

*СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
ФИЗИКИ*

---

Н.С. БАХВАЛОВ  
Я.М. ЖИЛЕЙКИН  
Е.А. ЗАБОЛОТСКАЯ

***Н***ЕЛИНЕЙНАЯ  
ТЕОРИЯ  
ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

---

Н.С. БАХВАЛОВ,  
Я.М. ЖИЛЕЙКИН,  
Е.А. ЗАБОЛОТСКАЯ

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

*Серия выпускается под общим руководством  
редакционной коллегии журнала  
«Успехи физических наук»*

*Глубокоуважаемому  
Алексею Ивановичу*

*Кострикину от авторов*

*Н.С. Бахвалов*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1982

*Я.М. Жилейкин*

*Е.А. Заболотская*

Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.  
Нелинейная теория звуковых пучков. - М.: Наука.  
Главная редакция физико-математической литературы,  
1982. - (Современные проблемы физики). -  
176 с.

В книге рассматривается проблема нелинейного распространения звуковых пучков в жидкостях и газах. Исследование проводится на основе нелинейного уравнения, учитывающего как нелинейность, так и дифракцию. В основу проводимых исследований положены результаты численных экспериментов на ЭВМ, изложение и анализ которых составляют основное содержание книги. Большое внимание уделено асимптотическому исследованию, обоснованию численных методов и описанию комплекса стандартных программ для ЭВМ.

Для физиков и инженеров, работающих в области акустики и гидроакустики, аспирантов и студентов, интересующихся вопросами излучения и нелинейного распространения волн в слабодиспергирующих средах, а также лиц, занимающихся вопросами применения ЭВМ к решению задач математической физики.

Рис. 166. Табл. 7. Библ. 68 назв.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Глава 1. <u>Основные сведения из теории акустических волн</u> . . . . .	7
§ 1. Плоские волны конечной амплитуды . . . . .	7
§ 2. Волновые пучки в линейных средах . . . . .	10
§ 3. Нелинейное распространение звуковых пучков . . . . .	14
Глава 2. <u>Вывод приближенного уравнения и обсуждение асимптотических решений</u> . . . . .	16
§ 1. Вывод приближенного уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков . . . . .	16
§ 2. Интегралы движения приближенного уравнения . . . . .	20
§ 3. Асимптотические решения . . . . .	21
Глава 3. <u>Квазиплоские волны конечной амплитуды в идеальных средах</u> . . . . .	30
§ 1. Распространение гауссова пучка в нелинейной среде . . . . .	30
§ 2. Нелинейное распространение пучка с резко выраженной границей . . . . .	37
§ 3. Однородные пучки конечной амплитуды . . . . .	42
§ 4. Основные закономерности нелинейного распространения квазиплоских волн . . . . .	50
Глава 4. <u>Сфокусированные пучки конечной амплитуды</u> . . . . .	52
§ 1. Гауссов пучок в линейной среде . . . . .	52
§ 2. Нелинейное распространение гауссова пучка . . . . .	54
Слабая нелинейность ( 55 ). Средняя нелинейность ( 56 ). Сильная нелинейность ( 57 ).	
§ 3. Распространение пучка с резко выраженной границей . . . . .	65
§ 4. Основные закономерности распространения сфокусированного пучка конечной амплитуды . . . . .	73
Глава 5. <u>Нелинейное распространение звуковых пучков в диссипативных средах</u> . . . . .	75
§ 1. Вывод приближенного уравнения и постановка задачи . . . . .	75
§ 2. Гауссов пучок конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде . . . . .	78
§ 3. Пучок с резко выраженной границей . . . . .	84
§ 4. Основные закономерности нелинейного распространения квазиплоской волны . . . . .	87
Глава 6. <u>Гармонический анализ формы возмущения в звуковых пучках конечной амплитуды</u> . . . . .	89
§ 1. Квазиплоская волна в идеальной среде . . . . .	89
Гауссов пучок ( 89 ). Сравнение гауссова пучка с пучком, имеющим резко выраженную границу ( 96 ). Пучок с платообразным амплитудным распределением ( 99 ). Основные за-	

	кономерности генерации гармоник квазиплоской волной конечной амплитуды (101).	
§ 2.	Сфокусированный пучок в идеальной среде . . . . .	103
	Гауссов пучок (103). Сфокусированный пучок с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (106). Основные закономерности генерации гармоник в сфокусированном пучке (110).	
§ 3.	Квазиплоская волна в диссипативной среде . . . . .	112
§ 4.	Параметрическое взаимодействие звуковых пучков . . . . .	115
Глава 7.	<u>Самовоздействие акустической волны</u> . . . . .	122
§ 1.	Тепловое самовоздействие звуковой волны в линейном приближении . . . . .	122
§ 2.	Тепловое самовоздействие звуковой волны конечной амплитуды. Вывод основных уравнений и постановка задачи . . . . .	127
§ 3.	Тепловая дефокусировка звукового пучка конечной амплитуды в воде . . . . .	131
§ 4.	Дефокусировка звукового пучка за счет акустических течений	135
Приложение.	<u>Численное решение уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков</u> . . . . .	141
§ 1.	Метод Фурье решения уравнения нелинейной акустики . . . . .	142
§ 2.	Применение конечно-разностных схем газовой динамики для решения уравнения нелинейной акустики. Описание алгоритма .	152
§ 3.	Описание набора стандартных программ . . . . .	165
Литература	. . . . .	172

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Летом 1975 года академик Р. В. Хохлов, выступая на открытии VI Международного симпозиума по нелинейной акустике, дал обзор последних достижений в этой области и путей ее дальнейшего развития. Среди новых направлений он выделил круг задач, связанных с нелинейным распространением ограниченных звуковых пучков и вопросами самовоздействия акустических волн. В это же время Рем Викторович организовал группу своих учеников и математиков, специалистов в области численного анализа, и наметил широкую программу исследований в области нелинейных волновых процессов, требующую для своей реализации использования численных методов и современной вычислительной техники. Среди сформулированных проблем видное место занимали проблемы, связанные с ограниченными звуковыми пучками.

Интерес к этой теме объясняется как возможностями ее широкого практического применения, так и сложной комбинацией различных физических явлений, которые играют существенную роль при распространении акустических пучков в нелинейной среде. Достаточно назвать образование ударного фронта и нелинейную генерацию гармоник, дифракцию волновых пучков, их фокусировку и дефокусировку и многие другие.

Распространение таких пучков эффективно описывается нелинейным уравнением, предложенным Р. В. Хохловым в 1969 году и играющим центральную роль в теории звуковых пучков. Так как в общем случае не удалось получить аналитическое решение этого уравнения, то была выработана обширная программа расчетов на ЭВМ распространения радиально-симметричных пучков в идеальной, а также в вязкой и теплопроводящей средах. Планомерное проведение большого числа расчетов для различных случаев позволило произвести подробный анализ рассматриваемых процессов.

Содержанием данной книги является развитие результатов исследований в этом направлении, выполненных авторами под руководством Р. В. Хохлова. Рем Викторович был также инициатором и непосредственным участником создания книги: предложил ее написать, дал название, с ним были обсуждены план и ее структура. По его замыслу эта книга должна отличаться от традиционных книг по акустике тем, что физический процесс анализируется в ней не на основе рассмотрения отдельных модельных частных случаев, поддающихся

решению в явном виде, а на основе систематического исследования результатов численных расчетов на ЭВМ.

При написании книги мы поставили перед собой следующие цели. На основе анализа результатов численного расчета дать по возможности полное описание рассматриваемых физических процессов, определить ряд физически важных областей их применения и установить связь с традиционными методами исследования. В связи с такой особенностью книги было уделено большое внимание форме представления информации, получаемой в результате расчетов, эта специфика во многом определила необычно большое число графического материала.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность Ю. А. Кравцову, прочитавшему рукопись и высказавшему ряд ценных замечаний.

АВТОРЫ

## ГЛАВА 1

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Излагаются два известных приближенных метода исследования процесса распространения акустических волн: метод медленно изменяющегося волнового профиля, позволяющий описать искажение плоской волны в нелинейной среде, и представление о дифракции как о поперечной диффузии амплитуды, применительно к анализу процесса линейного распространения звуковых пучков.

#### § 1. Плоские волны конечной амплитуды

Распространение звуковых волн в жидкостях и газах математически описывается уравнениями гидродинамики, связывающими скорость частиц  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , плотность среды  $\rho(\vec{r}, t)$  и давление  $p(\vec{r}, t)$ . Пять функций:  $v_x, v_y, v_z, \rho$  и  $p$  — полностью определяют состояние идеальной жидкости.

В координатах Эйлера уравнения гидродинамики имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p, \quad (1.2)$$

$$p = p(\rho). \quad (1.3)$$

В случае плоского движения среды функции  $\vec{v}, \rho, p$  зависят от одной координаты, например, от  $x$ , вектор скорости имеет одну компоненту, отличную от нуля:  $v_x = v$ , а две другие компоненты равны нулю:

$v_y = v_z = 0$ . Тогда исходная система (1.1) — (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$p = p(\rho). \quad (1.6)$$



Предположив, что величины, характеризующие процесс, жестко связаны между собой соотношениями вида  $\rho = \rho(v)$ , Риман построил класс частных решений системы (1.4) – (1.6). Римановское решение выражается через произвольную функцию и описывает бегущие плоские волны:

$$v = \Phi \left[ t \pm \frac{x}{c(v) \pm v} \right], \quad (1.7)$$

где  $c(v)$  – скорость распространения волны. Такое решение называют простой волной. Произвольная функция  $\Phi$  определяется из граничного условия.

Если уравнение состояния адиабатическое,  $p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$ , то соотношения для простой волны можно записать в явном виде [1]:

$$\begin{aligned} c &= c_0 \pm (\gamma - 1) v / 2, \\ \rho &= \rho_0 [1 \pm (\gamma - 1) v / 2 c_0]^{2/(\gamma - 1)}, \\ p &= p_0 [1 \pm (\gamma - 1) v / 2 c_0]^{2\gamma/(\gamma - 1)} \end{aligned}$$

Формула (1.7) для волны, бегущей вправо, принимает вид

$$v = \Phi \left[ t - \frac{x}{c_0 + (\gamma + 1) v / 2} \right], \quad (1.8)$$

где  $c_0$  – скорость распространения малого сигнала.

Возмущения плотности  $\rho'$  и давления  $p'$ , связанные с волной, обычно малы по сравнению с равновесными значениями, а скорость частиц много меньше скорости звука. Поэтому для анализа процесса удобно воспользоваться приближенными уравнениями и их решениями. Представим плотность и давление в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \rho' / \rho_0 \sim p' / p_0 \sim v / c_0 \sim \mu, \quad (1.9)$$

где  $\mu$  – малый безразмерный параметр.

Из уравнений (1.4) – (1.6) с точностью до малых членов порядка  $\mu$  получается линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (1.10)$$

решение которого имеет вид

$$v = F_1 \left( t - \frac{x}{c_0} \right) + F_2 \left( t + \frac{x}{c_0} \right). \quad (1.11)$$

При этом скорость, возмущения плотности и давления связаны соотношениями

$$v / c_0 = \rho' / \rho_0 = p' / p_0 c_0^2. \quad (1.12)$$

Предполагая уравнение состояния адиабатическим и сохраняя в уравнениях (1.4) – (1.6) члены порядка  $\mu^2$ , можно получить уравнение, описывающее процесс во втором приближении [2]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \left( \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 2c_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{v^2}{2}. \quad (1.13)$$

Для дальнейшего упрощения предположим, что во втором приближении волновой характер движения в основном сохраняется, но форма волны медленно изменяется по мере распространения, т.е. волну, бегущую вправо, можно представить в виде, мало отличающемся от решения линейного уравнения (1.11):

$$v = F(t - x/c_0, \mu x). \quad (1.14)$$

Введение сопровождающей координаты  $\tau = t - x/c_0$  и "медленной" переменной  $x' = \mu x$  позволяет понизить порядок уравнения (1.13):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - a v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad (1.15)$$

где  $a = (\gamma + 1)/2c_0^2$ , а штрих у  $x$  опущен. Составляя уравнения для характеристик:

$$dx/1 = d\tau / -a v = dv/0$$

и интегрируя их, напишем решение уравнения (1.15) в виде

$$\tau = -a x v + \Phi(v), \quad (1.16)$$

где  $\Phi$  – произвольная функция от  $v$ , определяемая граничными условиями. Заметим, что точно такой же результат можно получить из разложения римановского решения (1.8). Выражение (1.16) описывает форму волны в процессе распространения, которую удобно анализировать графически. Если на границе нелинейной среды возбуждается гармонический сигнал  $v = A \sin \omega t$ , то

$$\omega \tau = -a \omega A x v / A + \arcsin(v/A). \quad (1.17)$$

Волновой профиль можно найти графически (рис. 1.1), сложив функцию  $\arcsin(v/A)$  (кривая 1) с линейной функцией  $-a \omega A x v / A$  (прямая 2). Результат сложения изображен пунктиром. Тангенс угла наклона прямой 2 увеличивается пропорционально пройденному расстоянию. Когда  $a \omega A x = 1$ , волна становится разрывной. Отсюда определяется расстояние формирования разрыва в плоской волне  $L_p$ :

$$L_p = 1/a \omega A. \quad (1.18)$$

Обобщая понятие простой волны на случай диссипативной среды, можно вывести из уравнений гидродинамики вязкой жидкости приближен-

ное уравнение, описывающее процесс распространения звуковой волны в вязкой теплопроводящей среде [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - a v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad (1.19)$$

где коэффициент  $b$  выражается через сдвиговую и объемную вяз-

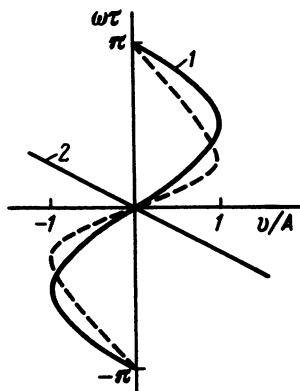


Рис. 1.1. Графический анализ выражения (1.17): кривая 1 -  $\arcsin(v/A)$ ; прямая 2 - функция  $-a\omega Axv/A$ ; пунктир - их сумма.

кости  $\eta$  и  $\zeta$ , а также через коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме  $c_v$  и давлении  $c_p$ :  $b = \zeta + 4\eta/3 + \kappa(1/c_v - 1/c_p)$ . Уравнение (1.19) называется уравнением Бюргера.

## § 2. Волновые пучки в линейных средах

Плоская волна является некоторым приближением к реальным условиям. В действительности возмущение всегда локализовано в пространстве в виде пучка, как это происходит, например, при колебаниях поршня, при излучении антенны и т.д. Во всех этих случаях приходится иметь дело с ограниченными волновыми пучками. Иногда такие пучки можно рассматривать как лучи, поведение которых описывается законами геометрической оптики. Но часто распространение реальных волновых пучков отличается от поведения лучей. Причина этого отличия заключена в явлении дифракции. Простейшее проявление дифракции - размытие резкой границы света и тени: происходит как бы расщепление крайних лучей пучка, благодаря которому волновое поле частично проникает в область геометрической тени. Отсюда и название - дифракция (от латинского слова *diffringere* - разбивать, расщеплять).

При рассмотрении различных дифракционных задач оказалось плодотворным представление о дифракции как о поперечной диффузии амплитуды [4]. Если в линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta v$$

подставить выражение для приблизительно плоской волны

$$v = A(x, y, z) \exp i(\omega t - kx),$$

то для плавно изменяющейся комплексной амплитуды  $A(x, y, z)$  высокочастотных волн получается параболическое уравнение с мнимым коэффициентом диффузии или, что то же самое, уравнение типа уравнения Шредингера:

$$\Delta_{\perp} A - 2ik \frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad (1.20)$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  — поперечный лапласиан. Параболическое приближение называют также квазиоптическим. В дальнейшем будут рассмотрены пучки с осевой симметрией.

Рассмотрим несколько конкретных примеров распространения волновых пучков с различными амплитудными распределениями. Выбор конкретных амплитудных распределений обосновываем ниже. Решение линейного уравнения (1.20) можно записать в виде интеграла по плоскости  $x = 0$ :

$$A(\vec{r}, x) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0, x) A(r_0) dr_0, \quad (1.21)$$

где  $G(\vec{r} - \vec{r}_0, x)$  — функция Грина,  $A(r_0)$  — распределение амплитуды в сечении  $x = 0$ . Для уравнения (1.20) функция Грина имеет вид

$$G(\vec{r}, x) = \frac{ik}{2\pi x} \exp(-ikr^2/2x). \quad (1.22)$$

В случае гауссова пучка

$$A = A_0 \exp(-r^2/a^2) \quad (1.23)$$

интеграл (1.21) равен

$$A(r, x) = \frac{ikA_0}{2\pi x} \int \exp\left[-\frac{ik(r-r_0)^2}{2x} - \frac{r_0^2}{a^2}\right] d\vec{r}_0$$

и выражается в конечном виде:

$$A(r, x) = \frac{ika^2 A_0}{2x + ika^2} \exp\left(-\frac{ikr^2}{2x + ika^2}\right). \quad (1.24)$$

Записывая формулу (1.24) в форме, более удобной для анализа, получим

$$A(r, x) = \frac{ka^2 A_0}{(4x^2 + k^2 a^4)^{1/2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{k^2 a^2 r^2}{4x^2 + k^2 a^4} - i\left(\frac{2xkr^2}{4x^2 + k^2 a^4} - \arctg \frac{2x}{ka^2}\right)\right\}. \quad (1.25)$$

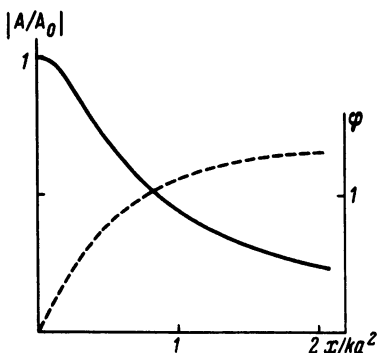


Рис. 1.2. Осевое изменение амплитуды (сплошная кривая) и фазы (пунктир) при распространении гауссова пучка.

Точно такой же результат можно получить и другими способами [5]. Выражение (1.25) при  $x \rightarrow 0$  переходит в заданное на границе амплитудное распределение (1.23). При  $x \rightarrow \infty$  формула (1.25) определяет сферически расходящуюся волну:

$$A(r, x) = \frac{ka^2 A_0}{2x} \exp \left\{ -\frac{k^2 a^2 r^2}{4x} - i \left( \frac{kr^2}{2x} - \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

При  $r = 0$  выражение (1.25) определяет зависимость амплитуды от продольной координаты на оси гауссова пучка:

$$A(0, x) = \frac{ka^2 A_0}{(4x^2 + k^2 a^4)^{1/2}} \exp \left( i \operatorname{arctg} \frac{2x}{ka^2} \right). \quad (1.26)$$

На рис. 1.2 изображено осевое изменение амплитуды (сплошная кривая) и фазы этой функции (пунктир) вдоль направления  $x$ . Рассмотрим пучок, амплитуда в котором, уменьшаясь от оси к краям, спадает до нуля, т.е. пучок имеет резко выраженную границу, за пределами которой среда невозмущена. Такое распределение можно описать, например, функцией

$$A(r, 0) = A_0 (1 - r^2/a^2)^2, \quad r \leq a; \quad A(r, 0) = 0, \quad r > a. \quad (1.27)$$

Выражения (1.21) и (1.22) позволяют представить амплитуду волны на оси такого пучка в виде

$$A(0, x) = \frac{ik}{2\pi x} \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left( -i \frac{kr}{2x} \right) A_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 r dr d\phi. \quad (1.28)$$

После интегрирования (1.28) получаем выражение для комплексной амплитуды:

$$\frac{A}{A_0} = 1 + 32z^2 \left( \cos \frac{1}{4z} - 1 \right) + i \left( 8z + 32z^2 \sin \frac{1}{4z} \right), \quad (1.29)$$

Рис. 1.3. Осевое изменение амплитуды (сплошная кривая) и фазы (пунктир) при распространении пучка с амплитудным распределением (1.27).

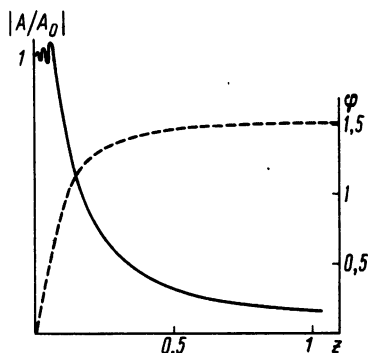
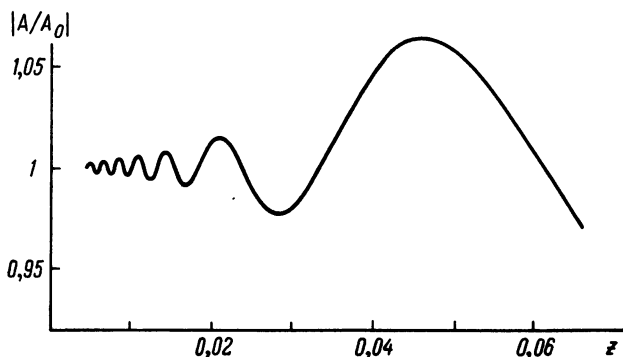


Рис. 1.4. Начальный участок осевого изменения амплитуды, изображенного на рис. 1.3.



где  $z = x/2 ka^2$  — безразмерная координата. Из выражения (1.29) видно, что при  $z \rightarrow \infty$  расхожимость становится сферической, а фаза стремится к  $\pi/2$ , т.е. волна может быть представлена следующим образом:

$$v \approx -\frac{1}{12z} \sin(\omega t - kx + \pi/2). \quad (1.30)$$

Запишем также выражения для квадрата модуля амплитуды волны и ее фазы:

$$|A/A_0|^2 = \left[ 1 + 32z^2 \left( \cos \frac{1}{4z} - 1 \right) \right]^2 + \left( 8z - 32z^2 \sin \frac{1}{4z} \right)^2, \quad (1.31)$$

$$\phi = \arctg \left\{ \left( 8z - 32z^2 \sin \frac{1}{4z} \right) / \left[ 1 + 32z^2 \left( \cos \frac{1}{4z} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (1.32)$$

Графики этих функций представлены на рис. 1.3, 1.4. На рис. 1.3 видно, что функция  $|A/A_0|$  совершает колебания около единицы с периодом, уменьшающимся при  $z \rightarrow 0$ . Амплитуда этих колебаний с ростом  $z$  увеличивается. Более подробно этот участок показан на рис. 1.4. Наибольшее значение соответствует координате  $z = 0,046$  и

превышает единицу на 5%, далее амплитуда монотонно падает. Фаза (см. рис. 1.3) сначала линейно растет, основные изменения происходят на расстояниях порядка  $z \sim 0,5$ , далее функция  $\phi(z)$  изменяется медленно и стремится асимптотически к  $\pi/2$ .

В пучке с однородным распределением амплитуды по ширине

$$A(r, 0) = A_0, \quad r \leq a; \quad A(r, 0) = 0, \quad r > a, \quad (1.33)$$

амплитуда на оси пучка осциллирует [6]:

$$|A(0, x)| = 2A_0 |\sin ka^2/4x|. \quad (1.34)$$

Заметим, что пространственный масштаб этих колебаний уменьшается при приближении к границе. Границы применимости параболического приближения для описания равномерных амплитудных распределений будут обсуждаться позднее (§ 3 гл. 3).

### § 3. Нелинейное распространение звуковых пучков

Увеличение интенсивности звукового пучка ставит вопрос о необходимости исследования процесса нелинейного распространения многомерной акустической волны. Одновременный учет нелинейных и дифракционных эффектов сводит задачу к решению системы нелинейных уравнений в частных производных. Отсутствие регулярных аналитических методов решения таких уравнений создает трудно преодолимые препятствия при исследовании этой проблемы. В настоящее время можно выделить три основных подхода к теоретическому изучению задачи о распространении интенсивных звуковых пучков: квазиоптический, поэтапный и подход, основанный на теории возмущения.

Квазиоптический метод является сочетанием приближенного описания нелинейного распространения плоских волн, рассмотренного в § 1, с линейной теорией дифракции, причем дифракция учитывается в приближении поперечной диффузии [7]. Квазиоптический подход использует приближенное уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков, учитывающее одновременно и нелинейность, и дифракцию. Это уравнение, записанное для возмущения плотности  $\rho'$ , имеет вид

$$\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial r} + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho' = 0. \quad (1.35)$$

Здесь  $r$  — то же самое, что и в § 1,  $a = (\gamma + 1)/2\rho_0 c_0$ , отличие  $a$  от коэффициента, введенного в § 1, связано с тем, что здесь уравнение записано для возмущения плотности, а в § 1 — для скорости частиц. Подробный вывод уравнения (1.35) будет приведен позднее (§ 1 гл. 2). Далее, на основе уравнения (1.35) будет исследован широкий круг вопросов, связанных с распространением ограниченных звуковых пучков: нелинейное распространение квазиплоских волн и сфокусированных пучков в идеальных и диссипативных средах, гене-

рация гармоник в пучках, параметрическое взаимодействие звуковых пучков, пучки с различными амплитудными распределениями при разных соотношениях нелинейных и дифракционных эффектов.

При распространении пучков наблюдаются качественно новые явления, не свойственные плоским волнам, а именно, явления самовоздействия, обусловленные изменением свойств той части среды, где локализовано возмущение. Будут рассмотрены два механизма самовоздействия звуковых пучков: тепловое самовоздействие, связанное с зависимостью скорости распространения от температуры, и самовоздействие за счет акустических течений.

Поэтапный подход, развиваемый в работах [8 - 13], коротко говоря, заключается в разделении этапов линейной дифракции и нелинейного искажения. В ближней зоне излучателя, когда дифракционная расходимость мала, учитывается только нелинейность, далее исследуется линейная дифракция нелинейно искаженной волны методом нестационарного интеграла Кирхгофа. Этот метод позволил рассмотреть целый ряд задач: распространение первоначально "плоской" волны; влияние нелинейности на фокусировку, параметрическое взаимодействие звуковых пучков, и выявить основные закономерности нелинейного распространения пучков, например, несимметричное искажение фаз сжатия и разрежения периодического сигнала, увеличение коэффициента усиления фокусирующей системы, смещение ее фокуса и т.д. Ограниченность этого метода связана с тем, что оба механизма искажения волн, нелинейный и дифракционный, действуют одновременно: в ближней зоне наряду с нелинейностью существенна и дифракция, а за ее пределами проявляются и накапливаются нелинейные эффекты. Это будет подтверждено в дальнейшем изложении.

Метод, основанный на теории возмущения с разложением результатов линейной теории в интеграл Фурье по поперечной пространственной координате, приводит к очень громоздким и трудно обозримым результатам [14]. Однако конкретный пример, доведенный до конца, демонстрирует несимметричное искажение периодического сигнала, характерное для звуковых пучков.



## ГЛАВА 2

### ВЫВОД ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Приводится вывод приближенного уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков. Обсуждаются его интегралы движения и асимптотические решения.

#### § 1. Вывод приближенного уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков

Полная система уравнений, описывающих процесс распространения возмущений в газе или жидкости без диссипации энергии, состоит из уравнений гидродинамики (1.1) – (1.3).

Допустим, что двумерный пучок распространяется вдоль оси  $x$ , вектор скорости имеет две компоненты  $v_x$  и  $v_y$ . В записи по компонентам система (1.1) – (1.3) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Уравнение состояния предполагается адиабатическим:

$$p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma. \quad (2.4)$$

Для идеального газа  $p_0$  и  $\rho_0$  – равновесные давление и плотность,  $\gamma = c_p / c_v$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. В случае жидкостей уравнение (2.4) можно рассматривать как приближенное эмпирическое, где константы  $\gamma$  и  $p_0$  определяются по

данным экспериментов. Значения параметров  $\mu$  и  $\rho_0$  для многих жидкостей приведены в книге [15].

Представим плотность и давление в виде суммы равновесной величины и возмущения, обусловленного звуковой волной:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'. \quad (2.5)$$

Реальные возмущения малы по сравнению с равновесными значениями. Например, при излучаемой интенсивности  $I = 0,3 \text{ Вт/см}^2$  возмущение плотности или колебательная скорость в воде равны

$$\rho'/\rho_0 \sim 10^{-5}, \quad v/c_0 \sim 10^{-5}.$$

Для удобства вычислений вводится малый безразмерный параметр  $\mu$ , характеризующий порядок малости рассматриваемых величин:

$$\rho'/\rho_0 \sim p'/p_0 \sim v_x/c_0 \sim \mu. \quad (2.6)$$

Предполагая среду полубесконечной в направлении  $x$ , будем искать решения уравнений (2.1) – (2.4) в виде бегущих вправо волн. В случае плоских волн бесконечно малой амплитуды система гидродинамических уравнений имеет решение вида

$$\rho', v, p' = F(t - x/c_0), \quad (2.7)$$

где  $F$  – произвольная функция аргумента. Нелинейность среды и ограниченность пучка приведут к медленным изменениям формы волны как вдоль направления распространения, так и поперек. Поскольку переход в область тени происходит довольно резко, следует считать, что изменения всех величин поперек направления распространения пучка происходят быстрее, чем вдоль [16]. Поэтому для ограниченных пучков, распространяющихся в слабонелинейных средах, решение имеет вид, близкий к (2.7):

$$\rho', v_x, p' = \Psi(t - x/c_0, \mu x, \sqrt{\mu} y). \quad (2.8)$$

Для упрощения системы (2.1) – (2.4) перейдем к новым переменным

$$\tau = t - x/c_0, \quad x' = \mu x, \quad y' = \sqrt{\mu} y, \quad (2.9)$$

где  $\tau$  играет роль времени, сопровождающего волну. При предположении (2.8) имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x'} \sim \frac{\partial v_x}{\partial x'} \sim \frac{\partial p'}{\partial x'} \sim \mu^2, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial y'} \sim \frac{\partial v_x}{\partial y'} \sim \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \mu^{3/2}.$$

Поперечная компонента скорости, обусловленная расхождением пучка, имеет порядок малости  $\mu^{3/2}$ :

$$v_y \sim \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \mu^{3/2}. \quad (2.10)$$

Сохраняя в преобразованных уравнениях (2.1) - (2.4) члены, порядок малости которых не выше чем  $\mu^2$ , получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{v_x}{c_0} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\rho'}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - \rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{\rho'}{c_0} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - \frac{\rho_0 v_x}{c_0^2} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} - (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \quad (2.12)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи над  $x$  и  $y$  опущены. В уравнениях (2.11) и (2.12) слева стоят члены, каждый из которых имеет порядок малости  $\mu$ , а справа  $-\mu^2$ . С точностью до членов порядка  $\mu$  выполняется соотношение

$$v_x = \frac{c_0}{\rho_0} \rho', \quad (2.14)$$

такое же, как в линейной акустике (1.12). Уравнение (2.13) содержит малые члены порядка  $\mu^{3/2}$ . Заметим, что левые части уравнений (2.11) и (2.12) одинаковы, поэтому приравняем правые части уравнений, содержащие члены только второго порядка малости, и исключаем  $v_x$  при помощи соотношения (2.14):

$$a \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (2.15)$$

Здесь  $a = (\gamma + 1)/2 \rho_0 c_0$ . Система уравнений (2.13) и (2.15) описывает с точностью до членов порядка  $\mu^2$  (во втором приближении) процесс распространения звуковых пучков в нелинейных средах без диссипации энергии. Исключая  $v_y$ , можно свести систему уравнений (2.13) и (2.15) к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial \tau} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} = 0. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) является приближенным уравнением нелинейной акустики ограниченных пучков [7]. Точное такое же уравнение можно написать для возмущения давления или колебательной скорости. Действительно, поскольку в уравнение (2.16) входят величины порядка  $\mu^2$ , то достаточно, чтобы соотношения между функциями  $v_x$ ,  $p'$  и  $\rho'$  выполнялись с точностью до членов порядка  $\mu$ . Связь между  $v_x$  и  $\rho'$  дается выражением (2.14). Давление и плотность связаны

уравнением состояния (2.4), из которого следует

$$\rho' = c_0^2 \rho'.$$

В том случае, когда пучок трехмерный, т.е. три компоненты скорости — продольная  $v_x$  и две поперечных  $v_y$  и  $v_z$ , связанные с расходимостью пучка, отличны от нуля, аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial r} + \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой оператор Лапласа по поперечным координатам, и символически записывается в виде  $\Delta_{\perp} \rho'$ . Если пучок обладает аксиальной симметрией, то удобно ввести одну поперечную координату  $r^2 = y^2 + z^2$  и записать уравнение (2.17) в следующей форме:

$$\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial r} + \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.18)$$

В предельном случае, когда изменение  $\rho'$  по поперечной координате стремится к нулю, уравнение (2.18) после интегрирования по  $r$  и приравнивая нулю произвольной функции от  $x$  сводится к уравнению

$$a \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0,$$

совпадающему с уравнением (1.15). Решение этого уравнения описывает процесс распространения плоских волн в слабо нелинейной среде без диссипации энергии.

Если можно пренебречь нелинейностью среды ( $a \rightarrow 0$ ), то уравнение (2.18) переходит в линейное, которое равносильно параболическому уравнению (1.20) для амплитуды гармонической волны  $\rho' = A \exp(i \omega r)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{c_0}{2i\omega} \Delta_{\perp} A.$$

Таким образом, приближенное уравнение (2.18) учитывает одновременно и нелинейные свойства среды, и поперечные изменения возмущения, обусловленные дифракционной расходимостью.

## § 2. Интегралы движения приближенного уравнения

Исходные уравнения – уравнения гидродинамики (1.1) – (1.3) – выражают законы сохранения массы вещества, импульса и энергии, записанные в дифференциальной форме. При замене точных соотношений приближенными и при пренебрежении малыми величинами высокого порядка малости законы сохранения могут выполняться приближенно. Проследим, какие величины сохраняются в приближенном уравнении (2.18) или, другими словами, каковы его интегралы движения.

Проинтегрируем уравнение (2.18) по времени и по периоду. Поскольку нас интересуют периодические решения уравнения (2.18), то при интегрировании по периоду первые два члена уравнения дадут нуль, так как под интегралом стоит полная производная по  $t$  от периодической функции. После интегрирования получим

$$\Delta_{\perp} \oint \rho' d\tau = 0. \quad (2.19)$$

Если предположить, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  среда невозмущена, т.е.  $\rho' = 0$ , то на основании теоремы гармонического анализа о максимальных и минимальных значениях функции [17] можно утверждать, что

$$\oint \rho' d\tau = 0. \quad (2.20)$$

Это первый интеграл уравнения (2.18).

Чтобы получить второй интеграл, умножим все члены уравнения (2.18) на функцию  $K(r) = \int_0^r \rho' d\tau$  и проинтегрируем по периоду и по площади. Заметим, что функция  $K(r)$  – периодическая в силу (2.20). Первый член уравнения равен

$$\begin{aligned} \oint_S \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} K(r) d\tau dS &= - \oint_S \frac{\partial \rho'^2}{\partial r} \rho' d\tau dS = \\ &= - \frac{1}{3} \oint_S \frac{\partial \rho'^3}{\partial r} d\tau dS = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Второй член уравнения приводится к виду

$$\begin{aligned} \oint_S \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial r} K(r) d\tau dS &= - \oint_S \frac{\partial \rho'}{\partial x} \rho' d\tau dS = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \oint_S \frac{1}{2} \rho'^2 d\tau dS. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Третий член уравнения после умножения на  $K(r)$  и интегрирования дает нуль, так как подынтегральная функция сводится к полной про-

изводной по  $r$  от периодической функции. Таким образом, от уравнения (2.18) остается

$$\frac{\partial}{\partial x} \oint_S \rho'^2 dr dS = 0,$$

следовательно,

$$\oint_S \rho'^2 dr dS = \text{const.} \quad (2.23)$$

Далее мы увидим, что уравнение (2.18) может быть получено как линейная комбинация уравнений, выражающих законы сохранения: поэтому соотношение (2.20) остается в силе и после возникновения разрыва в решении. Второй интеграл (2.23) получился при нелинейных преобразованиях над законами сохранения, и поэтому нет оснований утверждать, что он будет выполняться после возникновения разрыва.

### § 3. Асимптотические решения

Для уравнения (2.18) не найдено общего точного решения. Исследованы некоторые свойства этого уравнения [18, 19]. Построен ряд точных [18, 20] и асимптотических [5, 7, 21, 22] решений уравнения (2.18). Большой вклад в построение аналитических решений был внесен работами О.В. Руденко [23 - 25].

Исследуем поведение решения уравнения (2.18) в случаях малого влияния нелинейных членов, малого влияния дифракционной расходимости и при больших  $x$ .

Предположим, что решение  $\rho'(r, x, r)$  - периодическая функция от  $r$  с периодом  $T$  и область, где  $\rho'(r, 0, r)$  существенно отлична от нуля, имеет размер порядка  $L$ . Произведем в (2.18) замену переменных  $x = \beta\sigma$ ,  $r = T\theta/2\pi$ ,  $r = LR$ ,  $\rho' = A\rho$ ; здесь  $A$  - амплитуда входного сигнала. Получим уравнение

$$\frac{\alpha\beta\pi A}{T} \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \sigma \partial \theta} + \frac{c_0 T \beta}{4\pi L^2} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Следуя [5], рассмотрим первый случай. При  $\beta = 4\pi L^2/c_0 T$  уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} = 0, \quad (2.25)$$

коэффициент

$$\epsilon = \frac{4\pi^2 \alpha L^2 A}{c_0 T^2} = \frac{2(\gamma+1)A}{\rho_0} \left( \frac{\pi R}{c_0 T} \right)^2$$

в первом случае предполагается малым.

• Асимптотическое разложение решения ищем в виде регулярного ряда по степеням  $\epsilon$  :

$$\rho = \rho^0 + \epsilon \rho_1 + \dots$$

Подставляем этот ряд в левую часть (2.25), разлагаем ее в ряд по степеням  $\epsilon$  и приравниваем нулю коэффициенты разложения. Получим последовательность уравнений:

$$-\frac{\partial^2 \rho^0}{\partial \theta \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \rho^0}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho^0}{\partial R} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 (\rho^0)^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \theta \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_1}{\partial R} = 0, \dots \quad (2.27)$$

Рассмотрим случай, когда на границе возбуждается гармонический сигнал с амплитудой, зависящей от поперечной координаты по закону Гаусса:

$$\rho(\theta, 0, R) = \exp(-R^2) \sin \theta,$$

и наложим начальные условия

$$\rho^0(\theta, 0, R) = \rho(\theta, 0, R), \quad \rho_k(\theta, 0, R) = 0 \quad \text{при } k > 0. \quad (2.28)$$

Подставляя в (2.26)  $\rho^0$  в виде

$$\rho^0 = A(\sigma, R) \exp(i\theta),$$

получаем уравнение

$$-i \frac{\partial A}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} = 0. \quad (2.29)$$

Для его решения применим метод разделения переменных. При отыскании частных решений в виде

$$A(\sigma, R) = a(\sigma) b(R)$$

получаем соотношение

$$\frac{ia'}{a} = \frac{b'' + b'/R}{b} = -\mu,$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная; пусть  $\mu > 0$ , положим  $\mu = \lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ .

Тогда  $a = \exp(i\lambda^2 \sigma)$ ,  $b'' + b'/R + \lambda^2 b = 0$ , следовательно,  $b = I_0(\lambda R)$ ;

таким образом, мы определили  $a$  и  $b$  с точностью до произвольного постоянного множителя. Вследствие линейности уравнения (2.29) функция

$$A(\sigma, R) = \int_0^{\infty} c(\lambda) I_0(\lambda R) \exp(i\lambda^2 \sigma) d\lambda$$

является его решением при произвольной функции  $c(\lambda)$ . Потребовав выполнения условия  $A(0, R) = \exp(-R^2)$ , получим уравнение

$$\int_0^{\infty} c(\lambda) I_0(\lambda R) d\lambda = \exp(-R^2).$$

Формула для обратного преобразования Ханкеля от функции  $\exp(-R^2)$  дает соотношение

$$\exp(-R^2) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda'}{2} \exp\left(-\frac{\lambda'^2}{4}\right) I_0(\lambda R) d\lambda'.$$

Таким образом, решение  $A_0(\sigma, R)$ , удовлетворяющее условию  $A_0(0, R) = \exp(-R^2)$ , имеет вид

$$A_0(\sigma, R) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda'}{2} \exp\left(-\frac{\lambda'^2}{4}\right) I_0(\lambda R) \exp(i\lambda'^2 \sigma) d\lambda'.$$

Вследствие линейности уравнения (2.26) функция

$$\rho^0(\theta, \sigma, R) = \text{Im} [A_0(\sigma, R) \exp(i\theta)].$$

будет его решением; при этом она удовлетворяет заданному начальному условию.

Таким образом,

$$\rho^0(\theta, \sigma, R) = \text{Im} \left[ \exp(i\theta) \int_0^{\infty} \frac{\lambda'}{2} \exp\left(-\frac{\lambda'^2}{4}\right) I_0(\lambda R) d\lambda' \right].$$

После вычисления интеграла в явном виде получаем

$$\begin{aligned} \rho^0(\theta, \sigma, R) &= \frac{\exp[-R^2/(1+16\sigma^2)]}{(1+16\sigma^2)^{1/2}} \times \\ &\times \sin\left(\theta - \frac{4R^2\sigma}{1+16\sigma^2} + \arctg 4\sigma\right). \end{aligned}$$

Уравнение (2.27) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \theta \partial \sigma} - \left( \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_1}{\partial R} \right) &= \frac{\partial^2 (\rho^0)^2}{\partial \theta^2} = \\ &= \frac{2 \exp[-2R^2/(1+16\sigma^2)]}{1+16\sigma^2} \cos 2\left(\theta - \frac{4R^2\sigma}{1+16\sigma^2} + \arctg 4\sigma\right) = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{2 \exp[-2R^2/(1+16\sigma^2)]}{1+16\sigma^2} \exp \left[ 2i \left( \theta - \frac{4R^2\sigma}{1+16\sigma^2} + \arctg 4\sigma \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$



Отыскивая решение в виде  $\rho_1 = \text{Re}[A_1(\sigma, R) \exp(2i\theta)]$ , получаем неоднородное уравнение:

$$2i \frac{\partial A_1}{\partial \sigma} - \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial A_1}{\partial R} \right) = \\ = \frac{2}{1+16\sigma^2} \exp\left(-\frac{2R^2(1+4i\sigma)}{1+16\sigma^2} + 2i \arctg 4\sigma\right).$$

Начальное условие (2.28) определяет значение  $A_1(0, R) = 0$ . Из этих условий удается найти  $A_1(\sigma, R)$ , а затем

$$\rho_1(\theta, \sigma, R) = \frac{[\ln^2(1+16\sigma^2) + 4\arctg^2 4\sigma]^{1/2}}{8(1+16\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{2R^2}{1+16\sigma^2}\right) \times \\ \times \cos\left[2\theta - \frac{8R^2\sigma}{1+16\sigma^2} + \arctg 4\sigma - \arctg \frac{2\arctg 4\sigma}{\ln(1+16\sigma^2)}\right].$$

При том же начальном условии рассмотрим второй случай, когда влияние дифракционной расходимости мало. При  $\beta = T/\pi n A$  уравнение (2.24) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \sigma} + \epsilon \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) = 0, \quad (2.30)$$

здесь

$$\epsilon = \frac{c_0}{\alpha A} \left( \frac{T}{\pi L} \right)^2 = \frac{2\rho_0}{\gamma + 1} \left( \frac{c_0 T}{2\pi L} \right)^2$$

предполагается малым. Подставляя разложение решения

$$\rho = \rho^0 + \epsilon \rho_1 + \dots,$$

получаем уравнение для нулевого приближения:

$$\frac{\partial^2 (\rho^0)^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho^0}{\partial \theta \partial \sigma} = 0. \quad (2.31)$$

Оно удовлетворяется, если

$$\frac{\partial (\rho^0)^2}{\partial \theta} - \frac{\partial \rho^0}{\partial \sigma} = 0.$$

Решение этого уравнения описывается волной Римана. При начальном условии

$$\rho^0(\theta, 0, R) = \exp(-R^2) \sin \theta$$

функция  $\rho^0$  определится из уравнения

$$\rho^0(\theta, \sigma, R) = \exp(-R^2) \sin[\theta + 2\rho^0(\theta, \sigma, R)\sigma].$$

По-другому ее можно представить следующим образом. Пусть  $\phi(\theta, \sigma)$  — решение уравнения

$$\phi(\theta, \sigma) = \sin[\theta + 2\phi(\theta, \sigma)\sigma],$$

тогда

$$\rho^0(\theta, \sigma, R) = \exp(-R^2)\phi[\theta, \sigma \exp(-R^2)].$$

Относительно  $\rho_1$  имеем уравнение

$$\frac{\partial^2(2\rho^0\rho_1)}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\rho_1}{\partial\theta\partial\sigma} + \frac{\partial^2\rho^0}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\rho^0}{\partial R} = 0. \quad (2.32)$$

Если считать функцию  $\phi$  известной, то решение этого уравнения может быть найдено в явном виде. Однако получаемое приближение к решению  $\rho \approx \rho^0 + \rho_1$  мало пригодно для анализа вследствие его громоздкости. Поэтому, согласно [22], мы исследуем поведение функции  $\rho_1$  при малых  $\sigma$ . Пусть

$$\rho^0 = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\theta, R)\sigma^k, \quad \rho_1 = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\theta, R)\sigma^k.$$

Подставляя разложение  $\rho^0$  в (2.31) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\sigma$ , получим уравнения для определения коэффициентов  $g_k$ :

$$g_{n+1} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sum_{k=0}^n g_k g_{n-k} \right).$$

Точно так же, подставляя разложения  $h$  и  $g$  в (2.32), приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\sigma$ , получим уравнения относительно функций  $h_n$ :

$$\frac{\partial h_{n+1}}{\partial\theta} = \frac{1}{n+1} \left[ 2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \sum_{k=0}^n h_k g_{n-k} \right) + \frac{\partial^2 g_n}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial g_n}{\partial R} \right]. \quad (2.33)$$

При этом  $g_0 = \exp(-R^2) \sin \theta$ ,  $h_0 = 0$  вследствие начальных условий.

Из соотношения (2.33) при  $n = 0$  следует

$$\frac{\partial h_1}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \xi_0}{\partial R} = 4(R^2 - 1) \exp(-R^2) \sin \theta;$$

отсюда получаем

$$h_1 = 4(1 - R^2) \exp(-R^2) \cos \theta.$$

Приближение

$$\rho(\theta, \sigma, R) = \Psi(\theta, \sigma, R) = \rho^0(\theta, \sigma, R) + \epsilon \sigma h_1(\theta, R) \quad (2.34)$$

имеет погрешность  $O(\epsilon^2) + O(\epsilon \sigma^2)$ . Поэтому в области  $\epsilon \ll \sigma \ll 1$  слагаемое  $\epsilon \sigma h_1(\theta, R)$  является главной частью разности

$$\rho(\theta, \sigma, R) - \rho^0(\theta, \sigma, R).$$

Функция  $\rho(\theta, \sigma, R)$ , нечетная по  $\theta$ , является простой волной, подробно изученной в § 1 гл. 1. Функция  $h_1(\theta, R)$  четна по  $\theta$  и меняет знак в точке  $R = 1$ .

Из рассмотрения приближения  $\Psi(\theta, \sigma, R)$  с учетом указанных свойств функции  $h_1(\theta, R)$  заключает, что в рассматриваемой области ( $\epsilon \ll \sigma \ll 1$ ) решение  $\rho(\theta, \sigma, R)$  обладает следующими свойствами: при  $R < 1$  максимальное по  $\theta$  положительное значение решения возрастает с ростом  $\sigma$  и превосходит начальную амплитуду, а максимальное отрицательное убывает по абсолютной величине и оказывается меньшим начальной амплитуды. При этом область по переменной  $\theta$ , где решение положительно, суживается. В области  $R > 1$  динамика изменения положительной и отрицательной фаз имеет противоположный характер. Характер поведения решения при малых  $\epsilon$  и  $\sigma$  можно исследовать также, следуя стандартной схеме метода асимптотических разложений [26]. Будем отыскивать решение (2.30) в виде

$$\rho(\theta, \sigma, R) \sim \sum_{k,l=0} \epsilon^k \sigma^l q_{kl}(\theta, R).$$

Подставим это разложение в (2.30), приведем подобные члены и приравняем нулю коэффициенты при степенях  $\epsilon^k \sigma^l$ . В результате получим последовательность соотношений для определения коэффициентов  $q_{mn}(\theta, R)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{m,n+1}}{\partial \theta} = & \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (q_{ij} q_{m-i, n-j}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial R^2} q_{m-1, n} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} q_{m-1, n} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Полагая  $\sigma = 0$ , получим

$$\rho(\theta, 0, R) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k q_{k0}(\theta, R);$$

таким образом, начальные условия будут удовлетворены, если положить

$$q_{00} = \rho(\theta, 0, R), \quad q_{m0}(\theta, R) \equiv 0$$

при всех  $m > 0$ . Положим формально

$$q_{mn}(\theta, R) \equiv 0, \quad \text{если } m < 0 \text{ или } n < 0.$$

Заметим, что  $q_{m,n+1}$  определяется из (2.35) неоднозначно, с точностью до произвольного слагаемого, не зависящего от  $\theta$ .

Пусть  $[f]$  — обозначение среднего по периоду:

$$[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Обозначим правую часть (2.35) через  $f_{mn}$ ; уравнение  $\partial q_{m,n+1} / \partial \theta = f_{mn}$  относительно периодической по  $\theta$  функции  $q_{m,n+1}$  разрешимо, если  $[f_{mn}] = 0$ . Имеем

$$[f_{mn}] = \frac{\partial^2}{\partial R^2} q_{m-1,n} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} q_{m-1,n}.$$

Если  $[\rho(\theta, 0, R)] = 0$ , то все  $[q_{m,0}] = 0$ ; тогда соотношения (2.35) и условие  $[q_{mn}] = 0$  при всех  $m, n$  позволяют, и притом однозначно, определить все  $q_{mn}$ . В рассматриваемом случае и в более общем случае,

$$\rho(\theta, 0, R) = \sum_{l=0}^5 c_l(R) \sin(l\theta + \phi_l),$$

вычисление каждого из коэффициентов  $q_{mn}$  требует конечного числа элементарных действий и конечного числа операций дифференцирования функций  $c_l(R)$ .

Заметим, что  $\rho^0$  и  $h_1$ , входящие в (2.34), записываются в виде

$$\rho^0(\theta, \sigma, R) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{0n}(\theta, R) \sigma^n, \quad h_1(\theta, R) = q_{11}(\theta, R).$$

Изучим асимптотическое поведение решения (2.24) при больших  $\sigma$ . Естественно предположить, что с ростом  $\sigma$  влияние начальных условий будет ослабевать, и решение выйдет на некоторый автомо-

дельный режим. Запишем уравнение (2.24) в виде

$$a \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \sigma} + b \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) = 0. \quad (2.36)$$

Умножим уравнение на  $a$  и произведем замену переменных:  $a\rho = \bar{\rho}$ ,  $R/\sqrt{b} = \bar{R}$ . Получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \theta \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{R}} = 0. \quad (2.37)$$

Из соображений теории размерности [27] следует, что оно может иметь автомодельное решение вида

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\sigma} H(\theta, z), \quad \text{где} \quad z = \bar{R}/\sqrt{\sigma}.$$

После подстановки в (2.37) получаем уравнение относительно функции  $H$ :

$$\frac{\partial^2 H^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{z}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Функция  $H(\theta, z)$  — периодическая по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  и удовлетворяет условиям  $(\partial H/\partial z)|_{z=0} = 0$ ,  $H(\theta, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Пусть  $H(\theta, z)$  — некоторое решение этого уравнения. Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\rho = \frac{1}{a\sigma} H\left(\theta, \frac{R}{\sqrt{b\sigma}}\right).$$

Из вида уравнения (2.36) следует, что при любых  $\theta_0$  и  $\sigma_0$  его решением также будет

$$\rho = \frac{1}{a(\sigma - \sigma_0)} H\left[\theta + \theta_0, \frac{R}{\sqrt{b(\sigma - \sigma_0)}}\right]. \quad (2.38)$$

Из результатов численных расчетов, приведенных далее, видно, что во многих случаях с ростом  $\sigma$  решение становится разрывным в некоторой области, окружающей ось пучка. Пусть  $z_0$  таково, что при  $z < z_0$  функция  $H(\theta, z)$  разрывна по  $\theta$ , а при  $z > z_0$  непрерывна. Тогда граница области разрывности решения (2.38) определится уравнением  $R/\sqrt{b(\sigma - \sigma_0)} = z_0$ , т.е.

$$\sigma = \sigma_0 + R^2/bz_0^2. \quad (2.39)$$

Кривые, разделяющие области разрывности  $\rho$ , полученные расчетным путем, имеют вид, близкий к (2.39). Это обстоятельство косвенным образом подтверждает справедливость асимптотического представления (2.38) в области больших  $\sigma$  и конечных  $z$ .

При анализе плоских пучков конечной амплитуды наряду с численными методами используется поэтапный подход [8 - 12]. В применении к уравнению (2.36) он заключается в следующем: на начальном этапе (при малых  $\sigma$ ) пренебрегают дифракционными членами и рассматривают уравнение

$$a \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \sigma} = 0,$$

на следующем этапе (при больших  $\sigma$ ) пренебрегают нелинейными членами и рассматривают уравнение

$$- \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial \sigma} + b \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) = 0.$$

Между тем для построенного выше асимптотического решения (2.38) в центральной части пучка (при больших  $\sigma$  и конечных  $z$ ) все члены в левой части уравнения (2.36) имеют одинаковый порядок. Таким образом, асимптотическое решение (2.38) не может быть получено в рамках поэтапного подхода исследования акустических пучков конечной амплитуды.

В дальнейшем мы будем ориентироваться преимущественно на изучение свойств решений уравнений звуковых пучков на основе анализа результатов численных расчетов с помощью ЭВМ.

### ГЛАВА 3

## КВАЗИПЛОСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ИДЕАЛЬНЫХ СРЕДАХ

Анализируются результаты численного счета, относящиеся к звуковым пучкам с первоначально плоским фазовым фронтом. Исследуются различные амплитудные распределения: гауссово [28] распределение, описываемое полиномом четвертой степени [29], и платообразные [30]. Выявляются основные закономерности распространения и искажения квазиплоских волн. Определяются границы применимости квазиоптического приближения к однородному пучку с резким переходом в область тени.

### § 1. Распространение гауссова пучка в нелинейной среде

Отсутствие регулярных методов решения нелинейных уравнений в частных производных не позволяет построить общее решение уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков (2.18). Решение этого уравнения требует либо введения дополнительных предположений (§ 3 гл. 2), либо использования численных методов. Дальнейшее изложение посвящается анализу численного интегрирования уравнения (2.18) с граничным условием

$$\rho(t, r, \theta) = -F(r) \sin \omega t, \quad (3.1)$$

где функция  $F(r)$  определяет амплитудное распределение на границе. Описание численного метода приведено в приложении.

Введем безразмерные переменные

$$\rho = \rho'/A, \quad \theta = \omega t, \quad z = x/2L_D, \quad R = r/a, \quad (3.2)$$

где  $A$  — осевое значение амплитуды гармонического сигнала на границе;  $a$  — ширина пучка;  $L_D = ka^2$  — дифракционная длина. В новых переменных задача (2.18), (3.1) имеет вид

$$N \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \theta} + \Delta_{\perp} \rho = 0, \quad \rho(\theta, R, 0) = -F(R) \sin \theta. \quad (3.3)$$

Единственный параметр задачи (3.3)  $N$  равен

$$N = L_d / L_p \quad (3.4)$$

и определяет соотношение нелинейных и дифракционных эффектов [ $L_p = 1 / \omega A$  – расстояние формирования разрыва в плоской волне (1.18)]. Безразмерный параметр (3.4) является величиной, обратной коэффициенту, введенному в работе [31]. В отличие от [31] координата вдоль пучка нормируется на дифракционную длину  $L_d$ , а не на  $L_p$ , что позволяет сделать пространственную координату  $z$  независимой от величины возмущения.

Для начала рассмотрим гауссов пучок, поскольку в квазиоптическом приближении распределение амплитуды по закону Гаусса занимает особое положение, являясь собственной функцией линейного параболического уравнения. Итак, функция  $F(R)$  определяется выражением

$$F(R) = \exp(-R^2). \quad (3.5)$$

В процессе вычислений параметр  $N$  изменяется от 1 до 10, что соответствует увеличению либо ширины пучка, либо интенсивности звуковой волны. Наибольший интерес представляют расстояния, сравнимые с дифракционной длиной,  $z < 1$ , ибо при  $z > 0,5$  расходимость становится сферической, и волну можно рассматривать как сферически расходящуюся. Закономерности нелинейного искажения сферически расходящихся волн известны [32].

Анализ результатов начнем со случая, когда расстояния проявления нелинейных и дифракционных эффектов равны, что соответствует  $N = 1$ . При  $N = 1$  волновой профиль в гауссовом пучке сильно искажается, но ударная волна на расстояниях  $z \sim 1$  не образуется. На рис. 3.1 изображена форма волны на разных расстояниях: вблизи границы ( $z = 0,05$ ), на расстоянии, равном длине проекторной зоны ( $z = 0,5$ ), и при  $z = 1$ . Можно заметить, что положительный полупериод меньше по длительности, чем отрицательный. Сокращение длительности положительного полупериода при равенстве площадей полупериодов приводит к тому, что пиковое значение возмущения в фазе сжатия больше, чем в фазе разрежения. Действительно, положительное пиковое значение возмущения при  $z = 1$   $\rho_{пт+} = 0,314$ , а отрицательное  $-\rho_{пт-} = -0,199$ . Кроме того, положительный полупериод заострен, отрицательный скруглен.

Сравним волновые профили на оси пучка, соответствующие различным значениям параметра  $N$  (рис. 3.2). При увеличении  $N$  нелинейные искажения проявляются сильнее. Если при  $N = 1$  на расстоянии  $z = 0,9$  фронт не ударный, то при  $N = 2$  и  $3,25$  волна становится разрывной на этом расстоянии.

Несимметричное искажение фазы сжатия и фазы разрежения периодического сигнала характеризует нелинейное распространение звуковых пучков. Этот факт наблюдался экспериментально [33] и может



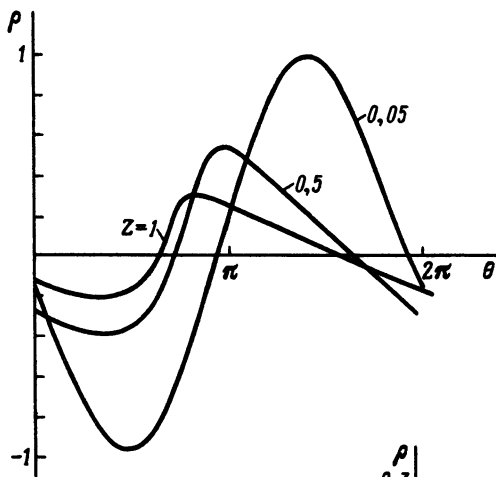


Рис. 3.1. Форма волны на оси гауссова пучка на разных расстояниях  $z$ ;  $N = 1$ .

Рис. 3.2. Волновой профиль на оси при различных значениях параметра  $N$ ;  $z = 0,9$ .

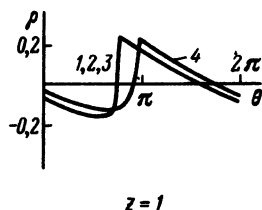
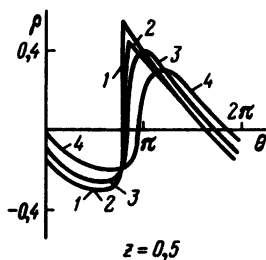
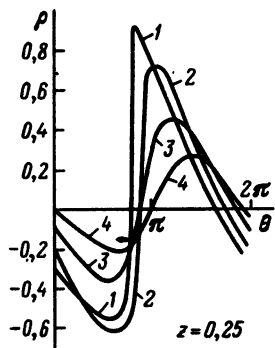
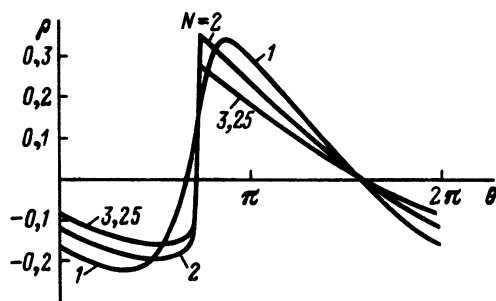
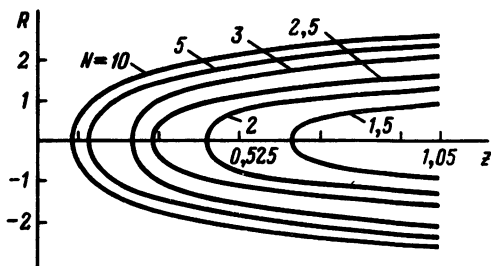


Рис. 3.3. Волновые профили в разных точках поперечного сечения пучка: кривые 1-4 соответствуют значениям  $R = 0, 0,5, 0,9$  и  $1,3$ ;  $N = 3$ .

быть получен аналитически в рамках поэтапного подхода [10], а также в квазиоптическом приближении [7, 25].

Ударная волна образуется сначала на оси пучка, в то время как в других точках поперечного сечения профиль неударный. Затем появляется разрыв и в приосевой области, и на периферии пучка. Это иллюстрирует рис. 3.3: на расстоянии  $z = 0,25$  разрыв сформировался

Рис. 3.4. Области ударной волны при различных  $N$ .



на оси пучка (кривая 1), сильны искажения в приосевой области (кривая 2), на периферии пучка искажения существенно меньше (кривые 3 и 4). При  $z = 0,5$  волна

стала ударной не только на оси (кривая 1), но и при  $R = 0,46$  (кривая 2). На расстоянии  $z = 1$  волновой профиль — ударной по всему обчитываемому сечению пучка. Области ударной волны для различных значений параметра  $N$  изображены на рис. 3.4. Естественно, что с увеличением  $N$  ударная волна образуется раньше. Координата формирования ударного фронта определяется на основании следующего эмпирического критерия: фронт считается ударным, если изменение функции  $\rho(\theta)$  от отрицательного значения до максимального положительного происходит за время  $\Delta\theta \leq \pi/15$ . Обоснованность критерия проверялась расчетами при различных шагах.

При изменении параметра  $N$  меняется динамика образования ударного профиля. При сравнительно малых значениях параметра  $N$  (1,5 — 3) сначала положительный полупериод становится треугольным, но фронт чуть шире ударного (кривая 1 на рис. 3.5). Затем фронт сужается и становится ударным (кривая 2). Далее форма волны не изменяется, только уменьшается пиковое значение возмущения (кривая 3). Если нелинейность проявляется сильнее, чем дифракция, что соответствует значениям  $N = 5, \dots, 10$ , разрыв наступает, когда задний фронт еще скруглен, а потом уже положительный полупериод приобретает треугольную форму. Это демонстрирует рис. 3.6, где

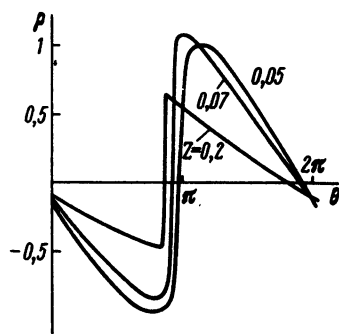
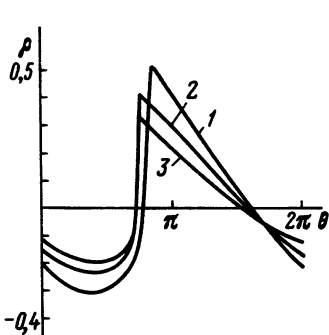


Рис. 3.5. Волновые профили на оси при  $z = 0,6$  (1),  $z = 0,8$  (2),  $z = 1$  (3);  $N = 1,5$ .

Рис. 3.6. Форма волны на оси на разных расстояниях  $z$ ;  $N = 10$ .

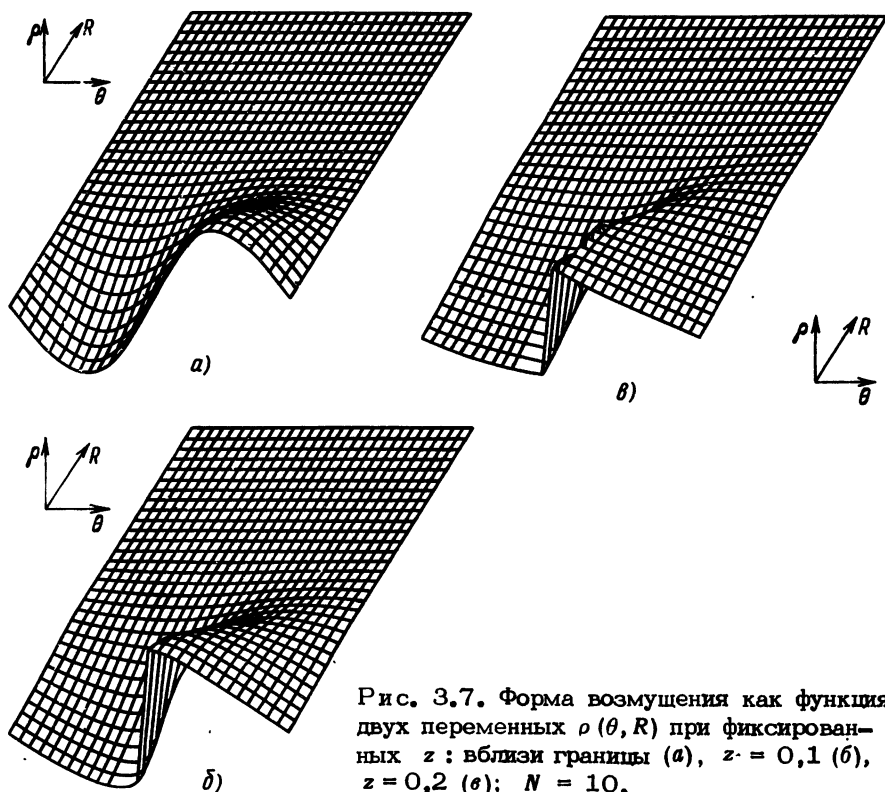


Рис. 3.7. Форма возмущения как функция двух переменных  $\rho(\theta, R)$  при фиксированных  $z$ : вблизи границы (а),  $z = 0,1$  (б),  $z = 0,2$  (в);  $N = 10$ .

показана форма волны перед образованием разрыва ( $z = 0,05$ ) в момент, когда ударный фронт только что сформировался ( $z = 0,07$ ), и через некоторое время после того, как образовался ударный профиль. На рис. 3.6 видно, что при больших значениях  $N$  асимметрия формы волны не так ярко выражена, как при меньших  $N$ : волновой профиль близок к симметричной "пиле" плоских волн.

Форму возмущения можно изобразить в виде функции двух переменных: времени и поперечной координаты, как показано на рис.3.7. Возмущение, синусоидальное вблизи границы по всему сечению пучка (рис. 3.7, а), при распространении становится треугольным на оси и в присевой области (рис. 3.7, б), далее эта форма распространяется в другие точки поперечного сечения пучка, при этом ширина пучка увеличивается (рис. 3.7, в).

Как видно на рис. 3.6, пиковое значение возмущения в фазе сжатия  $\rho_{\Pi}$  на оси пучка может превышать единицу. На рис. 3.8 приведены зависимости  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси для различных  $N$ . При  $N = 1$  функция  $\rho_{\Pi}(z)$  примерно до середины прожекторной зоны совпадает с амплитудой гармонической волны на оси гауссова пучка в линейной сре-

Рис. 3.8. Зависимость пикового значения положительного возмущения на оси от  $z$  при различных  $N$ .

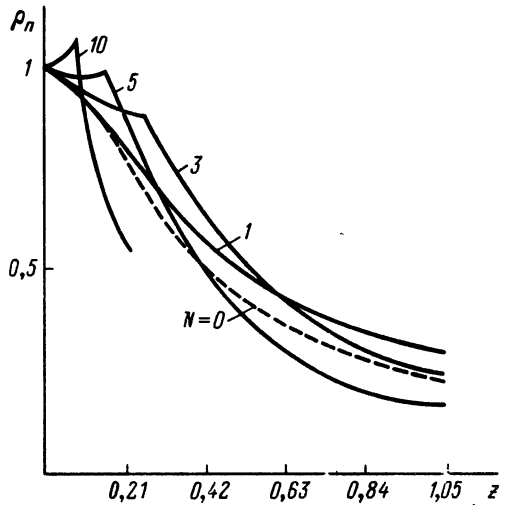
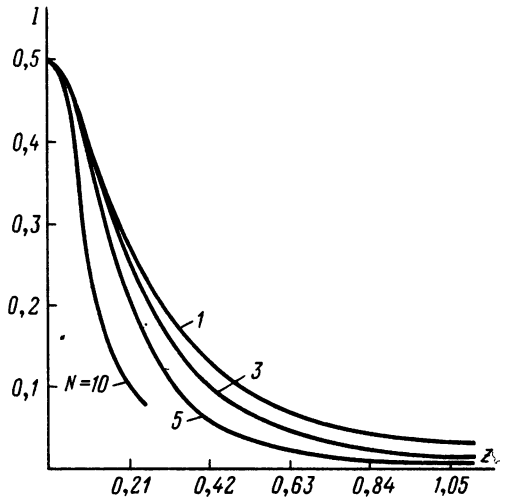


Рис. 3.9. Зависимость средней за период интенсивности звуковой волны на оси от  $z$  при различных  $N$ .



де ( $N = 0$ ), далее гармоники, образующиеся при распространении, вносят свой вклад в  $\rho_n$ , что задерживает спад пикового значения возмущения. При увеличении параметра  $N$  уменьшение замедляется до образования разрыва и происходит быстрее после того, как ударный фронт сформировался. Это приводит к появлению излома на кривых, координата которого совпадает с  $z_p$  для соответствующего значения  $N$ . Дальнейшее увеличение  $N$  усугубляет этот процесс, и при больших значениях  $N$  функция  $\rho_n$  на оси превышает единицу, что для гауссова пучка получено аналитически [25]. При  $N = 10$  это превышение составляет 6% и связано с изменением фазовых соотношений между гармониками из-за их различной расходимости. Подтвер-

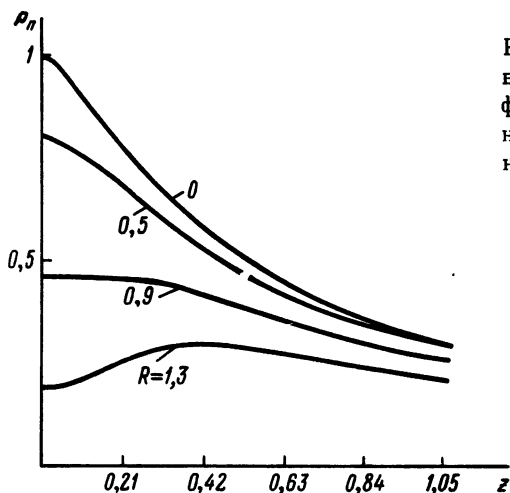


Рис. 3.10. Зависимость пикового значения возмущения в фазе сжатия от  $z$  в различных точках поперечного сечения пучка;  $N = 1$ .

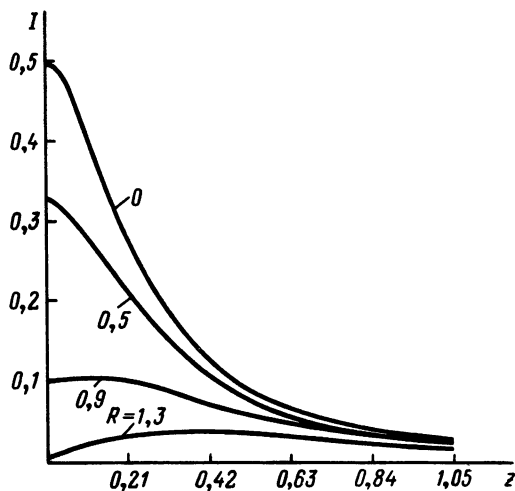


Рис. 3.11. Зависимость средней за период интенсивности звуковой волны от  $z$  в различных точках поперечного сечения пучка;  $N = 1$ .

ждением этому могут служить зависимости  $I(z)$  на оси пучка при различных значениях параметра  $N$ , изображенные на рис. 3.9. На этих кривых нет излома, интенсивность на оси равномерно падает и нигде не превышает значения, заданного на границе. Рис. 3.10 демонстрирует изменение пикового значения возмущения от  $z$  в различных точках поперечного сечения пучка. На оси и в присевой области  $\rho_{\Pi}$  монотонно падает. При  $R = 0,9$  наблюдается некоторая стабилизация  $\rho_{\Pi}(z)$ , сменяющаяся вблизи границы прожекторной зоны спадом. На периферии пучка  $\rho_{\Pi}$  незначительно увеличивается за счет расходимости, а после прохождения прожекторной зоны уменьшается. Примерно так же изменяется средняя за период интенсивность звуковой волны  $I(z)$  (рис. 3.11).

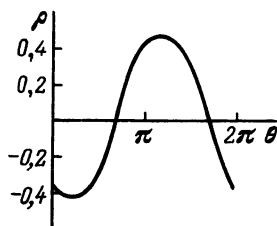
## § 2. Нелинейное распространение пучка с резко выраженной границей

В гауссовом пучке при  $R \rightarrow \pm\infty$  амплитуда на границе нелинейной среды стремится к нулю асимптотически. Дифракционные эффекты проявляются сильнее в пучках с резко выраженной границей. Поэтому в качестве примера рассмотрим пучок, амплитуда в котором распределена по закону

$$F(R, 0) = (1 - R^2)^2, \quad R \leq 1; \quad F(R, 0) = 0, \quad R > 1. \quad (3.6)$$

Пучок с амплитудным распределением (3.6) при  $z = 0$  имеет границу, за пределами которой среда не возмущена. Это распределение

Рис. 3.12. Волновой профиль на оси пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени;  $z = 0, 2$ ,  $N = 0,1$ .



обеспечивает плавное и достаточно быстрое уменьшение амплитуды до нуля. Основное внимание мы уделим сравнению с гауссовым пучком.

При значении параметра  $N < 1$  искажения сигнала малы. Примерный вид функции  $\rho(\theta)$  на оси пучка для  $N = 0,1$  на расстоянии  $z = 0,2$  показан на рис. 3.12. Здесь ясно виден сдвиг фазы, обусловленный отличием скорости звука в пучке от скорости распространения слабого сигнала в свободном пространстве. Для  $|R| > 0$  сдвиг фазы меньше, чем для соответствующих центральных точек. Кроме того, привлекает внимание существенное уменьшение амплитуды звуковой волны на сравнительно близком расстоянии от границы нелинейной среды. Например, при  $z = 0,2$  амплитуда возмущения на оси пучка равна 0,46, что связано с расходимостью волны. Действительно, решение линейной задачи, полученное в § 2 гл. 1, позволяет оценить пиковое значение возмущения на оси в предельном случае  $N \rightarrow 0$ . Согласно выражению (1.29) или графику на рис. 1.3 безразмерная амплитуда равна 0,41 на расстоянии  $z = 0,2$ . Приведенный пример свидетельствует об условности представления, что в пределах прожекторной зоны, т.е. на расстояниях порядка  $L_D$ , пучок не расходится.

При  $N = 1$  волновой профиль искажается значительно сильнее, но ударная волна не образуется на расстояниях  $z < 1$ . Сплошная кривая на рис. 3.13 соответствует форме возмущения на оси при  $z = 1$ . Используя известные данные о зависимости расстояния образования разрыва в сферической волне от величины возмущения [32], можно оценить расстояние формирования ударного фронта за пределами про-

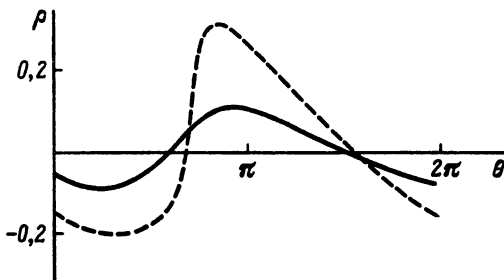


Рис. 3.13. Форма возмущения на оси пучка с амплитудным распределением (3.6) (сплошная кривая) и на оси гауссова пучка (пунктир);  $z = 1, N = 1$ .

жекторной зоны. Расстояние образования ударного профиля в сферической волне с учетом асимптотики (1.30) имеет вид

$$z_p = z_0 \exp(6/N), \quad (3.7)$$

где  $z_0$  — расстояние, на котором волну можно считать сферически расходящейся.

На рис. 3.13 для сравнения изображена форма волны на оси гауссова пучка (пунктир) для тех же значений  $N$  и  $z$ . Сравнение этих кривых показывает, что пиковое значение возмущения в гауссовом пучке больше, а нелинейные искажения сильнее.

Ударная волна в прожекторной зоне начинает формироваться при  $N \approx 3$ . Области ударной волны для различных значений параметра  $N$  показаны на рис. 3.14. В табл. 3.1 приведены координаты формирования ударного фронта  $z_p$  на оси гауссова пучка и пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени.

В гауссовом пучке при  $N = 1,5; 2; \dots$  ударная волна образуется раньше, а при больших значениях  $N$  ( $N = 5, 10$ ) позже. На рис. 3.15 представлены области ударной волны для обоих пучков при  $N = 2$ .

Рис. 3.16 на примере волнового профиля, соответствующего  $N = 10$ , иллюстрирует динамику распространения нелинейных искажений как вдоль пучка, так и поперек. На расстоянии  $z = 0,07$  ударный фронт только что образовался на оси пучка. В присоевой области  $R = 0,5$  профиль близок к ударному, на периферии нелинейные искажения малы. При  $z = 0,1$  волна становится ударной в присоевой области, в точках поперечного сечения  $R = 0,9$  сильны нелинейные искажения, в то время как при  $R = 1$  они малозаметны. На расстоя-

Таблица 3.1

Амплитудное распределение	$z_p$						
	$N = 1$	$N = 1,5$	$N = 2$	$N = 2,5$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 10$
$\exp(-R^2)$	-	0,7	0,45	0,3	0,25	0,15	0,07
$(1-R^2)^2$	-	-	0,8	0,45	0,28	0,13	0,06

Рис. 3.14. Области ударной волны при различных значениях параметра  $N$ .

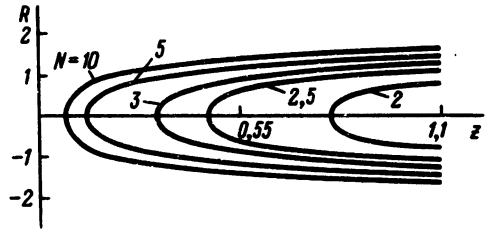


Рис. 3.15. Области ударной волны в различных пучках: в пучке с резко выраженной границей (сплошная кривая) и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 2$ .

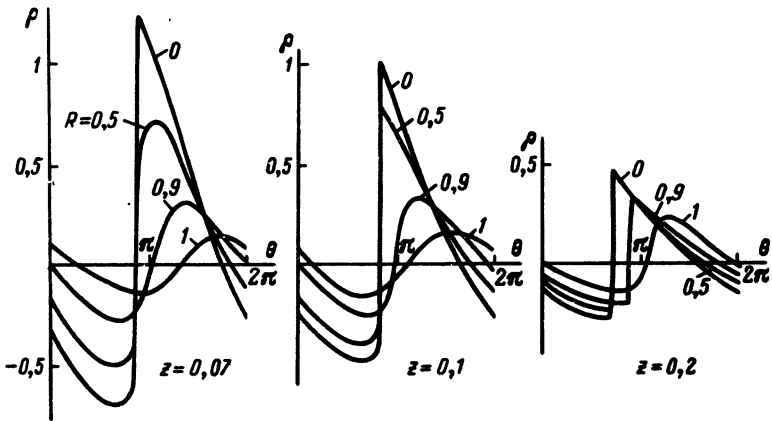
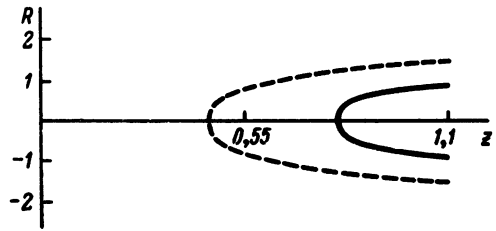


Рис. 3.16. Волновые профили в различных точках поперечного сечения пучка;  $N = 10$ .

нии  $z = 0,2$  разрыв сформировался в точках поперечного сечения  $R = 0,9$ , заметны нелинейные искажения при  $R = 1$ .

Как ведет себя пиковое значение возмущения? Зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси для различных  $N$  изображена на рис. 3.17. Для сравнения здесь же пунктиром показано изменение амплитуды гармонической волны на оси пучка, распространяющегося в линейной среде. Нелинейность сглаживает небольшие осцилляции, наблюдаемые в линейном случае. При сравнительно небольшой нелинейности ( $N = 3$ )  $\rho_{\Pi}$



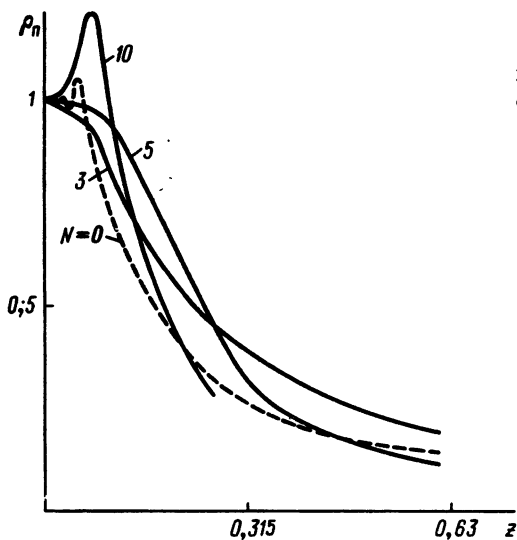


Рис. 3.17. Зависимость пикового значения возмущения на оси от  $z$  при различных  $N$ .

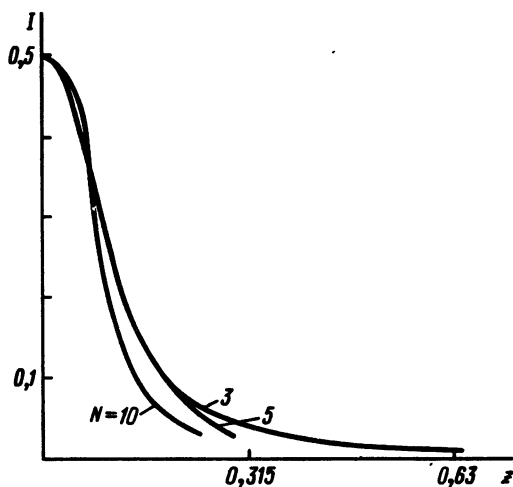


Рис. 3.18. Зависимость средней за период интенсивности звуковой волны на оси от  $z$  при различных  $N$ .

равномерно уменьшается. Увеличение  $N$  сначала сдерживает спад  $\rho_n(z)$ , а потом его ускоряет. При сильной нелинейности ( $N = 10$ )  $\rho_n(z)$  превышает единицу на 23%, координата максимума  $\rho_n(z)$  совпадает с  $z_p$ . Механизм этого явления уже обсуждался в предыдущем параграфе.

Косвенным доказательством справедливости изложенного выше объяснения может служить зависимость средней за период интенсивности звуковой волны от продольной координаты (рис. 3.18).  $I(z)$  не превышает значения, заданного на границе. Пиковое значение возму-

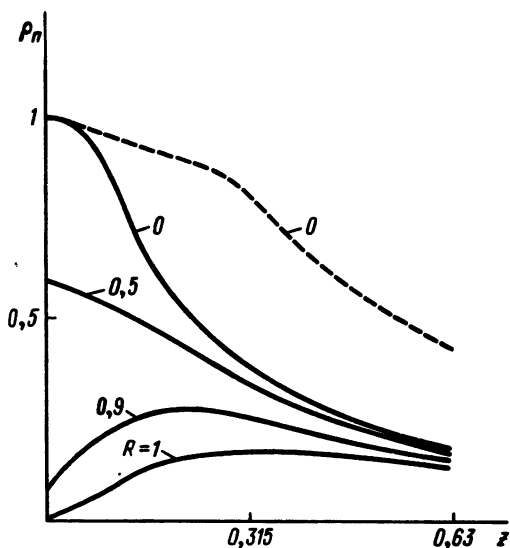


Рис. 3.19. Зависимость пикового значения возмущения от  $z$  в различных точках поперечного сечения пучка (пунктир соответствует гауссову пучку);  $N = 3,25$ .

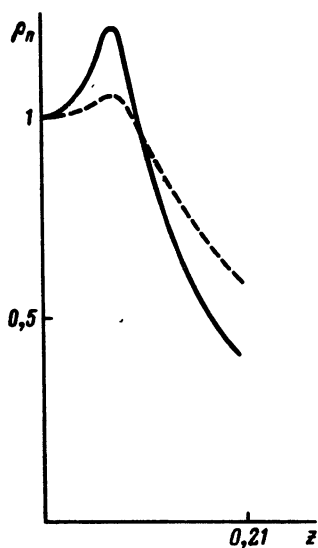


Рис. 3.20. Зависимость пикового значения возмущения на оси от  $z$  в пучке с резко выраженной границей (сплошная кривая) и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 10$ .

щения в других точках поперечного сечения изменяется так, как показано на рис. 3.19. На оси и в приосевой области ( $R = 0,5$ )  $\rho_n$  уменьшается при распространении, на периферии пучка ( $R = 0,9$  и  $R = 1$ )  $\rho_n$  сначала растет, а затем падает. На границе проекторной зоны и за ее пределами ( $z \geq 0,5$ ) значения  $\rho_n$  на оси и на периферии отличаются друг от друга очень мало.

Если сравнить поведение  $\rho_n(z)$  в гауссовом пучке и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, то можно заметить, что в гауссовом пучке  $\rho_n$  на оси спадает гораздо медленнее из-за меньшей его расходимости (пунктир на рис. 3.19). При  $N = 10$  сильная расходимость пучка с резко выраженной границей, изменяющая фазовые соотношения между интенсивно образующимися гармониками, увеличивает максимум функции  $\rho_n(z)$  (рис. 3.20). Этим объясняется разница в значениях  $z_p$  для обоих пучков, отмечавшаяся выше и наиболее полно отраженная в табл. 3.1.

### § 3. Однородные пучки конечной амплитуды

Рассмотренные выше амплитудные распределения, гауссово и по полиному четвертой степени, не исчерпывают всех реально существующих возможностей. Для полноты картины рассмотрим пучок с платообразным распределением амплитуды по сечению. Такие амплитудные распределения представляют особый интерес; во-первых, они ближе всего к условиям эксперимента, использующего круглые поршневые излучатели; во-вторых, ближнее поле таких излучателей имеет очень сложную структуру даже в линейном приближении. На первый взгляд может показаться, что нелинейность не должна сильно изменить поле вблизи излучателя — ведь нелинейные эффекты накапливаются с расстоянием. Как будет показано ниже, нелинейность, сравнимая с дифракционной расходимостью, существенно изменяет звуковое поле на сравнительно небольших расстояниях от границы.

Пусть на границе нелинейной среды возбуждается гармонический сигнал с амплитудой, распределенной по сечению пучка по закону:

$$F(R) = \exp(-R^M), \quad (3.8)$$

где  $M$  — безразмерный параметр. При больших значениях параметра  $M$  закон (3.8) описывает платообразные распределения с довольно резким переходом в области тени. Изменение параметра  $M$  позволяет изменять степень однородности амплитудного распределения и крутизну его спада. В процессе вычислений  $M$  принимает значения: 4, 8 и 16. Эти амплитудные распределения изображены на рис. 3.21, где для сравнения пунктиром представлено гауссово распределение амплитуды.

Прежде чем приступить к численному счету и анализу результатов, оценим правомерность квазиоптического приближения по отношению к однородным пучкам. Уравнение поперечной диффузии плохо описывает звуковое поле в случае, когда амплитудное распределение характеризуется резким переходом в область тени.

Чтобы определить границы применимости квазиоптического приближения к амплитудным распределениям вида (3.8), сравним решение линейной задачи в квазиоптическом приближении с точным решением уравнения Гельмгольца. Для этого численно проинтегрируем пара-

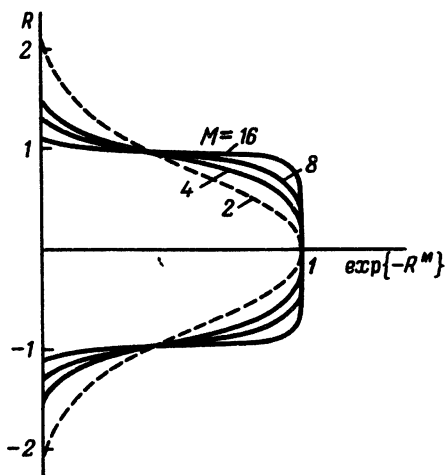


Рис. 3.21. Амплитудные распределения, соответствующие различным значениям параметра  $M$ .

Таблица 3.2

Амплитудное распределение	$\delta_{\max}$ , %	$z$
$\exp(-M^4)$	$<0,09$	Во всей области интегрирования
$\exp(-M^8)$	1	0,03
$\exp(-M^{16})$	8,4	0,015
	3	0,03
	$<1,5$	0,04

болитическое уравнение (1.20) с граничным условием (3.8) и уравнение Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (3.9)$$

где  $E = A e^{-ikx}$ . Полученные результаты приведем в виде табл. 3.2, где представлены максимальная разница между этими решениями  $\delta_{\max}$  и координата  $z$ , соответствующая этой разнице, для различных амплитудных распределений. При увеличении расстояния различие между решениями уменьшается. Анализ данных табл. 3.2 показывает, что квазиоптическое приближение вполне приемлемо для описания распространения звуковых пучков с равномерным распределением амплитуды. Решение линейного уравнения (1.20) с граничными условиями (3.8) представлено на рис. 3.22.

Теперь перейдем к анализу результатов расчетов. При распространении пучков с амплитудным распределением (3.8) проявляются основные особенности нелинейного искажения волн, свойственные звуковым пучкам. На рис. 3.23 хорошо видна асимметрия в искажении

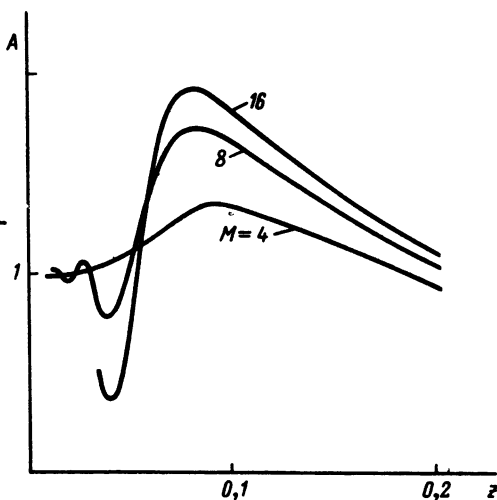


Рис. 3.22. Осевая зависимость амплитуды гармонической волны от  $z$  для различных  $M$ .

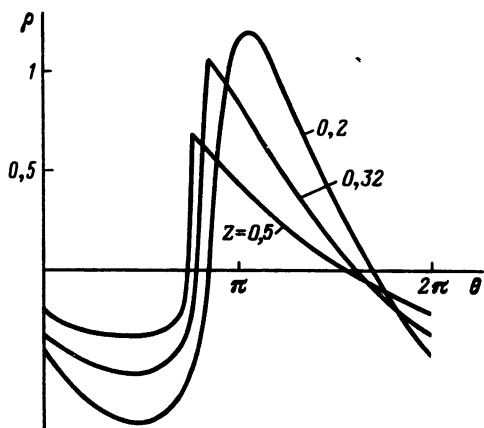


Рис. 3.23. Волновые профили на оси при разных  $z$ ;  $N = 2$ ,  $M = 4$ .

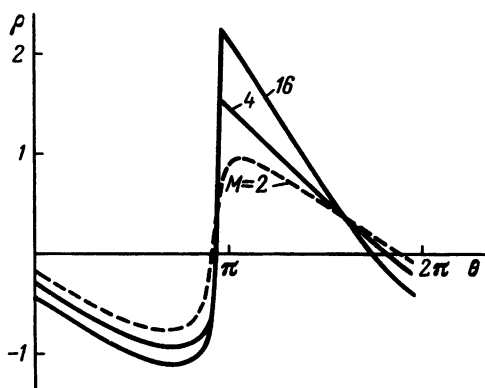


Рис. 3.24. Волновой профиль на оси при различных  $M$ ;  $N = 5$ ,  $z = 0,12$ .

положительного и отрицательного полупериодов. Например, на расстоянии  $z = 0,2$ , когда ударный фронт еще не сформировался, пиковое значение возмущения в фазе сжатия  $\rho_{\pi+} = 1,2$ , а в фазе разрежения  $\rho_{\pi-} = -0,77$ . После образования разрыва  $\rho_{\pi+}$  более чем в два раза превышает  $\rho_{\pi-}$ . Форма ударной волны в пучке отличается от симметричной "пилы" плоских волн. После образования ударного профиля возмущение на расстояниях  $z \approx 1$  сохраняет эту форму, но уменьшается пиковое значение возмущения. С увеличением параметра  $M$  асимметрия формы возмущения усугубляется. Волновые профили на оси в пучках с различными амплитудными распределениями изображены на рис. 3.24.

Другая отличительная черта нелинейного распространения пучков — превышение пиковым значением возмущения величины, заданной на границе, — в однородных пучках проявляется особенно ярко. В линейном случае амплитуда на оси превышает единицу (рис. 3.22 или пунктир на рис. 3.25). Это хорошо известный дифракционный эффект. В

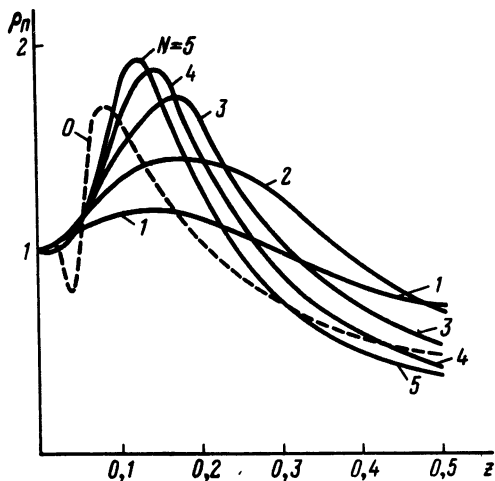


Рис. 3.25. Зависимость пикового значения возмущения на оси от  $z$  для различных значений  $N$ ;  $M = 8$ .

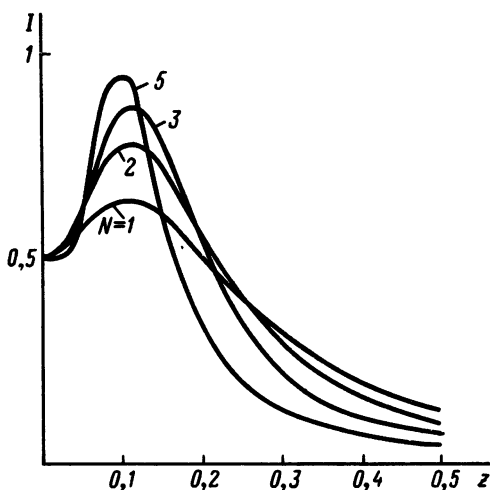


Рис. 3.26. Зависимость средней за период интенсивности звуковой волны на оси от  $z$  при различных  $N$ ;  $M = 8$ .

нелинейной среде при  $N = 1$  дифракционный пик расплывается и в значительной степени "съедается" (см. рис. 3.25). Нелинейность ослабляет основную компоненту, вносящую наиболее существенный вклад в максимум  $\rho_n$ , а образующиеся в этом случае гармоники сравнительно слабы. С увеличением значений параметра  $N$  максимум функции  $\rho_n(z)$  увеличивается и сдвигается вправо до тех пор, пока координата этого максимума  $z_1$  не совпадет с координатой формирования разрыва  $z_p$ . Увеличение  $\rho_n$  на оси, соответствующее росту  $N$ , способствует проявлению нелинейных свойств и более раннему образованию ударной волны. Поэтому дальнейшее увеличение  $N$  сдвигает  $z_1$  влево.

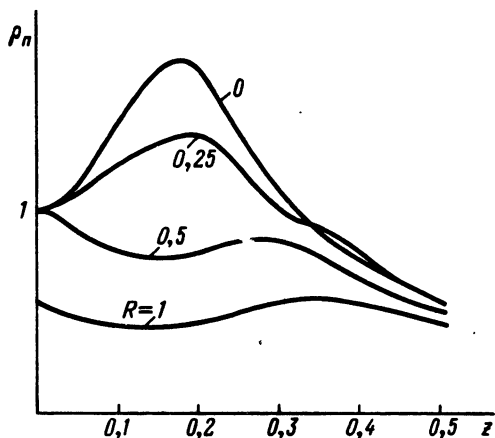


Рис. 3.27. Зависимость пикового значения возмущения от  $z$  при различных  $R$ ;  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

Рис. 3.28. Зависимость средней интенсивности от  $z$  при различных  $R$ ;  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

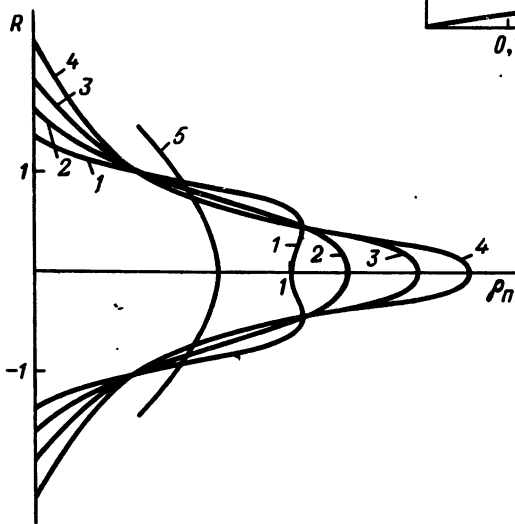
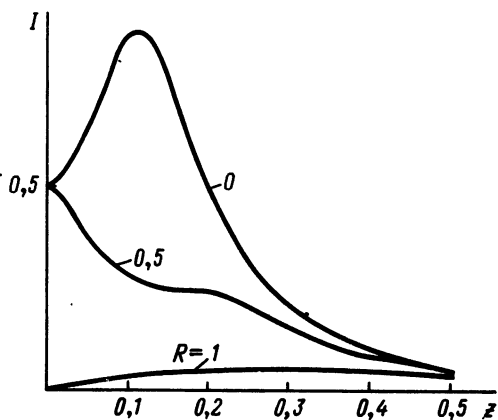


Рис. 3.29. Поперечное распределение пикового значения возмущения при различных  $z$ ; кривые 1 - 5 соответствуют значениям  $z$ : 0,02, 0,06, 0,1, 0,15, 0,4;  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

В итоге зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  в случае сильной нелинейности,  $N = 5$ , ближе всего к пунктирной кривой линейной задачи. Природа этих максимумов различна: в нелинейной среде максимальное значение  $\rho_{\Pi}$  в значительной степени определяется фазовыми соотношениями между образующимися гармониками. Свидетельством этому может служить зависимость средней за период интенсивности звуковой волны на оси от координаты вдоль пучка  $I(z)$ , изображенная на рис. 3.26 для различных значений  $N$ . При изменении  $N$  координата  $z_2$  максимума функции  $I(z)$  не изменяется. С увеличением  $N$  растет максимальное значение  $I$ , однако рано образующаяся ударная волна приводит к резкому спаду интенсивности и обострению максимума функции  $I(z)$ . При этом в других точках поперечного сечения пучка пиковое значение возмущения и интенсивность звуковой волны ведут себя так, как показано на рис. 3.27 и 3.28. По этим рисункам можно судить о том, как при распространении пучка утрачивается его первоначальная однородность. Еще лучше это видно на рис. 3.29, где представлены поперечные распределения пикового значения возмущения  $\rho_{\Pi}(R)$  при различных  $z$ . Равномерное амплитудное распределение вблизи границы становится слегка вогнутым (кривая 1), а затем куполообразным (кривая 2). Далее верхушка купола сильно вытягивается, при этом "хвосты" распределения распространяются по  $R$  (кривые 3 и 4). Этот процесс продолжается до тех пор, пока пиковое значение возмущения на оси не достигнет максимума, после чего поперечное распределение быстро расширяется (кривая 5). Сравнение различных поперечных распределений на фиксированных расстояниях (рис. 3.30) показывает, что различие между амплитудными распределениями небольшое вблизи границы ( $z = 0,02$ ), затем становится существенным ( $z = 0,15$ ): более вытянутое распределение соответствует большему значению  $M$ . Примерно на расстоянии  $z = 0,3$  кривые, соответствующие  $M = 4$  и 8, становятся неразличимыми, а далее они сливаются с пунктирной кривой для гауссова пучка.

Сильно вытянутое поперечное распределение способствует проявлению нелинейных свойств на оси и в близлежащих точках поперечного сечения пучка, где ударная волна образуется раньше. На рис. 3.31 изображены волновые профили на расстоянии  $z = 0,21$ , когда разрыв только что сформировался на оси; при  $R = 0,5$  его еще нет, на периферии искажения малы. На расстоянии  $z = 0,3$  профиль становится ударным не только на оси, но и в присоединенной области. Заметнее искажения при  $R = 0,9$ , в точках  $R = 1,4$  волновой профиль по-прежнему искажен мало. Если отделить области пространства, где образовалась ударная волна, от тех областей, где разрыв еще не сформировался, то для разных значений  $N$  получатся кривые, представленные на рис. 3.32. Естественно, что при увеличении параметра  $N$  ударная волна образуется раньше. Сравним области ударной волны в пучках с различными амплитудными распределениями (рис. 3.33). При  $N = 1$  с увеличением степени однородности амплитудного распределения ударная волна образуется раньше (кривые 1 и 2). При  $N = 2$



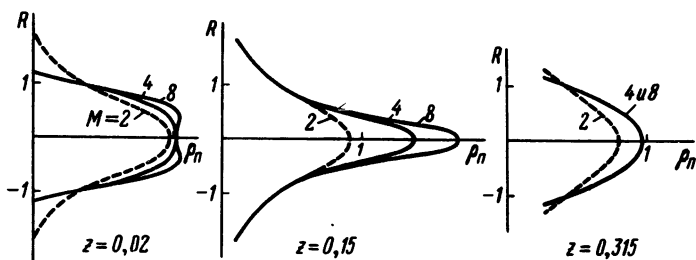


Рис. 3.30. Поперечное распределение пикового значения возмущения, соответствующее различным значениям  $M$ ;  $N = 3$ .

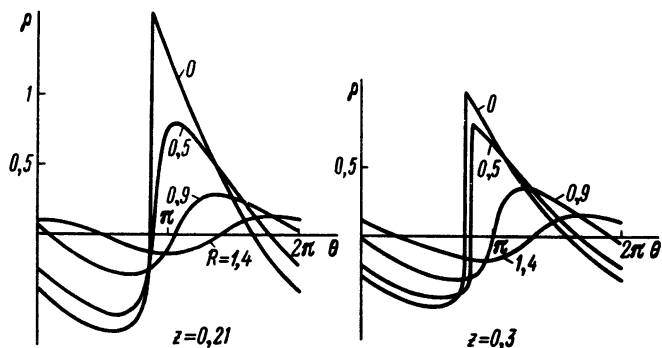


Рис. 3.31. Волновой профиль при различных  $R$ ;  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

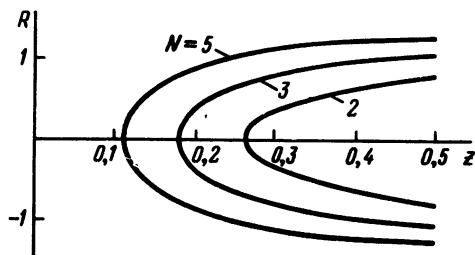


Рис. 3.32. Области ударной волны при различных  $N$ ;  $M = 8$ .

Рис. 3.33. Области ударной волны при различных значениях параметров  $N$  и  $M$ : кривая 1 -  $N = 1$ ,  $M = 8$ ; 2 -  $N = 1$ ,  $M = 16$ ; 3 -  $N = 2$ ,  $M = 4$ ; 4 -  $N = 2$ ,  $M = 8$  и 16; пунктир -  $N = 2$ ,  $M = 2$ .

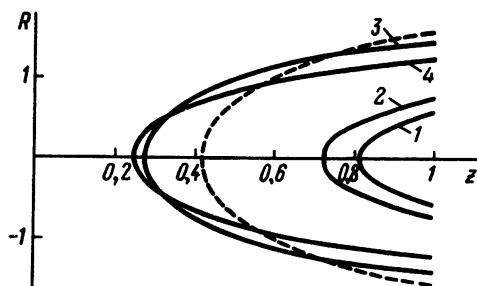


Таблица 3.3

Амплитудное распределение	$N$	$z_p$	$\rho_{\text{п макс}}$	$z_1$	$I_{\text{мах}}$	$z_2$
$\exp(-R^2)$	0					
	1	1	1	0	0,5	0
	2	0,42	1	0	0,5	0
	3	0,25	1	0	0,5	0
	5	0,15	1	0	0,5	0
$\exp(-R^4)$	0		1,33	0,092	0,884	0,092
	1	1	1,08	0,1	0,546	0,05-0,1
	2	0,28	1,21	0,125-0,18	0,618	0,1
	3	0,18	1,41	0,18	0,658	0,1
	5	0,12	1,55	0,12	0,69	0,09
$\exp(-R^8)$	0		1,7	0,075	1,44	0,075
	1	0,81	1,20	0,1-0,15	0,642	0,1
	2	0,26	1,44	0,18	0,786	0,1
	3	0,18	1,74	0,18	0,870	0,1
	5	0,12	1,94	0,12	0,952	0,1
$\exp(-R^{16})$	0		1,94	0,075	1,88	0,075
	1	0,72	1,47	0,12	0,684	0,1
	2	0,26	1,56	0,18	0,857	0,1
	3	0,18	1,90	0,16	0,976	0,1
	5	0,12	2,24	0,12	1,08	0,1

в пучке с амплитудным распределением, характеризуемым  $M = 4$ , разрыв на оси формируется чуть позже (кривая 3) по сравнению с пучками, для которых  $M = 8$  и 16 и области ударных волн совпадают полностью (кривая 4). При  $N \geq 3$  области ударной волны для рассмотренных амплитудных распределений не зависят от последних. Для сравнения на рис. 3.33 пунктирной кривой изображена область ударной волны в гауссовом пучке при  $N = 2$ .

Основные данные, характеризующие процесс распространения гауссова пучка и однородных пучков: координата образования ударной волны на оси пучка  $z_p$ ; максимум пикового значения возмущения в фазе сжатия на оси  $\rho_{\text{п макс}}$  и координата этого максимума  $z_1$ ; максимальное значение средней за период интенсивности звуковой волны  $I_{\text{мах}}$  и координата максимума функции  $I(z)$ ;  $z_2$ , приведены в табл. 3.3.

#### § 4. Основные закономерности нелинейного распространения квазиплоских волн

Проведенные исследования пучков с различным амплитудным распределением позволяют сделать некоторые обобщающие выводы.

Процесс распространения звукового пучка в нелинейной среде без диссипации энергии полностью определяется соотношением нелинейных и дифракционных эффектов, что характеризуется значением параметра  $N$  и амплитудным распределением.

Отличительной чертой нелинейного распространения волнового пучка является асимметрия формы возмущения: периодический сигнал искажается несимметрично, фаза сжатия сокращается по длительности, а фаза разрежения растягивается. Сокращение фазы сжатия при равенстве площадей полупериодов приводит к тому, что пиковое значение положительного возмущения больше отрицательного. После образования разрыва волновой профиль отличается от симметричной "пилы" плоских волн: фаза сжатия имеет треугольную форму, а фаза разрежения скруглена. Такое сглаживание "острого зубца пилы" со стороны отрицательных возмущений наблюдается экспериментально [33]. Эта форма сохраняется при дальнейшем распространении, только уменьшается пиковое значение возмущения. Асимметрия формы волны увеличивается при усилении роли дифракционных эффектов: она более резко проявляется в однородных пучках, тогда как при больших значениях параметра  $N$  выражена не так ярко.

Ударная волна образуется сначала на оси пучка, далее область ударной волны расширяется. Координата формирования разрыва определяется значением параметра  $N$  и амплитудным распределением. Увеличение параметра  $N$  сокращает расстояние образования ударного профиля. При больших значениях  $N$  ( $N \approx 5 - 10$ ) амплитудное распределение слабо влияет на координату формирования разрыва. Если ударная волна "не успела" образоваться в прожекторной зоне, то за ее пределами волна искажается по законам, свойственным сферической расходящейся волне [32].

Нелинейность изменяет ближнее поле излучателя: она сглаживает осцилляции амплитуды на оси в ближней зоне, наблюдаемые в однородных пучках и в пучках с резко выраженной границей, распространяющихся в линейной среде. В гауссовом пучке нелинейность сдерживает уменьшение  $\rho_{\Pi}$  до образования разрыва и ускоряет спад  $\rho_{\Pi}$  после того, как ударный фронт сформировался. Пиковое значение возмущения на оси может превышать единицу. В слабо расходящихся пучках это явление наблюдается только при сильной нелинейности: при  $N = 10$  это превышение составляет 6% в гауссовом пучке и 23% - в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени. В однородных пучках, где велика дифракционная расходимость, оно проявляется сильнее. Координата максимума функции  $\rho_{\Pi}(z)$  совпадает с расстоянием формирования разрыва. Скорее всего такое превышение пиковым значением возмущения величины, заданной на границе, обеспечивается фазовыми соотношениями между гармониками,

интенсивно образующимися при больших  $N$ . Косвенным доказательством этого являются приведенные выше зависимости средней за период интенсивности звуковой волны от продольной координаты.

В заключение оценим, каким интенсивностям и радиусам пучков соответствуют рассмотренные значения параметра  $N$ . Напомним, что

$$N = \frac{L_d}{L_p} = \frac{2\pi^2(\gamma+1)A}{\rho_0} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (3.10)$$

Если интенсивность излучаемой в воду звуковой волны равна  $I = 0,3 \text{ Вт/см}^2$ , то  $N = 1$  при  $a = 14\lambda$ . Если  $I = 3 \text{ Вт/см}^2$ , то  $N = 1$  при  $a = 10\lambda$ . Большим значениям  $N$  соответствуют либо более широкие, либо более интенсивные пучки.

## ГЛАВА 4

### СФОКУСИРОВАННЫЕ ПУЧКИ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Описанный в приложении численный метод применяется к исследованию нелинейного распространения сфокусированных пучков. Рассматриваются два амплитудных распределения: гауссово и по полиному четвертой степени. Анализируются случаи, соответствующие различным соотношениям нелинейных и дифракционных эффектов при разной фазовой сходимости. Выявляются основные закономерности распространения сфокусированного звукового пучка в нелинейной среде без диссипации энергии [34].

#### § 1. Гауссов пучок в линейной среде

Предложенный в данной работе численный метод позволяет проанализировать процесс распространения сферической волны конечной амплитуды, локализованной в пространстве в виде пучка. Наибольший интерес представляет сфокусированный пучок, ибо распространение сферической расходящейся волны мало отличается от квазиплоской. Как было показано в гл. 3, квазиплоская волна вскоре становится сферически расходящейся.

Процесс распространения сфокусированного пучка в нелинейной среде описывается в квазиоптическом приближении уравнением (2.18) с граничным условием

$$\rho'(t, r, 0) = -A(r) \sin \omega(t + r^2/2R_k c_0). \quad (4.1)$$

Здесь  $A(r)$  — амплитудное распределение;  $R_k$  — радиус кривизны волнового фронта. Второе слагаемое под знаком синуса учитывает в квазиоптическом приближении сферичность фазового фронта. В гауссовом пучке

$$A(r) = A_0 \exp(-r^2/a^2). \quad (4.2)$$

Прежде чем приступить к исследованию нелинейной задачи, напомним, как распространяется сфокусированный гауссов пучок в линейной среде. Для такого пучка можно написать выражения для комплексной амплитуды, а также для действительных амплитуды и фазы. Эти выражения приведены в книге [2]. В линейном случае ампли-

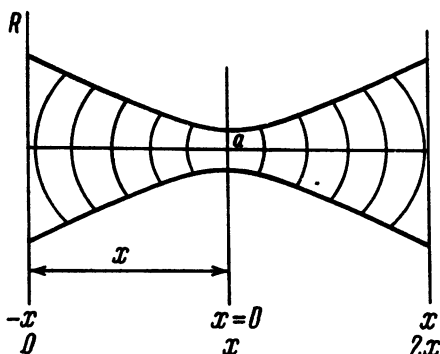


Рис. 4.1. Схематическое изображение сфокусированного пучка.

туда на оси гауссова пучка вначале растет, достигает максимального значения, а затем монотонно убывает. Ширина пучка при этом уменьшается из-за фокусировки, достигает минимального значения, радиуса фокального пятна, после чего монотонно возрастает. Все это подробно изложено в книге [2]. Здесь же мы выпишем только формулы для фокусного расстояния и радиуса фокального пятна.

Если в плоскости  $x = 0$  возбуждается квазиплоская волна с гауссовым распределением амплитуды (4.2), то по мере распространения она становится сферически расходящейся с амплитудой, определяемой выражением (1.24):

$$A = A_0 \exp\left\{-(k^2 a^2 r^2 + i 2kxr^2)/(4x^2 + k^2 a^4)\right\}. \quad (4.3)$$

Поменяв в выражении (4.3)  $x$  на  $-x$ , получим в плоскости  $x = -\text{const}$  сферически сходящуюся волну, что схематически изображено на рис. 4.1. Используя выражение (4.3), определим расстояние  $x$ , на котором сферически сходящаяся волна с начальным радиусом кривизны  $R_k$  и амплитудным распределением  $\exp(-r^2/b^2)$  становится плоской, а также ширину пучка  $a$  на этом расстоянии. Предварительно перенесем начало отсчета в точку  $x = -x$ . Новая система отсчета  $x$  проставлена внизу на рис. 4.1. Амплитуду волны в плоскости  $x = 0$  можно представить в виде

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2} + i \frac{kr^2}{2R_k}\right). \quad (4.4)$$

Сопоставляя выражения (4.3) и (4.4), напишем систему алгебраических уравнений для определения фокусного расстояния  $x$  и радиуса фокального пятна  $a$ :

$$\frac{1}{b^2} = \frac{k^2 a^2}{4x^2 + k^2 a^4}, \quad \frac{1}{2R_k} = \frac{2x}{4x^2 + k^2 a^4} \quad (4.5)$$

Решение системы (4.5) имеет вид

$$x = R_k \left( 1 + \frac{4R_k^2}{k^2 b^4} \right)^{-1}, \quad a = b \left( 1 + \frac{k^2 b^4}{4R_k^2} \right)^{-1/2} \quad (4.6)$$

или в безразмерных координатах

$$z_f = \frac{x}{2kb^2} = \frac{\beta}{2} (1 + 4\beta^2)^{-1}, \quad R_f = \frac{a}{b} = \left( 1 + \frac{1}{4\beta^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.7)$$

Таблица 4.1

$\beta$	$z_f$	$R_f$
1	0,1	0,89
0,5	0,125	0,71
0,25	0,1	0,45
0,1	0,048	0,2

где  $\beta = R_k / kb^2$  — радиус кривизны, нормированный на дифракционную длину. Оценим величины  $z_f$  и  $R_f$  для различных значений безразмерного радиуса сходимости  $\beta$ . Они приведены в табл. 4.1.

## § 2. Нелинейное распространение гауссова пучка

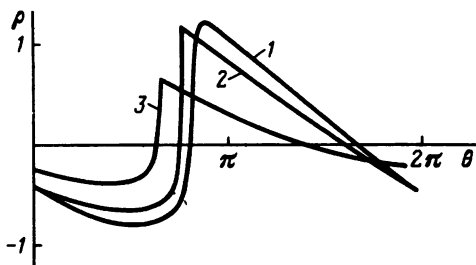
Обратимся к рассмотрению нелинейной задачи. В случае гауссова пучка условие (4.1) в безразмерных координатах (3.2) имеет вид

$$\rho(R, 0) = -\exp(-R^2) \sin(\theta + R^2/2\beta). \quad (4.8)$$

Таким образом, в задаче имеются два безразмерных параметра:  $N$  и  $\beta$ . Параметр  $N$ , как и прежде, определяет соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, а параметр  $\beta$  характеризует геометрическую сходимость по отношению к дифракционной расходимости.

В этом параграфе особое внимание будет уделено характеру нелинейных искажений формы волны в сфокусированных пучках, поведению пикового значения возмущения и средней за период интенсивности звуковой волны на оси пучка, а также на его периферии, изменениям поперечного распределения пикового значения возмущения при распространении. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим три значения параметра  $N$ :  $N = 3,25$  — случай сравнительно слабой нелинейности;  $N = 5$  — средняя нелинейность и  $N = 10$  — сильная нелинейность.

Рис. 4.2. Волновые профили на оси на разных расстояниях  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-3 соответственно равны 0,2, 0,25, 0,49;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 1$ .



**Слабая нелинейность.** При слабой нелинейности в слабосходящемся пучке ( $\beta = 1$  и  $0,5$ ) характер нелинейных искажений в основном такой же, как в квазишлюской волне: сигнал сильно искажается, положительная фаза принимает треугольную форму (кривая 1 на рис.4.2), далее вершина треугольника сдвигается влево, фронт сужается и устанавливается несимметричная форма возмущения, типичная для звуковых пучков: треугольная фаза сжатия и скругленный отрицательный полупериод (кривая 2). Эта форма сохраняется при дальнейшем распространении (кривая 3). В слабосходящемся пучке ударная волна на оси образуется чуть раньше, чем в квазишлюской волне.

При сильной сходимости ударная волна на расстояниях  $z \approx 1$  не образуется, хотя нелинейные искажения сильны. Рис. 4.3 демонстрирует волновые профили на разных расстояниях при  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,25$ . Волна; синусоидальная вблизи границы, при распространении искажается и на расстоянии, равном фокальной длине, принимает форму, изображенную пунктиром. После прохождения фокуса пиковое значение возмущения в фазе сжатия продолжает расти, далее устанавливается форма волны с треугольной фазой сжатия и сильно скругленной фазой разрежения; при этом волновой фронт шире ударного. Критерий ударной волны такой же, как в квазишлюской волне.

Дальнейшее увеличение сходимости приводит к расширению волнового фронта в установившейся форме волны. На рис. 4.4 показаны волновые профили при  $\beta = 0,1$ . Кривая 1 изображает форму возмущения до фокуса; кривая 2 - после фокуса (фокусные расстояния для рассматриваемых значений приведены в табл. 4.1); кривая 3 - после достижения пиковым значением возмущения своего максимума; кривые 4 и 5 демонстрируют установившуюся форму волны. Если сравнить соответствующие кривые на рис. 4.3 и 4.4, то можно заметить, насколько шире волновой фронт и меньше  $\rho_{\Pi}$  при сильной сходимости.

Чтобы лучше почувствовать влияние сходимости на характер нелинейных искажений, представим на одном рисунке (рис. 4.5) волновые профили, соответствующие разным значениям  $\beta$ . При этом координата  $z = 0,2$  для демонстрации выбрана таким образом, что при  $\beta = 1$  волновой профиль еще не ударный; при  $\beta = 0,5$  разрыв только что сформировался; при  $\beta = 0,25$  установилась остроконечная форма возмущения с фронтом шире ударного; при  $\beta = 0,1$  на-



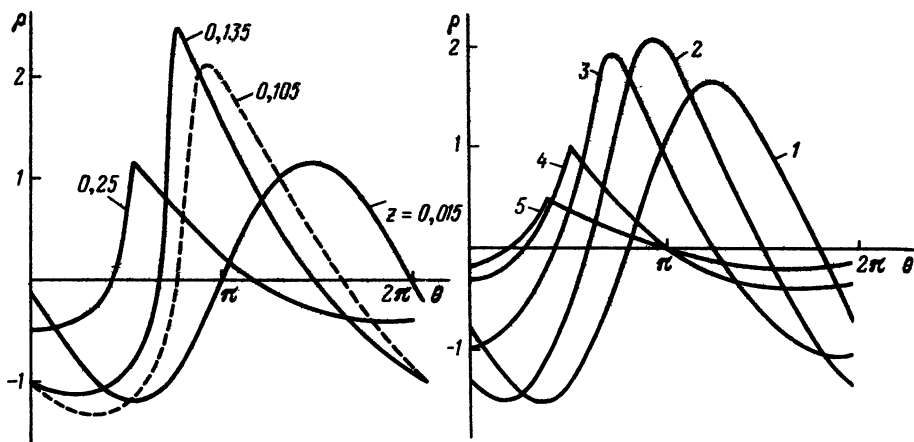


Рис. 4.3 Волновые профили на оси на разных расстояниях  $z$ ;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,25$ .

Рис. 4.4. Волновые профили на оси на разных расстояниях  $z$ : значения  $z$  на кривых 1–5 соответственно равны 0,03, 0,06, 0,09, 0,15, 0,24;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

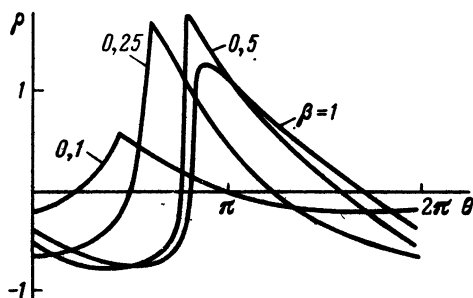


Рис. 4.5. Волновые профили на оси при различных сходимостях  $\beta$ ;  $N = 3,25$ ,  $z = 0,2$ .

блюдается дальнейшее расширение фронта, причем сильная расходимость после прохождения фокуса заметно снижает пиковое значение возмущения на оси. Итак, сильная сходимость при сравнительно слабой нелинейности препятствует образованию ударной волны, поскольку нарушает фазовые соотношения между образующимися гармониками.

Средняя нелинейность. Как изменяется процесс нелинейных искажений в сфокусированном пучке при увеличении параметра  $N$ ? Если сходимость слабая,  $\beta = 1$  и  $0,5$ , то при средней нелинейности  $N = 5$  скачок формируется раньше по сравнению со случаем  $N = 3,25$ , а характер нелинейных искажений такой же. При  $\beta = 0,25$  в отличие от случая слабой нелинейности волновой профиль на оси становится ударным. Это хорошо видно на рис. 4.6, где показаны волновые про-

Рис. 4.6. Волновые профили на оси пучка на различных расстояниях  $z$ ;  $N = 5$ ,  $\beta = 0,25$ .

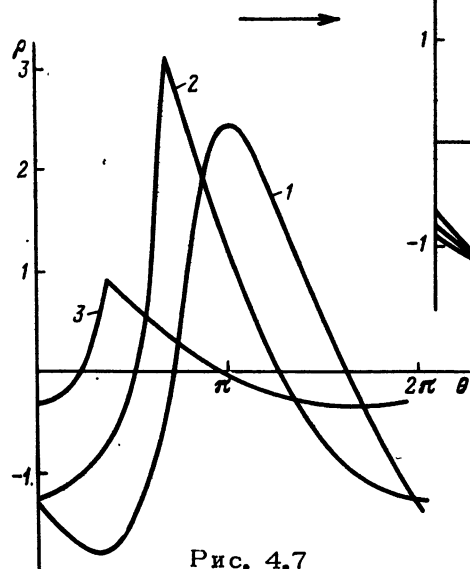


Рис. 4.7

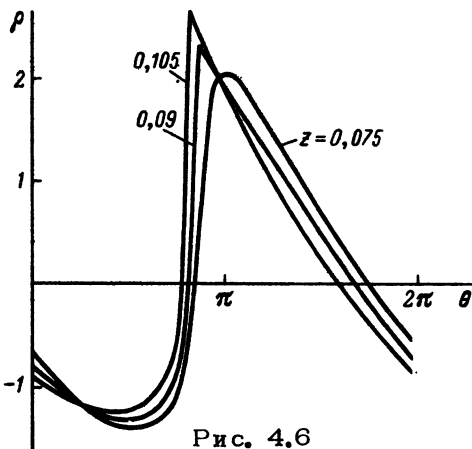


Рис. 4.6

Рис. 4.7. Форма возмущения на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1 - 3 соответственно равны 0,045, 0,075, 0,15;  $N = 5$ ,  $\beta = 0,1$ .

фили при координате меньшей длины образования разрыва, на расстоянии, когда ударный фронт только что сформировался, при координате, соответствующей линейному фокусу. Отметим, что после образования ударной волны пиковое значение возмущения продолжает увеличиваться и достигает максимума в фокусе.

В случае сильносходящегося пучка ( $\beta = 0,1$ ) ударная волна на оси не образуется, а устанавливается форма возмущения, наблюдавшаяся при сильной сходимости при  $N = 3,25$ . Рис. 4.7 иллюстрирует процесс нелинейных искажений в этом случае: кривая 1 изображает волновой профиль вблизи фокуса, кривая 2 - форму волны при координате, когда  $\rho_{\Pi}$  достигает максимального значения; кривая 3 - установившуюся форму возмущения, сохраняющуюся при дальнейшем распространении.

На рис. 4.8 сравниваются волновые профили на одинаковом расстоянии при разных сходимостях: при  $\beta = 1$  профиль неударный; при  $\beta = 0,5$  сформировался разрыв и увеличилось пиковое значение возмущения, при  $\beta = 0,25$  - ударный профиль с сильно возросшим из-за сходимости пиковым значением возмущения в фазе сжатия; при  $\beta = 0,1$  форма возмущения типична для сильносходящихся пучков.

Сильная нелинейность. При сильной нелинейности ( $N = 10$ ) ударная волна на оси образуется так быстро, что увеличивающаяся схо-

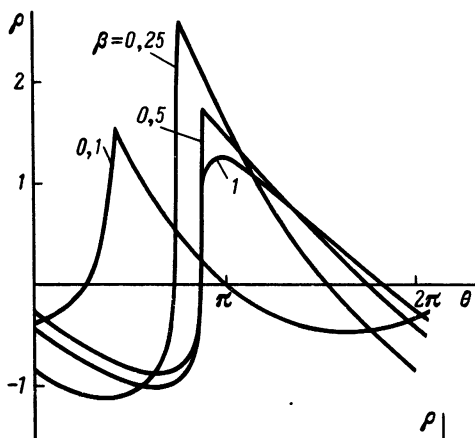


Рис. 4.9. Волновые профили на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-4 соответственно равны 0,06, 0,09, 0,21, 0,35;  $N = 10$ ,  $\beta = 1$ .

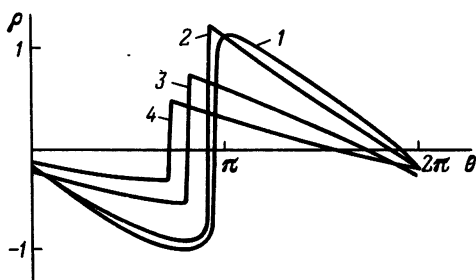


Рис. 4.8. Форма возмущения на оси при различных сходимостях  $\beta$ ;  $N = 5$ ,  $z = 0,12$ .

димось не успевают сказаться, и  $z_p$  не изменяется при уменьшении  $\beta$  вплоть до очень сильной сходимости. Только при  $\beta = 0,1$  ударная волна образуется чуть раньше. Характер нелинейных искажений при  $N = 10$  демонстрирует рис. 4.9 для слабой сходимости и рис. 4.10 для сильной сходимости. В слабосходящемся пучке разрыв наступает, когда задний фронт еще скруглен (кривая 1 на рис. 4.9). При дальнейшем распространении форма возмущения становится пилообразной с легкой асимметрией, проявляющейся, главным образом, в разнице пиковых значений возмущения в фазе сжатия и разрежения (кривые 2-4). Форма волны в этом случае близка к симметричной пиле одномерных волн.

При очень сильной сходимости ( $\beta = 0,1$ ) ударная волна на оси образуется раньше. На рис. 4.10 видно, что в точке линейного фокуса разрыв уже сформировался (пунктир), после фокуса пиковое значение возмущения продолжает увеличиваться. Далее устанавливается форма волны с остроконечной фазой сжатия и скругленной фазой разрежения, похожая на ту, что наблюдается в сильносходящихся пучках при  $N = 3,25$  и 5, но с более крутым фронтом.

Если сравнить волновые профили при  $N = 10$ , соответствующие разным сходимостям (рис. 4.11), то можно заметить, что при значениях  $\beta = 1, 0,5$  и  $0,25$  они отличаются в основном пиковыми значениями возмущения. При  $\beta = 0,1$  волновой профиль имеет форму, типичную для сильносходящихся пучков.

Заканчивая демонстрацию формы возмущения на оси пучка, приведем еще волновые профили, соответствующие разным значениям

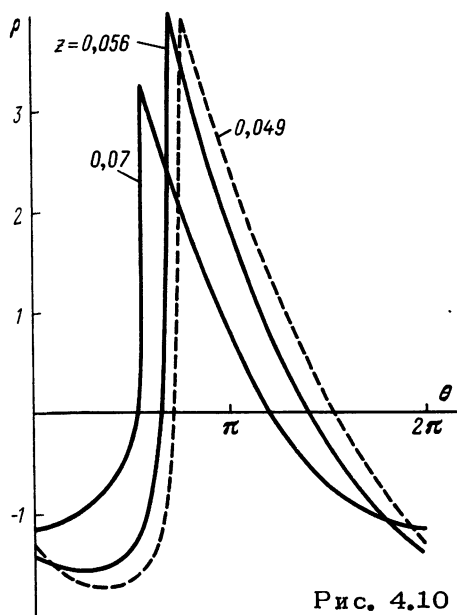


Рис. 4.10

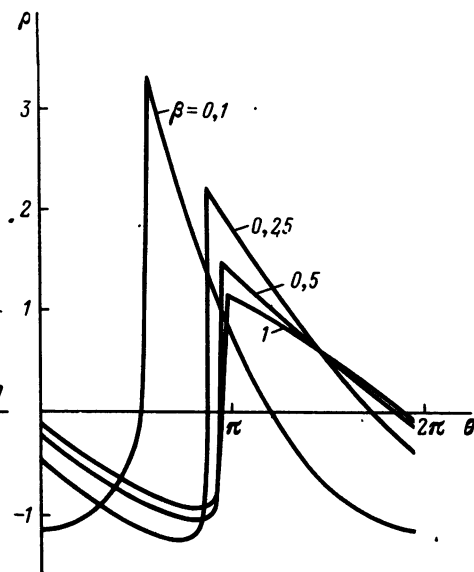


Рис. 4.11

Рис. 4.10. Волновые профили на оси при различных  $z$ ;  $N = 10$ ,  $\beta = 0,1$ .

Рис. 4.11. Форма возмущения на оси при различных сходимостях  $\beta$ ;  $N = 10$ ,  $z = 0,075$ .

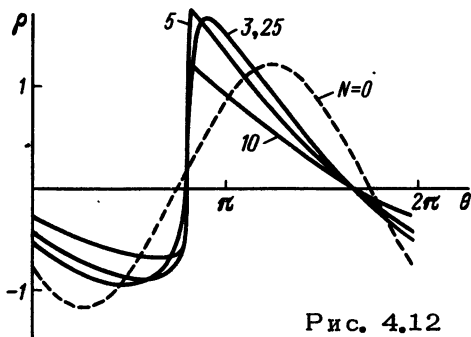


Рис. 4.12

$N$  при одинаковой сходимости. В слабосходящемся пучке ( $\beta = 0,5$ ) на расстоянии  $z = 0,15$  (рис. 4.12) в линейном случае — это синусоида, сдвинутая по фазе (пунктир); при  $N = 3,25$  — искаженный волновой профиль; при  $N = 5$  — ударная волна, при  $N = 10$  — ударный профиль с уменьшенным пиковым значением возмущения из-за раннего образования разрыва. При сильной сходимости (рис. 4.13) на расстоянии  $z = 0,075$  возмущение принимает форму, характерную для сильносходящегося пучка, ширина фронта уменьшается с увеличением  $N$  и при  $N = 10$  не превосходит ударную.

Для сфокусированного пучка в линейной среде характерно увеличение пикового значения возмущения на оси и уменьшение ширины пучка. Посмотрим, что изменится в нелинейной среде.

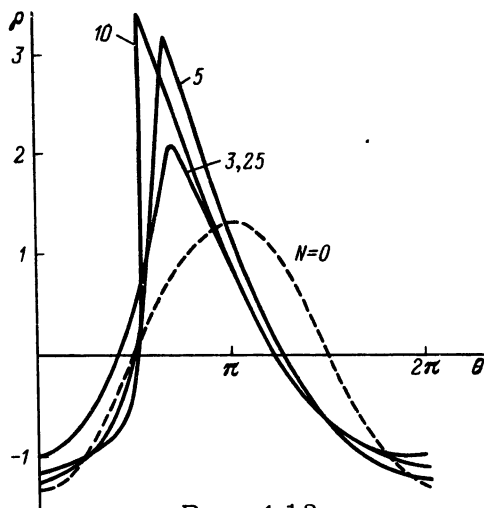


Рис. 4.13

Рис.4.13. Волновые профили на оси при различных значениях параметра  $N$ ;  $\beta = 0,1$ ,  $z = 0,075$ .

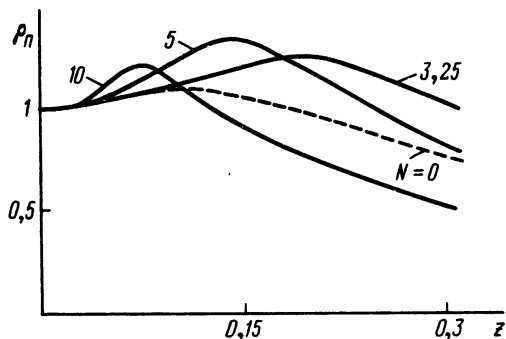


Рис. 4.14

Рис. 4.14. Зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты при различных значениях параметра  $N$ ;  $\beta = 1$ .

Рис. 4.15. Графики изменения интенсивности звуковой волны на оси для различных значений параметра  $N$ ;  $\beta = 0,5$ .

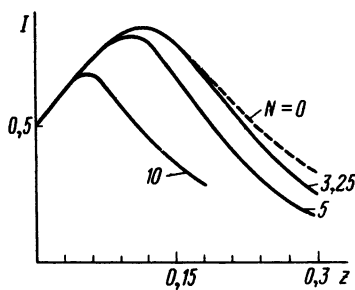


Рис. 4.15

В слабосходящемся гауссовом пучке, распространяющемся в нелинейной среде, пиковое значение возмущения на оси пучка увеличивается сильнее, чем в линейной среде. Это хорошо видно на рис. 4.14. Кроме того, максимум функции  $\rho_{\pi}(z)$  сдвигается при  $N = 3,25$  и  $5$  вправо, а при  $N = 10$  влево по сравнению с линейным случаем (пунктир). Координаты максимума  $\rho_{\pi}(z)$  при различных  $N$  примерно совпадают с соответствующими координатами формирования разрыва на оси. При этом средняя за период интенсивность звуковой волны не только не возрастает (рис. 4.15) по сравнению с линейным случаем (пунктир), но при увеличении  $N$  даже уменьшается. Интенсивность достигает своего максимального значения при  $N = 3,25$  и  $5$  в точке линейного фокуса, а при  $N = 10$  на расстоянии, равном  $z_p$ .

Нелинейность в слабосходящемся пучке увеличивает максимальное пиковое значение возмущения. Это обстоятельство является след-

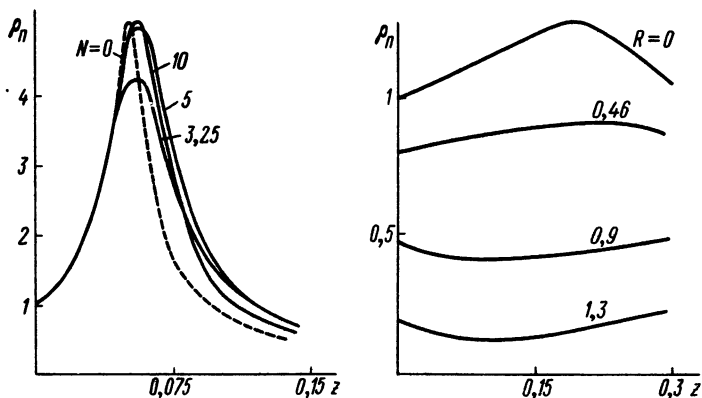


Рис. 4.16. Функции  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси при различных значениях параметра  $N$ ;  $\beta = 0,1$ .

Рис. 4.17. Функции  $\rho_{\Pi}(z)$  в различных точках поперечного сечения пучка;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 1$ .

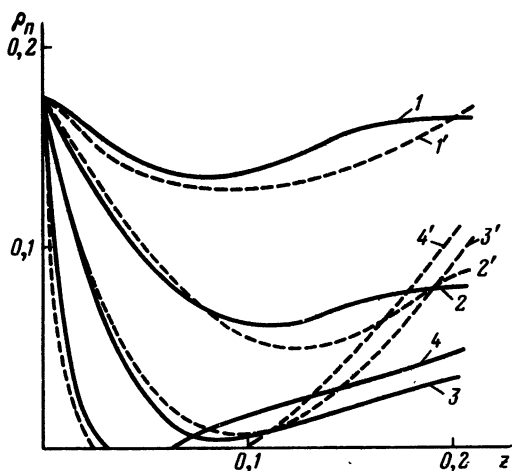


Рис. 4.18. Функции  $\rho_{\Pi}(z)$  при  $R = 1,3$  для различных значений параметра  $\beta$ : значения  $\beta$  на кривых 1-4 и 1'-4' соответственно равны 1, 0,5, 0,25, 0,1;  $N = 10$  - сплошные кривые,  $N = 0$  - пунктир.

ствием фазовых соотношений между гармониками. Координата этого максимума совпадает не с фокальной длиной в линейной среде, а с координатой формирования разрыва на оси пучка.

При сильной сходимости ( $\beta = 0,1$ ) нелинейность сдвигает максимум  $\rho_{\Pi}(z)$  вправо (рис. 4.16) от линейного фокуса (пунктир). Значение же максимума при слабой нелинейности меньше, чем в ли-

нейной среде, но рост нелинейности его увеличивает. При этом интенсивность на оси достигает максимума в фокусе.

Рост пикового значения возмущения на оси пучка и в приосевой области сопровождается его уменьшением на периферии. На рис. 4.17 видно, что максимум пикового значения на оси не совпадает с минимумом функции  $\rho_{\Pi}(z)$  при  $R = 1,3$ ; последний достигается раньше, при координате, равной фокальной длине в линейном случае. Нужно отметить, что до фокуса нелинейность слабо влияет на зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  на периферии пучка. Это демонстрирует рис. 4.18, где изображены функции  $\rho_{\Pi}(z)$  при  $R = 1,3$  в пучках с различной сходимостью  $\beta$ , распространяющихся в линейной среде (пунктирные кривые 1' - 4') и в условиях сильной нелинейности  $N = 10$  (кривые 1 - 4). После фокуса пучок в линейной среде расходится быстрее (сравните кривые 3 и 3', а также 4 и 4').

В заключение покажем, как изменяется амплитудное распределение при распространении и какова форма сигнала в разных точках поперечного сечения пучка. На рис. 4.19 показано поперечное распределение в сильносходящемся пучке на разных расстояниях: до фокуса - кривая 1; в фокусе - кривая 2; после фокуса - кривые 3 и 4. Поперечные распределения, соответствующие пучкам с различным значением параметра  $N$ , отличаются только на оси и в приосевой области (рис. 4.20).

За фокусировкой пучка и динамикой распространения нелинейных искажений поперек можно проследить, если построить волновые профили в различных точках поперечного сечения пучка. Это сделано на примере пучков, характеризуемых значениями параметров  $N = 5$ ,  $\beta = 0,25, 0,1$ , и изображено на рис. 4.21 и 4.22. Точки поперечного сечения определяются по формуле

$$R_m = \frac{m-0,5}{M-0,5} B \left(1 + \frac{z}{B}\right), \quad (4.9)$$

где  $m$  пробегает значения от 1 до  $M$  (в данном случае  $M = 60$ );

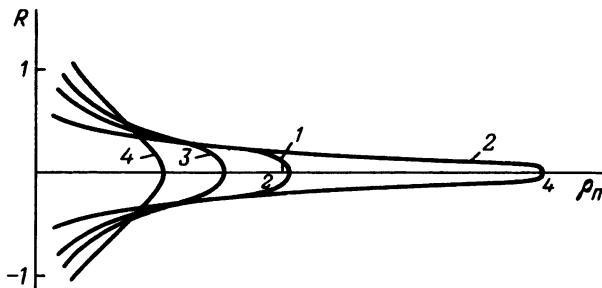
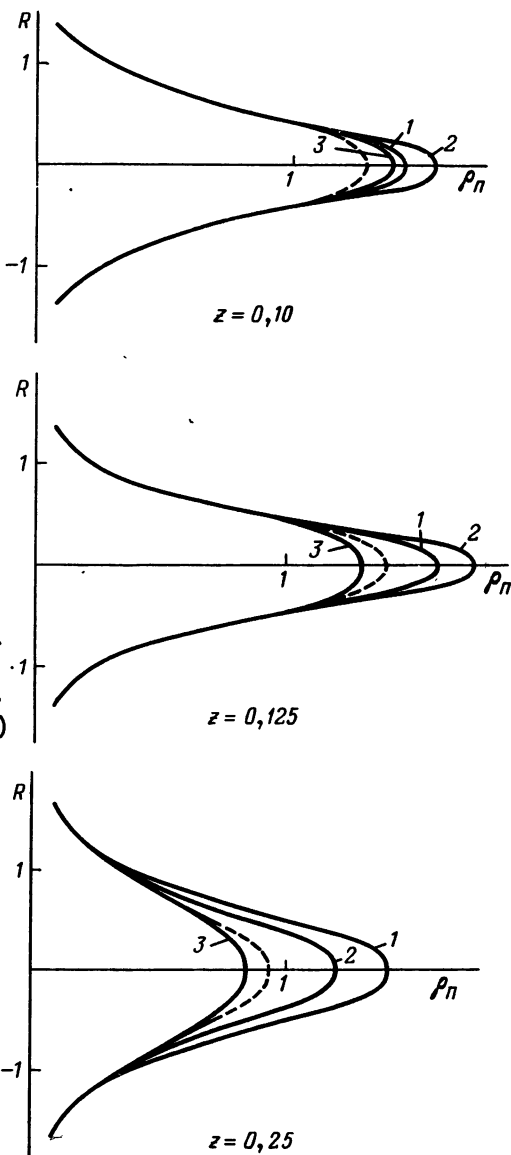


Рис. 4.19. Поперечное распределение пикового значения возмущения на разных расстояниях; кривые 1-4 соответствуют значениям  $z$  равным 0,024, 0,05, 0,1, 0,125;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

Рис. 4.20. Поперечное распределение  $\rho_{\Pi}$  при различных  $N$ ; значения  $N$  на кривых 1-3 соответственно равны 3,25, 5, 10; пунктир соответствует  $N = 0, \beta = 0,5$ .

$B = 5$ . Функции  $\rho(\theta)$  выводятся на печать при  $m = 1, 6, 11$  и 16. При  $z = 0, R_1 = 0,042, R_2 = 0,46, R_3 = 0,88$  и  $R_4 = 1,3$ . При распространении сильносходящегося пучка (см. рис. 4.21) кривые 3 и 4, изображающие волновые профили на периферии пучка, хорошо видны при  $z = 0,015$ , на расстоянии  $z = 0,06$  уменьшаются настолько, что кривая 4 сливается с осью абсцисс. В фокусе ( $z = 0,105$ ) пучок сужается, поэтому при  $R \approx 0,9$  среда оказывается невозмущенной, на оси же пучка резко возрастает  $\rho_{\Pi}$  и профиль становится ударным (кривая 1). При  $z = 0,15$  нелинейные искажения проявляются в приосевой области, кроме того, начинает сказываться расходимость.

При  $\beta = 0,1$  процесс фокусировки еще более заметен (см. рис. 4.22): уже вблизи границы ( $z = 0,015$ ) возмущение при  $R = 1,3$  мало, кривая 4 сливается с осью абсцисс. В фокальной области ( $z = 0,045$ ) сигнал локализован в узкой области, пиковое значение возмущения возросло на оси (кривая 1) и уменьшилось в приосевой области (кривая 2); при  $R > 0,5$  среда не возмущена. При  $z = 0,075$   $\rho_{\Pi}$  больше, чем в фокусе; на оси устанавливается форма возмущения, типич-





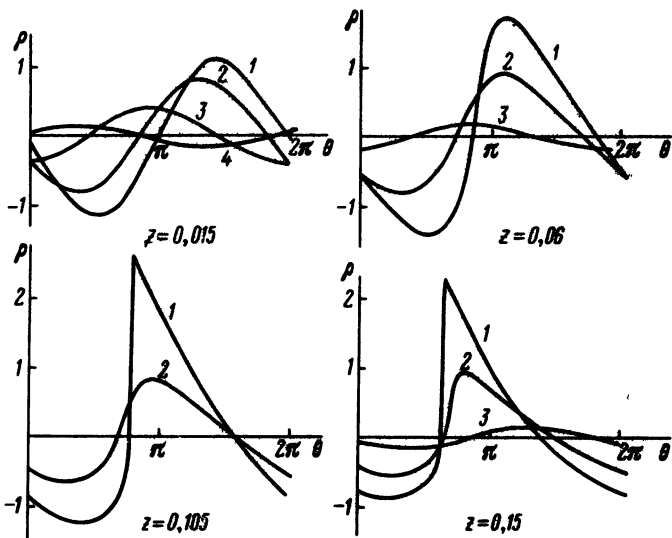


Рис. 4.21. Волновые профили в различных точках поперечного сечения пучка, определяемых по формуле (4.9); значения  $R$  на кривых 1-4 примерно равны 0,042, 0,46, 0,88, 1,3;  $N=5$ ,  $\beta=0,25$ .

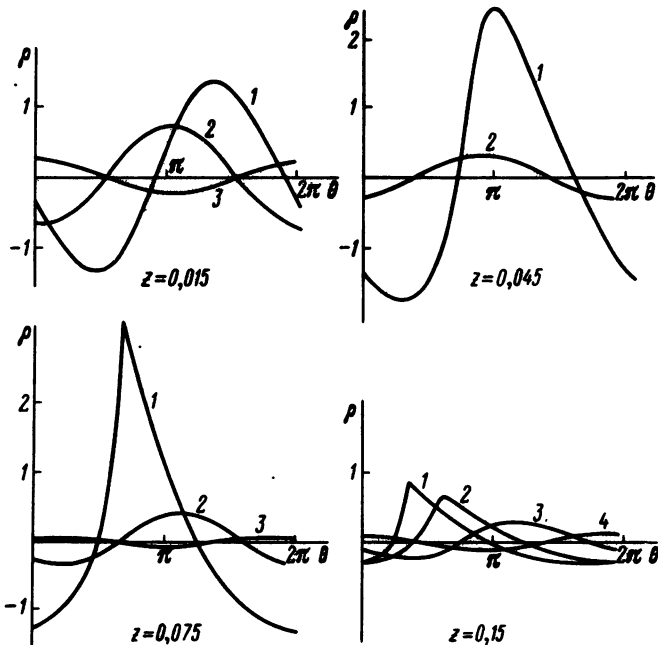


Рис. 4.22. Волновые профили в различных точках поперечного сечения сильносходящегося пучка, определяемых по формуле (4.9); значения  $R$  на кривых 1-4 примерно равны 0,042, 0,46, 0,88, 1,3;  $N=5$ ,  $\beta=0,1$ .

ная для сильносходящихся пучков; в присековой области искажения малы, а при  $R = 0,9$  и  $1,3$  среда не возмущена. При  $z = 0,15$  нелинейные искажения заметны в присековой области, на периферии они малы, хорошо виден сдвиг фазы по сечению пучка.

### § 3. Распространение пучка с резко выраженной границей

Как уже отмечалось, распространение сфокусированного пучка в нелинейной среде определяется двумя параметрами  $N$  и  $\beta$ . Возникает вопрос, насколько существенна в данном случае форма амплитудного распределения? Чтобы ответить на него, исследуем сфокусированный пучок с амплитудой, распределенной по сечению пучка по полиному четвертой степени (3.6). Такое возмущение можно изобразить в пространстве двух переменных времени  $\theta$  и поперечной координаты  $R$  при фиксированных значениях  $z$  в виде поверхности  $\rho(\theta, R)$ , что и сделано для сильносходящихся пучков;  $\beta = 0,1$  при  $N = 10$  на рис. 4.23. Возмущение, синусоидальное во времени и довольно компактное вблизи границы, при распространении искажается во времени: на расстоянии  $z = 0,06$  при сильной нелинейности образуется ударная волна, возрастает пиковое значение возмущения на оси и в присековой области. На расстоянии  $z = 0,1$  пучок расходится.

Прежде чем приступить к более подробному анализу результатов, рассмотрим линейную задачу. Амплитуда на оси пучка с распределением (3.6) легко вычисляется. Действительно, поле на оси в линейном случае определяется интегралом вида

$$\frac{A}{A_0} = \frac{ik}{x} \int_0^a \exp\left\{-\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_k}\right)\right\} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr. \quad (4.10)$$

Если ввести приведенное расстояние  $x'$ :

$$1/x' = 1/x - 1/R_k,$$

то получим интеграл (1.28). Выражение (4.10) можно представить в виде

$$\frac{A}{A_0} = \frac{x'}{x} B(x'),$$

или в безразмерных координатах

$$\frac{A}{A_0} = \frac{z'}{z} B(z'), \quad z' = \frac{z\beta}{\beta - 2z}, \quad (4.11)$$

где функция  $B(z')$  вычислена в § 2 гл. 1 и представлена на рис.1.4. Воспользовавшись результатами этих вычислений, можно построить функцию  $A/A_0 = f(z)$ . Эта функция для различных  $\beta$  представлена на рис. 4.24. По этим кривым можно определить фокальную длину  $z_f$  — координату, где амплитуда достигает максимального значения. Срав-

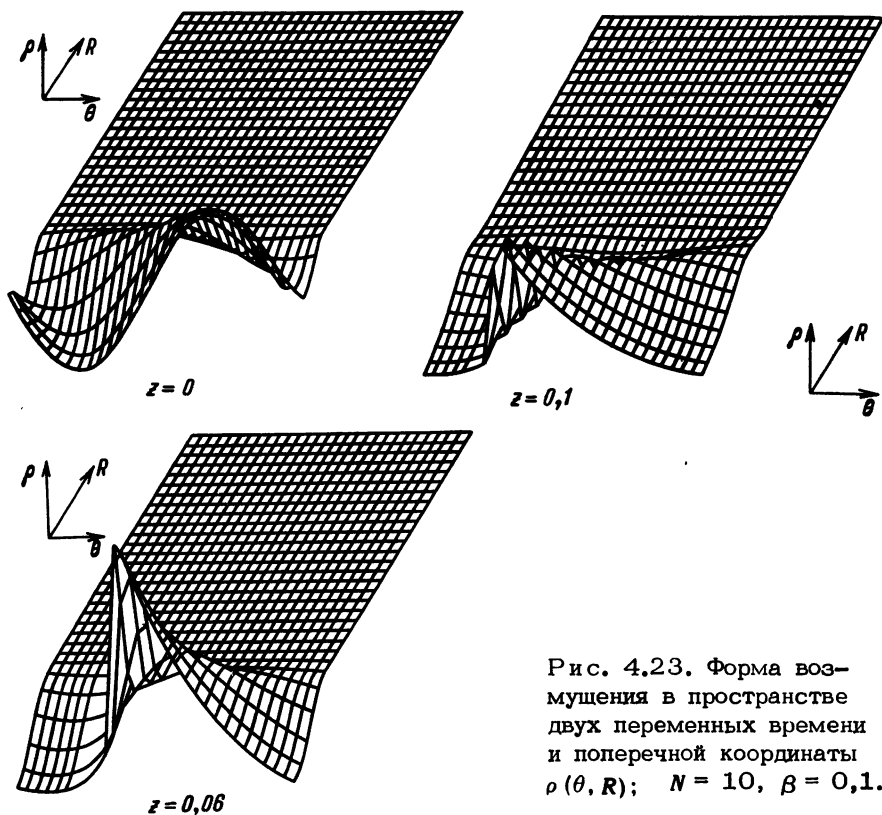


Рис. 4.23. Форма возмущения в пространстве двух переменных времени и поперечной координаты  $\rho(\theta, R)$ ;  $N = 10$ ,  $\beta = 0,1$ .

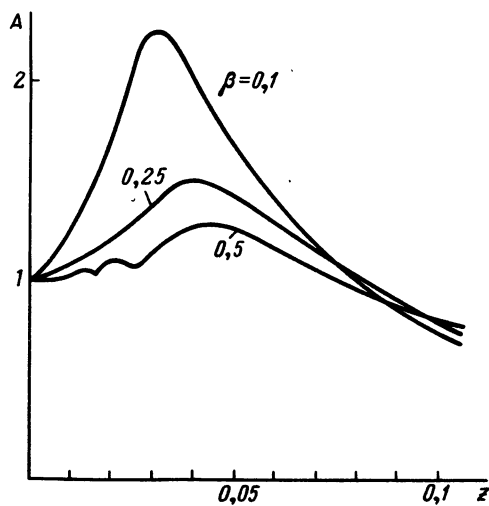


Рис. 4.24. Зависимость амплитуды гармонической волны на оси от  $z$  при различных  $\beta$ ;  $N = 0$ .

Рис. 4.25. Зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси слабосходящегося пучка при различных  $N$ ;  $\beta = 0,5$ .

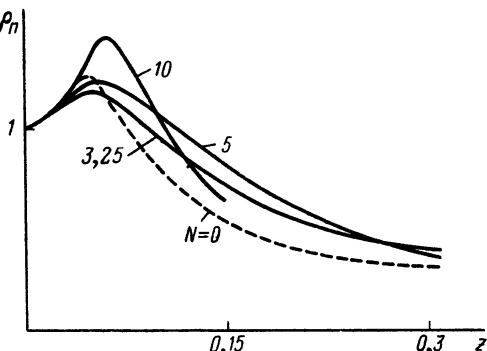


Рис. 4.26. Зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси сильносходящегося пучка при различных  $N$ ;  $\beta = 0,25$ .

Рис. 4.27. Зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси сильносходящегося пучка при различных  $N$ ;  $\beta = 0,1$ .

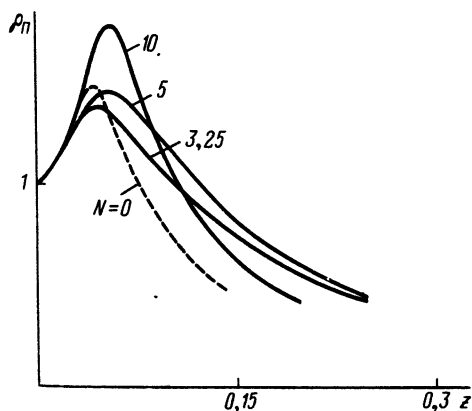


Рис. 4.26

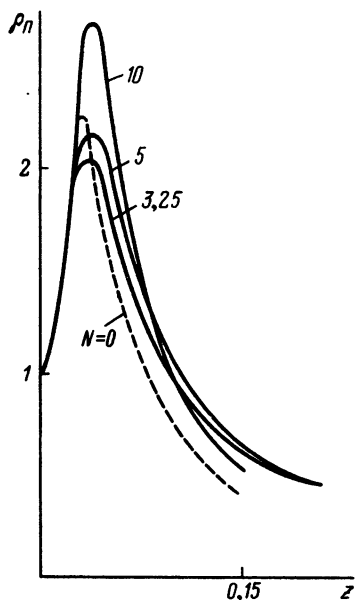


Рис. 4.27

нивая  $z_f$  в пучке с резко выраженной границей с соответствующими  $z_f$  гауссова пучка, приведенными в табл. 4.1, можно заметить, что в пучке с амплитудным распределением (3.6) при всех значениях  $\beta$  фокальная длина меньше, чем в гауссовом пучке.

Нелинейность не только искажает форму возмущения, но и изменяет зависимость  $\rho_{\Pi}(z)$ . В слабосходящемся пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, в отличие от гауссового пучка слабая и средняя нелинейности снижают максимальное значение  $\rho_{\Pi}$  (рис. 4.25). При этом максимумы сдвигаются вправо по срав-

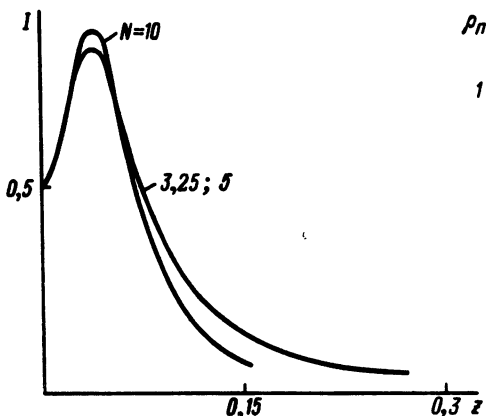


Рис. 4.28

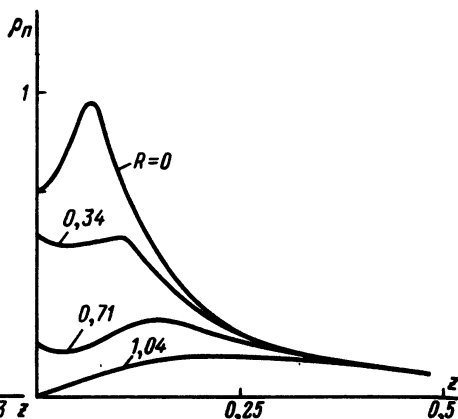


Рис. 4.29

Рис. 4.28. Осовая зависимость средней за период интенсивности звуковой волны от  $z$  при различных  $N$ ;  $\beta = 0,25$ .

Рис. 4.29. Изменение пикового значения возмущения в различных точках поперечного сечения слабо-сходящегося пучка;  $N = 10$ ,  $\beta = 0,5$ .

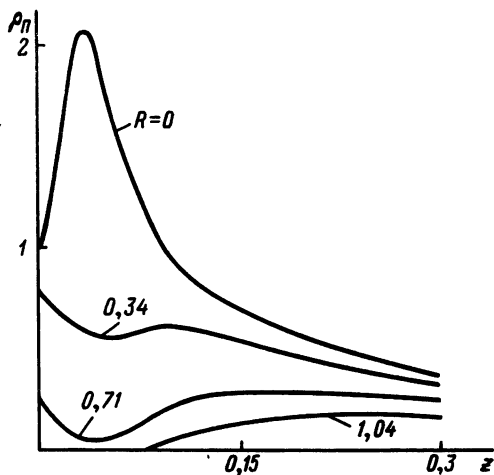


Рис. 4.30

Рис. 4.30. Изменение пикового значения возмущения в различных точках поперечного сечения сильно-сходящегося пучка;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

нению с  $z_f$ . При сильной нелинейности максимальное значение  $\rho_{\pi}$  больше и достигается позже, чем в линейном случае (пунктир).

В сильносходящихся пучках (рис. 4.26 и 4.27) максимум пикового значения возмущения, уменьшенный по сравнению с линейным случаем (пунктир) при  $N = 3,25$  и  $5$  и увеличенный при  $N = 10$ , сдвигается вправо от  $z_f$ . При  $N = 10$  координата максимума функции  $\rho_{\pi}(z)$  близка к  $z_p$ . Пиковое значение возмущения на оси уменьшается тем быстрее, чем больше значение параметра  $N$ . При увеличении сходимости максимум функции  $\rho_{\pi}(z)$  обостряется.

Заметим, что интенсивность звуковой волны достигает максимума при координате, равной фокальной длине (рис. 4.28). Увеличение пикового значения возмущения на оси сопровождается его умень-

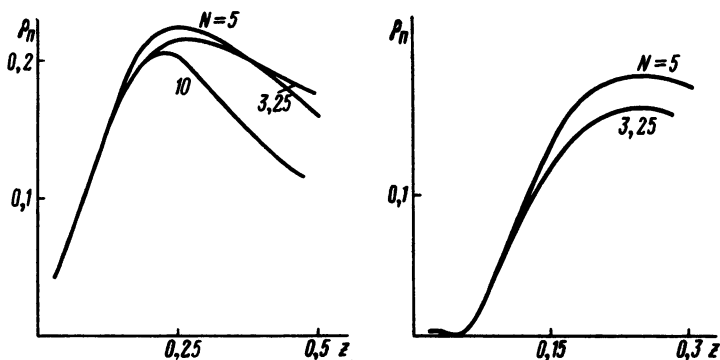


Рис. 4.31. Изменение пикового значения возмущения для различных значений параметра  $N$ ;  $R = 1,04$ ,  $\beta = 0,5$ .

Рис. 4.32. Изменение пикового значения возмущения для различных значений  $N$ ;  $R = 1,04$ ,  $\beta = 0,1$ .

шением в присоединенной области, а также вблизи края. Это демонстрирует рис. 4.29 для слабосходящегося пучка и рис. 4.30 для сильносходящегося пучка. В точках поперечного сечения пучка  $R = 0,34$   $\rho_n$  слегка уменьшается, затем после небольшого подъема падает.

При  $R = 0,71$  функция  $\rho_n(z)$  имеет резко выраженный минимум, значение и координата которого различны при разных  $\beta$ , затем  $\rho_n$  увеличивается, после чего медленно падает. На краю пучка ( $R = 1,04$ ) при всех значениях  $\beta$ , кроме  $\beta = 0,1$ , пиковое значение возмущения возрастает сразу же, проходит через максимум, затем уменьшается (см.рис. 4.29). При этом максимальное значение  $\rho_n$  слабо зависит от параметра  $N$  и достигается примерно в середине прожекторной зоны (рис. 4.31). При  $\beta = 0,1$   $\rho_n$  на краю увеличивается не сразу: примерно до  $z \approx 0,06$  оно не возрастает, затем увеличивается, достигает максимума в середине прожекторной зоны, после чего монотонно падает (рис. 4.32).

Переходя к исследованию нелинейных искажений в сфокусированном пучке с амплитудным распределением (3.6), сразу отметим, что в основном они проявляются так же, как в гауссовом пучке. При  $\beta = 1$  и  $0,5$  сходимости почти не чувствуется: форма волны искажается несимметрично, ударная волна на оси образуется примерно на тех же расстояниях, что и в квазиплоской волне. На рис. 4.33 изображены волновые профили на оси слабосходящегося пучка перед образованием разрыва ( $z = 0,2$ ) в момент, когда ударный фронт только что сформировался ( $z = 0,28$ ), и в конце прожекторной зоны. В сильносходящемся пучке при  $N = 3,25$  и  $5$  ударная волна в прожекторной зоне не образуется (рис. 4.34). Вблизи границы волновые

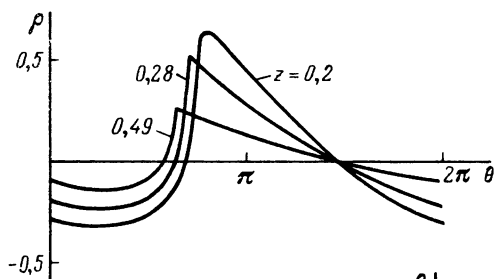


Рис. 4.33. Волновые профили на оси пучка на разных расстояниях  $z$ ;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,5$ .

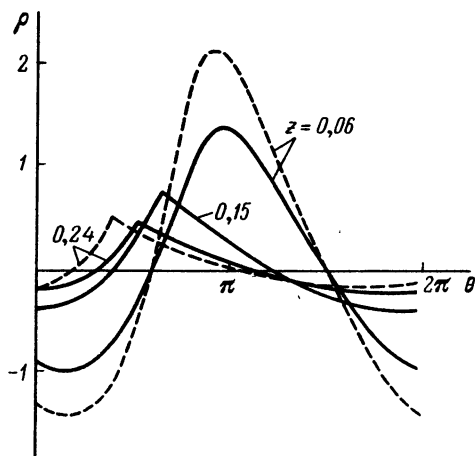


Рис. 4.34. Волновые профили на оси пучка на разных расстояниях  $z$  (пунктир — гауссов пучок);  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

профили в обоих пучках отличаются в основном пиковыми значениями возмущения, а в середине прожекторной зоны это отличие не так существенно, но волновые профили сдвинуты друг относительно друга. При  $N = 10$  ударная волна образуется даже при  $\beta = 0,1$ . Рис. 4.35 иллюстрирует форму волны на оси при  $N = 10$  и  $\beta = 0,1$  на расстоянии  $z = 0,049$ , где только что сформировался разрыв, на расстоянии  $z = 0,056$ , когда  $\rho_{\Pi}$  достигло максимума, и на расстоянии  $z = 0,07$ , где заметно уменьшение  $\rho_{\Pi}$ . Заметим, что в гауссовом пучке на расстоянии  $z = 0,07$   $\rho_{\Pi}$  в фазе сжатия больше (пунктир).

За динамикой распространения искажений поперек пучка можно проследить по рис. 4.36, где изображены волновые профили в различных точках поперечного сечения пучка при фиксированных  $z$ . На расстоянии  $z = 0,06$  искажения наиболее сильны на оси (кривая 1), небольшая асимметрия формы возмущения заметна в приосевой области,  $R = 0,34$  (кривая 2); при  $R = 0,71$  возмущение мало и неискажено (кривая 3); на краю пучка ( $R = 1,04$ ) возмущение настолько мало, что кривая 4 сливается с осью абсцисс. При  $z = 0,105$  возмущение на оси приняло несимметричную форму: фаза сжатия — треугольная, фаза разрежения — скругленная, но фронт шире ударного; в приосевой области накапливаются искажения, на периферии пучка увеличи-

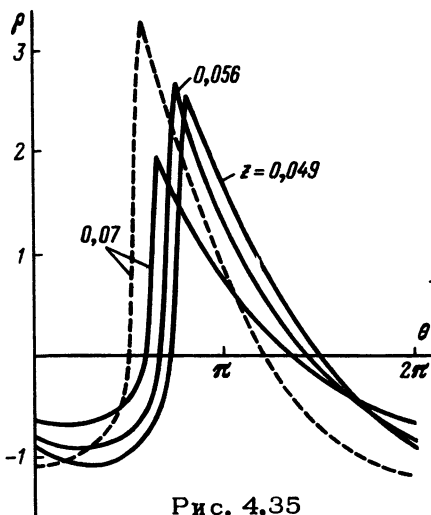


Рис. 4.35

Рис. 4.35. Волновые профили на оси пучка на разных расстояниях  $z$  (пунктир — гауссов пучок);  $N = 10$ ,  $\beta = 0,1$ .

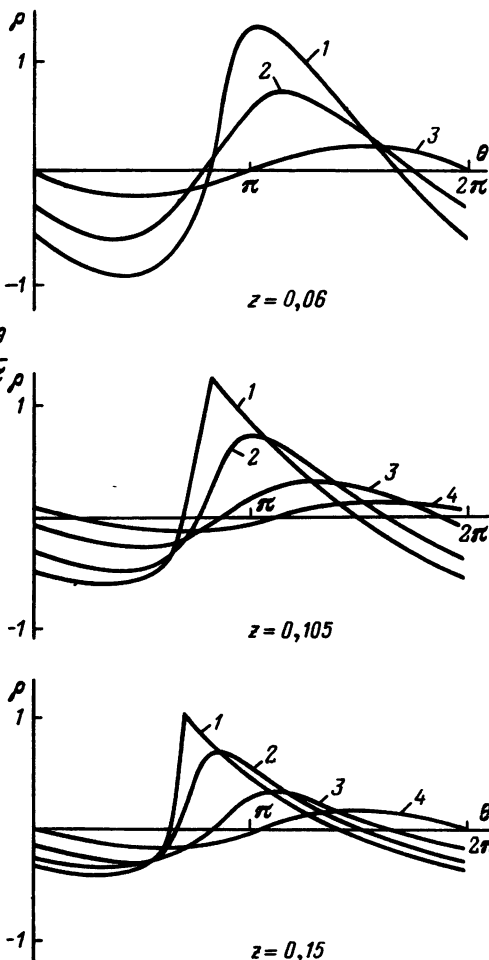


Рис. 4.36

Рис. 4.36. Форма возмущения в различных точках поперечного сечения пучка: значения  $R$  на кривых 1-4 соответственно равны 0, 0,34, 0,71, 1,04;  $N = 5$ ,  $\beta = 0,25$ .

лась величина возмущения, но искажения малы. На расстоянии  $z = 0,15$  сформировался разрыв на оси, заметнее искажения при  $R = 0,34$  и  $0,71$ , и только при  $R = 1,04$  искажения по-прежнему малы. Если сравнить рис. 4.36 с рис. 4.21, соответствующим гауссову пучку, то легко увидеть, насколько последний лучше фскусируется: возмущение в гауссовом пучке больше на оси и в приосевой области, а на периферии меньше.

Для полноты картины приведем табл. 4.2, где выписаны основные данные, характеризующие процесс распространения звукового пучка с амплитудным распределением (3.6): координата формирования разрыва на оси —  $z_p$ , максимальное пиковое значение возмущения на оси —  $\rho_{1 \max}$  и координата этого максимума —  $z_1$ ; максимальное зна-



Таблица 4.2

$N$	$\beta$	$z_p$	$\rho_{\Pi \max}$	$z_1$	$I_{\max}$	$z_2$
0	1		1,16	0,44		
	0,5		1,27	0,043		
	0,25		1,50	0,04		
	0,1		2,26	0,03		
3,25	$\infty$	0,3	1	0	0,5	0
	1	0,3	1,01	0,03	0,5	
	0,5	0,28	1,08	0,04	0,532	0,043
	0,25	0,25*	1,20	0,06	0,616	0,04
	0,1	0,36*	1,42	0,05	0,850	0,03
5	$\infty$	0,13	1	0	0,5	0
	1	0,13	1,07	0,07	0,512	
	0,5	0,13	1,15	0,08	0,561	0,043
	0,25	0,13	1,33	0,08	0,687	0,04
	0,1	0,195*	2,05	0,05	1,04	0,03
10	$\infty$	0,06	1,23	0,06	0,5	0
	1	0,06	1,32	0,06	0,533	
	0,5	0,06	1,46	0,06	0,606	0,045
	0,25	0,06	1,74	0,06	0,777	0,04
	0,1	0,05	2,56	0,056	1,37	0,03

чение интенсивности звуковой волны на оси —  $I_{\max}$  и его координата —  $z_2$ . Для линейного случая выписаны только максимальные значения амплитуды и  $z_1 = z_f$ . Интенсивность легко вычисляется, поэтому она не приведена, а  $z_2 = z_1 = z_f$ . При  $N = 0$  и  $\beta = 1$  и  $0,5$  по существу нет фокуса, а приведенные значения  $\rho_{\Pi \max}$  — это усиленный и чуть-чуть сдвинутый дифракционный пик (см. рис. 1.4). Отмеченные звездочкой значения  $z_p$  соответствуют координате, при которой ширина фронта стала наименьшей (но она больше ударной).

#### § 4. Основные закономерности распространения сфокусированного пучка конечной амплитуды

На основе приведенных вычислений можно сделать некоторые обобщающие выводы. Процесс нелинейного распространения сфокусированного пучка определяется нелинейными свойствами среды, дифракционной расходимостью и фазовой сходимостью. Учесть взаимное влияние этих трех факторов можно двумя независимыми параметрами: соотношением нелинейных и дифракционных эффектов (параметр  $N$ ) и фазовой сходимостью по отношению к дифракционной расходимости (параметр  $\beta$ ). При этом, правда, ускользает амплитудное распределение, определяющее ближнее поле излучателя. Таким образом, процесс определяется двумя параметрами  $N$  и  $\beta$  и зависит от амплитудного распределения.

Выясняя роль сходимости, нужно различать слабосходящиеся ( $\beta = 1, 0,5$ ) и сильносходящиеся ( $\beta = 0,25, 0,1$ ) пучки. Распространение слабосходящихся пучков близко к квазиплоским волнам: пиковое значение возмущения на оси возрастает незначительно, особенно в пучках с резко выраженной границей; максимум  $\rho_{\Pi}$  очень расплывчатый, ударная волна образуется примерно на тех же расстояниях. В сильносходящихся пучках имеется резко выраженный фокус: сильно возрастает пиковое значение возмущения и интенсивность на оси, максимум этих величин становится острым, при этом сужается и вытягивается амплитудное распределение. Рост пикового значения возмущения на оси способствует проявлению нелинейных свойств среды, но, с другой стороны, сильная расходимость после фокуса препятствует формированию разрыва. Поэтому в сильносходящихся пучках ударная волна либо образуется раньше, либо не образуется совсем на расстояниях  $z = 1$ . Вопрос о том, формируется разрыв или нет при заданных значениях параметров, решается соотношением длин: нелинейной длины и фокального расстояния. Если нелинейность обеспечивает условие образования ударной волны до фокуса, в фокусе или вскоре после него, то ударный фронт формируется. Если же он не успевает сформироваться на этих расстояниях, то сильная расходимость после фокуса изменяет фазовые соотношения между гармониками, необходимые для образования ударной волны.

Нелинейность искажает форму возмущения. В сфокусированном пучке эти искажения не симметричны, причем асимметрия волнового профиля проявляется сильнее, чем в квазиплоской волне. Кроме того, нелинейность изменяет и сдвигает максимум пикового значения возмущения на оси. Характер этих изменений определяется амплитудным распределением. В гауссовом пучке нелинейность увеличивает максимальное значение  $\rho_{\Pi}$  и сдвигает его вправо по оси  $z$ ; исключение составляет сильносходящийся пучок, в котором максимум амплитуды гармонической волны больше  $\rho_{\Pi \max}$ . В пучке с резко выраженной границей слабая и средняя нелинейности ( $N = 3,25, 5$ ) уменьшают максимальное значение  $\rho_{\Pi}$ , а сильная нелинейность ( $N = 10$ ) его уве-

личивает. При этом координата максимума функции  $\rho_{\Pi}(z)$  сдвигается тоже вправо. В сфокусированном пучке с равномерным распределением амплитуды слабая нелинейность увеличивает пиковое значение возмущения и интенсивность, а сильная нелинейность уменьшает  $\rho_{\Pi}$  и  $I$  вблизи фокуса, при этом точка с максимальным значением  $\rho_{\Pi}$  смещается по направлению к излучателю [8, 13]. Координата максимума  $\rho_{\Pi}(z)$  на оси пучка не совпадает с координатой максимума интенсивности: интенсивность достигает своего максимума в точке линейного фокуса. Это обстоятельство затрудняет введение в нелинейной среде такого понятия, как фокус или фокальная длина. В данной работе этот термин употребляется лишь по аналогии с линейным случаем. Что касается поведения пикового значения возмущения на краю пучка, то нелинейность его практически не изменяет. Функция  $\rho_{\Pi}(z)$  при  $R \geq 1$  зависит от амплитудного распределения: в гауссовом пучке даже при  $\beta = 1$  и  $0,5$  функция  $\rho_{\Pi}(z)$  имеет минимум, координата этого минимума равна фокальной длине. В пучке с амплитудным распределением (3.6)  $\rho_{\Pi}$  увеличивается сразу же при всех рассмотренных значениях  $\beta$  (кроме  $\beta = 0,1$ ), когда  $\rho_{\Pi}$  не растет до расстояний, равных примерно удвоенной фокальной длине.

Что касается поперечного распределения пикового значения возмущения, то нелинейность изменяет его только вблизи оси.

Если сравнивать оба рассмотренных пучка, то можно сделать вывод, что гауссов пучок лучше фокусируется, чем пучок с резко выраженной границей: максимальное пиковое значение возмущения на оси больше в гауссовом пучке, а при  $R \geq 1$  функция  $\rho_{\Pi}(z)$  проходит через минимум. В гауссовом пучке сильнее проявляются нелинейные свойства среды: ударная волна образуется раньше.

## ГЛАВА 5

### НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

Приближенное уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков обобщается на случай диссипативных сред и интегрируется численно с периодическим во времени граничным условием. Анализируются результаты численного счета, относящиеся к пучкам с различным соотношением нелинейных и дифракционных эффектов для средних и больших чисел Рейнольдса. Рассматриваются два амплитудных распределения: по закону Гаусса и по полиному четвертой степени. Выявляются основные закономерности нелинейного распространения квази-плоской волны в диссипативной среде [35].

#### § 1. Вывод приближенного уравнения и постановка задачи

Все реальные среды обладают вязкостью и теплопроводностью, роль которых усиливается с увеличением частоты акустического сигнала. Поэтому при некоторых условиях возникает необходимость учета процессов, ведущих к диссипации энергии. В определенных упрощающих предположениях можно получить из уравнений гидродинамики вязкой жидкости уравнение, аналогичное (2.18), описывающее процесс распространения звукового пучка конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде.

Исходная система уравнений – уравнения гидродинамики вязкой жидкости. Уравнение непрерывности то же, что и ранее:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (5.1)$$

В уравнении движения появится дополнительная сила, обусловленная внутренним трением слоев жидкости:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (5.2)$$

В форме (5.2) это уравнение называется уравнением Навье – Стокса. Поскольку в среде есть потеря энергии, уравнение состояния нужно записать в виде

$$p = p(\rho, S), \quad (5.3)$$

не предполагающем постоянство энтропии  $S$ . Эти уравнения дополним уравнением переноса тепла

$$\rho T \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) S \right] = \kappa \Delta T + \zeta (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2. \quad (5.4)$$

Для упрощения системы (5.1) – (5.4) предполагается, что малы не только величины возмущения  $\rho'$ ,  $p$  и колебательная скорость  $\vec{v}$ , но и диссипативные коэффициенты  $\zeta$ ,  $\eta$  и  $\kappa$  и используется известный факт о малости приращения энтропии. Кроме того, движение считается потенциальным. В уравнении состояния (5.3) ограничимся первыми членами разложения:

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s \rho'^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho S', \quad (5.5)$$

в уравнении переноса тепла (5.4) также сохраним лишь члены, дающие наибольший вклад:

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial S'}{\partial t} = \kappa \Delta T', \quad (5.6)$$

где  $S'$  и  $T'$  – приращения энтропии и температуры соответственно. Выразив в последнем уравнении приращение температуры через приращение давления:

$$T = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s p'$$

и воспользовавшись известными соотношениями линейной акустики:

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

где  $\phi$  – потенциал скорости, получим из уравнения (5.6) соотношение

$$S' = -\frac{\kappa}{T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \operatorname{div} \vec{v}. \quad (5.7)$$

Первые два члена в правой части выражения (5.5) описывают адиабатическое изменение давления при изменении плотности и могут быть вычислены при помощи уравнения изоэнтропы:

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s = \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2 \rho_0}. \quad (5.8)$$

Выражение (5.7) позволяет исключить из уравнения (5.5) приращение энтропии  $S'$ . После вычисления коэффициента  $\frac{1}{T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho$  при помощи уравнения состояния идеального газа уравнение (5.5) примет вид

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2 \rho_0} \rho'^2 - \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \operatorname{div} \vec{v}. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) дает возможность исключить  $\rho$  из уравнения движения (5.2):

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -c_0^2 \nabla \rho' - \frac{(\gamma-1)c_0^2}{2\rho_0} \nabla \rho'^2 + b \Delta \vec{v}, \quad (5.10)$$

где  $b = \zeta + \frac{4}{3}\eta + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)$ . Соображения, использованные при выводе уравнения (5.10), более подробно изложены в книге [5]. Дальнейшее упрощение системы уравнений (5.1) и (5.10) состоит во введении сопровождающей системы координат и в отбрасывании членов, порядок малости которых выше второго по величине возмущения. Чтобы все это аккуратно сделать, удобно ввести в задачу малый безразмерный параметр, характеризующий порядок малости величины возмущения и диссипативного коэффициента  $b$ . Поскольку система (5.1) и (5.10) отличается от уравнений (1.1) и (1.2) только одним членом в  $b\Delta \vec{v}$ , к тому же линейным, а процедура вывода приближенного уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков приведена в § 1 гл. 2 очень подробно, то сразу напишем уравнение, к которому сводится система (5.1) и (5.10) для пучка, распространяющегося вдоль оси  $x$ :

$$\frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial r} + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho' = -\frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial r^3}. \quad (5.11)$$

Это уравнение описывает во втором приближении по величине возмущения процесс нелинейного распространения звукового пучка в диссипативной среде. Оно было выведено в работе [36]. Уравнение (5.11) записано для возмущения плотности, такое же уравнение можно написать для колебательной скорости или для возмущения давления; при этом изменятся только постоянные коэффициенты. Для осуществления таких переходов достаточно линейных соотношений между  $\rho'$ ,  $\rho'$  и  $v$  (2.14). В предельном случае, когда можно пренебречь диссипативными процессами ( $b \rightarrow 0$ ), получим из (6.11) уравнение нелинейной акустики ограниченных пучков (2.18), а в приближении плоской волны — уравнение Бюргерса (1.19), широко используемое в нелинейной акустике диссипативных сред [5] и примененное впервые к акустическим задачам в работе [3].

Для дальнейшего исследования дополним уравнение (5.11) граничными условиями. Пусть на границе нелинейной среды возбуждается гармонический сигнал с амплитудой, зависящей от поперечной координаты:

$$\rho'(t, r, \theta) = -A(r) \sin \omega t. \quad (5.12)$$

Для численного счета удобнее записать задачу (5.11), (5.12) в безразмерных переменных. Если ввести переменные (3.2), то урав-

нение (5.11) и граничное условие (5.12) примут вид

$$N \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial z} + \Delta_{\perp} \rho = -\delta \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}, \quad (5.13)$$

$$\rho(\theta, R, 0) = -F(R) \sin \theta. \quad (5.14)$$

Здесь появляется один новый коэффициент  $\delta$ , связанный с диссипацией энергии: он выражается через длину затухания  $L_3$  и конфокальный параметр  $L_D$ :

$$\delta = L_D / L_3, \quad (5.15)$$

где  $L_3 = \rho_0 c_0 / b \omega^2$ . Таким образом, процесс нелинейного распространения звукового пучка в диссипативной среде определяется двумя безразмерными параметрами  $N$  и  $\delta$ . Параметр  $N$  характеризует соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, параметр  $\delta$  учитывает относительное влияние дифракционных и диссипативных процессов. Эти параметры могут изменяться независимо. Заметим, что отношение  $N/\delta$  выражается через акустическое число Рейнольдса  $Re$ :

$$\frac{N}{\delta} = \frac{\gamma + 1}{2} Re. \quad (5.16)$$

Задача (5.13), (5.14) решается численно при помощи метода, разработанного авторами и изложенного в приложении. В процессе вычислений параметр  $N$  принимает значения:  $N = 3,25$ , что соответствует нелинейности сравнительно слабой, но достаточной для формирования ударной волны в идеальной среде на расстояниях  $z < 1$ ;  $N = 5$  - средняя нелинейность и  $N = 10$  - сильная нелинейность. Для каждого  $N$  безразмерный коэффициент  $\delta$  принимает значения: 1, 0,5, 0,25, 0,1, 0,05. Если волна распространяется в воде, то рассмотренные значения параметров  $N$  и  $\delta$  соответствуют числам  $Re$  изменяющимся от нескольких единиц до нескольких сотен. В дальнейшем будут рассмотрены два амплитудных распределения: по закону Гаусса и по полиному четвертой степени.

## § 2. Гауссов пучок конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде

Численное решение уравнения (5.13) с граничным условием (5.14), где функция

$$F(R) = \exp(-R^2), \quad (5.17)$$

позволяет проанализировать процесс распространения гауссова пучка конечной амплитуды в диссипативной среде.

Общее представление о процессе распространения дает рис. 5.1, где форма возмущения изображена в пространстве двух переменных

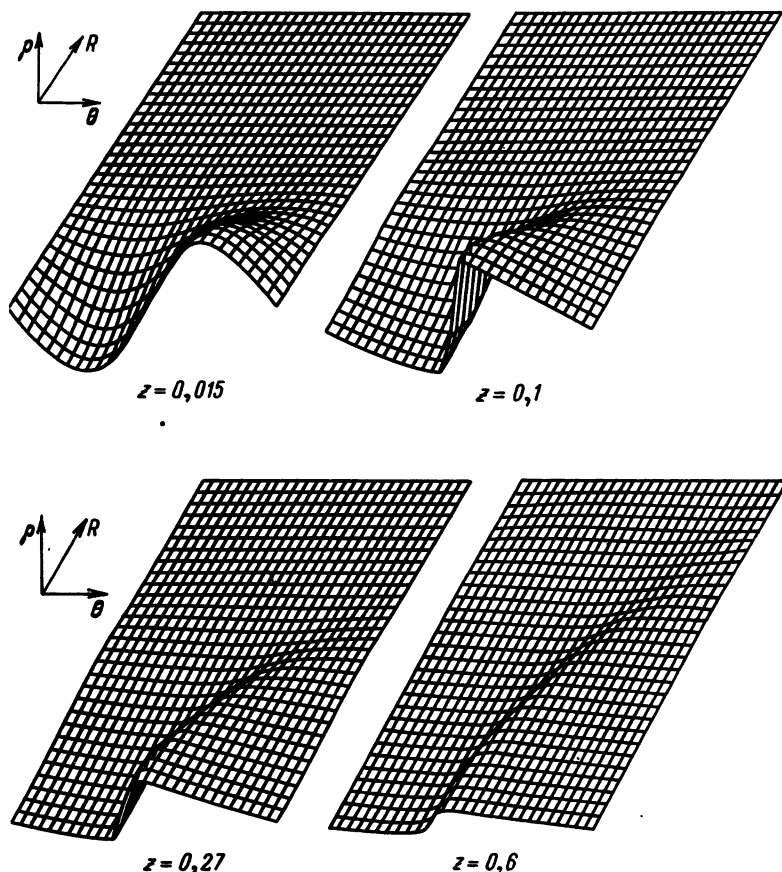


Рис. 5.1. Форма возмущения в пространстве двух переменных  $\theta$  и  $R$ ;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

времени и поперечной координаты на различных расстояниях от границы. Возмущение, синусоидальное вблизи границы ( $z = 0,015$ ), при распространении в поглощающей среде искажается, принимает форму, близкую к разрывной. На расстоянии  $z = 0,1$  квазиразрыв только что сформировался. Некоторое время волна сохраняет такую форму, после чего фронт расширяется. При  $z = 0,27$  демонстрируется форма возмущения в конце области существования волны с квазиразрывным фронтом. Возмущение сильно расплывается по  $R$ . В средах с меньшими потерями "ударная" волна образуется раньше и существует дольше. На расстоянии  $z = 0,6$  волновой фронт заметно расширился. Пучок сильно расходится, захватывая невозмущенные ранее области пространства.

Рассмотрим более подробно изменение формы волны на оси пучка. На рис. 5.2 видно, как возмущение, близкое к синусоидальному, при



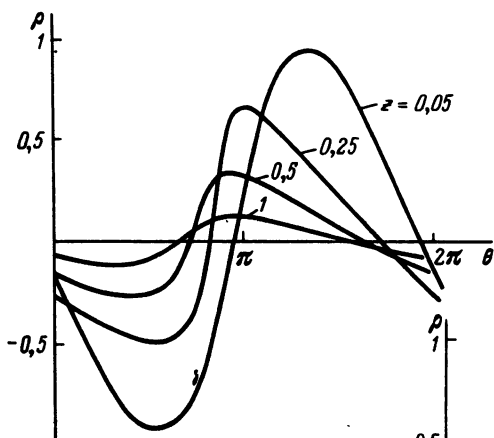
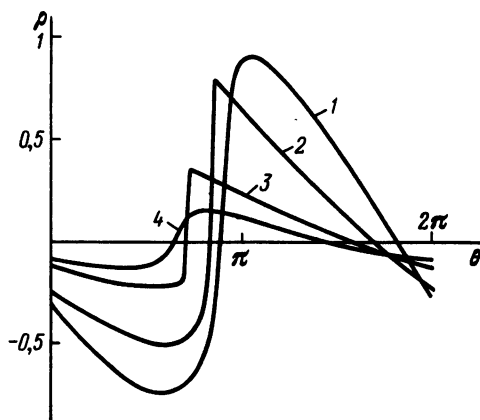


Рис. 5.2. Волновые профили на оси при различных  $z$ ;  $N = 3,25$ ,  $\delta = 0,5$ .

Рис. 5.3. Волновые профили на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-4 соответственно равны 0,15, 0,3, 0,7, 1,2;  $N = 3,25$ ,  $\delta = 0,1$ .



распространении в диссипативной среде, характеризуемой значением параметра  $\delta = 0,5$ , искажается: становится несимметричным, фронт укручается, достигает на расстоянии  $z = 0,25$  некоторой минимальной ширины, затем расширяется, на расстояниях  $z \sim 1$  асимметрия формы волны едва заметна, а фронт довольно широкий. При значениях параметров  $N = 3,25$  и  $\delta = 0,5$  (см. рис. 5.2) ударная волна не образуется. При меньших значениях коэффициента затухания  $\delta$  искажения проявляются сильнее (рис. 5.3): волновой профиль, постепенно деформируясь (кривая 1), становится квазиразрывным с резко выраженной асимметрией формы волны (кривая 2), эта несимметричная пилообразная форма возмущения некоторое время сохраняется (кривая 3), после чего волновой фронт расширяется (кривая 4). Увеличение параметра  $N$  усиливает искажение формы возмущения (рис. 5.4): уже на расстоянии  $z = 0,06$  волновой профиль близок к ударному, далее формируется и некоторое время сохраняется квазиразрыв, после чего он рассасывается.

Значения параметров  $N$  и  $\delta$  определяют, как близко от границы образуется квазиразрыв и как долго он существует. На рис. 5.5 изображены области пространства, где возмущение имеет близкую к разрывной форму при различных значениях параметров  $N$  и  $\delta$ . Эти области определены с точки зрения следующего критерия: волна считается квазиразрывной, если ширина волнового фронта  $\Delta\theta_{\text{ф}} < \pi/10$ .

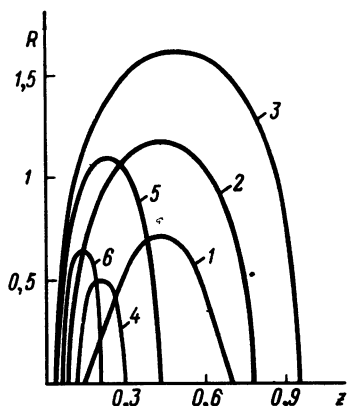
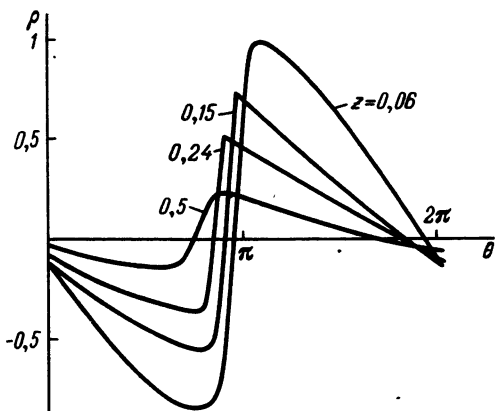


Рис. 5.4. Волновые профили на оси при различных  $z$ ;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,25$ .

Рис. 5.5. Области ударной волны при различных значениях параметров  $N$  и  $\delta$ : значения  $N$  на кривых 1-3 соответственно равны 3,25, 5, 10 при  $\delta = 0,1$ ; кривые 4, 5 соответствуют  $N = 5, 10$  при  $\delta = 0,25$ ; кривая 6 -  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

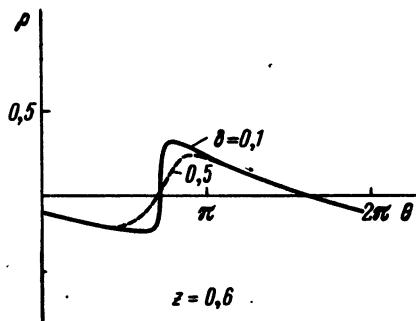
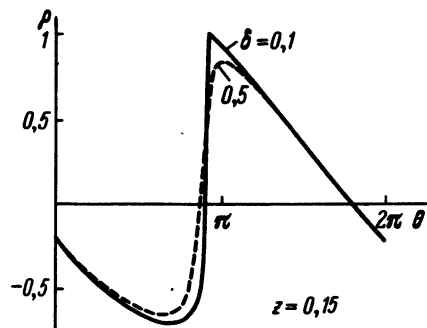


Рис. 5.6. Волновые профили, соответствующие различным  $\delta$ ;  $N = 5$ .

Чтобы почувствовать роль параметра  $\delta$  в процессе искажения формы волны, сравним волновые профили, соответствующие разным значениям  $\delta$ . Если на расстоянии  $z = 0,15$  (рис. 5.6) профили мало отличаются по форме и по ширине фронта, то при  $z = 0,6$  различие между ними уже существенно больше. Разница же пиковых значений возмущения невелика. Волновые профили при различных  $N$  отличаются главным образом шириной фронта, а при  $z = 0,5$  еще и пиковым значением возмущения (рис. 5.7).

Характер изменения пикового значения возмущения и интенсивности вдоль пучка в основном такой же, как в идеальных средах. На рис. 5.8 изображены функции  $\rho_1(z)$  на оси при  $N = 3,25$  при раз-

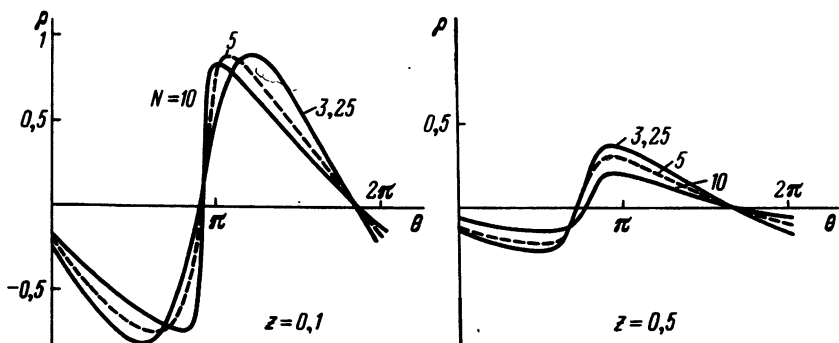


Рис. 5.7. Волновые профили, соответствующие различным  $N$ ;  $\delta = 0,5$ .

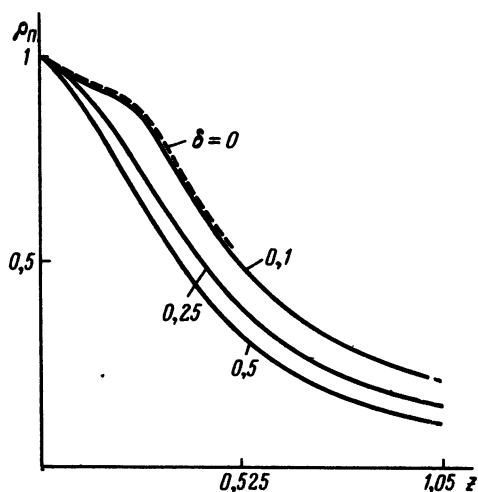


Рис. 5.8. Зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты при различных  $\delta$ ;  $N = 3,25$ .

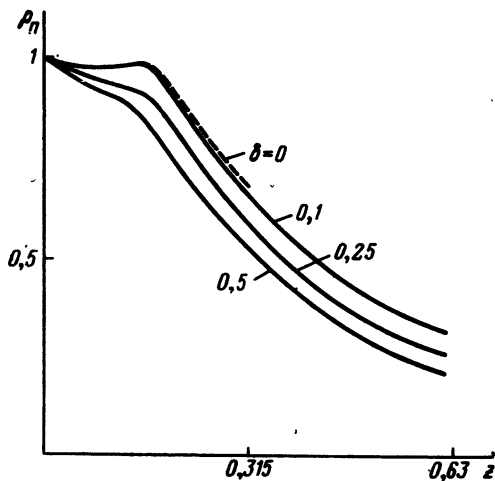


Рис. 5.9. Зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты при различных  $\delta$ ;  $N = 5$ .

Рис. 5.10. Зависимость пикового значения возмущения от продольной координаты при различных  $\delta$ ;  $N = 10$ .

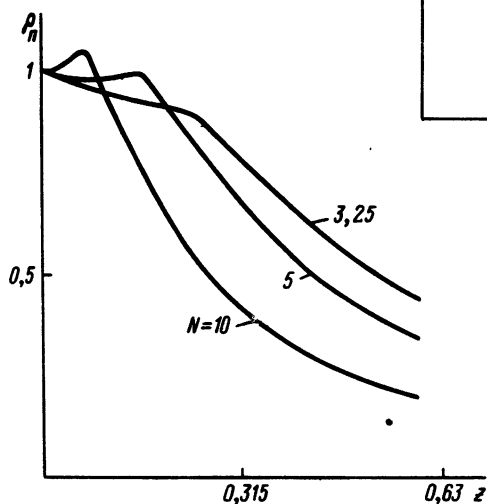
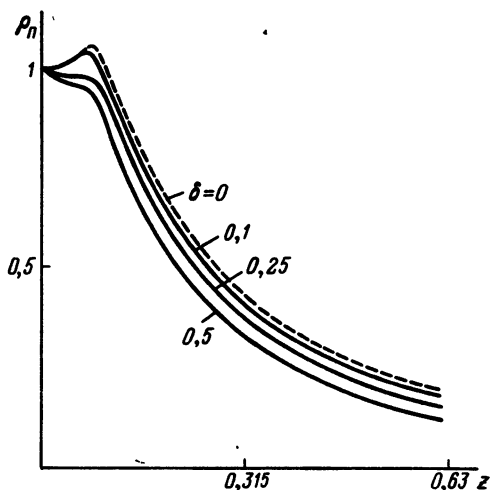


Рис. 5.11. Зависимость пикового значения возмущения от продольной координаты при различных  $N$ ;  $\delta = 0,1$ .

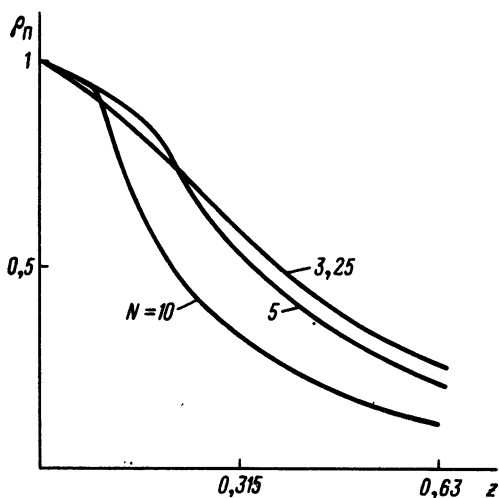


Рис. 5.12. Зависимость пикового значения возмущения от продольной координаты при различных  $N$ ;  $\delta = 0,5$ .

личных  $\delta$ : кривая, соответствующая  $\delta = 0,1$ , совпадает с пунктирной кривой для идеальной среды: с увеличением  $\delta$  пиковое значение возмущения спадает быстрее. При больших значениях  $N$  зависимости  $\rho_{\Pi}(z)$  при  $\delta = 0,1$  не совпадают полностью с пунктирной кривой, но это отличие очень мало (рис. 5.9 и 5.10). Если сравнивать графики функции  $\rho_{\Pi}(z)$ , соответствующие различным  $N$ , при  $\delta = 0,1$  на рис. 5.8 - 5.10, то можно заметить, что излом кривой на рис. 5.8 при увеличении  $N$  перерастает в небольшой всплеск (см. рис. 5.9), который увеличивается и при  $N = 10$  превосходит величину, заданную на границе (см. рис. 5.10). Для удобства сравнения эти кривые совмещены на рис. 5.11. Координата этого излома, а впоследствии и всплеска, совпадает с координатой формирования квазиразрыва; природа его подробно обсуждалась в § 1 гл. 3. При  $\delta = 0,5$  поглощение "слизывает" это всплеск, но при увеличении  $N$  наблюдается легкое замедление спада  $\rho_{\Pi}(z)$  вблизи границы и его ускорение в дальнейшем (рис. 5.12). Рис. 5.11 и 5.12 показывают, что на расстояниях порядка  $z = 0,6$  нелинейность сильно "истощает"  $\rho_{\Pi}$  на оси пучка.

### § 3. Пучок с резко выраженной границей

Для полноты картины рассмотрим, как ведет себя в диссипативной среде пучок с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (3.6).

При распространении такого пучка в вязкой теплопроводящей среде искажения формы возмущения носят примерно такой же характер, как в гауссовом пучке: волновой профиль при распространении становится несимметричным, фронт сужается, достигает минимальной ширины, которая некоторое время сохраняется, после чего волно-

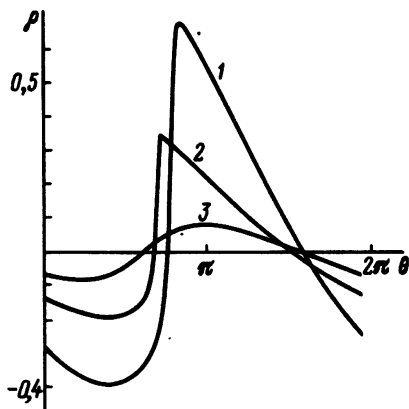
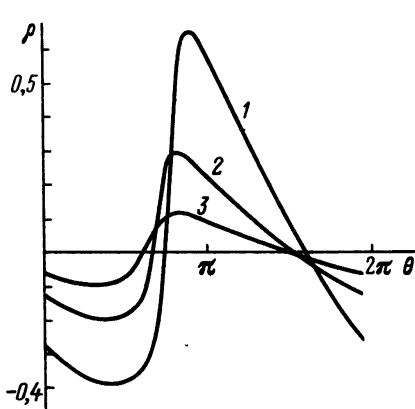


Рис. 5.13. Волновые профили на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-3 соответственно равны 0,15, 0,3, 0,6;  $N=5, \delta=0,25$ .

Рис. 5.14. Волновые профили на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-3 соответственно равны 0,15, 0,3, 1,2;  $N=5, \delta=0,1$ .

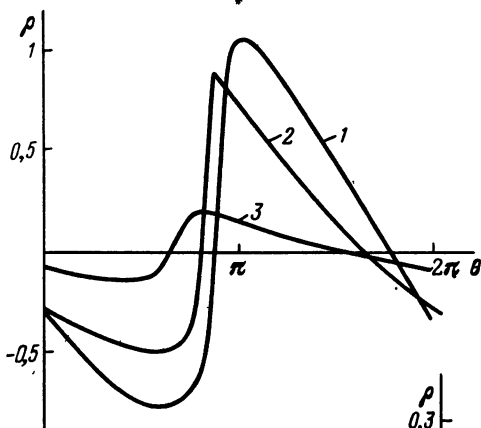


Рис. 5.15. Волновые профили на оси при различных  $z$ : значения  $z$  на кривых 1-3 соответственно равны 0,06, 0,1, 0,3;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

Рис. 5.16. Волновые профили на оси при различных  $\delta$ ;  $z = 0,3$ ,  $N = 3,25$ .

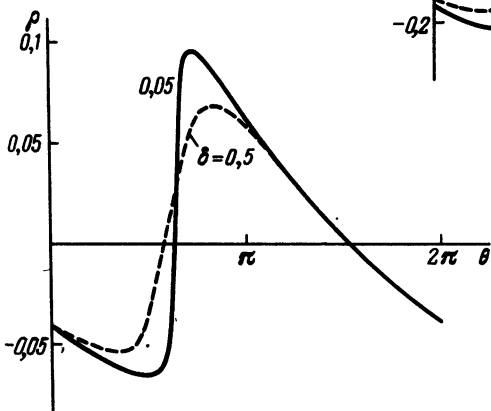
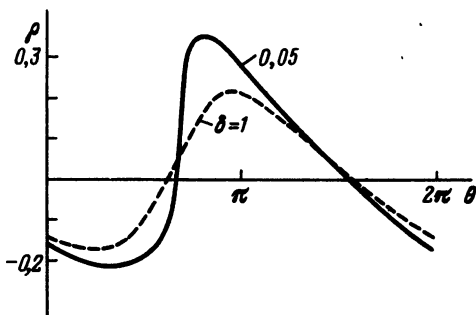


Рис. 5.17. Волновые профили на оси при различных  $\delta$ ;  $z = 0,6$ ,  $N = 10$ .

вой фронт расширяется, а возмущение постепенно принимает форму, близкую к синусоидальной. Это демонстрируют рис. 5.13 - 5.15. Значения параметров выбраны таким образом, что на рис. 5.13 минимальная ширина фронта больше, чем в ударной волне (кривая 1). На рис. 5.14 формируется квазиразрыв (кривые 1 и 2), который затем рассасывается (кривая 3). На рис. 5.15 квазиразрыв образуется довольно рано (кривая 2), но существует недолго (кривая 3). Диссипативные процессы приводят к уменьшению пикового значения возмущения и к расширению волнового фронта. Это хорошо видно на рис. 5.16 и 5.17, где изображены волновые профили при различных  $\delta$ . Значения параметра  $N$  выбраны таким образом, что в случае, соответствующем рис. 5.16, ударная волна не образуется, а в случае,

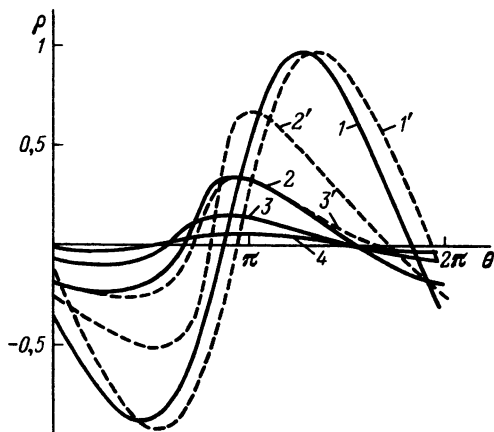


Рис. 5.18. Волновые профили на оси гауссова пучка (пунктир) и пучка с резко выраженной границей (сплошные кривые) на разных расстояниях: значения  $z$  на кривых 1(1'), 2(2'), 3(3'), 4 соответственно равны 0,05, 0,25, 0,5, 1;  $N = 3,25$ ,  $\delta = 0,5$ .

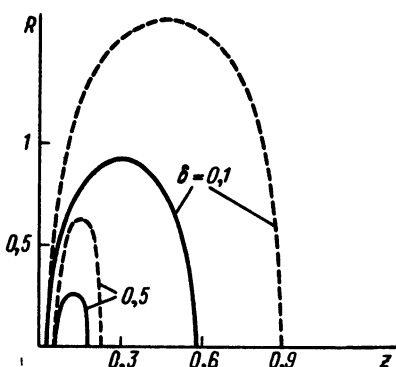
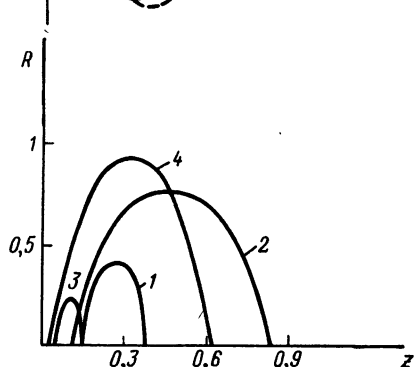


Рис. 5.19. Области ударной волны при различных значениях параметров: значения  $\delta$  на кривых 1, 2 соответственно равны 0,1, 0,05, при  $N = 5$ ; кривые 3, 4 соответствуют значениям  $\delta = 0,5, 0,1$  при  $N = 10$ .

Рис. 5.20. Области ударной волны в гауссовом пучке (пунктир) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые) при различных значениях параметра  $\delta$ ;  $N = 10$ .

соответствующем рис. 5.17, один из волновых профилей (сплошная кривая) почти разрывной.

Если сравнить волновые профили в гауссовом пучке (пунктирные кривые на рис. 5.18) и в пучке с амплитудным распределением (3,6) (сплошные кривые), то можно заметить, что вблизи границы волновые профили в обоих пучках отличаются начальными фазами (кривые 1 и 1'). Далее разница между сплошными и пунктирными кривыми с одинаковыми номерами делается более существенной: в гауссовом пучке пиковое значение возмущения больше, а ширина фронта меньше, чем на тех же расстояниях в пучке с резко выраженной границей. Области, где волна квазиразрывна, определены при помо-

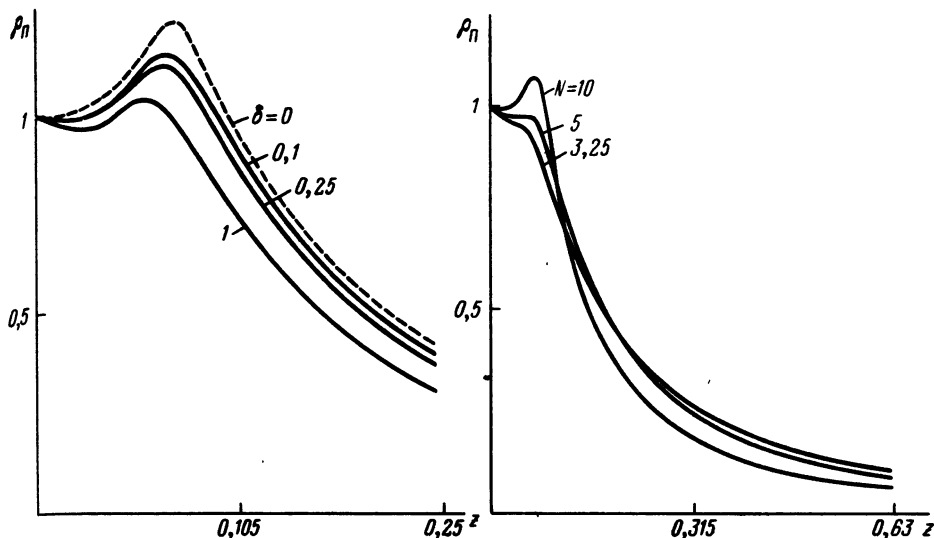


Рис. 5.21. Зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты при различных  $\delta$ ;  $N = 10$ .

Рис. 5.22. Зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты при различных  $N$ ;  $\delta = 0,5$ .

ши того же критерия, что и в гауссовом пучке, и представлены на рис. 5.19. Эти области (сплошные кривые на рис. 5.20) существенно меньше, чем в гауссовом пучке (пунктир).

Что касается поведения пикового значения возмущения на оси пучка, то с увеличением  $\delta$  пиковая плотность  $\rho_{\Pi}$  уменьшается быстрее (рис. 5.21). В диссипативной среде также наблюдается превышение пиковым значением возмущения величины, заданной на границе, но оно, естественно, меньше, чем в идеальной среде. Механизм этого явления обсуждался выше. Если сравнить графики функции  $\rho_{\Pi}(z)$  при различных  $N$  (рис. 5.22), то можно заметить, что при увеличении  $N$  функция  $\rho_{\Pi}(z)$  вблизи границы уменьшается медленнее, а при  $N = 10$  даже увеличивается, зато потом наблюдается резкий спад  $\rho_{\Pi}(z)$ .

#### § 4. Основные закономерности нелинейного распространения квазиплоской волны

Подводя итог проведенным исследованиям процесса распространения квазиплоской волны конечной амплитуды в диссипативной среде, отметим наиболее характерные черты этого явления. Процесс распространения звукового пучка зависит от совместного действия нелинейности, дифракции и диссипации. Взаимное влияние этих трех факторов можно выразить при помощи безразмерных параметров  $N$  и  $\delta$ . Таким образом, процесс полностью определяется двумя параметра-



ми и формой амплитудного распределения. Можно характеризовать процесс другими парами безразмерных параметров  $N$  и  $Re$  либо  $Re$  и  $\delta$ .

При распространении в вязкой теплопроводящей среде квазиплоская волна искажается. В данном случае эти искажения не всегда приводят к образованию ударной волны. Об ударной волне в диссипативной среде можно говорить условно, так как ширина фронта конечна. В общем случае искажения накапливаются, волновой фронт становится более крутым, достигает минимальной ширины, которая некоторое время сохраняется, после чего фронт расширяется и возмущение принимает форму, близкую к синусоидальной. Минимальная ширина фронта зависит от параметров  $N$  и  $\delta$  и может быть больше ударной ширины по принятому критерию, и тогда квазиразрыв не формируется. Такое искажение формы волны, образование квазиразрыва и его рассасывание имеет место в плоской волне, распространяющейся в диссипативной среде. В отличие от плоских волн в пучках волновой профиль искажается несимметрично.

Роль параметров  $N$  и  $\delta$  довольно очевидна и ясна из их определения. Увеличение параметра  $N$  усиливает нелинейные эффекты и способствует более раннему образованию "ударной" волны и более продолжительному ее существованию. Однако сильная нелинейность, замедляя сначала уменьшение пикового значения возмущения на оси, потом способствует более быстрому спаду  $\rho_{\text{п}}$ . Увеличение параметра  $\delta$  сдерживает развитие нелинейных эффектов: расширяет волновой фронт и приводит к более быстрому спаду пикового значения возмущения на оси.

Сравнение пучков с различными амплитудными распределениями: гауссова пучка и пучка с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, которому свойственна сильная расходимость, показывает, что в гауссовом пучке нелинейные эффекты проявляются сильнее.

Несмотря на диссипацию энергии, пиковое значение возмущения на оси при больших  $N$  превышает величину, заданную на границе. Это явление более заметно в пучках с сильной расходимостью. Оно связано с совместным действием нелинейности и дифракционной расходимости и является характерной особенностью распространения звукового пучка конечной амплитуды.

В заключение приведем численные значения коэффициента  $\delta$ . Если звуковая волна со средней интенсивностью, изменяющейся в пределах  $I = 0,3 - 3 \text{ Вт/см}^2$ , и с частотой гармонического сигнала  $\nu = 10^5 - 10^7 \text{ Гц}$  излучается в воду, то при  $N = 3 - 10$  параметр  $\delta$  изменяется от  $5 \cdot 10^{-3}$  до 3. Проведенные вычисления показывают, что при  $\delta = 0,1$  процесс протекает примерно так же, как в идеальной среде. Поэтому при расчете бралось минимальное значение  $\delta = 0,1$  в гауссовом пучке и  $\delta = 0,05$  в пучке с резко выраженной границей.

## ГЛАВА 6

### ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФОРМЫ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

На основе численного решения приближенного уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков и последующего его разложения в ряд Фурье исследуется поведение гармоник, генерируемых в звуковых пучках. Анализируются квазиплоские волны и сфокусированные пучки в идеальных средах, а также квазиплоские волны в диссипативных средах при различных значениях параметров, характеризующих процесс [30, 37]. Здесь же рассматриваются вопросы параметрического взаимодействия коллинеарных звуковых пучков, при этом основное внимание уделяется разностной волне [38]. Изучаются пучки с различными амплитудными распределениями.

#### § 1. Квазиплоская волна в идеальной среде

Как было выяснено в предыдущих главах, форма возмущения в пучке конечной амплитуды искажается иначе, чем в плоской волне. На спектральном языке искажение волнового профиля означает рождение гармоник. Представляется целесообразным проанализировать процесс генерации гармоник в звуковом пучке. Необходимость гармонического анализа формы возмущения диктуется узкополостностью акустических приемников. Подробно исследуются основная компонента и две первые гармоники, в случае необходимости число гармоник увеличивается до восьми — десяти: изучается изменение амплитуд и фаз гармоник вдоль и поперек пучка, а также соотношение между гармоническими составляющими в процессе распространения при различных значениях параметра  $N$ . Рассматриваются следующие амплитудные распределения: гауссово, по полиному четвертой степени и платообразные с разной плавностью перехода в область тени.

Гауссов пучок. Распространение квазиплоской гармонической волны в нелинейной среде сопровождается генерацией гармоник, амплитуды которых увеличиваются, достигают максимального значения, а затем уменьшаются. При этом амплитуда основной компоненты монотонно падает. Примерное поведение амплитуд основной волны  $A_1$  и двух ее гармоник ( $A_2$  и  $A_3$ ) на оси гауссова пучка показано на рис.6.1.

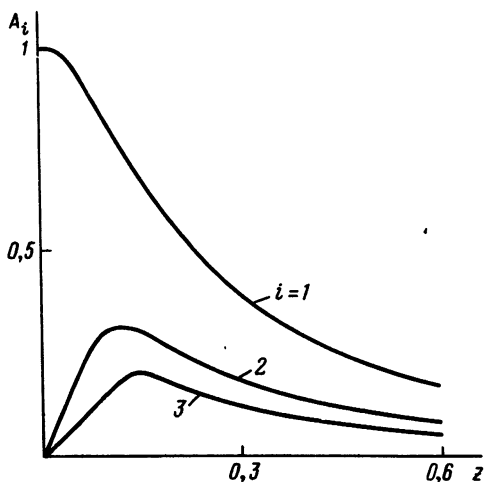


Рис. 6.1. Зависимость амплитуд гармоник на оси гауссова пучка от продольной координаты, номер кривой соответствует номеру гармоники,  $N = 5$ .

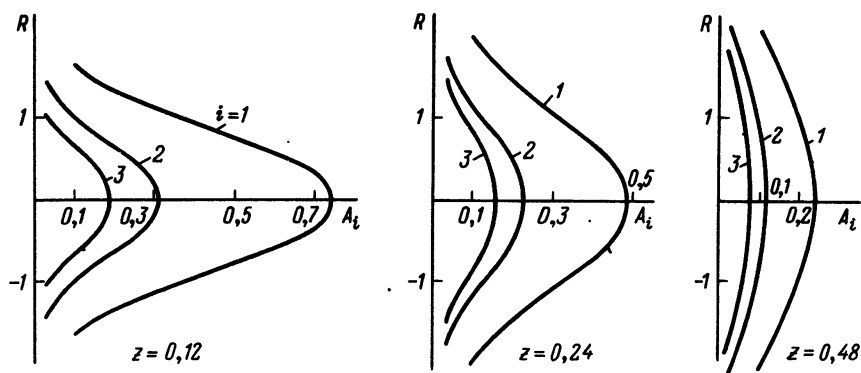


Рис. 6.2. Амплитудные распределения гармоник в гауссовом пучке на разных расстояниях от границы;  $N = 5$ .

Заметим, что при  $N = 5$  координаты максимума функций  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  примерно равны координате формирования разрыва  $z_p$ . При распространении пучка амплитудные распределения этих трех волн изменяются, как изображено на рис. 6.2. Поскольку все три амплитуды: основной волны, второй и третьей гармоник представлены в одном масштабе, то по рис. 6.2 можно судить об их относительных значениях. Чтобы проследить за динамикой изменения амплитудных распределений, изобразим функции  $A_1(R)$ , соответствующие различным  $z$  и фиксированному значению  $i$  (где  $i = 1, 2, 3$ ), на одном рисунке — рис. 6.3. На рис. 6.3, а видно, как уменьшается амплитуда основной компоненты, как постепенно расширяется амплитудное распределение. При этом вторая и третья гармоники генерируются сначала

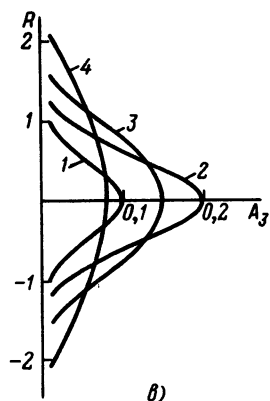
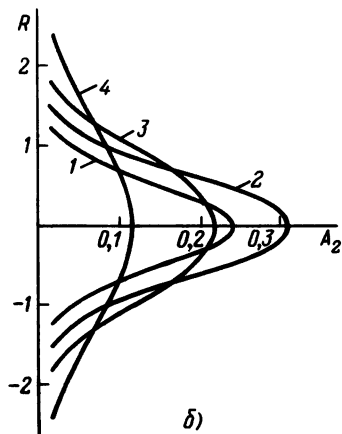
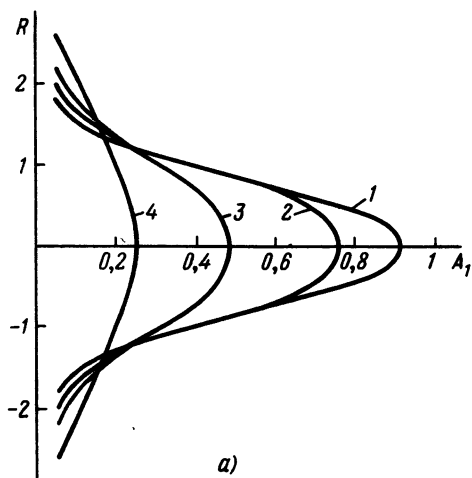


Рис. 6.3. Амплитудные распределения основной компоненты (а) второй (б) и третьей (в) гармоник в гауссовом пучке на разных расстояниях; значения  $z$  на кривых 1–4 соответственно равны 0,06, 0,12, 0,24, 0,48;  $N = 5$ .

главным образом вблизи оси (кривые 1 на рис. 6.3, б и в.); далее  $A_2$  и  $A_3$  возрастают на оси и в приосевой области (кривые 2), после достижения функциями  $A_2$  и  $A_3$  максимального значения на оси амплитудные распределения резко расширяются (кривые 3 и 4). Волновые фронты основной волны (рис. 6.4) и ее гармоник, почти плоские вблизи границы, затем искривляются, становясь сферически расходящимися. Отметим, что волновые фронты основной волны и третьей гармоники при  $z = 0,02$  полностью совпадают, затем фронт третьей гармоники искривляется сильнее. Рис. 6.5 иллюстрирует зависимость фаз трех рассматриваемых волн от продольной координаты на оси пучка.

При меньших значениях параметра  $N$  ( $N = 3,25$ ), амплитуды основной волны  $A_1$  (рис. 6.6, а) и двух ее гармоник  $A_2$  (рис. 6.6, б)

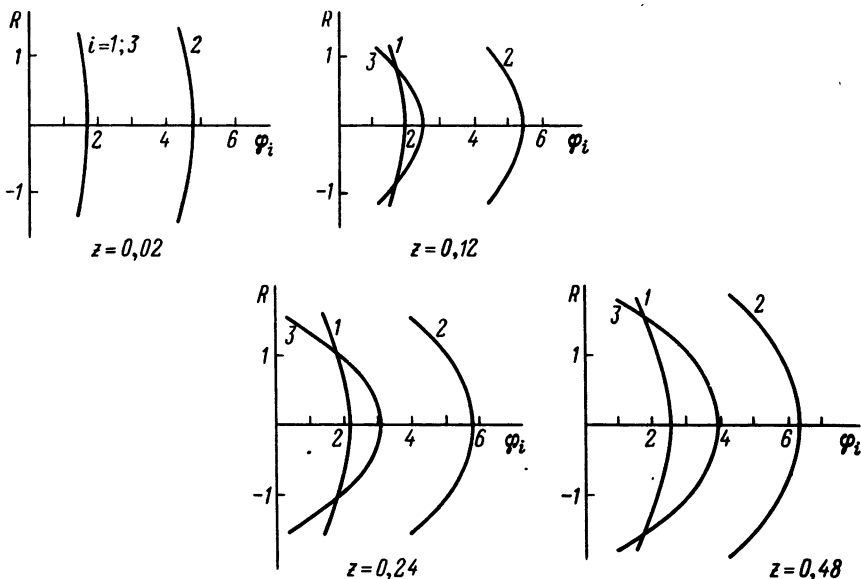


Рис. 6.4

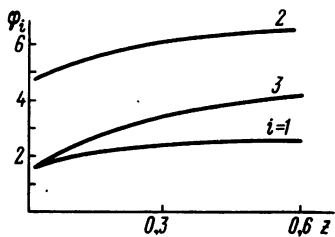


Рис. 6.5

Рис. 6.4. Фазовые распределения гармоник в гауссовом пучке при различных  $z$ ;  $N = 5$ .

Рис. 6.5. Осевое изменение начальных фаз гармоник в гауссовом пучке;  $N = 5$ .

и  $A_3$  (рис. 6.6,  $\epsilon$ ) на оси пучка ведут себя в основном так же, как при  $N = 5$ , но максимальные значения функций  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  меньше, а достигаются максимумы позже по сравнению со случаем  $N = 5$ . Кроме того, координаты максимумов  $A_2$  и  $A_3$  меньше  $z_p$ . На рис. 6.6 функции  $A_i(z)$  (где  $i = 1, 2, 3$ ) изображены не только на оси, но и в других точках поперечного сечения пучка. В приосевой области ( $R = 0,4$ ) характер изменений  $A_1, A_2$  и  $A_3$  примерно такой же, как на оси пучка. При  $R = 0,7$  наблюдается некоторая стабилизация значений  $A_1$ , после чего  $A_1$  уменьшается. При  $R = 1,1$   $A_1$  сначала увеличивается за счет расходимости, а затем уменьшается. Что касается функций  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$ , то нужно отметить, что их максимумы при увеличении  $R$  сдвигаются вправо по оси  $z$ .

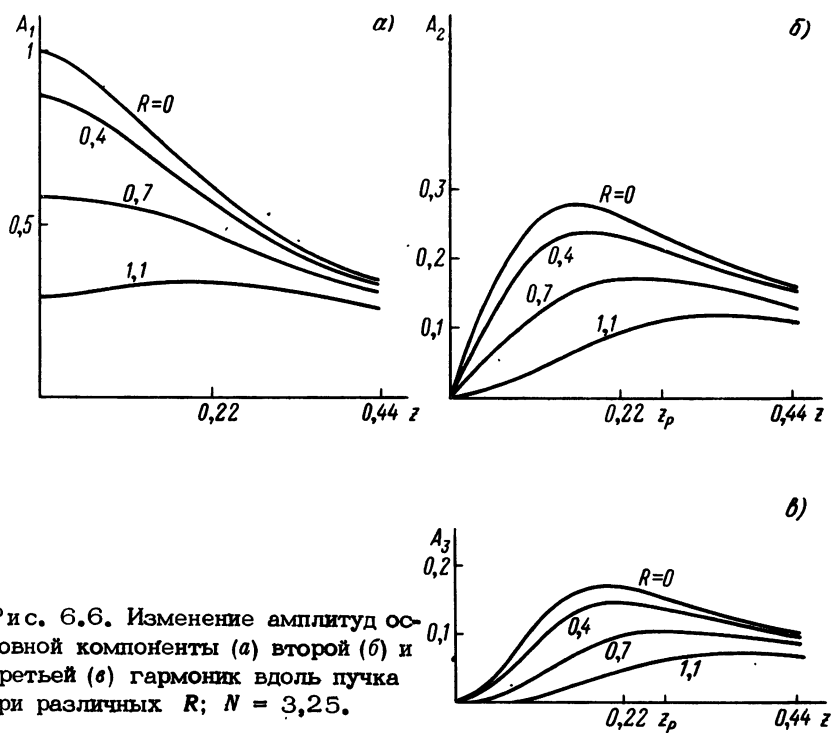


Рис. 6.6. Изменение амплитуд основной компоненты (а) второй (б) и третьей (в) гармоник вдоль пучка при различных  $R$ ;  $N = 3,25$ .

В процессе распространения изменяются соотношения между гармониками: доля каждой гармоники по отношению к первой растет, стремясь асимптотически к значению, характерному для плоской волны пилообразной формы. Напомним, что разложение в ряд Фурье периодической функции, имеющей форму симметричной "пилы", дает  $A_n = 1/n$ . Зависимость отношений  $A_i/A_1$  на оси от продольной координаты для восьми гармоник изображена на рис. 6.7. Здесь же прямыми линиями нанесены асимптотические значения, равные  $1/i$ , где  $i = 2, \dots, 8$ .

Интересно сравнить  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  в гауссовом пучке при различных значениях нелинейности. Амплитуда основной компоненты в случае сильной нелинейности убывает на оси (рис. 6.8, а) быстрее, чем при слабой нелинейности из-за более интенсивной перекачки энергии в высшие гармонические составляющие. Функции  $A_2(z)$  (сплошные кривые на рис. 6.8, б) и  $A_3(z)$  (пунктир) при сильной нелинейности достигают своего максимального значения раньше, а значения максимумов больше, чем при слабой нелинейности. Однако эти функции при  $N = 10$  после максимумов очень быстро убывают, поэтому вблизи границы прожекторной зоны вторая и третья гармоники, соответствующие меньшей нелинейности, оказываются больше. При этом ам-

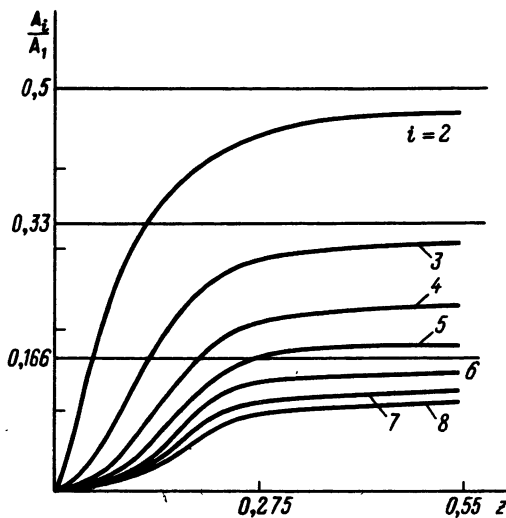


Рис. 6.7

Рис. 6.7. Изменение соотношения между амплитудами гармоник на оси гауссова пучка;  $N = 3,25$ .

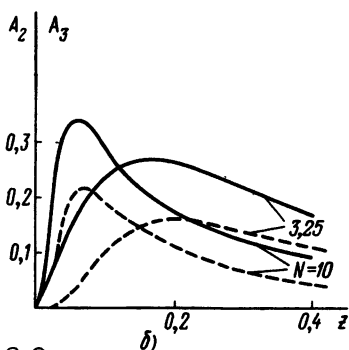
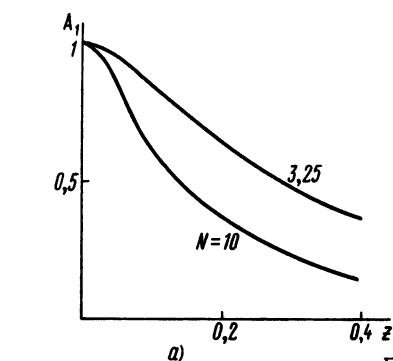


Рис. 6.8

Рис. 6.8. Осевое изменение амплитуды основной волны (а), второй (сплошная кривая) и третьей (пунктир) гармоник (б) при различных значениях параметра  $N$ .

амплитудные распределения ведут себя следующим образом:  $A_1(R)$ , соответствующие различным  $N$ , не пересекаются (рис. 6.9, а). Вблизи границы они сливаются при  $R=1$ , с увеличением  $z$  — при  $R > 1$ . Амплитуды второй (рис. 6.9, б) и третьей (рис. 6.9, в) гармоник при  $N=10$  вблизи границы больше, чем при  $N=3,25$ . На расстоянии  $z=0,12$   $A_2$ , соответствующая  $N=3,25$ , догоняет  $A_2$  при  $N=10$  и далее превосходит ее на оси и в приосевой области (рис. 6.9, б). Амплитуды третьих гармоник при двух рассмотренных значениях  $N$  сравниваются на оси при  $z=0,15$ . Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если вблизи границы, когда амплитудные распределения не пересекаются, вторая гармоника, большая на оси, остается такой и на периферии, то после того, как эти две гармоники сравняются на оси пучка, ситуация меняется: вторая гармоника, меньшая на оси, оказывается большей на периферии, прав-

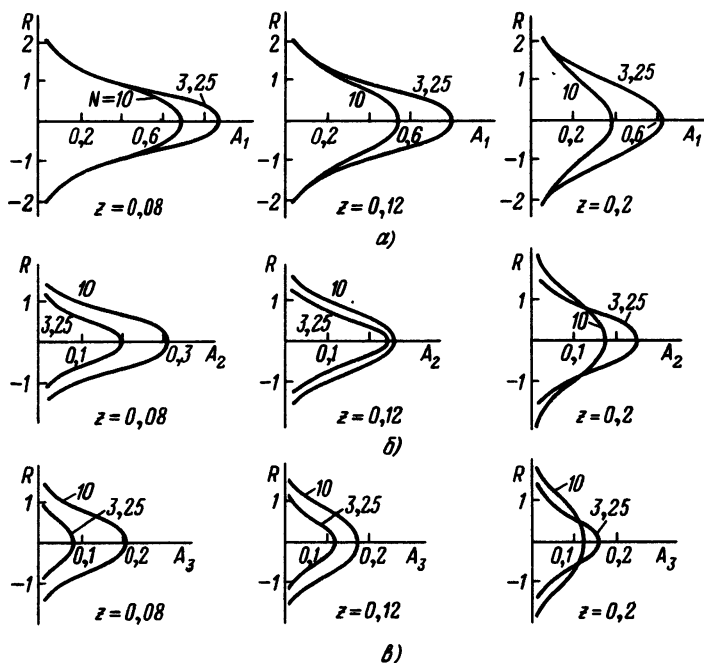


Рис. 6.9. Амплитудные распределения основной волны (а), второй (б) и третьей (в) гармоник при различных значениях параметра  $N$ .

да, разница между ними незначительна (см. рис. 6.9, б). То же самое относится и к третьим гармоникам, соответствующим различным значениям параметра  $N$  (рис. 6.9, в). Фазовые характеристики гармоник не зависят от параметра  $N$ .

В процессе распространения изменяются энергетические соотношения между гармониками. Если представить энергию  $i$ -гармоники в виде

$$E_i = \int_S A_i^2 dS,$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения пучка, и вычислить отношения  $E_i$  к полной энергии звукового пучка  $E$ , то получатся зависимости,

изображенные на рис. 6.10. Очевидно, что до образования разрыва  $E$  равна энергии волны, возбужденной на границе  $E = E_1$  ( $z = 0$ ),

согласно закону сохранения (2.23). При этом энергия основной компоненты изменяется так, как показано на рис. 6.11 (пунктир). Проверим, сохраняется ли сумма энергий гармоник. Сплошная кривая на рис. 6.11 изображает сумму энергий восьми гармоник, отнесенную к полной энергии пучка. При  $z = z_p$  эта сумма отличается от полной энергии на 4%; сюда входит энергия, приходящаяся на более высокие



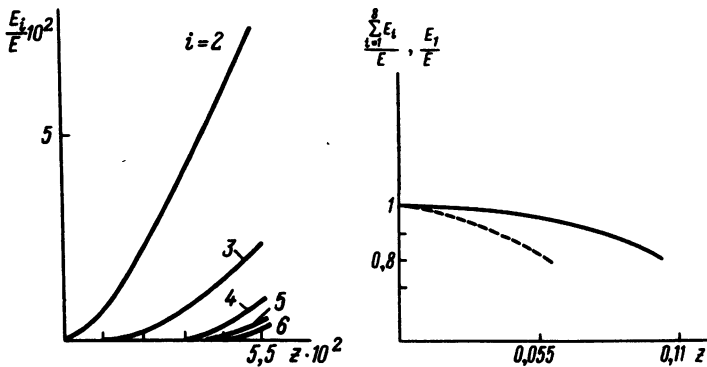


Рис. 6.10. Зависимость относительной доли энергии гармоник от продольной координаты;  $N = 10$ .

Рис. 6.11. Зависимость энергии основной компоненты (пунктир) и суммы энергии восьми гармоник (сплошная кривая), отнесенной к полной энергии, от пройденного расстояния;  $N = 10$ .

гармоники, отсечение "хвостов" в гауссовом распределении амплитуды и погрешность вычислений, не превышающая 1 - 2%. После образования разрыва  $\sum_{i=1}^8 E_i$  резко уменьшается.

Сравнение гауссова пучка с пучком, имеющим резко выраженную границу. Выше речь шла о гауссовом пучке. Исследования, изложенные в предыдущих главах, показывают, что амплитудное распределение играет существенную роль в процессе распространения. Поэтому сравним гармоники, генерируемые в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, с гармониками в гауссовом пуч-

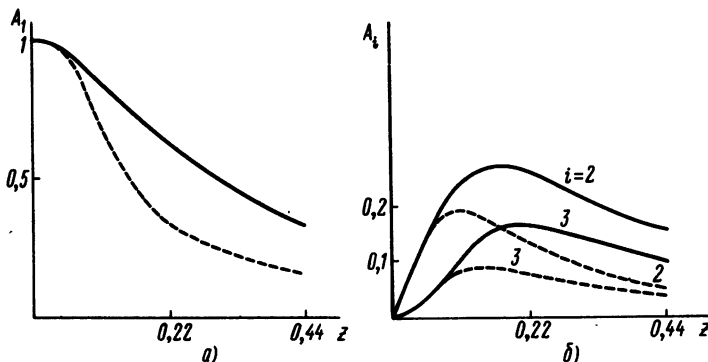


Рис. 6.12. Осевое изменение амплитуды основной компоненты (а), второй и третьей гармоник (б) в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир);  $N = 3,25$ .

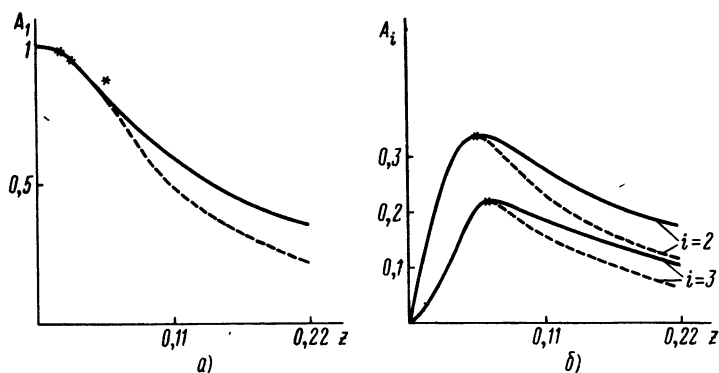
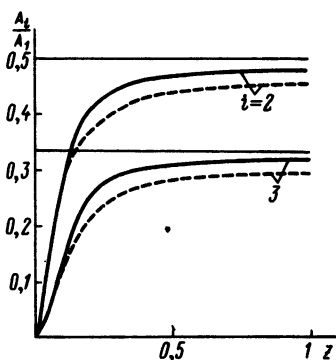


Рис. 6.13. Осевое изменение амплитуды основной волны (а), второй и третьей гармоник (б) в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир);  $N = 10$ .

Рис. 6.14. Осевое изменение соотношения между амплитудами гармоник в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир);  $N = 3,25$ .



ке. На рис. 6.12 сравниваются  $A_1(z)$  на оси обоих пучков при  $N = 3,25$ .  $A_1(z)$  в гауссовом пучке (сплошная кривая на рис. 6.12, а) убывает медленнее, чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир). Кроме того, в последнем пучке максимальные значения  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  (пунктир на рис. 6.12, б) меньше, чем в гауссовом пучке, а достигаются эти максимумы раньше. При увеличении параметра  $N$  функции  $A_1(z)$  в обоих пучках меньше отличаются друг от друга и от соответствующих функций в плоской волне. На рис. 6.13 изображены функции  $A_1(z)$  в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с резко выраженной границей (пунктир) при  $N = 10$ . На этом рисунке знак \* относится к плоской волне [5]. Действительно, мы видим, что амплитуды гармоник достигают максимального значения при координате разрыва; значения максимумов амплитуд гармоник в обоих пучках почти одинаковые, меньше разница в  $A_1(z)$  на рассмотренных расстояниях. В процессе распространения доля второй и третьей гармоник по отношению к первой

Таблица 6.1

Амплитудное распределение	$N$	$A_{2\max}$	$z_2$	$A_{2\max}/A_1$	$A_{3\max}$	$z_3$
$\exp(-R^2)$	3,25	0,272	0,176	0,388	0,165	0,198
	5	0,311	0,12	0,410	0,195	0,120
	10	0,340	0,055	0,410	0,220	0,066
$(1-R^2)^2$	3,25	0,188	0,1	0,264	0,0867	0,143
	5	0,256	0,09	0,347	0,143	0,11
	10	0,336	0,055	0,402	0,213	0,066

Таблица 6.1 (окончание)

Амплитудное распределение	$N$	$A_{3\max}/A_1$	$z_p$	$(A_2/A_1)_{z=z_p}$	$(A_3/A_1)_{z=z_p}$
$\exp(-R^2)$	3,25	0,251	0,2	0,41	0,25
	5	0,260	0,120	0,41	0,26
	10	0,284	0,055	0,41	0,27
$(1-R^2)^2$	3,25	0,165	0,3	0,41	0,24
	5	0,228	0,125	0,41	0,24
	10	0,280	0,055	0,41	0,26

увеличивается и выполняются асимптотические соотношения  $A_2/A_1 \rightarrow 1/2$ ,  $A_3/A_1 \rightarrow 1/3$ , причем в гауссовом пучке (сплошные кривые на рис.6.14) отношения  $A_i/A_1$  ближе к своим асимптотическим значениям, чем в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (пунктир).

Подводя итог сказанному, приведем табл. 6.1, где собраны следующие данные: максимальные значения амплитуд второй ( $A_{2\max}$ ) и третьей ( $A_{3\max}$ ) гармоник, координаты этих максимумов —  $z_2$  и  $z_3$  соответственно, доля этих гармоник в точках максимума по отношению к основной волне, координата формирования разрыва  $z_p$  и отношение амплитуд гармоник при  $z = z_p$ . Анализ этой таблицы показывает, что

при увеличении параметра  $N$  сильнее проявляются нелинейные эффекты: увеличиваются максимальные значения амплитуд второй и третьей гармоник, растет их доля по отношению к основной компоненте, при этом амплитуды гармоник достигают своих максимумов раньше. В гауссовом пучке при слабой ( $N = 3,25$ ) и средней ( $N = 5$ ) нелинейности амплитуды гармоник достигают своих максимальных значений позже, чем в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени, но зато значения максимумов больше, что свиде-

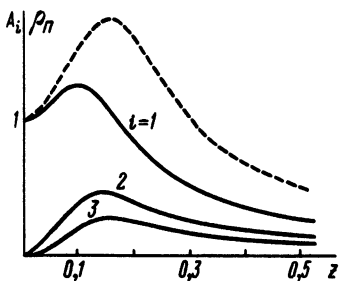


Рис. 6.15. Зависимость амплитуд гармоник и пикового значения возмущения (пунктир) на оси от продольной координаты;  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

тельствует о сильной расходимости последнего. При сильной нелинейности  $N = 10$  в значительной степени подавляется роль дифракционной расходимости, поэтому величины  $A_{2 \max}$ ,  $z_2$ ,  $A_{3 \max}$ ,  $z_3$ ,  $A_{2 \max}/A_1$  и  $A_{3 \max}/A_1$  одинаковы для обоих пучков. Сопоставление данных, приведенных в табл. 6.1, с формой волны показывает, что волновой профиль можно считать ударным при соотношении гармоник  $A_2/A_1 > 0,41$  и  $A_3/A_1 > 0,24$ .

Пучок с платообразным амплитудным распределением. Наконец, очень коротко остановимся на анализе поведения гармонических составляющих в пучке с платообразным амплитудным распределением (3.8). Рис. 6.15 иллюстрирует изменение амплитуды основной компоненты и двух ее гармоник на оси пучка с параметрами  $N = 3$  и  $M = 8$ . Кроме того, на рис. 6.15 изображена зависимость  $\rho_n(z)$  на оси. Вблизи излучателя амплитуда основной компоненты совпадает с пиковым значением возмущения, но вскоре начинает от него отставать.  $A_1$  достигает максимального значения примерно при координате максимума амплитуды в линейной задаче (см. рис. 3.22), но значение этого максимума существенно меньше из-за перекачки энергии в высшие гармонические составляющие. Зависимости  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  не отличаются от таковых в пучке с другим амплитудным распределением.

Динамика изменения амплитудных распределений основной компоненты и ее гармоник демонстрируется на рис. 6.16. Распределение амплитуды основной компоненты, равномерное на границе (пунктир на рис. 6.16, а), очень быстро теряет эту однородность, оно вытя-

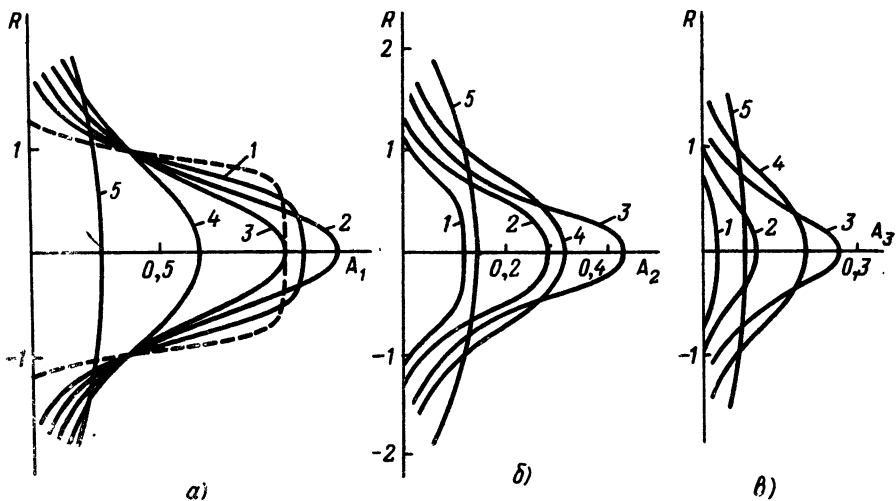


Рис. 6.16. Амплитудные распределения основной компоненты (а), второй (б) и третьей (в) гармоник на разных расстояниях  $z$ : значения  $z$  на кривых 1–5 соответственно равны 0,04, 0,08, 0,16, 0,24, 0,48;  $z = 0$  – пунктир,  $N = 3$ ,  $M = 8$ .

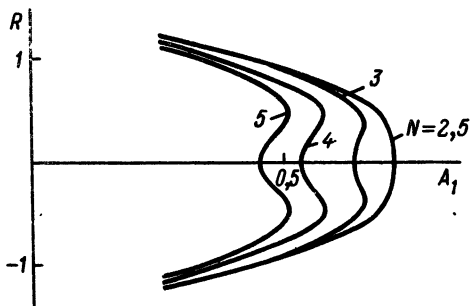


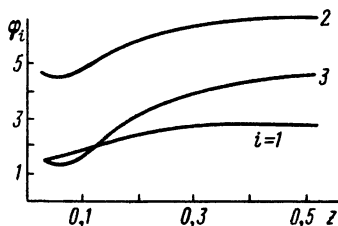
Рис. 6.17. Амплитудные распределения основной волны при различных значениях параметра  $N$ ;  $M = 16$ ,  $z = 0,24$ .

гивается: возрастает осевое значение и увеличивается плавность перехода в область тени (кривые 1 и 2). После максимума  $A_1$  быстро уменьшается на оси и в приосевой области (кривая 3). В середине прожекторной зоны амплитудное распределение довольно широкое (кривая 4). На границе прожекторной зоны в пределах  $R \sim 1$  амплитуда почти постоянная (кривая 5). Амплитудные распределения второй (рис. 6.16, б) и третьей гармоник (рис. 6.16, в), довольно однородные вблизи границы (кривые 1), вслед за  $A_1(R)$  теряют эту однородность (кривые 2). Затем  $A_2$  и  $A_3$  достигают максимума на оси (кривые 3). Далее амплитудные распределения быстро расширяются (кривые 4 и 5).

При рассмотрении амплитудных распределений было замечено, что при однородном распределении амплитуды с резким переходом в область тени ( $M = 16$ ) в середине прожекторной зоны, начиная со значений  $N = 3$ , появляется провал на оси пучка в распределении  $A_1(R)$

(рис. 6.17). При  $N = 2,5$  его еще нет, а функция  $A_1(R)$  довольно однородна. С увеличением  $N$  раздвоение  $A_1(R)$  усиливается, достигая 10% при  $N = 5$ . С углублением впадины в  $A_1(R)$  распределения  $A_2(R)$  и  $A_3(R)$  становятся более однородными. При других значениях  $M$  такого раздвоения максимума  $A_1(R)$  не наблюдается. Один из возможных механизмов этого явления может заключаться в следующем. При увеличении нелинейности усиливается перекачка энергии в другие гармоники, что ослабляет основную волну. При определенных значениях

Рис. 6.18. Осевое изменение начальных фаз гармоник в однородном пучке;  $N = 3$ ,  $M = 16$ .



параметров  $N$  и  $M$  это ослабление на оси оказывается больше, чем в других точках поперечного сечения. Это так называемое нелинейное "проедание" — явление, хорошо известное в нелинейной теории колебаний.

Осевое изменение начальных фаз гармоник показано на рис. 6.18. Зависимости  $\phi_i(z)$  при других значениях параметра  $M$  отличаются от кривых, представленных на рис. 6.18, вблизи излучателя. Однако это различие незначительно. Начиная с расстояний  $z \approx 0,15$ ,  $\phi_i(z)$  на оси не зависят от амплитудного распределения. При распространении пучка поперечные распределения начальных фаз основной волны и ее гармоник изменяются следующим образом (рис. 6.19): вблизи границы  $z = 0,02$ ) волновые фронты слегка вогнутые, причем  $\phi_1(R)$  и  $\phi_3(R)$  отличаются только на периферии; при распространении вогнутость усиливается, заметнее становится разница у  $\phi_1(R)$  и  $\phi_3(R)$  ( $z = 0,06$ ). Затем  $\phi_i(R)$  становятся почти плоскими в пределах  $R \sim 1$  сначала у основной компоненты ( $z = 0,1$ ), а затем и у гармоник ( $z = 0,15$ ). В середине прожекторной зоны все  $\phi_i(R)$  соответствуют сферически расходящейся волне. В пучке с более плавным изменением амплитуды описанные изменения фазовых распределений мягче, но характерные расстояния, на которых происходят эти изменения, такие же. При  $z = 0,25$  фазовые распределения не зависят от значений параметра  $M$ . Параметр  $N$  не влияет на функции  $\phi_i(R)$ . Кривые фазовых распределений, показанные на рис. 6.19, очень похожи на экспериментальные кривые, приведенные в книге [39].

Основные закономерности генерации гармоник квазиплоской волной конечной амплитуды. При распространении монохроматического



Рис. 6.19. Волновые фронты гармоник в однородном пучке на фиксированных расстояниях  $z$ ;  $N = 3$ ,  $M = 16$ .

сигнала, локализованного в пространстве в виде пучка, гармоники генерируются в сравнительно узкой приосевой области. Чем выше номер гармоники, тем уже область, где она локализована. Амплитуды гармоник увеличиваются с расстоянием, достигают максимума, затем уменьшаются. Значения максимумов амплитуд гармоник, а также их координаты, зависят от амплитудного распределения и от соотношения нелинейных и дифракционных эффектов.

Волновые фронты основной компоненты и ее гармоник в гауссовом пучке и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, из плоских превращаются в сферически расходящиеся. Чем выше номер гармоники, тем сильнее искривляется ее волновой фронт. Искривление фазового фронта происходит гораздо раньше границы прожекторной зоны.

Соотношение между амплитудами гармоник в процессе распространения изменяется и стремится асимптотически к значению, характерному для плоских волн. При отношениях между гармониками  $A_2/A_1 \geq 0,41$ ,  $A_3/A_1 \geq 0,24$  волновой профиль можно считать ударным. Сумма энергий гармоник до образования разрыва сохраняется. В однородных пучках амплитудное распределение основной волны вскоре теряет эту однородность и становится куполообразным. Амплитудные распределения гармоник следуют за основной компонентой. При однородном распределении амплитуды с резким переходом в область тени при  $N = 3$  обнаружено раздвоение максимума в амплитудном распределении основной компоненты, усиливающееся при увеличении  $N$ . Волновые фронты трех исследованных волн из плоских превращаются в сферически сходящиеся, а затем через плоские — в сферически расходящиеся. Примерно в середине прожекторной зоны амплитудные и фазовые распределения соответствуют сферически расходящейся волне и не зависят от амплитудного распределения на границе.

## § 2. Сфокусированный пучок в идеальной среде

**Гауссов пучок.** Проанализируем процесс генерации гармоник в сфокусированном гауссовом пучке. Рис. 6.20 создает общее представление о поведении гармоник на оси сильносходящегося пучка: гармоники возрастают, достигают максимальных значений, затем уменьшаются. При этом амплитуда основной компоненты сначала возрастает из-за фокусировки, потом падает. На этом рисунке наряду с  $A_1(z)$  изображена зависимость пикового значения возмущения от координаты (пунктир): вблизи границы  $A_1(z)$  следует за функцией  $\rho_{\Pi}(z)$ , но очень скоро  $A_1(z)$  начинает от нее отставать: максимальное значение  $\rho_{\Pi}(z)$  больше максимума  $A_1(z)$  и достигается позже. На рис. 6.21 сравниваются  $A_1(z)$ , соответствующие различным значениям параметров  $N$  и  $\beta$ . При увеличении сходимости  $A_1$  резко возрастает (рис. 6.21а), координата максимума функции  $A_1(z)$  примерно равна фокальной длине; исключение составляет случай  $N = 10, \beta = 1$ , когда рано образующаяся ударная волна сдвигает максимум  $A_1$  влево. Перекачка энергии в высшие гармонические составляющие, увеличивающаяся с ростом значения  $N$ , уменьшает максимум  $A_1$  и способствует более быстрому спаду  $A_1$ . Что касается гармоник  $A_2$  и  $A_3$  (рис. 6.21, б, в), то при слабой сходимости их поведение мало отличается от поведения гармоник квазиплоской волны: при сильной нелинейности максимумы  $A_2$  и  $A_3$  достигаются раньше, а значения максимумов примерно одинаковые. Начиная с расстояний  $z \approx 0,1$ ,  $A_2$ , соответствующая  $N = 3,25$ , больше  $A_2$  при  $N = 10$ . Для третьей гармоники это расстояние чуть больше. (см. рис. 6.21). При сильной сходимости функции  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  имеют очень узкий максимум, координата которого примерно равна фокальной длине; чем больше нелинейность, тем больше максимальные значения  $A_2$  и  $A_3$ .

Поскольку процесс генерации гармоник в слабосходящемся пучке мало отличается от такового в квазиплоской волне, приведем сразу поперечные распределения амплитуд основной волны и ее гармоник в сильносходящемся пучке (рис. 6.22). Вблизи границы

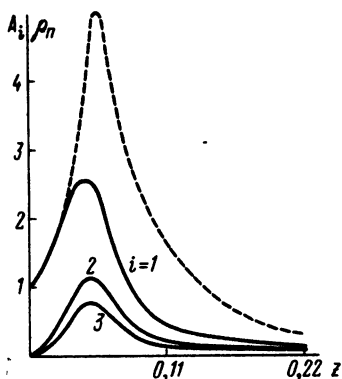


Рис. 6.20. Зависимость амплитуд гармоник и пикового значения возмущения (пунктир) от продольной координаты на оси гауссова пучка;  $N = 10$ ,  $\beta = 0,1$ .



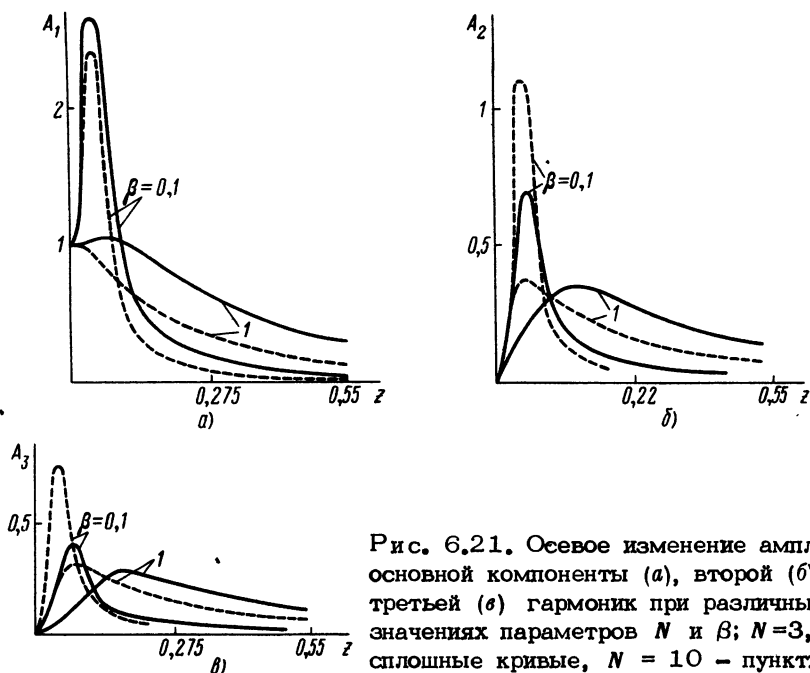


Рис. 6.21. Осевое изменение амплитуд основной компоненты (а), второй (б) и третьей (в) гармоник при различных значениях параметров  $N$  и  $\beta$ ;  $N=3,25$  — сплошные кривые,  $N=10$  — пунктир.

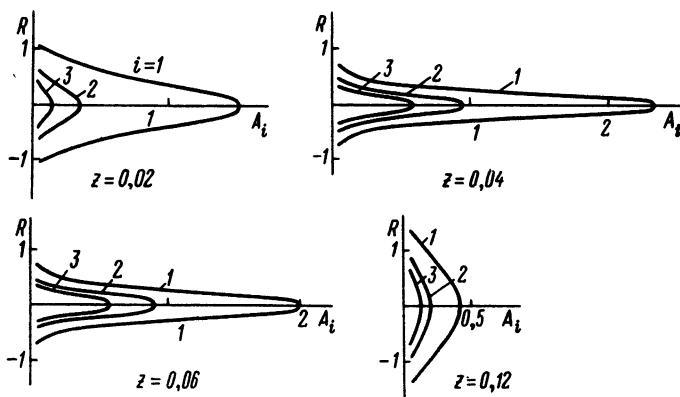


Рис. 6.22. Амплитудные распределения гармонических составляющих в сильносходящемся гауссовом пучке;  $N=10$ ,  $\beta=0,1$ .

( $z=0,02$ ) амплитуды гармоник малы, а их поперечные распределения сравнительно широкие. Около линейного фокуса ( $z=0,04$ ) амплитудные распределения сильно сужаются, а осевые значения  $A_i$  резко увеличиваются. После фокуса при  $z=0,06$  амплитудные распределения еще узкие, но осевые значения  $A_i$  начали уменьшаться. Далее  $A_i(R)$  быстро расширяются, а осевые значения резко падают.

Рис. 6.23. Осевое изменение фаз гармоник в гауссовом пучке при различных сходимостях:  $\beta_1 = 1$  - сплошные кривые,  $\beta = 0,1$  - пунктир;  $N = 3,25$ .

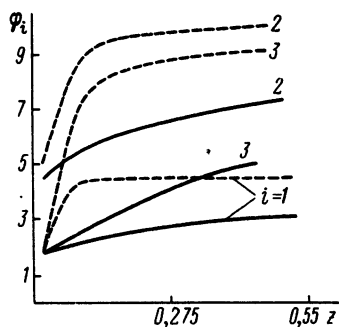


Рис. 6.23

Рис. 6.24. Волновые фронты гармоник в слабосходящемся гауссовом пучке;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 1$ .

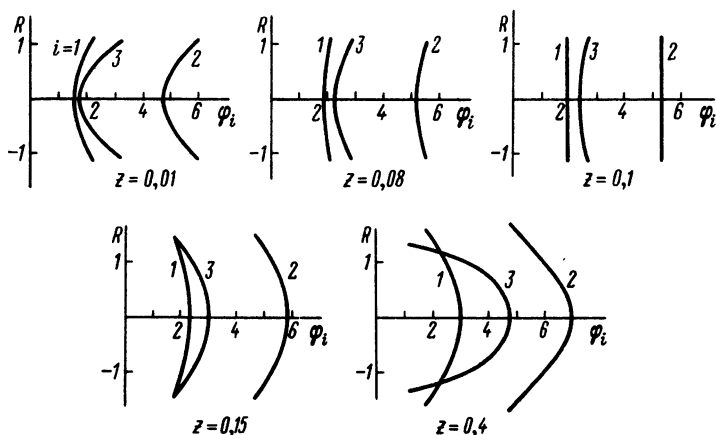


Рис. 6.24

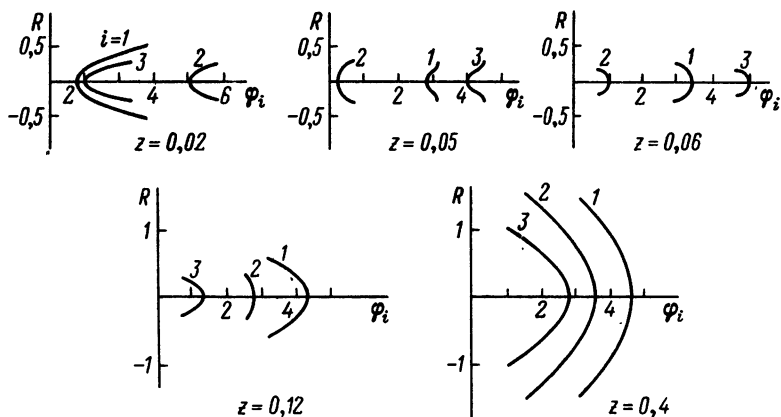


Рис. 6.25. Волновые фронты гармоник в сильносходящемся гауссовом пучке;  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

Фазовые изменения трех рассматриваемых волн в сфокусированном гауссовом пучке изображены на рис. 6.23 – 6.25. На оси пучка (рис. 6.23) при слабой сходимости начальные фазы изменяются плавно (сплошные кривые), в сильносходящемся пучке вблизи фокуса наблюдается резкое изменение фаз у всех трех гармонических составляющих (пунктир). За изменением фазовых распределений поперек пучка при слабой сходимости можно проследить на рис. 6.24. Сферически сходящиеся волновые фронты постепенно выпрямляются, становятся плоскими в фокусе ( $z = 0,1$ ), в дальнейшем сферически расходящимися. При этом раньше всех фронт становится плоским у основной компоненты ( $z = 0,08$ ). Радиус кривизны волнового фронта у второй и третьей гармоник меньше, чем у основной волны. В сильносходящемся пучке ( $\beta = 0,1$ ), описанные выше изменения более резки (рис. 6.25). Фазовые распределения вблизи границы ( $z = 0,02$ ) более вогнутые. При  $z = 0,05$  фронты вогнутые, а при  $z = 0,06$  они уже выпуклые. Далее волны становятся сферически расходящимися. Изменение начальных фаз гармонических составляющих вдоль и поперек пучка не зависят от параметра  $N$ .

Сфокусированный пучок с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени. При исследовании сфокусированного пучка с другим амплитудным распределением, например, с амплитудой, распределенной по ширине пучка по полиному четвертой степени, было замечено, что максимум  $A_1$  не превышает максимума пикового возмущения.  $A_1$  достигает своего максимума раньше и спадает быстрее, чем  $\rho_{\Pi}$  (рис. 6.26). Координаты максимума  $A_1(z)$  при различных  $\beta$  примерно совпадают с соответствующими координатами в линейной задаче. Наряду с  $A_1(z)$  и  $\rho_{\Pi}(z)$  на рис. 6.26 представлены функции  $A_2(z)$  и  $A_3(z)$ . При  $N = 10$  максимумы функций  $A_1(z)$  и  $\rho_{\Pi}(z)$  сильно раздвинуты (рис. 6.27). Сравнение осевых значений  $A_i(z)$  в гауссовом пучке

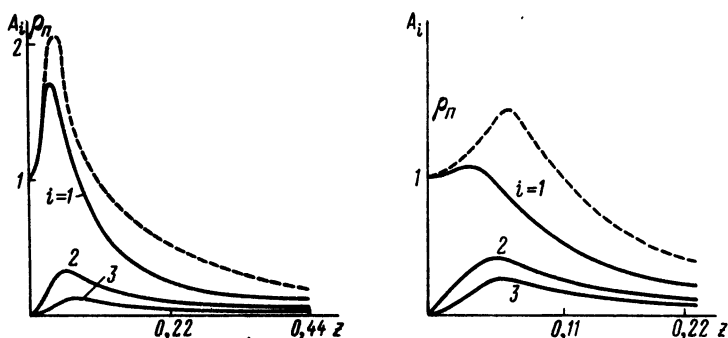


Рис. 6.26. Осевое изменение амплитуд гармоник и пикового значения возмущения (пунктир);  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

Рис. 6.27. Осевое изменение амплитуд гармоник и пикового значения возмущения (пунктир);  $N = 10$ ,  $\beta = 0,5$ .

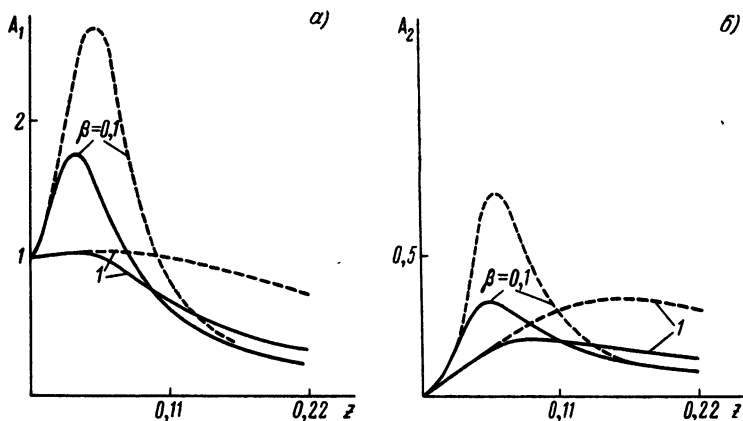


Рис. 6.28. Осевое изменение амплитуд основной компоненты (а) и второй гармоники (б) в пучке с амплитудным распределением  $(1 - R^2)^2$  (сплошные кривые) и в гауссовом пучке (пунктир) при различных сходимостях;  $N = 3,25$ .

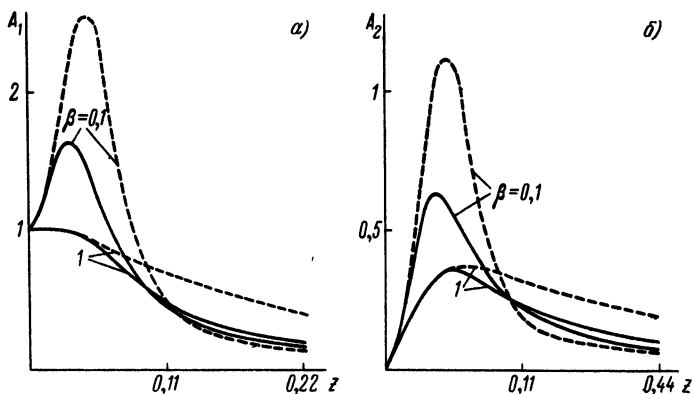


Рис. 6.29. Осевое изменение амплитуд основной компоненты (а) и второй гармоники (б) в пучке с амплитудным распределением  $(1 - R^2)^2$  (сплошные кривые) и в гауссовом пучке (пунктир) при различных сходимостях;  $N = 10$ .

(пунктир) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), проведенное для слабой нелинейности на рис. 6.28 и для сильной нелинейности на рис. 6.29, показывает, что при слабой расходимости ( $\beta = 1$ ) кривые  $A_1(z)$  в различных пучках отличаются в основном скоростью спада функций: в гауссовом пучке  $A_1(z)$  уменьшается более медленно (рис. 6.28, а и 6.29, а); при  $\beta = 0,1$  максимальное значение функций  $A_1(z)$  существенно больше в гауссовом пучке, чем в пучке с амплитудой,

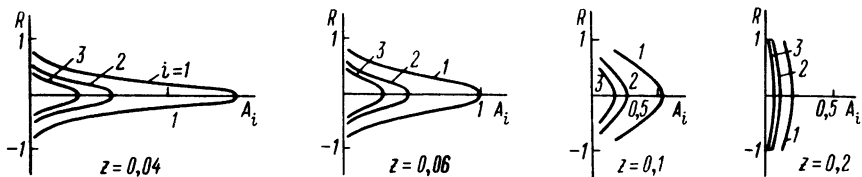


Рис. 6.30. Амплитудные распределения гармонических составляющих;  $N = 10$ ,  $\beta = 0,1$ .

распределенной по полиному четвертой степени. При  $N = 3,25$  амплитуды вторых гармоник (рис. 6.28, б) в обоих пучках при различных сходимостях отличаются значениями максимумов и координатами этих максимумов: в гауссовом пучке (пунктир) эти значения больше. При  $N = 10$  максимумы амплитуд гармоник (рис. 6.29, б) различны только при сильной сходимости, а при слабой сходимости функции  $A_2(z)$  в обоих пучках отличаются только скоростью спада.

Амплитуды третьих гармоник ведут себя так же, как  $A_2(z)$ .

Амплитудные распределения основной компоненты и двух ее гармоник в сильносходящемся пучке изображены на рис. 6.30. Гармоники генерируются в приосевой области, эта область тем уже, чем больше сходимость пучка. После фокуса амплитудные распределения гармонических составляющих сильно расширяются. Амплитудные распределения основной компоненты и второй гармоники в сильносходящихся пучках с различным распределением амплитуды сравниваются на рис. 6.31. Разница между  $A_i(R)$  ( $i = 1, 2$ ) в обоих пучках,

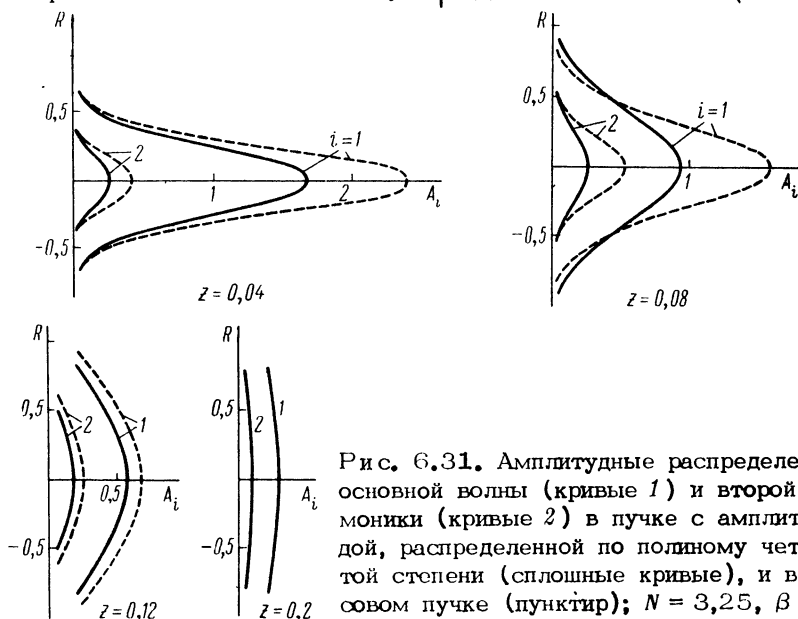
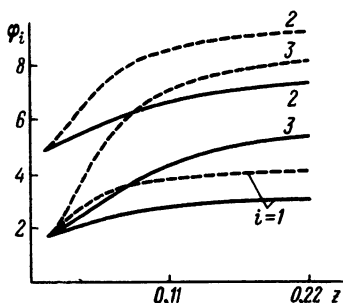


Рис. 6.31. Амплитудные распределения основной волны (кривые 1) и второй гармоники (кривые 2) в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 3,25$ ,  $\beta = 0,1$ .

Рис. 6.32. Осевое изменение начальных фаз гармоник в слабосходящемся пучке  $\beta = 0,5$  (сплошные кривые) и в сильносходящемся пучке  $\beta = 0,1$  (пунктир);  $N = 10$ .



существенная вблизи фокусов, затем уменьшается и примерно к середине проекторной зоны  $A_1(R)$  не зависит от первоначального амплитудного распределения. Фазы трех рассматриваемых волн вдоль пучка изменяются так, как показано на рис. 6.32; в слабосходящемся пучке это изменение более плавное (сплошные кривые), чем в сильносходящемся пучке (пунктир). Изменение фаз гармонических составляющих поперек пучка при слабой сходимости демонстрирует рис.6.33. Волновые фронты основной компоненты, второй и третьей гармоник, вогнутые при  $z = 0,01$ , превращаются сначала в слабоогнутые, а затем в плоские. Раньше всех плоским становится фазовое распределение основной волны. Далее фазы всех трех волн соответствуют сферически расходящимся волнам. При сильной сходимости (рис.6.34) описанные выше изменения происходят более резко: волновые фронты, сильновогнутые вблизи границы, становятся при  $z = 0,04$  слабоогнутыми у гармоник, при этом у основной компоненты фронт уже плоский; на расстоянии  $z = 0,05$  все три волны являются сферически расходящимися. Изменение фаз гармонических составляющих вдоль и поперек пучка не зависит от параметра  $N$ .

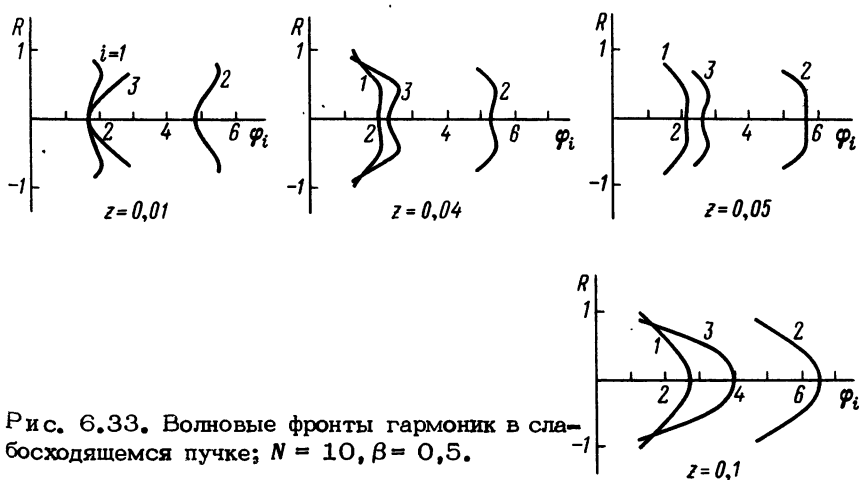


Рис. 6.33. Волновые фронты гармоник в слабосходящемся пучке;  $N = 10, \beta = 0,5$ .

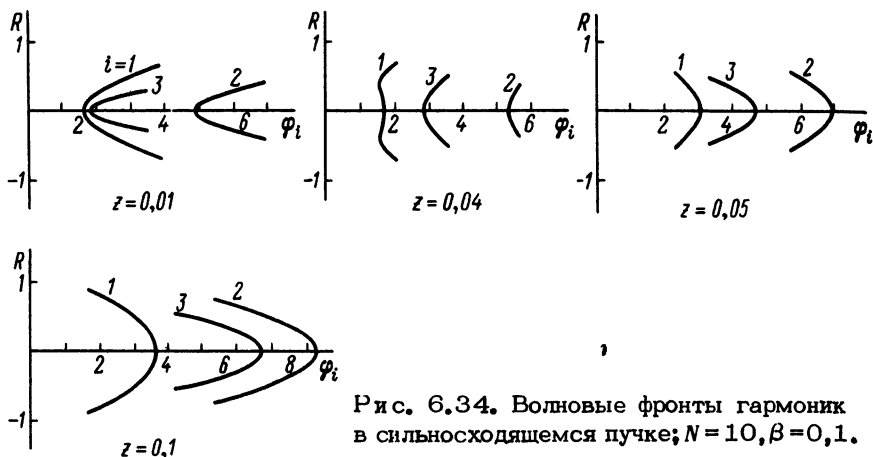


Рис. 6.34. Волновые фронты гармоник в сильносходящемся пучке;  $N = 10, \beta = 0,1$ .

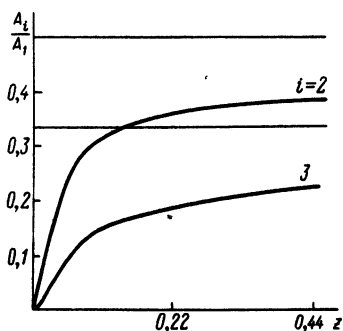


Рис. 6.35. Соотношение между амплитудами гармоник на оси пучка;  $N = 3,25, \beta = 0,1$ .

Отметим еще один факт. При распространении пучка изменяются соотношения между гармониками, стремясь асимптотически к значениям, характерным для волн пилообразной формы. В том случае, когда ударная волна в прожекторной зоне не образуется, например, при  $N = 3,25$  и  $\beta = 0,1$ , отношения  $A_i/A_1$  очень медленно приближаются к своим асимптотическим значениям (рис. 6.35).

Основные закономерности генерации гармоник в сфокусированном пучке. В заключение приведем табл. 6.2, где собраны некоторые данные, характеризующие процесс: максимальные значения гармонических составляющих на оси  $A_{i \max}$ , соотношение между гармониками в максимуме, координаты соответствующего максимума  $z_i$  при различных значениях параметров  $N$  и  $\beta$  в обоих рассмотренных пучках. На основе проделанных вычислений можно сделать следующие выводы. Процесс генерации гармоник в сфокусированном пучке определяется двумя параметрами: соотношением нелинейных и дифракционных эффектов (параметр  $N$ ), отношением фазовой сходимости к дифракцион-

Таблица 6.2

Амплитудное распределение	$N$	$\beta$	$A_{1\max}$	$z_1$	$A_{2\max}$	$z_2$	$A_{2\max}/A_1$	$A_{3\max}$	$z_3$	$A_{3\max}/A_1$
$\exp(-R^2)$	0	1	1,12	0,1						
		0,1	5,1	0,048						
	3,25	1	1,05	0,055	0,35	0,192	0,39	0,214	0,22	0,26
		0,1	3,17	0,05	0,865	0,06	0,29	0,4	0,06	0,135
	10	1	1,01	0,02	0,38	0,066	0,44	0,243	0,08	0,3
		0,1	2,55	0,044	1,12	0,04	0,44	0,72	0,04	0,28
$(1-R^2)^2$	0	1	1,16	0,048						
		0,5	1,27	0,043						
		0,1	2,26	0,03						
	3,25	1	1,04	0,038	0,205	0,088	0,27	0,093	0,121	0,148
		0,5	1,11	0,038	0,22	0,08	0,25	0,1	0,11	0,14
		0,1	1,7	0,036	0,31	0,06	0,232	0,127	0,066	0,1
	10	1	1,01	0,017	0,363	0,055	0,4	0,226	0,066	0,278
		0,5	1,07	0,038	0,4	0,055	0,4	0,248	0,06	0,268
		0,1	1,64	0,032	0,682	0,039	0,4	0,418	0,042	0,263

ной расходимости (параметр  $\beta$ ) и, кроме того, зависит от первоначального амплитудного распределения. Генерация гармоник в слабосходящихся пучках происходит примерно так же, как и в квазишлоской волне. Для сильносходящегося пучка характерно увеличение амплитуды основной компоненты, сопровождающееся сужением амплитудного распределения, при этом гармоники генерируются в узкой приосевой области. При увеличении параметра  $N$  перекачка энергии в высшие гармонические составляющие ослабляет основную компоненту и увеличивает амплитуды гармоник. Последние, возрастая до больших значений, затем очень быстро уменьшаются и, начиная с некоторых расстояний, оказываются меньше амплитуд гармоник, соответствующих меньшим значениям  $N$ . В гауссовом пучке все описанные закономерности проявляются более четко: больше максимальные значения  $A_j$ ,

уже амплитудные распределения и т.д. Однако в сильносходящемся пучке примерно с середины прожекторной зоны амплитудные распределения основной волны, а также второй гармоники становятся неразличимыми в обоих рассмотренных пучках. Фазовое изменение на оси наиболее сильно в фокальной плоскости. Волновой фронт рассмотренных волн из сферически сходящегося превращается в плоский в фокусе, а затем в сферически расходящийся. При увеличении расходимости эти изменения более резки. Изменение параметра  $N$  не сказывается на фазовых характеристиках гармонических составляющих.



### § 3. Квазиплоская волна в диссипативной среде

В диссипативной среде генерация гармоник происходит примерно так же, как в идеальной: амплитуды гармоник на оси гауссова пучка увеличиваются, достигают максимума, затем уменьшаются; амплитуда основной компоненты монотонно падает (рис. 6.36). Для сравнения здесь же изображены амплитуды гармоник в идеальной среде (пунктир). Кроме того, на рис. 6.36 изображена зависимость пикового значения возмущения  $\rho_{\Pi}$  от координаты вдоль пучка. Вблизи границы  $\rho_{\Pi}$  совпадает с  $A_1$ , далее начинается интенсивная перекачка энергии в гармоники и  $A_1$  уменьшается быстрее, чем  $\rho_{\Pi}$ , вклад в которую вносят образующиеся гармоники.

Сначала гармоники генерируются главным образом в приосевой области, постепенно поперечные распределения  $A_i(R)$  расширяются (рис. 6.37). Начальные фазы основной волны и ее гармоник на оси гауссова пучка монотонно увеличиваются (рис. 6.38). Волновые фронты, плоские вблизи границы, затем постепенно искривляются и примерно к середине прожекторной зоны волны становятся сферически расходящимися (рис. 6.39). Функции  $\phi_i(z)$  и  $\phi_i(R)$  не чувствительны к изменению параметров  $N$  и  $\delta$ .

Далее сравниваются гармоники, генерируемые в пучках с различным амплитудным распределением (рис. 6.40). При меньших значениях параметра  $N$   $A_2(z)$  и  $A_3(z)$  в обоих пучках отличаются еще максималиными значениями и координатами этих максимумов. Кроме  $A_i(z)$ ,

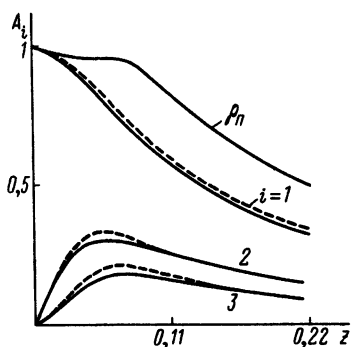


Рис. 6.36. Осевое изменение амплитуд гармонических составляющих и пикового значения возмущения в гауссовом пучке в диссипативной (сплошные кривые) и в идеальной (пунктир) средах;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

Рис. 6.37. Амплитудные распределения гармоник в гауссовом пучке;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

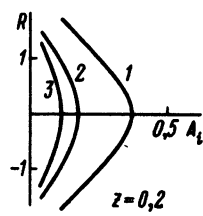
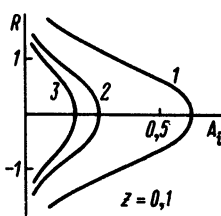
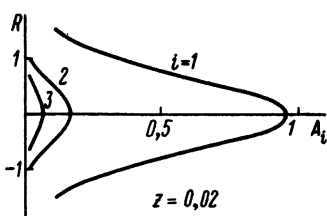


Рис. 6.38. Осевое изменение начальных фаз гармонических составляющих в гауссовом пучке;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

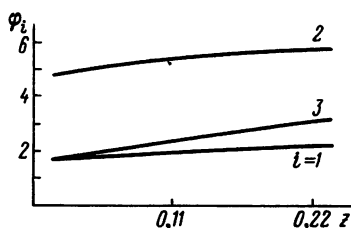


Рис. 6.39. Волновые фронты основной компоненты и двух гармоник в гауссовом пучке;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

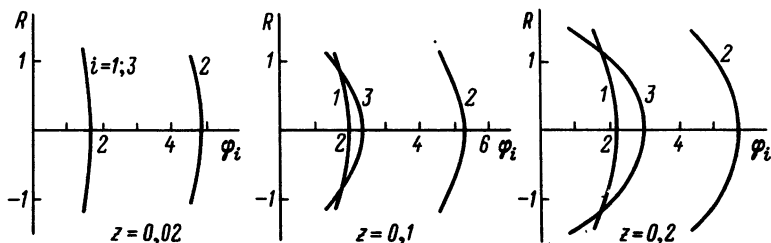


Рис. 6.40. Осевое изменение амплитуд гармонических составляющих и пикового значения возмущения в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

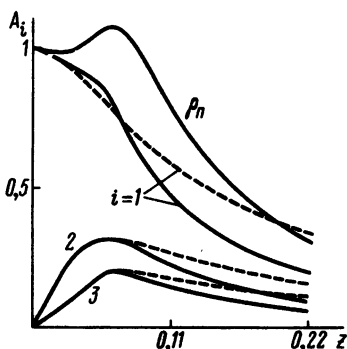
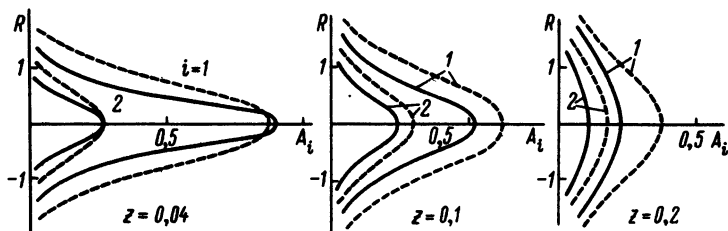


Рис. 6.41. Амплитудные распределения основной волны и второй гармоники в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .



на рис. 6.40 представлена функция  $\rho_{II}(z)$  в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени. Амплитудные распределения в обоих пучках сравниваются на рис. 6.41.

Фазы на оси в пучке с четко выраженной границей изменяются более резко (сплошные кривые на рис. 6.42), чем в гауссовом пучке (пунктир). Наличие края пучка сильно изменяет поперечные фа-

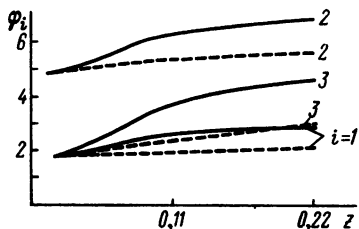


Рис. 6.42. Осевое изменение фаз гармоник в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

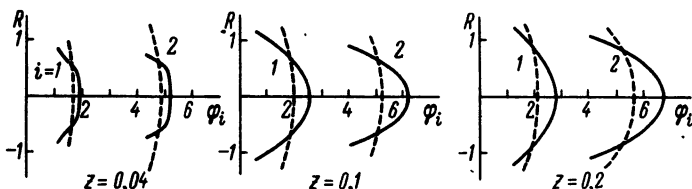


Рис. 6.43. Волновой фронт основной волны и второй гармоники в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (сплошные кривые), и в гауссовом пучке (пунктир);  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

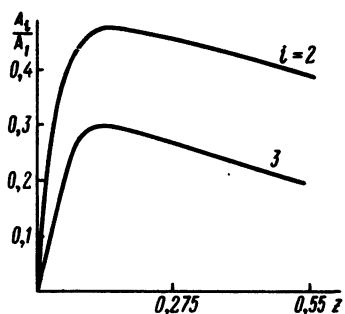


Рис. 6.44. Зависимость отношения между гармониками от пройденного расстояния в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени;  $N = 10$ ,  $\delta = 0,5$ .

зовые распределения (рис. 6.43). В отличие от гауссова пучка (пунктир) в пучке с резким краем (сплошные кривые) волновые фронты вблизи излучателя плоские не по всей ширине пучка, а только в приосевой области, в пределах  $R = 0,5$ . При распространении волновые фронты основной компоненты и гармоник в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, искривляются сильнее, чем в гауссовом пучке.

Сильное поглощение высоких гармоник приводит к появлению максимума в функциях  $A_2/A_1$  и  $A_3/A_1$  от  $z$ , характеризующих изменение соотношения между гармониками при распространении. Изменение этих отношений при распространении на оси пучка изображено на рис. 6.44.

Таким образом, процесс генерации гармоник в пучке конечной амплитуды в диссипативной среде характеризуется следующими особенностями. Амплитуды этих гармоник увеличиваются, достигают мак-

сигнала и затем уменьшаются. Максимум амплитуд гармоник меньше, чем в идеальной среде. Фазовое распределение из плоского превращается в сферически расходящееся. Роль параметра  $N$  и первоначального амплитудного распределения в этом процессе такая же, как в идеальной среде. Потери энергии приводят к уменьшению максимума амплитуд гармоник и к появлению максимума у функций, выражающих зависимость отношений между гармониками от расстояния.

#### § 4. Параметрическое взаимодействие звуковых пучков

Занимаясь гармоническим анализом формы возмущения, распространяющегося в нелинейной среде, остановимся очень коротко на процессе генерации низкочастотного звукового сигнала. Если в нелинейной среде возбуждаются две волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то нелинейность среды и отсутствие дисперсии обеспечивают их эффективное взаимодействие, в результате чего образуются комбинационные волны вида

$$n\omega_1 \pm m\omega_2.$$

Взаимодействие звуковых волн открывает новые возможности излучения низкочастотного акустического сигнала, которые в значительной степени уже реализованы на практике. Поэтому интерес к этой проблеме исключительно высок и литература обширна [40 - 42]. Здесь хотелось бы выделить два основных подхода к решению задач о параметрическом излучении звука: метод функции Грина, впервые примененный к этим задачам в работе [43], и метод, основанный на квазиоптическом приближении, предложенный в [44] и успешно развитый в книге [42]. Квазиоптическое приближение позволяет проследить за динамикой формирования диаграммы направленности и дает хорошее согласие с экспериментом [44, 45]. Стремление повысить коэффициент преобразования в низкую частоту приводит к "нелинейному насыщению" [46]. Особенности работы параметрического излучателя в режиме "нелинейного насыщения" освещены в работах [47 - 49].

Процесс распространения и взаимодействия осесимметричных звуковых пучков в слабонелинейной среде с диссипацией энергии описывается приближенным уравнением (5.13). Допустим, что на границе возбуждаются две монохроматические волны с одинаковым амплитудным распределением и с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\rho(\theta, R, \theta) = -F(R) \left( \sin\theta + \sin \frac{\omega_2}{\omega_1} \theta \right). \quad (6.1)$$

Безразмерные переменные, встречающиеся в уравнении (5.13) и граничном условии (6.1), нормированы на соответствующие величины, связанные с высокочастотной волной накачки:  $\rho$  - возмущение плотности, отнесенное к амплитуде высокочастотного гармонического сигнала  $A_1$ ;  $\theta = \omega_1(t - x/c_0)$  - безразмерное время в сопровождающей системе координат, связанной с волной накачки и т.д. Все харак-

терные длины:  $L_p, L_d, L_z$ , а следовательно, и безразмерные параметры, определяемые ими, относятся к волне накачки, например,  $L_p = 1/a \omega_1 A_1$ . Функция  $F(R)$  определяет амплитудное распределение, заданное на границе. Будут рассмотрены амплитудные распределения вида

$$F(R) = 0,5 \exp(-R^2), \quad (6.2)$$

$$F(R) = 0,5(1-R^2)^2, \quad R \leq 1; \quad F(R) = 0, \quad R > 1. \quad (6.3)$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  таковы, что условие квазиоптического приближения выполняется для волны разностной частоты:  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ .

Таким образом, в задаче (5.13) и (6.1) три безразмерных параметра: параметр  $N$  характеризует соотношение нелинейных и дифракционных эффектов в пучке накачки;  $\delta$  — безразмерное затухание высокочастотной волны; параметр  $K = \Omega/\omega_1$  определяет соотношение частот.

Уравнение (5.13) интегрируется численно с граничным условием (6.1), где функция  $F(R)$  определена выражениями (6.2) и (6.3), при различных значениях параметров  $N, \delta$  и  $K$ . Форма возмущения разлагается в ряд Фурье, выделяется и подробно анализируется волна разностной частоты  $\Omega$ . Контролируется также поведение одной из высокочастотных волн накачки.

При распространении двух коллинеарных звуковых пучков в нелинейной среде генерируется волна разностной частоты, поведение которой определяется значениями параметров  $N, \delta, K$  и зависит от амплитудного распределения на границе. Рис. 6.45 демонстрирует влияние параметра  $N$  на амплитуду разностной волны, генерируемой в пучках с различным амплитудным распределением: сплошные кривые относятся к гауссову пучку, пунктирные — к пучку с амплитудным распределением волны накачки (6.3). В гауссовом пучке амплитуда разностной волны существенно больше, чем в пучке с амплитудой,

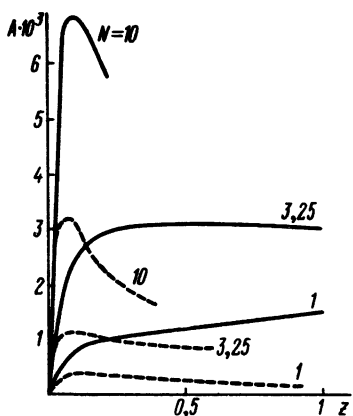


Рис. 6.45. Осевое изменение амплитуды разностной волны в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных значениях параметра  $N$ ;  $\delta = 0, K = 0,1$ .

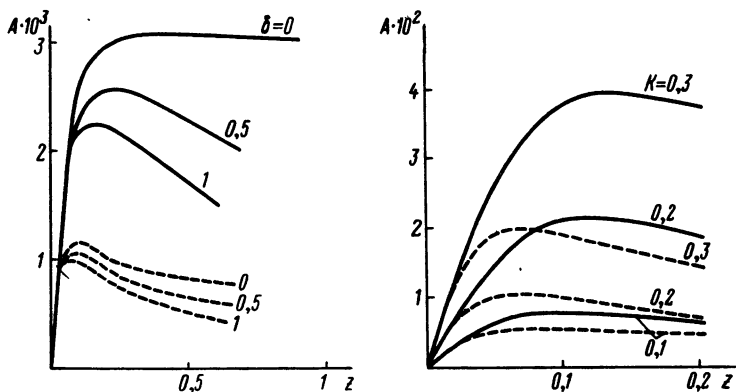


Рис. 6.46. Осевое изменение амплитуды разностной волны в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных значениях  $\delta$ ;  $N = 3,25$ ,  $K = 0,1$ .

Рис. 6.47. Осевое изменение амплитуды разностной волны в гауссовом пучке (сплошные кривые) и пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных  $K$ ;  $N = 10$ ,  $\delta = 0$ .

распределенной по полиному четвертой степени. Кроме того, амплитуда разностной волны, генерируемой в пучке с амплитудой накачки, распределенной по полиному четвертой степени, имеет максимум, координаты которого при  $N = 1$  и  $N = 3,25$  одинаковы и равны  $z = 0,1$ , что намного меньше координаты формирования разрыва на оси пучка накачки.

В гауссовом пучке при  $N = 1$  резкий рост  $A$  сменяется более плавным возрастанием, при  $N = 3,25$   $A$  достигает максимума вблизи границы прожекторной зоны, что согласуется с результатами работы [45], затем  $A$  очень медленно уменьшается.

При  $N = 10$  амплитуда разностной волны в обоих пучках имеет резко выраженный максимум, координата которого в гауссовом пучке чуть больше, чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени. Эта координата превосходит расстояние образования ударной волны на оси соответствующего пучка. Амплитуда разностной волны в максимуме существенно больше, чем амплитуда при меньших  $N$ , однако быстрый спад  $A$  после максимума приводит к тому, что, начиная с некоторых расстояний,  $A$ , соответствующая меньшим  $N$ , оказывается больше.

Кривые, изображенные на рис. 6.45, относятся к идеальной среде. Роль  $\delta$  сводится к уменьшению амплитуды разностной волны (рис. 6.46). Амплитуда разностной волны увеличивается с ростом отношения частот  $K$ , что хорошо видно на рис. 6.47.

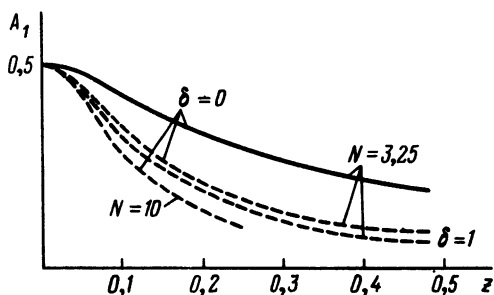
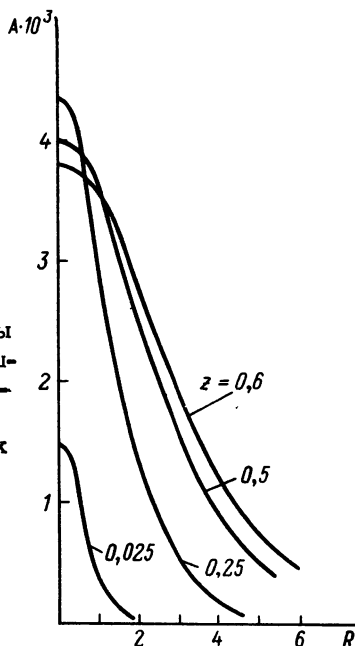


Рис. 6.48. Осовое изменение амплитуды волны накачки в гауссовом пучке (сплошная кривая) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных значениях параметров  $N$  и  $\delta$ .

Рис. 6.49. Амплитудное распределение разностной волны в гауссовом пучке на различных расстояниях;  $N = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $K = 0,3$ .



Отличие сплошных кривых от соответствующих пунктирных можно объяснить сильной расходимостью пучка с резко выраженной границей, приводящей к более быстрому уменьшению амплитуды волны накачки на оси этого пучка (рис. 6.48). Рассмотренные значения коэффициента поглощения вносят несущественный вклад в уменьшение амплитуды волны накачки на расстояниях, равных длине проекторной зоны. Перекачка энергии в гармоники и комбинационные волны из волны накачки при сильной нелинейности приводит к истощению последней (рис. 6.48), что способствует раннему достижению максимума функций  $A(z)$  (рис. 6.45).

Волна разностной частоты в пучке генерируется в сравнительно узкой приосевой области. По мере распространения эта область расширяется. Рис. 6.49 иллюстрирует динамику изменения амплитудного распределения разностной волны, генерируемой гауссовыми пучками в диссипативной среде. Эта динамика в идеальной среде при различных значениях параметра  $K$  при  $N = 10$  для обоих пучков показана на рис. 6.50. При других значениях параметра  $N$  амплитудное распределение ведет себя так же.

Интересно проследить за изменением амплитудного распределения несущей волны (рис. 6.51). Если вблизи границы ( $z = 0,02$ ) кривые 1 и 2, соответствующие гауссову пучку с разным значением параметра  $N$  совпадают полностью, а пунктирная кривая 3, относящаяся к пучку с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, мало от них отличается, то по мере распространения различие

Рис. 6.50. Амплитудные распределения разностной волны в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных  $K$ ;  $N = 10$ ,  $\delta = 0$ .

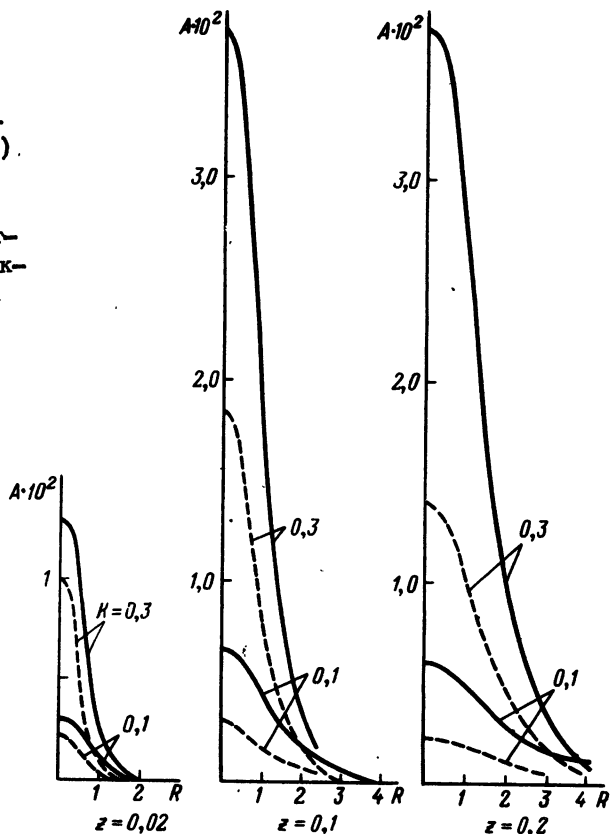
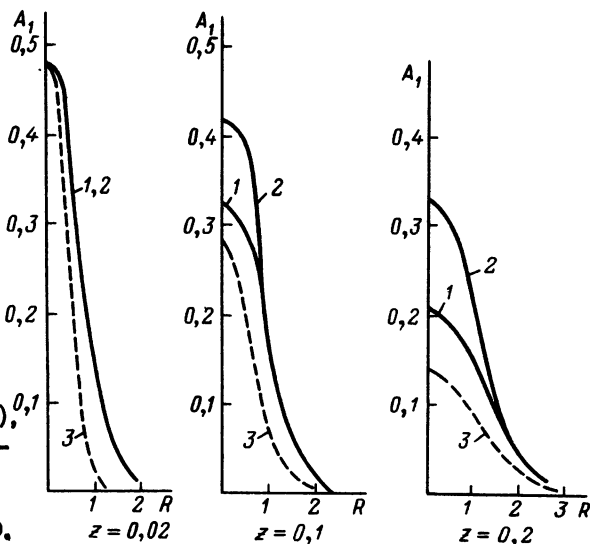


Рис. 6.51. Амплитудное распределение волны накачки в гауссовом пучке (сплошные кривые) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир), при различных  $N$ ; значения  $N$  на кривых 1, (3), 2 соответственно равны 10, 3,25;  $\delta = 0$ .





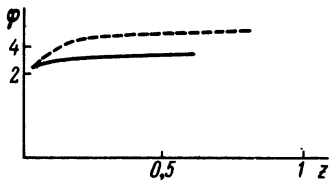


Рис. 6.52. Осевое изменение начальной фазы разностной волны в гауссовом пучке (сплошная кривая) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир);  $N = 3,25$ ,  $K = 1$ .

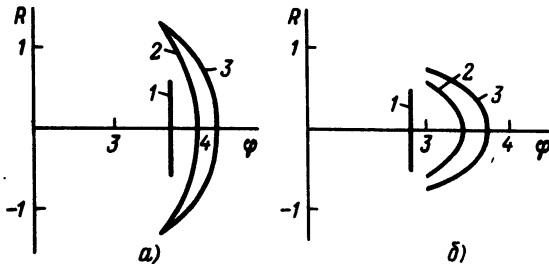


Рис. 6.53. Волновой фронт разностной волны в гауссовом пучке (а) и в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (б), на разных расстояниях  $z$ ; значения  $z$  на кривых 1–3 соответственно равны 0,02, 0,1, 0,2.

между кривыми становится существенным. Наибольшей оказывается амплитуда волны накачки в гауссовом пучке при  $N = 3,25$  (кривая 2). Пучок с распределением амплитуды по полиному четвертой степени сильно расходится (пунктир, кривая 3), а  $A_1$ , соответствующая гауссову пучку со значением  $N = 10$ , уменьшается из-за нелинейности (кривая 1). Естественно, что амплитудное распределение волны накачки не чувствительно к изменению параметра  $K$ .

Начальная фаза разностной волны  $\phi$  на оси гауссова пучка (рис. 6.52) изменяется меньше (сплошная кривая), чем в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени (пунктир). Поперечное фазовое распределение разностной волны при различных  $z$  в обоих пучках показано на рис. 6.53. Плоский волновой фронт вблизи границы нелинейной среды (кривые 1) затем искривляется; в пучке с амплитудой, распределенной по полиному четвертой степени, это проявляется сильнее (кривые 2). Заметим, что это искривление происходит на расстояниях порядка  $z \approx 0,03 - 0,05$ , т.е. гораздо раньше границы прожекторной зоны. Изображенные на рис. 6.52 и 6.53 зависимости  $\phi(z)$  и  $\phi(R)$  наблюдаются при всех рассмотренных значениях  $N$  и  $K$ .

На основе проведенных вычислений можно сделать следующие выводы. Разностная волна, возникающая при нелинейном взаимодействии звуковых пучков, локализована в сравнительно узкой приосевой области, расширяющейся по мере распространения. Амплитуда разностной волны зависит от амплитудного распределения несущих волн, от соотношения нелинейных и дифракционных эффектов, от коэффи-

иента поглощения среды и от отношения частот несущих волн. Изменение амплитуды вдоль направления распространения характеризуется максимумом, координата которого определяется амплитудным распределением волн накачки и параметрами  $N$  и  $\delta$ . Начальная фаза разностной волны вдоль пучка изменяется мало, причем основные изменения происходят вблизи границы. Волновой фронт разностной волны, плоский вначале, затем искривляется. Это искривление происходит гораздо раньше границы прожекторной зоны.

Исследовано поведение амплитуды разностной волны в ближней зоне излучателей. Хорошо видно (см. рис. 6.45), что означает режим насыщения, когда амплитуда разностной волны, достигая больших значений, резко падает. Для построения диаграммы направленности низкочастотного излучения расчет должен быть продолжен до расстояний  $z \sim 2$ .

## ГЛАВА 7

### САМОВОЗДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

При распространении возмущения, локализованного в пространстве в виде пучка, наблюдаются качественно новые явления, не свойственные плоской волне. К числу таких явлений относится самовоздействие волны. Пучок при распространении изменяет свойства той части среды, где он сосредоточен, изменяя тем самым условия для своего распространения. Механизмы самовоздействия могут быть разные: нагревание среды, возникновение акустических течений и т.д. В отличие от оптики в акустике обычный нелинейный механизм не приводит к фокусировке или дефокусировке периодического сигнала. Это связано с отсутствием дисперсии для звуковой волны, вследствие чего акустические свойства среды и, в частности, скорость звука, зависят от мгновенного значения возмущения. В то же время однополярные импульсы, локализованные в виде пучков, могут фокусироваться или дефокусироваться в зависимости от знака нелинейной добавки к скорости распространения. В этой главе будут теоретически исследованы два механизма самовоздействия звукового пучка: тепловое самовоздействие [50] и самовоздействие за счет акустических течений [51]. Хотя оба механизма действуют одновременно, рассмотрены они будут по отдельности.

#### § 1. Тепловое самовоздействие звуковой волны в линейном приближении

При распространении акустической волны в вязкой теплопроводящей жидкости или газе происходит нагревание среды, а скорость звука зависит от температуры. Поэтому среда становится как бы неоднородной: скорость волны в области, занимаемой пучком, отличается от скорости вне пучка. Да и в самом пучке скорость звука зависит от амплитудного распределения, определяющего температурный профиль поперек пучка. Если скорость распространения звука уменьшается с повышением температуры среды, то пучок в такой среде фокусируется, если же производная от скорости по температуре больше нуля ( $dc/dT > 0$ ), то среда оказывает на звуковую волну дефокусирующее действие. Впервые на возможность самофокусировки ультра- и гиперзвука было указано в работе [52]. Это явление

ние очень похоже на процесс теплового самовоздействия лазерного излучения, довольно полно изученный в оптике. Покажем, что уравнения гидродинамики и уравнение переноса тепла в линейном приближении сводятся к системе уравнений, описывающих тепловое самовоздействие лазерного излучения. Это позволяет все результаты, полученные в оптике, обобщить на случай акустической волны.

Исходная система уравнений, описывающая трехмерное распространение слабой акустической волны в среде с диссипацией энергии, имеет вид [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} c_V \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} + p \operatorname{div} \vec{v} = \\ = \kappa \Delta T + \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta (\operatorname{div} \vec{v})^2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Дополним уравнения (7.1) – (7.3) уравнением состояния с учетом зависимости скорости звука от температуры:

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{c^2} p - \frac{2}{c^3} \frac{dc}{dT} pT. \quad (7.4)$$

Введенные здесь обозначения обсуждались в предыдущих главах. В случае цилиндрически симметричного пучка вектор  $\vec{v}$  имеет две компоненты: продольную  $u$  и поперечную  $w$ .

Напишем решение уравнений (7.1) – (7.3) в виде квазиплоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} [ P(r, x) \exp i(\omega t - kx) + \text{к.г.} ], \\ u &= \frac{1}{2} [ U(r, x) \exp i(\omega t - kx) + \text{к.г.} ], \\ w &= \frac{1}{2} [ W(r, x) \exp i(\omega t - kx) + \text{к.г.} ]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Поскольку поперечная компонента скорости  $w$  обусловлена расходимостью пучка, то ее комплексная амплитуда  $W$  является величиной более высокого порядка малости, чем  $U$  и  $P$ . Кроме того, изменение амплитуд всех волн вдоль пучка происходит медленнее, чем поперек. Подставляя решение (7.5) в уравнения (7.1) – (7.3) и учитывая замечание о порядках малости величин  $P$ ,  $U$  и  $W$ , а также их произ-

водных по  $x$  и по  $r$ , получим после исключения  $U$  и  $W$

$$2ik \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{ik^3 (\zeta + 4/3\eta)}{\rho_0 c} P + \frac{2k^2}{c} \frac{dc}{dT} TP, \quad (7.6)$$

$$c_V \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k^2 (\zeta + 4/3\eta)}{2\rho_0 c^2} |P|^2, \quad (7.7)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $T$  — средняя температура в среде; в уравнении (7.7) пренебрегаем диффузией температуры вдоль оси пучка.

В стационарном случае система уравнений (7.6), (7.7) подстановкой  $P = A \exp(-ikS)$  сводится к уравнениям вида

$$\frac{\partial A^2}{\partial x} + a' A^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r A^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0, \quad (7.8)$$

$$2 \frac{\partial S}{\partial x} + \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = \frac{2}{c} \frac{\partial c}{\partial T} T + \frac{1}{k^2 A} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right), \quad (7.9)$$

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{a'}{2\rho_0 c} A^2 = 0. \quad (7.10)$$

Здесь  $a' = \omega^2 (\zeta + 4/3\eta) / \rho_0 c^3$  — коэффициент поглощения звука. Система уравнений (7.8) — (7.10) описывает стационарное тепловое самовоздействие звукового пучка в квазиоптическом приближении и совпадает с системой уравнений (5) — (7) из [53], описывающей тепловое самовоздействие лазерного излучения. Поэтому все результаты, полученные в оптике, могут быть перенесены на случай акустического пучка. Приведем лишь лучевое уравнение [54]:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{a' \exp(-a'x)}{R_T f}, \quad (7.11)$$

где  $f(x) = r(x)/r_0$  — относительное удаление луча от оси пучка;  $r_0$  — начальная координата луча; величина

$$R_T = \frac{2\kappa c}{I_{cp} dc/dT} \quad (7.12)$$

характеризует силу нелинейной рефракции:  $I_{cp}(r_0) = N_0(r_0) / \pi r_0^2$  — средняя интенсивность поля в лучевой трубке с начальной мощностью

$N_0(r_0) = N|_{x=0}$ , где  $N = \frac{\pi}{\rho_0 c} \int_0^{r_0} A^2 r dr$  — мощность, заключенная в лучевой трубке радиуса  $r_0$ .

Радиус кривизны волнового фронта в предположении, что ширина пучка не изменяется, а лишь искривляется волновой фронт, определяется выражением [54]

$$R = R_T [1 - \exp(-a' l)]^{-1}, \quad (7.13)$$

где  $l$  — пройденное волной расстояние. Формула (7.13) справедлива при  $l \ll R$ . Изменение наклона луча, обусловленное нагреванием среды, в приближении толстой линзы будет [54]

$$\theta_T^2 = \frac{a' N_0 dc/dT}{\pi \kappa c}. \quad (7.14)$$

Величина  $\theta = r_0 df/dx$  характеризует наклон луча в сечении  $x$ . Приведем еще выражение для фокального расстояния  $F_T = r_0/\theta_T$ , поскольку длина  $F_T$  вносит наиболее эффективный вклад в процесс тепловой фокусировки звукового пучка:

$$F_T = \left( \frac{\kappa c}{a' I_{cp} dc/dT} \right)^{1/2}. \quad (7.15)$$

Отметим, что при расчете учитывался только вязкостный механизм поглощения энергии. В том случае, когда в процессе диссипации существенна роль теплопроводности, коэффициент  $a'$  имеет вид

$$a' = \frac{\omega^2}{\rho_0 c^3} \left[ \zeta + \frac{4}{3} \eta + \kappa \left( \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \right].$$

Во всех жидкостях, кроме воды, скорость звука уменьшается с увеличением температуры [55]. Поэтому звуковой пучок при распространении в любой жидкости, за исключением воды, фокусируется. Согласно данным, приведенным в работе [55], значения  $dc/cdT$  для различных жидкостей не сильно отличаются друг от друга (не более чем в 3 раза) и составляют примерно  $10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Кроме того, зависимости  $c(T)$  для разных веществ в широком диапазоне температур графически изображаются прямыми линиями [56, 57], что говорит о постоянстве  $dc/cdT$ . Например, для ацетона  $dc/cdT = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .  $F_T$  в ацетоне для звуковой волны с частотой 100 кГц и интенсивностью, равной  $3 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/см}^2$ , достигает значения  $1,1 \cdot 10^4 \text{ см}$ , а при  $I_{cp} = 0,3 \text{ Вт/см}^2$   $F_T = 1,1 \cdot 10^3 \text{ см}$ , что составляет  $9,5 \cdot 10^3 \lambda$  ( $\lambda/2$  длина волны). Если частота звуковой волны равна 1 МГц, то при  $I_{cp} = 0,3 \text{ Вт/см}^2$   $F_T = 1 \text{ м}$ . Расстояние фокусировки на два порядка меньше длины затухания звуковой волны  $L_3 = a'^{-1}$ .

Самофокусировка ультразвука в жидкости происходит следующим образом. Звуковой пучок при распространении сужается, достигая на расстоянии  $F_T$  минимальной ширины. Радиус фокального пятна  $r_\phi = r_0 f_\phi$ . Величина  $f_\phi$  равна [58]

$$f_\phi \approx \left( \frac{N_0}{N_{кр}} \ln \frac{N_0}{N_{кр}} \right)^{-1},$$

здесь  $N_{кр}$  — критическая мощность, т.е. мощность, при которой нелинейная рефракция и дифракционная расходимость полностью компенсируются. Выражение для  $N_{кр}$  приведено в работе [58]. Оценим величину  $N_{кр}$  для условий, близких к экспериментальным. Для звукового пучка шириной  $r_0 = 12$  см с частотой ультразвука 1 МГц, распространяющегося в ацетоне,  $N_{кр} = 0,1$  Вт.

В воде  $dc/dT > 0$ , поэтому квазиплоская звуковая волна, распространяясь в воде, становится расходящейся. Температурный коэффициент для воды равен  $dc/cdT = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ .  $F_T$  для звуковой волны с частотой 100 кГц и интенсивностью  $0,3 \text{ Вт/см}^2$  равно  $2,8 \cdot 10^3$  см, а при частоте звуковой волны 1 МГц и  $I_{ср} = 0,3 \text{ Вт/см}^2$   $F_T = 2,8$  м.

Известно, что при не очень высоких давлениях состояние газов хорошо описывается уравнением состояния идеального газа. При этом скорость распространения звука в газах определяется выражением  $c^2 = \gamma RT/\mu$ , где  $\gamma = c_p/c_v$ ;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\mu$  — молекулярная масса. Для газов  $dc/dT > 0$  и звуковой пучок при распространении в газах дефокусируется.

Оценим величину  $F_T$  в воздухе. Скорость звука в воздухе может быть представлена в виде [59]  $c = 33145 (T/273)^{1/2} \text{ см/с}$ , где  $T$  — температура в кельвинах.  $F_T = 1,6$  м при частоте 100 кГц и  $I_{ср} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/см}^2$ ; при  $I_{ср} = 0,3 \text{ Вт/см}^2$  получаем  $F_T = 16$  см, что составляет 50 длин волн. В воздухе тепловая дефокусировка проявляется сильнее из-за большого поглощения звука.

Все вычисления проведены без учета нелинейных свойств среды. Нелинейность в данном случае приводит к изменению формы волны и вносит существенный вклад в рассматриваемое явление при образовании ударной волны.

## § 2. Тепловое самовоздействие звуковой волны конечной амплитуды. Вывод основных уравнений и постановка задачи

Расчет, проведенный в § 1 в линейном приближении, позволяет оценить характерные расстояния теплового самовоздействия звуковой волны. Нелинейность скажется главным образом на форме возмущения и существенно изменит процесс при образовании слабой ударной волны. Выведем уравнения, описывающие процесс теплового самовоздействия звуковой волны конечной амплитуды. Исходные уравнения — уравнения гидродинамики вязкой жидкости и уравнение переноса тепла — приведены в § 1 гл. 5. Здесь изменится только уравнение состояния, его надо дополнить членом, учитывающим зависимость скорости звука от температуры:

$$p = p_0 + c_0^2 \rho' + \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2 \rho_0} \rho'^2 + 2 c_0 \frac{dc}{dT} T \rho'. \quad (7.16)$$

Предполагается, что добавка к скорости звука, обусловленная нагреванием среды,  $\Delta c = (dc/dT) T$ , мала. С помощью рассуждений, подробно приведенных в главах 2 и 5, можно получить уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial x} + \\ & + \frac{c_0}{2} \Delta c \rho' + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc}{dT} T \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} = - \frac{b}{2 \rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial r^3}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Уравнение (7.17) отличается от уравнения (5.11) одним членом —  $\frac{1}{c_0^2} \frac{dc}{dT} T \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2}$ . Этот член можно также получить при помощи очень простых, но не строгих, рассуждений. В линейном волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0 \quad (7.18)$$

представим скорость в виде  $c = c_0 + \Delta c$ , где  $\Delta c = T dc/dT$  — малая добавка. Перепишем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \left( 1 - 2 \frac{\Delta c}{c_0} \right) \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \quad (7.19)$$

Далее, вводя сопровождающие координаты  $x' = \mu x$  и  $t' = t - \kappa/c_0$ , получим

$$-\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial x} + \frac{\Delta c}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} = 0. \quad (7.20)$$



Поскольку новый член в уравнении состояния (7.16) мал, порядка  $\mu^2$ , то любая его комбинация с другими членами порядка  $\mu$  даст член, по порядку малости выходящий за рамки рассматриваемого приближения.

Уравнение переноса тепла в сопровождающих координатах после усреднения по периоду и исключения  $\vec{v}$  примет вид

$$c_v \rho_0 \frac{\partial T}{\partial r} = \kappa \Delta_{\perp} T + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \overline{\left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2}. \quad (7.21)$$

Система уравнений (7.17) и (7.21) описывает процесс теплового самовоздействия звуковой волны конечной амплитуды. Рассматриваемый процесс носит существенно нестационарный характер. Однако с ростом  $r$  производная  $\partial T / \partial r$  убывает, и мы сделаем попытку описать этот процесс, приближая его стационарным. В дальнейшем будет рассмотрена стационарная задача. Дополним уравнения (7.17) и (7.21) граничными условиями. Допустим, что на границе нелинейной среды возбуждается гармонический сигнал с амплитудой, зависящей от поперечной координаты:

$$\rho'(t, r, \theta) = -A(r, \theta) \sin \omega t. \quad (7.22)$$

Каким граничным условиям должна удовлетворять функция  $T(r, x)$ ? Если потребовать, чтобы  $T$  обращалась в нуль при  $r \rightarrow \infty$ , то температура на оси становится бесконечно большой. Поэтому предполагается, что температура поддерживается постоянной, например равной нулю, на цилиндре радиусом, равным нескольким радиусам пучка ( $r = na$ ). Число  $n > 1$ , оно подбирается таким, чтобы его изменение не влияло на акустические характеристики пучка, а приводило только к сдвигу  $T$  на константу. Как связана эта константа с числом  $n$ , будет показано после введения безразмерных переменных. А пока запишем граничное условие для температуры:

$$T = 0 \text{ при } r = r_0 = na, \quad n > 1. \quad (7.23)$$

Введем безразмерные переменные  $\rho, \theta, z, R$ , связанные с прежними переменными соотношениями (3.2).

Уравнения (7.17) и (7.21) с граничными условиями (7.22) и (7.23) примут вид

$$N \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial z} + \Delta_{\perp} \rho + F^2 Q \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} = -\delta \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}, \quad (7.24)$$

$$\Delta_{\perp} Q = -\overline{\left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2}, \quad (7.25)$$

$$\rho = -A(R, \theta) \sin \theta, \quad (7.26)$$

$$Q = 0 \text{ при } R = R_0. \quad (7.27)$$

Здесь функция  $Q$  связана с температурой соотношением

$$Q = \kappa T / \alpha' I_{\text{ср}} a^2. \quad (7.28)$$

Безразмерные параметры  $N$  и  $\delta$  имеют тот же физический смысл, что и введенные ранее. Параметр  $F^2$  выражается через дифракционную длину  $L_D$  и фокальное расстояние  $F_T$ , определяемое выражением (7.15):

$$F^2 = 2L_D^2 / F_T^2. \quad (7.29)$$

Безразмерный параметр  $F^2$  характеризует относительный вклад двух явлений: теплового самовоздействия и дифракционной расходимости.

Теперь покажем, как выбор  $R_0$  в граничном условии (7.27) влияет на безразмерную температуру. Допустим, что амплитуда распределена по сечению пучка по закону Гаусса  $A(R, 0) = \exp(-R^2)$ , тогда уравнение (7.25) принимает вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial Q}{\partial R} \right) = -\frac{1}{2} \exp(-2R^2). \quad (7.30)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 - \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{R'} \int_0^{R'} \exp(-2R''^2) R'' dR'' dR' = \\ &= Q_0 - \frac{1}{8} \int_0^R \frac{1}{R'} [1 - \exp(-2R'^2)] dR' = Q_0 - \Phi(R). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Константа  $Q_0$  определяется из условия (7.27):

$$Q_0 = \Phi(R_0). \quad (7.32)$$

Окончательно безразмерная температура равна

$$Q(R) = \Phi(R_0) - \Phi(R). \quad (7.33)$$

Вычислим для примера температуру на оси пучка. Согласно формуле (7.33)

$$Q(0) = \Phi(R_0) - \Phi(0). \quad (7.34)$$

Функция  $\Phi(R)$  равна

$$\Phi(R) = \frac{1}{8} \left[ \ln R - \frac{1}{2} \text{Ei}(-2R^2) \right], \quad (7.35)$$

где  $\text{Ei}(-2R^2)$  — интегральная показательная функция. Следовательно,

$$Q_0 = \Phi(R_0) = \frac{1}{8} \left[ \ln R_0 - \frac{1}{2} \text{Ei}(-2R_0^2) \right]. \quad (7.36)$$

Функция  $\Phi(R)$  на оси равна

$$\Phi(0) = \frac{1}{8} \left[ \ln R - \frac{1}{2} \text{Ei}(-2R^2) \right]_{R \rightarrow 0}.$$

Если воспользоваться представлением  $\text{Ei}(-2R^2)$ , приведенным, например, в [60], то

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{1}{8} \left[ \ln R - \frac{1}{2} (c + \ln 2R^2) \right] = \\ &= \frac{1}{8} (\ln R - \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} \ln 2 - \ln R), \end{aligned}$$

$$\Phi(0) = -\frac{1}{16} (c + \ln 2), \quad (7.37)$$

где  $c$  — постоянная Эйлера. Окончательно температура на оси равна

$$Q(0) = \frac{1}{16} [\ln 2R_0^2 - \text{Ei}(-2R_0^2) + c]. \quad (7.38)$$

Когда  $R_0$  принимает значения 4, 6, 8, то  $Q(0)$  соответственно равно 0,252; 0,303; 0,339. На этом конкретном примере хорошо видно, как выбор радиуса  $R_0$ , где поддерживается нулевая температура, определяет произвольную константу  $Q_0$ , а следовательно, и температуру в пучке. При  $R_0 \rightarrow \infty$  температура на оси растет как  $\ln R_0$ .

Таким образом, процесс нелинейного распространения звукового пучка с учетом теплового самовоздействия описывается уравнениями (7.24) и (7.25) с граничными условиями (7.26) и (7.27) и определяется тремя параметрами:  $N$ ,  $\delta$  и  $F^2$ . Но эти параметры не являются независимыми: например, при изменении интенсивности звуковой волны изменяется не только нелинейность, а следовательно параметр  $N$ , но и фокальное расстояние  $F_T$ , определяющее параметр  $F$  по формуле (7.29). Изменение коэффициента поглощения влечет за собой одновременное изменение параметров  $\delta$  и  $F$ . Вычислим отношения параметров  $N/F$  и  $\delta/F$ :

$$\frac{N}{F} = \frac{F_T}{\sqrt{2} L_p} = \alpha \rho_0 \frac{(\alpha c_0)^{1/2}}{(2b dc/dT)^{1/2}}. \quad (7.39)$$

Выражение (7.39) показывает, что отношение  $N/F$  зависит только от свойств жидкости и, следовательно, для каждой конкретной жидкости является константой. Отношение

$$\frac{\delta}{F} = \frac{F_T}{\sqrt{2} L_3} = \omega \left( \frac{\kappa b}{2\rho_0 c_0^2 I_{cp} dc/dT} \right)^{1/2} \quad (7.40)$$

зависит от свойств жидкости, частоты и интенсивности волны.

### § 3. Тепловая дефокусировка звукового пучка конечной амплитуды в воде

Конкретный расчет проведен для воды. Известно [55], что вода является единственной жидкостью, где  $dc/dT > 0$ , и поэтому тепловое самовоздействие в воде выражается в дефокусировке звукового пучка. Формула (7.39) для воды дает

$$N/F = 1. \quad (7.41)$$

Для удобства сравнения с результатами вычислений, приведенных в гл. 5, положим  $N = 3,25$ , тогда  $F^2 = 10$ . Каким интенсивностям и каким радиусам пучков соответствуют эти значения параметров? При увеличении интенсивности от  $0,3$  до  $30 \text{ Вт/см}^2$  радиус пучка изменяется примерно от  $25$  до  $10 \lambda$ . При ширине пучка  $a = 25 \lambda$  и  $I = 0,3 \text{ Вт/см}^2$  принимает значения  $\delta = 0,01 - 1$  при изменении частоты от  $100 \text{ кГц}$  до  $10 \text{ МГц}$ . При  $a \sim 10 \lambda$  и  $I = 30 \text{ Вт/см}^2$  в том же диапазоне частот  $\delta \approx 10^{-3} - 10^{-1}$ . Анализ результатов, приведенных в гл. 5, показывает, что процесс распространения в диссипативной среде, характеризуемой значением параметра  $\delta = 0,1$  на расстояниях  $z \approx 2$ , что составляет примерно  $4L_D$ , мало отличается от распространения в идеальной среде. Поэтому здесь не рассматриваются значения  $\delta$ , меньшие  $0,1$ . Расчет проводится для значения

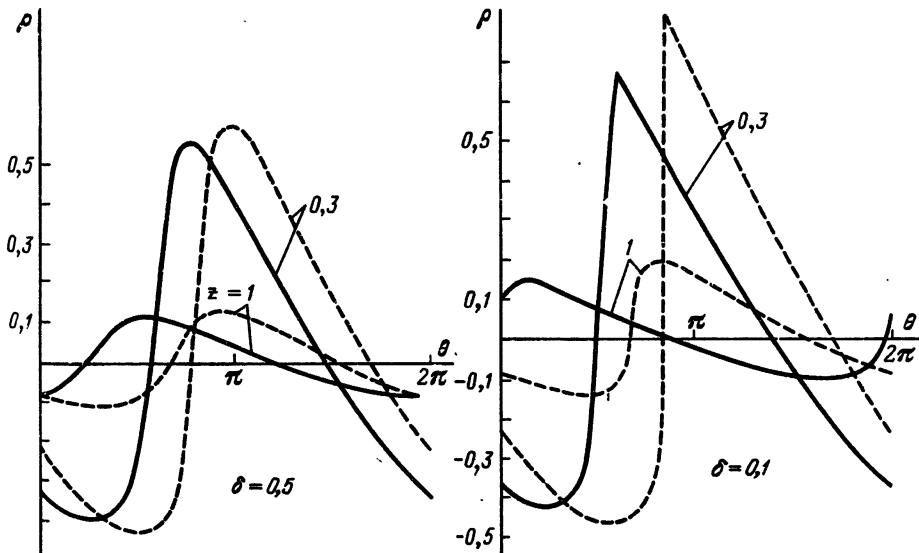


Рис. 7.1. Волновой профиль на оси при разных  $z$  в сильнопоглощающей среде ( $\delta = 0,5$ ) и в среде со слабым затуханием ( $\delta = 0,1$ ). Пунктир -  $F = 0$ .

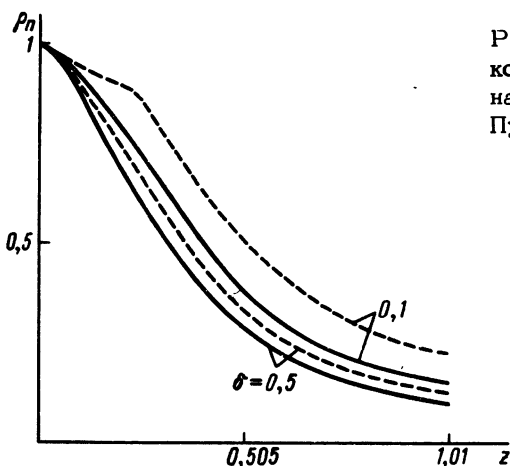


Рис. 7.2. Зависимость пикового значения возмущения на оси от  $z$  при различных  $\delta$ . Пунктир -  $F = 0$ .

параметров:  $N = 3,25$ ;  $F^2 = 10$  и  $\delta = 0,1$  и  $0,5$ ;  $R_0$  принимает значения 4, 6, 8.

На основе проведенных вычислений можно сделать следующие выводы. Тепловая дефокусировка приводит к дополнительной расходимости и заметному сдвигу волновых профилей по фазе. Нелинейные искажения происходят примерно так же, как в диссипативной среде без учета зависимости скорости звука от температуры и хорошо видны на примере волновых профилей, изображенных на рис. 7.1. Волновой профиль деформируется, фронт укрупняется, его ширина достигает некоторого минимального значения, затем фронт расширяется. В сильнопоглощающей среде минимальная ширина фронта больше ударной (рис. 7.1). При меньших значениях поглощения волна становится квазиразрывной (рис. 7.1). Кроме того, на рис. 7.1 пунктиром представлен волновой профиль в диссипативной среде без учета зависимости  $c(T)$ . Сравнивая сплошные и пунктирные кривые, можно заметить рассогласование по фазе между соответствующими кривыми. Уменьшение пикового значения возмущения, связанное с тепловой дефокусировкой, заметное на рис. 7.1, хорошо видно на рис. 7.2, где изображена зависимость пикового значения возмущения на оси от продольной координаты в среде со слабым затуханием ( $\delta = 0,1$ ) и в сильнопоглощающей среде ( $\delta = 0,5$ ), а также в диссипативной среде без учета  $c(T)$  (пунктир). При  $\delta = 0,1$  разница между сплошными и пунктирными кривыми более существенна, чем при  $\delta = 0,5$ . В других точках поперечного сечения пучка пиковое значение возмущения показано на рис. 7.3.

Тепловая дефокусировка способствует более быстрому спаду интенсивности на оси пучка (рис. 7.4). Изменение коэффициента затухания  $\delta$  приводит не только к изменению пикового значения возмущения на оси (рис. 7.2) и на периферии пучка (рис. 7.3), но и изменяет ширину фронта. С увеличением коэффициента  $\delta$  волновой фронт

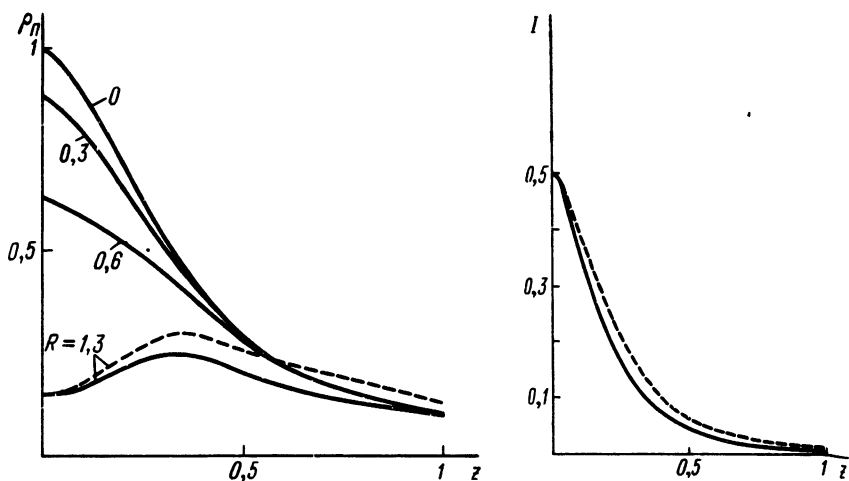


Рис. 7.3. Зависимость пикового значения возмущения от  $z$  в различных точках поперечного сечения пучка;  $\delta = 0,5$ . Пунктир -  $\delta = 0,1$ .

Рис. 7.4. Зависимость осевого значения интенсивности звуковой волны от  $z$  при  $F^2 = 10$  (сплошная кривая) и  $F = 0$  (пунктир);  $\delta = 0,1$ .

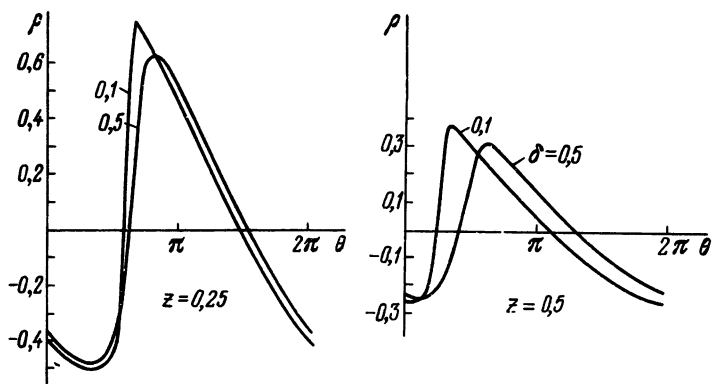


Рис. 7.5. Волновой профиль на оси пучка при различных значениях  $\delta$ .

расширяется. На рис. 7.5 сравниваются волновые профили, соответствующие различным значениям параметра  $\delta$ , на двух расстояниях: в середине прожекторной зоны ( $z = 0,25$ ), где ширина фронта минимальна, и в конце прожекторной зоны ( $z = 0,5$ ), когда фронт уже заметно расширился.

Наряду с такими акустическими характеристиками, как форма волны, пиковое значение возмущения, интенсивность звуковой волны, контролировалась величина  $Q$ , пропорциональная температуре (7.28).

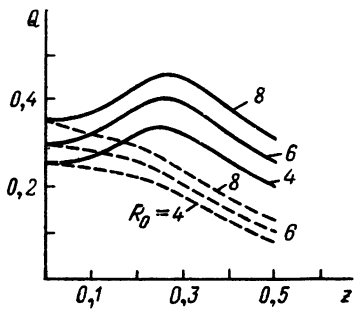


Рис. 7.6

Рис. 7.6. Зависимость  $Q(z)$  на оси при различных значениях  $R_0$ ;  $\delta = 0,1$  - сплошные кривые,  $\delta = 0,5$  - пунктир.

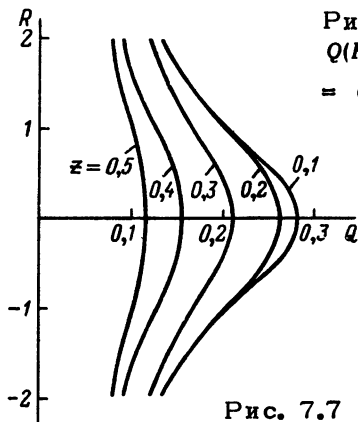


Рис. 7.7

Рис. 7.8 Поперечное распределение  $Q(R)$  при различных  $R_0$ ;  $\delta = 0,1, z = 0,2$ .

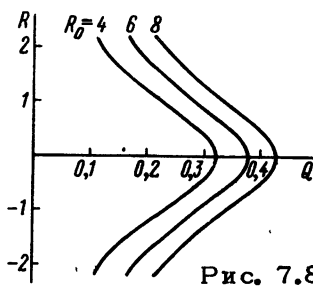


Рис. 7.8

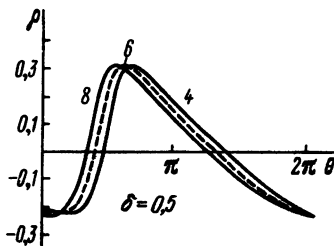
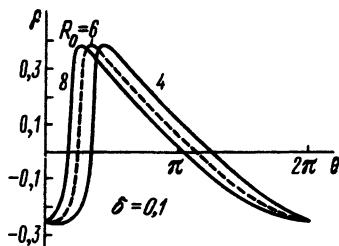


Рис. 7.9. Волновые профили на оси при различных значениях  $R_0$  в среде со слабым затуханием ( $\delta = 0,1$ ) и в сильнопоглощающей среде ( $\delta = 0,5$ );  $z = 0,5$ .

Как было показано выше, температура зависит от радиуса цилиндра  $R_0$ , на котором задано граничное условие. Зависимость величины  $Q$  на оси от продольной координаты при двух значениях параметра  $\delta$  и различных  $R_0$  представлена на рис. 7.6. При  $\delta = 0,5$  функция  $Q(z)$  монотонно уменьшается (пунктир), при  $\delta = 0,1$  она имеет максимумы (сплошные кривые). С увеличением  $R_0$  величина  $Q$  растет.

Динамика изменения поперечного распределения  $Q(R)$  при распространении показана на рис. 7.7. Поперечные распределения  $Q(R)$ , соответствующие различным  $R_0$ , подобны (рис. 7.8). Их подобие сохраняется с увеличением расстояния. Выбор  $R_0$  влияет на величину  $Q$ , что приводит к изменению скорости распространения и фазовому сдвигу волновых профилей (рис. 7.9). Что касается других акустических характеристик, то форма волны, пиковое значение возмущения и интенсивность одинаковы при рассмотренных значениях  $R_0$ .

#### § 4. Дефокусировка звукового пучка за счет акустических течений

Другой механизм самовоздействия звуковой волны связан с возникновением потоков в поле звуковой волны. Распространение волны в вязкой жидкости сопровождается акустическими течениями, поэтому звук распространяется в движущейся среде, что увеличивает скорость его распространения. Изменение скорости звука соответствует пространственному распределению скорости течения, определяемому в конечном счете амплитудным распределением звуковой волны. Такое увеличение скорости распространения должно привести к дополнительной расходимости пучка. Таким образом, самовоздействие волны за счет акустических течений всегда приводит к дефокусировке пучка.

Выведем приближенные уравнения, описывающие этот процесс, и оценим характерные расстояния дефокусировки. Основные уравнения — это уравнения гидродинамики вязкой жидкости (5.1) — (5.4). Подставим скорость  $\vec{v}(v_x, v_y)$  в виде суммы постоянной составляющей  $\vec{v}_0(u_0, w_0)$  и переменной составляющей  $\vec{v}_{ak}(u, w)$ , связанной с акустической волной:

$$v_x = u_0 + u, \quad v_y = w_0 + w. \quad (7.42)$$

При этом предполагается, что  $u_0$  — малая величина, для удобства вычислений положим, что  $u_0/c_0 \sim \mu$ . Из соображений симметрии ясно, что на оси поперечная компонента скорости течения  $w_0 = 0$ , а в приосевой области она мала, для определенности будем считать, что  $w_0 < u_0$ . Стандартная процедура укорочения уравнений гидродинамики в данном случае дает

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial x} + \frac{c_0 \Delta_{\perp} \rho'}{2} + \frac{u_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} - \\ - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial r^3}. \end{aligned} \quad (7.43)$$



Если предположить, что  $u_0$  изменяется медленно, т.е. расстояние, на котором  $u_0$  существенно изменяется, больше длины звуковой волны, то

$$\frac{u_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} > \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \frac{\partial u_0}{\partial x},$$

и последним членом в левой части уравнения (7.43) можно пренебречь. Окончательно уравнение (7.43) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial x} + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho' + \frac{u_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} = \\ = - \frac{b}{2 \rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial r^3}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Уравнение (7.44) описывает форму возмущения в нелинейной диссипативной среде, с учетом дифракционной расходимости и возникновения акустических течений. В уравнение (7.44) входит  $u_0$  — компонента постоянной составляющей скорости, направленная вдоль пучка. Постоянная составляющая скорости  $\vec{v}_0$  описывается уравнениями, которые получаются из уравнений гидродинамики вязкой жидкости после подстановки в них выражений (7.42) и усреднения по периоду звуковой волны. При этом жидкость предполагается несжимаемой. Уравнения для постоянной составляющей можно представить в виде

$$\operatorname{div} \left( \vec{v}_0 + \frac{\rho' \vec{v}_{ak}}{\rho_0} \right) = 0, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} = F_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_{\perp} u_0, \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial r} = F_r - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_{\perp} w_0. \quad (7.47)$$

Здесь  $P$  — давление, связанное с акустическим течением;  $F_x$  и  $F_r$  — продольная и поперечная компоненты силового поля

$$\begin{aligned} -F = \frac{1}{2} \overline{\nabla v_{ak}^2} + \frac{(\gamma - 2)c_0^2}{2\rho_0^2} \overline{\nabla \rho'^2} + \\ + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{1}{\rho_0^2} \overline{\nabla \nabla \rho' \vec{v}_{ak}} + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{1}{\rho_0^2} \overline{\rho' \Delta_{\perp} \vec{v}_{ak}}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

создаваемого звуковой волной. Если ввести скорость течения

$$\vec{U} = \vec{v}_0 + \rho' \vec{v}_{\text{ок}} / \rho_0,$$

то система уравнений (7.45) - (7.47) и выражение для силы (7.48) совпадут с соответствующими формулами работы [61].

Поскольку скорость  $w_0$  мала, уравнение (7.47) позволяет оценить величину

$$F_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (7.49)$$

Вычисление  $F_x$  и  $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}$  в квазиоптическом приближении позволяет записать уравнение (7.46) в виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} = - \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{c_0 \rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right)^2 + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_{\perp} u_0. \quad (7.50)$$

Так как изменения постоянной составляющей вдоль пучка малы, то в выражении (7.50) берется лапласиан по поперечным координатам. В линейном стационарном случае уравнение (7.50) примет вид

$$\eta \Delta_{\perp} u_0 = \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0^2 c_0} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right)^2. \quad (7.51)$$

Таким образом, в этих предположениях самовоздействие звуковых волн через акустические течения описывается уравнениями (7.44) и (7.51), совпадающими с уравнениями (7.17) и (7.21), для теплового самовоздействия звуковой волны в стационарном случае. Так же, как в § 2, рассмотрение стационарной задачи в неограниченной области приводит к бесконечно большой величине  $u_0$ . Поэтому, как приближение к решению стационарной задачи, мы рассмотрим случай, когда  $u_0$  фиксировано на границе некоторого круга. В случае распространения звука в трубе такое условие является естественным. Заметим, что в случае рассматриваемой задачи учет нелинейности также ограничивает рост  $u_0$  [61].

Чтобы оценить характерные размеры дефокусировки за счет потоков, пренебрежем акустической нелинейностью, т.е. будем считать, что возмущение плотности  $\rho'$  мало настолько, что в уравнении (7.44) можно пренебречь нелинейным членом; тем самым пренебрегаем изменением формы волны за счет нелинейности. Уравнение (7.44) в этом случае примет вид

$$-\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r \partial x} + \frac{c_0 \Delta_{\perp} \rho'}{2} + \frac{u_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} = - \frac{b}{2 \rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial r^3}. \quad (7.52)$$

Решение линейных уравнений (7.51) и (7.52) представим в виде гармонической волны с медленно изменяющейся комплексной амплитудой:

$$\rho' = \frac{1}{2} [\rho_1(x, r) e^{i\omega r} + \text{к.с.}] \quad (7.53)$$

Подставляя выражение (7.53) в уравнения (7.51) и (7.52), получим уравнения для медленно меняющейся амплитуды:

$$2ik \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \Delta_{\perp} \rho_1 - \frac{i\omega^3}{\rho_0 c_0^4} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \rho_1 - \frac{2k^2}{c_0} u_0 \rho_1, \quad (7.54)$$

$$\eta \Delta_{\perp} u_0 + \frac{kc_0}{2\rho_0} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) |\rho_1|^2 = 0. \quad (7.55)$$

Представляя комплексную амплитуду  $\rho_1$  в виде

$$\rho_1 = A(x, r) \exp\{-ikS(x, r)\},$$

получим в приближении геометрической оптики систему уравнений

$$2 \frac{\partial S}{\partial x} + \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = -\frac{2}{c_0} u_0, \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r A^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) = -\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^3} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) A^2, \quad (7.57)$$

$$\eta \Delta_{\perp} u_0 + \frac{k^2 c_0}{2\rho_0^2} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) A^2 = 0. \quad (7.58)$$

Уравнения (7.56) – (7.58) с точностью до коэффициентов совпадают с системой уравнений, описывающих тепловое самовоздействие лазерного излучения [54]. Следуя работе [54], введем мощность заключенную в лучевой трубке радиуса  $a$ ,

$$N = \frac{\pi c_0^3}{\rho_0} \int_0^a A^2 r dr,$$

и приведем систему уравнений (7.56) – (7.58) к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{k^2}{2\pi \eta \rho_0 c_0^3} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{N}{r}, \quad (7.59)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \theta \frac{\partial N}{\partial r} = -\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^3} \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) N, \quad (7.60)$$

где  $\theta = \partial S / \partial r$  характеризует наклон луча к оси пучка.

Лучевое уравнение в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{a' \exp(-a'x)}{R_{\Pi} f}, \quad (7.61)$$

где  $a' = \omega^2 \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) / \rho_0 c_0^3$  - коэффициент затухания волны; величина

$$R_{\Pi} = \eta c_0^2 / \pi I_{0 \text{ ср}} \quad (7.62)$$

характеризует силу нелинейной рефракции, обусловленной наличием потоков;  $I_{0 \text{ ср}} = N_0 / \pi r_0^2$  - средняя интенсивность звукового поля в лучевой трубке с начальной мощностью  $N_0$ ;  $f = r/a$  - относительное расстояние луча от оси пучка.

Таким образом, здесь могут быть использованы все результаты, полученные в работе [54].

Представить себе распространение квазиплоской волны с учетом возникающих акустических течений можно следующим образом. На малых расстояниях от границы нелинейной среды пучок практически не расширяется, и лишь искривляется волновой фронт: волна становится сферически, расходящейся с радиусом кривизны волнового фронта

$$R = R_{\Pi} [1 - \exp(-a'l)]^{-1}, \quad (7.63)$$

где  $l$  - пройденное волной расстояние.

По мере распространения волны и уменьшения  $R$  уже нельзя пренебрегать расширением звукового пучка. Приведем здесь выражение для расходимости пучка из-за влияния возникающих звуковых потоков в приближении "толстой линзы" [54], когда характерная длина затухания больше характерной длины дефокусировки:

$$\theta_{\Pi}^2 = a' N_0 / \pi \eta c_0^2. \quad (7.64)$$

Если предположить, что распределение амплитуды однородно по сечению пучка, то величину расхождения можно выразить через безразмерные числа Рейнольдса и Маха:

$$\theta_{\Pi} = \frac{1}{2} a' \lambda M \text{Re} R^2,$$

где  $a' \lambda$  характеризует поглощение звука на длине волны;  $M = u_1 / c_0$ ;  $\text{Re} = u_1 \lambda / \nu$ ;  $R = a / \lambda$  - безразмерная ширина пучка;  $\lambda$  - длина звуковой волны;  $u_1 = v_1 c_0 / \rho_0$  - амплитуда колебательной скорости,  $\nu = \eta / \rho_0$  - кинематическая вязкость. Величина  $\theta_{\Pi}$  практически характеризует предельные с точки зрения дефокусировки свойства среды. Приведем еще величину фокального расстояния  $F_{\Pi}$ :

$$F_{\Pi} = \frac{a}{\theta_{\Pi}} = a c_0 \left( \frac{\pi \eta}{a' N_0} \right)^{1/2}.$$

Сильнее всего пучок дефокусируется на расстоянии порядка  $F_{\Pi}$ . Приведем численные оценки этого расстояния. Если возбуждать в воде квазиплоскую волну интенсивностью  $I_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  Вт/см<sup>2</sup>, что соответствует безразмерным числам  $Re = 10^2$ ,  $M = 4,5 \cdot 10^{-6}$ , то для пучка шириной  $a = 50 \lambda$ .  $F_{\Pi} = 4,4 \cdot 10^4 \lambda$ . С увеличением интенсивности  $F_{\Pi}$  уменьшается. При  $I_0 = 0,3$  Вт/см<sup>2</sup>  $F_{\Pi} = 4,1 \cdot 10^3 \lambda$ . Заметим, что длина прожекторной зоны для такого пучка будет  $4a^2/\lambda = 10^4 \lambda$ . На основе проведенного расчета можно утверждать, что расхождение пучка, обусловленное постоянными потоками, может быть сравнимо или больше дифракционного расхождения.

Сравнение  $F_T$  и  $F_{\Pi}$  для воды показывает, что это величины одного порядка.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ

Данное приложение посвящено вопросу численного решения уравнения акустических пучков конечной амплитуды. Подробно рассматриваются два численных метода: первый, основанный на применении метода Фурье; второй — метод конечных разностей, построенный на основе одной из консервативных схем газовой динамики. Завершается приложение описанием набора стандартных программ на языке ФОРТРАН, предназначенных для численного решения задач, связанных с распространением акустических пучков.

Как мы видели раньше, уравнение нелинейной акустики бывает удобным преобразовывать к различным безразмерным переменным. В данном приложении это уравнение будет взято в достаточно общем, безразмерном виде, позволяющем одновременно охватить встречающиеся на практике случаи, а именно:

$$N_0 \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial z} + B \Delta_{\perp} \rho = -M \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}, \quad (1)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right)$  — оператор Лапласа в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения пучка.

Решение дифференциального уравнения (1) будем искать в области  $G_3 (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < R \leq R_0 + R_L \cdot z, 0 < z \leq Z)$  (рис. 1), где  $Z, R_0 > 0$  и  $R_L$  — вещественные числа, характеризующие границу области, в которой сосредоточен пучок. Параметр  $Z$  ограничивает область распространения пучка по оси  $z$ . Параметры  $R_0$  и  $R_L$  определяют границу области в поперечных координатах.

Потребуем, чтобы решение  $\rho(\theta, R, z)$  удовлетворяло следующим начальным и граничным условиям:

$$1. \rho|_{z=0} = F(\theta, R);$$

2.  $I_{\Gamma} \rho = 0$ , где  $I_{\Gamma}$  — дифференциальный оператор на границе  $\Gamma (R=0, R=R_0 + R_L z)$ . Подробно будет рассмотрена первая краевая задача:  $I_{\Gamma} = \{ (\partial/\partial R)|_{R=0}, E|_{R=R_0+R_L z} \}$ ,  $E$  — единичный оператор}. Мы называем эту краевую задачу пер-

вой, поскольку условие  $(\partial \rho / \partial R)|_{R=0} = 0$  обусловлено центральной симметрией и не является внешним краевым условием. Полученные ниже результаты без труда переносятся на случай второй краевой задачи, когда  $I_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \nu}$  — производная по внешней нормали к  $\Gamma$ ;

3.  $\rho(\theta, R, z)$  — периодическая функция переменного  $\theta$  с периодом  $2\pi$ .

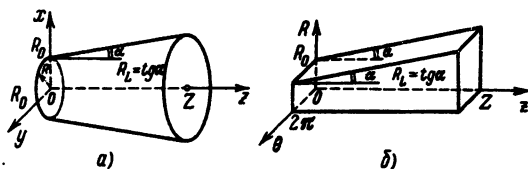


Рис. 1. Область трехмерного евклидова пространства, содержащая акустический пучок (а), и область  $G_3$ , в которой ищется решение дифференциального уравнения (1), - (б).

От начальной функции потребуем выполнения условий:  $F(\theta, R)$  удовлетворяет граничному условию 2 и  $\int_0^{2\pi} F(\theta, R) d\theta = 0$ .

В случае необходимости на эти функции будут наложены также требования гладкости.

Заметим, что все результаты первых двух параграфов приложения справедливы для случая, когда  $\rho(\theta, y, z)$ , определенная в области  $G_3 (0 \leq \theta \leq 2\pi, -(Y + Y_L \cdot z) \leq y \leq (Y + Y_L \cdot z))$ , удовлетворяет уравнению (1) при  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial y^2$  и условиям 1 - 3, в которых  $I_{\Gamma} = \{E \text{ или } \partial / \partial \nu\}$ . Ограничения на функцию  $F(\theta, y)$  - прежние. Ввиду этого, при описании набора стандартных программ в § 3, речь будет идти также и о программах расчета акустических пучков, одномерных по поперечной координате.

## § 1. Метод Фурье решения уравнения нелинейной акустики

Начнем изложение методов численного решения с метода, который состоит в разложении решения в ряд Фурье и последующем численном решении бесконечной системы дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье. По аналогии с линейным случаем мы называем этот метод методом Фурье.

На практике он находит несколько меньшее применение, чем метод конечных разностей, рассмотренный в § 2. Однако из-за наглядности и возможности в ряде случаев дать строгое обоснование сходимости приближенного решения к решению уравнения (1) мы приводим этот метод вначале. Часто в литературе подобные методы называют методами Галеркина - Фурье или спектральными методами. В последнее время они все чаще применяются для решения нелинейных задач волновой физики. Для удобства обоснования будем искать решение в области  $G_3 (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq R \leq R_0, 0 < z \leq Z)$  (т.е. при  $R_L = 0$ ), удовлетворяющее по  $R$  однородному граничному условию первого рода.

Введем следующие определения. Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - комплексная функция  $n$  переменных, определенная в области  $G_n (0 \leq x_i \leq a_i, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$ . Будем говорить, что эта функция принадлежит классу  $H^{a_1, a_2, \dots, a_n(c)}$ , если все производные вида

$$\frac{\partial^{\nu} f}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}}$$

( $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_n, a_i, \nu_i$  - целые,  $0 \leq \nu_i \leq a_i, i = 1, 2, \dots, n$ )

непрерывны в  $G_n$  и ограничены по модулю константой  $c$ . Подмножество функ-

ний из класса  $H^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c)$ , периодических по переменной  $x_1$  с периодом  $2\pi$ , обозначим через  $H^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c)$ .

Разложим функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в ряд Фурье по переменной  $x_1$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x_2, \dots, x_n) e^{\frac{2\pi i m x_1}{a_1}}$$

$$f_m(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_1} \int_0^{a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-\frac{2\pi i m x_1}{a_1}} dx_1,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Классом  $E^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c)$  ( $a_1 \geq 0$ ;  $a_2, \dots, a_n \geq 0$  - целые) будем называть множество функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенных в  $G_n$ , при  $a_1 = 2\pi$ , у которых

$f_m(x_2, \dots, x_n) \in H^{a_2, \dots, a_n}(c_1(m))$  в  $G_{n-1}$  ( $0 < x_i < a_i$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = 2, \dots$ , и константы  $c_1(m)$  удовлетворяют неравенствам  $c_1(m) < c/\bar{m}^{a_1}$  для всех  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Здесь и в дальнейшем.

$$\bar{m} = \begin{cases} |m| & \text{при } m \neq 0, \\ 1 & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

Справедливы следующие леммы, которые доказываются точно так же, как аналогичные леммы в работе [62].

### Лемма 1.

Пусть  $f \in H^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c)$  в  $G_n$ , тогда

$$f \in E^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c).$$

### Лемма 2.

Пусть  $f \in E^{a_1, a_2, \dots, a_n}(c)$  в  $G_n$ , где  $a_1 \geq 2$ ,  $a_i \geq 0$  - целые,  $i = 2, \dots, n$ , тогда

$$f \in \tilde{H}^{\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n}(AC),$$

где

$$\bar{a}_1 = \begin{cases} a_1 - 2, & \text{если } a_1 \text{ - целое,} \\ a_1 - 1, & \text{если } a_1 \text{ - нецелое,} \end{cases}$$

и  $A$  - константа, определяемая параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Мы будем рассматривать функции  $f(\theta, R, z)$  и  $\phi(\theta, R)$ , определенные в областях  $G_3$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq R \leq R_0$ ,  $0 \leq z \leq Z$ ) и  $G_2$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq R \leq R_0$ ), принадлежащие классам  $\tilde{H}^{a_1, a_2, a_3}$ ,  $E^{a_1, a_2, a_3}$  и  $\tilde{H}^{a_1, a_2}$ ,  $E^{a_1, a_2}$  соответственно.



Для функций  $\phi(\theta, R)$  и  $f(\theta, R, z)$  при фиксированном  $z$  введем нормы

$$\|f\|_{L_2} = \left( \int_0^{R_0} |f|^2 R dR \right)^{1/2}, \quad \|f\|_3 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|_{L_2}^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Последнюю норму будем называть энергетической нормой, так как ее квадрат имеет физический смысл среднего за период потока энергии волны.

Предположим, что начальная функция  $F(\theta, R)$  - достаточно гладкая в  $G_2$ , а именно принадлежит классу  $\tilde{H}^{5,2}(M_1)$ , и что существует единственное решение задачи  $\rho(\theta, R, z)$ , принадлежащее классу  $\tilde{H}^{5,2,1}(M_2)$ .

Рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$B \Delta_{\perp} \rho_0 = 0, \quad \rho_0|_{z=0} = 0, \quad (\partial \rho_0 / \partial R)|_{R=0} = 0, \quad \rho_0|_{R=R_0} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial z} + \frac{iB}{\pi} \Delta_{\perp} \rho_m + M m^2 \rho_m = i m N_0 [\rho^2]_m, \quad (2)$$

$$\rho_m|_{z=0} = F_m(R), \quad (\partial \rho_m / \partial R)|_{R=0} = 0, \quad \rho_m|_{R=R_0} = 0,$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $F_m(R)$  - коэффициент Фурье функции  $F(\theta, R)$  и

$$[\rho^2]_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \rho_{\nu} \cdot \rho_{m-\nu}.$$

Справедлива следующая лемма.

### Лемма 3.

Пусть  $F(\theta, R) \in \tilde{H}^{a_1, a_2}(c)$  и  $\rho(\theta, R, z) \in \tilde{H}^{a_1, a_2, a_3}(c_1)$  ( $a_1 \geq 5$ ,  $a_2 \geq 2$ ,  $a_3 \geq 1$ ). Тогда коэффициенты Фурье  $\rho_m(R, z)$  функции  $\rho$  удовлетворяют системе уравнений (2),

Доказательство. Согласно лемме 1  $\rho(\theta, R, z) \in E^{a_1, a_2, a_3}(c_1)$ .

Подставив ряд Фурье функции  $\rho(\theta, R, z)$  в уравнение (1), усредним это уравнение на отрезке  $[0, 2\pi]$  с весом  $e^{-im\theta}$  ( $m = 0, \pm 1$ ). Почленное дифференцирование и интегрирование рядов справедливо в силу выбора параметра  $a_1$  ( $a_1 \geq 5$ ). Получим дифференциальные уравнения системы (2). Так как  $\rho_m(R, z) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, R, z) e^{-im\theta} d\theta, \quad \text{то выполнение граничных и начальных условий}$$

в (2) следует из непрерывности функции  $\rho$  и ее производной в  $G_2$ . Лемма доказана.

Используя лемму 2, можно сделать также следующее заключение.

### Лемма 4.

Пусть последовательность  $\rho_m(R, z)$  принадлежит в  $G_2$  классу  $H^{a_2, a_3}(c_1(m))$ , где  $c_1(m) \leq c/m^{a_1}$ ,  $a_1 \geq 5$ ,  $a_2 \geq 2$ ,  $a_3 \geq 1$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$ , и удовлетворяет уравнениям (2).

Тогда  $\rho(\theta, R, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m e^{im\theta}$  является решением исходной задачи и принадлежит в  $G_3$  классу  $\tilde{H}^{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3}(AC)$ .

Тем самым утверждения лемм 3 и 4 устанавливают эквивалентность решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному и граничным условиям, и бесконечной системы дифференциальных уравнений (2).

В гл. 2 были получены интегралы движения для уравнения (2). В случае уравнения (1) первый интеграл полностью сохраняет свой вид. Действительно, из утверждения леммы 3 следует, что функция  $\rho_0(R, z) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, R, z) d\theta$  при каждом  $z$  является решением уравнения Лапласа с однородным граничным условием 1-го рода в круге  $G_1^{R_0}$  ( $0 \leq R \leq R_0$ ). Известно, что такая задача имеет единственное решение, равное нулю в  $G_1^{R_0}$ . Из равенства нулю среднего за период значения функции  $\rho(\theta, R, z)$  следует, что условие  $\int_0^{2\pi} F(\theta, R) d\theta = 0$ , является необходимым для существования решения уравнения (1), удовлетворяющего граничным условиям  $(\partial\rho/\partial R)|_{R=0} = 0$ ,  $\rho|_{R=R_0} = 0$  и начальному условию

$$\rho|_{z=0} = F(\theta, R).$$

В случае граничных условий 2-го рода  $(\partial\rho/\partial R)|_{R=0} = 0$ ,  $(\partial\rho/\partial R)|_{R=R_0} = 0$

получаем, что необходимым условием является равенство  $\int_0^{2\pi} F(\theta, R) d\theta = K$ , где  $K$  — константа, не зависящая от  $R$ . При этом решение уравнения (1), удовлетворяющее этим граничным условиям, определено с точностью до произвольной функции  $\eta(z) \in H^1$  в  $G_1$  ( $0 \leq z \leq Z$ ) такой, что  $\eta(z)|_{z=0} = K$ .

Что касается второго интеграла движения, то для уравнения (1) он имеет физический смысл закона диссипации потока энергии акустической волны при ее распространении. Используя наши обозначения, этот закон можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \|\rho\|_3^2 = -2M \left\| \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right\|_3^2.$$

Доказательство этого равенства проводится так же, как и в гл. 2. В случае, когда  $M = 0$ , имеем

$$\|\rho\|_3^2 = \text{const} = \|F\|_3^2;$$

в средах с диссипацией, когда  $M > 0$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \|\rho\|_3^2 < 0,$$

и убывание потока энергии характеризуется параметром  $M$ .

При дальнейшем рассмотрении системы (2) мы будем опускать уравнение для  $\rho_0$ , считая его равным нулю. Преобразуем систему (2), введя функции  $P_m(R, z) = \rho_m(R, z) e^{M_m^2 z}$ ; получим

$$\frac{\partial P_m}{\partial z} + \frac{iB}{m} \Delta_{\perp} P_m = i m N_0 [\rho^2]_m e^{M_m^2 z}, \quad (3)$$

$$P_m|_{z=0} = F_m(R), \quad \frac{\partial P_m}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0, \quad P_m|_{R=R_0} = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Использование функций  $P_m(R, z)$  позволяет выделить в явном виде затухание решения вдоль оси  $z$ , обусловленное диссипацией. Это облегчает численное решение задачи, особенно при больших значениях коэффициента  $M$ .

Перейдем к вопросу численного решения систем (2) и (3). Для этого рассмотрим сеточные области  $G_2^h \{R_k = (k + 0,5)h_R, k = 0, 1, \dots, N_1, h_R = R_0/(N_1 + 0,5)\}$ ,  $z_n = n h_z, n = 0, 1, \dots, N_2; h_z = Z/N_2\}$ ,  $G_1^h \{R_k = (k + 0,5)h_R, k = 0, 1, \dots, N_1\}$  и определенные на них классы функций: комплексные функции  $v_k$  в  $G_1^h$ , удовлетворяющие условию  $v_{N_1} = 0$ , и комплексные вектор-функции  $F_k^n \{f_k^n(m), m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$  в  $G_2^h$ . Каждая компонента вектора  $F_k^n$  удовлетворяет граничному условию  $f_{N_1}^n(m) = 0$ . В пространстве функций  $v_k$  введем скалярное

произведение  $(v_k \cdot u_k) = h_R \sum_{k=0}^{N_1} R_k \cdot v_k \cdot u_k^*$ , определив тем самым норму

$$\|v_k\|_{L_2(h_R)}^2 = h_R \sum_{k=0}^{N_1} R_k \cdot |v_k|^2.$$

В пространстве вектор-функций  $F_k^n$  определим норму на слое  $n$ , которая является дискретным аналогом введенной выше энергетической нормы:

$$\|F_k^n\|_{\mathcal{D}(h)}^2 = \sum_{m=-N}^N \|f_k^n(m)\|_{L_2(h_R)}^2.$$

Дифференциальный оператор  $\Delta_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right)$  приблизим в  $G_1^h$  конечно-разностным оператором

$$\Lambda_k u_k = \frac{1}{h_R R_k} \left( R_{k+0,5} \frac{u_{k+1} - u_k}{h_R} - R_{k-0,5} \frac{u_k - u_{k-1}}{h_R} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$\Lambda_k$  является самосопряженным оператором в евклидовом пространстве  $L_2(h_R)$  сеточных функций  $v_k$ .

Для аппроксимации системы дифференциальных уравнений (2) в  $G_2^h$  будем использовать укороченную конечно-разностную систему

$$\frac{\rho_k^{n+1}(m) - \rho_k^n(m)}{h_z} + \frac{iB}{m} \Lambda_k \rho_k^{n+0,5}(m) = -Mm^2 \rho_k^{n+0,5}(m) + imN_0 [(\rho_k^{n+0,5})^2]_m, \quad (4)$$

$$\rho_k^0(m) = F_k(m), \quad k = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$\rho_{N_1}^n(m) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad n = 0, 1, \dots, N_2,$$

где

$$\rho_k^{n+0,5}(m) = \frac{\rho_k^{n+1}(m) + \rho_k^n(m)}{2},$$

$$[(\rho_k^{n+0,5})^2]_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{\rho}_k^{n+0,5}(\nu) \cdot \bar{\rho}_k^{n+0,5}(m-\nu),$$

$$\bar{\rho}_k^{n+0,5}(j) = \begin{cases} \rho_k^{n+0,5}(j) & \text{при } |j| \leq N, \\ 0 & \text{при } |j| > N, \end{cases}$$

а для аппроксимации системы (3) — конечно-разностную систему

$$\frac{P_k^{n+1}(m) - P_k^n(m)}{h_z} + \frac{iB}{m} \Lambda_k P_k^{n+0,5}(m) = imN_0 \times \\ \times [(P_k^{n+0,5}(m) \cdot q^{n+0,5}(m))^2]_m \cdot q^{-(n+0,5)}(m), \quad (5)$$

$$P_k^0(m) = F_k(m), \quad k = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$P_{N_1}^n(m) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \quad n = 0, 1, \dots, N_2,$$

где  $q(m) = e^{-Mm^2 h_z}$ , а индекс  $\nu$  в выражении  $q^{(\nu)}$  означает возведение числа  $q$  в степень  $\nu$ .

Примененные разностные схемы — это двуслойные симметричные схемы, особенностью которых является их полная консервативность. Имеется в виду, что решения систем (4) и (5) в точности удовлетворяют дискретному аналогу закона диссипации потока энергии, записанному в пространстве вектор-функций  $F_k^n$ .

Лемма 5.

Пусть  $\rho_k^n(m)$  и  $P_k^n(m)$  — решения систем (4) и (5) соответственно, тогда справедливы равенства

$$\|\rho_k^{n+1}\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 = \|\rho_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 - 2Mh_z \sum_{m=-N}^N m^2 \|\rho_k^{n+0,5}(m)\|_{L_2(h_R)}^2,$$

$$\sum_{m=-N}^N q^{(2n+1)}(m) \|P_k^{n+1}(m)\|_{L_2(h_R)}^2 =$$

$$= \sum_{m=-N}^N q^{(2n+1)}(m) \|P_k^n(m)\|_{L_2(h_R)}^2.$$

Доказательство проводится с помощью скалярного умножения каждого уравнения, соответственно, на  $\rho_k^{n+0,5}(m)$  или на  $P_k^{n+0,5}(m)$  и последующего суммирования всех уравнений по  $m$  от  $-N$  до  $N$ . При этом члены с оператором  $\Lambda_k$ , в силу разностного аналога формулы Грина, а также нелинейные члены в уравнениях (4) и (5) дают нулевой вклад.

Что касается существования и единственности решений нелинейных систем (4) и (5), то их можно доказать, используя метод сжатых отображений. Если предположить, что на  $n$ -м слое решение  $\rho_k^n(m)$  ( $m = \pm 1, \dots, \pm N$ ) известно, то при достаточно малых  $h_z$  ( $h_z \leq c \cdot h_R / N_0 \cdot N^{3/2} \cdot \|\rho_k^0\|_{\mathfrak{D}(h)}$ )  $\rho_k^{n+1}(m)$  существует и единственно, и может быть получено методом простой итерации по формулам

$$[\rho_k^{n+1}(m)]^{S+1} = U U_1 \rho_k^n(m) + i m N_0 h_z U \left[ \frac{\rho_k^n + [\rho_k^{n+1}]^S}{2} \right]_m^2,$$

$$k = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad \rho_{N_1}^{n+1}(m) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N,$$

$$S = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь операторы  $U$  и  $U_1$  имеют вид

$$U = \left( E + \frac{Mm^2}{2} h_z + \frac{iB}{2m} h_z \Lambda_k \right)^{-1}, \quad U_1 = E - \frac{Mm^2}{2} h_z - \frac{iB}{2m} h_z \Lambda_k,$$

а в качестве начального приближения удобно взять значение решения на  $n$ -м слое:

$$[\rho_k^{n+1}(m)]^0 = \rho_k^n(m), \quad k = 0, 1, \dots, N_1, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

Аналогичные результаты при том же ограничении на  $h_z$  — шаг разностной схемы по оси  $z$ , имеют место и для системы (5).

Условие, наложенное нами на малость шага  $h_z$ , является несколько избыточным и объясняется, в частности, тем, что мы рассматриваем пространства функций с энергетической нормой. Естественным условием на  $h_z$  является ус-

ловие Р. Куранта [63]  $h_z \leq c h_0 / N_0 \max |\rho(\theta, R, z)|$ , которое означает, что область зависимости решения разностного уравнения, аппроксимирующего (1), от начального условия, должна включать в себя область зависимости решения этого дифференциального уравнения. В нашем случае  $h_0 \sim 1/N$ , и это условие принимает вид  $h_z \leq c / NN_0 \max |\rho(\theta, R, z)|$ . При численном решении систем уравнений (4) и (5) шаг разностной схемы по  $z$  выбирался с учетом именно этого условия, чего было вполне достаточно для устойчивости схемы.

Используя лемму 5, можно обосновать сходимость решения конечно-разностной системы (4) к решению исходной задачи в пространстве дискретных функций с энергетической нормой. Под сходимостью последовательности вектор-функций  $F_k^n$  к функции  $v(\theta, R, z)$  в энергетической норме мы понимаем

стремление к нулю выражения  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \|\bar{f}_k^n(m) - [v_m]_k^n\|_{L_2}^2(h_R)$ .

### Теорема 1.

Пусть существует решение уравнения (1) из класса  $\tilde{H}^{a_1, a_2, a_3}$  ( $a_1 \geq 5$ ,  $a_2 \geq 4$ ,  $a_3 \geq 3$ ), удовлетворяющее начальному и граничным условиям, тогда решение системы (4) сходится к нему в энергетической норме в области  $G_2^h \times \times [0 \leq \theta \leq 2\pi]$  со скоростью

$$O\left((h_z^2 + h_R^2) \ln \frac{1}{h_R} + \frac{1}{N^{2a_1-3}}\right)^{1/2}.$$

Приведем схему доказательства этой теоремы. В силу леммы 3 коэффициенты Фурье решения уравнения (1) удовлетворяют системе (2). Обозначив их через  $u_m(R, z)$  и оценивая погрешность аппроксимации дифференциальных операторов разностными, запишем разностные уравнения для  $u_m(R, z)$  в точках  $\{R = R_k, z = h_z \cdot (n + 0,5)\}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{u_k^{n+1}(m) - u_k^n(m)}{h_z} + \frac{iB}{m} \Lambda_k u_k^{n+0,5}(m) = \\ & = -Mm^2 u_k^{n+0,5}(m) + imN_0 [(u_k^{n+0,5})^2]_m + \Psi_k^n(m), \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$u_{N_1}^{n+1}(m) = 0, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N,$$

где для функций  $\Psi_k^n(m)$  справедлива оценка

$$\Psi_k^n(m) = O\left(\frac{h_z^2 + h_R^2}{R_k \bar{m}^{\alpha_1 - 2}} + \frac{\bar{m}}{N^{\alpha_1 - 0,5} (N+1 - |m|)^{\alpha_1 - 0,5}}\right).$$

Погрешность приближенного решения  $\delta_k^n(m) = \rho_k^n(m) - u_k^n(m)$  удовлетворяет системе разностных уравнений:

$$\frac{\delta_k^{n+1}(m) - \delta_k^n(m)}{h_z} + \frac{iB}{m} \Lambda_k \delta_k^{n+0,5}(m) = -M m^2 \delta_k^{n+0,5}(m) +$$

$$+ iN_0 m \{[(\rho_k^{n+0,5})^2]_m - [(u_k^{n+0,5})^2]_m\} - \Psi_k^n(m),$$

$\delta_{N_1}^{n+1}(m) = 0$  при тех же значениях  $m$  и  $k$ . Поступим далее так же, как при выводе закона диссипации потока энергии — скалярно умножим уравнения на  $\delta_k^{n+0,5}(m)$  и сложим все уравнения по  $m$  от  $-N$  до  $N$ . При этом ряд членов в полученной сумме обратится в нуль.

Применяя неравенство Коши — Буняковского, приходим к следующему неравенству:

$$\|\delta_k^{n+1}\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 \leq \|\delta_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 + c_1 h_z (\|\delta_k^{n+1}\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 +$$

$$+ \|\delta_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2) + c_2 h_z \|\Psi_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2.$$

Полагая  $c_1 h_z < 1$  и используя общеизвестную методику из теории разностных схем, получим

$$\|\delta_k^{n+1}\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 \leq (1 + c_3 h_z) \|\delta_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 + c_4 h_z \|\Psi_k^n\|_{\mathfrak{D}(h)}^2$$

и

$$\|\delta_k^{n+1}\|_{\mathfrak{D}(h)}^2 \leq c_5 [(\tilde{h}_z^2 + h_R^2)^2 \ln(1/h_R) + 1/N^{2\alpha_1 - 3}].$$

Коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_5$  зависят от параметров задачи и не зависят от  $N, h_R$  и  $h_z$ . Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 1 используется факт существования решения уравнения (1) и его принадлежность классу  $\tilde{H}^{a_1, a_2, a_3}(c)$ , следовательно, и классу  $E^{a_1, a_2, a_3}(c)$ . Чтобы доказать сходимость в случае уравнений (3) и (5), наложим на функции  $P_m(R, z) = \rho_m(R, z) e^{Mm^2}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) дополнительное ограничение.

#### Условие А.

Пусть для всех  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  имеет место равенство  $P_m(R, z) = \frac{\phi_m(R, z)}{\bar{m}^{\alpha_1}} e^{\beta m x}$

где  $\phi_m(R, z) \in H^{a_1, a_2, a_3}(c_1)$ ,  $c_1$  и  $\beta$  константы, зависящие от  $c, N_0, B, M, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ;  $\beta = 0$  при  $M = 0$ .

Справедлива следующая теорема.

## Теорема 2.

Пусть  $\rho(\theta, R, z)$  – решение исходной задачи из класса  $\tilde{H}^{a_1, a_2, a_3}$  ( $a_1 \geq 5$ ,  $a_2 \geq 4$ ,  $a_3 \geq 3$ ), удовлетворяющее условию А,  $P_k^n(m)$  – решение системы (5),  $q^{(n)}(m) = e^{-M^2 m^2}$ . Тогда  $\tilde{\rho}^n(m) = P_k^n(m) q^{(n)}(m)$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ ) сходится к  $\rho(\theta, R, z)$  в энергетической норме в области  $G_2^{h_x} [0 \leq \theta \leq 2\pi]$  со скоростью  $O((h_x^2 + h_R^2)^2 \ln(1/h_R) + 1/N^{2a_1-3})$ .

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы 1.

В заключение параграфа скажем несколько слов об особенностях численной реализации рассматриваемого нами метода. При переходе от функции к ее образу Фурье и наоборот ( $f \leftrightarrow f_m$ ) целесообразно применять метод быстрого дискретного преобразования Фурье FFT [64], который осуществляет прямое и обратное дискретные преобразования Фурье за  $O(N \log N)$  арифметических операций. Вычисление нелинейного члена в правой части уравнений (4) и (5) осуществлялось с помощью этого алгоритма по схеме

$$f_m \xrightarrow{\text{FFT}} f \xrightarrow{\cdot} f^2 \xrightarrow{\text{FFT}} [f^2]_m.$$

Для численного решения нелинейных систем разностных уравнений применялся метод простой итерации с начальным приближением, равным значению решения на предыдущем слое. При каждой итерации линейные разностные уравнения решались с помощью метода разностной матричной прогонки [65].

Шаг интегрирования по оси  $z - h_z$  выбирался в случае системы (5) из условия  $h_z \leq c(1/NN_0 \max|\rho|)$ , а в случае системы (4) – из условия  $h_z \leq \min\{c/NN_0 \max|\rho|, c_1 N^2 M\}$ , что объясняется, во-первых, ограничениями на устойчивость схемы, а, во-вторых, необходимостью брать достаточно мелкий шаг для хорошей аппроксимации диссипативных членов в системе (4). При численном решении исходной задачи в диссипативных средах с  $M \geq c_2 N_0 \max|\rho|/N$  оказалось целесообразным использовать систему (5), в слабодиссипативной и идеальной средах – систему (4), ввиду ее большей простоты.

Практические расчеты показали, что в тех случаях, когда коэффициент диссипации превосходит некоторую величину  $M_0$  порядка  $N_0 \max|\rho|/N$ , метод Фурье дает результаты, хорошо описывающие физическую картину и совпадающие с результатами других методов. Однако при  $M < M_0$  он становится неустойчивым: на графиках, изображающих форму волны, появляются паразитические биения, которые в дальнейшем развиваются и приводят к картине, не имеющей ничего общего с точным решением.

Чтобы с помощью метода Фурье решить широкий класс задач о распространении акустических пучков в средах с малой вязкостью и в идеальных средах, необходимо ввести искусственную вязкость, по порядку равную  $M_0$ . В формуле  $M' = c_3 \frac{N_0}{N} \max|\rho|$  константу  $c_3$  можно выбрать экспериментальным путем. В частности, для задачи распространения гармонического, первоначально плоского акустического пучка с гауссовым начальным распределением амплитуды эта



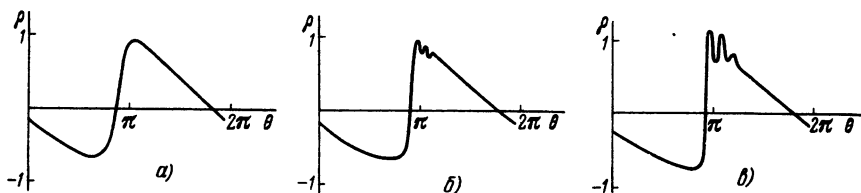


Рис. 2. Форма волны на оси пучка ( $R = 0$ ) при  $z = 0,16$  для нелинейности  $N_0 = 5$ , гауссова начального распределения амплитуды и трех значений искусственной вязкости, определяемой коэффициентом  $c_3 = 1$  (а),  $0,5$  (б),  $0,4$  (в).

константа выбиралась из интервала  $(0,7; 1)$ . Такой выбор искусственной вязкости, с одной стороны, делает решение достаточно гладким и позволяет эффективно применять консервативные разностные схемы 2-го порядка точности, а, с другой, сохраняет основные качественные свойства решения: поведение пикового значения амплитуды, дифракционную расходимость пучка, образование и распространение ударного фронта. Ширина ударного фронта  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , где числа  $\theta_2$  и  $\theta_1$  определяются из условий  $\max_{\theta} \rho(\theta, R, z) = \rho(\theta_2, R, z)$  и

$\rho(\theta_1, R, z) = 0$ , не превосходит в этом случае  $2-3h_{\theta}(h_{\theta} = \pi/N)$ .

На рис. 2 показана форма возмущения при  $N_0 = 5$ ,  $F(\theta, R) = -\sin \theta e^{-R^2}$  в точке  $z = 0,16$  на оси пучка ( $R = 0$ ) для трех значений искусственной вязкости, характеризуемых коэффициентом  $c_3$ , равным соответственно  $1, 0,5, 0,4$ . Этот рисунок демонстрирует развитие паразитических биений при уменьшении искусственной вязкости.

## § 2. Применение конечно-разностных схем газовой динамики для решения уравнения нелинейной акустики.

### Описание алгоритма

Пусть, как и раньше, в области  $G_3$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq R \leq R_0$ ,  $0 \leq z \leq Z$ ) задано уравнение нелинейной акустики (1). Положим сначала  $M = 0$ . Решение полученного уравнения будет зависеть от двух коэффициентов  $N_0$  и  $B$ . Как было показано в гл. 2, при  $N_0 \rightarrow 0$  и конечном  $B$  это уравнение переходит в шредингеровское приближение для уравнения Гельмгольца, описывающего линейное распространение волнового пучка. Если же величина  $B$  стремится к нулю, то мы приходим к квазилинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} - 2N_0 \rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0, \quad (6)$$

где  $\rho$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющая при каждом значении  $R$  из  $[0, R_0]$  начальному условию

$$\rho|_{z=0} = F(\theta, R). \quad (7)$$

Характерным свойством уравнения (6) является возможность существования разрывных решений, которые в газовой динамике и акустике называют ударными волнами. Этот вопрос подробно исследован в литературе (например, [66, 67]). Что касается численных методов решения уравнения (6), то можно сказать следующее. До тех пор, пока решение остается гладкой функцией, для его нахождения можно применить достаточно широкий класс обычно используемых конечно-разностных схем. В тех же случаях, когда требуется вычислить разрывное решение, необходимо применять специальные методы, учитывающие свойства решения на разрыве. Один из способов построения таких методов — сделать решение гладкой функцией посредством введения искусственной вязкости. Будучи достаточно малой, она сохраняет качественные свойства решения, делая его гладкой функцией. Для численного решения такого уравнения можно применить конечно-разностные схемы общего вида. Заметим кстати, что именно так мы поступали в § 1. Метод введения искусственной вязкости обладает рядом недостатков, одним из которых является дополнительное размазывание ударного фронта.

Из способов численного решения уравнения (6), учитывающих поведение решения в окрестности разрыва, наиболее употребительными являются метод характеристик и метод дивергентных конечно-разностных схем. В основу построения дивергентных схем положены свойства решения, вытекающие из интегрального закона сохранения.

В настоящем параграфе мы рассмотрим схемы такого вида и применим их для численного решения уравнения нелинейной акустики пучков (1). Более подробно с вопросом численного решения подобных задач можно ознакомиться в [66, 67].

Предположим сначала, что задача (6), (7) имеет гладкое решение  $\rho(\theta, z)$ . Так как  $F(\theta, R)$ , которую мы будем обозначать просто  $F(\theta)$ , и  $\rho(\theta, z)$  — периодические функции  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , то можно рассматривать задачу в области  $G_2$  ( $-\infty < \theta < \infty$ ,  $0 \leq z < Z$ ), периодически продолжив решение и начальную функцию. Переменную  $R$  из  $[0, R_0]$  можно при этом считать параметром.

Введем линии

$$d\theta/dz = -2N_0\rho, \quad (8)$$

которые будем называть характеристиками уравнения (6). Вдоль каждой характеристики  $\theta = \theta(z)$  решение  $\rho(\theta, z)$  можно считать функцией только от  $z$ :  $\rho(\theta(z), z)$ . Тогда

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - 2N_0\rho \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = 0$$

и вдоль характеристик решение постоянно. Но в силу (8) из постоянства решения следует, что характеристики — прямые линии  $\theta = -2N_0\rho z + \theta_0$ , где  $\theta_0$  — абсцисса точки  $(0, \theta_0)$ , из которой выходит характеристика,  $-2N_0\rho$  — угловой коэффициент ее наклона к оси  $z$ , а  $\rho$  постоянно и равно  $F(\theta_0)$ . Таким образом, заданием начальной функции  $F(\theta)$  определяется картина характеристик и значения решения, которые без изменения переносятся вдоль характеристик в область  $G_2$ .

В случае существования гладкого решения  $\rho(\theta, z)$  характеристики не пересекаются, иначе каждая характеристика приносит в точку пересечения свое значение, и решение будет разрывной функцией.

Если функция  $F(\theta)$  монотонно убывает с ростом  $\theta$ , то угол, образуемый характеристиками с осью  $z$ , увеличивается и характеристики расходятся. Но

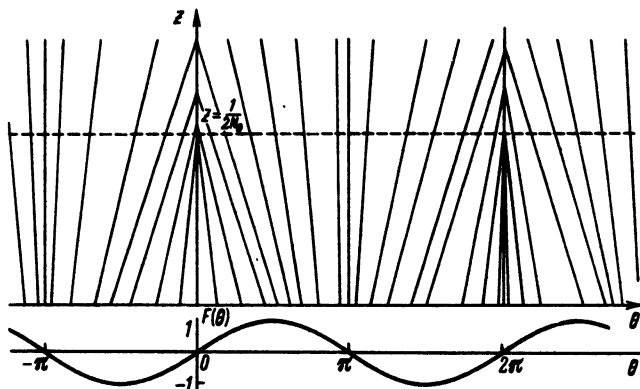


Рис. 3. Поле характеристик уравнения (6) для начальной функции  $F(\theta) = \sin \theta$ .

при возрастании  $F(\theta)$  характеристики начинают сходиться и пересекаться независимо от того, что начальная функция  $F(\theta)$  — гладкая. Мы приходим к разрывному решению.

На рис. 3 построены характеристики уравнения (6) для начальной функции  $F(\theta) = \sin \theta$ , которые пересекаются на прямых  $\theta = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ), начиная с расстояний  $z = 1/2 N_0$ .

Пусть, как и раньше,  $\rho(\theta, z)$  — непрерывно-дифференцируемое решение уравнения (6). Проинтегрируем это уравнение по некоторой области  $G_2^* \in G_2$  с границей  $\Gamma^*$ . Применяя интегральную формулу Грина, получим

$$\int_{G_2^*} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} - 2N_0 \rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) d\theta dz = - \oint_{\Gamma^*} \rho d\theta + N_0 \rho^2 dz,$$

откуда следует равенство

$$\oint_{\Gamma^*} \rho d\theta + N_0 \rho^2 dz = 0. \quad (9)$$

Таким образом, непрерывно-дифференцируемое решение уравнения (6) удовлетворяет интегральному равенству (9). Расширим множество решений дифференциального уравнения (6) и будем называть его обобщенным решением кусочно-дифференцируемую функцию, удовлетворяющую при произвольном  $\Gamma^* \in G_2$  равенству (9), которое имеет смысл интегрального закона сохранения. Если умножить уравнение (6) на  $\rho^\sigma$  ( $\sigma$  — произвольное вещественное число), можно получить другие законы сохранения. На линии разрыва обобщенные решения, соответствующие различным законам сохранения, ведут себя по-разному. Заметим, что для однозначного задания решения, кроме интегрального тождества (9), необходимо дополнительно выполнение некоторого условия на границе типа закона возрастания энтропии.

Если на некоторой линии  $\theta = \theta(z)$  обобщенное решение имеет разрыв, оставаясь непрерывным справа и слева от нее, то из формулы (9) следует равенство

$$d\theta/dz = -N_0(\rho_{\text{л}} + \rho_{\text{п}}). \quad (10)$$

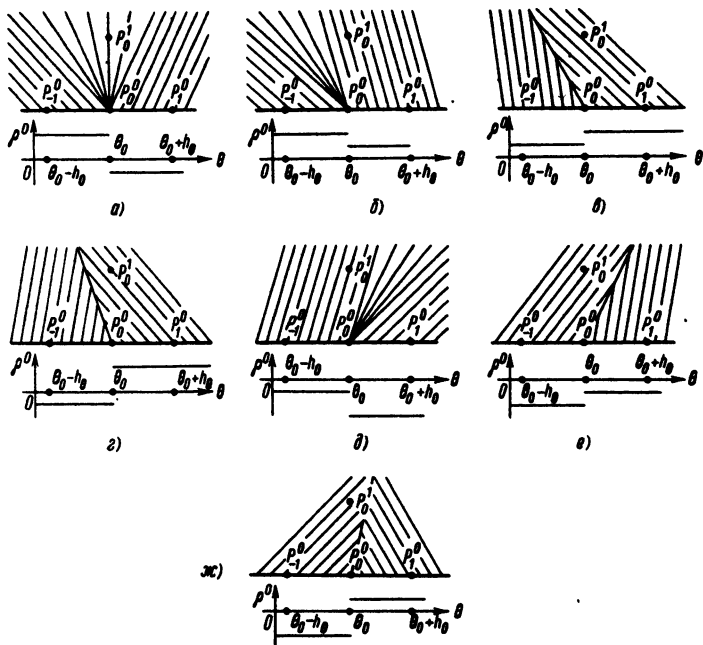


Рис. 4. Поле характеристик уравнения (6) в окрестности точки разрыва начальной функции: а)  $\rho_1^0 \leq 0 \leq \rho_0^0$ ; б) - в)  $\rho_1^0 > 0, \rho_1^0 + \rho_0^0 \geq 0$ ; д) - ж)  $\rho_1^0 < 0, \rho_1^0 + \rho_0^0 < 0$ .

В случае другого закона сохранения наклон линии разрыва был бы иным. Чтобы выделить обобщенное решение дифференциального уравнения, правильно описывающее протекание реальных процессов, необходимо исходить из физических законов сохранения, следствием которых является это уравнение.

Опишем схему распада разрыва из [68]. Для этого рассмотрим (рис. 4) поле характеристик в окрестности точек  $P_0^0\{\theta_0, 0\}$ ,  $P_1^0\{\theta_0 - h_\theta, 0\}$ ,  $P_1^0\{\theta_0 + h_\theta, 0\}$ ,  $P_0^1\{\theta_0, h_z\}$ , где  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $h_\theta$  и  $h_z$  — малые числа, удовлетворяющие условию Р. Куранта:  $h_z \leq h_\theta / 2N_0 \max |\rho|$ . Это условие гарантирует, что в точку  $P_0^1$  обязательно попадут характеристики, исходящие из точек отрезка  $[\theta_0 - h_\theta, \theta_0 + h_\theta]$  при  $z = 0$ .

Пусть начальная функция  $\rho|_{z=0}$ , которую мы обозначим  $\rho^0(\theta)$ , терпит разрыв в точке  $P^0$  и принимает на отрезках  $[\theta_0 - h_\theta, \theta_0]$  и  $(\theta_0, \theta_0 + h_\theta]$  постоянные значения  $\rho_1^0$  и  $\rho_0^0$  соответственно. Предположим сначала, что

$$\rho_1^0 \leq 0 \leq \rho_0^0. \quad (11)$$

Тогда, как видно из рис. 4, а, характеристики будут расходиться, и мы имеем волну разрежения. В точку  $P_0^1$  будет принесено характеристиками среднее

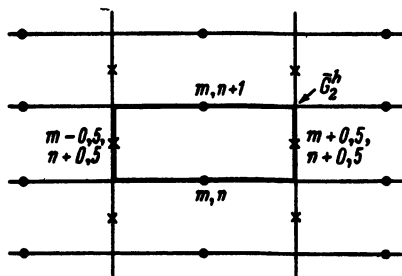


Рис. 5. Разностная сетка  $G_2^h$ : точками отмечены узлы сетки  $G_2^{h,1}(\theta_m, z_n)$ , крестиками — узлы сетки  $G_2^{h,2}(\theta_{m+0,5}, z_{n+0,5})$ . Элементарный прямоугольник  $\bar{G}_2^h$  со сторонами  $h_z$  и  $h_\theta$ .

значение  $\rho_{\text{ср}}^0 = 0$ . Если значения  $\rho_1^0$  и  $\rho_{-1}^0$  не удовлетворяют условию (11), то характеристики либо также расходятся, либо пересекаются друг с другом и образуется ударная волна. Ее наклон будет определяться формулой (10).

В обоих случаях, когда  $\rho_1^0 + \rho_{-1}^0 \geq 0$ , в точку  $P_0^1$  характеристики приносят значение  $\rho_1^0$  (рис. 4, б-г); если же  $\rho_1^0 + \rho_{-1}^0 < 0$ , то в эту точку попадает значение  $\rho_{-1}^0$  (рис. 4, д-ж).

Рассмотрим сетку  $G_2^h$ , которая является суммой двух сеток (рис. 5):

$$G_2^{h,1}(\theta_m, z_n, m=0, \pm 1, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots, N_2),$$

$$G_2^{h,2}(\theta_{m+0,5}, z_{n+0,5}, \quad m=0, \pm 1, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots, N_2-1),$$

$$(\theta_p = p \cdot h_\theta, \quad z_q = q \cdot h_z, \quad h_\theta = 2\pi/N, \quad h_z = Z/N_2).$$

Определим в  $G_2^h$  сеточные функции  $\rho_m^n$  в  $G_2^{h,1}$  и  $\rho_{m+0,5}^{n+0,5}$  в  $G_2^{h,2}$  которые будем предполагать периодическими с периодом  $N$ :  $\rho_p^q = \rho_{p+N}^q$ . Пусть  $\bar{G}_2^h$  — элементарный прямоугольник с центром в точке  $\{\theta_m, z_{n+0,5}\}$ , со сторонами длины  $h_\theta$  и  $h_z$ , параллельными осями  $\theta$  и  $z$  соответственно, и границей  $\bar{\Gamma}_h$ . Тогда интегральный закон сохранения (9) для  $\bar{\Gamma}_h$  после замены операторов интегрирования квадратурной формулой средних прямоугольников переходит в разностную формулу

$$\frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{h_z} - N_0 \frac{(\rho_{m+0,5}^{n+0,5})^2 - (\rho_{m-0,5}^{n+0,5})^2}{h_\theta} = 0. \quad (12)$$

Если рассмотреть произвольную область в  $G_2^h$ , состоящую из прилегающих друг к другу элементарных прямоугольников, (рис. 6), и просуммировать равенства (9) для каждого из этих прямоугольников, то из конечно-разностного равенства (12) следует выполнение дискретного аналога интегрального

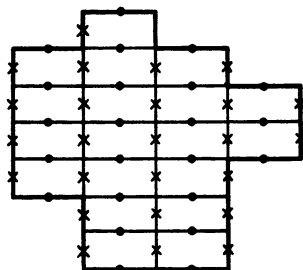


Рис. 6. Область в  $G_2^h$ , состоящая из прилегающих друг к другу элементарных прямоугольников.

закона сохранения для этой области. Другими словами, разностная схема (12) консервативна, или, как еще говорят, является дивергентной схемой.

Чтобы использовать эту разностную схему для нахождения решения на слое  $z_{n+1}$  при известных  $\rho_m^n$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ), определим  $\rho_{m+0,5}^{n+0,5}$  в соответствии с проведенным выше анализом распространения характеристик при разрыве начальной функции. А именно, если  $\rho_{m+1}^n \leq 0 \leq \rho_m^n$ , то будем брать  $\rho_{m+0,5}^{n+0,5} = 0$ , в противном случае при  $\rho_m^n + \rho_{m+1}^n \leq 0$  положим  $\rho_{m+0,5}^{n+0,5} = \rho_m^n$ , а при  $\rho_m^n + \rho_{m+1}^n > 0$  положим  $\rho_{m+0,5}^{n+0,5} = \rho_{m+1}^n$ .

Такая консервативная конечно-разностная схема, отвечающая интегральному закону сохранения (9), которую мы запишем в виде

$$L_m^n(\rho_m^n) = \frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{h_z} - N_0 \frac{(\bar{\rho}_{m+0,5}^n)^2 - (\bar{\rho}_{m-0,5}^n)^2}{h_\rho} = 0, \quad (13)$$

была построена С.К. Годуновым [68] для системы уравнений газовой динамики в 1959 г.

Перейдем к построению разностной схемы для уравнения (1). Пусть по-прежнему  $M = 0$ . Сначала выведем интегральные законы сохранения, соответствующие этому уравнению. Для этого повторим вывод уравнения нелинейной акустики из гл. 2, но уже исходя из интегральных законов сохранения массы вещества и импульса.

Пусть  $G_3(t, r, x)$  (рис. 7) — произвольная область вида  $G_2(r, x) \times [t_1, t_2]$ , где  $t_2 \geq t_1 > 0$ ,  $G_2(r, x)$  — область с границей  $\Gamma$ , принадлежащая прямоугольнику  $[r_1, r_2] \times [X_1, X_2]$ . Законы сохранения массы и импульса в этой области запишутся соответственно в виде

$$\int_{G_2} [\rho(t_2, r, x) - \rho(t_1, r, x)] dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (\rho \vec{v} \vec{n}) d\sigma dt = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{G_2} [\rho(t_2, r, x) \vec{v}(t_2, r, x) - \rho(t_1, r, x) \vec{v}(t_1, r, x)] dV + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (\rho \vec{v}, \vec{n}) \vec{v} d\sigma dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} (P \vec{n} d\sigma) dt + \\ & + \iiint_{G_3} P \delta dr dx dt. \end{aligned}$$

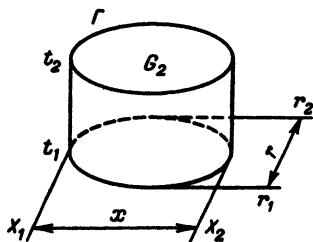


Рис. 7. Область  $G_3(t, r, x)$  вида  $G_2(r, x) \times [t_1, t_2]$ .

Здесь, как и раньше,  $\rho$  — плотность,  $\vec{v} \{v_r, v_x\}$  — вектор скоростей,  $P$  — давление,  $\vec{n}$  — вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\vec{\delta}$  — вектор с координатами  $\delta_r = 1, \delta_x = 0$ . Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы областей  $G_2^1 = G_3 \cap G_2^r$  и  $G_2^2 = G_3 \cap G_2^x$  соответственно, где  $G_2^\eta$  — двумерная плоскость  $\eta = \text{const}$ . Формулы (14) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma_1}^2 (\int \rho dx - \rho v_x dt) r dr - \int_{\Gamma_2}^2 (\int \rho v_r dt) dx = 0,$$

$$\int_{\Gamma_1}^2 (\int \rho v_x dx - \rho v_x^2 dt) r dr - \int_{\Gamma_2}^2 (\int \rho v_r v_x dt) dx = \int_{\Gamma_1}^2 (\int \rho dt) r dr,$$

$$\int_{\Gamma_1}^2 (\int \rho v_r dx - \rho v_r v_x dt) r dr - \int_{\Gamma_2}^2 (\int \rho v_r^2 dt) dx = \int_{\Gamma_1}^2 (\int P r dt) dx + \iiint_{G_3} P dr dx dt.$$

Так же, как и в гл. 2, представим  $\rho$  и  $P$  в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P',$$

где

$$P' = c_0^2 \rho' + (\gamma - 1) c_0^2 \rho'^2 / \rho_0,$$

и будем предполагать, что  $\rho' / \rho_0 \sim \mu$ ,  $P' / P_0 \sim \mu$ ,  $v_x / c_0 \sim \mu$ ,  $v_r / c_0 \sim \mu^{3/2}$ . Совершим замену переменных  $r = t - x / c_0$ . Следствием медленной зависимости неизвестных функций от переменных  $x$  и  $t$  в нашем случае будут соотношения:

$$\int_{\Gamma_1} t dr \asymp \mu t, \quad \int_{\Gamma_2} t r dr \asymp \sqrt{\mu} t \quad \text{и} \quad \int_{\Gamma_1}^2 \frac{\partial f}{\partial r} r dr \asymp \sqrt{\mu} f$$

(символ  $\asymp$  означает, что величины — одного порядка малости по  $\mu$ ). Повторяя дословно рассуждения гл. 2 по выделению членов порядка  $\mu^2$  и исключая неизвестное  $v_x$  с помощью формулы  $v_x = c_0 \rho' / \rho_0$ , получим два интегральных закона сохранения, из которых следует дифференциальное

уравнение нелинейной акустики:

$$\int_{r_1}^2 \left( \int_{\Gamma_1} \frac{\epsilon_0}{c_0 \rho_0} \rho'^2 dx + \rho' dr \right) r dr + \frac{\rho_0}{2c_0} \int_{\Gamma_1}^2 (r v_r dr) dx = 0,$$

$$c_0^2 \int_{\Gamma_1}^2 \left( \int_{\Gamma_2} \rho' r dr \right) dx + c_0^2 \iiint_{G_3} \rho' dr dx dr = \rho_0 \int_{r_1}^2 \left( \int_{\Gamma_1} v_r dx \right) r dr. \quad (15)$$

Рассмотрим сеточную область  $G_3^h = G_3^{h,1}(r_m, x_n, r_k) \cup G_3^{h,2}(r_{m+0,5}, r_k, x_{n+0,5}) \cup G_3^{h,3}(r_{m+0,5}, r_k, x_n)$  и выделим в ней элементарный объем  $\bar{G}_3^h$  (рис.8). Будем предполагать, что сеточные функции  $\rho'_{(m+\nu),k}^{(n+\nu)}$  и  $v_{r(m+\nu),k}^n$  ( $\nu = 0; 0,5$ ) определены соответственно в областях  $G_3^{h,1} \cup G_3^{h,2}$  и  $G_3^{h,3}$ . Запишем законы сохранения (15) для  $\bar{G}_3^h$ , приблизив стоящие в них интегралы по формулам

$$\int_{r_1}^2 \left( \int_{\Gamma_1} \rho'^2 dx \right) r dr = r_k h_r h_x [(\rho'_{m+0,5,k}^{n+0,5})^2 - (\rho'_{m-0,5,k}^{n+0,5})^2],$$

$$\int_{r_1}^2 \left( \int_{\Gamma_1} \rho' dr \right) r dr = r_k h_r h_r [\rho'_{m,k}^n - \rho'_{m,k}^{n+1}],$$

$$\int_{x_1}^2 \left( \int_{\Gamma_2} r v_r dr \right) dx = h_x h_r [r_k v_{r_{m+0,5,k}^{n+1}} - r_{k+1} v_{r_{m+0,5,k+1}^{n+1}}],$$

$$\int_{x_1}^2 \left( \int_{\Gamma_2} \rho' r dr \right) dx = h_x h_r [r_k \rho'_{(m,k)}^{(n+1)} - r_{k+1} \rho'_{(m,k+1)}^{(n+1)}],$$

$$\iiint_{G_3} \rho' dr dx dr = h_r h_x h_r \frac{\rho'_{m,k}^{n+1} + \rho'_{m,k}^n}{2},$$

$$\int_{r_1}^2 \left( \int_{\Gamma_1} v_r dx \right) r dr = h_r h_x [r_{k+1} v_{r_{m+0,5,k+1}^{n+1}} - r_{k+1} v_{r_{m-0,5,k+1}^{n+1}}].$$

В результате получим:

$$\frac{\epsilon_0}{c_0 \rho_0} r_k h_r h_x [(\rho'_{m+0,5,k}^{n+0,5})^2 - (\rho'_{m-0,5,k}^{n+0,5})^2] +$$

$$+ r_k h_r h_r (\rho'_{m,k}^n - \rho'_{m,k}^{n+1}) - \frac{\rho_0}{2c_0} h_x h_r [r_{k+1} v_{r_{m+0,5,k+1}^{n+1}} - r_k v_{r_{m+0,5,k}^{n+1}}] = 0,$$

$$c_0^2 h_x h_r [r_{k+0,5} (\rho'_{m,k}^{(n+1)} - \rho'_{m,k+1}^{(n+1)})] =$$

$$= h_r h_x [r_{k+1} v_{r_{m+0,5,k+1}^{n+1}} - r_{k+1} v_{r_{m-0,5,k+1}^{n+1}}].$$



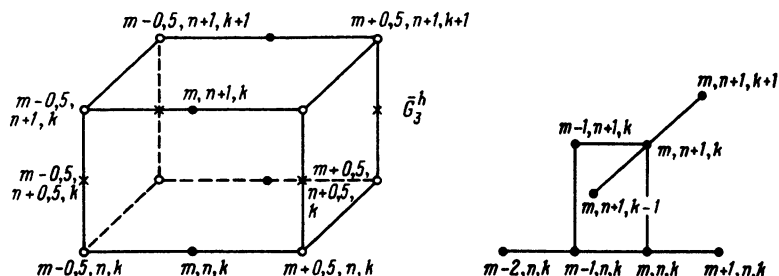


Рис. 8. Элементарный объем  $\bar{G}_3^h$  сеточной области  $G_3^h$ : точками обозначены узлы сетки  $G_3^{h,1}(r_m, r_k, x_n)$ ; крестиками — узлы сетки  $G_3^{h,2}(r_{m+0.5}, r_k, x_{n+0.5})$ ; кружочками —  $G_3^{h,3}(r_{m+0.5}, r_k, x_n)$ .

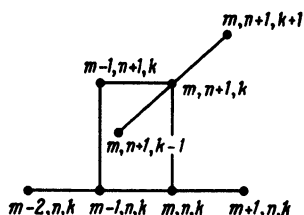


Рис. 9. Шаблон консервативной разностной схемы для уравнения (1) ( $M=0$ ):

Чтобы исключить неизвестное  $v_r$ , возьмем конечную разность от первого уравнения по индексу  $m$ , а от второго по  $k$ . В полученных равенствах будут стоять одинаковые выражения — смешанные разности от  $r_k v_r^{n+1}$ :

$$r_{k+1} v_{m+0.5, k+1}^{n+1} - r_{k+1} v_{m-0.5, k+1}^{n+1} - r_k v_{m+0.5, k}^{n+1} + r_k v_{m-0.5, k}^{n+1}.$$

Исключая эти разности, получим одно уравнение относительно неизвестной  $\rho'$ :

$$\frac{c_0}{c_0 \rho_0} r_k h_x [(\rho_{m+0.5, k}^{n+0.5})^2 - 2(\rho_{m-0.5, k}^{n+0.5})^2 + (\rho_{m-1.5, k}^{n+0.5})^2] + r_k h_r (\rho_{m, k}^{n+1} - \rho_{m, k}^{n+1} - \rho_{m-1, k}^{n+1} + \rho_{m-1, k}^{n+1}) + \frac{\rho_0 c_0}{2} h_r^2 h_x \times \\ \times \frac{1}{h_r} \left[ r_{k+0.5} \left( \frac{\rho_{m, k+1}^{n+1} - \rho_{m, k}^{n+1}}{h_r} \right) - r_{k-0.5} \left( \frac{\rho_{m, k}^{n+1} - \rho_{m, k-1}^{n+1}}{h_r} \right) \right] = 0.$$

Значения  $\rho_{m, k}^{n+0.5}$  определим через  $\rho_{m, k}^n$ , исходя из проведенного выше анализа распада разрыва. Построенная в результате схема аппроксимирует интегральные законы сохранения (15) для любой области, состоящей из прилегающих друг к другу элементарных областей, и поэтому является консервативной. Шаблон этой схемы изображен на рис. 9. Используя обозначения формул (1) и (13) и переходя к безразмерным переменным  $\theta, R$  и  $z$ , запишем искомую систему разностных уравнений:

$$\tilde{L}_{m, k} \rho_{m, k}^n + B \Lambda_k \rho_{m, k}^{n+1} = 0,$$

$$\rho_{m, k}^0 = F_{m, k}, \quad \rho_{m, N_1}^{n+1} = 0, \quad I_h \rho_{m, k}^{n+1} = 0,$$

(16)

где  $\rho_{m,k}^n$  — периодическая функция  $m$  с периодом  $N$ ,

$$\theta_m = h\theta \cdot m, \quad h_\theta = 2\pi/N, \quad R_k = (k+0,5) \cdot h_R, \quad h_R = R_0/(N_1+0,5),$$

$$z_n = h_z \cdot n, \quad h_z = Z/N_2, \quad m=0, 1, \dots, N-1; \quad k=0, 1, \dots, N_1-1,$$

$$n=0, 1, \dots, N_2-1; \quad \tilde{L}_{m,k}^n = (L_{m-1,k}^n - L_{m,k}^n)/h_\theta,$$

граничный оператор  $l_h \rho_{m,k}^n = \{ \tilde{L}_{m,k}^n \rho_{m,k}^n + B \Lambda_k \rho_{m,k}^{n+1} \}_{k=0}$ .

Чтобы доказать существование и единственность решения системы (16), представим ее в виде

$$-(\rho_{m,k}^{n+1} - \rho_{m-1,k}^{n+1})/h_\theta + B h_z \Lambda_k \rho_{m,k}^{n+1} = -\Phi_{m,k}^n, \quad (17)$$

$$\rho_{m,k}^0 = F_{m,k}, \quad \rho_{m,N_1}^{n+1} = 0,$$

где

$$\Phi_{m,k}^n = \frac{\rho_{m,k}^n - \rho_{m-1,k}^n}{h_\theta} + N_0 h_z \frac{(\tilde{\rho}_{m+0,5,k}^n)^2 - 2(\tilde{\rho}_{m-0,5,k}^n)^2 + (\tilde{\rho}_{m-1,5,k}^n)^2}{h_\theta^2},$$

$$m=0, 1, \dots, N-1; \quad k=0, 1, \dots, N_1-1; \quad n=0, 1, \dots, N_2-1.$$

В формулах (17) в левой части уравнений выделены значения решений на  $(n+1)$ -м слое. При вычислении  $\Phi_{m,k}^n$  могут понадобиться значения решений на  $n$ -м слое при  $m$  вне отрезка  $[0, N]$ . В этом случае надо проводить вычисления, периодически продолжая функции  $\rho_{m,k}^n$ . Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.

Пусть сеточная функция  $F_{m,k}$  удовлетворяет условию  $F_{0,k} = F_{N,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N_1$ ), тогда решение (16) существует и единственно.

Доказательство леммы 6 проводится по индукции с помощью формул (17).

Предположим, что решение на  $n$ -м слое существует. Разложим  $\rho_{m,k}^{n+1}$  и  $\Phi_{m,k}^n$  в дискретные ряды Фурье:

$$\rho_{m,k}^{n+1} = \sum_{P=0}^{N-1} C_{P,k}^{n+1} e^{2\pi i m P/N}, \quad \Phi_{m,k}^n = \sum_{P=0}^{N-1} \phi_{P,k}^n e^{2\pi i m P/N}.$$

Подставляя полученные ряды в (17), перейдем к системе алгебраических уравнений для коэффициентов  $C_{P,k}^{n+1}$  ( $P = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $k = 0, 1, \dots, N_1$ ). Используя самосопряженность и отрицательность оператора  $\Lambda_k$  в пространстве  $L_2(h_R)$  (см. § 1), получим, что определитель этой системы отличен от нуля и по-

этому существует единственное решение  $C_{p,k}^{n+1}$  и, следовательно,  $\rho_{m,k}^{n+1}$ . Так как  $\rho_{m,k}^0$  известно, то лемма доказана для любого  $n$ .

Метод дискретного преобразования Фурье, примененный нами для доказательства существования и единственности решения системы (16), может быть реализован и для его численного нахождения. Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье FFT дает возможность вычислить решение за  $O(NN_1 \log N)$  арифметических операций.

На практике приближенное решение уравнений (17) вычислялось методом установления, суть которого состоит в следующем. Если известно решение на  $n$ -м слое  $\rho_{m,k}^n$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ;  $k = 0, 1, \dots, N_1$ ) и значение  $\rho_{0,k}^{n+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, N_1$ ), то можно последовательно решить системы уравнений для  $m$  от 1 до  $N$  и тем самым вычислить решения системы (17). Предположим, что задано не точное, а приближенное значение решения  $\tilde{\rho}_{0,k}^{n+1} = \rho_{0,k}^{n+1} + \epsilon_{0,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N_1$ ). Обозначим  $\epsilon_{m,k} = \tilde{\rho}_{m,k}^{n+1} - \rho_{m,k}^{n+1}$ , где  $\tilde{\rho}_{m,k}^{n+1}$  — приближенное значение решения уравнений (17), полученное указанным выше способом. При вычислении приближенного решения не ограничимся одним периодом  $0 \leq m \leq N$ , а вычислим это решение для  $0 \leq m \leq (N^* + 1)N$ , где  $N^* \geq 0$  — целое. Тогда с увеличением числа периодов  $N^*$  приближенное решение  $\tilde{\rho}_{m,k}^{n+1}$  будет стремиться к точному решению системы (17).

Определим норму функций  $\epsilon_{m,k}$  при фиксированном  $m$  как  $\|\epsilon_{m,k}\| = \|\epsilon_{m,k}\|_{L_2(h_R)}$ .

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7.

Для погрешности приближенного решения системы (16) методом установления справедливо неравенство

$$\|\epsilon_{m,k}\| \leq \|\epsilon_{0,k}\| e^{Bkh_2 N^*},$$

где  $NN^* \leq m \leq N(N^* + 1)$  и  $\kappa < 0$  — наименьшее по модулю собственное число оператора  $\Lambda_k$ .

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой леммы, так как оно проводится стандартным образом [63].

Из утверждения леммы 7 следует, что сходимость метода установления тем медленнее, чем меньше шаг  $h_2$  и коэффициент дифракции  $B$ . При численной реализации метода установления начальное значение  $\rho_{0,k}^{n+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, N_1$ ) вычислялось по формулам линейной экстраполяции известных значений с предыдущих слоев  $\rho_{0,k}^n$  и  $\rho_{0,k}^{n-1}$  ( $\rho_{0,k}^0 = F_{0,k}$ ):

$$\tilde{\rho}_{0,k}^{n+1} = 2\rho_{0,k}^n - \rho_{0,k}^{n-1} \quad (n \geq 1), \quad \tilde{\rho}_{0,k}^1 = F_{0,k}.$$

В случае гладкого решения уравнения (1) и предполагаемой сходимости к нему решения системы (16)  $\epsilon_{0,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N_1$ ) имеет порядок  $O(h_2^2)$ , и на практике для достижения требуемой точности оказывалось достаточным взять

число итераций (периодов) в пределах  $5 \leq N^* \leq 10$ . Общее число требуемых для приближенного решения системы (16) арифметических операций при фиксированном  $n$  равняется  $O(N^* \cdot N \cdot N_1)$ . Заметим, что использование метода установления обусловлено также тем, что при  $N^* = 0$  он может быть эффективно применен для нахождения неперiodического по  $\theta$  решения уравнения (1).

Перейдем к случаю, когда коэффициент диссипации  $M$  отличен от нуля. Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial z \partial \theta} = A_1 \rho + A_2 \rho, \quad (18)$$

где  $A_1 \rho = N_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} + B \Delta_{\perp} \rho$ ,  $A_2 \rho = M \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}$ ,  $\rho(\theta, R, z) = F(\theta, R)$  при  $z = 0$  и удовлетворяет прежним краевым условиям по  $\theta$  и  $R$ . Пусть решение задано на слое  $z_n$ . Если заменить (18) на следующие два уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial z \partial \theta} = A_1 v, \quad v(\theta, R, z)|_{z=z_n} = \rho(\theta, R, z_n), \quad (19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z \partial \theta} = A_2 w, \quad w(\theta, R, z)|_{z=z_{n+1}} = v(\theta, R, z_{n+1}), \quad (20)$$

то для гладких решений справедливо равенство

$$w(\theta, R, z_{n+1}) = \rho(\theta, R, z_{n+1}) + O(h_z^2).$$

Последовательное решение уравнений (19) и (20) является более легкой задачей, чем непосредственное решение исходного уравнения (18). Действительно, дифференциальное уравнение (19) есть не что иное, как уравнение (1) при  $M = 0$ . Для его решения можно использовать разностную схему (16) и метод установления, рассмотренный выше.

Уравнение (20) приближенно можно решить несколькими способами. Приведем два из них.

$$\text{Разложим функцию } v(\theta, R, z_{n+1}) \text{ в ряд Фурье: } v(\theta, R, z_{n+1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(R, z_{n+1}) e^{im\theta},$$

то для решения уравнения (20) на слое  $z_{n+1}$  справедливо равенство

$$w(\theta, R, z_{n+1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(R, z_{n+1}) e^{-M m^2 h_z} e^{im\theta}.$$

Первый способ приближенного решения уравнения (20) состоит в разложении начальной функции в дискретный ряд Фурье по переменной  $\theta$  для каждого  $0 \leq k < N_1$ , в умножении коэффициентов Фурье на мультипликатор  $\{e^{-M m^2 h_z}\}$  и обратном дискретном преобразовании Фурье. Эти операции эквивалентны операциям перехода от  $P_k^n(m)$  к  $\rho_k^n(m)$ , которые мы проводили в § 1.

Для приближенного решения (20) вторым способом приблизим это уравнение с погрешностью  $O(h_z + h_z^2)$  следующей системой конечно-разностных

уравнений:

$$\frac{w_{m,k}^{n+1} - w_{m,k}^n}{h_z} = M \Delta_{\theta\theta} w_{m,k}^{n+1},$$

$$w_{m,k}^n = v_{m,k}^{n+1}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N_1-1,$$

которую удобно представить в виде

$$(E - M h_z \Delta_{\theta\theta}) w_{m,k}^{n+1} = v_{m,k}^{n+1}. \quad (21)$$

Здесь  $\Delta_{\theta\theta} w_{m,k}^{n+1} = \frac{w_{m+1,k}^{n+1} - 2w_{m,k}^{n+1} + w_{m-1,k}^{n+1}}{h_\theta^2}$  и  $w_{m,k}^{n+1}$  — периодическая функ-

ция  $m$  с периодом  $N$ .

Систему (21) можно решить для каждого  $0 \leq k < N_1$  методом циклической прогонки [65].

Относительно этих двух способов решения уравнения (20) можно сказать, что первый способ, в котором это уравнение фактически решается в явном виде, дает большую точность, но требует специального аппарата, быстро реализующего дискретное преобразование Фурье (алгоритм и программы FFT). Количество арифметических операций на шаге при этом методе равняется  $O(NN_1 \log N)$ . При втором способе используется метод циклической прогонки, требующий  $O(NN_1)$  операций.

В результате алгоритм приближенного решения уравнения нелинейной акустики (1) выглядит следующим образом. Используется конечно-разностная система уравнений (16). Начиная с известного значения при  $n = 0$ , решение вычисляем от слоя к слою по  $n$  вдоль по оси  $z$  до тех пор, пока не будет пройден весь отрезок  $[0, Z]$ . Для решения системы разностных уравнений на каждом слое применяется метод установления при некотором заданном числе итераций (периодов)  $N^*$ . При реализации метода установления системы разностных уравнений для фиксированного  $m$  решаются методом разностной прогонки, который требует для решения системы алгебраических уравнений  $(N_1 + 1)$ -го порядка  $O(N_1)$  операций.

В тех случаях, когда значение коэффициента  $M$  превосходит некоторую малую величину  $M_\epsilon$ , на каждом слое  $z_n$  дополнительно решается дифференциальное уравнение (20) одним из предложенных выше способов. Обычно значение  $M_\epsilon$  выбиралось опытным путем и решение получалось вторым способом.

В заключение параграфа отметим, что ввиду расходимости или сходимости акустических пучков целесообразно решать уравнение (1) не при  $R_L = 0$ , когда  $G_3$  есть произведение цилиндра  $\{0 \leq R \leq R_0, 0 \leq z \leq Z\}$  на отрезок  $[0, 2\pi]$ , а в области, являющейся произведением конуса  $\{0 \leq R \leq R_0 + R_L z, 0 \leq z \leq Z\}$  на этот отрезок. Чтобы применить конечно-разностные методы этого параграфа для решения дифференциального уравнения (1) в этой области, перейдем к новым независимым переменным  $\theta' = \theta$ ,  $R' = R / (1 + C_L z)$ ,  $z' = z$ , где  $C_L = R_L / R_0$ .

После такой замены переменных уравнение (1) принимает вид

$$N_0 \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta'^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta' \partial z'} + \frac{C_L R'}{1 + C_L z} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta' \partial R'} + \frac{B}{(1 + C_L z)^2} \Delta' \rho = -M \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta'^3}, \quad (22)$$

решение  $\rho(\theta', R', z')$  определено в области  $G_3 \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq R' \leq R_0, 0 \leq z' \leq Z\}$  и удовлетворяет тем же краевым и начальным условиям, что и раньше.

Если для аппроксимации члена  $\frac{C_L R'}{1 + C_L z} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial R'}$  использовать разностные от-

ношения  $\frac{C_L R_k}{1 + C_L z'_{n+0,5}} \frac{\rho_{m,k}^n - \rho_{m,k-1}^n - \rho_{m-1,k}^n + \rho_{m-1,k-1}^n}{h_\theta h_R}$  и вычислять множитель

$1/(1 + C_L z')^2$  в средней точке  $z'_{n+0,5}$ , то сказанное в этом параграфе полностью переносится на случай уравнения (22).

Описанные выше алгоритмы были реализованы в стандартных программах для решения уравнений нелинейной акустики, представленных в виде (22). Эти конечно-разностные методы были устойчивы при  $h_z \leq Ch_\theta / (2N_0 \max |\rho|)$ , где  $C$  — некоторая константа меньше единицы. Другие ограничения на шаги разностной схемы обусловлены погрешностью аппроксимации и требуемой точностью и в каждом конкретном случае определяются по-своему.

### § 3. Описание набора стандартных программ

Набор стандартных программ на языке ФОРТРАН, к описанию которого мы переходим, предназначен для численного решения ряда физических задач, связанных с уравнением (1), и был реализован для ЭВМ БЭСМ-6. Он состоит из набора программ численного расчета акустических пучков, который мы будем называть основным, и набора вспомогательных, обслуживающих программ.

Все стандартные программы основного набора классифицируются по следующим признакам.

1. Математический алгоритм, положенный в основу стандартной программы.
2. Конкретная физическая задача, для решения которой предназначена данная программа.

3. Способ выдачи и объем выдаваемой числовой информации.

Остановимся более подробно на содержании этих пунктов.

Во всех стандартных программах реализуются два вычислительных алгоритма: конечно-разностный метод решения системы дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье и метод конечных разностей, использующий консервативную схему газовой динамики.

Основной набор стандартных программ ориентирован на решение следующих задач, связанных с распространением акустического пучка.

1. Распространение первоначально плоского акустического пучка в идеальной и диссипативной средах.

2. Распространение сходящегося или расходящегося акустических пучков в нелинейной среде.

3. Генерация гармоник в акустическом пучке, нелинейное взаимодействие акустических пучков с различными частотами и излучение низкочастотного звукового сигнала.

4. Самовоздействие звуковой волны за счет нагревания среды.

5. Распространение акустического пучка в среде с релаксацией.

## 6. Распространение акустической нелинейной волны в трубе.

В основу стандартной программы, ориентированной на решение конкретной физической задачи, положен алгоритм наиболее эффективного решения соответствующего дифференциального уравнения. Параметры численного алгоритма, также выбираются с учетом специфики задачи. Это же относится и к распределению ресурсов ЭВМ.

Стандартная программа подготавливает и выдает пользователю всю необходимую информацию о данном физическом процессе в достаточно полном и удобном виде. Во всех стандартных программах подготовка и выдача информации осуществляется по следующей схеме. Приближенное решение задачи вычисляется путем перехода со слоя на слой вдоль по оси  $z$  до тех пор, пока не будет пройден весь нужный отрезок  $[0, Z]$ . Первый способ выдачи информации заключается в том, что пользователь задает массив значений  $Z \{z_i, i = 1, 2, \dots, N_3\}$  и стандартная программа выдает пользователю значения приближенного решения в точках с координатами  $z_i$ . Выдача осуществляется путем выхода в подпрограмму АСТ, заголовок которой приведен ниже. Эту подпрограмму должен составить пользователь, которому, кроме значений приближенного решения, выдается значение координаты  $z_i$  и массивы координат  $\{\theta_m\}$  и  $\{R_k\}$  точек, в которых вычислено решение. Подпрограмма АСТ может как обрабатывать результаты по мере счета, так и записывать их в периферийную память с тем, чтобы впоследствии подвергнуть более тщательной и трудоемкой обработке. Если по какой-либо причине прекратится счет, то его можно продолжить, начав с последнего значения  $z_i$ , при котором было вычислено решение. При практических расчетах подпрограмма АСТ печатала числовые значения координат узлов разностной схемы и решения, осуществляла гармонический анализ решения, печатала и рисовала графики изменения пикового значения возмущения, амплитуд и фаз различных гармоник сигнала. В случае трудоемкости этих операций подпрограмма записывала результаты на магнитную ленту, и их обработка проводилась независимо небольшой специализированной программой. Таким образом, подпрограмма АСТ дает возможность получить описание физического процесса по  $\theta$  и  $R$  при нужных, фиксированных значениях  $z$ .

Кроме этого, в стандартных программах предусмотрена возможность вычисления некоторых функционалов от решения в узлах сетки  $Q(R_k, z_j) \{k = 1, 2, \dots, N_1, z_j = Zj/N_5, j = 1, 2, \dots, N_5\}$ . Значения этих функционалов, зависящих от переменных  $R$  и  $z$ , выдаются пользователю перед окончанием решения задачи, при  $z = Z$ . Выдача информации осуществляется путем выхода в подпрограмму АСТ1 в конце работы программы.

В стандартных программах вычислялись следующие функционалы:

$$1. I_1 = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \rho(\theta, R, z).$$

$$2. I_2 = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \rho(\theta, R, z).$$

$$3. I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta, R, z) d\theta.$$

4.  $I_4 = R_{уд}(z), \{R_{уд}(z):$  при  $R \leq R_{уд}$  в точке  $z$  имеет место разрыв решения по переменной  $\theta$ , при  $R > R_{уд}$  решение - непрерывная функция  $\theta\}$ .

5.  $A_m, \Phi_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \nu$ ) – вещественные числа, определяемые равенством

$$\rho(\theta, R, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i(m\theta + \Phi_m)}.$$

Такие функционалы часто используются при описании волновых процессов:  $I_1$  и  $I_2$  – пиковые значения возмущения в различных точках пространства;  $I_3$  – средняя за период плотность энергии пучка; поверхность  $R = R_{уд}(z)$  – граница области распространения ударной волны;  $A_m$  и  $\Phi_m$  – амплитуды и фазы различных гармонических составляющих сигнала.

Заголовки стандартных программ для решения задач распространения акустических пучков имеют вид:

$$SNIJKL (P_1, P_2, \dots, P_m),$$

где SNIJKL – наименование подпрограммы, в котором:

SN – буквы, задающие название данного набора стандартных программ;

$I$  – цифра 1 или 2;  $I = 1$  – для случая, когда пучок зависит от одной поперечной координаты;  $I = 2$  – для радиально-симметричного пучка;

$J$  – цифра 0, 1 или 2 – номер численного метода, заложенного в алгоритм программы;

$J = 0$  – конечно-разностный метод, использующий три двумерных массива;

$J = 1$  – конечно-разностный метод, использующий один двумерный массив;

$J = 2$  – метод типа Фурье;

$K, L$  – цифры; двузначное число  $KL$  – номер подпрограммы, предназначенной для решения конкретной физической задачи;

$P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – формальные параметры, являющиеся наименованием переменных, массивов и подпрограмм.

Подпрограммы, соответствующие значению  $J = 0$ , используют три двумерных массива размерности  $N \times N_1$  ( $N \sim 60, N_1 \sim 60$ ) и позволяют решать достаточно широкий круг задач, производя одновременно обработку полученной информации так, как описано выше. При решении особо сложных задач, требующих использования массивов большой размерности:  $N > 100, N_1 > 100$ , предлагается использовать вариант с одним двумерным массивом ( $J = 1$ ), при этом никакой обработки информации в подпрограмме не производится, а ее должен проводить сам пользователь по мере поступления.

Формальные параметры  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) расположены в следующем порядке: первая группа параметров определяет исходные данные задачи, далее следуют параметры численного алгоритма и параметры, задающие режим выдачи числовой информации.

Приведем описание одной из стандартных программ набора – подпрограммы SN 2 000. Эта подпрограмма предназначена для расчета первоначально плоского или сфокусированного пучка в нелинейной идеальной среде или среде с диссипацией по фиксированному набору узлов. Выбранные значения параметров численного алгоритма дают возможность решить широкий класс задач, часто встречающихся на практике.



## ПОДПРОГРАММА SN2000

### 1. Обращение к подпрограмме

Вызов подпрограммы SN2000 осуществляется оператором.

CALL SN2000 (AN, AB, AM, R0, RL, Z, W, J, C, H, Z1, N3, R1, N4, J1, AL, ACT, ACT1),

где

AN, AB, AM — вещественные переменные, значения параметров  $N_0, B, M$  (1);

R0, RL — вещественные переменные, задающие границу области решения задачи:  $0 < R < R_0 + R_L \cdot z$ ;

Z — вещественная переменная, граница области решения по  $z$ :  $0 < z < Z$ ;

W — двумерный вещественный массив размерности  $N \times N_1$  значений  $F(\theta, R)$ , вычисленных в узлах сетки

$$G_2^h \{ \theta_m = (m-2)h_\theta, R_k = (k-0,5)h_R, \}$$

$$m = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_1, \quad h_\theta = 2\pi/(N-3),$$

$$h_R = R_0/(N_1 - 0,5);$$

J — целочисленный параметр, равный 1 при однородном краевом условии по R первого рода и равный 2 при краевом условии второго рода;

C; H — вещественные переменные, определяющие шаг разностной сетки по оси  $z - h_z$  (см. п. 3в);

Z1 — вещественный массив значений  $z$ , в которых осуществляется выход в подпрограмму ACT для выдачи промежуточной информации;

N3 — целая переменная, размерность массива Z1;

R1 — вещественный массив значений R, для которых требуется вычислить значения функционалов  $I_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ );

N4 — целая переменная, размерность массива R1;

J1 — целочисленный параметр, равный 0, если требуется выход в пп. ACT и ACT1; равный 1, если требуется выход только в пп. ACT, и -1 — если только в пп. ACT1;

AL — вещественный параметр, используемый для определения области образования ударной волны (см. п. 3д);

ACT — имя подпрограммы, составляемой пользователем для выдачи информации о решении при промежуточных значениях  $z$  (массив Z1);

ACT1 — имя подпрограммы, составляемой пользователем для выдачи информации о решении в конце работы программы.

### 2. Метод

Для численного решения исходной задачи применяется конечно-разностный метод, использующий консервативную схему газовой динамики и описанный в § 2. Число узлов разностной схемы фиксированно: числа узлов по оси  $\theta - N$  и по оси  $R - N_1$  равны 60, число узлов по  $z - N_5$ , в которых вычисляются функционалы  $I_n$ , равно 40. Решение уравнения (20) проводится по алгоритму, использующему метод циклической прогонки. Параметры вычислительного метода, которые описываются ниже, были выбраны так, что при всех вычислениях обеспечивалась точность порядка 2% как в графике решения, так и в положении ударной волны; контроль точности осуществлялся с помощью расчетов при различных  $h_\theta, h_R, h_z, R_0$  и  $R_L$ .

### 3. Особенности использования и рекомендации

а) Совершая линейную замену переменных, можно сделать отличными от единицы  $M$  и еще один из коэффициентов уравнения (1). При практическом использовании программы SN2000 уравнение (1) обычно приводилось к виду

$$N'_0 \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial z'} + \Delta_{\perp} \rho = -M' \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}, \quad (23)$$

где  $N'_0 = N_0/B$ ,  $z' = zB$ ,  $M' = M/B$ . Такая форма записи означает переход по оси  $z$  к единицам длины, равным удвоенному конфокальному параметру пучка.

б) Выбор параметров  $R_0$  и  $R_L$ , определяющих границу области решения задачи, следует проводить из условия близости к нулю решения вне этой области, что можно проверить расчетами с различными значениями  $R_0$  и  $R_L$ .

Так, при решении уравнения (23) на отрезке  $z \in [0, 1]$  с начальной функцией  $F(\theta, R) = -\sin \theta \cdot e^{-R^2}$  для достижения точности 2% достаточно было взять  $R_0 = 5$ , а для функции  $F(\theta, R) = -\sin \theta P_4(R) - R_0 = 4$ ,

$$P_4(R) = \begin{cases} (1-R^2)^2 & \text{при } R \leq 1, \\ 0 & \text{при } R \geq 1. \end{cases}$$

Выбор параметра  $R_L$  зависит от расходимости акустического пучка, которая определяется функцией  $F(\theta, R)$  и параметром  $B$ . В случае  $F(\theta, R)$ , определенных выше, при  $B = 1$  (уравнение (23)) и решении задачи для  $z < 1$  можно взять  $R_L = 0$ , при  $z \geq 1$  целесообразно положить  $R_L = 1$ .

Если начальный пучок был расходящимся, то определив радиус расходимости пучка  $R_{\text{расх}}$ , следует выбрать  $R_L$  приблизительно равным  $R_0/R_{\text{расх}}$ . В случае сходящегося пучка, при решении задачи до фокуса можно брать  $R_L < 0$ , но так как после фокуса пучок снова расходится, то при  $z > z_{\text{ф}}$  необходимо учесть окончательную расходимость пучка и взять  $R_L \geq 0$ .

в) Шаг интегрирования по оси  $z - h_z$  ( $h_z = z_{n+1} - z_n$ ) определяется в подпрограмме по формуле

$$h_z = \min \left\{ C \frac{h_{\theta}}{2N_0 \max |\rho^n|}, H \right\},$$

где  $h_{\theta} = 2\pi/(N-3)$ . Первый член в фигурных скобках следует из условия Р. Куранта и необходим для устойчивости разностной схемы. Константу  $C$  следует задавать меньше 1, обычно бралось  $C = 0,5$ . Наличие второго члена обусловлено дополнительными ограничениями, которые нужно накладывать на  $h_z$ : для аппроксимации диссипативного члена обычно берут  $h_z \sim h_{\theta}^2/M$ ; при малых  $N_0$  и  $M$   $h_z$  не следует брать много больше  $h_R$  ( $h_R = R_0/(N_1 - 0,5)$ ); при решении задач, имеющих малый характерный размер по переменной  $z$ , как, например, расстояние до фокуса,  $h_z$  должен быть взят с учетом этого размера (на практике бралось  $h_z \sim z_{\text{ф}}/20$ ). Во всех таких случаях нужная величина шага разностной схемы по оси  $z$  должна быть задана с помощью параметра  $H$ .

г) Обычно при численном решении уравнения (23) оказывалось достаточным 5 итераций метода установления. Это число итераций и зафиксировано в подпрограмме SN2000.

д) По мере численного решения уравнения (1) программой SN2000 в каждой точке  $Q(R_k, z_j)$  вычисляются:

$$\Delta(\bar{m}) = \max_m |\rho(\theta_{m+1}, R_k, z_j) - \rho(\theta_m, R_k, z_j)| \quad \text{и}$$

$$\Delta_1(\bar{m}) = |\bar{\rho}(\theta_{\bar{m}+0,5}, R_k, z_j) - \bar{\rho}(\theta_{\bar{m}-0,5}, R_k, z_j)|,$$

где  $\bar{\rho}$  получено с помощью линейной экстраполяции  $\rho(\theta_{\bar{m}+2}, R_k, z_j)$  и  $\rho(\theta_{\bar{m}+1}, R_k, z_j)$  в точку  $\theta_{\bar{m}+0,5}$  а  $\bar{\rho}$  экстраполяцией  $\rho(\theta_{\bar{m}-1}, R_k, z_j)$  и  $\rho(\theta_{\bar{m}}, R_k, z_j)$  в ту же точку. Если функция  $\rho(\theta, R, z)$  имеет непрерывные производные до третьего порядка по  $\theta$  и  $|\rho'_\theta(\theta, R_k, z_j)| = \max_\theta |\rho'_\theta| \geq \delta > 0$ , то справедливо равенство  $\Delta_1/\Delta = O(h_\theta^2)$ , где константа в  $O$ -члене имеет порядок  $0,2 |\rho^{(3)}(\theta, R_k, z_j)| / |\rho'(\bar{\theta}, R_k, z_j)|$ . Если же функция  $\rho$  имеет разрыв на отрезке  $[\theta_{\bar{m}}, \theta_{\bar{m}+1}]$ , то  $\Delta_1/\Delta = 1 + O(h_\theta)$  и константа в знаке  $O$  оценивается через  $\max |\rho'_\theta|, |\rho''_\theta| / |\rho^+ - \rho^-|$ . Таким образом,  $\Delta_1/\Delta \rightarrow 0$  при  $h_\theta \rightarrow 0$  для гладкого решения и  $\Delta_1/\Delta \rightarrow 1$  для разрывного.

В подпрограмме это свойство используется для определения области существования разрывного решения. Пользователь при обращении к SN2000 должен задать число  $AL$ , близкое к единице. При  $\Delta_1/\Delta \geq AL$  решение считается разрывным, а при  $\Delta_1/\Delta < AL$  непрерывным. Реально значение  $AL$  выбиралось в интервале  $(0,8, 0,9)$ , при этом ширина фронта разрыва не превосходила  $2h_\theta$ . Анализируя форму волны при конкретном счете, можно проверить эффективность задания параметра  $AL$ .

е) Время работы подпрограммы SN2000 на ЭВМ БЭСМ-6 приблизительно равно  $(15N_2)$  с, где  $N_2$  - число шагов по оси  $z$ .

#### 4. Вызываемые подпрограммы ACT, ACT1, INTER

Подпрограммы ACT и ACT1 составляются пользователем и предназначены для обработки и выдачи полученной информации. INTER - стандартная подпрограмма из вспомогательного набора, к которой обращается подпрограмма SN2000 для интерполяции вычисленных функционалов решения.

Вызов подпрограммы ACT осуществляется из подпрограммы SN2000 с помощью оператора

CALL ACT (T, R, W, Z),

где формальные параметры  $T, R, W, Z$  имеют следующий смысл:  
 $T$  - вещественный массив размерности  $N-2$  значений координат узлов разностной сетки по переменной  $\theta$ :

$$\theta_m = (m-1)h_\theta, \quad m = 1, 2, \dots, N-2;$$

$R$  - вещественный массив размерности  $N_1$  значений координат узлов разностной схемы по переменной  $R$ :

$$R_k = (k-0,5)(1+(R_L/R_0)z_1)h_R,$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1;$$

$W$  - вещественный массив размерности  $(N-2) \times N_1$  значений решения в узлах сетки

$$G_2^h \{ \theta_m, R_k, m=1, 2, \dots, N-2, k=1, 2, \dots, N_1 \};$$

$Z$  - вещественная переменная, значение координаты  $z$  точки, в которой вычислено решение.

Вызов подпрограммы АСТ1 осуществляется из подпрограммы SN2000 с помощью оператора

CALL АСТ1 ( $R, N_4, Z, W, W1$ ),

где формальные параметры  $R, N_4, Z, W, W1$  имеют следующий смысл:

$R$  - вещественный массив размерности  $N_4$ , значений координат узлов сетки  $Q(R_i, z_j) \{ i=1, 2, \dots, N_4, j=1, 2, \dots, N_5 \}$  по переменной  $R$ ;

$N_4$  - целая переменная, размерность массива  $R$ ;

$Z$  - вещественный массив размерности  $N_5$  значений координат узлов сетки  $Q(R_i, z_j) \{ z_j = j \cdot Z/N_5 \}$  по переменной  $z$ ;

$W$  - вещественный массив размерности  $N_4 \times N_5$  вычисленных значений функционалов  $I_1, I_2, I_3$ ;

$W1$  - вещественный массив размерности  $N_5$  вычисленных значений функционала  $I_4$ .

#### Замечание

Значения функционалов  $I_k(R_i, z_j)$ ,  $k=1, 2, 3$ ,  $i=1, 2, \dots, N_4$ ,  $j=1, 2, \dots, N_5$ , закладываются в ячейки  $W((K-1) \cdot N_4 + I, J)$  массива  $W$ , где  $K=k$ ,  $I=i$ ,  $J=j$ . В силу ограничения на объем оперативной памяти ЭВМ БЭСМ-6 значение параметра  $N_4$  не должно превосходить 20. В подпрограмме SN2000 число узлов сетки  $Q(R_i, z_j)$  по переменной  $z$  фиксировано и равно 40. Следовательно, в подпрограмме АСТ1 нужно брать  $N_5 = 40$ .

В заключение параграфа затронем вопрос о наборе стандартных вспомогательных программ.

Этот набор содержит программы численного анализа общего типа, которые используются программами основного набора, но могут быть использованы также независимо от них.

Вот основные из этих программ:

1. INTER - программа линейной интерполяции таблично заданной функции одного переменного.
2. TRANS1 - программа преобразования к экспоненциальному виду таблично заданной, комплекснозначной функции одного переменного.
3. TRANS2 - программа преобразования к экспоненциальному виду таблично заданной, комплекснозначной функции двух переменных.
4. FFT - программа быстрого дискретного преобразования Фурье.
5. FT - программа дискретного преобразования Фурье (не быстрого).
6. TRAP - программа вычисления определенного интеграла по формуле трапеций от таблично заданной функции.
7. NTRAP - программа вычисления неопределенного интеграла по формуле трапеций от таблично заданной функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Гостехиздат, 1953.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. - М.: Наука, 1979.
3. Солуян С. И., Хохлов Р. В. - Вестник МГУ: Сер. физика и астрономия, 1961, т. 3, с. 52.
4. Малюжинец Г. Д. - Успехи физических наук, 1959, т. 69, № 2, с. 321.
5. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М.: Наука, 1975.
6. Куницын В. Е., Руденко О. В. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 4, с. 549.
7. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. - Акустический журнал, 1969, т. 15, № 1, с. 40.
8. Островский Л. А., Сутин А. М. - Доклады АН СССР, 1975, т. 221, № 6, с. 1300.
9. Островский Л. А., Сутин А. М. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 1, с. 93.
10. Островский Л. А., Сутин А. М. - Акустический журнал, 1977, т. 23, № 1, с. 174.
11. Сутин А. М. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 1, с. 104.
12. Сутин А. М. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 4, с. 593.
13. Сутин А. М. - Автореферат кандидатской диссертации. - Горький, 1979.
14. Ginsberg J. H. - JASA, 1981, v. 69, N 4, p. 929.
15. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику: Звуковые и ультразвуковые волны большой интенсивности. - М.: Наука, 1966.
16. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. - ЖЭТФ, 1966, т. 50, № 2, с. 474.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Гостехиздат, 1953.
18. Виноградов А. М., Воробьев Е. М. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 1, с. 23.
19. Воробьев Е. М., Славин А. Р. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 3, с. 337.
20. Руденко О. В. - Акустический журнал, 1975, т. 21, № 2, с. 311.
21. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. - Акустический журнал, 1970, т. 16, № 1, с. 49.
22. Воробьев Е. М., Заболотская Е. А. - Акустический журнал, 1973, т. 19, № 6, с. 815.
23. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. - Там же, с. 871.

24. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1974, т. 20, № 3, с. 449.
25. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - Доклады АН СССР, 1975, т. 225, № 5, с. 1053.
26. Найфэ Али Хасан. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976.
27. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1977.
28. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. - Акустический журнал, 1979, т. 25, № 6, с. 810.
29. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 4, с. 487.
30. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. - Акустический журнал, 1980, т. 26, № 2, с. 173.
31. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - Труды VIII Всесоюзной акустической конференции. - М., 1973.
32. Наугольных К.А., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1963, т. 9, № 1, с. 54.
33. Буров В.А., Красильников В.А. - Доклады АН СССР, 1958, т. 118, № 5, с. 920.
34. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 1, с. 21.
35. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 4, с. 473.
36. Кузнецов В.П. - Акустический журнал, 1970, т. 16, № 4, с. 548.
37. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. - Акустический журнал, 1979, т. 25, № 2, с. 187.
38. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. - Акустический журнал, 1979, т. 25, № 4, с. 488.
39. Тимошенко В.И. Расчет и проектирование параметрических акустических преобразователей. - Таганрог, 1978, ч. 1.
40. *Hobak H.* Parametric acoustic transmitting arrays a survey of theories and experiments: Scientific Technical Report № 99.- University of Bergen, Norway, 1977.
41. \*Мюир Г.Д. Акустика морских осадков. - М.: Мир, 1977.
42. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. - М.: Судостроение, 1981.
43. *Westervelt P.J.* - JASA, 1963, v. 35, № 4, p. 535.
44. Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И. - Акустический журнал, 1975, т. 21, № 4, с. 591.
45. Новиков Б.К., Рыбачек М.С., Тимошенко В.И. - Акустический журнал, 1977, т. 23, № 4, с. 621.
46. *Willette J.G., Moffett M.B., Konrad W.S.* - В кн.: Труды VI Межд. симпозиума по нелинейной акустике. - М.: Изд-во МГУ, 1976, ч. 1, с. 308.
47. Новиков Б.К., Руденко О.В. - Акустический журнал, 1977, т. 23, № 5, с. 797.
48. Сутин А.М. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 1, с. 104.
49. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Руденко О.В. - Акустический журнал, 1978, т. 24, № 1, с. 125.
50. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 1, с. 28.
51. Заболотская Е.А. - Акустический журнал, 1976, т. 22, № 2, с. 222.
52. Аскарьян Г.А. - Письма ЖЭТФ, 1966, т. 4, № 4, с. 144.
53. *Akhmanov S.A., Krindach D.P., Migulin A.V., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* - IEEE J. Quant. Electron., 1968, v. 4, № 10, p. 568.

54. Алешкевич В.А., Мигулин А.В., Сухоруков А.П., Шумилов Э.Н. - ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 2, с. 551.
55. Михайлов И.Г. Распространение ультразвуковых волн в жидкостях. - Л.; М.: Гостехиздат, 1949.
56. *Itterbeek A., Vosk A. + Physica*, 1949, v. 14, № 9, p. 609.
57. *Lagemann R.T., McMillan D.R., Woolf W.E. + J. Chem. Phys.*, 1949, v. 17, № 14, p. 369.
58. Ахманов С.А., Горохов Ю.А., Криндач Д.П., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. - ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 1, с. 16.
59. Беранек Л. Акустические измерения. - М.: ИЛ, 1952.
60. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции /Под ред. Л.И. Семенова. - 2-е изд., стер. - М.: Наука, 1968.
61. Гусев В.Э., Руденко О.В. - Акустический журнал, 1979, т. 25, № 6, с. 875.
62. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. - М.: Физматгиз, 1963.
63. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977.
64. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1973, ч. 1.
65. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977.
66. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. - М.: Наука, 1978.
67. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. - М.: Наука, 1981.
68. Годунов С.К. - Математический сборник, 1959, т. 47 (89), вып. 3, с. 271.

Николай Сергеевич Бахвалов  
Яков Михайлович Жилейкин  
Евгения Андреевна Заболотская

**НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ**

Серия "Современные проблемы физики"

М., 1982 г., 176 стр. с илл.

Редактор *Н.А. Петрунина*  
Технический редактор *Н.В. Семенчинская*  
Корректор *Т.В. Обод*

ИБ № 11484

Сдано в набор 5.01.82. Подписано к печати 18.06.82.  
Т-13512. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл.-печл. 11,0. Уч.-изд.л. 11,27. Тираж 3000 экз.  
Заказ № 236. Цена книги 1 р.70к.

Издательство "Наука". Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15  
4-я типография издательства "Наука"  
630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25



**ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"**

**ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ЛИТЕРАТУРЫ**

**117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15**

***ВЫХОДИТ ИЗ ПЕЧАТИ:***

**Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции.**

В книге дано систематическое изложение математических методов решения задач дифракции монохроматических волн (электродинамика, акустика). Представлены как точные методы (разделение переменных, интегрирование в плоскости комплексной переменной, метод собственных колебаний), так и приближенные (вариационный, низкочастотная и высокочастотная асимптотики). В каждом методе описаны в первую очередь его идея, область применения, связь с другими методами. Затем изложен, обычно в наиболее простой постановке, аппарат метода и приведены примеры его применения. Книга может служить при первом чтении введением в теорию дифракции и облегчить перевод к чтению более узкоспециальных монографий и журнальных статей.

Для специалистов в области радиофизики, распространения радиоволн, оптики, акустики и математической физики, а также аспирантов и студентов университетов, физико-технических и инженерно-физических институтов.

1 р. 70 к.