйлера // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 2. С. 304–308.

176. **Соболев С. Л.** Еще об асимптотике корней многочленов Эйлера // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 801–804.

177. **Соболев С. Л.** О корнях многочленов Эйлера // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 125–141.

178. **Соболев С. Л.** Об алгебраическом порядке точности формул приближенного интегрирования // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 4–11.

179. **Соболев С. Л.** Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.

180. **Темляков В. Н.** Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул // Мат. сборник. 1990. Т. 181, № 10. С. 1403–1413.

181. **Темляков В. Н.** Об универсальных кубатурных формулах // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 1. С. 44–47.

182. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

183. **Умарханов И.** Описание решетчатой кубатурной формулы для многомерных областей с гладкими границами // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1979. Вып. 58. С. 6–13.

184. **Умарханов И.** Процедура численного интегрирования многомерных интегралов // Алгоритмы. Ташкент, 1980. Вып. 41. С. 75–82.

185. **Умарханов И.** Кубатурные формулы с простой весовой функцией // Докл. АН УзССР. 1983. № 12. С. 5.

186. **Хаитов Т. И.** Кубатурные формулы с заданием производных // Докл. АН ТаджССР. 1969. Т. 12, № 10.

187. **Хамаев Е. А., Шойнжуров Ц. Б.** Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $L_p^\mu(E^n)$ // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. № 1. С. 132–148.

188. **Хороших А. Н.** Точные асимптотические выражения норм функционалов ошибок формул Грегори в $L_2^{(m)}[a,b]^*$ // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Ин-т кибернетики с вычисл. центром АН УзССР, 1976. Вып. 40. С. 3–8.

189. **Шадиметов Х. М.** Оптимальные квадратурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$ и $L_2^{(m)}(R^1)$ // Докл. АН УзССР. 1983. № 3. С. 5–8.

190. **Шарипов Т. Х.** Верхняя оценка нормы функционала ошибки кубатурных формул с регулярным в смысле С. Л. Соболева пограничным слоем в пространствах $H_p^\mu(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 1. С. 51–53.

191. **Шарыгин М. Ф.** Оценка снизу погрешности квадратурных формул на классе функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 2. С. 370–376.

192. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961.

193. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

194. **Шойнжуров Ц. Б.** Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве W_p^m // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 7, № 2. С. 433–446.

195. **Шойнжуров Ц. Б.** Некоторые вопросы теории кубатурных формул в неизотропных пространствах С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209, № 5. С. 1036–1038.

196. **Шойнжуров Ц. Б.** Асимптотически оптимальные кубатурные формулы с узлами в криволинейной решетке // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1976. № 1. С. 157–164.

197. **Шойнжуров Ц. Б.** Норма функционала погрешности в пространстве $W_p^{(m)}(E_n)$ // Кубатурные формулы и их приложения. Доклады семинара — совещания. Уфа — Красноярск: 1996. С. 123–127.

198. **Янович Л. А.** Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976.

199. **Aronszajn N., Smith K. T.** Theory of Bessel potentials. I // Ann. Inst. Fourier. 1961. T. 11. P. 385–475.

200. **Babuška I.** Uber optimale Formeln zur numerischen Berechnung linearer Funktionale. Vorbericht // Apl. Mat. 1965. V. 10. P. 441–443.

201. **Babuška I.** Uber universal optimale Quadratur Formeln // Apl. Mat. 1968. V. 13, N 4. P. 304–338.

202. **Butler R.** On the evaluation of $\int\limits_0^\infty (\sin t)^m / t^m dt$ by the trapezoidal rule // Amer. Math. Monthly. 1960. V. 67, N 6. P. 566–569.

203. **Carlitz L.** Eulerian numbers and polinomials // Math. Mag. 1959. V. 32, N 5. P. 247–260.

204. **Chevalley C.** Invariants of finite groups generated dy reflections // Amer. J. Math. 1955. V. 77, N 4. P. 778–782.

205. **Davis P. J.** On numerical integration of periodic analytic functions // On Numerical Approximation: Proc. of Sympos. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1959. P. 45–59.

206. **Davis P. J., Rabinowitz P.** Methods of integration. New York: Academic Press, 1975.

207. **Frobenius G.** Uber die Bernoullischen und Eulerschen Polynome // Sitzungsber. Preussische Akad. Wiss. 1910. P. 809–847.

208. **Ghizzetti A., Ossicini A.** Quadrature Formulae. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1970.

209. **Girschovich J.** Extremal properties of Euler — Maclorin and Gregory quadrature formulas // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. 1978. Т. 27, № 3. С. 259–265.

210. **Hammer P. C., Stroud A. H.** Numerical evaluation of multiple integrals. II // Math. Tables and Other Aids Comput. 1958. V. 12, N 64. P. 272–280.

211. **Konyaev S. I.** On invariant quadrature formulae for a sphere // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 324, № 1. P. 41–47.

212. **Maxwell J. C.** On approximate multiple integration between limits by summation // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1877. V. 3. P. 39–47.

213. **McLaren A. D.** Optimal numerical integration on a sphere // Math. Comp. 1963. V. 17, N 84. P. 361–383.

214. **Meyers I., Sard A.** Best approximate integration formulas // J. Math. and Phys. 1950. V. 29. P. 118–123.

215. **Radon J.** Zur mechanischen Kubatur // Monatsh. Math. 1948. V. 52, N 4. P. 286–300.

216. **Rjabenkij V. S.** Local splines // Comp. meth. mech. and engineer. 1975. V. 5, N 2. P. 211–225.

217. **Sard A.** Best approximate integration formulas, best approximate formulas // Amer. J. Math. 1949. V. 71. P. 80–91.

218. **Schoenberg I. J.** Spline interpolation and best quadrature formulae // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 143–148.

219. **Schoenberg I. J., Silliman S. D.** On semicardinal quadrature formulae // Math. Comp. 1974. V. 28, N 126. P. 483–497.

220. **Secrest D.** Best approximate integration formulas and error bounds // Math. Comp. 1965. V. 19, N 89. P. 79–83.

221. **Sobolev S. L.** On cubature formulas // Studia Math. Ser. Specialna. 1963. V. 1. P. 117–118.

222. **Sobolev S. L.** Some problems of the theory of functions of several discrete variables // Proc. Internat. Conf. on Functional analysis and related topics (Tokyo, 1969). Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1970. P. 148–160.

223. **Sobolev S. L.** Les formules optimales pour l'integration des fonctions de plusiers variables // Matodi Valut. Fis. Mat. Conf. Int. Roma. 1975. P. 423–441.
224. **Sobolev S. L.** Les coefficients optimaux des formules d'integration approximative // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1978. V. 5, N 3. P. 455–469.
225. **Sobolev S. L.** Comportement asymptotique des racines des polynômes d'Euler // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1985. V. 52. P. 221–243.
226. **Stroud A. H.** Approximate calculation of multiple integrals. Englewood Chiffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
227. **Vaskevich V. L.** On approximate solutions of the Dirichlet problem in composite spatial domains // Siberian Advances in Mathematics. New York: Allerton Press Inc. 1991. V. 1, N 2. P. 146–184.
228. **Vaskevich V. L.** Approximate computation of some quadratic forms of integral type // Siberian Advances in Mathematics. New York: Allerton Press Inc. 1994. V. 4, N 3. P. 109–150.
229. **Vaskevich V. L.** Cubature formulas of total precision on spaces of harmonic functions and their applications // International conference AMCA-95: Abstracts. NCC Publisher. Novosibirsk. 1995. P. 340.
230. **Vaskevich V. L.** Analogs of Hermite cubature formulas for the Dirichlet integral of harmonic functions // Siberian Advances in Mathematics. New York: Allerton Press Inc. 1996. V. 6, N 1. P. 105–150.
231. **Worpitzky J.** Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen // J. Reine Angew. Math. 1883. Bd 94. S. 203–232.