современная
алгебра

А. И. КОКОРИН
В. М. КОПЫТОВ

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

Книга «Линейно упорядоченные группы» посвящена изложению современного состояния теории линейно упорядоченных групп — быстро развивающейся области современной алгебры. Понятие линейно упорядоченной группы играет важную роль при определении действительных чисел, а также в некоторых разделах геометрии и функционального анализа. Помимо этого, изучение линейных порядков на группе важно и для абстрактной теории групп.

Основное внимание в книге уделяется признакам упорядочиваемости группы, описанию строения и способам построения линейно упорядоченных групп. Подробно излагаются вопросы продолжения частичного порядка группы до линейного, топологические и порядковые свойства линейно упорядоченных групп. Значительная часть результатов, приведенных в книге, получена в последнее десятилетие и не отражена в имеющихся монографиях по алгебре.

Книга рассчитана на математиков — аспирантов и научных работников, а также на студентов старших курсов университетов и педагогических институтов. Она может служить основой для специальных курсов и семинаров.

СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА

А. И. КОКОРИН, В. М. КОПЫТОВ

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

517.1
К 60
УДК 512.8

ОГЛАВЛЕНИЕ

2-2-3
59—72

ПРЕДИСЛОВИЕ

Упорядоченная группа является сложным алгебраическим объектом, наделенным одновременно структурой группы и структурой упорядоченного множества, которые едва ли нуждаются в рекомендациях. Образцом связи между групповой операцией и отношением порядка послужили вещественные числа.

Понятие упорядоченной группы возникло в конце XIX в. в связи с вопросами обоснования математики, именно, при построении аксиом для вещественных чисел. Уже одна из первых теорем теории упорядоченных групп — теорема Гёльдера об изоморфизме архимедовой линейно упорядоченной группы подгруппе аддитивной группы вещественных чисел — имеет фундаментальное значение для математики. Она позволяет определить вещественные числа как максимальную архимедову группу.

Одновременно с упорядоченными группами и телами начинается история решеточно упорядоченных групп и полугрупп. «Анализируя механизм отношения делимости, он (Дедекинд) заложил основы современной теории решеточно упорядоченных групп в мемуаре (который не получил отклика у его современников и в продолжение 30 лет оставался забытым), являющемся, без сомнения, одной из первых работ по аксиоматической алгебре» (Бурбаки [1]).

Систематическое построение общей теории упорядоченных групп началось в XX в. Проявляли интерес к теории упорядоченных групп и внесли в нее существенный вклад выдающиеся математики: Р. Дедекинд, О. Гёльдер, Д. Гильберт, Дж. Нейман, Г. Биркгоф, А. И. Мальцев, Ф. Холл. В настоящее время теория упорядоченных групп является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей алгебры.

Приведем разного характера доводы в пользу изучения упорядоченных групп. Некоторые из них относятся вообще к упорядоченным алгебраическим системам.

Во многих разделах математики происходит замена вещественных чисел упорядоченными группами (и телами), например, в теории нормирований. Это показывает, что упорядоченные группы играют существенную роль в алгебраизации математики. Понятие решеточно упорядоченной группы имеет фундаментальное значение в некоторых разделах функционального анализа. В теории моделей вместо вещественных чисел часто рассматриваются аксиоматизируемые классы упорядоченных групп или тел.

Анализ истории доказательств (и передоказательств) основной теоремы алгебры о существовании корня у многочлена над полем комплексных чисел показал, что «роль топологии в «фундаментальной теореме» была сведена к единственному предложению, согласно которому, если многочлен с действительными коэффициентами меняет знак в некотором интервале, то он обращается в нуль (теорема Больцано для многочленов). Тенденция приписывать преобладающее значение структуре упорядоченности действительных чисел сказывается также в определении действительных чисел методом «сечений» Дедекинда, хотя этот метод, в сущности, приложим ко всякому упорядоченному множеству. В ходе этих исследований не могли не заметить, что существенную роль при этом играет не столько топология, сколько структура упорядоченности R. Этот ход мыслей нашел свое завершение в абстрактной теории упорядоченных полей, созданной Артином и Шрейером. Одним из ее наиболее замечательных результатов является, конечно, открытие, что существование отношения порядка в поле связано с его чисто алгебраическими свойствами» (Бурбаки [1]). Последнее замечание полностью относится к линейно упорядоченным группам.

Класс упорядочиваемых групп содержит большинство изучаемых классов групп без кручения. Абелевы группы без кручения, нильпотентные группы без кручения, свободные разрешимые, свободные полинильпотентные и свободные группы являются упорядочиваемыми группами.

Существенной чертой собирательного процесса в теории групп является введение порядка на свободной группе.

Класс упорядочиваемых групп приобрел популярность среди специалистов по теории групп. Одним из первых примеров простых групп без кручения был пример Чехата упорядоченной простой группы. Затем Холлом были построены различные серии упорядоченных простых групп. Эти примеры имеют важное значение для общей теории групп и уже нашли в ней применение. Имеются также глубокие связи между группами автоморфизмов бесконечных моделей и группами автоморфизмов упорядоченных групп.

В настоящее время имеется ряд монографий по упорядоченным алгебраическим системам: Бурбаки [1], Биркгоф [1], Дюбрей-Жакотэн, Лесьер, Круазо [1], Жаффар [1], Рибенбойм [3], Фукс [8].

В настоящей книге излагается выделившаяся по методам и проблематике теория линейно упорядоченных групп. Большая часть книги посвящена результатам, не вошедшим в ранее написанные монографии, и изложение дается независимо от них.

Необходимые для чтения сведения из теории групп можно найти в известных монографиях А. Г. Куроша и

М. Холла. Ряд используемых теоретико-групповых фактов, не вошедших в эти монографии, изложен в дополнении.

Эта книга появилась благодаря неоднократным советам М. И. Каргаполова и ныне покойного А. И. Мальцева. Авторы выражают благодарность Д. М. Смирнову, Ю. Н. Мухину и Ю. И. Мерзлякову за сделанные ими замечания.

А. И. Кокорин,
В. М. Копытов

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A, M, G, \ldots$ — множества, группы, ...
$a, b, c, g, x, y, z, \ldots$ — элементы множеств, групп, ...
$i, j, k, m, n, \ldots$ — целые числа
$x \in A$ $(x \overline{\in} A)$ — элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству A
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ — объединение, пересечение, разность множеств A и B
$\bigcup_\alpha A_\alpha$, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ — объединение, пересечение семейств множеств A_α
$A \subseteq B$ $(A \subset B)$ — множество A есть (собственное) подмножество множества B
$\{x_\alpha\}$ — множество элементов x_α
$\{x \in A \mid \ldots\}$ — множество всех $x \in A$ со свойством ...
ϕ — пустое множество
$\leqslant$ — меньше или равно
$<$ — строго меньше
$\langle a, b\rangle$ — открытый отрезок, интервал
$H \cdot F$ — множество элементов вида hf, где $h \in H$, $f \in F$
H^{-1} — множество элементов вида h^{-1}, где $h \in H$
$\{A\}$ — группа, порожденная множеством A
$N_G(H)$ — нормализатор H в G
$C_G(H)$ — централизатор H в G
G/H — фактор-группа G по H
gH — смежный класс по подгруппе H
G' — коммутант группы G
E — единичная подгруппа
e — единица группы

$G \cong H$ — изоморфизм G и H

$[a, b]$ — коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ элементов a и b

$a^g = g^{-1}ag$ — элемент, сопряженный с a

$a^{g_1+\dots+g_n} = g_1^{-1}ag_1 \dots g_n^{-1}ag_n$ — произведение сопряженных элементов

$A \times B$, ΠA_α — прямое произведение

$\overline{\Pi}A_\alpha$ — полное прямое произведение

$A * B$, $\Pi^* A_\alpha$ — свободное произведение

$A \, r \, B$ — сплетение

$A \, \bar{r} \, B$ — полное сплетение

$A * B\,(H)$ — свободное произведение с объединенной подгруппой

$A \times B\,(H)$ — прямое произведение с объединенной подгруппой

$J_G(H)$ — изолятор H в G

$S(a, b, \dots)$ — инвариантная полугруппа, порожденная элементами $a, b, \dots$

$a \geqslant e$ — элемент a положительный

$a > e$ — элемент a строго положительный

$|a| = \max\{a, a^{-1}\}$ — модуль элемента a

$a \lll b$ — элемент a бесконечно мал по сравнению с b

P, $P(G)$ — полугруппа положительных элементов G

$\{x_\alpha\} \to x$ — последовательность $\{x_\alpha\}$ сходится к x

$\#$ — конец доказательства.

ГЛАВА I

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

§ 1. Частично упорядоченные алгебраические системы

1°. Множество A называется *частично упорядоченным*, если на нем определено отношение $\leqslant$ (меньше или равно), удовлетворяющее следующим условиям:

1. $a \leqslant a$ (рефлексивность);
2. если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$ (антисимметричность);
3. если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (транзитивность).

Отношение $\leqslant$ называется *частичным порядком*. Элементы a и b называются *сравнимыми*, если $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Частично упорядоченное множество, все элементы которого сравнимы между собой, называется *линейно упорядоченными*.

Частично упорядоченное множество M называется *решеткой* (или *структурой*), если для любой пары элементов a, $b \in M$ существуют такие $c \geqslant a$, b и $d \leqslant a$, b, что из a, $b \leqslant x$ следует $c \leqslant x$ и из a, $b \geqslant y$ следует $d \geqslant y$. При этом элемент c называется *объединением* или *точной верхней гранью* элементов a и b и обозначается $c = a \bigvee b$, а элемент d называется *пересечением* или *точной нижней гранью* элементов a и b и обозначается $d = a \bigwedge b$.

Частичный порядок на множестве естественным образом индуцирует частичный порядок на любом его подмножестве. Частичный порядок $\leqslant'$ называется *продолжением* заданного на том же множестве частичного порядка $\leqslant$, если из $a \leqslant b$ следует $a \leqslant' b$. Частичный порядок $\leqslant'$ называется *противоположным* к $\leqslant$, если $a \leqslant' b$ тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$.

Подмножество H частично упорядоченного множества M называется *выпуклым*, если из $a \leqslant x \leqslant b$ и a, $b \in H$ следует $x \in H$.

Говорят, что a строго меньше b, и пишут $a < b$, если $a \leqslant b$, $a \neq b$.

Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое его подмножество имеет наименьший элемент.

2°. Множество G называется *частично упорядоченной группой* (ч. у. группой), если оно является группой относительно операции умножения, частично упорядоченным множеством относительно частичного порядка $\leqslant$ и частичный порядок сохраняется при умножении справа и слева на элементы G, т. е.

(*) если $a \leqslant b$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in G$.

Условие (*) называют *законом однородности* или *монотонности*. Если частичный порядок в ч. у. группе линейный, то группа называется *линейно упорядоченной* (л. у.). Если в определениях упорядоченных групп потребовать сохранения порядка лишь при умножении справа, то получим *правоупорядоченные* группы. Если частичный порядок в ч. у. группе является решеткой, то группа называется *решеточно упорядоченной* или *структурно упорядоченной*. Группы частично, решеточно или линейно упорядоченные будем иногда называть *упорядоченными*.

Простейшими примерами упорядоченных групп могут служить аддитивная группа действительных чисел и мультипликативная группа положительных действительных чисел с их естественными порядками.

Операторная группа G с областью операторов Ω называется (частично, линейно) *Ω-упорядоченной*, если она упорядоченная и из $a \leqslant b$ следует $a^{\omega} \leqslant b^{\omega}$ для всех $\omega \in \Omega$. В частности, инвариантная подгруппа H упорядоченной группы G будет Ω-упорядоченной с областью операторов Ω, состоящей из внутренних автоморфизмов группы G. В последнем случае будем говорить, что подгруппа H является *G-упорядоченной* (или *Γ-упорядоченной*). Другие обобщения понятия ч. у. группы рассматривали Смирнов [2], Габович [2], Бриттон и Шеперд [1], Ригер [1], Шепперд [2], Конторович и Кокорин [1], Клиффорд [5].

3°. Множество K называется *частично упорядоченным кольцом* (ч. у. кольцом), если оно является кольцом относительно операций сложения и умножения, частично упорядоченным множеством относительно порядка $\leqslant$, и выполняются следующие аксиомы:

(а) если $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$ для всех $a, b, c \in K$;

(б) если $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in K$.

Ч. у. кольцо называется *линейно упорядоченным* (соответственно *решеточно упорядоченным*), если его порядок является линейным (решеточным).

Примером л. у. кольца является кольцо целых чисел с их естественным порядком. Кольцо действительных функций, непрерывных на некотором отрезке, является р. у. кольцом, если положить $f(x) \leqslant g(x)$ тогда и только тогда, когда $f(a) \leqslant g(a)$ для всех a, принадлежащих этому отрезку. Поле действительных чисел с их естественным порядком является л. у. полем.

4°. При определении упорядоченных алгебраических систем возможны различные подходы. Укажем на один из них.

Множество A называется частично упорядоченной алгебраической системой с областью монотонности C, если оно является алгеброй с операциями $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})$, $\alpha \in I$, ч. у. множеством относительно порядка $\leqslant$ и удовлетворяет аксиомам:

(1) $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha}) \in C$, если $x_1, \ldots, x_{n_\alpha} \in C$;

(2) если a, b сравнимы, то сравнимы

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\alpha}) \text{ и } f_\alpha(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots \\ \ldots, x_{n_\alpha})$$

для всех $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\alpha} \in C$, для каждого $\alpha \in I$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$.

§ 2. Простейшие свойства упорядоченных групп

1°. Приведем некоторые непосредственные следствия из определения:

(1) если $a < b$, то $c^{-1}ac < c^{-1}bc$;

(2) если $a < b$, то $b^{-1} < a^{-1}$;

(3) если $a < b$, $a' < b'$, то $aa' < bb'$.

Докажем, например, (2). Умножим соотношение $a < b$ слева на a^{-1}, затем справа на b^{-1} — получим $a^{-1}ab^{-1} < a^{-1}bb^{-1}$, т. е. $b^{-1} < a^{-1}$.

Элемент a называется *положительным* (*строго положительным*), если $a \geqslant e$ ($a > e$) и *отрицательным*, если $a \leqslant e$.

Множество положительных элементов ч. у. группы G будем обозначать через $P(G)$ или просто P. Частичный порядок $\leqslant$ в ч. у. группе G однозначно определяется множеством $P(G)$, так как $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ba^{-1} \in P(G)$ (или $a^{-1}b \in P(G)$). Поэтому в дальнейшем частичный порядок в G будем часто отождествлять с $P(G)$.

По свойству (1) $P(G)$ будет инвариантным множеством. По (2) $P(G)$ будет *чистым подмножеством* (т. е. таким, что $P(G) \cap P^{-1}(G) \subseteq \{e\}$). По (3) $P(G)$ будет полугруппой. Если G — л. у. группа, то по (2) $P(G)$ будет *линейным подмножеством* (т. е. таким, что $P(G) \cup P^{-1}(G) = G$).

Теорема 1. *Подмножество P группы G тогда и только тогда является множеством положительных элементов при некотором частичном (линейном) порядке группы, когда оно является инвариантной, чистой (и линейной) полугруппой с единицей.*

Доказательство. Достаточно показать, что если P — чистая инвариантная полугруппа с единицей в G, то в G можно ввести порядок, при котором P будет множеством положительных элементов. Положим $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in P$.

Так как $e = a \cdot a^{-1} \in P$, то $a \leqslant a$.

Пусть $a \geqslant b$, $b \geqslant a$, т. е. $ab^{-1} \in P$, $ba^{-1} \in P$. Но $ab^{-1} = (ba^{-1})^{-1}$, тогда $ab^{-1} = e$ и $a = b$. Пусть, далее, $a \geqslant b$, $b \geqslant c$, т. е. $ab^{-1} \in P$, $bc^{-1} \in P$. Тогда $ab^{-1}bc^{-1} \in \in P$, так как P — полугруппа и, значит, $ac^{-1} \in P$ или $a \geqslant c$. Наконец, если $a \geqslant b$, то $ab^{-1} \in P$ и, в силу инвариантности P, получаем $P \ni cab^{-1}c^{-1} = ca(cb)^{-1}$, т. е. $ca \geqslant cb$. С другой стороны, $ab^{-1} = ac \cdot c^{-1}b^{-1} \in P$ влечет $ac \geqslant bc$. #

Предложение 1. *Подмножество P группы G тогда и только тогда является множеством положительных элементов при некотором частичном (линейном) правом порядке группы G, когда оно является чистой (и линейной) полугруппой с единицей.* #

Пример 1. Пусть G — аддитивная группа комплексных чисел,

$$P_1(G) = \{x + iy \mid x > 0 \text{ или } x = 0,\ y \geqslant 0\},$$
$$P_2(G) = \{x + iy \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Тогда $P_1(G)$ определяет линейный порядок в G, $P_2(G)$ — решеточный порядок в G.

Пример 2. Пусть G — мультипликативная группа положительных рациональных чисел, $P(G)$ — множество натуральных чисел. Тогда G — р. у. группа.

Пример 3. Если G — мультипликативная группа вещественных чисел, $P(G)$ — совокупность элементов, больших 1 (в естественном порядке), то G — ч.у. группа, но не р.у. группа.

Пример 4. Пусть G — аддитивная группа многочленов над полем вещественных чисел,

$$P(G) = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid \text{ если } a_0 = a_1 = \ldots \\ \ldots = a_{i-1} = 0 \text{ и } a_i \neq 0, \text{ то } a_i > 0\}.$$

Тогда G — л.у. группа.

Пример 5. Пусть A — подгруппа аддитивной группы действительных чисел, B — наибольшая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел таких, что из $r \in B$ и $a \in A$ следует $ra \in A$. Рассмотрим множество $T = \{(r, a) \mid r \in B, a \in A\}$ с операцией умножения: $(r, a)\cdot(r', a') = (rr', ra' + a)$. Положим

$$P(T) = \{(r, a) \mid r > 1, \text{ либо } r = 1 \text{ и } a \geqslant 0\}.$$

Тогда T — л. у. группа. Отметим, что множество элементов вида $(1, a)$ образует подгруппу, изоморфную A, и при этом $(r, b)(1, a)(r, b)^{-1} = (1, ra)$, а множество элементов вида $(r, 0)$ — подгруппу, изоморфную B.

Пример 6. Группа G треугольных действительных матриц с положительными элементами на главной диагонали будет л. у., если в качестве P взять множество тех матриц, у которых «верхний» отличный от 1 элемент главной диагонали больше 1; либо при равенстве 1 всех элементов главной диагонали «верхний» отличный от 0 элемент, лежащий на ненулевой диагонали, «ближайшей» к главной, положителен. В частности, если взять

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; r \in B, \quad a \in A \right\},$$

то получается матричное представление группы T из примера 5.

Пример 7. Пусть $G = \prod A_\alpha$, где A_α — ч.у. группы. Положим

$$P = \{a = (\ldots, a_\alpha, \ldots) \in G | a_\alpha \geqslant e \text{ в } A_\alpha \text{ для всех } \alpha\}.$$

Тогда G — ч.у. группа.

2°. Группа, которую можно сделать л.у., называется *упорядочиваемой* (или *У-группой*, или *О-группой*).

Предложение 2. *Полное прямое произведение упорядочиваемых групп упорядочиваемо.*

Пусть $G = \overline{\prod} A_\alpha$ — полное прямое произведение л.у. групп A_α, множество индексов $\{\alpha\}$ которых вполне упорядочено. Введем в G порядок, называемый лексикографическим, следующим образом: $a = (\ldots, a_\alpha, \ldots)$ из G считаем положительным, если $a_\alpha \geqslant e$ в A_α и $a_\beta = e$ в A_β для всех $\beta < \alpha$. При этом порядке G будет л. у. группой. ⧺

Следствие 1. *Если группа аппроксимируется упорядочиваемыми группами, то она упорядочиваема.* ⧺

Предложение 3. *Абелева группа без кручения упорядочиваема.*

Абелеву группу G без кручения можно вложить в полную абелеву группу G^* без кручения. G^* является прямым произведением групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, и потому по предложению 2 упорядочиваема. Группа G как подгруппа упорядочиваемой группы G^* тоже будет упорядочиваемой. ⧺

Предложение 4. *Сплетение упорядочиваемых групп упорядочиваемо.*

Пусть $G = A \operatorname{r} B$ — сплетение л. у. групп. При этом $A \cong A_b$, где $b \in B$, и из $a_e \in A_e$, $b \in B$ следует $a_e^b = a_b$. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = a_{b_1} \ldots a_{b_k} b$, где $a_{b_i} \in A_{b_i}$, $b \in B$ и $b_1 < \ldots < b_k$ при линейном порядке в B. Считаем $g \in P$, если $b > e$ в B, либо $b = e$ и $a_{b_k} > e$ в A_{b_k}. Множество P определяет линейный порядок в G. ⧺

3°. Подгруппа H ч.у. группы G называется *выпуклой*, если H — выпуклое подмножество в G. Это понятие является в теории упорядоченных групп важнейшим. Фактор-группу G/H ч.у. группы G по выпуклой инвариантной подгруппе H можно сделать ч.у. группой следующим естественным способом: положим $aH \leqslant bH$ в G/H тогда и только тогда, когда $a' \leqslant b'$ в G для некоторых $a' \in aH$, $b' \in bH$. Приведенное определение эквивалентно такому: $P(G/H)$ есть образ $P(G)$ при гомоморфизме G на G/H. Так введенный порядок на фактор-группе называется *индуцированным*. При индуцированном порядке выпуклым подгруппам из G, содержащим H, соответствуют выпуклые подгруппы из G/H и обратно.

Групповой гомоморфизм φ ч.у. группы G в ч.у. группу F называется *порядковым гомоморфизмом*, или у-*гомоморфизмом* (*о-гомоморфизмом*), если из $a \leqslant b$ в G следует $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ в F или, что равносильно, если

$$\varphi(P(G)) \subseteq P(F).$$

Если при этом $\varphi(G) = F$ и $\varphi(P(G)) = P(F)$, то φ называется у-*эпиморфизмом*. Если φ, φ^{-1} есть у-эпиморфизмы, то φ называется у-*изоморфизмом*, а группы G и F называются у-*изоморфными*; у-изоморфизм ч.у. группы на себя называется у-*автоморфизмом*. Ясно, что множество у-автоморфизмов ч.у. группы образует группу.

Теорема 2. *Инвариантная подгруппа H ч.у. группы G тогда и только тогда является ядром некоторого* у-*гомоморфизма, когда она выпуклая: Если φ является* у-*эпиморфизмом G на $\bar{G}$ с ядром H, то фактор-группа G/H* у-*изоморфна $\bar{G}$.*

Доказательство. Пусть H — ядро у-гомоморфизма φ ч.у. группы G. Тогда из $a \leqslant x \leqslant b$ и $a, b \in H$ следует $\varphi(e) = \varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(b) = \varphi(e)$. Отсюда $\varphi(e) = \varphi(x)$, и, значит, $x \in H$, т. е. H выпукла.

Если H — инвариантная и выпуклая подгруппа ч.у. группы G, то гомоморфизм группы G на группу G/H с индуцированным порядком будет требуемым.

Если φ — порядковый эпиморфизм, то соответствие $\bar{g} \to \varphi^{-1}(\bar{g})$ будет у-изоморфизмом $\bar{G}$ и G/H.#

Предложение 5. (Фукс [8].) *Наименьшая выпуклая подгруппа H ч. у. группы G, содержащая подгруппу A, равна $AP(G) \cap AP^{-1}(G)$.*

Так как $AP(G) = P(G)A$, то $AP(G)$ и $AP^{-1}(G)$ — подполугруппы в G, а тогда $AP(G) \cap AP^{-1}(G)$ — подполугруппа и, так как $AP(G) \cap AP^{-1}(G) = AP(G) \cap (AP(G))^{-1}$, $AP(G) \cap AP^{-1}(G)$ есть подгруппа G. Если $e < x < c$, где $c \in AP(G) \cap AP^{-1}(G)$, то $x = ex \in AP(G)$ и $x = c(x^{-1}c)^{-1} \in AP^{-1}(G)$, следовательно,

$x \in AP(G) \cap AP^{-1}(G)$, откуда следует, что $AP(G) \cap \cap AP^{-1}(G)$ выпукла. Если же $ax = by^{-1} \in AP(G) \cap \cap AP^{-1}(G)$, где $a, b \in A$, x, $y \in P$, то $a \leqslant ax = by^{-1} \leqslant \leqslant b$, откуда следует, что $AP(G) \cap AP^{-1}(G) \subseteq H$. #

Ч. у. группа G, не содержащая нетривиальных (т. е. отличных от E и G) выпуклых инвариантных подгрупп, называется *у-простой*. Примером таковой будет аддитивная группа рациональных чисел. Существование некоммутативных у-простых групп дает следующий

Пример 8. (Клиффорд [2].) Пусть G — группа, порожденная символами $g(r)$, заданными для каждого рационального числа r, и удовлетворяющая определяющим соотношениям

$$g(r_1)\,g(r_2) = g\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)g(r_1) \quad \text{при} \quad r_1 > r_2.$$

Каждый элемент $a \neq e$ из G однозначно записывается в следующем виде:

$$a = g(r_1)^{m_1} \ldots g(r_k)^{m_k}, \quad r_1 < r_2 < \ldots < r_k, \quad m_i \neq 0.$$

Положим $a > e$, если $m_k > 0$. Тогда G становится л. у. группой, имеющей выпуклые подгруппы только следующих видов:

$$H_\alpha = \{a \in G \mid r_k < \alpha,\ \alpha \text{ — действительное число}\},$$
$$H^\alpha = \{a \in G \mid r_k \leqslant \alpha,\ \alpha \text{ — рациональное число}\}.$$

Группа G является у-простой.

Другие примеры у-простых групп даны Ригером [1], Б. Нейманом [1], Длабом [1] (см. также § 3 гл. IV).

Некоторые свойства порядковых гомоморфизмов рассматривались Шимбиревой [1] и Фуксом [4].

4°. Пусть G — операторная группа с областью операторов Ω. Элемент $a \in G$ называется *Ω-периодическим*, если найдутся такие $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$, что $a^{\omega_1 + \ldots + \omega_n} = e$. Если G не содержит Ω-периодических элементов, то она называется *группой без Ω-кручения*. В частности, если Ω — группа внутренних автоморфизмов группы G, то говорим соответственно о *G-периодических элементах* или о *группе без G-кручения*.

Предложение 6. *В ч. у. группе G элемент, сравнимый с единицей, не является G-периодическим элементом.*

Это следует из свойств (1) и (3) п. 1°. #

Следствие 2. *Упорядочиваемая группа G есть группа без G-кручения и, значит, без кручения.* #

Отметим, что ч.у. группа может содержать периодические элементы: такова, например, группа из примера 3.

Следующий интересный пример показывает, что существуют группы без кручения, не допускающие никаких нетривиальных порядков. Именно, будет построена группа G, являющаяся правоупорядоченной G-периодической группой без кручения.

Пример 9. (Горчаков [1].) Пусть группа G порождается элементами g_n $(n = 1,2, \ldots)$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$g_{n+1}^{-1} g_n g_{n+1} = g_n^{-1},$$

$$g_{n+1}^{-1} g_i g_{n+1} = g_i \qquad (i < n).$$

Каждый элемент группы G имеет вид $g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_n^{\alpha_n}$. Если $\alpha_n \neq 0$, то n — длина элемента g. Докажем индукцией по n, что для любого элемента g существуют такие элементы $h_1, h_2, \ldots, h_k$, что выполняется равенство $g^{h_1 + h_2 + \ldots + h_k} = e$. Для $n = 1$ утверждение очевидно, так как $g_2^{-1} g_1^{\alpha_1} g_2 = g_1^{-\alpha_1}$. Пусть для элементов длины, меньшей чем n, это утверждение уже доказано. Докажем его для элемента g длины n. Элемент

$$h = g_{n+1}^{-1} (g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n}) g_{n+1} (g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n}) =$$

$$= (g_1^{\alpha_1} \cdots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) g_n^{-\alpha_n} (g_1^{\alpha_1} \cdots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) g_n^{\alpha_n} =$$

$$= (g_1^{\alpha_1} \cdots g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) (g_1^{\alpha_1} \cdots g_{n-2}^{\alpha_{n-2}} g_{n-1}^{\alpha_{n-1} \cdot (-1)^{\alpha_n}})$$

имеет длину $n - 1$. Поэтому существуют такие элементы $r_1, r_2, \ldots, r_s$, что $h^{r_1 + r_2 + \ldots + r_s} = e$. Следовательно,

$$g^{g_{n+1} r_1 + r_1 + \ldots + g_{n+1} r_s + r_s} = e.$$

Поэтому группа G есть G-периодическая группа. Она является группой без кручения, так как имеет возрастающий инвариантный ряд с циклическими факторами без кручения:

$$E \subset \{g_1\} \subset \{g_1, g_2\} \subset \ldots \subset \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset \ldots$$

Положим $P(G) = \{g \mid g = g_1^{\alpha_1} \cdot g_2^{\alpha_2} \ldots g_n^{\alpha_n}, \ \alpha_n > 0)$. Ясно, что $P(G)$ — чистая линейная полугруппа и, следовательно, по предложению 1, G — правоупорядочиваемая группа.

Отметим, что существуют группы без кручения, не являющиеся правоупорядочиваемыми (см. Уайголд [1], Смирнов [7]).

ГЛАВА II

УСЛОВИЯ УПОРЯДОЧИВАЕМОСТИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПОДГРУППЫ

§ 1. Полугрупповые условия упорядочиваемости и доупорядочиваемости группы

В этом параграфе приводятся условия упорядочиваемости и доупорядочиваемости группы на языке, близком к теоретико-полугрупповому. Этот язык оказывается удобным при формулировке общих предложений теории упорядочиваемых групп. Применение его оправдывается и имеющимися приложениями.

1°. Если в группе частичный порядок $\leqslant'$ с полугруппой положительных элементов P' продолжает частичный порядок $\leqslant$ с полугруппой положительных элементов P, то $P \subseteq P'$.

Лемма 1. *Если P и Q — чистые инвариантные полугруппы в группе и $P \cap Q \subseteq E$, то множество PQ^{-1} будет также чистой инвариантной полугруппой.* ⧺

Всюду в дальнейшем через $S(a_1, \ldots, a_n)$ будем обозначать инвариантную полугруппу, порожденную элементами $a_1, \ldots, a_n$.

Теорема 1. (Фукс [6].) *Частичный порядок P группы G тогда и только тогда продолжается до линейного, когда*

(*) *для любого конечного множества элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$ можно так подобрать значения для $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, равные ± 1, что*

$$P \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi.$$

Притом, если P удовлетворяет условию (*) и $a \in G$, то либо $PS(e, a)$, либо $PS(e, a^{-1})$ определяет частичный порядок P' в G, который также удовлетворяет условию (*).

Доказательство. Необходимость. Пусть Q — линейный порядок, продолжающий P; a_i и ε_i таковы, что $a_i^{-\varepsilon_i} \in Q$. Тогда $S^{-1}(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = S(a_1^{-\varepsilon_1}, \ldots$ $\ldots, a_n^{-\varepsilon_n}) \subseteq Q$. Отсюда, в силу чистоты Q, получаем $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \cap P = \phi$.

Докажем теперь справедливость второго предложения теоремы. Пусть, напротив, P удовлетворяет (*), но найдется элемент $a \in G$ такой, что $PS(e, a)$ и $PS(e, a^{-1})$ не удовлетворяют (*). Тогда в G содержатся элементы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ такие, что для всяких $\varepsilon_i, \delta_j = \pm 1$ пересечения $S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ и $S(a^{-1}, b_1^{\delta_1}, \ldots, b_m^{\delta_m})$ с P не пустые. Но тогда и

$$S(a^{\varepsilon}, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}, b_1^{\delta_1}, \ldots, b_m^{\delta_m}) \cap P \neq \phi$$

ни при каком наборе $\varepsilon, \varepsilon_i, \delta_j = \pm 1$. А это противоречит условию (*). Таким образом,

(**) для любого $a \in G$ при некотором фиксированном ε, равном ± 1, для всяких $a_1, \ldots, a_n$ найдутся такие $\varepsilon_i =$ $= \pm 1$, что

$$P \cap S(a^{\varepsilon}, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi$$

и, в частности, $P \cap S(a^{\varepsilon}) = \phi$. В силу леммы 1, полугруппа $P' = PS^{-1}(e, a^{\varepsilon}) = PS(e, a^{-\varepsilon})$ определит в G частичный порядок, удовлетворяющий (*), так как из

$$PS(e, a^{-\varepsilon}) \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \phi$$

следует

$$P \cap S(a^{\varepsilon}, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \phi,$$

а это противоречит (**).

Достаточность. Пусть Q — максимальный порядок, продолжающий P и удовлетворяющий (*). Такой существует, так как объединение линейно упорядоченных по включению частичных порядков, удовлетворяющих условию (*), также удовлеторяет этому условию. Тогда по доказанному $Q = QS(e, a)$, либо $Q = QS(e, a^{-1})$ и, значит, порядок Q линейный. #

Если в доказанной теореме положить $P = E$, то получается

Теорема 2. (Ониси [2], Лось [1].) *Группа G упорядочиваема тогда и только тогда, когда для любого* *конечного множества ее элементов* $a_1, \ldots, a_n$, *отличных от единицы, можно подобрать такие значения для* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, *равные* ± 1, *что*

$$e \overline{\in} S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}). \#$$

Теорема 3. (Лоренцен [2].) *Группа упорядочиваема тогда и только тогда, когда для любого конечного множества ее элементов* $a_1, \ldots, a_n$, *отличных от единицы,*

$$\bigcap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi,$$

где пересечение берется по всем наборам $\varepsilon_i = \pm 1$.

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 2 и того факта, что пересечение 2^n полугрупп $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ при фиксированных a_i и всевозможных $\varepsilon_i = \pm 1$ либо является подгруппой, либо пусто. #

Объединение линейно упорядоченных по включению чистых инвариантных полугрупп — снова чистая инвариантная полугруппа, а потому по лемме Цорна всякий частичный порядок содержится в далее не продолжаемом *максимальном* порядке. Группы, у которых всякий максимальный порядок является линейным, назваются *доупорядочиваемыми* (*У*-группами*, *O*-группами*). Другими словами, в доупорядочиваемой группе каждый частичный порядок продолжается до линейного.

Следствие 1. (Мальцев [5], Б. Нейман [3].) *Группа упорядочиваема (доупорядочиваема) тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа с конечным числом образующих упорядочиваема (доупорядочиваема).*

Пусть каждая конечнопорожденная подгруппа группы G упорядочиваема, а сама G неупорядочиваема. Тогда по теореме 3 в G найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, отличные от e, что $\bigcap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \phi$. Отсюда вытекает, что это пересечение не пусто и в некоторой конечнопорожденной подгруппе группы G, что противоречит предположению. #

Отметим, что оба утверждения этого следствия легко получаются применением локального принципа Мальцева (Мальцев [8], Каргаполов, Мерзляков [1]).

Следствие 2. (Лось [1].) *Класс упорядочиваемых групп аксиоматизируем и, более того, является квазимногообразием.*

Используя теорему 3, можно упорядочиваемые группы выделить с помощью аксиом, формулируемых на языке узкого исчисления предикатов. Иначе этот факт можно установить, сославшись на следующий известный результат (см., например, Кон [2]): класс алгебр, замкнутый относительно полных прямых произведений и взятия подалгебр, а также содержащий одноэлементную алгебру, образует квазимногообразие. ⌗

Отметим, что класс упорядочиваемых групп не является многообразием, так как он не замкнут относительно гомоморфизмов.

Теорема 4. (Тулли [1].) *Группа G упорядочиваема тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *для каждого $g \in G$, $g \neq e$, существует подмножество $\hat{S}(g) \subseteq G$ такое, что $\hat{S}(g) \ni g$, $\hat{S}(g) \not\ni e$, и для любых $x, y \in G$ имеет место $x \cdot \hat{S}(g) \cdot y \subseteq \hat{S}(g)$ или $x \cdot \hat{S}(g) \cdot y \supseteq \hat{S}(g)$.*

(2) *существует система Σ подмножеств S группы G такая, что $E = \bigcap\limits_{S \in \Sigma} S$ и для любого $S \in \Sigma$ имеет место $xSy \subseteq S$ или $xSy \supseteq S$ для всяких $x, y \in G$.*

Доказательство. Если группа G упорядочиваема, то условия (1) и (2) выполняются: если $g \in G$, то $\hat{S}(g) = \{x \mid x \geqslant g\}$, если $g > e$, и $\hat{S}(g) = \{x \mid x \leqslant g\}$, если $g < e$. В качестве Σ берем два множества: $P = \{x \mid x \geqslant e\}$ и P^{-1}.

Из (1) выведем (2). В качестве Σ достаточно взять совокупность множеств $G \setminus \hat{S}(g)$.

Пусть выполнено условие (2). Тогда для каждого $S \in \Sigma$ обозначим через $I(S)$ множество таких x, что для любых $a, b \in G$ включение $ab \in S$ влечет $axb \in S$. Каждое $I(S)$ является инвариантной подполугруппой в группе G. Действительно, если $x, y \in I(S)$, то $ab \in S$ влечет $ayb = a \cdot yb \in S$, но тогда, по определению, $a \cdot x \cdot yb \in S$, т. е. $xy \in I(S)$. Если $c \in G$ и $ab \in S$, то $ac^{-1} \cdot cb = ab \in S$, и тогда $ac^{-1}xcb \in S$, т. е. $c^{-1}xc \in I(S)$. Кроме того, если $x \in G$, то x или $x^{-1} \in I(S)$. Пусть $x \notin I(S)$. Тогда найдутся такие $a, b \in G$, что $ab \in S$, но $axb \notin S$. Пусть $cd \in S$. Тогда $axc^{-1}Sd^{-1}b \supseteq S$, так как $axc^{-1}cdd^{-1}b = axb \notin S$. Отсюда следует, что

$cx^{-1}a^{-1}Sb^{-1}d \subseteq S$ и $cx^{-1}d = cx^{-1}a^{-1}abb^{-1}d \in S$, т. е. $x^{-1} \in I(S)$.

Вполне упорядочим множество Σ: $S_0 \prec S_1 \prec \ldots \prec S_\alpha \ldots$ Пусть P — совокупность всех тех $x \in G$, что x лежит в некотором $I(S_\alpha)$, $S_\alpha \in \Sigma$, но $x^{-1} \overline{\in} I(S_\alpha)$, причем для всех $S_\beta \prec S_\alpha$ x, $x^{-1} \in I(S_\beta)$. Как легко проверить, P — чистая инвариантная полугруппа, не содержащая e. Кроме того, $P \cup e$ — линейная полугруппа, так как если бы $xx^{-1} \in I(S_\alpha)$ при всех $S_\alpha \in \Sigma$, то, по определению $I(S_\alpha)$ (так как $e \in S_\alpha$), $x = exe \in S_\alpha$ для всех S_α и тогда $x = e$, что невозможно.

Итак, $P \cup e$ есть полугруппа положительных элементов группы G при некотором линейном порядке. #

В работах К у т ы е в а [3], [4] и Ш е в р и н а [1] даются условия упорядочиваемости в терминах структуры подполугрупп группы.

2°. Выделим следующее условие, которое будет использоваться в дальнейшем:

(У*) если b, $c \in S(a)$, то $S(b) \cap S(c) \neq \phi$.

Л е м м а 2. *Элемент a группы G без G-кручения тогда и только тогда сравним с единицей при любом максимальном порядке группы, когда он удовлетворяет условию* (У*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Допустим, что b, $c \in S(a)$ и $S(b) \cap S(c) = \phi$. Тогда по лемме 1 полугруппа $P = S(e, b) \cdot S^{-1}(e, c)$ определит в G частичный порядок. Если Q — максимальный порядок, содержащий P, то $b \in Q$, $c^{-1} \in Q$. Но это противоречит предположению, что a сравним с единицей при порядке Q.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть в группе G, удовлетворяющей условиям леммы, задан частичный порядок P. Тогда

(***) если $P \cap S(a) \neq \phi$, то $P \cap S^{-1}(a) \subseteq E$.

Действительно, пусть, напротив, $x \in P \cap S(a)$ и $y \in P \cap S^{-1}(a)$. Тогда из x^{-1}, $y \in S^{-1}(a) = S(a^{-1})$ и условия (У*) получаем $S(x^{-1}) \cap S(y) \neq \phi$, т. е. имеем противоречие с тем, что $S(x^{-1}) \subseteq P^{-1}$, $S(y) \subseteq P$ и $P^{-1} \cap \cap P = E$.

Если теперь P — максимальный порядок, то, в силу (***) и леммы 1, либо $a \in P$, либо $a^{-1} \in P$. #

Подгруппа H группы G называется *G-доупорядочиваемой* (*Г-доупорядочиваемой*), если любой максимальный порядок G индуцирует на H линейный порядок.

Следствие 3. *Подгруппа H группы G без G-кручения G-доупорядочиваема тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют условию* (У*). #

Теорема 5. (Ониси [1].) *Группа G является доупорядочиваемой тогда и только тогда, когда она без G-кручения и каждый ее элемент удовлетворяет условию* (У*). #

Замечание. Результаты этого параграфа справедливы для операторных групп. Соответствующие определения и формулировки предложений естественны, а доказательства аналогичны. При этом роль $S(a, \ldots)$ играет минимальная допустимая относительно области операторов Ω полугруппа $S_\Omega(a, \ldots)$. Отметим также, что утверждения этого параграфа, как показал Смирнов [4], могут быть перенесены на мультиоператорные группы.

В гл. VI будет показано, что существуют упорядочиваемые группы, не являющиеся доупорядочиваемыми, и что множество элементов упорядочиваемой группы, удовлетворяющих условию (У*), не всегда образуют подгруппу.

Следствие 4. (Поддерюгин [1].) *Абелева группа с коммутативной областью операторов Ω является Ω-доупорядочиваемой тогда и только тогда, когда она без Ω-кручения.*

Пусть $b, c \in S_\Omega(a)$, т. е. $b = a^\omega$, $c = a^\vartheta$, где $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_n$, $\vartheta = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_m$, $\omega_i, \vartheta_j \in \Omega$. Тогда $b^\vartheta = c^\omega = a^{\omega\vartheta} = a^{\vartheta\omega} \in S_\Omega(b) \cap S_\Omega(c)$ и, в силу теоремы 5 и замечания, группа является Ω-доупорядочиваемой. #

Предложение 1. *Если элемент удовлетворяет условию* (У*), *то этому условию удовлетворяет также и его образ в любой фактор-группе. Если фактор-группа G доупорядочиваемой группы является группой без G-кручения, то она доупорядочиваема.* #

§ 2. Архимедовы группы. Групповые условия упорядочиваемости

1. В этом пункте приводится описание архимедовых групп. Ч. у. группа называется *архимедовой*, если из $a^n < b$ для любых целых n следует $a = e$.

Модуль $|a|$ элемента a л. у. группы определяется равенством $|a| = \max\{a, a^{-1}\}$.

Л. у. группа является архимедовой, если для любых отличных от единицы элементов a и b существует такое целое n, что $|a|^n > |b|$ или, что равносильно, если в ней нет выпуклых подгрупп, отличных от тривиальных.

Предложение 1. *Аддитивная группа рациональных чисел допускает только два линейных порядка, которые взаимно противоположны.* #

Теорема 1. (Гёльдер [1].) *Архимедова л. у. группа коммутативна и, более того, у-изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел с их естественным порядком.*

Доказательство. Докажем сначала коммутативность архимедовой группы G. Для этого рассмотрим два случая: (1) в G существует наименьший строго положительный элемент a, т. е. такой, для которого из $e \leqslant x < a$ следует $x = e$, (2) в G нет наименьшего строго положительного элемента.

(1). Для любого $b \in G$, в силу архимедовости, найдется такое целое n, что $a^n \leqslant b < a^{n+1}$, отсюда $e \leqslant ba^{-n} < a$, а потому $ba^{-n} = e$ и $b = a^n$. Следовательно, G — циклическая группа.

(2). В этом случае для всякого $a > e$ установим существование такого $c > e$, что $c^2 \leqslant a$. Действительно, найдется y такой, что $e < y < a$. Если $y^2 < a$, то положим $c = y$. Если $y^2 > a > y$, то $e > y^{-1}ay^{-1} > y^{-1}$, откуда $a > (ay^{-1})(ay^{-1}) > ay^{-1}$ и, так как $ay^{-1} > e$ можно взять $c = ay^{-1}$. Допустим теперь, что $ab \neq ba$, $a, b > e$ и, для определенности, $d = [a, b] > e$. По доказанному существует $c > e$, удовлетворяющий неравенствам $c^2 < d$, $c < a, b$. В силу архимедовости существуют такие целые n и m, что $c^n \leqslant a < c^{n+1}$, $c^m \leqslant b < c^{m+1}$. Отсюда $ab < c^{n+m+2}$, $a^{-1}b^{-1} \leqslant c^{-(n+m)}$ и, значит, $a^{-1}b^{-1}ab < c^2$ или $d < c^2$, а это противоречит выбору c. Коммутативность G доказана.

Для доказательства у-изоморфизма группы G с подгруппой аддитивной группы действительных чисел вложим G в минимальную полную абелеву группу G^*. Введем в G^* порядок $P(G^*) = \{a \in G^* \mid a^n \in P(G)$ для некоторого строго положительного $n\}$. Так как G^*/G — периодическая группа, то G^* будет л. у. и также архимедовой. Возьмем, далее, подгруппу Q из G^*, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел. Такая найдется, так как G^*, как полная абелева группа без кручения, является прямым произведением групп, изоморфных Q. Индуцированный на Q порядок можно считать, в силу предложения 1, таким же, как на рациональных числах. Таким образом, можно отождествить Q с аддитивной группой рациональных чисел с их естественным порядком. При этом каждому элементу $g \in G^*$ будет соответствовать сечение Дедекинда в области рациональных чисел Q, которому в свою очередь соответствует некоторое действительное число. Указанное соответствие будет требуемым у-изоморфизмом. #

П р е д л о ж е н и е 2. *Если A и A_1 — подгруппы аддитивной группы действительных чисел с их естественным порядком, а φ есть у-изоморфизм A на A_1, то существует такое действительное число $r > 0$, что $\varphi(a) = ra$ для всех $a \in A$.*

Допустим противное: $\varphi(a_1):\varphi(a_2) \neq a_1:a_2$ и, для определенности, $\varphi(a_1):\varphi(a_2) < a_1:a_2$. Тогда существует рациональное число $m:n$ такое, что $\varphi(a_1):\varphi(a_2) < m:n < a_1:a_2$, откуда получаем противоречивые неравенства $ma_2 < na_1$, $m\varphi(a_2) > n\varphi(a_1)$. #

С л е д с т в и е 1. *Группа у-автоморфизмов архимедовой группы изоморфна подгруппе мультипликативной группы положительных действительных чисел.* #

Аксиоматическому замыканию архимедовых групп посвящены работы Р а у т е н б е р г а [1], З а к о н а [1], Р о б и н с о н а и З а к о н а [1], К о н р а д а [10].

2°. Система подгрупп, линейно упорядоченных по включению, называется *полной*, если она содержит объединение и пересечение любого множества своих подгрупп. Подмножество H группы G называется *инфраинвариантным*, если $H \subseteq H^g$ или $H \supseteq H^g$ для любого $g \in G$. Система Σ подгрупп группы G называется *инфраинвариантной*, если она полная, $E, G \in \Sigma$ и из $H \in \Sigma$ следует $H^g \in \Sigma$ для любого $g \in G$.

Под *скачком* $A \subset B$ полной системы Σ понимается такая пара подгрупп A и B из Σ, что между A и B нет других подгрупп из Σ. Каждый элемент $g \neq e$ из группы определит скачок $A \subset B$ в Σ, если в качестве A взять объединение подгрупп из Σ, не содержащих g, а в качестве B — пересечение подгрупп, содержащих g. Если $A \subset B$ —

скачок инфраинвариантной системы, то A инвариантна в B и $N(A)$ (нормализатор A) совпадает с $N(B)$.

Предложение 3. (Ивасава [1], Мальцев [4].) *Система Σ всех выпуклых подгрупп л.у. группы G инфраинвариантна, и если $A \subset B$ — скачок из Σ, то фактор-группа B/A изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел, а группа автоморфизмов группы B/A, порожденная внутренними автоморфизмами группы $N(A)/A$, изоморфна подгруппе мультипликативной группы положительных действительных чисел.*

Инфраинвариантность системы Σ доказывается непосредственно. Фактор-группа B/A при индуцированном порядке не содержит выпуклых подгрупп и, значит, является архимедовой. Отсюда, из теоремы 1 и следствия 1 вытекают доказываемые утверждения, касающиеся B / A. #

3°. Элемент a называется *бесконечно малым по сравнению* с b — символически $a \ll b$, — если $|a|^n < |b|$ справедливо для любых целых n. Если не выполнено ни $a \ll b$, ни $b \ll a$, то a и b называются *архимедовски эквивалентными*.

Предложение 4. *В л. у. группе:* (1) *архимедовски эквивалентные элементы определяют один и тот же скачок в системе выпуклых подгрупп и* (2) *$a \ll b$ тогда и только тогда, когда существует выпуклая подгруппа, содержащая a и не содержащая b.* #

Теорема 2. (Чехата [2].) *Для любых элементов л. у. группы справедливо соотношение*

$$|[a, b]| \ll \max\{|a|, |b|\}.$$

Доказательство. Пусть $H = \{a, b\}$, $|a| > |b|$ и $B \subset A$ — скачок выпуклых подгрупп из H, определяемый элементом a. Из выпуклости A и $|a| > |b|$ следует $b \in A$ и, значит, $A = H$. Коммутативность A/B влечет $[a, b] \in B$, откуда по предложению 4 вытекает $|[a, b]| \ll \ll |a|$. #

Отметим, что даже $|[a, b]| < \min\{|a|, |b|\}$ не всегда имеет место (Чехата [3]). Это можно обнаружить на группе из примера 5 § 2 гл. I, взяв $a = (1/3, 0)$, $b = (1,1)$.

Следствие 2. (Леви [3].) *Коммутант л. у. группы с конечным числом образующих содержится в собственной выпуклой подгруппе.*

Пусть $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $|a_1| \geqslant |a_i|, i = 2, \ldots, n$. Тогда наибольшая выпуклая подгруппа, не содержащая a_1, ввиду предложения 4 и теоремы 2 будет требуемой. #

Напомним, что если в группе G каждая конечнопорожденная подгруппа имеет не более r образующих и есть конечнопорожденные подгруппы с минимальным числом образующих, равным r, то говорят, что группа имеет *конечный специальный ранг* r (см. Курош [1] и Плоткин [2]). Известно, что в разрешимой группе конечного специального ранга можно построить нормальный ряд $E \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_s = G$, факторы которого — абелевы группы ранга 1, и в этом ряду содержится в точности r факторов G_i/G_{i-1} без кручения.

Предложение 5. *Разрешимая выпуклая подгруппа H л.у. группы G, имеющая конечный специальный ранг, инвариантна в G.*

Действительно, если H не инвариантна, то найдется такой $x \in G$, что $H^x \subset H$. Но так как H^x изолирована в H, то специальный ранг H^x меньше ранга H, что противоречит тому, что H^x изоморфна H. #

Предложение 6. *В л. у. нильпотентной группе G для любых ее элементов a, b справедливо соотношение $|[a, b]| \leqslant |a|$.*

Достаточно рассмотреть в G подгруппу $H = \{a, b\}$. Так как H конечнопорождена и нильпотентна, то ее специальный ранг конечен, откуда следует, что она имеет только конечное число выпуклых подгрупп и все эти подгруппы инвариантны:

$$E \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = H.$$

Пусть a принадлежит скачку $H_i \setminus H_{i-1}$. Тогда $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ лежит в подгруппе H_i, так как H_i инвариантна в H. Нам необходимо показать, что $[a, b] \in H_{i-1}$. Предположим, что это не так, т. е. что $[a, b] \in H_i \setminus H_{i-1}$. Используя предложение 3, зафиксируем изоморфизм φ фактор-группы H_i/H_{i-1} с подходящей подгруппой $C = \varphi(H_i/H_{i-1})$ аддитивной группы вещественных чисел так, чтобы элемент b индуцировал в C умножение всех элементов на некоторое положительное число α, т. е. чтобы $\varphi(b^{-1}xb \cdot H_{i-1}) = \alpha\varphi(xH_{i-1})$ для всех $x \in H_i$ ($\alpha x \in C$, если $x \in C$). По предположению $[a, b] \overline{\in} H_{i-1}$, т. е. $\varphi(a^{-1}b^{-1}abH_{i-1}) \neq 0$ в C, откуда следует $\alpha \neq 1$. Но тогда $\varphi([x, b]\cdot H_{i-1}) = (\alpha - 1)\varphi(xH_{i-1})$ для любого $x \in H_i$, откуда $\varphi(\underbrace{[\ldots[a, b],\ldots, b]}_{s} H_{i-1}) = (1-\alpha)^s\varphi(aH_{i-1})$ и, так как $\varphi(aH_{i-1}) \neq 0$ в C, $(1-\alpha)^s\varphi(aH_{i-1}) \neq 0$ в C при любом s, т. е. $[\ldots[a, b],\ldots, b]$ не попадает в H_{i-1} ни при каком s, что противоречит нильпотентности H.#

Предложение 7. *Для элементов группы G без G-кручения справедливы соотношения:*

(1) *если* $a^{g_1+g_2+\ldots+g_n} = b^{g_1+g_2+\ldots+g_n}$, *то* $a = b$

(Фукс [8], В. Г. Виляцер);

(2) *если* $[[a^m, b], a^n] = e$, *то* $[[a, b], a] = e$

(Б. Нейман [1], П. Г. Конторович).

(1). Действительно,

$$e = (b^{-1})^{g_n+\ldots+g_1}\cdot a^{g_1+\ldots+g_n} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (b^{-1})^{g_n+\ldots+g_{i+1}} (b^{-1}a)^{g_i} b^{g_{i+1}+\ldots+g_n},$$

т. е. некоторое произведение сопряженных с $b^{-1}a$ равно e. Отсюда $b^{-1}a = e$ и $b = a$.

(2). Для доказательства воспользуемся тождеством (при $m > 0$)

$$[[a^m, b], a] = [\prod_{i=m-1}^{0} a^{-i}[a, b]a^i, a] =$$

$$= \prod_{i=m-1}^{0} t_i^{-1}[a^{-i}[a, b]a^i, a]t_i =$$

$$= \prod_{i=m-1}^{0} (a^it_i)^{-1}[[a, b], a](a^it_i),$$

где t_i равны некоторым произведениям $\Pi a^{-i}[a, b]a^i$ (аналогичное тождество верно и для $m < 0$). Таким образом,

$$[[a^m, b], a^n]^\varepsilon \in S([[a^m, b], a]^\varepsilon) \subseteq S([[a, b], a]),$$

откуда вытекает (2).#

Следствие 3. *Группа G без G-кручения является R-группой (т. е. группой с однозначным извлечением корня).*#

Заметим, что в л.у. группе $[[a^m, b], c] = e$ совместимо с $[[a, b], c] \neq e$ (Б. Нейман [1]), а $[[[a, b^m], a], a] = e$ с $[[[a, b], a], a] \neq e$ (Чехата [4]).

4°. Переходим к изложению условий упорядочиваемости групп на языке, близком к теоретико-групповому.

Теорема 3. (Кокорин [7].) *Группа G упорядочиваема тогда и только тогда, когда в ней существует инфраинвариантная система Σ подгрупп, удовлетворяющая условию: если $A \subset B$ — скачок из Σ, то фактор-группа B/A является $N(A)/A$-упорядочиваемой (или $N(A)/A$-доупорядочиваемой). Притом в G существует порядок, при котором все подгруппы из Σ выпуклы.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 3. Докажем достаточность. Множество всех скачков $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ системы Σ разобьем на непересекающиеся классы $\{H_\alpha^g \subset H_{\alpha+1}^g \mid g \in G\}$ сопряженных скачков и в каждом классе выберем по одному представителю $H_\alpha^* \subset H_{\alpha+1}^*$, $\alpha \in I$.

Возьмем полугруппу $\bar{P}_\alpha^*$ строго положительных элементов фактор-группы $H_{\alpha+1}^*/H_\alpha^*$ при некотором ее линейном $N(H_\alpha^*)/H_\alpha^*$-упорядочении. Пусть теперь P_α^* — полный прообраз $\bar{P}_\alpha^*$ в группе $H_{\alpha+1}^*$ и $P_\alpha = \bigcup_{g \in G} (P_\alpha^*)^g$. Тогда $P = \bigcup_{\alpha \in I} P_\alpha \cup e$ в силу построения будет чистой инвариантной и линейной полугруппой в G и, значит, определит в группе G линейный порядок.

Выпуклость подгруппы H_α скачка $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ следует из того, что $P_\alpha^* H_\alpha = P_\alpha^*$. Произвольная подгруппа H_γ из Σ является пересечением меньших подгрупп скачков из Σ и, как пересечение выпуклых подгрупп, выпуклая. $\#$

Аналогично получается

Теорема 4. (Леви [3].) *Если фактор-группа G/H группы G по инвариантной линейно (частично) G-упорядоченной подгруппе H линейно (частично) упорядочена, то в группе G можно ввести такой линейный (частичный) порядок, при котором индуцированные порядки на H и G/H будут совпадать с заданными на них, и подгруппа H будет выпуклой в G.* $\#$

Следствие 4. *Локально нильпотентные группы без кручения упорядочиваемы.*

Так как справедлива локальная теорема (следствие 1 § 1), то можно считать группу нильпотентной. Верхний центральный ряд группы в этом случае будет удовлетворять условиям теоремы 3. #

Следствие 5. *Локально свободные группы упорядочиваемы.*

Возьмем в свободной группе F систему Σ из членов нижнего центрального ряда и их пересечения, равного, как известно, единице. Σ удовлетворяет условиям теоремы, так как фактор-группы F_n/F_{n+1} являются абелевыми группами без кручения.

Упорядочиваемость свободных групп была замечена Г. Биркгофом (см. Фукс [8]), а также Шимбиревой [1], Ивасавой [1], Нейманом [1].

Теорема 5. (Ивасава [1], Б. Нейман [1].) *Каждая л.у. (ч.у.) группа является у-эпиморфным образом некоторой л.у. (ч.у.) свободной группы.*

Доказательство. Пусть G — л.у. группа. Она, как абстрактная группа, изоморфна фактор-группе F/H некоторой свободной группы F. Введем в F/H такой порядок, чтобы F/H была у-изоморфна G, а H линейно F-упорядочим.

Последнее можно сделать в силу следствия 5. Применение теоремы 4 завершает доказательство. #

Подмножество H группы G называется *строго изолированным* в G, если из $a^{e+g_1+\dots+g_n} \in H$, $g_1, \dots, g_n \in G$, следует $a \in H$. Строгая изолированность единицы группы равносильна тому, что группа G является группой без G-кручения.

Теорема 6. (Мальцев [4], Поддерюгин [1], Ригер [1].) *Группа G упорядочиваема тогда и только тогда, когда в ней существует разрешимая инфраинвариантная система Σ, удовлетворяющая условиям:*

(*) *если $A \subset B$ — скачок из Σ, то группа A строго изолирована в $N(A)$ (т. е. $N(A)/A$ — группа без $N(A)$-кручения),*

$$(**) \qquad [[N(A), N(A)], B] \subseteq A$$

(т. е. внутренние автоморфизмы из $N(A)/A$ перестановочны на B/A). Притом подгруппы из Σ будут выпуклыми при некотором линейном порядке группы.

Доказательство. Покажем эквивалентность «коммутаторного» условия (**) перестановочности внутренних автоморфизмов $N(A)/A$ на B/A. Тогда необходимость условий теоремы будет следовать из предложения 3, а достаточность — из теоремы 3 и следствия 4 § 1.

Действительно, если указанные автоморфизмы перестановочны, то для любых $a, b \in N(A)$ и $c \in B$ будет $a^{-1}b^{-1}cbaA = b^{-1}a^{-1}cabA$ или

$$[[a^{-1}, b^{-1}], c] = bab^{-1}a^{-1}c^{-1}aba^{-1}b^{-1}c \in A.$$

Обратное можно проверить также непосредственно. #

Заметим, что всякая выпуклая в G подгруппа H строго изолирована не только в $N(H)$, но и во всей G. Действительно, если $a \overline{\in} H$, то $|a| \gg |h|$ для любых $h \in H$, но тогда $|a^{e+g_1+\ldots+g_n}| \gg |h|$ и, следовательно, $a^{e+g_1+\ldots+g_n}$ не лежит в H ни при каких $g_1, \ldots, g_n \in G$.

Следствие 6. (Ивасава [1].) *Группа G упорядочиваема тогда и только тогда, когда в ней существует система подгрупп Σ, обладающая свойствами системы из предложения 3. Притом в G существует линейный порядок, при котором Σ будет системой всех выпуклых подгрупп.* #

Предложение 8. (Кокорин [8].) *Двуступенно разрешимая группа G без G-кручения упорядочиваема.*

Изолятор J коммутанта G' двуступенно разрешимой группы G будет абелевым в силу абелевости изолятора абелевой подгруппы в R-группе. Непосредственно проверяется, что система $E \subset J \subset G$ удовлетворяет условиям теоремы 6. #

Предложение 9. (Плоткин [1].) *Если все выпуклые подгруппы л.у. группы инвариантны, то она является расширением группы с центральной системой с помощью абелевой группы.*

Если Σ: $E \subset \ldots \subset A \subset B \subset \ldots \subset G$ — система всех выпуклых подгрупп из G, а G' — коммутант G, то система Σ': $E \subseteq \ldots \subseteq A \cap G' \subseteq B \cap G' \subseteq \ldots \subseteq G' \subset G$ есть центральная система в G', так как условие (**) теоремы 6 в этом случае имеет вид $[G', B] \subset A$, откуда следует, что $[G', G' \cap B] \subseteq G' \cap A$. #

Проблема 1. Справедливо ли утверждение, аналогичное следствию 2 для правоупорядоченных групп? (Д. М. Смирнов).

Проблема 2. Будет ли упорядочиваема (разрешимая) группа G без G-кручения? (см. § 3 гл. VI.)

Проблема 3. Будет ли правоупорядочиваемой (решеточно упорядочиваемой) группа G без G-кручения?

Проблема 4. Является ли инвариантная абелева подгруппа группы G без G-кручения G-упорядочиваемой?

Проблема 5. Упорядочиваема ли энгелева группа без кручения?

§ 3. Относительно выпуклые подгруппы

1°. Подгруппа упорядочиваемой группы называется *относительно выпуклой*, если она является выпуклой при каком-либо линейном порядке группы. Значение относительно выпуклых подгрупп определяется фундаментальностью понятия выпуклой подгруппы для теории упорядоченных групп. Как в дальнейшем будет проиллюстрировано, относительно выпуклые подгруппы тесно связаны с условиями упорядочиваемости, гомоморфизмами, описанием способов упорядочения, продолжениями порядков и частичными пополнениями групп. В частности, если инвариантная подгруппа является относительно выпуклой, то фактор-группа по ней упорядочиваема. Поэтому при отыскании общего признака относительной выпуклости подгруппы можно исходить из какого-либо необходимого и достаточного условия упорядочиваемости группы.

Теорема 1. *Подгруппа упорядочиваемой группы G относительно выпукла тогда и только тогда, когда она инфраинвариантна, и для любого множества элементов $a_1, \ldots, a_n \in G \setminus H$ можно подобрать значения для $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, равные ± 1, такие, что множество $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \setminus H$ есть полугруппа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H — выпуклая подгруппа в л.у. группе G. Тогда для любого набора a_i требуемые ε_i выбираются, исходя из условия $a_i^{\varepsilon_i} > e$.

Достаточность. Пусть подгруппа H удовлетворяет условиям теоремы. Замкнув систему всех подгрупп, сопряженных с H относительно объединения и пересечения подгрупп, и присоединив E и всю группу, получим систему Σ:

$$E \subset \overline{H} \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \widetilde{H} \subset G,$$

где $\overline{H} = \bigcap_{g\in G} H^g$, $\widetilde{H} = \bigcup_{g\in G} H^g$. В силу инфраинвариантности H и того, что объединение и пересечение полугрупп, линейно упорядоченных по включению, снова полугруппа, подгруппы из Σ также будут удовлетворять условиям теоремы, а $\overline{H}$ и $\widetilde{H}$ к тому же будут инвариантными. При доказательстве этого можно для любого набора a_i (или сопряженных с ними) выбирать $\varepsilon_i = \pm 1$ такие же, что и для H. Далее, если $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ — скачок из Σ, то группа $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ является $N(H_\alpha)/H_\alpha$-упорядочиваемой, так как условия теоремы переходят на группе $N(H_\alpha)/H_\alpha$ в условия упорядочиваемости, формулируемые в теореме 2 § 1. Таким образом, система Σ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 § 2, применение которой завершает доказательство. ⌗

Лемма 1. *Объединение и пересечение любого множества относительно выпуклых подгрупп, которые вместе со своими сопряженными подгруппами линейно упорядочены по включению, являются относительно выпуклыми подгруппами.*

Прежде отметим случай, когда подгруппы, удовлетворяющие условиям леммы, являются к тому же инвариантными. В этом случае утверждение леммы непосредственно вытекает из теоремы 2 § 1.

Пусть теперь Σ — система подгрупп

$$E \subset \overline{H} \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \widetilde{H} \subset G,$$

в которую входят: 1) данное множество Q относительно выпуклых подгрупп, 2) Q' — подгруппы, сопряженные с подгруппами из Q, 3) Q'' — объединения и пересечения любых множеств подгрупп из Q', в частности, $\overline{H}$ и $\widetilde{H}$ — пересечение и объединение всех подгрупп из Q', 4) единица и вся группа. Для доказательства теоремы достаточно показать, что Σ удовлетворяет условию теоремы 3 § 2, так как она инфраинвариантна по построению.

Действительно, пусть $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ — скачок из системы Σ. Подгруппа H_α есть объединение всех подгрупп H_γ, $H_\gamma \subseteq H_\alpha$, $H_\gamma \in Q'$. Если $H_\gamma \subseteq H_\alpha$, $H_\gamma \in Q'$ и $x \in N(H_\alpha)$, то $x^{-1}H_\gamma x \subseteq H_\gamma$ и $x^{-1}H_\gamma x \in Q'$. Для каждой

$H_\gamma \subseteq H_\alpha$ подгруппа $\overline{H}_\gamma = \bigcup_{x \in N(H_\alpha)} x^{-1} H_\gamma x$ инвариантна, относительно выпукла в $N(H_\alpha)$ и содержится в H_α, а $H_\alpha = \bigcup_{H_\gamma \subseteq H_\alpha} \overline{H}_\gamma$. Но тогда, как отмечено выше, H_α относительно выпукла в $N(H_\alpha)$. Отсюда следует, что группа $N(H_\alpha)/H_\alpha$ упорядочиваема. Аналогичные рассуждения проходят и для скачков $E \subset \overline{H}$ и $\overline{H} \subset G$. Применение теоремы 3 § 2 завершает доказательство. #

Теорема 2. (Кокорин [8].) *Пересечение относительно выпуклых подгрупп относительно выпукло тогда и только тогда, когда оно инфраинвариантно.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть $\{A_\gamma \mid \gamma \in I\}$ — множество относительно выпуклых подгрупп и пусть их пересечение $H = \bigcap_{\gamma \in I} A_\gamma$ инфраинвариантно.

В случае, если все A_γ инвариантны, справедливость утверждения теоремы следует из того, что группа, аппроксимируемая упорядочиваемыми группами, является упорядочиваемой.

В общем случае рассмотрим систему Σ подгрупп, в которую входят $E, G, \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$ и всевозможные пересечения и объединения из $\{g^{-1}Hg\}$. Покажем, что Σ удовлетворяет условиям теоремы 3 § 2.

Пусть $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ — скачок из Σ. Подгруппа H_α равна объединению всех $g^{-1}Hg$, содержащихся в ней, а $g^{-1}Hg = \bigcap g^{-1}A_\gamma g$. Обозначим через $\widetilde{A}_\alpha$ объединение тех $g^{-1}A_\gamma g$, для которых $g^{-1}Hg \subseteq H_\alpha$. Подгруппы $\widetilde{A}_\alpha \cap \cap N(H_\alpha)$ будут инвариантны в нормализаторе $N(H_\alpha)$ подгруппы H_α и по лемме 1 будут в $N(H_\alpha)$ относительно выпуклыми. Значит, по ранее отмеченному, их пересечение, равное H_α, будет относительно выпукло в $N(H_\alpha)$, откуда $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ является $N(H_\alpha)/H_\alpha$-упорядочиваемой группой. Применение теоремы 3 § 2 к системе Σ завершает доказательство. #

Следствие 1. *Пересечение относительно выпуклых подгрупп, линейно упорядоченных по включению, относительно выпукло.* #

Приведем пример, когда пересечение относительно выпуклых подгрупп не является относительно выпуклым. Пусть $G = \{a\} \wr \{b\}$ — сплетение бесконечных циклических групп, где $a_i^b = a_{i+1}$. Введем в G порядки так: $P =$

$= \{b \gg \ldots \gg a_{i+1} \gg a_i \gg \ldots\}$, $P' = \{b \gg \ldots \gg a_i \gg \gg a_{i+1} \gg \ldots\}$. Возьмем при порядке P выпуклую подгруппу $A = \prod_{i=-\infty}^{0} \{a_i\}$, а при порядке P' — выпуклую подгруппу $A' = \prod_{i=0}^{\infty} \{a_i\}$. Их пересечение $A \cap A' = \{a_0\}$ не инфраинвариантно и потому не относительно выпукло.

Предложение 1. *Объединение относительно выпуклых подгрупп, линейно упорядоченных по включению, относительно выпукло.*

Пусть H — объединение подгрупп A_γ, удовлетворяющих условию предложения, и Σ — система подгрупп, построенная с помощью H, как в доказательстве теоремы 2. Пусть $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ — скачок из Σ. Объединение $\tilde{A}_\gamma$ всех сопряженных к A_γ и содержащихся в H_α подгрупп будет инвариантно в нормализаторе $N(H_\alpha)$ и, по лемме 1, будет относительно выпукло в $N(H_\alpha)$. Отсюда и из леммы 1 H_α, как объединение инвариантных в $N(H_\alpha)$ относительно выпуклых подгрупп $\tilde{A}_\gamma$, относительно выпукла в $N(H_\alpha)$. Применение теоремы 3 § 2 завершает доказательство. #

Проблема 6. Будет ли относительно выпуклой инфраинвариантная подгруппа упорядочиваемой группы, являющаяся объединением относительно выпуклых подгрупп? (См. далее, следствие 3.)

Проблема 7. Будет ли относительно выпуклой инфраинвариантная строго изолированная подгруппа (разрешимой) упорядочиваемой группы?

2°. Коммутант упорядочиваемой группы может не быть относительно выпуклой подгруппой, так как существуют упорядочиваемые группы (даже нильпотентные), коммутант которых не изолирован. (См., например, Фукс [8], Курош [1].) Очевидно, что изолятор коммутанта является относительно выпуклым.

Предложение 2. (Каргаполов, Кокорин, Копытов [1].) *Нормализатор относительно выпуклой подгруппы не всегда относительно выпуклый.*

Пусть B — упорядоченная группа, имеющая выпуклую подгруппу H, совпадающую со своим нормализатором. В качестве B можно взять, например, группу из примера 8 § 2 гл. I, $G = B \wr \{b\} = (\prod_{i=-\infty}^{+\infty} B_i) \cdot \{b\}$ — сплетение B и бесконечной циклической группы $\{b\}$. Подгруппа

$$A = (\prod_{i<0} B_i) \times H_0$$

выпукла при некотором лексикографическом упорядочении G. Ее нормализатор равен

$$N(A) = (\prod_{i \neq 0} B_i) \times H_0.$$

Подгруппа $N(A)$ не инфраинвариантна и поэтому не является относительно выпуклой. #

Предложение 3. (Каргаполов, Кокорин, Копытов [1].) *Централизатор относительно выпуклой подгруппы не всегда относительно выпуклый.*

Пусть A, B — упорядоченные группы. В полном сплетении

$$\bar{G} = A \bar{\wr} B = \bar{A} \cdot B,$$

где

$$\bar{A} = \overline{\prod_{b \in B}} A_b,$$

возьмем подгруппу G, порожденную B и подгруппой $\dot{A}$ из $\bar{A}$, определяемой следующим условием: элемент $a \in \bar{A}$ тогда и только тогда принадлежит $\dot{A}$, когда множество

$$B(a) = \{b \in B \mid a(b) \neq e\}$$

вполне упорядочено.

Легко видеть, что подгруппа $\dot{A}$ инвариантна в $\bar{G}$ и $G = \dot{A} \cdot B$. Группа G естественным образом упорядочивается лексикографически: считаем элемент $ab \neq e$ положительным в том и только в том случае, если $b > e$ или если при $b = e$ положительна компонента элемента a с наименьшим индексом. Упорядоченную группу G обозначим $G = A \dot{\wr} B$.

Рассмотрим теперь группу $G = A \dot{\wr} B$, где A — упорядоченная группа без центра и B — бесконечная циклическая. Централизатор Z выпуклой подгруппы $H = \overline{\prod_{i \geq 0}} A_i$

совпадает с прямым произведением $\prod\limits_{i\leqslant 0} A_i$. Подгруппа Z не может быть относительно выпуклой. Действительно, если бы подгруппа Z была относительно выпуклой, то относительно выпуклым было бы объединение $N = \prod A_i$ всех подгрупп, сопряженных с Z. Но в фактор-группе G/N имеет место соотношение $b^{-1}\, ab \cdot N = a^{-1}N$, где

$$a(i) = \begin{cases} e, & i \leqslant 0, \\ c, & i = 2n-1, \\ c^{-1}, & i = 2n, \end{cases} \qquad c \neq e, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит, очевидно, относительной выпуклости N. #

В § 4 этой главы будет показано, что центр упорядочиваемой группы относительно выпуклый. Тем не менее центр относительно выпуклой подгруппы может не быть относительно выпуклым (см. гл. VI). Приведенные в этом пункте факты указывают на своеобразие свойств относительно выпуклых подгрупп, а значит, и методов теории упорядоченных групп.

3°. Переходим к изучению относительно выпуклых подгрупп в доупорядочиваемых группах. Из признаков относительной выпуклости подгрупп доупорядочиваемых групп получаются достаточные признаки относительной выпуклости в упорядочиваемых группах.

Теорема 3. (Кокорин [4].) *Подгруппа H доупорядочиваемой группы G относительно выпукла тогда и только тогда, когда она инфраинвариантна и строго изолирована в группе.*

Доказательство. Очевидно, нужно доказать только достаточность. Отметим, что если H является к тому же инвариантной, то достаточность утверждения теоремы следует из предложения 1 § 1.

Пусть H — инфраинвариантная строго изолированная подгруппа в доупорядочиваемой группе G. Возьмем систему Σ', состоящую из всех подгрупп, сопряженных с H, $\overline{H} = \bigcap\limits_{g\in G} H^g$, $\tilde{H} = \bigcup\limits_{g\in G} H^g$. Возьмем, далее, инфраинвариантную систему Σ

$$E \subset \overline{H} \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \tilde{H} \subset G$$

из строго изолированных подгрупп, такую, что $\Sigma' \subseteq \Sigma$ и, если инфраинвариантная строго изолированная подгруппа лежит между подгруппами из Σ, отличными от пар $E \subset \overline{H}$ и $\overline{\overline{H}} \subset G$, то она принадлежит Σ. Существование таких систем доказывается так же, как существование композиционных систем.

Покажем выполнимость условий теоремы 6 § 2 для подгрупп системы Σ, заключенных между $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$. Этим теорема будет доказана. Пусть $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$ — скачок из Σ, а $a \in H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$ и $P = S_{N(H_\alpha)}(a)\, H_\alpha$. Тогда P, в силу строгой изолированности H_α, будет чистой инвариантной в $N(H_\alpha)$ полугруппой. Поэтому и в силу инфраинвариантности Σ объединение Q всех полугрупп, сопряженных с P, будет чистой, инвариантной во всей группе, полугруппой. Продолжим частичный порядок, определяемый Q, до линейного порядка в группе. При этом порядке, если $h \in H_\alpha$, то $a \gg h$, так как $P = PH_\alpha$. Отсюда, если $H'_\alpha \subset H'_{\alpha+1}$ — скачок выпуклых подгрупп, определяемый элементом a, то $H_\alpha \subseteq H'_\alpha$.

Покажем, что $H_{\alpha+1} \cap H'_\alpha = H_\alpha$. Обозначим через D_α — пересечение $H_{\alpha+1}$ и H'_α. Так как H'_α — относительно выпуклая в G подгруппа, она строго изолирована в G, и тогда D_α тоже строго изолирована. Кроме того, D_α инфраинвариантна. Действительно, если $H^g_\alpha \subset H_\alpha$, то $H'^g_\alpha \subset H'_\alpha$, так как в противном случае $H'^g_\alpha \supseteq H'_\alpha$ влечет $a^g \in H^g_{\alpha+1} \setminus H'_\alpha$, что противоречит тому, что $H^g_{\alpha+1} \subseteq H_\alpha \subseteq H'_\alpha$. Добавив к Σ подгруппу D_α и ее сопряженные, мы получим систему Σ'':

$$E \subset \overline{H} \subset \ldots \subset H_\alpha \subseteq D_\alpha \subseteq H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \overline{\overline{H}} \subset G.$$

Она инфраинвариантна, состоит из строго изолированных подгрупп ввиду построения и, следовательно, совпадает с Σ. Но тогда D_α — строго изолированная подгруппа, удовлетворяющая соотношениям $H_\alpha \subseteq D \subseteq H_{\alpha+1}$. На основании построения системы Σ можно заключить, что $H_\alpha = D_\alpha$ или $H_{\alpha+1} = D_\alpha$. Но последнее равенство невозможно, поскольку $H_{\alpha+1} \ni a$, но $a \overline{\in} D_\alpha = H_{\alpha+1} \cap H'_\alpha$, так как $a \overline{\in} H'_\alpha$.

Совершенно аналогичные рассуждения, проведенные с подгруппой $D'_\alpha = H_{\alpha+1} \cap H'_{\alpha+1}$, дадут нам $D'_\alpha = H_{\alpha+1}$, т. е. $H_{\alpha+1} \subseteq H'_{\alpha+1}$.

Из $H_\alpha = H_{\alpha+1} \cap H'_\alpha$, $H_{\alpha+1} \subseteq H'_{\alpha+1}$ и коммутативности $H'_{\alpha+1}/H'_\alpha$ вытекает коммутативность $H_{\alpha+1}/H_\alpha$.

Покажем, далее, что $N(H_\alpha) = N(H'_\alpha)$. Пусть $g \in N(H_\alpha)$, $g \overline{\in} N(H'_\alpha)$ и, для определенности, $H'^g_\alpha \subset H'_\alpha$. Тогда $H'^g_{\alpha+1} \subseteq H'_\alpha$ и, значит, $a^g \in H'_\alpha$, а в то же время из $a^g \in H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$ и $H_\alpha = H'_\alpha \cap H_{\alpha+1}$ следует $a^g \overline{\in} H'_\alpha$. Противоречие. Следовательно, $N(H'_\alpha) \supset N(H_\alpha)$. Доказательство обратного включения проводится аналогично.

Из перестановочности внутренних автоморфизмов группы $N(H'_\alpha)/H'_\alpha$ при действии их на элементы из $H'_{\alpha+1}/H'_\alpha$, $H_{\alpha+1} \subseteq H'_{\alpha+1}$ и $H_\alpha = H_{\alpha+1} \cap H'_\alpha$ следует перестановочность внутренних автоморфизмов $N(H_\alpha)/H_\alpha$ при действии их на элементы из $H_{\alpha+1}/H_\alpha$.

Таким образом, скачки системы Σ, заключенные между $\underline{H}$ и $\overline{H}$, удовлетворяют условиям теоремы 3 § 2. Следовательно, подгруппы из Σ являются выпуклыми при некотором порядке. #

Используя следствие 3 § 1, аналогично получаем

Следствие 2. *Подгруппа A относительно выпуклой G-доупорядочиваемой подгруппы B упорядочиваемой группы G является относительно выпуклой в группе G тогда и только тогда, когда она инфраинвариантна и строго изолирована в группе G.* #

Следствие 3. *Инфраинвариантная подгруппа доупорядочиваемой группы, являющаяся объединением относительно выпуклых подгрупп, относительно выпукла.* #

4°. Предложение 4. (Смирнов [1].) *Подгруппа H упорядочиваемой локально нильпотентной группы G относительно выпукла тогда и только тогда, когда она инвариантна и изолирована.*

Так как локально нильпотентные группы без кручения упорядочиваемы, то достаточно показать, что в них всякая инфраинвариантная подгруппа инвариантна.

Действительно, пусть $h \in H$, $g \in G$ и $H^g \subseteq H$. Так как по условию h и g порождают в G нильпотентную подгруппу, то последовательность $h_1 = [g, h], \ldots, h_{i+1} = [g, h_i]$ содержит лишь конечное число членов, отличных от e. Пусть $h_n = e$. Тогда

$$h^{g^{-1}} = h \cdot h_1^{g^{-1}} = \ldots = h \cdot h_1 \ldots h_{n-1}.$$

Отсюда, поскольку $h_1, \ldots, h_{n-1} \in H$, заключаем, что $h^{g^{-1}} \in H$. Этим доказано, что $H^{g^{-1}} \subseteq H$, откуда ввиду того, что $H^g \subseteq H$, получаем

$$H^g = H. \#$$

Интересно, что из изолированности чистой инвариантной полугруппы в нильпотентной группе без кручения не следует ее строгая изолированность (А. И. Мальцев, см. § 4 гл. VI).

5°. Подмножество S л.у. группы G называется *лучом*, если из $s \in S$ и $s \leqslant x$ следует $x \in S$.

Теорема 4. (Тулли [1].) *Подмножество S упорядочиваемой группы G тогда и только тогда является лучом при некотором линейном упорядочении группы, когда оно удовлетворяет условию*:

(*) *для любых $g, h \in G$ или $gSh \subseteq S$, или $S \subseteq gSh$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, пусть условия теоремы выполняются. Пусть $X = \{x \in G \mid$ если $ab \in S$, то $axb \in S\}$, P — полугруппа строго положительных элементов при некотором линейном упорядочении группы G, $P' = \{x \in G \mid$ или $x \in X$, $x^{-1} \in X$, $x \in P$, или $x \in X$, $x^{-1} \overline{\in} X\}$. Так же как в теореме 4 § 1, проверяется, что X есть инвариантная полугруппа. Покажем, что полугруппа X линейная.

Предположим, что $x \overline{\in} X$. Тогда для некоторых a, b будет $ab \in S$, $axb \overline{\in} S$. Пусть $cd \in S$. Тогда не выполняется $axc^{-1}Sd^{-1}b \subseteq S$, так как $axc^{-1}(cd)d^{-1}b = axb \in axc^{-1} Sd^{-1}b \setminus S$. Следовательно, $S \subseteq axc^{-1}Sd^{-1}b$ или $cx^{-1}a^{-1}Sb^{-1}d \subseteq S$ и, значит, $cx^{-1}d = cx^{-1}a^{-1}(ab)\, b^{-1}d \in S$, т. е. $x^{-1} \in X$.

Далее также непосредственной проверкой устанавливаем, что P' — полугруппа. Из инвариантности X вытекает инвариантность P', и из линейности X — линейность $P' \cup e$. Значит, P' определяет в G линейный порядок. При этом порядке S будет лучом. Действительно, пусть, $x \in S$ и $x \leqslant y$, т. е. $yx^{-1} \in P'$. Тогда $yx^{-1} \in X$ и, значит, $y = e\,(yx^{-1})\, x \in S$. #

§ 4. Относительная выпуклость центра

Приведем конструкцию, которая в дальнейшем будет неоднократно использоваться.

Группа G называется *прямым произведением* своих подгрупп G_α, $\alpha \in I$, *с объединенной подгруппой* H, *если*

(1) G порождается всеми G_α, $\alpha \in I$;

(2) если G^α — подгруппа, порожденная всеми G_β, $\beta \neq \alpha$, то $G_\alpha \cap G^\alpha = G_\alpha \cap G_\beta = H$ для всяких $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$;

(3) подгруппы G_α, G_β поэлементно перестановочны для всяких α, $\beta \in I$, $\alpha \neq \beta$.

Из определения следует, что подгруппа H прямого произведения G групп G_α с объединенной подгруппой H лежит в центре группы G .

Нетрудно видеть, что если задано множество групп G_α и изоморфных между собой подгрупп H_α из центров G_α, то можно построить группу G, являющуюся прямым произведением подгрупп G_α с объединенной подгруппой H, изоморфной H_α. Именно, в качестве G можно взять фактор-группу F/N прямого произведения F групп G_α по подгруппе N, порожденной всеми элементами $x \in F$ вида $x = \varphi_\alpha(h)\varphi_\beta(h^{-1})$, где $h \in H$, φ_α — некоторый изоморфизм группы H на группу H_α.

Прямое произведение групп G_α с объединенной подгруппой H будем обозначать $\prod G_\alpha$ ($H_\alpha = H$, $\alpha \in I$) или в случае конечного числа множителей $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ ($H_1 = \ldots = H_n = H$).

Лемма 1. *Если в л.у. группе* G $a^n > c$, *где* c *лежит в центре* G, *то* $g_1^{-1}ag_1 \ldots g_n^{-1}ag_n > c$ *для любых* $g_1, \ldots, g_n \in G$.

Действительно, если $g_i^{-1}ag_i \leqslant g_j^{-1}ag_j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$, то $g_1^{-1}ag_1 \ldots g_n^{-1}ag_n \geqslant (g_i^{-1}ag_i)^n = g_i^{-1}a^ng_i > g_i^{-1}cg_i = c$. #

Теорема 1. (Копытов [1].) *Всякая упорядочиваемая группа* G *вкладывается в группу* G^* *с полным центром* Z^* *такую, что*

(1) *центр* Z^* *группы* G^* *содержит центр* Z *группы* G;

(2) $G^* = GZ^*$, $G \cap Z^* = Z$ *и тогда* $G^*/Z^* \cong G/Z$;

(3) *всякий линейный порядок* G *продолжается до линейного порядка* G^*.

Доказательство. Пусть Z — центр группы G и Z^* — его минимальное пополнение, как абелевой группы. В качестве G^* возьмем прямое произведение группы G

и группы Z^* с объединенной подгруппой Z. Очевидно, что свойства (1) — (2) теоремы справедливы для группы G^*. Далее, так как всякая упорядочиваемая группа есть R-группа, то фактор-группа $G^*/Z^* \cong G/Z$ есть группа без кручения, а тогда группой без кручения является и G^*, причем G инвариантна в G^*, и фактор-группа G^*/G — периодическая абелева, так как $G^*/G \cong Z^*/Z$, и тогда всякий $x \in G^*$ в некоторой степени попадает в G.

Пусть P — произвольный линейный порядок группы G. В группе G^* рассмотрим множество

$$P^* = \{x \in G \mid x^n \in P \text{ для некоторого натурального } n\}.$$

Очевидно, что $P^* \supseteq P$. Если мы докажем, что P^* — чистая инвариантная и линейная полугруппа в G^*, то теорема будет полностью доказана. Линейность, инвариантность и чистота множества P^* очевидны. Покажем, что P^* — полугруппа. Пусть $x \in P^*$, $y \in P^*$, т. е. $x^n \in P$, $y^m \in P$ при непототорых натуральных n, m. Притом, так как $G^* = G \times Z^*\ (Z)$, имеем $x = x_0 b$, $y = y_0 a$, где x_0, $y_0 \in G$, a, $b \in Z^*$, и, следовательно, $c = a^m \in Z$. Так как $y \in P^*$, $y^m = y_0^m a^m \in P$, т. е. $y_0^m > a^{-m} = c^{-1}$ в группе G, и, по лемме 1, $x_0^{-mn+1} y_0 x_0^{mn-1} \ldots x_0^{-1} y_0 x_0 y_0 c^n \in P$. Но отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(xy)^{mn} &= x^{mn} \cdot x^{-mn+1} y x^{mn-1} \ldots x^{-1} y x \cdot y = \\ &= x^{mn} x_0^{-mn+1} y_0 a x_0^{mn-1} \ldots x_0^{-1} y_0 a x_0 y_0 a = \\ &= x^{mn} \cdot x_0^{-mn+1} y_0 x_0^{mn-1} \ldots x_0^{-1} y_0 x_0 \cdot y_0 \cdot a^{mn} = \\ &= x^{mn} \cdot x_0^{-mn+1} y_0 x_0^{mn-1} \ldots x_0^{-1} y_0 x_0 y_0 c^n \in P. \ \#\end{aligned}$$

Отметим, что если группа G доупорядочиваема, то G^* также доупорядочиваема.

Теорема 2. (Кокорин [2].) *Произведение полной подгруппы центра упорядочиваемой группы на ее относительно выпуклую подгруппу относительно выпукло.*

Доказательство. Пусть Z — полная подгруппа центра упорядочиваемой группы G, а H — относительно выпуклая подгруппа в G. Возьмем систему $\Sigma = \{H_\gamma\}$ всех выпуклых подгрупп при таком линейном порядке G, при котором H выпукла. Далее, возьмем систему Σ', состоящую из произведений $H_\gamma Z$ выпуклых подгрупп из Σ на Z. Для доказательства теоремы достаточно показать, что Σ' удовлетворяет условиям теоремы 6 § 2. Покажем только строгую изолированность подгрупп $H_\gamma Z$, так как выполнимость остальных условий этой теоремы непосредственно следует из выполнимости их на Σ.

Пусть $a^{e+g_1+\ldots+g_n} = hz$, где $h \in H_\gamma$, $z \in Z$ и $z_1^{n+1} = z$, $z_1 \in Z$. Тогда $(az_1^{-1})^{e+g_1+\ldots+g_n} = h$, откуда, в силу строгой изолированности H_γ, будет $az^{-1} \in H_\gamma$ и, значит, $a \in H_\gamma Z$, т. е. подгруппа $H_\gamma Z$ строго изолирована. ⌗

Заметим, что условие полноты подгруппы центра в приведенной теореме заменить изолированностью нельзя, так как уже в абелевой группе без кручения произведение изолированных подгрупп не всегда изолировано.

Т е о р е м а 3. (К о к о р и н [2], К о п ы т о в [1].) *Фактор-группа упорядочиваемой (доупорядочиваемой) группы по ее центру упорядочиваема (доупорядочиваема).*

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1, теоремы 2 (и предложения 1 § 1). ⌗

С л е д с т в и е 1. *Любой гиперцентр упорядочиваемой группы является относительно выпуклым.*

Это следствие вытекает из теоремы 3 и предложения 1 § 3. ⌗

С л е д с т в и е 2. *Изолированная подгруппа центра упорядочиваемой группы является относительно выпуклой.*

Это утверждение следует из теоремы 3 и теоремы 4 § 2. ⌗

Подгруппа H упорядочиваемой группы G называется *эскалационной* или *v-подгруппой*, если любой линейный порядок в H может быть продолжен до линейного порядка в G. Примерами эскалационных подгрупп могут служить циклические группы, сомножители прямых произведений и сплетений упорядочиваемых групп.

С л е д с т в и е 3. *Центр упорядочиваемой группы является эскалационной подгруппой.* ⌗

С л е д с т в и е 4. *Если прямое произведение с объединенной подгруппой упорядочиваемых групп является группой без кручения, то оно упорядочиваемо.*

Это утверждение вытекает из теоремы 5, замкнутости класса упорядочиваемых групп относительно прямых произведений и того факта, что прямое произведение с объединенной подгруппой данных групп есть некоторая фактор-группа по подгруппе центра прямого произведения тех же групп. ⌗

ГЛАВА III

ПРОИЗВЕДЕНИЯ И РАСШИРЕНИЯ

§ 1. Свободное произведение

1°. Приведем пример л.у. матричной группы, который будет использован при доказательстве основного результата этого параграфа.

Пусть K — л.у. кольцо, T — группа верхних треугольных матриц над K, диагональные элементы которых обратимы и положительны. Если матрицы бесконечномерны, то предполагается, что их строки и столбцы вполне упорядочены. Для любых матриц X, Y из T считаем $X < Y$, если $x_{ij} < y_{ij}$ в K и $x_{k,k+s} = y_{k,k+s}$ для любых k, s таких, что $i + s < j$ или $i + s = j$, $k < i$. Здесь x_{ij}, y_{ij} — элементы матриц X, Y, стоящие в строке с номером i (может быть трансфинитным) и в столбце с номером j.

Другими словами, если расписать элементы каждой из матриц X, Y в последовательность, выписывая сначала элементы главной диагонали, затем элементы второй диагонали и т. д., то сравнивание матриц X и Y ведется по первым различным элементам этих последовательностей. Нетрудно проверить, что введенное отношение порядка на группе T превращает ее в л.у. группу.

Теорема 1. (Виноградов [1].) *Свободное произведение упорядочиваемых групп упорядочиваемо. При этом сомножители являются эскалационными подгруппами.*

Доказательство. Рассмотрим только случай двух множителей A и B, так как в общем случае рассуждения проходят почти без изменений.

Рассмотрим лексикографически линейно упорядоченное прямое произведение л.у. групп A, B и л.у. циклических групп $\{x_{ij}\}$, $\{y_{ij}\}$, $\{u_i\}$, $\{v_i\}$:

$$C = A \times B \times \prod_{i,j=1}^{\infty} \{x_{ij}\} \times \prod_{i,j=1}^{\infty} \{y_{ij}\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{u_i\} \times \prod_{i=1}^{\infty} \{v_i\}.$$

Пусть $Q\,[C]$ — групповая алгебра группы C над полем Q рациональных чисел. Упорядочим ее, считая комбинацию $\sum \alpha_i c_i$, $\alpha_i \in Q$, $c_i \in C$, положительной, если положителен ее первый ненулевой коэффициент (т. е. коэффициент при наименьшем c_i относительно введенного порядка в C). При этом порядке $Q\,[C]$ становится л.у. кольцом. Возьмем теперь описанную выше л.у. группу верхних треугольных матриц над $Q\,[C]$, строки и столбцы которых занумерованы всеми натуральными числами.

Пусть X, Y — верхние треугольные матрицы с единичной диагональю и элементами x_{ij}, y_{ij} соответственно над ней, U, V — диагональные матрицы с диагоналями u_1, $u_2, \ldots$ и v_1, $v_2, \ldots$ Рассмотрим вложения групп α: $A \to T$, β: $B \to T$, где $\alpha\,(a)$, $\beta\,(b)$ — диагональные матрицы с диагоналями e, a, e, $a, \ldots$ и e, b, e, $b, \ldots$ соответственно, $a \in A$, $b \in B$. Легко видеть, что α, β — изоморфные вложения л.у. групп A, B в л.у. группу T. Положим, далее, $\alpha'\,(a) = X^{-1}\alpha\,(a) X$, $\alpha''(a) = U^{-1}\alpha'(a) U$ для $a \in A$, $\beta'(b) = Y^{-1}\,\beta\,(b)\,Y$, $\beta''(b) = V^{-1}\beta'(b) V$ для $b \in B$.

Рассмотрим гомоморфизм γ свободного произведения $A * B$ в группу T, сопоставляющий каждому слову от элементов $a \in A$, $b \in B$ такое же слово от $\alpha''(a)$, $\beta''(b)$. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что в действительности γ есть изоморфизм. Это вытекает из следующих двух утверждений.

(а) Все элементы матриц $\alpha'(a)$, $\beta'(b)$, $a \neq e$, $b \neq e$, $a \in A, b \in B$, лежащие на главной диагонали и над ней, отличны от нуля. В самом деле, обозначим

$$\alpha\,(a) = L,\quad LX = M,\quad X^{-1} = N,\quad NM = P.$$

Легко видеть, что при $i \leqslant j$

$$N_{ij} = -x_{ij} + \sum_{i<k_1<j} x_{ik_1}x_{k_1j} - \sum_{i<k_1<k_2<j} x_{ik_1}x_{k_1k_2}x_{k_2j} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{j-1} x_{i,i+1}x_{i+1,i+2}\ldots x_{j-1,j}$$

и

$$P_{ij} = (N_{i1}x_{1j} + N_{i3}x_{3j} + \ldots + N_{i,2s+1}x_{2s+1,j})\,e + \\ + (N_{i2}x_{2j} + \ldots + N_{i,2r}x_{2r,j})\,a = \\ = \Big(-\sum x_{ik}x_{kj} + \sum_{i<k_1<k<j}\sum x_{ik_1}x_{k_1k}x_{kj} - \\ - \sum_{i<k_1<k_2<k<j}\sum\sum x_{ik_1}x_{k_1k_2}x_{k_2k}x_{kj} + \ldots\Big)\,e + (\ldots)\,a,$$

где внешняя сумма $\sum$ распространяется на все нечетные значения k от 1 до j. Последнее соотношение показывает, что коэффициент при e не равен нулю и, следовательно, $P_{ij} \neq 0$ при $i \leqslant j$. Аналогично проверяется утверждение относительно $\beta'(b)$.

(б) Если $a_1b_1 \ldots a_tb_t \neq e$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$ и $a_i \neq e$, $b_i \neq e$, кроме, быть может a_1 и b_t, то $c = \alpha''(a_1)\,\beta''(b_1)\ldots$ $\ldots\,\alpha''(a_t)\,\beta''(b_t) \neq e$.

В самом деле, рассмотрим сначала случай, когда $a_1 \neq e$, $b_t \neq e$. Тогда при $i \leqslant j$

$$c_{ij} = \widetilde{\sum} \alpha''_{ik_1}(a_1)\,\beta''_{k_1k_2}(b_1)\ldots\alpha''_{k_{2(t-1)}k_{2t-1}}(a_t)\,\beta''_{k_{2t-1}j}(b_t),$$

где $\sim$ означает, что суммирование производится при условии $i \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_s \leqslant j$. Так как

$$\alpha''_{pq}(a_i) = \frac{1}{u_{pp}}\,\alpha'_{pq}(a_i)\,u_{qq},$$

$$\beta''_{pq}(b_i) = \frac{1}{v_{pp}}\,\beta'_{pq}(b_i)\,v_{qq},$$

то

$$c_{ij} = \widetilde{\sum} \frac{1}{u_{ii}}\,\frac{1}{v_{k_1k_1}}\ldots\frac{1}{u_{k_{2s-1}k_{2s-1}}}\,\frac{1}{v_{k_{2s}k_{2s}}}\,u_{k_1k_1}v_{k_2k_2}\ldots \\ \ldots u_{k_{2s}k_{2s}}v_{jj}\alpha'_{ik_1}(a_1)\,\beta'_{k_1k_2}(b_1)\ldots\alpha'_{k_{2(t-1)}k_{2t-1}}(a_t)\,\beta'_{k_{2t-1}}(b_t).$$

Рассматривая c_{ij} как многочлен от переменных u_{rr}, v_{rr}, $\frac{1}{u_{rr}}$, $\frac{1}{v_{rr}}$, мы видим, что подобные члены в нем приведены. Так как все $a_i \neq e$, $b_i \neq e$, то, согласно утверждению (а), все коэффициенты этого многочлена отличны от нуля (алгебра $Q\,[C]$ упорядочена, а потому не имеет делителей нуля). Следовательно, $c_{ij} \neq 0$ при $i \leqslant j$. Оставшиеся случаи $a_1 \neq e$, $b_t = e$; $a_1 = e$, $b_t \neq e$; $a_1 = b_t = e$ разбираются аналогично. ⋕

2°. Как показывает следующий пример, свободное произведение упорядочиваемых групп с объединенной подгруппой, вообще говоря, неупорядочиваемо, даже если объединенная подгруппа инвариантна и относительно выпукла в каждом из свободных множителей.

Пусть A_1 — группа всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 2^{k/2} & r_1 + r_2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k — целое число, r_1, r_2 — рациональные числа. Подгруппа H_1 в A_1 матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 + r_2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть прямое произведение аддитивных групп рациональных чисел, причем H_1 инвариантна в A_1. Кроме того, так как A_1 имеет конечный специальный ранг (равный трем) и разрешима, то по предложению 5 § 2 гл. II каждая ее относительно выпуклая подгруппа инвариантна. Но A_1 имеет единственную изолированную инвариантную подгруппу H_1, следовательно, H_1 при любом линейном порядке A_1 выпукла и не имеет собственных выпуклых подгрупп. Но тогда любой порядок A_1 индуцирует на H_1 архимедов порядок.

Пусть A_2 — группа всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2^n & r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3^n & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

где n — целое число, r, s — рациональные числа. Очевидно (см. пример 6 § 2 гл. I), что A_2 — упорядочиваемая группа, причем подгруппа H_2 всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & r & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & s \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

инвариантна и относительно выпукла в A_2. Непосредственная проверка показывает, что никакое линейное A_2-упорядочение в H_2 не является архимедовым. Но тогда свободное произведение $G = A_1 * A_2 (H_1 \overset{\varphi}{=} H_2)$ групп A_1 и A_2 с объединенной подгруппой $H = H_1 \overset{\varphi}{=} H_2$ не упорядочиваемо ни при каком изоморфизме φ, склеивающем H_1 и H_2.

Предложение 1. *Свободное произведение $G = A_1 * A_2 (H_1 \overset{\varphi}{=} H_2)$ упорядочиваемых групп A_1 и A_2 с объединенной подгруппой $H = H_1 \overset{\varphi}{=} H_2$, относительно выпуклой и инвариантной в каждом из свободных множителей, упорядочиваемо тогда и только тогда, когда склеивающий изоморфизм φ является у-изоморфизмом при некотором линейном A_1-упорядочении в H_1 и линейном A_2-упорядочении в H_2. Притом, если группа G упорядочиваема, то подгруппа H относительно выпукла в ней.*

Необходимость этого утверждения очевидна. Докажем достаточность. Покажем сначала, что H является G-упорядочиваемой подгруппой группы G. Пусть P_1 — линейное A_1-упорядочение H_1 и $P_2 = \varphi(P_1)$ — линейное A_2-упорядочение H_2. Тогда P_1 есть линейное G-упорядочение $H = H_1$. Отсюда и из того, что $G/H \cong A_1/H_1 * A_2/H_2$ упорядочиваемо, следует, что группа G упорядочиваема и H — относительно выпуклая подгруппа в G. #

Следствие 1. *Если $G = A_1 * A_2 (H_1 \overset{\varphi}{=} H_2)$, H_1 и H_2 — относительно выпуклые инвариантные подгруппы в A_1 и A_2 соответственно, причем H_1 — эскалационная подгруппа в A_1, то G упорядочиваема при любом склеивающем изоморфизме φ подгрупп H_1 и H_2.* #

Сформулируем еще один положительный результат в этом направлении:

Пусть F — свободная группа, в которой задан элемент f, порождающий свой централизатор, A — свободная абелева группа счетного ранга и h — один из ее образующих. Тогда свободное произведение с объединенной подгруппой

$$G = F * A\ (\{f\} = \{h\})$$

аппроксимируемо свободными группами и, значит, упорядочиваемо (Грюнберг [1]).

Смирновым [4] было сделано перенесение теоремы 1 на упорядочиваемые мультиоператорные группы.

Проблема 8. (а) Попробовать вывести теорему 1 из условий упорядочиваемости § 1 гл. II. (Фукс [8].)

(б) Какие свободные произведения с объединенной подгруппой упорядочиваемы? (Фукс [8].)

(в) Доказать, что свободное произведение $G = A_1 * * A_2\ (H_1 \overset{\varphi}{=} H_2)$ упорядочиваемых групп, где H_1 — неинвариантная относительно выпуклая подгруппа в A_1, не упорядочиваемо ни при каком φ. (В. М. Копытов.)

§ 2. Прямое произведение с объединенной подгруппой. Нильпотентные произведения

1°. Подгруппу H группы G назовем *слабо сервантной* относительно системы подгрупп G_α, $\alpha \in I$, группы G, если для всякого $\alpha \in I$ из разрешимости уравнения $x^n = h$, $h \in H$, в подгруппе G_α, $\alpha \in I$, и в соответствующей ей подгруппе G^α, порожденной всеми G_β, $\beta \neq \alpha$, $\beta \in I$, следует разрешимость этого уравнения в H.

Теорема 1. (Копытов [3].) *Для того чтобы произведение упорядочиваемых групп с объединенной подгруппой было упорядочиваемо, необходимо и достаточно, чтобы объединенная подгруппа была слабо сервантна относительно системы прямых сомножителей группы.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из определения слабой сервантности объединенной подгруппы и того, что всякая упорядочиваемая группа есть R-группа.

Достаточность. Пусть $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha\ (H)$, каждая G_α, $\alpha \in I$, упорядочиваема и H слабо сервантна относительно системы подгрупп G_α, $\alpha \in I$. Докажем сначала, что G — группа без кручения. Предположим противное, пусть в G найдется элемент конечного порядка n, например, $a = g_\alpha g_\beta \ldots g_\gamma h$, где $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta, \ldots$ $\ldots, g_\gamma \in G_\gamma$, $h \in H$, $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\gamma \overline{\in} H$ и $a^n = e$.

Так как $G/H \cong \prod\limits_{\alpha \in I} G_\alpha/H$ и в фактор-группе G/H имеем $\bar{g}_\alpha^n \bar{g}_\beta^n \ldots \bar{g}_\gamma^n = \bar{e}$, то $\bar{g}_\alpha^n = \bar{g}_\beta^n = \ldots = \bar{g}_\gamma^n = \bar{e}$ и тогда $g_\alpha^n = h_\alpha$, $g_\beta^n = h_\beta, \ldots, g_\gamma^n = h_\gamma$, где $h_\alpha, h_\beta, \ldots, h_\gamma \in H$.

Теперь $h_\alpha h_\beta \ldots h_\gamma \cdot h^n = e$ или $h_\beta \ldots h_\gamma = h_\alpha^{-1} h^{-n}$. Элемент $h_\beta \ldots h_\gamma \in H$ принадлежит H и поэтому принадлежит G_α. Из элемента $h_\alpha^{-1} h^{-n}$ извлекается корень n-й степени в подгруппе $\{G_\beta, \ldots, G_\gamma\}$, лежащей в G^α: $(g_\beta \ldots g_\gamma)^n = h_\beta \ldots h_\gamma = h_\alpha^{-1} h^{-n}$, а также извлекается корень n-й степени в подгруппе G_α: $(g_\alpha^{-1} h^{-1})^n = h_\alpha^{-1} h^{-n}$. Так как H слабо сервантна относительно системы подгрупп G_α, $\alpha \in I$, элемент $h_\alpha^{-1} h^{-n}$ должен иметь корень n-й степени h', содержащийся в подгруппе H. Но это противоречит предположению, что все подгруппы G_α являются R-группами: группа G_α имеет два различных корня n-й степени из элемента $h_\alpha^{-1} h^{-n}$, а именно, элемент $h' \in H$ и $g_\alpha^{-1} h^{-1} \overline{\in} H$. Полученное противоречие доказывает, что G — группа без кручения. Применение следствия 4 § 4 гл. II завершает доказательство. #

2°. В дальнейшем через $\prod\limits_{\alpha \in I}^* G_\alpha$ обозначается свободное произведение групп G_α, $\alpha \in I$.

Как обычно, минимальным центральным рядом группы G, определяемым подгруппой A, назовем убывающий ряд нормальных делителей G, определяемый по индукции:

$$_0A = \bar{A}, \qquad _kA = [G_{k-1}, A], \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\bar{A}$ — нормальный делитель группы G, порожденный подгруппой A.

k-нильпотентным произведением множества групп G_α, $\alpha \in I$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется фактор-группа свободного произведения F групп G_α, $\alpha \in I$, по k-му члену минимального центрального ряда группы F, определяемому нормализованным взаимным коммутантом $\overline{[G_\alpha, \alpha \in I]}$ подгрупп G_α в группе F:

$$\prod_{\alpha \in I}^{(k)} G_\alpha = F/H, \qquad F = \prod_{\alpha \in I}^* G_\alpha, \qquad H = {}_k\overline{[G_\alpha, \alpha \in I]}.$$

Если имеется конечное число сомножителей $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots, G_n$, то их k-нильпотентное произведение будем обозначать

$$G_1\,(k)\,G_2\,(k) \ldots (k)\,G_n.$$

Теорема 2. (Копытов [3].) *Если нильпотентное произведение упорядочиваемых групп является группой без кручения, то оно упорядочиваемо и каждый из множителей является эскалационной подгруппой.*

Доказательство. Пусть $G = \prod\limits_{\alpha \in I}^{(k)} G_\alpha$, все G_α упорядочиваемы и G — группа без кручения. Известно, что фактор-группа G/H группы G по нормализованному взаимному коммутанту $H = \overline{[G_\alpha,\ \alpha \in I]}$ групп G_α изоморфна прямому произведению групп G_α и поэтому упорядочиваема, причем каждая из групп G_α является эскалационной подгруппой в фактор-группе G/H. Рассмотрим нормализованный взаимный коммутант $H = \overline{[G_\alpha,\ \alpha \in I]}$ в G. Эта подгруппа является инвариантной подгруппой группы G и нильпотентной группой без кручения класса не выше k, причем внутренние автоморфизмы G индуцируют в факторах верхнего центрального ряда группы H тождественный автоморфизм. Упорядочим H так, чтобы все члены ее верхнего центрального ряда были выпуклыми. Это можно сделать на основании теоремы 6 § 2 гл. II. Полученное упорядочение будет, очевидно, инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G. Тогда, по теореме 4 § 2 гл. II, группа G допускает линейное упорядочение, продолжающее полученный порядок группы H и порядок каждой из групп G_α. Следовательно, группа G упорядочиваема, а G_α — эскалационные подгруппы группы G. ⧺

Класс упорядочиваемых групп не замкнут относительно нильпотентных произведений групп.

Пусть $G = A\,(1)\,\{u\}$ — первое нильпотентное произведение группы A с тремя образующими a, b, c и определяющими соотношениями $[a, c] = [b, c] = e$, $[a, b] = c^2$ и бесконечной циклической группы $\{u\}$. Непосредственная проверка показывает, что группа G имеет элементы конечного порядка и, следовательно, неупорядочиваема.

Проблема 9. Найти необходимые и достаточные условия упорядочиваемости разрешимых произведений групп.

§ 3. Расширения

1°. Теорема 1. (Баумслаг [1].) *Если A — относительно выпуклая, вполне характеристическая подгруппа в относительно выпуклой инвариантной подгруппе B свободной группы F, то подгруппа A относительно выпукла в группе F.*

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом. Пусть B — инвариантная подгруппа свободной группы F, а A — вполне характеристическая подгруппа в B. Тогда F/A аппроксимируется подгруппами сплетения $H = B/A \wr F/B$ (см. Дополнение, § 1).

В нашем случае имеем, что группа $G = F/A$ аппроксимируется упорядочиваемыми группами, так как сплетение $H = B/A \wr F/B$ упорядочиваемых групп упорядочиваемо. Поэтому, в силу известного факта, группа G есть подгруппа полного прямого произведения упорядочиваемых групп и, значит, является упорядочиваемой. #

Следствие 1. (Шмелькин [1].) *Свободная полинильпотентная группа упорядочиваема.*

Следствие 2. *Свободная разрешимая группа упорядочиваема.*

В свободной группе можно построить цепочку подгрупп

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_{k_1} \supset F_{k_1 1} \supset \ldots \supset F_{k_1 k_2} \supset \ldots$$
$$\ldots \supset F_{k_1 k_2 \ldots k_s} \supset \ldots,$$

где $F_1 = [F, F]$,

$$F_{k_1 \ldots k_t} = [\ldots [F_{k_1 \ldots (k_t - 1)}, \underbrace{F_{k_1 \ldots (k_t - 1)}] \ldots F_{k_1 \ldots (k_t - 1)}}_{k_t \text{ раз}}].$$

Каждая из подгрупп этого ряда вполне характеристична в F. Фактор-группа F по $F_{k_1 \ldots k_s}$ называется *свободной полинильпотентной группой класса* $k_1 \ldots k_s$. Предполагая по индукции, что $F/F_{k_1 \ldots (k_s - 1)}$ упорядочиваема, и заметив, что $F_{k_1 \ldots k_s}$ относительно выпукла в $F_{k_1 \ldots (k_s - 1)}$ и вполне характеристична в ней, получаем утверждение следствия 1. Следствие 2 получается из следствия 1, так как свободная разрешимая группа класса k есть свободная полинильпотентная группа класса $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ раз}}$. #

Ввиду важности следствия 2 отметим, что оно вытекает также из известного результата Ф. Холла [1] об аппроксимируемости свободной разрешимой группы нильпотентными группами без кручения. Следствие 2 получено независимо Смирновым [2] (см. далее теорему 3 § 4 гл. V). Некоторые признаки такого сорта можно вывести из работ Горчакова [2] — [4].

2°. Теорема 2. (Нейман и Шепперд [1].) *Если группа G без кручения содержит G-упорядочиваемую инвариантную подгруппу H, фактор-группа по которой локально конечна, то группа G упорядочиваема. При этом любое линейное G-упорядочение подгруппы H продолжается единственным образом до линейного порядка группы G.*

Доказательство. Ввиду справедливости локальной теоремы для упорядочиваемых групп, можно считать фактор-группу G/H конечной порядка n.

Пусть P — линейный G-порядок в H; положим $P^* = \{x \in G \mid x^n \in P\}$. Очевидно, P^* — чистое, линейное и инвариантное в G множество. Для доказательства теоремы достаточно установить, что P^* — полугруппа.

Пусть теперь $a^n \in P$, $b^n \in P$, $A = \{a, b\}$ и $B = A \cap H$. Докажем, что $(ab)^n \in P^* \cap B$. Так как B — нормальная подгруппа конечного индекса в конечнопорожденной группе A и, следовательно, сама конечно порождена, то, по следствию 2 § 2 гл. II, в ней найдется наибольшая выпуклая подгруппа $C \neq B$, содержащая коммутант B' подгруппы B.

Рассмотрим взаимный коммутант $[A, B]$ в A. Покажем, что $[A, B] \subseteq C$. Пусть $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Если $[a_1, b_1] = e$, то $[a_1, b_1] \in C$. Предположим, что $[a_1, b_1] \neq e$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать $a_1^{-1} b_1 a_1 < b_1$. Следовательно, $a_1^{-k} b_1 a^k < b_1$ для всякого $k > 0$. Отсюда $e < [a_1, b_1] < [a_1^n, b_1]$.

Из $a_1^n \in B$ следует $[a_1^n, b_1] \in B' \subseteq C$. Из выпуклости C, $[a_1, b_1] \in B$ и $e < [a_1, b_1] < [a_1^n, b_1]$ следует $[a_1, b_1] \in C$. Следовательно, $[A, B] \subseteq C$.

Рассмотрим, далее, $A' \cap B$. Здесь потребуется следующий теоретико-групповой факт:

(*) Если группа A/B конечна, то группа $A' \cap B/[A,B]$ тоже конечна (см. Дополнение, § 2).

На основании (*) каждый элемент $x \in A' \cap B$ в некоторой степени попадает в $[A, B] \subseteq C$, следовательно, C имеет конечный индекс в $A' \cap B$, откуда следует, что $A' \cap B \subseteq C$. Действительно, если $b_1^n \in C$ и $b_1 > e$, то $b_1^n > b_1 > e$ и ввиду выпуклости C будет $b_1 \in C$.

Пусть теперь $c = a^{-k}b^{-k}(ab)^k$. Очевидно, что для некоторого k будет $c \in C$. Если бы $(ab)^k < e$, то $c < e$, $c < b^{-k} < e$ (так как a^n, $b^n > e$). Отсюда и из выпуклости C получаем a^{-k}, $b^{-k} \in C$.

Но этого не может быть. Действительно, пусть $h \in B \setminus C$, $h = a^p b^q h'$ и $h^n = a^{pn} b^{qn} h''$, где $h', h'' \in A' \cap B$. Здесь $h^n \overline{\in} C$, так как $h \overline{\in} C$ и C изолирована в B. Но $h'' = b^{-qn} a^{-pn} h^n \in B \cap A' \subseteq C$. Отсюда a^{pn}, b^{qn} не могут лежать в C одновременно, так как в противном случае $h^n \in C$. ⧺

Заметим, что требование локальной конечности G/H в теореме 2 нельзя заменить на требование периодичности. Именно, С. И. Адян построил пример группы G без кручения, фактор-группа G/Z по центру Z которой есть периодическая группа. Очевидно, что Z является G-доупорядочиваемой подгруппой в G, но G неупорядочиваема, так как в упорядочиваемой группе центр относительно выпуклый и, следовательно, изолирован.

ГЛАВА IV

ВЛОЖЕНИЯ

§ 1. Пополнение нильпотентных упорядоченных групп

Теорема 1. *Всякая линейно упорядоченная локально нильпотентная группа G вкладывается в полную локально нильпотентную упорядоченную группу G^*, единственную с точностью до у-изоморфизма.*

Доказательство. Эта теорема доказывается тем же методом, что и соответствующая теорема Мальцева [3] для абстрактных групп (см. Каргаполов, Мерзляков [1], гл. 6, § 2, п. 3).

Рассмотрим сначала случай конечно порожденной нильпотентной группы G без кручения. По теореме Мальцева (см. Дополнение, § 4) группу G можно представить унитреугольными целочисленными матрицами. Но хорошо известно, что группа U всех унитреугольных матриц над полем Q рациональных чисел полна, что и доказывает существование полной нильпотентной группы, содержащей G. Из известных фактов (см., например, Курош [1], гл. 15, § 67) следует, что совокупность всех элементов U, некоторая степень которых попадает в G, образует полную группу G^*, являющуюся пополнением G, причем члены верхнего центрального ряда G^* состоят из пополнений соответствующих членов верхнего центрального ряда G.

Покажем единственность пополнения G^* для группы G. Для нильпотентных групп, специальный ранг Мальцева которых равен единице, это справедливо. Предположим, что для групп ранга r единственность пополнения имеет место и G имеет ранг $r+1$.

Допустим, что группа G имеет два пополнения: G_1^* и G_2^*. Обозначим через φ_i вложение G в G_i^* $(i = 1,2)$ и выберем в G инвариантную изолированную подгруппу N ранга r. Тогда $G = N \cdot \{g\}$ для некоторого элемента $g \in G$. Обозначим через N_i^* изолятор подгруппы $\varphi_i(N)$ в G_i^*. По индуктивному предположению $N_1^* \cong N_2^*$. Пусть φ — изоморфизм N_1^* и N_2^* такой, что $\varphi_1\varphi = \varphi_2$. Нетрудно видеть, что $G_i^* = N_i^* \cdot Q_i$, где Q_i — аддитивная группа рациональных чисел, являющаяся изолятором элемента $\varphi_i(g)$ в G_i^*, и что φ продолжается до изоморфизма группы $H_1 = N_1^* \cdot \{\varphi_1(g)\}$ на $H_2 = N_2^* \cdot \{\varphi_2(g)\}$.

Пусть $T = G_1^* \times G_2^*$ и H — подгруппа группы T, состоящая из элементов вида $x\varphi(x)$, где $x \in H_1$. Ясно, что $H \cong H_1$, $N^* = \{x\varphi(x) \mid x \in N_1^*\} \cong N_1^*$ и N^* нормальна в H. Тогда N^* нормальна и в изоляторе H^* группы H в T и, следовательно, $H^* = N^* \cdot Q$, где Q — группа элементов вида $\varphi_1(g)^r \varphi_2(g)^r$, r — рациональные числа. Для любого $x \in N_1^*$ мы имеем

$$(x\varphi(x))^{\varphi_1(g)^r \varphi_2(g)^r} = y \cdot \varphi(y),$$

где $y \in N_1^*$, откуда следует, что

$$\varphi\left(x^{\varphi_1(g)^r}\right) = \varphi(x)^{\varphi_2(g)^r},$$

т. е. элемент $\varphi_2(g)^r$ индуцирует в группе G_2^* такой же внутренний автоморфизм, что и элемент $\varphi_1(g)^r$ в группе G_1^*. Но тогда φ продолжается до изоморфизма G_1^* на G_2^* так, что $\varphi_1\varphi = \varphi_2$, что означает единственность пополнения G.

Пусть P — произвольный порядок группы G. Так как G — конечнопорожденная нильпотентная группа, то она имеет конечный специальный ранг. Тогда, по предложению 5 § 2 гл. II, все выпуклые подгруппы в G инвариантны. Кроме того, их конечное число, так как всякая собственная изолированная подгруппа разрешимой группы конечного ранга имеет ранг, меньший ранга группы. Пусть Σ:

$$G_0 = E \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

— система всех выпуклых подгрупп группы G. По предложению 6 § 2 гл. II система Σ является центральной системой в G. Пусть G_i^* — изолятор подгруппы G_i в пополнении G^* группы G. Тогда система Σ^*

$$G_0^* = E \subset G_1^* \subset \ldots \subset G_n^* = G^*$$

является центральной системой в G^*. Покажем, что порядок P группы G продолжается единственным образом до линейного порядка группы G^*. Предположим, что P продолжается единственным образом до линейного порядка P_k^* группы $H_k = \{G, G_k^*\}$, $0 \leqslant k < n$. Так как всякий элемент группы H_k в некоторой степени попадает в G, можно утверждать, что система Σ_k

$$E \subset G_1^* \subset \ldots \subset G_k^* \subset \{G_k^*, G_{k+1}\} \subset \ldots \subset \{G_k^*, G_i\} \subset \ldots \subset H_k$$

является системой всех выпуклых подгрупп группы H_k при порядке P_k.

Далее, очевидно, что H_k инвариантна в H_{k+1} и что H_{k+1}/H_k — периодическая абелева группа. Кроме того, порядок P_k инвариантен относительно внутренних автоморфизмов группы H_{k+1}. Действительно, если $a \in P_k$, $a \in \{G_k^*, G_{i+1}\} \setminus \{G_k^*, G_i\}$, $i \geqslant k$, то для любого $x \in H_k$ $x^{-1}ax = a \cdot [a, x] \in P_k$, так как $[a, x] \in \{G_k^*, G_i\}$. Последнее вытекает из того, что система Σ^* центральна в G^*, а следовательно, система Σ_k центральна в H_k. Точно так же показывается, что $x^{-1}ax \in P_k$, если $a \in P_k$, $a \in G_i^* \setminus G_{i-1}^*$, где $i \leqslant k$.

Таким образом, показано, что группы H_k и H_{k+1} удовлетворяют всем требованиям теоремы 2 § 3 гл. III, а тогда порядок P_k продолжается единственным образом до линейного порядка P_{k+1} группы H_{k+1}. Применяя указанный процесс n раз, доказываем теорему для случая конечнопорожденных нильпотентных групп.

Пусть теперь G — локально нильпотентная группа без кручения. Тогда, так как G является группой с однозначным извлечением корня, G есть теоретико-множественное объединение абелевых групп без кручения ранга один: $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Зафиксируем вложение φ_α группы A_α в аддитивную группу рациональных чисел Q_α (записываемую мультипликативно) и в качестве искомого пополнения G^* возьмем объединение по $\alpha \in I$ групп Q_α: $G^* = \bigcup\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$. Превратим G^* в группу следующим образом.

Если $x, y \in G^*$, то $x \in Q_\alpha$, $y \in Q_\beta$, и в каждой из групп Q_α, Q_β имеем $a = x^n \in A_\alpha$, $b = y^m \in A_\beta$. Рассмотрим подгруппу H группы G, порожденную a, b. Очевидно, группа H нильпотентна и без кручения. По выше доказанному H вкладывается в свое пополнение H^*, которое единственно. Ясно, что в H^* найдутся элементы $\bar{x}$, $\bar{y}$ такие, что $\bar{x}^n = a$, $\bar{y}^m = b$. Пусть $\bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ в H^* и $\bar{z}^k \in H$. Тогда $\bar{z}^k = c \in A_\gamma$ при некотором $\gamma \in I$. Положим xy в G^* равным $(\varphi_\gamma(c))^{1/k}$ в Q_γ. Нетрудно проверить, что так определенная операция на G^* превращает G^* в полную локально нильпотентную группу без кручения, содержащую G, причем для всякого элемента $g \in G^*$ найдется такое целое число $n = n(g)$, что $g^n \in G$. Единственность пополнения для нильпотентной конечнопорожденной группы без кручения гарантирует нам единственность, с точностью до изоморфизма, пополнения G^* для группы G.

Пусть теперь P — произвольный порядок группы G, $P^* = \{x \in G^* \mid x^n \in P$ для некоторого натурального $n\}$. Очевидно, что P^* — чистое, линейное и инвариантное в G^* множество. Покажем, что P^* — полугруппа. Если $a, b \in P^*$, то найдутся натуральные числа m, n такие, что $a^m \in P$, и $b^n \in P$. Обозначим через H подгруппу группы G, порожденную элементами a^m, b^n, через H^* — ее изолятор в G^*. Тогда $P^* \cap H^* = \{x \in H^* \mid x^k \in P \cap H$ для некоторого натурального $k\}$ является линейным порядком нильпотентной группы H^*, продолжающим порядок $P \cap H$ подгруппы H. Но тогда, как так $a, b \in P^* \cap H^*$, мы имеем $ab \in P^* \cap H^* \subseteq P^*$. #

Проблема 10. Можно ли упорядочиваемую (разрешимую) группу вложить в полную упорядочиваемую группу?

Проблема 11. Группа G называется *G-полной*, если в ней разрешимо уравнение $x^{g_1 + \ldots + g_n} = a$ для любых g_i, $a \in G$. Можно ли любую упорядочиваемую группу G вложить в G-полную упорядочиваемую группу G^*? Непосредственная проверка показывает, что полная локально нильпотентная группа G всегда полна.

Проблема 12. Пусть G — упорядочиваемая группа и $a \in G$. Когда G может быть погружена в упорядочиваемую группу H, содержащую такой элемент x, что $x^2 = a$? В каком случае присущий G линейный порядок может быть распространен на H? (Б. Нейман.)

§ 2. Вложения в конечнопорожденные группы

1°. В этом параграфе доказывается, что всякую счетную упорядочиваемую группу можно вложить в упорядочиваемую группу с двумя образующими. В доказательстве будет использоваться подгруппа $A \dot{\wr} B$ полного сплетения л.у. групп A и B, которая была построена в п. 2° § 3 гл. II.

Лемма 1. *Пусть $G = \{g_i | i \in I\}$, $C = \{c\}$ — л.у. группы и $D = G \dot{\wr} \{c\}$. Тогда каждая компонента G_{c^n} содержится в коммутанте D' группы D.*

Будем считать, что $c > e$. Для каждого $i \in I$ определим $k_i \in \prod\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_{c^n}$ следующим образом:

$$k_i(c^n) = \begin{cases} e, & \text{если } n < 0, \\ g_i^{-1}, & \text{если } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Ясно, что $k_i \in D$. Имеем также

$$k_i^c(c^n) = \begin{cases} k_i(c^{n-1}) = e, & \text{если } n < 1, \\ g_i^{-1}, & \text{если } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как $k_i^{-1}k_i^c = [k_i, c]$, получаем

$$\begin{cases} [k_i, c](e) = g_i, \\ [k_i, c](c^n) = e, \quad \text{если} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

т. е. $[k_i, c] \in G_e$. Кроме того, видно, что G_e порождается $[k_i, c]$. Но тогда $G_e \subseteq D'$, откуда следует $G_{c^n} = c^n G_e c^{-n} \subseteq \subseteq D'$. #

Теорема 1. (Б. Нейман [4].) *Любую счетную упорядочиваемую группу G можно вложить в упорядочиваемую группу H с двумя образующими. При этом G будет эскалационной подгруппой в H.*

Доказательство. Пусть $Q = (G \dot{\wr} C) \dot{\wr} B$, где $G = \{g_i | \ i \in I = (1,2,\ldots)\}$, $C = \{c\}$, $B = \{b\}$. Определим элемент $a \in Q \cap \prod\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (G \dot{\wr} C)(b^n)$ соотношениями:

$$\begin{cases} a(e) = c, \\ a(b^{2^i-1}) = k_i \text{ для всех } i \in I, \\ a(y) = e \text{ для остальных } y \in B, \end{cases}$$

где $k_i \in G \wr C$ и определяется как в лемме 1. Тогда элемент $g_i^* = [b^{2i-1}ab^{1-2i}, a]$ лежит в $Q \cap \prod_{n=-\infty}^{+\infty} (G \wr C)(b^n)$ и, как показывает непосредственная проверка,

$$\begin{cases} g_i^*(e) = [k_i, c] & ([k_i, c] \in G \wr C), \\ g_i^*(y) = e & \text{для } y \in B, \quad y \neq e. \end{cases}$$

Это означает, что g_i^* лежит в $(G \wr C)(e)$, и так как $(G \wr C)(e) \cong G \wr C$, а в $G \wr C$ элемент $[k_i, c]$ лежит в $G(e)$ и $[k_i, c] = g_i$, то группа $G^* = \{g_i^* | i \in I\}$ у-изоморфна G. При этом ясно, что $G^* \subseteq H = \{a, b\}$. ⧺

Следствие 1. (Б. Нейман [4].) *Любую счетную k-ступенно разрешимую упорядочиваемую группу G можно вложить в упорядочиваемую $k+2$-ступенно разрешимую группу H с двумя образующими.*

Действительно, если в теореме 1 группа G разрешима класса k, то Q и H разрешимы класса $k+2$. ⧺

Отметим, что, используя доказанную теорему, можно получить следующее утверждение: любая упорядочиваемая группа G может быть вложена в упорядочиваемую группу G^*, каждая счетная подгруппа которой содержится в подгруппе с двумя образующими. (Б. Нейман [2].)

2°. Здесь уместно рассмотреть вопрос о существовании универсальной группы в классе счетных упорядочиваемых групп. Этот вопрос был поставлен Б. Нейманом [2].

Напомним, что группа G класса групп $\mathcal{K}$ называется *универсальной* в этом классе, если она содержит изоморфный образ каждой группы из $\mathcal{K}$.

Теорема 2. (Каргаполов [4].) *Произвольная счетная абелева группа без кручения изоморфна центру некоторой упорядочиваемой трехступенно разрешимой группы с двумя образующими.*

Доказательство. Пусть A, A' — изоморфные счетные абелевы группы без кручения. Построим группу H, являющуюся расширением прямого произведения $A \times A'$ с помощью бесконечной циклической группы $\{c\}$, считая, что $c^{-1}a_1a_2'c = a_1 \cdot a_1' a_2'$, где $a_1 \in A$, $a_1', a_2' \in A'$ и a_1' — элемент из A', соответствующий элементу $a_1 \in A$ при некотором фиксированном изоморфизме A на A'; $H = \{A \times A', c\}$. Нетрудно видеть, что H — упорядочиваемая группа и центр ее совпадает с A'. Рассмотрим теперь упорядочиваемую подгруппу $G_1 = H \wr \{b\}$ полного сплетения $H \bar{\wr} \{b\}$ (см. п. 1° настоящего параграфа и п. 2° § 3 гл. II). Через D обозначим подгруппу группы G_1, состоящую из тех элементов f полного прямого произведения $\bar{H}$ групп H_i в $H \bar{\wr} \{b\}$, которые лежат в $\bar{H} \cap G_1$, причем все их компоненты f_i, за исключением конечного числа, лежат в A. Непосредственно из определения D следует ее инвариантность в G_1. Кроме того, центр C подгруппы D совпадает с прямым произведением $\Pi A_i'$, где A_i' — центр группы H_i. Действительно, центр C содержит $\Pi A_i'$. Но, с другой стороны, если $f = \{f_k\} \in C$, то f должен быть перестановочен с элементами из D вида

$$c_{(n)} = \{c_k\}, \quad \text{где} \quad c_k = \begin{cases} c, & \text{если} \quad k = n, \\ e, & \text{если} \quad k \neq n. \end{cases}$$

Поэтому каждая компонента элемента f содержится в A'. Но из того, что лишь конечное число компонент f может лежать вне A, следует, что $f \in \Pi A_i'$.

Теперь положим $F = D \cdot \{b\}$ и обозначим через K подгруппу из F, порожденную всевозможными элементами $f = \{f_k\} \in C$, удовлетворяющими условиям: существуют такие целые числа m и n, что $f_m = f_n^{-1}$ и $f_k = e$ при $k \neq m, n$. Множество элементов с таким свойством очевидно инвариантно относительно b, и потому подгруппа K инвариантна в F. Центр фактор-группы F/K совпадает с C/K и, значит, ввиду равенств $C/K = A_k'K/K$ и $A_k' \cap K = E$ для всякого номера k, изоморфен A_k'.

Покажем, что группа F/K упорядочиваема. Действительно, $C = F \cap C_1$, где C_1 — центр группы $G_1 \cap \bar{H}$ и, следовательно, F/C изоморфна подгруппе G_1/C_1, которая упорядочиваема по теореме 2 § 4 гл. II. Но тогда, по теореме 4 § 2 гл. II, упорядочиваема и F/K, так как центральная подгруппа C/K в F/K заведомо F/K-упорядочиваема.

Занумеруем натуральными числами все элементы группы A, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, и возьмем элемент $\varphi = \{\varphi_k\}$ в F:

$$\varphi_k = \begin{cases} e, & \text{если} \quad k < 0, \\ c, & \text{если} \quad k = 0, \\ a_k, & \text{если} \quad k > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим подгруппу G группы F/K, порожденную $\overline{\varphi} = \varphi K$ и $\overline{b} = bK$. Ясно, что G упорядочиваема и трехступенно разрешима. Докажем, что центр этой группы совпадает с $\overline{G} = C/K$ и, следовательно, изоморфен $A'_k \cong A$.

В самом деле, пусть $\overline{f} = f \cdot K \in G$, $f = \{f_k\}$ и $\overline{f}$ принадлежит центру группы G. Компоненту f_k элемента f представим в виде произведения $f_k = u_k c_k z_k \cdot b^{s_k}$, где $u_k \in A$, $c_k \in \{c\}$, $z_k \in A'$. Пусть k — наименьшее число с $u_k \neq e$. Тогда, так как $b^{-i} f_k b^i = f_{k-i}$ в сплетении $H \wr \{b\}$, равенство элементов f и $b^{-1}fb$ по модулю K возможно лишь при $u_k = e$, так как k-я компонента элемента $b^{-1}fb$ равна $(k-1)$-й компоненте f. Тем самым доказано, что $u_k = e$ для всякой компоненты f_k элемента f. Аналогично устанавливается равенство $c_k = e$. Из перестановочности $\overline{\varphi}$ и $\overline{f}$ очевидным образом следует $s_k = 0$.

Обратно, если $f = \{f_k\}$, $f_n = z \in A'$ и $f_k = e$, $k \neq n$, то для элемента $d = [f, b] = \{d_k\}$ имеем

$$d_k = \begin{cases} z^{-1}, & \text{если } k = n, \\ z, & \text{если } k = n+1, \\ e, & \text{если } k \neq n, n+1, \end{cases}$$

т. е. $d \in K$. Отсюда и из того, что $[f, \varphi] = e$ в G_1, получаем, что любой элемент из C/K перестановочен с элементами группы G.

Покажем, что C/K лежит в G. Действительно, пусть

$$g = \{g_k\}, \quad g_k = \begin{cases} z, & \text{если } k = 0, \\ e, & \text{если } k \neq 0, \end{cases}$$

— произвольный элемент подгруппы A'_0. Но так как $c^{-1}ac = aa'$ по определению H, найдется такой элемент a_n, что $z = [a_n, c]$. Тогда компоненты t_k элемента $t = [\varphi, \varphi^{b^n}]$ удовлетворяют соотношениям:

$$t_k = \begin{cases} z, & \text{если } k = n, \\ e, & \text{если } k \neq n, \end{cases}$$

что влечет $g = t^{b^{-n}} \in \{\varphi, b\}$. Отсюда ввиду произвольности выбора $g \in A'_0$ получаем $A'_0 K/K = C/K \subseteq G$. #

Следствие 2. (Каргаполов [4], Смит [1].) *Класс счетных трехступенно разрешимых упорядочиваемых групп не обладает универсальной группой.*

Действительно, так как существует континуальное множество попарно неизоморфных абелевых групп без кручения, то по теореме 2 существует континуальное множество упорядочиваемых трехступенно разрешимых групп с двумя порождающими. #

Хотя и не существует универсальной группы в классе счетных упорядочиваемых групп, в некоторых классах такая группа существует.

Предложение 1. *Существует универсальная группа в классе счетных абелевых групп без кручения.*

В качестве такой группы можно взять прямое произведение счетного числа аддитивных групп рациональных чисел. #

Для дальнейшего рассмотрим счетную полную нильпотентную класса 2 группу G. Пусть G' — коммутант G. Нетрудно видеть, что в этом случае G' и G/G' — полные абелевы группы и их можно рассматривать как векторные пространства над полем Q рациональных чисел.

Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ — база G', а элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ образуют базу G по модулю G'. Тогда любой коммутатор $[g_i, g_j]$ можно единственным образом представить в виде

$$[g_i, g_j] = d_1^{\alpha_{ij}^{(1)}} d_2^{\alpha_{ij}^{(2)}} \ldots, \quad \text{где} \quad \alpha_{ij}^{(k)} \in Q,$$

причем бесконечномерный вектор $\alpha_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \ldots)$ имеет только конечное число отличных от нуля компонент. Составим бесконечную матрицу (α_{ij}), которая называется коммутаторной матрицей группы G. Так как $[g_j, g_i] = [g_i, g_j]^{-1}$ и $[g_i, g_i] = e$, матрица (α_{ij}) кососимметрическая. Разумеется, коммутаторная матрица зависит от выбора баз $\{d_i\}$, $\{g_i\}$, но можно утверждать, что две полные двуступенно нильпотентные группы без кручения изоморфны тогда и только тогда, когда при подходящем выборе баз их коммутаторные матрицы совпадают.

Условимся еще об одном обозначении. Пусть $A = \overline{\prod} A_n$ — полное прямое произведение нильпотентных групп без кручения и M — декартова степень Q^N множества рациональных чисел, где N — множество натуральных чисел.

Если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in A$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in M$, то элемент $(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n}, \ldots)$ будем обозначать через a^α.

Теорема 3. (Каргаполов [4].) *Класс $\mathcal{K}$ счетных двуступенно нильпотентных групп без кручения обладает универсальной группой.*

Доказательство. Обозначим через F прямое произведение унитреугольных групп $UT(3, Q)$ матриц степени три над полем рациональных чисел с объединенным центром Z,

$$F = \prod_n UT_n(3, Q)(Z).$$

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ — счетное число экземпляров группы F. В группе F_n найдутся такие элементы $c_n, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots$, что $[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}] = c_n$, $[a_i^{(n)}, a_j^{(n)}] = [b_i^{(n)}, b_j^{(n)}] = [a_i^{(n)}, b_j^{(n)}] = e$, причем $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots$ образуют базу в F_n по модулю центра C_n группы F_n.

В полном прямом произведении $\bar{F} = \overline{\prod} F_n$ возьмем подгруппу F^*, порожденную прямым произведением $\prod F_n$ и диагональной подгруппой D (D состоит из последовательностей $(x, x, \ldots, x, \ldots)$). Докажем, что F^* является универсальной группой для класса $\mathcal{K}$. Для этого укажем в F^* подгруппу, коммутаторная матрица которой совпадает с коммутаторной матрицей (α_{ij}) группы G.

Положим

$$a_i = (a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(n)}, \ldots),$$
$$b_i = (b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \ldots, b_i^{(n)}, \ldots),$$
$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots).$$

Пусть $x_1 = a_1$, $x_i = a_i b_1^{\alpha_{1i}} b_2^{\alpha_{2i}} \ldots b_{i-1}^{\alpha_{i-1,i}}$, $i = 2, 3, \ldots$ Очевидно, что элементы x_i линейно независимы в группе $\bar{F}$ по модулю коммутанта $\bar{F}$ и $x_i \in F^*$. Обозначим через G_0 пополнение в F^* группы, порожденной элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, c_1, c_2, \ldots$, и подсчитаем коммутаторную матрицу группы G_0 в базах $\{x_i\}$ и $\{c_i\}$. Оказывается, для элементов $x_i = a_i b_1^{\alpha_{1i}} \ldots b_{i-1}^{\alpha_{i-1,i}}$, $x_j = a_j b_1^{\alpha_{1j}} \ldots b_{j-1}^{\alpha_{j-1,j}}$, $i < j$, справедливо соотношение $[x_i, x_j] = c^{\alpha_{ij}}$. Действительно, ввиду определения элементов a_i, b_i, c имеем $[a_i, a_j] = e$, $[b_k, b_s] = e$,

$[a_i, b_m] = e$, $[b_k, a_j] = e$ при $1 \leqslant k < i$, $1 \leqslant s < j$, $1 \leqslant m < j$, $m \neq i$. Отсюда, используя обычные свойства коммутаторов двуступенно нильпотентных групп, получаем

$$[x_i, x_j] = [a_i, b_i^{\alpha_{ij}}] = [a_i, b_i]^{\alpha_{ij}} = c^{\alpha_{ij}}.$$

Таким образом, коммутаторная матрица группы G_0 совпадает с матрицей (α_{ij}) и, значит, группа G изоморфна подгруппе G_0 группы F^*. Так как всякая двуступенно нильпотентная группа без кручения вкладывается в полную двуступенно нильпотентную группу без кручения (см. теорему 1 § 1), можно утверждать, что F^* есть универсальная группа в классе счетных двуступенно нильпотентных групп без кручения. ♯

§ 3. Простые и нехопфовы группы

1°. В этом разделе будет показано, что метод Ф. Холла построения простых групп, примененный к упорядочиваемым группам, дает упорядочиваемую простую группу. Для полноты и ясности изложения приведем здесь конструкцию Холла еще раз (см. также Дополнение, § 3).

Пусть H — упорядочиваемая группа, Z — множество всех целых чисел. Возьмем Z-ю сплетенную степень C группы H:

$$C = \text{г} H^Z = (\ldots(\ldots \text{г}\, H_{-1})\, \text{г} H_0) \text{г} \ldots),$$

где H_n — группа, изоморфная H, φ_n — изоморфизм H_n на H. Группа C есть объединение возрастающей последовательности групп:

$$H_{(0)} \subset H_{(1)} \subset H_{(-1)} \subset \ldots \subset H_{(k)} \subset H_{(-k)} \subset H_{(k+1)} \subset \ldots,$$

где

$$H_{(0)} = H_0, \quad H_{(k)} = H_{(-k+1)}\, \text{г} H_k,$$
$$H_{(-k)} = (\ldots (H_{-k}\, \text{г} H_{-k+1})\, \text{г} \ldots)\, \text{г} H_k$$

и вложения определены следующим образом:

$$H_{(-k+1)} \xrightarrow{\text{на}} H_{(-k+1)}(e) \text{ в } H_{(k)} = H_{(-k+1)}\, \text{г} H_k,$$
$$H_{(k)} \xrightarrow{\text{на}} \{H_{-k+1}(e), H_{-k+2}(e), \ldots, H_k\} \text{ в } H_{(-k)}.$$

Этим определяются и канонические вложения всякой H_n в C. Нетрудно видеть, что C обладает автоморфизмом τ^*, продолжающим отображение τ:

$$\tau(H_n) = \varphi_{n+1}^{-1}\varphi_n(H_n).$$

Через $f(H)$ обозначим полупрямое произведение группы C и бесконечной циклической группы $\{t\}$:

$$f(H) = C\cdot\{t\}, \quad t^{-1}xt = \tau^*(x), \quad x \in C.$$

Построим возрастающую последовательность групп

$$g_0(H) = H, \ldots, g_n(H) = f(g_{n-1}(H)), \ldots,$$

где $g_{n-1}(H)$ отождествляется с подгруппой $(g_{n-1}(H))_0$ в $f(g_{n-1}(H))$. Через $g(H)$ обозначим коммутант объединения H^* возрастающей последовательности групп $g_n(H)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 1. (Ф. Холл [3].) *Для произвольной упорядочиваемой группы H группа $g(H)$ упорядочиваемая и простая.*

Доказательство. Достаточно установить упорядочиваемость $f(G)$ для произвольной упорядочиваемой группы G. Пусть P — некоторый линейный порядок в G. Упорядочим $C = \varepsilon G^Z$ следующим образом: упорядочиваем $G_{(0)}$, взяв в качестве полугруппы положительных элементов $\varphi_0^{-1}(P)$. Предположим, что упорядочена $G_{(-n+1)}$. Упорядочим $G_{(n)}$ так: если $x \in G_{(n)}$, $x = ga$, $g \in G_n$, $a \in \overline{G}_{(-n+1)}$, то считаем $x > e$, если $\varphi_n(g) > e$ в G или $g = e$, $a = a_1(h_1) \ldots a_n(h_n)$, $a_i \neq e$, $a_i(h_i) \in G_{(-n+1)}(h_i)$, $h_1 > h_2 > \ldots > h_n$ и $a_1 > e$ в $G_{(-n+1)}$.

Аналогично упорядочиваем $G_{(-n)}$, если упорядочена $G_{(n)}$. Объединение возрастающей последовательности (вложенных друг в друга) порядков является линейным порядком группы C, инвариантным относительно внутренних автоморфизмов группы $f(G)$. Так как $f(G)/C$ — бесконечная циклическая группа, группа $f(G)$ упорядочиваема.

Отсюда следует упорядочиваемость группы $g(H)$. Простота группы $g(H)$ доказывается применением теоремы 1 из § 3 Дополнения.#

2°. Приведем пример простой упорядочиваемой группы, принадлежащей Чехата [1].

Для данного л.у. поля F определим множество $G(F)$ всех функций $f(x)$ переменной x со значениями в F и со свойствами:

(1) $f(x)$ однозначная и монотонно возрастающая;

(2) для каждой $f(x)$ в F имеются два элемента $\lambda = \lambda(f)$, $\mu = \mu(f)$ такие, что $f(x) = x$ для $x \geqslant \mu$ или $\lambda \geqslant x$;

(3) между λ и μ функция $f(x)$ кусочно линейна, т. е. отрезок $[\lambda, \mu]$ можно разбить на подотрезки, на каждом из которых $f(x)$ линейна.

Если определить в $G(F)$ операцию $h = fg$ как суперпозицию функций: $h(x) = f(g(x))$, то $G(F)$ становится группой с единичным элементом e, заданным равенством $e(x) = x$ для всех $x \in F$. При этом для $e(x)$ можно положить $\lambda(e) = \mu(e)$ и $\lambda(e)$ больше любого элемента из F.

Заметим, что если $I = [\alpha, \beta]$ — отрезок в F, то множество всех $f(x)$, для которых $\alpha \leqslant \lambda(f)$ и $\mu(f) \leqslant \beta$, образуют подгруппу $G(I)$ из $G(F)$. При этом $G(I) \subseteq G(I')$, если $I \subseteq I'$, т. е. $I' = [\alpha', \beta']$ и $\alpha' \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant \beta'$.

Линейный на каждом из подотрезков $[\lambda(f) = \xi_0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{n-2}, \xi_{n-1} = \mu(f)]$ элемент $f \in G(F)$, значения которого при $\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, \mu$ суть $\lambda = y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1} = \mu$ соответственно, будем обозначать

$$f = \begin{Bmatrix} \lambda & \xi_1 & \ldots & \xi_{n-2} & \mu \\ 1 & \eta_1 \quad \eta_2 & \ldots & \eta_{n-2} \quad \eta_{n-1} & 1 \end{Bmatrix},$$

где $\eta_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ все положительны и

$$\eta_1(\xi_1 - \xi_0) + \eta_2(\xi_2 - \xi_1) + \ldots + \eta_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) = \\ = \xi_{n-1} - \xi_0 = \mu - \lambda.$$

Значения f в любой точке x можно найти из равенства

$$f(x) = \eta_{i+1}x + \sum_{k=1}^{i+1} (\eta_{k-1} - \eta_k)\xi_{k-1}, \quad \xi_i \leqslant x \leqslant \xi_{i+1}, \ \eta_0 = 1.$$

Всегда предполагаем, что η_1, η_{n-1} отличны от 1, если $f \neq e$. Если никакие два последовательных η не равны, говорим, что f имеет n изломов при $\lambda, \xi_1, \ldots, \mu$, и называем $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ первым, вторым, ..., $(n-1)$-м наклоном соответственно. Обратным к f является элемент

$$f^{-1}=\begin{Bmatrix} & \lambda & & f(\xi_1) & & \dots & & f(\xi_{n-2}) & & \mu & \\ 1 & & \eta_1^{-1} & & \eta_2^{-1} & \dots & \eta_{n-2}^{-1} & & \eta_{n-1}^{-1} & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Если ввести в $G(F)$ порядок следующим образом: $f>g$, если найдется такой $a\in F$, что $f(x)=g(x)$ при $x\leqslant a$ и $f(a+\varepsilon)>g(a+\varepsilon)$ для всех достаточно малых положительных $\varepsilon\in F$, то легко проверить, что $G(F)$ становится л. у. группой. Таким образом, $f>e$ тогда и только тогда, когда $\eta_1>1$.

Для любого выпуклого подмножества $C\subseteq F$ определим группу $G(C)$, состоящую из e и всех тех f, для которых $\lambda(f)$, $\mu(f)\in C$. Через $\Phi(C)$ будем обозначать подмножество всех тех элементов из $G(C)$, которые имеют лишь три излома.

Теорема 2. (Чехата [1].) *Группа $G(I)$ для любого открытого отрезка $I=(\alpha,\beta)$ из F является простой.*

Доказательство. Предварительно докажем следующие утверждения:

(А) Группа $G(I')$, $I'=[\alpha,\beta]$, порождается множеством S элементов с тремя изломами: первый — при α, второй — между α и β и третий — при β. Группа $G(C)$ порождается множеством $\Phi(C)$; в частности, $G(F)$ порождается множеством $\Phi(F)$ всех ее элементов с тремя изломами.

(Б) Для любого $f\in G(I)$ существует $\varphi\in\Phi(I)$ такой, что $f^{\mp1}\varphi^{-1}f^{\pm1}\varphi\in\Phi(I)$.

(В) Любой $\varphi\in\Phi(I)$ можно трансформировать некоторым элементом из $G(I)$ в элемент $\varphi^*\in\Phi(I)$, первый и третий изломы которого находятся в данных точках M^* и N^*.

(Г) Любой $\varphi\in\Phi(I)$ вместе со своими сопряженными в $G(I)$ порождает множество $\Phi(I)$.

Теорема непосредственно вытекает из пунктов (А) и (Г).

Приступим к доказательству приведенных вспомогательных утверждений.

(А) Пусть

$$f=\begin{Bmatrix} & \alpha & & \xi_1 & \dots & \xi_{n-2} & & \beta & \\ 1 & & \eta_1 & & \dots & & \eta_{n-1} & & 1 \end{Bmatrix}\in G(I')$$

имеет n изломов. Умножим f на элемент

$$\varphi_1 = \begin{Bmatrix} \alpha & \mu & & \beta \\ 1 & \lambda & \dfrac{\lambda(\mu-\alpha)+(\alpha-\beta)}{\mu-\beta} & 1 \end{Bmatrix} \in S,$$

где μ и λ задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\eta_{n-1}(\beta-\xi_{n-2})+\eta_{n-2}(\xi_{n-2}-\alpha)}{\eta_{n-2}(\beta-\alpha)}, \\ \mu &= \frac{\xi_{n-2}-(1-\lambda)\alpha}{\lambda}. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как $\eta_i > 0$ и $\alpha \leqslant \xi_0$, то $\lambda > 0$. Более того, $\varphi_1 \in G(F)$ и в действительности $\varphi_1 \in G(I')$, так как из второго уравнения (1) имеем $\lambda\mu + (1-\lambda)\alpha = \xi_{n-2}$, т. е. $\varphi_1(\mu) = \xi_{n-2} < \beta$. Из уравнений (1) имеем

$$\eta_{n-2} = \frac{\eta_{n-1}(\xi_{n-2}-\beta)}{\xi_{n-2}-(1-\lambda)\alpha-\beta\lambda},$$

$$\eta_{n-1}\cdot\frac{\lambda(\mu-\alpha)+\alpha-\beta}{\mu-\beta} = \frac{\eta_{n-1}\lambda(\xi_{n-2}-\beta)}{\xi_{n-2}-(1-\lambda)\alpha-\beta\lambda} = \lambda\eta_{n-2}.$$

Итак,

$$f\varphi_1 = \begin{Bmatrix} \alpha & \xi_1^* & \ldots & \xi_{n-2}^* & & \beta \\ 1 & \eta_1\lambda & \eta_2\lambda \ \ldots & \eta_{n-2}\lambda & \eta_{n-1}\cdot\dfrac{\lambda(\mu-\alpha)+(\alpha-\beta)}{\mu-\beta} & 1 \end{Bmatrix},$$

где

$$\xi_i^* = \frac{1}{\lambda}\cdot(\xi_i-(1-\lambda)\alpha), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Поскольку последние два наклона у $f\varphi_1$ одинаковы, это произведение имеет лишь $n-1$ излом. Повторяя этот прием $n-3$ раза, можно свести f к единичному элементу: $f\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_{n-2} = e$. Таким образом, $f = \varphi_{n-2}^{-1} \ldots \varphi_1^{-1}$ и, поскольку обратный элемент имеет столько же изломов, сколько исходный, доказательство завершается.

(Б) Пусть

$$f = \begin{Bmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ 1 \quad \eta_1 & \ldots & \eta_{n-1} \quad 1 \end{Bmatrix} \in G(I),$$

где $\alpha < \xi_1, \xi_n < \beta$. Без ущерба для общности можно предположить, что f положителен, т. е. $\eta_1 > 1$. Трансформируем f элементом

$$\varphi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & C & & \xi_2 & \\ 1 & & B & & B' & & 1 \end{Bmatrix}$$

и выберем $B > 1/\eta_1$, а C зададим уравнением

$$\eta_1 (BC + (1 - B)\, \xi_1) + (1 - \eta_1)\, \xi_1 = \xi_2.$$

Выбор C законен, ибо $C = \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_1 B} + \xi_1$, и потому $\xi_1 < C < (\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 = \xi_2$.

В результате трансформации, как легко убедиться непосредственным умножением, получим

$$\varphi^{-1} f \varphi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & a & & C & & \xi_2 & & \ldots & & \xi_n & \\ 1 & & \eta_1 & & \eta_1 B/B' & & \eta_1 B' & & \eta_2 & \ldots & \eta_{n-1} & & 1 \end{Bmatrix},$$

где a — решение уравнения

$$\eta_1 (Ba + (1 - B)\, \xi_1) + (1 - \eta_1)\, \xi_1 = BC + (1 - B)\, \xi_1.$$

Домножим $\varphi^{-1} f \varphi$ на f^{-1} и, поскольку, начиная с отрезка $[\xi_2, \xi_3]$ до отрезка $[\xi_{n-1}, \xi_n]$, эти ломаные имеют взаимно обратные наклоны, получим

$$f^{-1} \varphi^{-1} f \varphi = \begin{Bmatrix} & a & & C & & \xi_2 & \\ 1 & & B'/B & & B' & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Этим показано, что $[f, \varphi] = f^{-1} \varphi^{-1} f \varphi \in \Phi (I')$.

(B) Пусть

$$\varphi = \begin{Bmatrix} & M & & C & & N & \\ 1 & & B & & B' & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Трансформируем φ элементом

$$\psi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & M^* & & N^* & & \xi_3 & \\ 1 & & \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & 1 \end{Bmatrix} \in G (I'),$$

где $\beta_2 = (N - M)/(N^* - M^*)$, $\xi_1 > \alpha$, $\xi_3 < \beta$, а β_1 и β_3 удовлетворяют уравнениям

$$\beta_1 M^* + (1 - \beta_1)\, \xi_1 = M, \qquad \beta_3 N^* + (1 - \beta_3)\, \xi_3 = N.$$

Результатом трансформации будет

$$\psi^{-1}\varphi\psi = \begin{Bmatrix} & M^* & & C^* & & N^* & \\ 1 & & B & & B' & & 1 \end{Bmatrix},$$

где C^* задается уравнением

$$\beta_2 C^* + (1 - \beta_1)\,\xi_1 + (\beta_1 - \beta_2)\,M^* = C.$$

Сверх того, эта трансформация всегда работает безотносительно к взаимному расположению M^*, N^* и M, N.

(Г) Чтобы доказать, что любой элемент из $\Phi(I)$ вместе со своими сопряженными в $G(I)$ порождает все множество $\Phi(I)$, достаточно показать, что для заданных элементов f, $g \in \Phi(I)$ можно найти элемент вида

$$\pi = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1} f^{\varepsilon_i} \varphi_i \in \Phi(I),$$

$$\varepsilon_i = \pm 1, \qquad \varphi_i \in G(I), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеющий те же первый и второй наклоны, что и g: ибо тогда можно трансформировать π подходящим элементом φ_{n+1} из $G(I)$ так, чтобы $\varphi_{n+1}^{-1}\,\pi\varphi_{n+1}$ лежал в $\Phi(I)$, но его первый и третий изломы находились в тех же точках, что и у g; наклоны тогда исчезают — это возможно в силу (В). Итак, мы будем иметь

$$g = \prod_{i=1}^{n} (\varphi_i\varphi_{n+1})^{-1} f^{\varepsilon_i} (\varphi_i\varphi_{n+1}).$$

Можно предположить без ущерба для общности, что и f и g положительны; таким образом, если их первый и второй наклоны суть η_1, η_2 и h, k соответственно, то $\eta_1 > 1$, $\eta_2 < 1$, $h > 1$, $k < 1$.

Рассмотрим два случая.

Случай I. $\frac{\eta_2 h}{\eta_1 k} > 1$.

Пусть

$$f = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & \xi_2 & & \xi_3 & \\ 1 & & \eta_1 & & \eta_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где $\xi_1 > \alpha$, $\xi_3 < \beta$. Трансформируем f элементом

$$\varphi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & R_3 & R_4 & R_5 & \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & m & & 1 \end{Bmatrix} \in G(I').$$

Выберем $\beta_1, R_3, \beta_2, R_4$ так, чтобы выполнялись требования:

$$\beta_1 > \frac{\xi_2 - \xi_1}{\beta - \xi_1} + \frac{\xi_3 - \xi_2}{\beta - \xi_1} \cdot \frac{\eta_2 h}{\eta_1 k}, \tag{2}$$

$$\beta_2 R_3 + (1 - \beta_1)\xi_1 = \xi_2, \tag{3}$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\eta_1 k}{\eta_2 h}, \tag{4}$$

$$\beta_2 R_4 + (1 - \beta_1)\xi_1 + (\beta_1 - \beta_2) R_3 = \xi_3. \tag{5}$$

Затем возьмем R_5 произвольно между R_4 и β. Для того чтобы доказать возможность выбора такого элемента φ, нужно показать:

(i) $R_3 < \beta$, что равносильно $\beta > (\xi_2 - \xi_1)/(\beta - \xi_1)$, но это немедленно следует из неравенства (2), поскольку

$$\frac{\xi_3 - \xi_2}{\beta - \xi_1} \cdot \frac{\eta_2 h}{\eta_1 k} > 0;$$

(ii) $R_4 < \beta$ при R_3, уже определенном из уравнения (3), т. е. нужно, чтобы

$$\beta_2 > \frac{\xi_2 - \xi_1}{\beta - R_3}. \tag{6}$$

Из неравенства (2) имеем

$$\beta_1(\beta - \xi_1) > (\xi_2 - \xi_1) + (\xi_3 - \xi_2)\frac{\eta_2 h}{\eta_1 k}.$$

Таким образом, из уравнения (4) получаем $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = \dfrac{\eta_1 k}{\eta_2 h}$. Это дает

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{\xi_3 - \xi_2}{\beta_1(\beta - \xi_1) - (\xi_2 - \xi_1)} \quad \text{или} \quad \beta_2 > \frac{\xi_3 - \xi_2}{\beta - \left(\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\beta_1} + \xi_1\right)},$$

а так как $R_3 = (\xi_2 - \xi_1)/\beta_1 + \xi_1$ (см. уравнение (3)), неравенство (6) выполнено.

Теперь в результате трансформации элемента f элементом φ получим

$$\varphi^{-1}f\varphi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & R_2 & & R_3 & & R_4 & \\ 1 & & \eta_1 & & \eta_2\beta_1/\beta_2 & & \eta_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где R_2 — решение уравнения $\eta_1\beta_2R_2 + (1 - \eta_1\beta_1)\xi_1 = \xi_2$.

Трансформируем, далее, f^{-1} элементом $\psi \in G(I)$ так, чтобы результат имел первый и третий изломы в точках ξ_1 и R_4; это возможно согласно утверждению (В):

$$\psi^{-1}f^{-1}\psi = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & \delta & & R_4 & \\ 1 & & \eta_1^{-1} & & \eta_2^{-1} & & 1 \end{Bmatrix},$$

где величина δ на самом деле существенной роли не играет.

Результат умножения $\psi^{-1}f^{-1}\psi$ на $\varphi^{-1}f\varphi$ будет одним из следующих трех возможных:

(а) если $\psi^{-1}f^{-1}\psi(\delta) < R_2$, то

$$\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi = \begin{Bmatrix} & \delta & & R_2^* & & R_3^* & \\ 1 & & \eta_1/\eta_2 & & \eta_1\beta_1/\eta_2\beta_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где R_i^*, $i = 1, 2$, суть решения уравнений

$$\frac{R_i^*}{\eta_2} + \left(1 - \frac{1}{\eta_2}\right) R_4 = R_i;$$

(б) если $R_2 < \psi^{-1}f^{-1}\psi(\delta) < R_3$, то

$$\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi = \begin{Bmatrix} & R_2' & & \delta & & R_3' & \\ 1 & & \beta_1/\beta_2 & & \eta_1\beta_1/\eta_2\beta_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где R_2' и R_3' суть решения уравнений

$$\frac{R_2'}{\eta_1} + \left(1 - \frac{1}{\eta_1}\right)\xi_1 = R_2, \qquad \frac{R_3'}{\eta_2} + \left(1 - \frac{1}{\eta_2}\right) R_4 = R_3;$$

(в) если $R_3 < \psi^{-1}f^{-1}\psi(\delta)$, то

$$\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi = \begin{Bmatrix} & R_2'' & & R_3'' & & \delta & \\ 1 & & \beta_1/\beta_2 & & \eta_2/\eta_1 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где R_i'', $i = 2, 3$, суть решения уравнений

$$\frac{R_i''}{\eta_1} + \left(1 - \frac{1}{\eta_1}\right)\xi_1 = R_i.$$

Заметим, что не может быть $\psi^{-1}f^{-1}\psi(\delta) = R_2$, иначе мы получили бы

$$\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi = \begin{Bmatrix} & * & & * & \\ 1 & & \eta_1\beta_1/\eta_2\beta_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

что невозможно. Аналогично не может быть и $\psi^{-1}f^{-1}\psi = R_3$.

Поскольку мы выбрали $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\eta_2 h}{\eta_1 k} > 1$, первый и второй наклоны в случаях (а) и (в) будут больше 1. Значит, ни тот, ни другой случай не годится, ибо элемент с тремя изломами не может иметь оба свои наклона больше 1.

Таким образом, $\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi$ — положительный элемент, первый и второй наклоны которого суть β_1/β_2 и η_2/η_1.

Поступим, далее, с элементом $\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi$ в точности так же, как поступали с f. Трансформируем $\varphi^{-1}f\varphi\cdot\psi^{-1}f^{-1}\psi$ элементом

$$\varphi^* = \begin{Bmatrix} & R_2'' & & S_3 & & S_4 & & S_5 & \\ 1 & & \lambda_1 & & \lambda_2 & & \delta & & 1 \end{Bmatrix},$$

где $\lambda_1 S_3 + (1 - \lambda_1) R_2'' = R_3''$, $\lambda_2 S_4 + (1 - \lambda_1) R_2'' + (\lambda_1 - \lambda_2) S_3 = \delta$, и выберем λ_1 и λ_2 так, чтобы $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{h} < 1$. В результате трансформации получим

$$\varphi^{*-1}\varphi^{-1}f\varphi\psi^{-1}f^{-1}\psi\varphi^* = \begin{Bmatrix} & R'' & & S_2 & & S_3 & & S_4 & \\ 1 & & \beta_1/\beta_2 & & \lambda_1\beta_1/\lambda_2\beta_2 & & \eta_2/\eta_1 & & 1 \end{Bmatrix},$$

где S_2 — решение уравнения

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}\lambda_1 S_2 + \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\lambda_1\right) R_2'' = R_3''.$$

Трансформируем, далее, элемент $\psi^{-1}f\psi\varphi^{-1}f^{-1}\varphi$ элементом $\psi^* \in G(I)$ с тем, чтобы результат имел первый и третий изломы при R_2'' и S_4 соответственно. Это возможно по утверждению (В):

$$\psi^{*-1}\psi^{-1}f\psi\varphi^{-1}f^{-1}\varphi\psi^* = \begin{Bmatrix} & R_2'' & \delta^* & S_4 & \\ 1 & & \beta_2/\beta_1 & \eta_1/\eta_2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Если мы снова умножим $\psi^{*-1}\psi^{-1}f\psi\varphi^{-1}f^{-1}\varphi\psi^*$ на $\varphi^{*-1}\varphi^{-1}f\varphi\psi^{-1}f^{-1}\psi\varphi^*$, то получим элемент

$$\varphi^{*-1}\varphi^{-1}f\varphi\psi^{-1}f^{-1}\psi\varphi^*\psi^{*-1}\psi^{-1}f\psi\varphi^{-1}f^{-1}\varphi\psi^* \tag{7}$$

из $\Phi(I)$, который опять может иметь одну из следующих трех форм:

(г) $$\begin{Bmatrix} & * & * & * & \\ 1 & \lambda_1/\lambda_2 & \eta_2\beta_2/\eta_1\beta_1 & & 1 \end{Bmatrix},$$

(д) $$\begin{Bmatrix} & * & * & * & \\ 1 & \beta_1\eta_1/\beta_2\eta_2 & \beta_1\eta_1\lambda_1/\beta_2\eta_2\lambda_2 & & 1 \end{Bmatrix},$$

(е) $$\begin{Bmatrix} & * & * & * & \\ 1 & \lambda_1/\lambda_2 & \beta_1\eta_1\lambda_1/\beta_2\eta_2\lambda_2 & & 1 \end{Bmatrix}$$

(здесь величины, обозначенные звездочками, могут быть легко подсчитаны, но не представляют интереса).

В случае (г) имеем $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{h} < 1$ и $\frac{\beta_2\eta_2}{\beta_1\eta_1} = \frac{k}{h} < 1$, что невозможно, так как у элемента с тремя изломами не могут быть оба наклона < 1.

В случае (д)

$$\frac{\beta_1\eta_1}{\beta_2\eta_2} > 1, \quad \frac{\beta_1\eta_1\lambda_1}{\beta_2\eta_2\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{\beta_1\eta_1}{\beta_2\eta_2} = \frac{1}{h}\cdot\frac{h}{k} = \frac{1}{k} > 1,$$

что опять невозможно.

Поэтому нужный случай (е), в котором

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{h}, \quad \frac{\beta_1\eta_1\lambda_1}{\beta_2\eta_2\lambda_2} = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, элемент, обратный к (7), имеет первый наклон h и второй k.

Этим завершается доказательство в случае I.

Случай II. $\frac{\eta_2 h}{\eta_1 k} \leqslant 1$.

Рассмотрим коммутатор $[f, \varphi']$,

$$\varphi' = \begin{Bmatrix} & \xi_1 & & C & & \xi_2 & \\ 1 & & B & & B' & & 1 \end{Bmatrix},$$

где B будет определено позже; единственное ограничение, которое мы пока накладываем, будет $B > \frac{1}{\eta_1}$ (см. доказательство утверждения (Б)), а C определяется из уравнения

$$\eta_1 (BC + (1 - B)\, \xi_1) + (1 - \eta_1)\, \xi_1 = \xi_2, \qquad (8)$$

т. е. $f(\varphi'^{-1}(C)) = \xi_2$ и тогда

$$f^{-1}\varphi'^{-1}f\varphi' = \begin{Bmatrix} & C^* & & C & & \xi_2 & \\ 1 & & B/B' & & B' & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Из того факта, что функция $\varphi'(x)$ однозначна, имеем

$$BC + (1 - B)\, \xi_1 = B'C + (1 - B')\, \xi_2. \qquad (9)$$

Исключая C из (8) и (9), получим $B' = \frac{\eta_1 B - B}{\eta_1 B - 1}$.

Если взять $B = 1 + \varepsilon$, где ε — малый положительный элемент из F, то

$$B' = 1 - \frac{\varepsilon}{(\eta_1 - 1) + \eta_1 \varepsilon}.$$

Чем ближе к 1 мы берем B, тем ближе к 1 будут B' и отношение $(B')^2/B$.

Итак, для данного $k/h < 1$ можно выбрать малое ε так, чтобы $\frac{(B')^2}{B} > \frac{k}{h}$. Следовательно, $[f, \varphi']$ есть такой элемент из $\Phi(I)$, у которого первый наклон $\eta_1^* = \frac{B}{B'}$ и второй наклон $\eta_2^* = B'$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{\eta_2^*}{\eta_1^*} \cdot \frac{h}{k} > 1.$$

Это возвращает нас к случаю I.#

Обобщение теоремы Чехата было сделано Длабом [1].

Проблема 13. Будет ли простой упорядочиваемая группа без инвариантных относительно выпуклых подгрупп?

3°. С помощью сплетений оказывается возможным построить пример конечнопорожденной *нехопфовой* л.у. группы, т. е. конечнопорожденной л.у. группы G, которая обладает выпуклой инвариантной подгруппой H такой, что G/H у-изоморфна G.

Пусть A — свободная абелева группа счетного ранга и $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ — ее базис, $C = \{c\}$ — бесконечная циклическая группа и $B = \{b, b_1\}$ — свободная абелева группа ранга 2. Рассмотрим группы $F = A \bar{\wr} C$ и $Q = F \bar{\wr} B$, считая, что A и F вложены канонически в F и Q соответственно. В F выберем элемент k_i из $\bar{A} = \overline{\prod_{c \in C}} A_c$ следующим образом: $k_i(c^n) = a_i^{-n}$ для всех i, n. Очевидно, что в F элементы $\overset{\circ}{a}_i = [k_i, c]$ лежат в диагонали $\bar{A}_e$:

$$\overset{\circ}{a}_i(c^n) = a_i \text{ для всех } i,\ n. \tag{1}$$

В группе Q выберем элемент a из $\bar{F} = \overline{\prod_{x \in B}} F(x)$ следующим образом:

$$\begin{cases} a(e) = c, \\ a(b^{-i}b_1^{-1}) = k_i \text{ для всех } i, \\ a(y) = e \text{ для остальных } y \in B. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь в $\bar{F}$ элементы $g_i = [b^{-i}b_1^{-1}ab_1b^i, a]$. Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{cases} g_i(e) = \overset{\circ}{a}_i, \\ g_i(x) = e, \quad x \neq e, \quad x \in B. \end{cases} \tag{3}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить с подгруппой $K = \{a, b, b_1\}$ из Q. Очевидно, что $K = DB$, где D — инвариантная подгруппа в K, порожденная элементом a.

Лемма 1. *Группа K упорядочиваема.*

В процессе доказательства построим линейный порядок в K, который будет использован при доказательстве основного утверждения этого пункта.

Сначала упорядочим группу B лексикографически: $b_1^n\, b^m > e$ тогда и только тогда, когда $n > 0$ или $n = 0$, $m > 0$. Для доказательства упорядочиваемости группы K достаточно теперь найти упорядочение D, инвариантное относительно внутренних автоморфизмов K. Это будет сделано в два этапа: сначала в группе D/D' введем порядок, сохраняющийся под действием внутренних автоморфизмов группы K, затем K-упорядочим группу D'.

I. Рассмотрим группу D/D'. Очевидно, что D/D' порождается элементами a^xD', где x пробегают все элементы группы B. Докажем, что D/D' — свободная абелева группа и элементы a^xD' образуют базис этой группы. Из соотношений (2) легко получается, что D' лежит в группе $\bar{\bar{A}} = \overline{\prod\limits_{x \in B}} \bar{A}_x$ и, следовательно, ограничение на D гомоморфизма φ группы Q на $C \,\bar{\wr}\, B$ является продолжением естественного гомоморфизма D на D/D'. Поэтому, если бы существовало нетривиальное соотношение между элементами a^xD' в D/D', то такое же соотношение имело бы место между элементами $\varphi(a^x)$ в группе $C \,\bar{\wr}\, B$. Но элементы $\varphi(a^x)$ в $C \,\bar{\wr}\, B$ обладают, как легко видеть, следующими свойствами:

$$\begin{cases} \varphi(a^x)(x) = c \\ \varphi(a^x)(y) = e, \quad \text{если} \quad y \neq x, \end{cases}$$

и, следовательно, множество элементов $\varphi(a^x)$, $x \in B$, является базисом в свободной абелевой группе $\prod\limits_{x \in B} C_x$, которую оно порождает. Отсюда можно заключить, что всякий элемент из D/D' единственным образом представляется в виде

$$dD' = (a^{x_1})^{n_1} \ldots (a^{x_k})^{n_k} D',$$

где $x_1 < \ldots < x_k$ — элементы из B. Определим упорядочение группы D/D' следующим образом: $dD' > D'$ тогда и только тогда, когда $n_k > 0$.

II. Рассмотрим коммутант D' группы D. Очевидно, что D' порождается всеми сопряженными (в D) к коммутаторам вида $[a^x, a^y] = [a^{xy^{-1}}, a]^y$, где $x, y \in B$, причем можно считать, что $xy^{-1} > e$. Непосредственная проверка показывает, что если $xy^{-1} = b_1b^i$, то $[a^{xy^{-1}}, a]^y = [a^{b_1b^i}, a]^y = g_i^y$. Если же $xy^{-1} \neq b_1b^i$ ни для какого i, то

$$[a^{xy^{-1}}, a]^y = e.$$

Следовательно, D' порождается всеми сопряженными к g_i. Но

$$\begin{cases} g_i^y(y) = \overset{\circ}{a}_i, \\ g_i^y(x) = e, \quad \text{если} \quad x \neq y, \end{cases} \tag{4}$$

следовательно, так как $\overset{\circ}{a}_i$ лежит в центре F и D лежит в $\overline{\prod\limits_{x \in B}} F_x$, элементы g_i^y перестановочны с любым элементом из D, и поэтому D' лежит в центре D.

Докажем, что D' — свободная абелева группа и элементы g_i^y, где y пробегает B, образуют базис D'. Пусть

$$d' = \prod_{y_1 \leqslant y_k \leqslant y_n} (g_{i_{k_1}}^{m_{k_1}} \ldots g_{i_{k_s}}^{m_{k_s}})^{y_k} = e.$$

Тогда для всякого $y_1 \leqslant y_k \leqslant y_n$ имеет место соотношение

$$(g_{i_{k_1}}^{m_{k_1}} \ldots g_{i_{k_s}}^{m_{k_s}})^{y_k}(y_k) = e$$

и ввиду (4)

$$\overset{\circ}{a}{}_{i_{k_1}}^{m_{k_1}} \ldots \overset{\circ}{a}{}_{i_{k_s}}^{m_{k_s}} = e.$$

Но элементы $\overset{\circ}{a}_i$ образуют базис свободной абелевой группы A° (диагональ $\bar{A}$), следовательно, все $m_{k_i} = 0$.

Отсюда следует, что каждый элемент из D' записывается единственным образом в виде

$$d' = \prod_{i_0 \leqslant i \leqslant i_1} (g_i^{y_{1i}})^{m_{1i}} \ldots (g_i^{y_{si}})^{m_{si}},$$

причем $y_{1i} < \ldots < y_{si}$. Будем считать, что $d' > e$, если $m_{si_1} > 0$. Очевидно, что это линейное упорядочение группы D' инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы K, Этим доказано, что группа K упорядочиваема. Через S обозначим подгруппу в K, порожденную всеми g_i^y, где $i \leqslant 0$. Из определения порядка в группе K следует, что S — выпуклая инвариантная подгруппа в K. #

Теорема 3. (Б. Нейман [41].) *Существуют конечно-порожденные л.у. нехопфовы группы.*

Доказательство. В качестве упорядоченной нехопфовой группы возьмем группу $G = K/S$. Для доказательства нехопфовости группы G рассмотрим следующий автоморфизм α группы K:

$$\alpha(a) = a,$$
$$\alpha(b) = b,$$
$$\alpha(b_1) = b_1 b.$$

Непосредственная проверка показывает, что α есть у-автоморфизм л.у. группы K. Поэтому подгруппа $\alpha(S)$ выпукла и инвариантна в K, причем $\alpha(S)$ порождается элементами g_i^y, где $i \leqslant 1$.

В группе $G = K/S$ возьмем инвариантную выпуклую подгруппу $\alpha(S)/S = H$. Очевидно, что гомоморфизм группы G, индуцированный у-автоморфизмом α, дает нам у-изоморфизм:

$$G/H = K/S/\alpha(S)/S \cong K/\alpha(S) \cong \alpha(K)/\alpha(S) \cong$$
$$\cong K/S = G. \#$$

ГЛАВА V

СВЯЗЬ ТЕОРИЙ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП И ДРУГИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Упорядоченные тела

Напомним, что *линейно упорядоченным* (л. у.) *телом* называется л.у. кольцо, являющееся телом. Очевидно, что совокупность положительных элементов P л.у. тела T является линейным чистым полукольцом, т. е. обладает свойствами:

а) $P + P \subseteq P$,
б) $P \cap (-P) = 0$,
в) $P \cup (-P) = T$,
г) $P \cdot P \subseteq P$.

С другой стороны, всякое полукольцо P тела T, удовлетворяющее свойствам (а) — (г), задает естественное упорядочение тела T, при котором P есть множество неотрицательных элементов.

Теорема 1. (Мальцев [1], Б. Нейман [2].) *Групповая алгебра линейно упорядоченной группы G над линейно упорядоченным телом F вкладывается в линейно упорядоченное тело формальных рядов по G над F.*

Доказательство. Пусть G — л.у. группа и F — л.у. тело. Рассмотрим множество $F(G)$ всевозможных формальных рядов $x = \sum\limits_{g \in G} \xi_g \cdot g$, $\xi_g \in F$, таких, что множество тех $g \in G$, при которых $\xi_g \neq 0$, вполне упорядочено по возрастанию относительно порядка группы G. Множество $F(G)$ можно считать ассоциативной алгеброй над F, если определить покомпонентное сложение рядов и умножение их на элементы из F:

$$\sum_{g\in G}\xi_g\cdot g+\sum_{g\in G}\xi'_g\cdot g=\sum_{g\in G}(\xi_g+\xi'_g)\cdot g,$$
$$\xi\sum_{g\in G}\xi_g\cdot g=\sum_{g\in G}\xi\xi_g\cdot g,$$

а также умножение рядов:

$$\sum_{g\in G}\xi_g\cdot g\cdot\sum_{g\in G}\xi'_g\cdot g=\sum_{g\in G}\Big(\sum_{g_1g_2=g}\xi_{g_1}\xi'_{g_2}\Big)g.$$

Непосредственная проверка показывает, что первые две операции корректно определены на $F(G)$.

Произведение элементов из $F(G)$ содержится в $F(G)$, так как для всякого g сумма $\sum\limits_{g_1g_2=g}\xi_{g_1}\xi_{g_2}$ содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, поскольку в противном случае нашлась бы бесконечная убывающая последовательность g_α такая, что $\xi_{g_\alpha}\neq 0$ или же $\xi'_{g_\alpha}\neq 0$, что противоречит тому, что $\sum\xi_g\cdot g$, $\sum\xi'_g\cdot g$ лежат в $F(G)$. Аналогично доказывается, что множество тех $g\in G$, для которых $\sum\limits_{g_1g_2=g}\xi_{g_1}\xi'_{g_2}\neq 0$, вполне упорядочено по возрастанию в G. Проверка остальных аксиом алгебры для $F(G)$ несложна. Если мы положим $\sum\xi_g g>0$, когда $\xi_{g_0}>0$, где g_0 — наименьший номер из G такой, что $\xi_{g_0}\neq 0$, то тем самым превратим $F(G)$ в л. у. кольцо, что проверяется непосредственно.

Докажем, что $F(G)$ является телом. Пусть $x\in F(g)$, $x=\sum\xi_g\cdot g$, g_0 — наименьший элемент из G такой, что $\xi_{g_0}\neq 0$. Тогда $x=\xi_{g_0}g_0(e+\sum\limits_{g\in G}\xi_{g_0}^{-1}\xi_g\cdot g_0^{-1}g)=$ $=\xi_{g_0}g_0(e+\sum\limits_{g>e}\xi'_g\cdot g)$. Эти равенства показывают, что всякий элемент $x\in F(G)$ единственным образом представляется в виде $x=\alpha\cdot g_0(e+\sum\xi_g\cdot g)$, причем $\xi_g=0$ для всех $g\leqslant e$. Чтобы доказать, что $F(G)$ — тело, необходимо для всякого $x\in F(G)$, $x=\alpha g_0(e+\sum\xi_g\cdot g)$, $\alpha\neq 0$, найти обратный элемент. Но для этого достаточно доказать обратимость такого элемента $e+\sum\xi_g\cdot g$, что $\xi_g = 0$ при $g \leqslant e$. Нетрудно видеть, что если формальный ряд $z = e + \sum_{n=1}^{\infty} (-y)^n$ лежит в $F(G)$, то z — обратный элемент к $e + y$. Поэтому достаточно доказать принадлежность к $F(G)$ формального ряда $e + \sum_{n=1}^{\infty} (-y)^n$, где $y = \sum \xi_g \cdot g \in F(G)$ и $\xi_g = 0$ при $g \leqslant e$. Пусть $z = \sum_{g \in G} \eta_g \cdot g$, $(-y)^n = \sum \eta_g^{(n)} \cdot g$. Предположим сначала, что найдется бесконечная убывающая последовательность

$$u_1 = g_{11} \dots g_{1n_1} > \dots > u_i = g_{i1} \dots g_{in_i} > \dots$$

такая, что $\xi_{g_{ik}} \neq 0$. Пусть H_i — выпуклая подгруппа в G, порожденная элементом u_i. Так как все $g_{ij} > e$, то ясно, что H_i порождается как выпуклая подгруппа максимальным элементом $a_i = g_{ik_i}$ среди g_{ij}. Ввиду того, что множество тех $g \in G$, для которых $\xi_g \neq 0$, вполне упорядочено, найдется такая подгруппа $H = H_k$, что $H \subseteq H_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Кроме того, последовательность $u_1 > \dots > u_k > \dots$ мы можем выбрать такой, чтобы соответствующая подгруппа H была наименьшей среди всех возможных. Это можно сделать также благодаря вполне упорядоченности множества тех $g \in G$, что $\xi_g \neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $H_i = H$ ($i = 1, 2, \dots$), так как $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_k = H_{k+1} = \dots$ Тогда каждый a_i порождает H как выпуклую подгруппу. Выберем, далее, $a \in G$ такое, что $\xi_a \neq 0$ и a — наименьший среди тех элементов, которые порождают H. Тогда $a \leqslant a_1 \leqslant u_1$, но так как a и u_1 порождают одну и ту же выпуклую подгруппу и $a > e$, то найдется такое положительное число r, что $u_1 < a^r$, и тогда $u_i < a^r$ ($i = 1, 2, \dots$). Каждое u_i обладает одной из следующих записей:

$$u_i = a_i, \quad u_i = v_i a_i, \quad u_i = a_i w_i, \quad u_i = v_i a_i w_i,$$

где v_i, w_i — произведения элементов g_{ij}. Так как среди a_i не может быть бесконечной убывающей последовательности, то лишь конечное число u_i равняется a_i, а поэтому среди v_i или w_i найдется бесконечная убывающая последовательность, например $w_{i_1} > \dots > w_{i_j} > \dots$ Так как $w_i < u_i$ и последовательность u_i выбиралась такой, что

H — наименьшая из возможных, то w_i порождают H и, следовательно, $a \leqslant w_i$. В то же время $w_i < a^{r-1}$. Таким образом, по последовательности u_i мы построим последовательность w_i с теми же свойствами, но с меньшим r. Очевидно, что это ведет к противоречию, которое и доказывает вполне упорядоченность по возрастанию тех $g \in G$, что $\eta_g \neq 0$.

Для того чтобы доказать принадлежность z к $F(G)$, осталось проверить, что формальная сумма $\sum (-y)^n$ определена, т. е. что при приведении подобных членов по g встретится лишь конечное число слагаемых, или что для всякого $a \in G$ найдется лишь конечное число целых чисел n таких, что $\eta_a^{(n)} \neq 0$. Предположим противное, т. е. пусть найдется такое $a \in G$, $a = g_{i1} \ldots g_{in_i} (i = 1, 2, \ldots)$, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots (i = 1, 2, \ldots)$ и $\xi_{g_{ik}} \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n_i$. Ввиду того, что множество тех g, что $\eta_g \neq 0$, вполне упорядочено, найдется наименьшее a с этим свойством. Последовательность $g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{i1}, \ldots$, не ограничивая общности, можно считать неубывающей, тогда последовательность $a'_i = g_{i2} \ldots g_{in_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ невозрастающая и, как было доказано раньше, стабилизируется на некотором номере k, т. е. $a'_k = a'_{k+1} = \ldots$ Но так как $g_{k1} > e$, имеет место неравенство $a'_k < a$. Это противоречит выбору a. Итак,

$$z = e + \sum_{n=1}^{\infty} (-y)^n \in F(G)$$

и, следовательно, $F(G)$ — тело. #

Следствие 1. (Гильберт [11.]) *Л. у. группа вкладывается в мультипликативную группу л.у. тела.*

Проблема 14. Описать мультипликативную группу л. у. тела.

Проблема 15. Построить аналог теории Артина — Шрейера формально вещественных полей для л. у. тел.

Проблема 16. Вкладывается ли л.у. тело в такое л. у. тело, мультипликативная группа положительных элементов которого полна?

Проблема 17. Вкладывается ли групповая алгебра правоупорядоченной группы в тело?

§ 2. Полуоднородно упорядоченные группы

Множество G называется *полуоднородно частично упорядоченной группой* (п.ч.у. группой), если оно является группой относительно операции умножения, ч. у. множеством относительно отношения $\leqslant$, причем каждый элемент x из G обладает одним и только одним из двух свойств:

(А) $ax < bx$, $xa < xb$ для всех $a < b$;

(Б) $ax < bx$, $xa < xb$ для всех $a > b$.

Если порядок п.ч.у. группы линейный, то она называется п.л.у. группой. Примером п.л.у. группы может служить мультипликативная группа всех рациональных чисел с их естественной упорядоченностью. Вообще, мультипликативная группа любого упорядоченного тела является полуоднородно упорядоченной группой.

Замечание 1. Если в п.ч.у. группе G множество элементов x, обладающих свойством (Б) из определения, пусто, то G является ч.у. группой. Поэтому в дальнейшем под п.ч.у. группой будем подразумевать группу с непустым множеством элементов, удовлетворяющих (Б).

Если M — подмножество п.ч.у. группы G, то обозначим через M_+ совокупность всех $x \in M$, обладающих свойством (A), а через M_- — множество всех $y \in M$, обладающих свойством (Б).

Лемма 1. *Если G — п.ч.у. группа, то*

(1) $G = G_+ \cup G_-$,

(2) G_+ — *инвариантная ч.у. подгруппа индекса два, частичный порядок которой сохраняется под действием внутренних автоморфизмов из* G,

(3) G_+, G_- — *двойственные друг другу ч.у. множества,*

(4) G_+, G_- — *выпуклые подмножества.*

Доказательство. (1) непосредственно следует из определения п.ч.у. группы.

(2). Из определения п.ч.у. группы вытекает, что G_+ является инвариантной ч.у. подгруппой и что порядок в G_+ сохраняется под действием внутренних автоморфизмов из G. Пусть, далее, $y \in G_-$. Тогда

$$G = yG = y(G_+ \cup G_-) = yG_+ \cup yG_- = yG_+ \cup G_+,$$

так как $yG_- \subseteq G_+$. Отсюда следует, что $| G : G_+ | = 2$.

(3) вытекает из (2) и определения G_+ и G_-.

(4). Достаточно показать несовместимость следующих соотношений: (а) $x > y$ и (б) $x_1 < y_1$, где $x, x_1 \in G_+$, y, $y_1 \in G_-$. Допустим противное. Умножив (а) на x_1, (б) на y и (а) на y_1, получим $xx_1 > yx_1 > xy_1$. Отсюда следует $xx_1 > xy_1$ и, значит, $x_1 > y_1$, так как по (2) $x^{-1} \in G_+$. Но $x_1 > y_1$ противоречит соотношению (б). #

Замечание 2. Для произвольной пары элементов $x \in G_+$ и $y \in G_-$ п.ч.у. группы G условимся считать в дальнейшем $x > y$. Свойство (2) леммы 1 показывает несущественность этого ограничения.

Предложение 1. *Для того чтобы группа G была полуоднородно частично упорядоченной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала чистую инвариантную полугруппу P, лежащую в некоторой подгруппе H индекса два.*

Необходимость следует из леммы 1, если в качестве P взять множество неотрицательных элементов из G_+, а в качестве H — подгруппу G_+.

Докажем достаточность. Пусть H и P — подгруппа и подполугруппа из G, удовлетворяющие условию теоремы. Введем в группе G частичный порядок следующим образом: если $x \in H$ и $y \in G \setminus H$, то $x > y$; если $x, y \in H$ и $xy^{-1} \in P$, то $x > y$; если $x, y \overline{\in} H$ и $xy^{-1} \in P$, то $x < y$. Покажем, что относительно этого порядка G будет п.ч.у. группой, причем $G_+ = H$, $G_- = G \setminus H$. Действительно, пусть $x, a, b \in G \setminus H$ и $a < b$, т. е. $ab^{-1} \in P$. Так как индекс H в G равен двум, элементы xa, xb лежат в H. Элемент $xa\,(xb)^{-1} = x\,(ab^{-1})x^{-1}$ лежит в P на основании $ab^{-1} \in P$ и инвариантности P. Таким образом, $xa > xb$. Аналогично проверяются все остальные возможные случаи. #

Замечание 3. Если группа G п.ч.у., то ее частичный порядок однозначно (см. замечание 1) определяется частичным порядком из G_+.

Пример 1. G — симметрическая группа любой мощности, G_+ — знакопеременная группа.

Пример 2. G — подгруппа мультипликативной группы R всех вещественных чисел, порожденная положительными рациональными числами Q и числом $\sqrt{2}$. Эту группу G можно сделать п.л.у. группой так: если $r_1, r_2 \in Q$, то $r_1 > r_2$ соответствует упорядочению по величине;

если $r_1, r_2 \in Q$ и $r_1 > r_2$, то $r_1\sqrt{2} < r_2\sqrt{2}$; если $r, x \in Q$ и $y = r\sqrt{2}$, то $x > y$. Итак, $G_+ = Q$.

Пример 3. G — аддитивная группа целых чисел, G_+ — множество четных чисел, упорядоченное естественным способом, G_- — множество нечетных чисел, упорядоченное в обратном порядке к обычному. Если $x \in G_+$ и $y \in G_-$, считаем $x > y$. При этом порядке G будет п.л.у. группой.

Пример 4. G — множество пар (x, y) вещественных чисел таких, что $x \neq 0$. Операцию умножения определим так:

$$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1a_2, a_2b_1 + b_2).$$

Если считать $(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$ при $a_1 > a_2$, то G будет направленной п.ч.у. группой.

Пример 5. G — полупрямое произведение вида $G = (\{a_1\} \times \{a_2\})\cdot\{b\}$ со следующими соотношениями: $b^2 = e$, $ba_1b^{-1} = a_2$. Группу G можно полуоднородно решеточно упорядочить так: $a_1^n a_2^m \geqslant e$ тогда и только тогда, когда $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$.

Лемма 2. *Смешанная п.л.у. группа есть прямое произведение л.у. группы на циклическую группу второго порядка.*

Пусть $a \neq e$ и $a^n = e$. Тогда $a \in G_-$, так как G_+ является группой без кручения. Из $a^n = e$, $e \in G_+$ и свойства (2) леммы 1 следует $n = 2m$. Но так как $a^2 \in G_+$, то $(a^2)^m = e$ возможно только при $m = 1$. Следовательно, $n = 2$.

Пусть $a^2 = b^2 = e$, $a \neq b$ и, для определенности, $a < b$. Тогда, умножив $a < b$ на a слева и на b справа, получим противоречивые соотношения: $e > ab$, $e < ab$.

Применение леммы 1 завершает доказательство. $\#$

Введем следующие обозначения. Если M — множество элементов п.ч.у. группы G, то M^+ есть множество всех $x \in M$, для которых $x^2 > e$, а M^- есть множество всех $y \in M$, для которых $y^2 < e$.

Лемма 3. *В п. л. у. группе G множества G^+, G^- являются чистыми инвариантными полугруппами.*

Пусть $x^2 > e$. Умножив $x^2 > e$ на $x^{-2} = (x^{-1})^2 \in G_+$, получим $e > x^{-2} = (x^{-1})^2$. Значит, $x^{-1} \in G^-$ и поэтому G^+ — чистое множество. Из $x^2 > e$, $(y^{-1}xy)^2 = y^{-1}x^2y$ для любого $y \in G$ следует $y^{-1}x^2y > e$, т. е. G^+ — инвариантное множество.

Докажем, что G^+ есть полугруппа. Для элементов $x \in G^+ \cap G_+$ по лемме 1 справедливо соотношение $x > e$ и, значит, по предложению 1 они образуют полугруппу. Пусть, далее, $y_1, y_2 \in G^+ \cap G_-$ и, например, $y_1 < y_2$. Умножив $y_1 < y_2$ слева на y_1 и справа на y_2, получим $y_1^2 > y_1y_2 > y_2^2 > e$, т. е. $y_1y_2 \in G^+ \cap G_+$. Пусть $y \in G^+ \cap G_-$ и $x \in G^+ \cap G_+$, что равносильно $x > e$. Умножив $x > e$ на y, получим $yx < y$, где $yx \in G_-$. Умножив $yx < y$ слева на yx и справа на y, получим

$$(yx)^2 > (yx)\,y > y^2 > e,$$

т. е.

$$yx \in G^+. \ \#$$

Т е о р е м а 1. (К о н т о р о в и ч и К о к о р и н [1], К л и ф ф о р д [5].) *Группа G тогда и только тогда полуоднородно линейно упорядочиваема, когда она является группой одного из следующих видов:*

(1) *$G = H \times \{a\}$, где H — упорядочиваемая группа, $\{a\}$ — циклическая группа второго порядка;*

(2) *G — упорядочиваемая группа, содержащая подгруппу индекса два;*

(3) *G — циклическая группа второго порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа G периодическая, то по лемме 2 она является группой типа (3). Если группа G смешанная, то, по лемме 2, она имеет вид (1). Если же G — группа без кручения, то, по лемме 3, $G^+ \cup e$ есть чистая линейная инвариантная полугруппа, что эквивалентно линейной упорядочиваемости группы. #

Отметим, что признак, аналогичный теореме 1, для п.р.у. групп неверен. Так, в группе G из примера 5 содержится бесконечное множество элементов второго порядка вида $a_1^n a_2^{-n} b$.

П.л.у. группы являются частным случаем групп с отношением промежуточности (см. Ш е п п е р д [1] и Г р е в [1]). Близкими к указанным классам групп являются разделительные группы (Ш е п п е р д [3]) и циклически упорядоченные группы (Р и г е р [1], С в е р ч к о в с к и й [1], Ф у к с [8]).

§ 3. Упорядоченные модули

Упорядоченные модули имеют существенное значение для теории упорядоченных групп. Это объясняется тем, что часто рассматриваются л.у. группы совместно с некоторыми группами порядковых автоморфизмов (следствие 4 § 1 гл. II, теоремы 3, 4, 6 § 2 гл. II, теорема 2 § 3 гл. III). В этом параграфе будут доказаны предложения, являющиеся основой метода применения упорядоченных модулей к вопросам нахождения признаков упорядочиваемости группы и относительной выпуклости подгруппы. Будет введено два типа линейно упорядоченных модулей, используемых при решении различных вопросов.

1°. Модулем над ассоциативным кольцом K называется абелева группа M, на которой действует кольцо операторов K с единицей ε, причем выполняются следующие аксиомы:

$$\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b,$$
$$(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a,$$
$$(\alpha\beta) a = \alpha (\beta a),$$
$$\varepsilon a = a,$$

где a, $b \in M$, α, $\beta \in K$.

Линейно упорядоченным (л. у.) *модулем M над л. у. кольцом K* называется K-модуль, в котором введено отношение линейного порядка $\leqslant$, превращающее M в л. у. группу и устойчивое относительно умножения на положительные элементы кольца операторов K.

Пример 1. Л.у. модулем над упорядоченным кольцом является конечномерное векторное пространство V над полем R вещественных чисел, упорядоченное лексикографически по некоторой базе.

Пример 2. Всякое л.у. кольцо K с единицей, рассматриваемое как модуль над самим собой, есть л.у. модуль над л.у. кольцом K.

Пусть M есть K-модуль над некоторым кольцом K, пусть, далее, $\Gamma \subseteq K$ и в M введено отношение порядка $\leqslant$, относительно которого M — абелева л.у. группа, причем этот порядок устойчив относительно операторов из Γ. Тогда M называется Γ-*упорядоченным K-модулем.* Очевидно, что л.у. модуль M над л.у. кольцом K является

K_+-упорядоченным K-модулем, где K_+ — множество положительных элементов кольца K.

Пример 3. Пусть A — произвольная абелева л. у. группа, Γ — некоторое множество порядковых эндоморфизмов группы A, K — кольцо эндоморфизмов группы A, порожденное Γ. Тогда A есть Γ-упорядоченный K-модуль.

Пример 3 часто применяется в приложениях, когда Γ — некоторая группа порядковых автоморфизмов, а K — групповое кольцо Γ.

Условия упорядочиваемости групп, данные в гл. II, легко переносятся на Γ-упорядочиваемые K-модули после того, как понятие внутреннего автоморфизма группы заменить всюду на действие оператора из Γ. Сформулируем здесь лишь признак, аналогичный теореме 2 из § 1 гл. II.

Будем называть подмножество P модуля M Γ-полумодулем, если P замкнуто относительно сложения и выдерживает действие операторов из Γ. Наименьший Γ-полумодуль, содержащий элементы $a_1, \ldots, a_n$, будем обозначать через $S_\Gamma(a_1, \ldots, a_n)$.

Предложение 1. *K-модуль M является Γ-упорядочиваемым K-модулем тогда и только тогда, когда для всякого конечного множества ненулевых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из M можно подобрать такие значения $\varepsilon_1, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n$, равные ± 1, что $S_\Gamma(\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n) \not\ni 0$.* #

Пусть Φ — некоторое помножество кольца операторов K. Будем называть K-модуль M *Φ-полным*, если уравнение $\varphi x = a$ разрешимо для любых $a \in M$, $\varphi \in \Phi$.

Теорема 1. (Копытов [2], Кокорин и Копытов [3].) *Пусть M есть Γ-упорядочиваемый K-модуль, Φ — подполугруппа кольца K, действующая на M как полугруппа мономорфизмов, причем такая, что всякий $\varphi \in \Phi$ перестановочен на M с операторами из K. Тогда M вкладывается в Φ-полный Γ-упорядочиваемый K-модуль M^*, удовлетворяющий условию: для всякого $a \in M^*$ найдется такой $\varphi \in \Phi$, что $\varphi a \in M$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда Φ — полугруппа, порожденная одним элементом φ. В этом случае $\varphi M \subseteq M$ и если $\varphi M = M$, то модуль M является Φ-полным. Если же $\varphi M \subset M$, то M^* построим как объединение возрастающей последовательности K-модулей M_i, положив $M_0 = M$. Предположим, что построены такие Γ-упорядочиваемые K-модули M_i, $i \leqslant n$, что всякий оператор из K, индуцирующий мономорфизм модуля M, индуцирует мономорфизм модуля M_i и φ перестановочен на M_i с операторами из K. Рассмотрим φM_n. Так как φ поэлементно перестановочен на M_n с каждым оператором из K, то φM_n является K-подмодулем модуля M_n, изоморфным K-модулю M_n. Изоморфизм ε_n устанавливается следующим образом: $\varepsilon_n(m) = \varphi m$. Следовательно, мы можем в качестве M_{n+1} взять K-модуль, изоморфный M_n, и вложить M_n в M_{n+1} с помощью изоморфизма ε_n. Очевидно, что M_{n+1} является Г-упорядочиваемым K-модулем и удовлетворяет всем требованиям, необходимым в индуктивном шаге. Итак, мы построили возрастающую цепочку модулей

$$M = M_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} \ldots \to M_n \xrightarrow{\varepsilon_n} M_{n+1} \to \ldots$$

Объединение возрастающей цепочки модулей M_i с вложениями ε_i даст требуемый K-модуль M^*, который ввиду справедливости локальной теоремы для Г-упорядочиваемых модулей сам Г-упорядочиваем. Из построения следует, что для любого $a \in M^*$ найдется такое k, что $a \in M_k$ и $\varphi^k a \in M_0 = M$.

Для Ф, порожденного более чем одним элементом, доказательство теоремы легко проводится методом трансфинитной индукции. ⌗

Проблема 18. Можно ли в теореме 1 отказаться от перестановочности на M мономорфизмов $\varphi \in \Phi$ с операторами из K, даже если не требовать, чтобы для всякого $a \in M^*$ нашелся такой $\varphi \in K$, что $\varphi a \in M$?

2°. В этом пункте будут даны приложения теоремы 1 к нахождению признаков упорядочиваемости групп.

Пусть даны группы G и G^* с областью операторов Ф. Говорят, что G *операторно вкладывается в* G^*, если существует такой изморфизм τ группы G в группу G^*, что для всяких $g \in G$, $\omega \in \Phi$ имеет место равенство $\tau(\omega(g)) = \omega(\tau(g))$, при этом если $\omega(x) = h^{-1}xh$ в G, то для $x \in G^*$ имеем $\omega(x) = \tau(h^{-1})\, x\tau(h)$.

Лемма 1. *Пусть H — относительно выпуклая инвариантная подгруппа упорядочиваемой группы G и Ф — группа всех автоморфизмов группы H, индуцируемых внутренними автоморфизмами группы G. Если H операторно вкладывается в Ф-упорядочиваемую группу H^*, то G*

вкладывается в такую упорядочиваемую группу G^*, *что*

а) $G^* = GH^*$, б) $H = G \cap H^*$,

в) $G^*/H^* \cong G/H$.

В каждом смежном классе gH фактор-группы G/H выберем по одному представителю. Элементы этой системы представителей обозначим $g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g, \ldots$ В H выберем систему шрейеровских факторов h_{ij}, получающихся следующим образом: $g_i g_j = g_k h_{ij}$, где g_k — представитель смежного класса $g_i g_j H$.

Через $\tilde{g}$ обозначим автоморфизм группы H, индуцируемый элементом $g \in G$: $\tilde{g}(h) = g^{-1}hg$, $h \in H$.

В качестве группы G^* возьмем расширение группы H^* с помощью группы G/H, соответствующее системе факторов h_{ij} и системе автоморфизмов $\tilde{g}$. Такое расширение существует. Действительно, если в группе Φ выполняется $\tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \tilde{g}_3\varphi$, где $\varphi \in \Phi$, φ — внутренний автоморфизм группы H, индуцируемый $h \in H$, то для групп H^* и Φ ввиду определения операторного вложения имеет место аналогичное соотношение. Кроме того, так как $h_{ij} \in H$ и автоморфизм $\tilde{g}$ группы H^* совпадает с $\tilde{g}$ на H, имеем $h_{is}h_{jk} = h_{rk}\tilde{g}_k(h_{ij})$, где

$$g_i g_j = g_r h_{ij}, \quad g_j g_k = g_s h_{jk}, \quad g_i g_s = g_u h_{is}, \quad g_r g_k = g_u h_{rk}.$$

Таким образом, искомое расширение существует.

Очевидно, что G может быть вложена в G^*. Так как по условию группа G/H упорядочиваема, а H^* является G^*-упорядочиваемой группой, то применение теоремы 4 § 2 гл. II завершает доказательство. ⧺

Теорема 2. (Копытов [5].) *Группа G без G-кручения, коммутант которой нильпотентен, упорядочиваема.*

Доказательство. Пусть G изоморфна фактор-группе свободной группы F многообразия групп с нильпотентным класса k коммутантом по подгруппе N, $G \cong F/N$. По следствию 1 § 3 гл. III F упорядочиваема и все члены нижнего центрального ряда коммутанта F' относительно выпуклы в F. Пусть $E = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_n = F' \subset F$ — ряд, составленный из F' и членов нижнего центрального ряда F', и пусть

$$E = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_n \subseteq N$$

— ряд, составленный из пересечений N с Γ_i: $N_i = N \cap \cap \Gamma_i$. Так как F/N — группа без F/N-кручения, то N — строго изолированная подгруппа в F, а следовательно, строго изолированы и все N_i. Для доказательства установим относительную выпуклость каждой из подгрупп N_i. Этого в силу теоремы 6 § 2 гл. II будет достаточно для доказательства теоремы.

Единичная подгруппа N_0 относительно выпукла. Предположим, что относительно выпуклы все N_i, $i<k, k<n$. Рассмотрим группу $F/N_{k-1} = \overline{F}$. Она упорядочиваема. Подгруппа $N_k/N_{k-1} = \overline{N}_k$ строго изолирована в F/N_{k-1}, так как N_k есть пересечение строго изолированных подгрупп N и Γ_k и централизатор N_k/N_{k-1} в F/N_{k-1} совпадает с $\overline{\Gamma}_n = F'/N_{k-1}$, так как Γ_k/Γ_{k-1} — свободный F/F'-модуль. Поэтому $\overline{N}_k$ можно рассматривать как $Z[\overline{F}]$-модуль: если

$$\sigma = n_1 g_1 + \ldots + n_s g_s \in Z[\overline{F}],$$

то

$$a^\sigma = g_1^{-1} a^{n_1} g_1 \ldots g_s^{-1} a^{n_s} g_s,$$

причем этот модуль $\overline{F}$-упорядочиваем по следствию 4 § 1 гл. II, и эндоморфизмы из $Z[\overline{F}]$ перестановочны на $\overline{N}_k$. Применим к $Z[\overline{F}]$-модулю $\overline{N}_k$ теорему 1, считая Φ состоящим из всех эндоморфизмов $\sigma = n_1 g_1 + \ldots + n_s g_s$, где $n_1, \ldots, n_s$ — натуральные числа. Полученный Φ-полный модуль обозначим $\overline{N}_k^*$. Построим теперь группу $\overline{\Gamma}_n^* = \overline{\Gamma}_n \times \overline{N}_k^* (\overline{N}_k)$, являющуюся прямым произведением групп $\overline{\Gamma}_n$ и $\overline{N}_k^*$ с объединенной подгруппой $\overline{N}_k$. Если $\tilde{g}$ — автоморфизм группы $\overline{\Gamma}_n$, индуцируемый внутренним автоморфизмом группы $\overline{\Gamma}$, то $\tilde{g}$ продолжается до автоморфизма $\tilde{g}$ группы $\overline{\Gamma}_n^*$:

$$\tilde{g}(xn) = \tilde{g}(x) n^g, \text{ где } x \in \overline{\Gamma}_n, \quad n \in \overline{N}_k^*.$$

Непосредственная проверка показывает, что $\tilde{g}$ — автоморфизм группы $\overline{\Gamma}_n^*$, и совокупность всех $\tilde{g}$ удовлетворяет условиям леммы 1. По теореме 1 § 2 гл. III группа $\overline{\Gamma}_n^*$ упорядочиваема. Более того, если $\overline{P}$ — линейный порядок в $\overline{\Gamma}_n$, сохраняющийся под действием автоморфизмов группы $\overline{\Gamma}_n$, индуцированных внутренними автоморфизмами группы $\overline{F}$, то множество

$$\overline{P}^* = \{x \in \overline{\Gamma}_n^* \mid x^\sigma \in P \text{ для некоторого } \sigma \in \Phi\}$$

определит линейный порядок группы $\overline{\Gamma}_n^*$, устойчивый относительно автоморфизмов $\widetilde{g}$. Действительно, множество $\overline{P}^*$ — чистое, линейное, инвариантное относительно группы $\overline{F}/\overline{N}_k$ автоморфизмов группы $\overline{\Gamma}_n^*$, индуцированных на $\overline{\Gamma}_n^*$ внутренними автоморфизмами группы $\overline{F}$.

Покажем, что $\overline{P}^*$ — полугруппа. Пусть $x_1n_1, x_2n_2 \in \overline{\Gamma}_n^*$, где $x_1, x_2 \in \overline{\Gamma}_n$, $n_1, n_2 \in \overline{N}_k^*$. Тогда найдутся такие элементы $\sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$, что $(x_1n_1)^{\sigma_1} = a_1 \in P$, $(x_2n_2)^{\sigma_2} = a_2 \in P$. Так как Φ — полугруппа, $\sigma_2\sigma_1 \in \Phi$ и $(x_1n_1 \cdot x_2n_2)^{\sigma_1\sigma_2} = (x_1n_1)^{\sigma_1\sigma_2} \cdot (x_2n_2)^{\sigma_2\sigma_1} = a_1^{\sigma_2} \cdot a_2^{\sigma_1} \in P$.

Итак, группы $\overline{F}, \overline{\Gamma}_n$ и $\overline{\Gamma}_n^*$ удовлетворяют всем требованиям леммы 1. Следовательно, существует упорядочиваемая группа $\overline{F}^*$ такая, что $\overline{F}^* = \overline{F}\overline{\Gamma}_n^*$, $\overline{\Gamma}_n = \overline{F} \cap \overline{\Gamma}_n^*$, $\overline{F} \cap \overline{N}_k^* = \overline{N}_k$, а тогда $\overline{F}^* / \overline{N}_k^* \cong \overline{F} / \overline{N}_k$. Докажем, что $\overline{N}_k^*$ — относительно выпуклая подгруппа в $\overline{F}^*$. Для этого рассмотрим систему Σ выпуклых подгрупп $E \subset H_1 \subset \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \overline{\Gamma}_n^* \subset \overline{F}^*$ группы $\overline{F}^*$ при некотором линейном порядке и умножим все члены этой системы на подгруппу $\overline{N}_k^*$. Получившаяся система Σ'

$$F \subset \overline{N}_k^* \subset \ldots \subset H_\alpha\overline{N}_k^* \subset \ldots \subset \overline{\Gamma}_n^* \subset \overline{F}^*$$

будет удовлетворять всем требованиям теоремы 6 § 2 гл. II. Докажем только строгую изолированность $H_\alpha\overline{N}_k^*$. Пусть $x^{e+g_1+\ldots+g_m} = h_\alpha n_\alpha \in \overline{H}_\alpha\overline{N}_k^*$. Тогда, так как $\overline{F}^*/\overline{\Gamma}_n^*$ — абелева группа без кручения, имеем $x \in \overline{\Gamma}_n^*$, откуда $x = hn$, $h \in \overline{\Gamma}_n, n \in \overline{N}_k^*$. Так как $\overline{N}_k^*$ есть Φ-полный $\overline{F}/\overline{\Gamma}_n$-модуль, найдется такой элемент $a \in \overline{N}_k^*$, что $a^{e+g_1+\ldots+g_m} = n_\alpha$, и тогда $(xa^{-1})^{e+g_1+\ldots+g_n} = h_\alpha$, откуда, в силу строгой изолированности H_α в $\overline{F}^*$, следует $xa^{-1} \in H_\alpha$, т. е. $x \in H_\alpha \cdot \overline{N}_k^*$. Остальные требования теоремы 6 § 2 гл. II проверяются непосредственно, и, применив эту теорему, получаем, что подгруппы системы Σ' выпуклы при некотором порядке в $\overline{F}^*$, и, следовательно, $\overline{N}_k^*$ относительно выпукла в $\overline{F}^*$, а тогда $\overline{N}_k$ относительно выпукла в $\overline{F}$.

Проведенная индукция показывает, что N_n относительно выпукла в F. Но N/N_n есть центральная изолированная подгруппа в группе F/N_n и, по следствию 2 § 4 гл. II, N/N_n относительно выпукла в F/N_n, а тогда группа $G \cong F/N$ упорядочиваема. ⧺

3°. Еще одно применение л.у. модулей к упорядочиваемым группам получается при нахождении *абсолютно выпуклых* (т. е. выпуклых при любом упорядочении) подгрупп упорядочиваемой группы.

Теорема 3. (Копытов, Мамаев [1].) *Пересечение всех относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы является абсолютно выпуклой подгруппой этой группы.*

Доказательство. Пусть $\{H_\alpha\}$ — множество всех относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы G и $A = \bigcap H_\alpha$. Тогда A не содержит нетривиальных выпуклых подгрупп ни при каком упорядочении группы G и потому является архимедовой подгруппой в G при любом линейном порядке G. По следствию 1 § 2 гл. II заключаем, что централизатор $C(A)$ группы A в G содержит коммутант группы G и фактор-группа $G/C(A)$ является подгруппой мультипликативной группы положительных вещественных чисел. Через K обозначим подкольцо поля вещественных чисел, порожденное группой $G/C(A)$.

По теореме 2 § 3 гл. II A относительно выпукла в G. Предположим, что A не является абсолютно выпуклой подгруппой в G. Но тогда в G при некотором линейном порядке найдется архимедова инвариантная выпуклая подгруппа B, содержащая A. Очевидно, что централизатор $C(B)$ подгруппы B совпадает с $C(A)$. Будем рассматривать B как л.у. модуль над л.у. кольцом K (см. п. 1° этого параграфа) и используем далее для B аддитивную запись. Тогда A является подмодулем в B. Заметим, что для любого ненулевого элемента $\alpha \in K$ отображение $x \to \alpha x$ модуля B является мономорфизмом. Тогда, применив теорему 1 при $\Phi = K \setminus 0$, получим упорядочиваемый K-модуль B^*, $B^* \supseteq B$, такой, что отображение $x \to \alpha x$ является автоморфизмом модуля B^* при любом $\alpha \neq 0$, $\alpha \in K$.

Далее, расширив K до его поля частных F, заметим, что B^* является векторным пространством над F. Обозначим через A^* подпространство B^*, порожденное множеством A.

Рассмотрим два случая: (А) $A^* \neq B^*$ и (Б) $A^* = B^*$.

(А) Пусть $A^* \neq B^*$. Тогда существует ненулевое дополнительное подпространство A_1^* для A^*: $B^* = A^* \dotplus A_1^*$, а поэтому $B = (A^* \cap B) \dotplus (A_1^* \cap B)$ и $A_1^* \cap B$ является ненулевым K-подмодулем в B. Кроме того, так как B^*/A_1^* изоморфно A^*, подмодуль $A_1^* \cap B$ относительно выпуклый в K-модуле B. Возвращаясь к группе G, заключаем отсюда, что в G имеется относительно выпуклая подгруппа $B \cap A_1^*$, не содержащая A, что противоречит условию.

(Б) Пусть $A^* = B^*$. Обозначим через $\tilde{A}$ строгий изолятор A в B^* (*строгим изолятором* множества H группы G называется наименьшая строго изолированная подгруппа, содержащая H). Ясно, что $\tilde{A} \neq B^*$, так как в противном случае для любого $x \in B^*$ нашелся бы такой элемент $\sigma = e + \bar{g}_1 + \ldots + \bar{g}_n \in K$, $\bar{g}_i \in G/C(A)$, что $\sigma \cdot x$ лежало бы в A. В частности, такое соотношение выполнялось бы для любых элементов $x \in B \setminus A$. Но $A \neq B$ и A строго изолирована в B, следовательно, для любого $x \in B \setminus A$ элемент $(e + \bar{g}_1 + \ldots + \bar{g}_n)\, x$ не лежит в A ни при каких $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ и $G/C(A)$.

Поскольку $\tilde{A} \neq A^* = B^*$, то существует $\tau \in K$, $\tau \neq 0$, такое, что уравнение $\tau x = a$, $a \in A$, неразрешимо в $\tilde{A}$. Но тогда τA строго содержится в A и $\tau\tilde{A}$ строго содержится в $\tilde{A}$. Это следует из того, что A и $\tilde{A}$ являются K-подмодулями в B^* и τ — автоморфизм B^*. Итак,

$$\tau\tilde{A} \neq \tilde{A}. \tag{1}$$

Через $\overline{\tau A}$ обозначим строгий изолятор τA в A и покажем, что $\overline{\tau A}$ — собственная подгруппа A, относительно выпуклая в G, что и завершит доказательство теоремы. Для доказательства последнего утверждения введем в рассмотрение подгруппу $\widetilde{\tau A}$, являющуюся строгим изолятором τA (а также строгим изолятором $\overline{\tau A}$) в $\tilde{A}$. Прежде всего отметим, что $\tau\tilde{A} = \widetilde{\tau A}$. Действительно, если $x \in \tau\tilde{A}$, то найдутся такие $y \in \tilde{A}$ и $\sigma = e + \bar{g}_1 + \ldots + \bar{g}_n$, $\bar{g}_i \in G/C(A)$, что $x = \tau y$ и $\sigma y \in A$. Но тогда $\sigma x = \sigma\tau y =$

$= \tau\sigma y \in \tau A$, т. е. $\tau\tilde{A} \subseteq \widetilde{\tau A}$. Если же $x \in \widetilde{\tau A}$, то найдутся такие $\sigma = e + \bar{g}_1 + \ldots + \bar{g}_n$, $\bar{g}_i \in G/C(A)$, и $y \in A$, что $\sigma x = \tau y$. Но σ — автоморфизм A^*, поэтому найдется $z \in \tilde{A}$ такой, что $\sigma z = y$. Тогда $\sigma x = \tau\sigma z = \sigma\tau z$, откуда можно заключить (так как σ — автоморфизм), что $x = \tau z$ и $z \in \tilde{A}$, т. е. $x \in \tau\tilde{A}$. Итак, верно равенство

$$\widetilde{\tau A} = \tau\tilde{A}. \tag{2}$$

Теперь покажем, что $\overline{\tau A}$ строго содержится в A. Если бы, напротив, имело место равенство $\overline{\tau A} = A$, то строгий изолятор $\overline{\tau A}$ в $\tilde{A}$ (равный, как было отмечено выше, $\widetilde{\tau A}$) совпадал бы с $\tilde{A}$: $\tilde{A} = \widetilde{\tau A}$. Но ввиду (2) мы получаем $\tilde{A} = \tau\tilde{A}$, что противоречит (1). Следовательно, $\overline{\tau A}$ строго содержится в A.

Подгруппа $\overline{\tau A}$ инвариантна и строго изолирована не только в A, но и во всей группе G. Поэтому можно считать, что на $A/\overline{\tau A}$ действует коммутативная группа $G/C(A)$ и $A/\overline{\tau A}$ не имеет $G/C(A)$-кручения. Тогда, по следствию 2 § 1 гл. II, $A/\overline{\tau A}$ $G/C(A)$-упорядочиваема, а следовательно, и G-упорядочиваема. В то же время G/A — упорядочиваемая группа, а тогда, по теореме 4 § 2 гл. II, упорядочиваема и группа $G/\overline{\tau A}$. Это означает, что $\overline{\tau A}$ — относительно выпуклая подгруппа группы G, строго содержащаяся в A. #

Заметим, что группы, у которых пересечение всех собственных относительно выпуклых подгрупп отлично от E, существуют. Непосредственная проверка показывает, что такой группой является, например, группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где r, s — рациональные числа и $r > 0$. Пересечение всех собственных относительно выпуклых подгрупп этой группы равно группе всех унитреугольных матриц.

Такой же группой является группа A_1 из п. 2° § 1 гл. III.

Будем рассматривать теперь пересечение всех собственных инвариантных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы G. В случае, если это пересечение совпадает с пересечением всех относительно выпуклых подгрупп, оно заведомо является абсолютно выпуклой подгруппой данной упорядочиваемой группы.

Но возможен, однако, случай, когда пересечение всех относительно выпуклых подгрупп — единичная подгруппа, а пересечение всех собственных инвариантных относительно выпуклых подгрупп отлично от единичной подгруппы.

Тогда эта подгруппа может и не быть абсолютно выпуклой, о чем свидетельствует следующая серия примеров, получаемая при помощи серии Ф. Холла простых групп (см. § 3 гл. IV). В § 3 гл. IV доказано, что коммутант $g(A)$ группы $A^* = \bigcup g_n(A)$ есть простая группа. Тогда нетрудно видеть, что изолятор J группы $g(A)$ отличен от A^*, содержится во всякой собственной инвариантной выпуклой подгруппе из A^* и сам является относительно выпуклой подгруппой; поэтому J есть пересечение всех инвариантных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы A^*. Покажем, что J не будет абсолютно выпуклой подгруппой в A^*. Упорядочим для этого Z-ю сплетенную степень C следующим способом: если P — некоторый линейный порядок на A, то $C = rA^Z$ упорядочивается следующим образом: упорядочиваем A_0, взяв в качестве полугруппы положительных элементов $\varphi_0^{-1}(P)$. Предположим, что упорядочена $A_{(-n+1)}$. Упорядочим $A_{(n)}$ так: если

$$x \in A_{(n)}, \quad x = ga, \quad g \in A_n, \quad a \in \bar{A}_{(-n+1)},$$

то считаем $x > e$, если $\varphi_n(g) > e$ в A или $g = e$, $a = a_1(h_1) \ldots a_n(h_n)$, $e \neq a_1(h_1) \in A_{(-n+1)}(h_1)$, $h_1 > \ldots > h_n$, $h_i \in A_n$, $a_1(h_1) > e$ в $A_{(-n+1)}(h_1)$. Объединение возрастающей последовательности порядков, которые, очевидно, также вложены, и является линейным порядком на C, инвариантным относительно внутренних автоморфизмов группы $f(A) = C \cdot \{t\}$. Ясно, что группа $f(A)$ упорядочиваема. Легко видеть, что при таком способе линейного упорядочения $f^n(A) = g_n(A)$ имеет единственную инвариантную выпуклую подгруппу, именно, Z-ю сплетенную степень группы $f^{n-1}(A)$. Но вложение ψ_n группы $f^n(A)$ в $f^{n+1}(A)$ определено таким образом, что единственная собственная инвариантная выпуклая подгруппа $f^{n+1}(A)$

строго содержит $f^n(A)$. Вместе с тем A^* есть объединение групп $f^n(A)$ на ω-м шаге. Отсюда следует, что A^* не имеет собственных инвариантных выпуклых подгрупп при указанном упорядочении. Это и означает, что интересующая нас подгруппа J не является абсолютно выпуклой. Заметим, что справедлива также следующая

Теорема 4. (Копытов, Мамаев [1].) *Собственная подгруппа H упорядочиваемой группы G, порожденная объединением всех относительно выпуклых подгрупп этой группы, является абсолютно выпуклой в G. При этом H совпадает с изолятором J коммутанта K группы G и фактор-группа G/J имеет ранг 1.*

Доказательство. Пусть B — максимальная выпуклая подгруппа при некотором линейном порядке на группе G. Тогда $B \subseteq H \neq G$. Очевидно, B инвариантна в G, содержит изолятор J коммутанта K упорядочиваемой группы G, являющийся относительно выпуклой подгруппой в G, и фактор-группа G/B абелева, допускающая архимедов порядок. Вместе с тем G/J — также абелева группа, и ранг ее равен 1. Действительно, полагая, что ранг G/J больше 1, сразу же получаем, что всякий элемент $x \in G$ должен содержаться в собственной относительно выпуклой подгруппе из G и, значит, подгруппа H, порожденная объединением всех относительно выпуклых подгрупп группы G, целиком совпадает с G, что противоречит тому, что H — собственная подгруппа.

Имеем теперь, что B/J — изолированная подгруппа в G/J, а так как ранг G/J равен 1, то $B = J$, т. е. J является максимальной выпуклой подгруппой упорядочиваемой группы G при любом ее линейном порядке. #

Заметим, что группы, у которых подгруппа, порожденная всеми собственными относительно выпуклыми подгруппами, отлична от всей группы, существуют. Такова, например, группа A_2 из п. 2° § 1 гл. III. В ней относительно выпуклыми подгруппами являются только следующие подгруппы: подгруппа H_2, подгруппа H_{12} всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & r & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и подгруппа H_{34} всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & s \\ & & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Доказательство этого факта (в несколько другой форме) содержится в п. 2° § 2 гл. VII.

Для абсолютно выпуклых подгрупп доупорядочиваемой группы можно привести следующий признак:

Предложение 2. (Копытов [2].) *Подгруппа A доупорядочиваемой группы является абсолютно выпуклой тогда и только тогда, когда для любых $g \in G \setminus A$ и $a \in A$ выполняется условие*

$$S(g) \cap S(ga) \neq \phi. \qquad (*)$$

Пусть A абсолютно выпукла и для некоторых $g \overline{\in} A$ и $a \in A$ оказывается $S(g) \cap S(ga) = \phi$. Тогда полугруппа $P = S(g) S(e, a^{-1}g^{-1})$ определит, в силу леммы 1 § 1 гл. II, частичный порядок в G, при котором $g > e$ и $a^{-1}g^{-1} > e$. Но тогда $a^{-1} > g > e$, что противоречит выпуклости A при линейном порядке, продолжающем P.

Обратно, пусть для всяких $g \overline{\in} A$, $a \in A$ выполняется условие (*). Предположим, что A не является абсолютно выпуклой, т. е. при некотором порядке P найдутся такие $g \overline{\in} A$ и $a \in A$, что $a > g > e$. Но тогда $S(g)$ и $S(ag^{-1})$ лежат в P, откуда $S(ga^{-1}) \subseteq P^{-1}$, т. е. $S(g) \cap S(ga^{-1}) = \phi$, что противоречит условию (*). #

Нетрудно с помощью теоремы 1 § 1 гл. II доказанное предложение переформулировать в предложение для упорядочиваемых групп.

Применение теоремы 1 (если в $Z[G]$ положить $\Phi = \{\bar{g} - e \mid \bar{g} \in \bar{G}\}$) и предложения 2 дает нам следующие утверждения:

Предложение 3. *Свободная двуступенно разрешимая группа вкладывается в двуступенно разрешимую упорядочиваемую группу, коммутант которой абсолютно выпуклый.* #

Предложение 4. *Если G — такая упорядочиваемая двуступенно разрешимая группа, что централизатор любого элемента $a \in G'$ совпадает с G', то G*

вкладывается в упорядочиваемую двуступенно разрешимую группу, коммутант которой абсолютно выпуклый. #

Упорядоченные модули будут существенно применяться в § 4, а также в § 2 и § 3 гл. VI.

§ 4. Правоупорядочиваемые группы

В этом параграфе рассматриваются правоупорядочиваемые группы и группы автоморфизмов л. у. множеств. Правоупорядочиваемые группы оказываются полезными при нахождении признаков упорядочиваемости. Ниже указывается связь между правоупорядоченными группами, группами порядковых автоморфизмов абелевых л.у. групп, группами автоморфизмов л.у. множеств и группами автоморфизмов некоторых моделей. Изложение в основном дается по работам Смирнова [6], [7].

1°. Напомним, что множество G называется *правоупорядоченной* (п.у.) *группой*, если оно является группой, л.у. множеством и отношение порядка сохраняется при умножении справа, т. е. $a < b$ влечет $ax < bx$ для всех $a, x, b \in G$. Группа G правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда она содержит множество, являющееся чистой линейной полугруппой. Напомним, далее, что *автоморфизмом* φ *л.у. множества* M называется взаимно однозначное отображение M на себя, сохраняющее порядок, т. е. $x \leqslant y$ влечет $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ для любых $x, y \in M$. Множество всех автоморфизмов множества M есть группа.

Теорема 1. (Кон [1], Зайцева [2], Конрад [9].) *Группа автоморфизмов линейно упорядоченного множества правоупорядочиваема.*

Доказательство. Пусть G — группа автоморфизмов л. у. множества M. Вполне упорядочим множество элементов M:

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_\alpha,\ a_{\alpha+1},\ \ldots,\quad \alpha \in I.$$

Рассмотрим в G множество $P = \{g \in G \mid g(a_\alpha) > a_\alpha$ и $g(a_\beta) = a_\beta$ для всех $\beta < \alpha,\ \alpha, \beta \in I\}$. Непосредственная проверка показывает, что P — чистая линейная полугруппа, следовательно, она определяет правый порядок на G. #

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо с единицей e. Унитарный правый K-модуль S называется *сво-*

бодным, если в нем существует такое подмножество элементов X, что каждый элемент $a \in S$, $a \neq 0$, однозначно записывается в виде конечной суммы

$$a = x_1k_1 + x_2k_2 + \ldots + x_nk_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные элементы из множества X, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — элементы из кольца K, отличные от нуля. Множество X называется *базой* свободного K-модуля S. Если $Z[G]$ есть целочисленное групповое кольцо произвольной группы G, то всякий правый $Z[G]$-модуль можно рассматривать как правый G-модуль. В частности, свободный правый $Z[G]$-модуль, рассматриваемый как G-модуль, называется свободным правым G-модулем.

G-упорядоченным модулем называется Г-упорядоченный $Z[G]$-модуль, когда $\Gamma = G$ (см. § 2).

Лемма 1. (Смирнов [7].) *Свободный правый G-модуль M над правоупорядоченной группой G можно линейно упорядочить, продолжая любой линейный порядок его базы X.*

Рассмотрим целочисленное групповое кольцо $Z[G]$ группы G. Его аддитивная группа $Z[G]_+$ есть прямая сумма бесконечных циклических групп: $Z[G]_+ = \sum_{g \in G} \{g\}Z$. Упорядочим $Z[G]_+$, полагая $x = g_1k_1 + g_2k_2 + \ldots + g_nk_n > 0$, если $g_1 < g_2 < \ldots < g_n$ и $k_n > 0$. Очевидно, что этот порядок сохраняется при умножении справа на элементы из G.

Так как свободный $Z[G]$-модуль M есть прямая сумма G-упорядочиваемых $Z[G]$-подмодулей, изоморфных $Z[G]$, то в M можно ввести лексикографический порядок, продолжающий любое упорядочение базы X. #

Теорема 2. (Смирнов [7].) *Всякая правоупорядочиваемая группа G изоморфно вложима в группу всех порядковых автоморфизмов Φ подходящей свободной абелевой л.у. группы A.*

Доказательство. Пусть A — аддитивная группа группового кольца $Z[G]$ группы G. Очевидно, что A есть свободная абелева группа с базой G. В правом G-модуле $Z[G]$ фиксируем какой-нибудь линейный порядок P, существование которого гарантирует лемма 1. Правые умножения в $Z[G]$ на элементы группы G будут автоморфизмами группы A, сохраняющими порядок P. Действительно, если $g \in G$, то

1) при отображении $x \to xg$ каждый элемент $a \in A$ имеет хотя бы один прообраз, например ag^{-1}:

2) $(a_1 + a_2)\, g = a_1 g + a_2 g$;

3) если $ag = 0$, то $a = 0$;

4) если $a > 0$ при упорядочении P, то $ag > 0$.

Если Φ — группа всех порядковых автоморфизмов группы A, то, поставив в соответствие каждому $g \in G$ автоморфизм φ_g: $a \to ag$ группы A, получим мономорфизм $G \to \Phi$. $\#$

Следствие 1. *Группа G тогда и только тогда правоупорядочиваема, когда она представима автоморфизмами л.у. множеств (абелевых л.у. групп).* $\#$

Отметим, что группа всех порядковых автоморфизмов л.у. множества допускает естественный решеточный порядок (Кон [1]). Справедливо также следующее утверждение: *всякая р.у. группа является подгруппой группы автоморфизмов л.у. множества* (Холланд [1], см. также Фукс [8]). Поэтому группа G правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда она вкладывается в решеточно упорядочиваемую группу.

2°. В этом пункте указываются дальнейшие связи правоупорядочиваемых и упорядочиваемых групп.

Лемма 2. (Смирнов [7].) *Фактор-группа F/A некоммутативной свободной группы F по произвольной инвариантной подгруппе A правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда группа $A/[A, A]$ является $F/[A, A]$-упорядочиваемой.*

Доказательство. Предположим сначала, что группа $G = F/A$ правоупорядочиваема. Положим $A_0 = A/[A, A]$ и определим умножение элементов группы A_0 справа на элементы из G следующим образом:

$$a \cdot g = f^{-1} a f, \tag{1}$$

где $a \in A_0$, $f \in F$, $g = Af$. Тогда группа A_0 становится правым G-модулем. Из теоремы Магнуса (М. Холл [1]) следует, что G-модуль A_0 является подмодулем некоторого свободного правого G-модуля S. По лемме 1 G-модуль S можно сделать F/A-упорядоченным. Из (1) получаем, что инвариантная подгруппа $A/[A, A]$ группы $F/[A, A]$ допускает линейный порядок, устойчивый относительно внутренних автоморфизмов группы $F/[A, A]$.

Обратно, пусть группа $A/[A, A]$ допускает некоторый линейный порядок P, устойчивый относительно внутренних автоморфизмов группы F. Нужно доказать, что группа F/A правоупорядочиваема. Пусть C — централизатор группы $A/[A, A]$ в группе F. Так как группа $A/[A, A]$ абелева, то $C \supseteq A$. Группа F/C изоморфна группе автоморфизмов группы $A/[A, A]$, порождаемых внутренними автоморфизмами группы F. Поскольку внутренние автоморфизмы группы F сохраняют по условию порядок P группы $A/[A, A]$, то, по теореме 1, получаем, что группа F/C правоупорядочиваема. Покажем, что $C = A$. Допустим, что $C \neq A$, и выберем какой-нибудь элемент c из C вне A. Если $H = \{c, A\}$ — подгруппа, порожденная элементом c и всеми элементами группы A, то фактор-группа $H/[A, A]$ абелева, откуда $[A, A] = [H, H]$. Поскольку H — некоммутативная свободная группа, то, в силу теоремы Ауслендер и Линдона (Х. Нейман [1]), равенство $[A, A] = [H, H]$ влечет $A = H$, что противоречит выбору H. ⋕

Предложение 1. (Зайцева [2].) *Если группа обладает инфраинвариантной системой, факторы которой — абелевы группы без кручения, то она правоупорядочиваема.*

Пусть $G \supset \ldots \supset A_\alpha \supset B_\alpha \supset \ldots \supset E$, $\alpha \in I$, — данная система в группе G. Возьмем множество $P = \bigcup\limits_{\alpha \in I} P_\alpha$, где P_α — полный прообраз в A_α полугруппы положительных элементов группы A_α/B_α при некотором линейном порядке; P является чистой линейной полугруппой в G. ⋕

Теорема 3. (Смирнов [7].) *Если фактор-группа F/A свободной группы F по некоторой инвариантной подгруппе A обладает инфраинвариантной системой, все факторы которой абелевы и без кручения, то группа F/A' упорядочиваема.*

Доказательство. Будем предполагать, что группа F некоммутативна и что $A \neq E$, так как в противном случае справедливость утверждения уже известна. По условию существует инфраинвариантная система группы F, связывающая F с A:

$$\Sigma: \; F = F_1 \ldots \supset F_\alpha \supset F_{\alpha+1} \supset \ldots \supset A,$$

причем такая, что все факторы $F_\alpha/F_{\alpha+1}$ абелевы и без кручения. Положим

$$F'_0 = F, \quad F'_\alpha = [F_\alpha, F_\alpha], \qquad \alpha \neq 0.$$

В силу известного факта (см. Данвуди [1], X. Нейман [1]) система подгрупп

$$\Sigma'\colon F = F'_0 \supset F'_1 \supset \ldots \supset F'_\alpha \supset F'_{\alpha+1} \supset \ldots \supset E,$$
$$F'_\alpha = [F_\alpha, F_\alpha],$$

является полной относительно пересечений. Отсюда и из теоремы 2 § 5 Дополнения получаем, что Σ' есть инфраинвариантная система, связывающая группу F с нормальной подгруппой A' и обладающая тем свойством, что все ее факторы $F'_\alpha/F'_{\alpha+1}$ являются свободными абелевыми группами. Пусть N_α — нормализатор подгруппы $F'_{\alpha+1}$ в группе F. В силу известного (и легко проверяемого) свойства инфраинвариантных систем N_α будет также нормализатором в F подгруппы F'_α и, в частности, $N_\alpha \supseteq F'_\alpha$. В силу теоремы 3 § 2 гл. II для доказательства линейной упорядочиваемости группы F/A' достаточно установить, что при любом α фактор-группа $F'_\alpha/F'_{\alpha+1}$ обладает линейным порядком, устойчивым относительно внутренних автоморфизмов группы N_α.

Если $\alpha = 0$, то $F'_0 = F \supset F'_1 = F'$ и наше утверждение для фактор-группы F/F' очевидно. Если же $\alpha \neq 0$, то мы имеем следующие включения:

$$F \supseteq N_\alpha \supseteq F_\alpha \supset F_{\alpha+1} \supset F'_\alpha \supset F'_{\alpha+1}.$$

Пусть $N(F_\alpha)$ — нормализатор в группе F подгруппы F_α. Покажем, что $N(F_\alpha) = N_\alpha$. Действительно, в силу характеристичности подгруппы F'_α в группе F_α имеет место включение $N_\alpha \supseteq N(F_\alpha)$. Обратно, пусть элемент $g \in N_\alpha$. Положим $F_\beta = g^{-1}F_\alpha g$. В силу инфраинвариантности системы Σ в F подгруппа $F_\beta \in \Sigma$. Так как $F'_\beta = g^{-1}F'_\alpha g = F'_\alpha$ и система Σ' не содержит повторений (см. теорему 2 § 5 Дополнения), то $\alpha = \beta$, откуда $g \in N(F_\alpha)$.

Итак, N_α является нормализатором в F также и подгрупп F_α, $F_{\alpha+1}$. По условию существует инфраинвариантная система группы F с абелевыми факторами без кручения, проходящая через подгруппу $F_{\alpha+1}$. Отсюда следует, что фактор-группа $N_\alpha/F_{\alpha+1}$ также обладает разрешимой ифраинвариантной системой с факторами без кручения и, по предложению 1, правоупорядочиваема. По лемме 1 группа $F_{\alpha+1}/F'_{\alpha+1}$ обладает линейным порядком, устойчивым относительно внутренних автоморфизмов группы N_α. Этим же свойством обладает, следовательно, и ее подгруппа $F'_\alpha/F'_{\alpha+1}$, так как подгруппа F'_α инварианта в N_α. #

Из доказанной теоремы и теоремы 1 § 5 Дополнения получаем такое

Следствие 2. (Смирнов [7].) *Если фактор-группа F/A свободной группы F по некоторой инвариантной подгруппе A обладает разрешимой инфраинвариантной системой, то группа F/A' правоупорядочиваема, а группа F/A'' упорядочиваема.*

Действительно, в этом случае F/A' обладает, в силу теоремы 1 § 5 Дополнения, инфраинвариантной системой, все факторы которой являются свободными абелевыми группами. #

Используя теорему 3, легко указать пример, показывающий, что из упорядочиваемости группы F/A' (где F — абсолютно свободная группа, A — инвариантная подгруппа в F) не следует упорядочиваемость группы F/A. Действительно, пусть $G = \{a, b \mid b^{-1}ab = a^{-1}\}$ — группа, заданная образующими a, b и определяющим соотношением $b^{-1}ab = a^{-1}$. Пусть также F/A — изоморфная ей группа, где F — абсолютно свободная группа ранга 2. Так как группа G обладает инвариантным рядом $G \supseteq \{a\} \supseteq E$ с бесконечными циклическими факторами, то, по теореме 3, группа F/A' упорядочиваема, тогда как F/A не является даже R-группой. Этот же пример показывает, что локально нильпотентный радикал (здесь A/A') не является относительно выпуклой подгруппой в упорядочиваемой группе.

Дальнейшее развитие теория правоупорядоченных групп получила в работах Смирнова [6] — [7], Конрада [9].

3°. В этом пункте (следуя Омарову [1]) излагается простое алгебраическое доказательство глубокой теоремы Эренфойхта — Мостовского, указывающей на связь групп автоморфизмов л.у. множеств и бесконечных моделей. Придерживаемся здесь общепринятых обозначений и терминологии (см., например, Мальцев [8]).

Опишем следующую конструкцию построения модели $\mathfrak{M}^{(J, \langle I, D\rangle)}$ по заданной модели $\mathfrak{M}$ и по заданной паре $(J, \langle I, D\rangle)$, где J — упорядоченное множество, $\langle I, D\rangle$ — фильтр. Каждому элементу $j \in J$ поставим в соответствие один экземпляр $\langle I_j, D_j\rangle$ фильтра $\langle I, D\rangle$. Через $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$ обозначим фильтрованную степень модели $\mathfrak{M}$ по фильтру $\langle I, D\rangle$. Условимся отождествлять константные элементы фильтрованной степени $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$ по любому фильтру $\langle I, D\rangle$ с соответствующими элементами модели $\mathfrak{M}$, т. е. модель $\mathfrak{M}$ будем рассматривать как подмодель модели $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$. Кроме того, условимся, что если $\mathfrak{N}$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}$ и $\langle I, D\rangle$ — фильтр, то $\mathfrak{N}^{\langle I, D\rangle}$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$.

Условимся считать, что неконстантные элементы фильтрованной степени $\mathfrak{M}^{\langle I_j, D_j\rangle}$ модели $\mathfrak{M}$ по фильтру $\langle I_j, D_j\rangle$ получены из соответствующих элементов модели $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$ приписыванием индекса j и что элементы с различными индексами не равны. В силу соглашения, очевидно, имеем для различных индексов $j_1, j_2 \in J$ следующее:

$$\mathfrak{M}^{\langle I_{j_1}, D_{j_1}\rangle} \cap \mathfrak{M}^{\langle I_{j_2}, D_{j_2}\rangle} = \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M}^{\langle I_{j_1}, D_{j_1}\rangle} \cup \mathfrak{M}^{\langle I_{j_2}, D_{j_2}\rangle} \subseteq \mathfrak{M}^{\langle I_{j_1}, D_{j_1}\rangle \cdot \langle I_{j_2}, D_{j_2}\rangle},$$

где $\mathfrak{M}^{\langle I_{j_1}, D_{j_1}\rangle \cdot \langle I_{j_2}, D_{j_2}\rangle}$ есть фильтрованная степень модели $\mathfrak{M}^{\langle I_{j_1}, D_{j_1}\rangle}$ по фильтру $\langle I_{j_2}, D_{j_2}\rangle$.

Зафиксируем некоторый элемент b модели $\mathfrak{M}^{\langle I, D\rangle}$, не принадлежащий подмодели $\mathfrak{M}$. Условимся элемент b^j отождествлять с самим индексом j для каждого $j \in J$.

Пусть Δ — некоторое конечное подмножество л.у. множества J, $\Delta = \{i_1 < \ldots < i_n\}$. Через $\mathfrak{M}_\Delta$ обозначим n-фильтрованную степень

$$\mathfrak{M}^{\langle I_{i_1}, D_{i_1}\rangle \cdots \langle I_{i_n}, D_{i_n}\rangle}$$

модели $\mathfrak{M}$ по фильтрам $\langle I_{i_1}, D_{i_1}\rangle \ldots \langle I_{i_n}, D_{i_n}\rangle$. Через $\mathfrak{M}^{(J, \langle I, D\rangle)}$ обозначим теоретико-множественную сумму моделей $\mathfrak{M}_\Delta$, $\Delta \in S_\omega(J)$ (где $S_\omega(J)$ — множество конечных подмножеств из J):

$$\mathfrak{M}^{(J,\langle I, D\rangle)} = \bigcup_{\Delta \in S_\omega(J)} \mathfrak{M}_\Delta.$$

Модель $\mathfrak{M}^{(J,\langle I, D\rangle)}$ назовем фильтрованным пределом модели $\mathfrak{M}$ по паре $(J, \langle I, D\rangle)$.

Лемма 3. (Омаров [1].) *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечная модель и φ: $J_1 \to J_2$ — произвольный изоморфизм л.у. множеств J_1, J_2. Тогда для любого неглавного фильтра $\langle I, D\rangle$ существует изоморфизм*

$$\hat{\varphi}\colon \mathfrak{M}^{(J_1,\langle I, D\rangle)} \to \mathfrak{M}^{(J_2,\langle I, D\rangle)}$$

такой, что ограничение $\hat{\varphi}$ на множестве J_1 совпадает с φ.

Пусть φ есть изоморфизм л.у. множеств J_1, J_2.

Строим изоморфизм $\hat{\varphi}$ моделей $\mathfrak{M}^{(J_1,\langle I, D\rangle)}$, $\mathfrak{M}^{(J_2,\langle I, D\rangle)}$ следующим образом. Пусть a — произвольный элемент модели $\mathfrak{M}^{(J_1,\langle I, D\rangle)}$. Тогда существует конечное подмножество $\Delta = \{i_1 < \ldots < i_n\} \subseteq J_1$ такое, что элемент a принадлежит модели $\mathfrak{M}_\Delta$. Пусть образом множества Δ при изоморфизме φ будет

$$\Delta' = \{i_1' < \ldots < i_n'\}.$$

Полагаем $\hat{\varphi}(a) = a'$, где a' получен заменой индексов $i_1, \ldots, i_n$, приписанных элементу a, индексами $i_1', \ldots, i_n'$.

Легко заметить, что отображение $\hat{\varphi}$ есть требуемый изоморфизм. ⧣

Следствие 1. (Омаров [1].) *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечная модель и J — некоторое л.у. множество. Пусть $\langle I, D\rangle$ — некоторый неглавный фильтр. Тогда любой автоморфизм л.у. множества J продолжается до автоморфизма модели $\mathfrak{M}^{(J,\langle I, D\rangle)}$.* ⧣

Теорема 1. (Мостовский, Эренфойхт [1]). *Для произвольного линейно упорядоченного множества J в аксиоматизируемом (проективном) классе моделей, имеющем бесконечную модель, найдется модель, группа автоморфизмов которой содержит группу автоморфизмов линейно упорядоченного множества J.* ⧣

ГЛАВА VI

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОРЯДКА

§ 1. Доупорядочиваемые группы

Значение доупорядочиваемых групп для теории упорядочиваемых групп определяется естественностью их определения и следующими обстоятельствами: во-первых, многие вопросы теории упорядочиваемых (и л.у.) групп для доупорядочиваемых групп либо проще решать, либо решение их имеет более простую формулировку и, во-вторых, большинство свойств доупорядочиваемых групп не трудно переформулировать в свойства Ω-доупорядочиваемых подгрупп (Ω — группа внутренних автоморфизмов) и тем самым получить свойства, справедливые для произвольных упорядочиваемых групп.

1°. В этом пункте будут приведены признаки недоупорядочиваемости группы. Для их формулировки введем обозначения X_1, X_2, X_3 для некоторых фиксированных групп.

Пусть Y и Y' — изоморфные между собой некоммутативные упорядочиваемые группы. Если $a \in Y$, то соответствующий ему при некотором фиксированном изоморфизме $\varphi\colon Y \to Y'$ элемент группы Y' будем обозначать a'; пусть, далее, Z и Z' — соответствующие друг другу при φ подгруппы центров групп Y и Y'. Обозначим $A_0 = Y \times \times Y' (Z \overset{\varphi}{=} Z')$ — прямое произведение групп Y и Y' с объединенной подгруппой $Z \overset{\varphi}{=} Z'$. Всюду в дальнейшем X_1 будет обозначать группу, порожденную A_0 и элементом b второго порядка, удовлетворяющую дополнительным соотношениям: $b^2 = e$, $b^{-1}ab = a'$ для $a \in Y$. Введем в группах Y и Y' такие линейные порядки Q и Q', что $\varphi(Q) = Q'$. Полугруппа QQ' определит в X_1 частичный порядок. Такую ч.у. группу будем обозначать X_1'. Ниже нам потребуется конкретная группа G_1, которая получается из X_1, если положить $Y = A = \{a_1, a_2, a_3 \mid [a_1, a_2] = [a_1, a_3] = e, [a_2, a_3] = a_1\}$. Зафиксируем в A некоторый линейный порядок, при котором $a_1 > e$, $a_2 > e$, $a_3 > e$, а системой выпуклых подгрупп будет $\{e\} \subset \{a_1\} \subset \{a_2, a_3\}$. Соответствующую G_1 ч.у. группу будем обозначать G_1'.

Через X_2 обозначим сплетение некоммутативной упорядочиваемой группы Y и циклической группы $\{b\}$ порядка m: $X_2 = Y\, \text{г}\, \{b\}$, $b^m = e$. Если Q — некоторый линейный порядок группы Y, то через Q_i обозначим линейный порядок подгруппы $Y(b^i)$ группы X_2, соответствующий Q, т. е. $Q_i = Q(b^i)$. Тогда $Q_1 Q_2 \ldots Q_m$ есть частичный порядок группы X_2.

Пусть Y — произвольная упорядочиваемая группа, B — сплетение бесконечной циклической группы $\{a\}$ и циклической группы $\{b\}$ второго порядка. Через X_3 обозначим сплетение групп Y и B: $X_3 = Y\, \text{г}\, B = Y\, \text{г}\, (\{a\}\, \text{г}\, \{b\})$.

Признак недоупорядочиваемости, использующий группу X_1, был получен Каргаполовым, Кокориным, Копытовым [1], X_2 — В. Н. Ремесленниковым, X_3 — Копытовым [4]. Впервые признак такого типа был получен Каргаполовым [3].

Теорема 1. *Любая группа G, имеющая фактор-группу G/N, изоморфную X_i $(i = 1, 2, 3)$, недоупорядочиваема.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай группы X_1. Пусть ψ — некоторый порядковый изморфизм группы X_1' на фактор-группу G/N. Положим $\psi(Y) = A/N$ и $\psi(Y') = A'/N$, а индуцированные частичные порядки в группах A/N, A'/N и G/N обозначим соответственно $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ и $\bar{P} = \bar{Q} \cdot \bar{Q}'$. Возьмем полный прообраз P_0 в G полугруппы строго положительных элементов $\bar{P} \setminus \{\bar{e}\}$. Полугруппа P_0 определит в G частичный порядок.

Предположим теперь, что группа G доупорядочиваема. Тогда порядок P_0 должен содержаться в некотором линейном порядке P группы G. При этом каждый элемент из N будет бесконечно малым по отношению к элементам из P_0, так как $P_0 = P_0 N$. Поэтому наименьшая выпуклая при порядке P подгруппа V, содержащая N, не содержит ни одного элемента $c \overline{\in} N$, $c \in P_0$. Отсюда имеем

$$V \cap A = N. \tag{1}$$

Отметим также, что V будет ввиду инвариантности N инвариантной подгруппой.

Ввиду выпуклости V в G/V нет кручения. Поэтому $b \in \in V$. По той же причине, если $a \in A \setminus N$, $a' \in A' \setminus N$ и $b^{-1}abN = a'N$, то элемент $a^{-1}a' \in V$ в силу соотношений $a^{-1}a'V = b^{-1}a^{-1} \cdot a'bV = aa'^{-1}V$. В силу некоммутативности A/N элемент a можно выбрать таким, что в $A \setminus N$ существует элемент f, для которого справедливо соотношение

$$(f^{-1}af)\, N \neq aN. \tag{2}$$

Из $a^{-1}a' \in V$ и $(f^{-1}a^{-1}a'f)\, V = [f, a]\, a^{-1}a'V$ следует $[f, a] \in V$. Но по (2) коммутатор $[f, a]$ не принадлежит V, что противоречит соотношению (1).

Случай группы X_2 рассматривается аналогично предыдущему, только необходимо сделать следующие изменения: (а) выбираем элемент a в доказательстве так: $a = = a\,(b)^{-1}a\,(b^2)\,a\,(b^3)^{-1} \ldots a\,(e)^{(-1)^m} \in V$, (б) f выбираем такое, что $[f, a] \overline{\in} N$.

Рассмотрим случай группы X_3.

Пусть группа G имеет фактор-группу G/N, изоморфную группе X_3. Покажем, что тогда в G имеются элементы, не удовлетворяющие условию (У*) теоремы 5 § 1 гл. II, что и докажет недоупорядочиваемость группы G. Для этого достаточно найти такие элементы в группе X_3. Действительно, из того, что элемент x удовлетворяет условию (У*) в группе G, его образ x удовлетворяет этому условию на любом гомоморфном образе группы G.

Мы имеем $X_3 = Y г (\{a\} \, г \, \{b\}) = Y \, г \, B$ или

$$X_3 = (\prod_{x \in B} Y_x) \cdot ((\{a_0\} \times \{a_1\}) \cdot \{b\}), \qquad Y_x \cong Y,$$

причем $b^2 = e$, $ba_0b = a_1$ и $x_1^{-1} \cdot y_x x_1 = y_{xx_1^{-1}}$ для всех x, x_1 из B.

Покажем, что элемент b из X_3 не удовлетворяет (У*). Действительно, с одной стороны, $S\,(b) \ni e$, так как $b \to$

элемент конечного порядка. С другой стороны,

$$S(b) \ni y = x_{a_1^{-1}a_0}^{-1} x_e = a_1^{-1} b a_1 \cdot b \cdot x_e^{-1} a_0^{-1} b a_0 b x_e,$$

где x_e — произвольный элемент из Y_e ($x_e \neq e$).

Предположим, что $y_1 = e$ для некоторого $y_1 \in S(y)$. Пусть

$$y_1 = (y^{f_{11} + \ldots + f_{1k_1}})^{x_1} \ldots (y^{f_{s1} + \ldots + f_{sk_s}})^{x_s} = ((x_{a_1^{-1}a_0}^{-1} x_e)^{f_{11} + \ldots + f_{1k_1}})^{x_1} \ldots$$
$$\ldots ((x_{a_1^{-1}a_0}^{-1} x_e)^{f_{s1} + \ldots + f_{sk_s}})^{x_s} = ((x_{a_1^{-1}a_0x_1}^{-1})^{f'_{11} + \ldots + f'_{1k_1}} \ldots$$
$$\ldots (x_{a_1^{-1}a_0x_s}^{-1})^{f'_{s1} + \ldots + f'_{sk_s}}) \cdot (x_{x_1}^{f''_{11} + \ldots + f''_{1k_1}} \ldots x_{x_s}^{f''_{s1} + \ldots + f''_{sk_s}}),$$

где элементы $f_{ij}, f'_{ij}, f''_{ij}$ лежат в $\prod\limits_{x \in B} Y_x$, а $x_i \in B$, причем можно считать $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Из условия $y_1 = e$ и того, что Y упорядочиваема, следует, что множества

$$\{a_1^{-1}a_0x_1, \ldots, a_1^{-1}a_0x_s\}$$

и

$$\{x_1, \ldots, x_s\}$$

совпадают. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$x_1 = a_1^{-1}a_0x_2, \quad x_2 = a_1^{-1}a_0x_3, \ldots, x_{p-1} = a_1^{-1}a_0x_1,$$

где $p > 1$. Отсюда вытекает, что $x_1 = (a_1^{-1}a_0)^{p-1}x_1$ или $(a_1^{-1}a_0)^{p-1} = e$. Последнее равенство противоречит тому, что $a_1^{-1}a_0$ — элемент бесконечного порядка. #

Следствие 1. (Каргаполов [3], Фукс и Сонсяда [1].) *Свободная группа, число образующих которой больше или равно трем, недоупорядочиваема.*

Следствие 2. (Каргаполов [3].) *Свободная n-ступенно разрешимая группа с k образующими при $n \geqslant 3$, $k \geqslant 3$ недоупорядочиваема.*

Следствие 3. *Свободная полинильпотентная группа класса (1, 2), число образующих которой больше или равно трем, недоупорядочиваема.*

Для доказательства этих трех предложений применим теорему 1. При этом вместо X_1 возьмем конкретную группу G_1. #

Заметим, что эти три следствия справедливы и для случая двух образующих (Карнаполов, Кокорин, Копытов [1]).

Следствие 4. (В. Н. Ремесленников.) *Пусть F — упорядочиваемая группа, свободная в некотором многообразии групп $\mathfrak{M}$, число образующих которой больше двух, и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — нетривиальные многообразия групп, причем $\mathfrak{M}_1$ содержит некоммутативные группы. Тогда группа F не является доупорядочиваемой.*

Действительно, всякая группа, удовлетворяющая условиям следствия, обладает гомоморфным образом, изоморфным X_2, а поэтому, по теореме 1, не будет доупорядочиваемой. #

2°. Приведем признаки доупорядочиваемости.

Лемма 1. *Пусть элемент s л. у. группы G представим в виде $s = g^{x_1+\ldots+x_n}$, где $g, x_i \in G$. Тогда существуют такие $y, z \in G$, что $s^y \geqslant g^n$, $s^z \leqslant g^n$.*

Если x_k, x_r таковы, что $g^{x_k} \leqslant g^{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $g^{x_r} \geqslant g^{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то положим $y = x_k^{-1}$, $z = x_r^{-1}$. #

Лемма 2. *Пусть H — инвариантная относительно выпуклая G-доупорядочиваемая подгруппа упорядочиваемой группы G. Тогда если элемент $a \in G$ обладает тем свойством, что для любого набора $g_1, \ldots, g_n \in G$ выполняется $a^{g_1+\ldots+g_n} \cdot a^{-n} \in H$, то при любом максимальном порядке в G элемент a сравним с единицей.*

Пусть, напротив, при некотором максимальном порядке P группы G элемент a несравним с e, т. е., в силу леммы 1 § 1 гл. II, $S(a) \cap P \neq \phi$ и $S(a^{-1}) \cap P \neq \phi$. Тогда найдутся $s_1, s_2 \in P$, имеющие вид $s_1 = a^{g_1+\ldots+g_n}$, $s_2 = (a^{-1})^{h_1+\ldots+h_n}$. Построим в G линейный порядок Q такой, чтобы $H \cap Q = P_1 = H \cap P$ и чтобы подгруппа H была выпуклой. Это можно сделать ввиду относительной выпуклости H и теоремы 4 § 2 гл. II. Тогда, по лемме 1, найдутся такие y и x, что $s_1^y \leqslant a^n$, $a^n \leqslant (s_2^{-1})^x$. Перемножив последние неравенства, получим $s_1^y \leqslant (s_2^{-1})^x$, т. е. $z = s_1^y \cdot s_2^x \leqslant e$, а это противоречит включению $z \in P_1 \subseteq Q$, справедливому на основании условия леммы и того, что $s_1, s_2 \in P$. #

Предложение 1. *Пусть H — инвариантная относительно выпуклая G-доупорядочиваемая подгруппа упорядочиваемой группы G. Тогда полный прообраз любого гиперцентра фактор-группы G/H в G будет G-доупорядочиваемым.*

Это доказывается индукцией по номеру гиперцентра применением леммы 2 и следствия 1 § 4 гл. II. #

Следствие 5. *Если фактор-группа G/H группы G по инвариантной G-доупорядочиваемой подгруппе H — гиперцентральная группа без кручения, то группа G доупорядочиваема.*

При доказательстве нужно учесть, что гиперцентральная группа без кручения упорядочиваема, так как является, как известно, локально нильпотентной (см. Курош [1]). #

Следствие 6. (Кокорин [7].) *Любой гиперцентр упорядочиваемой группы является G-доупорядочиваемым.* #

Следствие 7. (Мальцев [5].) *Локально нильпотентная группа без кручения является доупорядочиваемой.*

Это вытекает из следствия 2 и следствия 1 § 1 гл. II. #

Предложение 2. (Кокорин [4].) *Двуступенно разрешимая группа G без G-кручения доупорядочиваема.*

Двуступенно разрешимая группа G без G-кручения, по предложению 6 § 2 гл. II, упорядочиваема. Изолятор J ее коммутанта G' как изолятор абелевой подгруппы R-группы абелев и, по следствию 4 § 1 гл. II, является G-доупорядочиваемым. Доказываемое утверждение теперь получается из следствия 5, так как фактор-группа G/J абелева без кручения. #

Отметим, что все приведенные утверждения были доказаны единым методом.

Заметим также, что существуют трехступенно разрешимые доупорядочиваемые группы, не являющиеся расширением локально нильпотентной группы с помощью локально нильпотентной и не подпадающие под приведенные признаки доупорядочиваемости (Кокорин [7]).

3°. В этом пункте показывается, что класс доупорядочиваемых групп не замкнут относительно центральных расширений, сплетений и взятия подгрупп.

Предложение 3. *Упорядочиваемая группа, фактор-группа которой по ее центру доупорядочиваема, может не быть доупорядочиваемой.*

Пусть F — свободная группа с тремя образующими и

$$F' = [F, F], F'' = [F', F'], \quad F^* = [F, F''].$$

Группа G_1, введенная в начале параграфа, является фактор-группой группы $G = F/F^*$, так как G является свободной группой многообразия групп, удовлетворяющих следующему тождественному соотношению, выполняющемуся на G_0:

$$[[[x, y], [u, v]], z] = e.$$

Множество M всех элементов конечного порядка (если такие имеются) группы G образуют подгруппу ее центра. Группа G_0 является фактор-группой группы $G_1 = G/M$, потому что центр группы G_0 не имеет элементов конечного порядка. Группа G_1, как нетрудно видеть, упорядочиваема, но не является, в силу теоремы 1, доупорядочиваемой группой. Фактор-группа группы G_1 по ее центру как свободная двуступенно разрешимая группа доупорядочиваема по предложению 2. #

Пример группы G_1 показывает, что условие гиперцентральности фактор-группы G/H в следствии 5 нельзя заменить даже условием ее двуступенной разрешимости.

Предложение 4. (Копытов [4].) *Сплетение доупорядочиваемых групп не обязательно является доупорядочиваемой группой, в частности, сплетение $\{a_1\}$ г г $(\{a_2\}$ г $\{a_3\})$ трех циклических групп недоупорядочиваемо.*

Это следует из доупорядочиваемости группы $\{a_2\}$ г г $\{a_3\}$ (предложение 2) и того, что X_3 из теоремы 1 есть фактор-группа группы $\{a_1\}$ г $(\{a_2\}$ г $\{a_3\})$. #

Предложение 5. (Копытов [4].) *Подгруппа доупорядочиваемой группы может не быть доупорядочиваемой группой.*

Пусть A_0 — группа с образующими a_i, a_i', c $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и определяющими соотношениями:

$$[a_i, a_j] = [a_i', a_j'] = [a_{2i}, a_{2j+1}'] = [a_{2i+1}, a_{2j}'] = \\ = [c, a_i] = [c, a_i'] = e,$$

$$[a_{2i}, a_{2j}'] = [a_{2i+1}, a_{2j+1}'] = c \text{ для всех } i, j.$$

Рассмотрим группу G_0, являющуюся расширением A_0 с помощью бесконечной циклической группы $\{b\}$, $G_0 = \{A_0, b\}$, причем $b^{-1}a_ib = a_{i+1}$, $b^{-1}a'_ib = a'_{i+1}$. Покажем, что группа G_0 недоупорядочиваема, для чего рассмотрим в G_0 подгруппу N_0, порожденную элементами b^2, $a_i^{-1}a_{i+2}$, $a_i'^{-1}a'_{i+2}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Непосредственная проверка показывает, что N_0 инвариантна в G_0 и фактор-группа $\bar{G}_0 = G_0/N_0$ может быть задана следующим образом: $\bar{G}_0 = \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}'_0, \bar{a}'_1, \bar{c}, \bar{b}\}$, причем

$$[\bar{a}_0, \bar{a}_1] = [\bar{a}'_0, \bar{a}'_1] = [\bar{a}_0, \bar{a}'_1] = [\bar{a}'_0, \bar{a}_1] = [\bar{a}_0, \bar{c}] = [\bar{a}_1, \bar{c}] = [\bar{a}'_0, \bar{c}] = [\bar{a}'_1, \bar{c}] = e,$$

$$[\bar{a}_0, \bar{a}'_0] = [\bar{a}_1, \bar{a}'_1] = \bar{c},$$

$$\bar{b}^2 = e, \qquad \bar{b}^{-1}\bar{a}_0\bar{b} = \bar{a}_1, \qquad \bar{b}^{-1}\bar{a}'_0\bar{b} = \bar{a}'_1.$$

Но $\bar{G}_0$ изоморфна X_1 из теоремы 1 и, значит, недоупорядочиваема.

Вложим, далее, группу G_0 в доупорядочиваемую группу G, которую также зададим образующими и определяющими соотношениями:

$$G = \{b, a_i, a'_i, u_i, u'_i, c \mid i = 0, \pm 1, + 2, \ldots\};$$

$$b^{-1}a_ib = a_{i+1}, \qquad b^{-1}a'_ib = a'_{i+1},$$

$$b^{-1}u_ib = u_{i+1}, \qquad b^{-1}u'_ib = u'_{i+1}, \qquad b^{-1}cb = c;$$

$$[a_i, a_j] = [a'_i, a'_j] = [a_{2i}, a'_{2j+1}] = [a_{2i+1}, a'_{2j}] = [u_i, u_j] = [u'_i, u'_j] = e,$$

$$[u_i, u'_j] = [u_i, a'_j] = [u'_i, a_j] = [c, a_i] = [c, a'_i] = [c, u_i] = [c, u'_i] = e;$$

$$[a_{2i}, a'_{2j}] = [a_{2i+1}, a'_{2j+1}] = c;$$

$$[a_i, u_j] = \begin{cases} e, & i \neq j, \\ c, & i = j, \end{cases} \quad \text{и} \quad [a'_i, u'_j] = \begin{cases} e, & i \neq j, \\ c, & i = j. \end{cases}$$

Очевидно, что G содержит группу G_0.

Так как G — группа без кручения, а ее фактор-группа $G/\{c\}$ по центру $\{c\}$ есть сплетение свободной абелевой группы ранга 4 и бесконечной циклической группы, то группа G упорядочиваема. Для доказательства доупорядочиваемости группы G установим сначала, что ее подгруппа

$$A = \{a_i, a'_i, u_i, u'_i, c \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

является G-доупорядочиваемой подгруппой. Это нетрудно сделать, используя следствие 3 § 1 гл. II: подгруппа A группы G тогда и только тогда является G-доупорядочиваемой подгруппой в G, когда для любого ее элемента $x \neq e$ выполняются условия:

(1) A — группа без G-кручения,

(2) для любых элементов x_1, x_2 из $S(x)$ пересечение полугрупп $S(x_1)$ и $S(x_2)$ не пусто.

Для всех элементов центра $\{c\}$ группы G эти условия выполняются, поэтому остается проверить выполнимость (1) и (2) для всех элементов $x \in A \setminus \{c\}$.

Возьмем произвольный элемент $x \in A \setminus \{c\}$ и $x_1, x_2 \in S(x)$. Так как фактор-группа $G/\{c\}$ двуступенно разрешима и упорядочиваема, она доупорядочиваема, поэтому найдутся

$$y_1 \in S(x_1) \quad \text{и} \quad y_2 \in S(x_2)$$

такие, что $y_2 = y_1 c^p$. Если $p = 0$, то условие (2) доказано. Пусть $p \neq 0$. Так как $y_1 \in S(x)$ и $G/\{c\}$ — упорядочиваемая группа, то $y_1 \overline{\in} \{c\}$; поэтому, как нетрудно убедиться, можно найти такое v из A, что

$$v^{-1} y_1 v = y_1 c^q, \quad \text{где} \quad q > 0.$$

Но тогда

$$y_1^q v^{-p} y_1 v^p = y_1^q \cdot c^{pq} = (y_2)^q,$$

т. е. $S(y_1) \cap S(y_2) \neq \phi$, а тогда и $S(x_1) \cap S(x_2) \neq \phi$. Этим доказана выполнимость условия (2) для любого $x \in A$. Справедливость (1) для любого элемента группы G следует из упорядочиваемости G.

Итак, доказана G-доупорядочиваемость подгруппы A в группе G, причем A инвариантна в G и G/A — абелева группа без кручения. Применение следствия 5 к группе G и ее подгруппе A доказывает доупорядочиваемость G. #

4°. Этот пункт посвящен прямым произведениям.

Теорема 2. (Каргаполов [3], Кокорин [5].) *Прямое произведение доупорядочиваемых групп доупорядочиваемо.*

Доказательство. Можно считать, что группа G есть прямое произведение только двух доупорядочиваемых групп A и B.

Пусть P — максимальный порядок в G, $s = a \cdot b$, где $a \in A$, $b \in B$. Отметим здесь, что подгруппы A и B будут, в силу следствия 3 § 1 гл. II, линейно упорядочены. Нужно показать, что $s \in P$ или $s^{-1} \in P$.

Допустим противное. Тогда ввиду леммы 1 § 1 гл. II и максимальности P имеем $S(s) \cap P \neq \phi$, $S(s^{-1}) \cap P \neq \phi$ и, значит, найдутся такие s_1, $s_2^{-1} \in P$, что

$$s_1 = (ab)^{x_1+\ldots+x_n} = a^{x_1+\ldots+x_n} b^{x_1+\ldots+x_n},$$

$$s_2^{-1} = ((ab)^{-1})^{h_1+\ldots+h_n} = (a^{-1})^{h_1+\ldots+h_n} (b^{-1})^{h_1+\ldots+h_n}.$$

На основании леммы 1, линейной упорядоченности подгрупп A и B при порядке P для элементов s_1, s_2 найдутся такие a_1, $a_2 \in A$ и b_1, $b_2 \in B$, что

$$(a^{x_1+\ldots+x_n})^{a_1} \leqslant (a^{h_1+\ldots+h_n})^{a_2},$$

$$(b^{x_1+\ldots+x_n})^{b_1} \leqslant (b^{h_1+\ldots+h_n})^{b_2}$$

и, значит, $s_3 = s_1^{b_1 a_1} (s_2^{-1})^{b_2 a_2} \leqslant e$, а это противоречит тому, что s_1, $s_2^{-1} \in P$. #

Следствие 8. *Если прямое произведение с объединенной подгруппой доупорядочиваемых групп есть группа без кручения, то оно доупорядочиваемо.*

Это вытекает из доказанной теоремы, предложения 1 § 1 гл. II и следствия 4 § 4 гл. II. #

Теорема 3. (Каргаполов [3].) *Класс доупорядочиваемых групп не замкнут относительно полных прямых произведений.*

Доказательство. Обозначим через G_n группу с образующими

$$a_{1n},\ a_{2n},\ a_{3n},\ a'_{1n},\ a'_{2n},\ a'_{3n},\ b_n$$

и определяющими соотношениями

$$a_{in}^{2^n} = a_{in}'^{2^n} = b_n^2 = e,\ [a_{1n}, a_{in}] = [a'_{1n}, a'_{in}] = [a_{in}, a'_{jn}] = e, \qquad (1)$$
$$[a_{2n}, a_{3n}] = a_{1n},\ [a'_{2n}, a'_{3n}] = a'_{1n},\ b_n^{-1} a_{in} b_n = a'_{in}.$$

Пусть $\widetilde{G}_0$ — полное прямое произведение групп G_n. Легко видеть, что подгруппа группы $\widetilde{G}_0$, порожденная элементами

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, \ldots),$$
$$a_i' = (a_{i1}', a_{i2}', \ldots, a_{in}', \ldots),$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

изоморфна группе X_2 ($m = 2$), введенной в теореме 1. Теперь введем в группе $\widetilde{G}_0$ такой частичный порядок P, который будет изоморфен порядку, имеющемуся на X_2.

Произвольный элемент g группы $\widetilde{G}_0$ можно единственным образом записать в виде

$$g = (\ldots, a_{1n}^{\alpha_{1n}} a_{2n}^{\alpha_{2n}} a_{3n}^{\alpha_{3n}} a_{1n}'^{\beta_{1n}} a_{2n}'^{\beta_{2n}} a_{3n}'^{\beta_{3n}} b_n^{\sigma_n}, \ldots),$$

причем $0 \leqslant \alpha_{in} < 2^n$, $0 \leqslant \beta_{in} < 2^n$, $0 \leqslant \sigma_n < 2$. Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha_{in}(g) = \alpha_{in}, \quad \beta_{in}(g) = \beta_{in}, \quad \sigma_n(g) = \sigma_n,$$
$$\gamma_{in}(g) = \alpha_{in}(g) + \beta_{in}(g), \quad M_i(g) = \{\alpha_{in}, \beta_{in} \mid n \geqslant 1\},$$
$$i = 1, 2, 3.$$

По определению элемент $g \in \widetilde{G}_0$ тогда и только тогда принадлежит множеству P, когда $\sigma_n(g) = 0$ и выполняются следующие условия:

(*) Множество $M_3(g)$ ограничено и, кроме того, или $M_3(g) = \{0\}$, или, начиная с некоторого номера, все числа γ_{3n} отличны от нуля.

(**) Если $M_3(g) = \{0\}$, то множество $M_2(g)$ ограничено и, кроме того, или $M_2(g) = \{0\}$ или, начиная с некоторого номера, все числа γ_{2n} больше нуля.

(***) Если $M_3(g) = M_2(g) = \{0\}$, то множество $M_1(g)$ ограничено и, кроме того, $M_1(g) = \{0\}$ или, начиная с некоторого номера, все числа γ_{1n} больше нуля.

Докажем, что множество P является частичным порядком группы $\widetilde{G}_0$. В первую очередь убедимся в том, что множество P образует полугруппу.

В самом деле, пусть элементы g, g' принадлежат множеству P. Из определяющих соотношений (1) для каждого

n легко получаются сравнения по модулю 2^n:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{3n}(gg') &\equiv \varepsilon_{3n}(g)+\varepsilon_{3n}(g'),\\ \varepsilon_{2n}(gg') &\equiv \varepsilon_{2n}(g)+\varepsilon_{2n}(g'),\\ \varepsilon_{1n}(gg') &\equiv \varepsilon_{1n}(g)+\varepsilon_{1n}(g')+\varepsilon_{3n}(g)\,\varepsilon_{2n}(g'), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где под символом ε_{in} подразумевается любой из символов α_{in}, β_{in}. Из сравнений (2) и из справедливости предложений (*), (**) для элементов g, g' непосредственно следует справедливость этих предложений для элемента gg'. Для проверки предложения (***) предположим, что $M_3(gg') = M_2(gg') = \{0\}$. Так как множества $M_3(g)$ и $M_3(g')$ ограничены и $M_3(gg') = \{0\}$, то из первого из сравнений (2) получаем, что, начиная с некоторого номера, все числа $\alpha_{3n}(g)$, $\beta_{3n}(g)$, $\alpha_{3n}(g')$, $\beta_{3n}(g')$ равны нулю. Тогда на основании предложения (*), выполняющегося для элементов g и g', получаем $M_3(g) = M_3(g') = \{0\}$. Так как посылка предложения (**) для элементов g и g' выполняется и эти элементы удовлетворяют условию (**), то получаем ограниченность множеств $M_2(g)$, $M_2(g')$. Но тогда из второго сравнения (2) с помощью условия (**) получаем $M_2(g) = M_2(g') = \{0\}$. Последнее равенство совместно с (***) позволяет утверждать об ограниченности множеств $M_1(g)$, $M_1(g')$. Но так как при $M_3(g) = M_3(g') = M_2(g) = M_2(g') = \{0\}$ третье из сравнений (2) превращается в сравнение $\varepsilon_{1n}(gg') \equiv \varepsilon_{1n}(g) + \varepsilon_{1n}(g')$, то из ограниченности множеств $M_1(g)$, $M_1(g')$ следует ограниченность множества $M_1(gg')$. Понятно, далее, что если хотя бы оно из множеств $M_1(g)$, $M_1(g')$ содержит отличный от нуля элемент, то все $\gamma_{1n}(gg')$, начиная с некоторого номера, больше нуля.

Итак, условия (*), (**), (***) выполняются для элемента gg'. Этим доказано, что P образует полугруппу.

Покажем теперь, что если отличный от единицы элемент g принадлежит множеству P, то $g^{-1} \overline{\in} P$.

В самом деле, пусть $M_3(g) \neq \{0\}$. Тогда по (*) существует такое k, что $\gamma_{3n} > 0$ при $n \geqslant k$. Значит, хотя бы одна из последовательностей $\{\alpha_{3n}(g)\}$, $\{\beta_{3n}(g)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, например первая, содержит бесконечное число ненулевых элементов. Отсюда и из ограниченности множества $\{\alpha_{3n}(g) \mid n \geqslant 1\}$ вытекает неограниченность множества чисел $\alpha_{3n}(g^{-1}) = 2^n - \alpha_{3n}(g)$ и, значит, множества $M_3(g^{-1})$. Следовательно, для элемента g^{-1} условия (*) (**), (***) не выполняются и потому $g^{-1} \in P$. При других предположениях относительно элемента g утверждение $g^{-1} \in P$ доказывается аналогично.

Возьмем, наконец, произвольные элементы $g \in P$ и $f \in \widetilde{G}_0$ и докажем $g^f \in P$. Доказательство этого утверждения будем проводить при различных предположениях относительно элемента f.

а) Предположим, что для каждого n выполняются равенства $\alpha_{in}(f) = \beta_{in}(f) = 0$. В силу равенств

$$\alpha_{in}(g^f) = [\alpha_{in}(g)]^{1-\sigma_n(f)} [\beta_{in}(g)]^{\sigma_n(f)},$$
$$\beta_{in}(g^f) = [\alpha_{in}(g)]^{\sigma_n(f)} [\beta_{in}(g)]^{1-\sigma_n(f)}$$

получаем $M_i(g^f) = M_i(g)$ и $\gamma_{in}(g^f) = \gamma_{in}(g)$.

Отсюда немедленно следует выполнимость для элемента g^f условий (*), (**), (***) и, значит, $g^f \in P$.

б) Пусть теперь $\alpha_{2n}(f) = \beta_{2n}(f) = \sigma_n(f) = 0$. При этом предположении

$$\alpha_{in}(g^f) = \alpha_{in}(g), \quad i = 2, 3,$$
$$\beta_{in}(g^f) = \beta_{in}(g), \quad i = 2, 3,$$
$$\alpha_{1n}(g^f) = \alpha_{1n}(g) + \alpha_{3n}(f)\,\alpha_{2n}(g),$$
$$\beta_{1n}(g^f) = \beta_{1n}(g) + \beta_{3n}(f)\,\beta_{2n}(g)$$

и, значит $M_i(g^f) = M_i(g)$, $\gamma_{in}(g^f) = \gamma_{in}(g)$ для $i = 2, 3$. Кроме того, если $M_i(g^f) = \{0\}$, $i = 2, 3$, т. е. если истинна посылка предложения (***), то справедливы соотношения $M_1(g^f) = M_1(g)$, $\gamma_{1n}(g^f) = \gamma_{1n}(g)$. Но если это так, то элемент g^f удовлетворяет условиям (*), (**), (***).

в) Допустим, наконец, что $\alpha_{3n}(f) = \beta_{3n}(f) = \sigma_n(f) = 0$.

Справедливость для элемента g^f условий (*), (**), (***) при этом предположении доказывается таким же образом, что и при предположении б).

Легко видеть, что объединение предположений, рассматриваемых в а) — в), выделяет систему образующих группы $\widetilde{G}_0$. Поэтому утверждение $g^f \in P$ имеет место для произвольного элемента $f \in \widetilde{G}_0$.

Таким образом, доказано, что множество P действительно является частичным порядком группы $\widetilde{G}_0$. Частичный порядок P группы $\widetilde{G}_0$ индуцирует, очевидно, в подгруппе G_0 такой же порядок, как у группы X_2.

Теперь для каждого n отметим такую свободную нильпотентную группу F_n, что $G_n \cong F_n/N_n$. Все группы F_n являются, по следствию 7, доупорядочиваемыми. Докажем, что полное прямое произведение G групп F_n, $n = 1, 2, \ldots$, не является доупорядочиваемой группой.

В самом деле, инвариантная подгруппа N, совпадающая с полным прямым произведением инвариантных подгрупп N_n, определяет фактор-группу G/N, изоморфную $\widetilde{G}_0$. Поэтому в группе G/N найдутся подгруппа S/N, порядково изоморфная X_2, и частичный порядок $\overline{Q}$, индуцирующий в подгруппе S/N частичный порядок $\overline{R} = P(X_2)$. Так как группа G упорядочиваема, то в N существует порядок Q', инвариантный в G. По теореме 4 § 2 гл. II в группе G имеется частичный порядок Q, содержащий Q' и индуцирующий в фактор-группе G/N частичный порядок $\overline{Q}$. Пересечение R частичного порядка Q с подгруппой S определяет в последней такой частичный порядок, который в S/N индуцирует $\overline{R}$ Если бы частичный порядок Q можно было продолжить до линейного порядка группы G, то частичный порядок R продолжался бы до линейного порядка группы S, что, как следует из доказательства теоремы 1, невозможно. ⋕

Следствие 9. (Каргаполов [3].) *Класс доупорядочиваемых групп неаксиоматизируем.*

Это следует из того, что аксиоматизируемый класс, замкнутый относительно прямых произведений, должен быть замкнут и относительно полных прямых произведений (см. Кон [21]). ⋕

Проблема 19. Можно ли произвольную упорядочиваемую группу H вложить в некоторую упорядочиваемую группу G в качестве G-доупорядочиваемой подгруппы?

Проблема 20. Можно ли вложить произвольную упорядочиваемую группу в доупорядочиваемую группу?

Проблема 21. Охарактеризовать доупорядочиваемые группы, у которых каждая подгруппа доупорядочиваема. Вообще, какие подгруппы доупорядочиваемых групп также являются доупорядочиваемыми? (Фукс [8].)

Проблема 22. Существуют ли простые доупорядочиваемые группы? (А. И. Мальцев, Фукс [8].) Пример недоупорядочиваемой простой группы построен Длабом [1].

Проблема 23. Описать теоретико-групповое строение конечно-порожденных доупорядочиваемых групп. (Фукс [8].)

Проблема 24. Частичный порядок P группы G называется *изолированным*, если из $a^n \in P$ для $n > 0$ следует $a \in P$.

Предположим, что группа G обладает тем свойством, что каждый изолированный частичный порядок на G может быть продолжен до линейного порядка. Должна ли тогда группа G быть доупорядочиваемой? (В. С. Чарин, Фукс [8].)

Проблема 25. Изучить свойства максимальных порядков в упорядочиваемой группе.

Проблема 26. Построить теорию двуступенно разрешимых упорядоченных групп.

Проблема 27. Является ли класс упорядочиваемых групп наименьшим аксиоматизируемым классом, содержащим доупорядочиваемые группы?

§ 2. Продолжение порядка и относительная выпуклость

Доупорядочиваемые группы использовались уже при нахождении признаков относительной выпуклости подгрупп упорядочиваемых групп (теорема 3, следствие 2 из § 3 гл. II), признаков абсолютной выпуклости подгрупп (предложение 2 § 3 гл. V) и условий упорядочиваемости групп (следствие 4 § 1 гл. II, теорема 3 § 2 гл. II). Дальнейшим приложениям посвящен этот параграф, а также § 4 этой главы.

Теорема 1. (Кокорин, Копытов [3].) *Множество всех элементов упорядочиваемой группы, сравнимых с единицей при любом ее максимальном порядке, не всегда является подгруппой.*

Теорема 2. (Кокорин, Копытов [3].) *Центр относительно выпуклой инвариантной подгруппы не обязательно относительно выпуклый.*

Доказательство. Обе теоремы будут доказаны с помощью одного примера.

При построении примера нам понадобится группа G_0, являющаяся свободной полинильпотентной группой класса (1, 2), т. е.

$$G_0 = F/[F', F''],$$

где F — свободная группа (с двумя образующими), $F' = [F, F]$, $F'' = [F', F']$.

Так как G_0 — упорядочиваемая группа, то на G_0'' можно смотреть как на линейно упорядоченный $\bar{G}_0 = G_0/G_0''$-модуль (см. § 2 гл. V). Возьмем $\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = \{\sigma \in Z[\bar{G}_0] \mid \sigma = \bar{g} - e,\ \bar{g} \in \bar{G}_0 \setminus \bar{G}_0'\},$$
$$\Phi_2 = \{\sigma \in Z[\bar{G}_0] \mid \sigma = \bar{g}_1 + \ldots + \bar{g}_n,\ \bar{g}_i \in \bar{G}_0\}.$$

Если $a \in G_0''$ и $\bar{g}$, $\bar{h} \in \bar{G}_0$, то полагаем $a^{\bar{g}+\bar{h}} = a^{\bar{g}} \cdot a^{\bar{h}}$. Так как перестановочные элементы свободной полинильпотентной группы лежат либо в одной циклической, либо в максимальной нильпотентной инвариантной подгруппе, то Φ_1 состоит из мономорфизмов. Из упорядочиваемости G_0 следует, что Φ_2 состоит также из мономорфизмов. Применив к модулю G_0'' и Φ теорему 1 § 3 гл. V, получим упорядочиваемый Φ-полный G_0-модуль A.

Применим к группе G_0 (полагая $G_0'' = H$, $A = H^*$) следующее утверждение (лемма 1 § 3 гл. V):

Пусть H — относительно выпуклая инвариантная подгруппа упорядочиваемой группы G_0 и Ψ — группа автоморфизмов группы H, индуцируемых внутренними автоморфизмами группы G_0. Если H операторно вкладывается в некоторую упорядочиваемую группу H^* с той же группой автоморфизмов Ψ, причем некоторое упорядочение P инвариантно относительно Ψ, то G_0 вкладывается в упорядочиваемую группу G такую, что а) $G = H^*G_0$, б) $G_0 \cap H^* = H$, в) $G/H^* \cong G_0/H$.

В результате получим группу G, для которой справедливо следующее: $G = AG_0$, $G_0 \cap A = G_0''$. Группа G будет служить искомым примером.

Покажем, что группа G недоупорядочиваема. Более того, покажем, что все элементы, лежащие в A и в $G \setminus G'$, являются $У^*$-*элементами* (т. е. элементами, сравнимыми с единицей при любом максимальном порядке в G), а в $G' \setminus A$ имеются не $У^*$-элементы и, следовательно, справедлива теорема 1.

Группа G_0, по следствию 3 § 1, недоупорядочиваема. При этом в G_0' существуют не У*-элементы в силу следствия 5 § 1.

Пусть $g \in G_0'$ — не У*-элемент в G_0. Так как $S_{G_0}(g) = S_G(g)$, элемент g является не У*-элементом также в G и, значит, G недоупорядочиваема.

Все элементы подгруппы A в группе G являются У*-элементами, так как A G-упорядочиваема и централизатор A в G совпадает с G' (см. следствие 4 § 1 гл. II). Пусть $g \in G \setminus G'$. Тогда g сопряжен в G с элементом ga, где a — любой элемент из A. Следовательно, $S_G(g)$ совпадает с полным прообразом $S(\bar{g})$ элемента $\bar{g} = gA$ фактор-группы $G/A = \overline{G}$. Из этого и доупорядочиваемости G/A как упорядочиваемой двуступенно разрешимой группы следует, что все элементы из $G \setminus G'$ являются У*-элементами. Из неупорядочиваемости G следует теорема 1. #

Рассмотрим детально максимальный нелинейный порядок Q группы G. При этом порядке группа A упорядочена линейно. Пусть $\{A_\alpha\}$ — система всех выпуклых подгрупп группы A; V_α — наименьшая выпуклая подгруппа группы G, содержащая A_α; V — наименьшая выпуклая подгруппа группы G, содержащая A; S_α — строгий изолятор A_α (см. п. 3° § 3 гл. V); S — строгий изолятор V. Очевидно, что подгруппы V и S инвариантны в G, а системы $\{V_\alpha\}$ и $\{S_\alpha\}$ нормальны и инфраинвариантны относительно G в V и S соответственно. Приведем некоторые свойства введенных подгрупп:

1) $V_\alpha = \{x \in G \mid a_\alpha < x < a_\alpha';\ a_\alpha, a_\alpha' \in A_\alpha\}$, $V = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$;

2) $V \subseteq G'$.

Пусть $e < g < a$, где $a \in A$. Предположим, что $g \in G \setminus G'$. Тогда в силу Φ_1-полноты группы A, найдется $x \in A$ такой, что $a^{-1} = [g, x^{-1}]$. Трансформируя неравенство $e < g < a$ с помощью элемента x^{-1}, получим $e < xgx^{-1} = g \cdot g^{-1}xgx^{-1} = g \cdot a^{-1}$. Отсюда следует $g > a$, что противоречит $g < a$.

3) $S \subset G'$. Это следует из 2) и строгой изолированности G'.

4) Если $x^\sigma = x^{e+g_1+\ldots+g_n} \in V_\alpha$, то можно найти $h_1, \ldots, h_n$ такие, что $x^{e+h_1+\ldots+h_n} \in V_\alpha$ и $V_\alpha^{h_i} \subseteq V_\alpha$. Действительно, если

среди g_i имеются такие, что $V_\alpha^{g_i} \supset V_\alpha$, то выберем g_u такое, что $V_\alpha^{g_u} \supset V_\alpha^{g_i}$. Тогда

$$V_\alpha = V_\alpha^{g_u g_u^{-1}} \supseteq V_\alpha^{g_i g_u^{-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$V_\alpha \ni x^{\sigma g_u^{-1}} = x^{g_u^{-1} + g_1 g_u^{-1} + \ldots + g_{u-1} g_u^{-1} + e + g_{u+1} g_u^{-1} + \ldots + g_n g_u^{-1}} =$$

$$= x\left(x^{-1} x^{g_u^{-1} + \ldots + g_{u-1} g_u^{-1}} \cdot x\right) \cdot x^{g_{u+1} g_u^{-1} + \ldots + g_n g_u^{-1}} =$$

$$= x^{e + g_u^{-1} x + \ldots + g_{u-1} g_u^{-1} x + g_{u+1} g_u^{-1} + \ldots + g_n^{-1} g_u^{-1}} = x^{e + h_1 + \ldots + h_n}.$$

$$5)\ S = \{x \in G' \mid x^{e + g_1 + \ldots + g_n} \in V\};$$

$$S_\alpha = \{x \in G' \mid x^{e + g_1 + \ldots + g_n} \in V_\alpha\}.$$

Для этого достаточно показать, что если $x^\sigma = x^{e + g_1 + \ldots + g_n} \in V_\alpha$, $y^\tau = y^{e + h_1 + \ldots + h_k} \in V_\alpha$, то найдутся $w_1, \ldots, w_m$ такие, что $(xy)^{w_1 + \ldots + w_m} \in V_\alpha$ для верхних подгрупп скачков $V_\alpha \supset V_{\alpha+1}$. Сначала докажем, что если $x^\sigma = x^{e + g_1 + \ldots + g_n} \in V_\alpha$, $y^\tau = y^{e + h_1 + \ldots + h_k} \in V_\alpha$, то $x^{\sigma\tau} \in V_\alpha$, $y^{\sigma\tau} \in V_\alpha$. Для этого выберем σ и τ такие, как в 4). Тогда очевидно, что $x^{\sigma\tau} \in V_\alpha$.

Рассмотрим $y^{\sigma\tau} = (y^{e + g_1 + \ldots + g_n})^{e + h_1 + \ldots + h_k} = y^{\tau\sigma} a_\alpha$, где $a_\alpha \in A_\alpha$, так как: во-первых $y^{g_i h_j} = y^{[g_i^{-1}, h_j^{-1}] h_j g_i} = y^{h_j g_i} a_{ij}$, $a_{ij} \in A_\alpha$, потому, что S_α инвариантна в G', $S_\alpha \cap A = A_\alpha$, $A_\alpha^{h_j^{\sigma_i}} \subseteq A_\alpha$ по 4); во-вторых, $y^{h_i g_j} y^{h_r g_s} = y^{h_r g_s} y^{h_i g_j} b$, где $b \in A_\alpha$. Но по 4) $y^{\tau\sigma} \in V_\alpha$, $a_\alpha \in A_\alpha$, откуда следует $y^{\sigma\tau} \in A_\alpha$. Теперь имеем на основании 4) $(xy)^{\sigma\tau} = x^{\sigma\tau} y^{\sigma\tau} a$, $a \in A_\alpha$, т. е. $(xy)^{\sigma\tau} \in V_\alpha$.

6) Подгруппы S, S_α выпуклые. Пусть $e < x < s$, $s \in S_\alpha$. Тогда согласно 5) $s^\sigma \in V_\alpha$ и $e^\sigma < x^\sigma < s^\sigma$. Следовательно, по 1) $x^\sigma \in V_\alpha$ и по 5) $x \in S_\alpha$.

7) Q — изолированный порядок (т. е. из $x^n \in Q$ следует $x \in Q$). Пусть, напротив, $x^n > e$ и x несравним с e. Тогда $x \in S$ и найдутся такие $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$, что $x^{g_1 + \ldots + g_k} < e$. Но $(x^{g_i})^n > e$.

Рассмотрим линейный порядок $\widetilde{Q}_s$ группы S, продолжающий частичный порядок $Q_s = Q \cap S$. Такой порядок найдется, так как S — нильпотентная группа. При порядке Q_s имеем $x > e$ и $x^{g_i} > e$. Но тогда $x^{g_1+\ldots+g_n} > e$, что противоречит тому, что $\widetilde{Q}_s$ продолжает Q_s.

8) Подгруппы V, V_α изолированы в G. Действительно, если $x^n \in V_\alpha$, то по 1) найдутся такие a, $b \in A_\alpha$, что $a^n > x^n > b^n$. Отсюда получаем $(ab^{-1})^n > (xb^{-1})^n > e$ и по 7) $xb^{-1} > e$, $x > b$. С другой стороны, $(ax^{-1})^n > e$ и $a > x > b$, т. е. $x \in V_\alpha$.

9) $[G', V_\alpha] \subseteq A_{\alpha+1}$ для любого скачка $V_\alpha \supset V_{\alpha+1}$. Продолжим порядок Q до линейного в G' так, чтобы все V_α были выпуклыми. Это можно сделать ввиду выпуклости V_α при Q, инвариантности V_α в G' и п. 8). При этом порядке V_α — наименьшая выпуклая подгруппа группы G', содержащая A_α. Тогда для всякого скачка $V_\alpha \supset V_{\alpha+1}$ имеем $[G', V_\alpha] \subseteq A_{\alpha+1}$, так как $[G', V_\alpha]$ лежит в выпуклой подгруппе H из G', строго меньшей V_α, и пересечение H с A лежит в $A_{\alpha+1}$ ввиду архимедовости $A_\alpha/A_{\alpha+1}$.

10) Система $\{S_\alpha\}$ инфраинвариантна и нормальна. Это следует из инфраинвариантности системы $\{V_\alpha\}$ и нильпотентности группы G'.

$$11)\quad S_\alpha = \{x \in G \mid x^{e+g_1+\ldots+g_n} \in V_\alpha S_{\alpha+1},\ g_i \in N(V_\alpha)\},$$

т. е. S_α есть строгий изолятор в $N(V_\alpha)$ подгруппы $V_\alpha S_{\alpha+1}$. Это непосредственно следует из 4), 5).

12) S_α относительно выпукла в $N(V_\alpha) = N_\alpha$. Рассмотрим систему $N_\alpha \supset G' \supset AS_\alpha \supset S_\alpha \supset \ldots \supset H_\gamma \supset \ldots \ldots \supset E$, где H_γ — выпуклые подгруппы в S_α при некотором порядке группы G. Эта система удовлетворяет всем требованиям признака упорядочиваемости Мальцева — Поддерюгина — Ригера (теорема 6 § 2 гл. II) и, значит, подгруппы из этой системы выпуклы при некотором порядке. Покажем только строгую изолированность AS_α, так как остальные условия тривиальны. Пусть $x^{e+g_1+\ldots+g_n} = as_\alpha \in AS_\alpha$. Так как $x \in G'$, A лежит в центре G' и Φ_2-полна, имеем $(xa_1)^{e+g_1+\ldots+g_n} = s_\alpha$. Тогда $xa_1 \in S_\alpha$, $x \in AS_\alpha$.

Приступим к доказательству теоремы 2. Предположим, что центр относительно выпуклой подгруппы относительно выпуклый. Тогда в группе $\overline{N}_\alpha = N_\alpha/S_\alpha$, ввиду 9), 11),

12) получаем, что $\overline{V}_\alpha$ лежит в центре $\overline{G}'$ и, значит, в силу строгой изолированности центра, подгруппа $\overline{S}_\alpha$ также лежит в центре $\overline{G}'$. Следовательно, группа $S_\alpha/S_{\alpha+1}$ абелева и $[S_\alpha, [N_\alpha, N_\alpha]] \subseteq S_{\alpha+1}$. Отсюда, из 6) и максимальности Q следует линейная упорядоченность каждого скачка $S_\alpha/S_{\alpha+1}$ при порядке Q по следствию 4 § 1 гл. II. Это противоречит недоупорядочиваемости группы G при порядке Q. $\#$

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается также предложение: централизатор относительно выпуклой инвариантной подгруппы не всегда относительно выпуклый (см. п. 2° § 3 гл. II).

П р о б л е м а 28. Если центр, централизатор, нормализатор и коммутант относительно выпуклой подгруппы строго изолированы, то будут ли они относительно выпуклы? (См. п. 2° § 3 гл. II.)

§ 3. Эскалационные подгруппы

В этом параграфе приводятся свойства инвариантных абелевых эскалационных подгрупп и дается описание *вполне доупорядочиваемых групп* (*V-групп*), т. е. таких упорядочиваемых групп, у которых каждая подгруппа эскалационная.

1°. Выделим следующее условие для подгруппы A группы G:

(v) для любого $g \in G$ существуют такие положительные целые числа m и n, зависящие от g, что соотношение $g^{-1}a^mg = a^n$ выполняется для всех $a \in A$.

Л е м м а 1. (Т е р е х о в [1].) *Если A — инвариантная абелева эскалационная подгруппа упорядочиваемой группы G, то она удовлетворяет условию (v).*

Пусть $a \in A$, $a \neq e$, $b = a^g$. Покажем, что a и b линейно зависимы в A. Пусть это не так и, значит, для любых m, n из $a^mb^n = e$ вытекает $m = 0$, $n = 0$. Рассмотрим подгруппу $C = \{a, b\}$. Так как G — группа без кручения, то $C = \{a\} \times \{b\}$. Частично упорядочим C, полагая $a^mb^n \geqslant e$, если $m \geqslant 0$, $n = 0$ или $m = 0$, $-n \geqslant 0$. Этот порядок подгруппы, в силу доупорядочиваемости A, продолжаем до линейного порядка в A и, значит, в силу, условия леммы, продолжаем также до линейного порядка группы G. Но тогда соотношения $a > e$, $b < e$ будут противоречить условию $b = a^g$.

Итак, для каждых $g \in G$, $a \in A$ найдутся такие целые m, n, $mn \neq 0$, что $a^m b^n = e$. Запишем это соотношение в виде

$$a^g = a^r, \tag{1}$$

где $r = r(g) = -\frac{m}{n}$ — положительное рациональное число.

Покажем, что для фиксированного g число r будет одним и тем же при любых $a \in A$. Пусть, напротив, для некоторого $a_1 \in A$, $a_1 \neq e$, имеет место

$$a_1^g = a^s \tag{2}$$

и $r < s$. Элементы a и a_1 должны быть линейно независимы, так как если бы для некоторых k, t, $kt \neq 0$, было $a_1^k = a^t$, то из (1) и (2) получили бы $r = s$. Рассмотрим теперь подгруппы $D = \{a_1, a\} = \{a_1\} \times \{a\}$. Полагая $a^m a_1^n \geqslant e$, если $m - n > 0$ или $m - n = 0$, $m > 0$, упорядочим D и продолжим этот порядок до линейного упорядочения группы G. Так как $aa_1 > e$, то $(aa_1)^g = a^r a_1^s > e$; следовательно, $r - s \geqslant 0$, что противоречит $s > r$. #

Отметим, что централизатор подгруппы, удовлетворяющей свойству (v), относительно выпуклый.

Лемма 2. *Упорядочиваемую группу G с инвариантной абелевой подгруппой A, удовлетворяющей условию (v), можно вложить в упорядочиваемую группу G^* такую, что A будет содержаться в полной абелевой подгруппе A^*, также удовлетворяющей условию (v).*

Пусть H — централизатор A в G. Используя теорему 1 § 4 гл. II, вложим H в упорядочиваемую группу H^*, центр которой полный и содержит центр группы H, а значит, содержит и A. Относительная выпуклость H в G вытекает из условия (v). Применение леммы 1 § 3 гл. V завершает доказательство. #

Теорема 1. (Кокорин и Копытов [2].) *Изолированная инвариантная абелева эскалационная подгруппа A упорядочиваемой группы G является относительно выпуклой.*

Доказательство. В силу леммы 2 подгруппу A можно считать полной. Возьмем систему Σ' всех выпуклых подгрупп H_γ группы G при таком линейном порядке, при котором централизатор H подгруппы A выпуклый. Умножив каждую подгруппу этой системы на A, вместе с единичной подгруппой получим систему Σ:

$$E \subset A \subset \ldots \subset AH_\alpha \subset AH_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H \subset \ldots \subset G.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что система удовлетворяет условиям теоремы 6 § 2 гл. II.

Разрешимость и инфраинвариантность системы Σ следует из выполнимости этих свойств на Σ'.

Для доказательства коммутаторного условия теоремы 6 § 2 гл. II покажем, что $N(AH_\gamma) = N(H_\gamma)$. Включение $N(AH_\gamma) \supset N(H_\gamma)$ очевидно. Для доказательства обратного включения предположим противное: $g \in N(AH_\gamma)$, $g \overline{\in} N(H_\gamma)$ и, например, $H_\gamma^g \subset H_\gamma$. Тогда найдется такой $h \in H_\gamma \setminus H_\gamma^g$, что $h = ah_1^g$, $a \in A$, $h_1 \in H_\gamma^g$. Последнее дает $h^g = a^g h_1^{g^2} = a^{m/n} h_1^{g^2} \in H_\gamma^g$ и, значит, $a^{m/n} \in H_\gamma^g$. В силу строгой изолированности H_γ^g получим $a \in H_\gamma^g$, а это противоречит предположению $h \overline{\in} H_\gamma^g$.

Покажем, наконец, строгую изолированность подгрупп AH_γ. Пусть $x^{e+g_1+\ldots+g_n} = ah$, $a \in A$, $h \in H_\gamma$. Из строгой изолированности H и $ah \in H$ следует $x, x^{g_i} \in H$. В силу полноты A и условия (v) существует решение $y = a_1 \in A$ уравнения $y^{e+g_1+\ldots+g_n} = a$. Следовательно, справедливо соотношение $(xa_1^{-1})^{e+g_1+\ldots+g_n} = h$, которое вместе со строгой изолированностью H_γ дает $xa_1^{-1} \in H_\gamma$, $(xa_1^{-1})^{g_i} \in H_\gamma$, т. е. $x, x^{g_i} \in H_\gamma A$. #

Следствие 1. *Максимальная инвариантная гиперцентральная эскалационная подгруппа упорядочиваемой группы относительно выпукла.*

Это вытекает из леммы 1 и теоремы 1. #

Следствие 2. *Инвариантная абелева подгруппа упорядочиваемой группы является эскалационной подгруппой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (v).*

Это вытекает из леммы 1, теоремы 2 и следствия 1 § 2 гл. II. #

Нетрудно видеть, что для максимальных инвариантных абелевых эскалационных подгрупп справедливы предложения, аналогичные теоремам 1, 2, 3 и следствиям 1, 2 3 из § 4 гл. II, относящиеся к свойствам центра.

Предложение 1. *При любом частичном порядке группы G наименьшая выпуклая подгруппа, содержащая инвариантную абелеву эскалационную подгруппу A, содержится в централизаторе H подгруппы A.*

Достаточно показать, что из $a \in A$ и $a > g > e$ следует $g \in H$. Допустим противное. Тогда из условия леммы 1 следует, что найдется такое рациональное число $r \neq 1$, $r > 0$, что $g^{-1}ag = a^r$. Тогда для любого целого k имеем $a^{-k}ga^k = ga^{k(1-r)}$. Так как $(1 - r) \neq 0$, найдем такое целое k, что $k(1 - r) < -1$, и сопрягая неравенство $a > g > e$ элементом a^k, получаем неравенство $a > ga^{k(1-r)} > e$, откуда следует $g > a^{-k(1-r)}$. Но так как $-k(1 - r) > 1$, получаем неравенство $g > a$, что невозможно. #

2°. Описание разрешимых V-групп было получено Тереховым [1], [2], Каргаполовым [1], Кокориным и Копытовым [1]. Каргаполов [1] доказал разрешимость всякой V-группы. В результате оказалась справедливой

Теорема 2. *Всякая подгруппа группы G без кручения тогда и только тогда эскалационна, когда в G существует инвариантная абелева подгруппа A, совпадающая со своим централизатором и удовлетворяющая условию (v).*

Доказательство. Необходимость. Пусть P — некоторый линейный порядок V-группы G. Покажем, что любая выпуклая подгруппа будет инвариантной. В самом деле, предположим, что некоторая выпуклая подгруппа N_α не инвариантна. Тогда найдутся такие элементы $g \in G$, $a \in N_\alpha$, $a > e$, что $a^g = a_1 \in N_{\gamma+1} \setminus N_\gamma$ при $N_{\gamma+1} \supset N_\alpha$. Пусть $P_1 = P \cap N_\gamma$ и P_2 — такой линейный порядок фактор-группы $\{a_1\} N_\gamma / N_\gamma$, при котором элемент $a_1 N_\gamma$ отрицателен. Далее, в группе $\{a_1\} N_\gamma$ введем новый линейный порядок

$$Q = \{b \in \{a_1\} N_\gamma \mid b \in P_1, \text{ или } b \overline{\in} N_\gamma \text{ и } bN_\gamma \in P_2\}.$$

По предположению порядок Q можно продолжить до линейного порядка Q' группы G. По построению полугруппы Q' элемент $a \in Q'$ и в то же время $a^g = a_1 \overline{\in} Q'$, что противоречит инвариантности Q'. Таким образом, система $\{N_\gamma\}$ всех выпуклых подгрупп инвариантна.

Покажем, далее, абелевость коммутанта G' группы G. Рассмотрим систему подгрупп $\{H_\gamma = N_\gamma \cap G'\}$. Эта система, в силу предложения 9 § 2 гл. II и инвариантности системы $\{N_\gamma\}$, будет центральной. Из предположения о некоммутативности G' следует существование таких $a, b \in G'$, что $[a, b] \neq e$ и, значит, $a_1 = [a, b] \in H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$ для некоторого α. Так как $a_1 H_\alpha$ принадлежит центру фактор-группы G'/H_α и $a \overline{\in} H_{\alpha+1}$, то группа $B/H_\alpha = \{a_1, a\}H_\alpha/H_\alpha$ абелева и разлагается в прямое произведение циклических подгрупп $\{a_1\}H_\alpha/H_\alpha$ и $\{a\}H_\alpha/H_\alpha$. Поэтому в группе B/H_α можно ввести линейный порядок

$$Q = \{a^m a_1^n H_\alpha \in B/H_\alpha \mid n < 0 \text{ или } n = 0,\ m > 0\}.$$

Из определения Q следует, что $aH_\alpha \in \overline{Q}$, $aa_1H_\alpha \overline{\in} \overline{Q}$.

Порядки $P \cap H_\alpha$, Q' определяют, по теореме 4 § 2 гл. II, порядок Q в группе B, который по условию теоремы можно продолжить до линейного порядка Q' группы G. Но этого не может быть, так как $a \in Q'$ и в то же время $a^b = aa_1 \overline{\in} Q$. Из полученного противоречия следует абелевость коммутанта G'.

Применение леммы 1 к максимальной абелевой подгруппе, содержащей G', завершает доказательство необходимости. Достаточность следует из предложения 1. ⧺

Из этой теоремы и предложения 2 § 1 легко получается

Следствие 3. (Кокорин и Копытов [1].) *Любой частичный порядок каждой подгруппы V-группы продолжается до линейного порядка всей группы.* ⧺

Отметим, что другие классы групп (V^*, VN, VAN), определяемые по аналогии с V-группами, рассматривались Кокориным и Копытовым [1], [2], Кокориным [3].

Проблема 29. Изучить свойства эскалационных подгрупп.

§ 4. Пересечение линейных порядков

Ч. у. группа G называется *векторной*, если она является подгруппой полного прямого произведения л. у. групп G_α, причем $x = (\ldots, g_\alpha, \ldots)$ считается положительным тогда и только тогда, когда $g_\alpha \geqslant e$ для всякого α.

П р е д л о ж е н и е 1. *Порядок P ч. у. группы G является пересечением линейных порядков тогда и только тогда, когда ч. у. группа G векторная.*

Если P есть пересечение линейных порядков P_α группы G, то вложим G в полное прямое произведение л. у. групп G_α, изоморфных G, с порядком P_α следующим образом: $\varphi(x) = (\ldots, x, \ldots)$. Очевидно, что $x \in P$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \geqslant e$ в $\overline{\prod_\alpha} G_\alpha$. Обратно, пусть группа G векторная, $G \subseteq \overline{\prod_{\alpha \in I}} G_\alpha$. Рассмотрим множество $W(I)$ всех тех линейных упорядочений множества I, относительно которых I вполне упорядочено. Каждому $\xi \in W(I)$ поставим в соответствие линейный порядок P_ξ группы $\overline{\prod_{\alpha \in I}} G_\alpha$, являющийся лексикографическим по ξ, т. е. $x \in \overline{\prod_{\alpha \in I}} G_\alpha$, $x \in P_\xi$ тогда и только тогда, когда первая (при упорядочении $\xi \in W(I)$) неединичная компонента x_α элемента x лежит в P_α. Очевидно, что P есть пересечение линейных порядков группы G, которые индуцируются порядками P_ξ. #

Т е о р е м а 1. (Л о р е н ц е н [3].) *Частичный порядок P группы G тогда и только тогда есть пересечение линейных порядков, когда для всякого $a \overline{\in} P$ и для всяких $a_1, \ldots, a_n \in G$, $a_i \neq e$, существуют такие числа $\varepsilon_i = \pm 1$, что*

$$P \cap S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из того, что $a \overline{\in} Q_\nu$ для некоторого линейного порядка Q_ν, т. е. $a^{-1} \in Q_\nu$ и порядок $P \cdot \{S(a^{-1}), e\}$ продолжается до линейного. По теореме 1 § 1 гл. II для подходящих $\varepsilon_i = \pm 1$ имеем

$$P \cdot \{S(a^{-1}), e\} \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi,$$

откуда вытекает требуемое условие.

Обратно, если для любых $a \overline{\in} P$, $a_1, \ldots, a_n$ $(a_i \neq e)$ найдутся такие $\varepsilon_i = \pm 1$, что $P \cap S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \phi$, то $P\{S(a^{-1}), e\}$ определит частичный порядок, который, по теореме 1 § 1 гл. II, имеет линейное продолжение Q_ν. Далее, из $a^{-1} \in Q_\nu$ следует $a \overline{\in} Q_\nu$, и пересечение всех линейных продолжений порядка P равно поэтому P. ⌗

Другие признаки для векторных групп имеются в работах Шимбиревой [1], Лоренцена [3], Клиффорда [1], Дьедонне [1] и Фукса [8].

Следствие 1. (Фукс [8], Мальцев [7].) *Частичный порядок P доупорядочиваемой группы G есть пересечение линейных порядков тогда и только тогда, когда порядок P строго изолирован.*

Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Так как в G каждый частичный порядок продолжается до линейного, достаточно показать, что если для какого-либо элемента $x \in G$ имеем $x \neq e$, $x \overline{\in} P$, $x^{-1} \overline{\in} P$, то в G найдется частичный порядок Q, содержащий P и x. Рассмотрим полугруппу

$$Q = P \cup S(x) \cup S(x) P.$$

Так как $S(x)$ и P — полугруппы, инвариантные в G, то полугруппа Q также инвариантная. Очевидно, $x \in Q$. Остается показать, что Q не содержит e. Пусть, напротив, $e \in Q$. Очевидно, что $e \overline{\in} S(x)$, поэтому $e = s(x) \cdot p$, где $p \in P$ и

$$s(x) = x_1^{-1} x x_1 \ldots x_n^{-1} x x_n.$$

Следовательно, $p = s'(x^{-1})$. Отсюда, в силу строгой изолированности P, вытекает, что $x^{-1} \in P$ в противоречии с предположением. ⌗

Следствие 2. (Мальцев [7].) *Для того чтобы в локально нильпотентной группе без кручения G частичный порядок P был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы порядок P был строго изолирован.* ⌗

Предложение 2. (Мальцев [7].) *Для того чтобы частичный порядок P двуступенно нильпотентной группы без кручения был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы порядок P был изолирован.*

Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности применим следствие 1. Полугруппа $S(x)$

состоит из элементов вида

$$x_1^{-1}xx_1 \dots x_n^{-1}xx_n = x^n [x, x_1x_2 \dots x_n] = x^n [x, g],$$

где $[x, g] = x^{-1} \cdot x_n^{-1} \dots x_1^{-1} \cdot x \cdot x_1 \dots x_n$.

Пусть для некоторого $x \in G$ выполнено $P \cap S(x) \neq \phi$. Это значит, что для некоторого элемента g и подходящего положительного целого n имеем

$$x^n [x, g] \geqslant e. \qquad (*)$$

Так как коммутаторы $[x, g]$ лежат в центре группы G, то, преобразуя это неравенство при помощи g^{-1}, получим $(gxg^{-1})^n [x, g] \geqslant e$, или $x^n [x, g]^{1-n} \geqslant e$. Перемножив это неравенство почленно с неравенством (*), возведенным в степень $n - 1$, получим $x^{n^2} \geqslant e$, откуда $x \geqslant e$. #

Однако, как показывает следующий пример, принадлежащий Мальцеву [7], требование изолированности частичного порядка P недостаточно для того, чтобы порядок P был пересечением линейных порядков уже для трехступенно нильпотентных ч. у. групп без кручения.

Рассмотрим свободную трехступенно нильпотентную группу F со свободными образующими a, b. Положим

$$b^{-1}ab = ac, \qquad (1)$$

$$b^{-1}cb = cd, \qquad (2)$$

$$a^{-1}ca = cf. \qquad (3)$$

Каждый элемент из F однозначно записывается в виде

$$a^x b^y c^z d^u f^v \quad (x, y, z, u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем элементы d, f порождают центр группы F. Исходя из (1) — (3), легко устанавливаем соотношения:

$$b^{-n}a^p b^n = a^p c^{np} d^{p\frac{n(n-1)}{2}} f^{n\frac{p(p-1)}{2}}, \qquad (4)$$

$$a^{-x}c^y a^x = c^y f^{xy}. \qquad (5)$$

Обозначим через P совокупность элементов вида $a^p c^q d^m f^x$, где $p > 0$, $m \geqslant 0$, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и

$$\frac{p}{2} - \sqrt{2mp} \leqslant q \leqslant \frac{p}{2} + \sqrt{2mp}. \qquad (6)$$

Множество P является полугруппой. Действительно,

$$a^p c^q d^m f^x a^{p_1} c^{q_1} d^{m_1} f^{x_1} = a^{p+p_1} c^{q+q_1} d^{m+m_1} f^{x+x_1+qp_1}.$$

Из (6) и таких же неравенств для p_1, q_1, m_1 следует, что

$$\frac{p+p_1}{2} - \sqrt{2mp} - \sqrt{2m_1p_1} \leqslant q + q_1 \leqslant \leqslant \frac{p+p_1}{2} + \sqrt{2mp} + \sqrt{2m_1p_1}.$$

Но $\sqrt{2mp} + \sqrt{2m_1p_1} \leqslant \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)}$, поэтому

$$\frac{p+p_1}{2} - \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)} \leqslant q + q_1 \leqslant \leqslant \frac{p+p_1}{2} + \sqrt{2(m+m_1)(p+p_1)}.$$

Полугруппа P инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы F. В самом деле, преобразование элемента $a^p c^q d^m f^x$ посредством элементов a, c меняет, в силу (5), только показатель у f, а преобразование посредством d, f вообще ничего не меняет. Поэтому рассмотрим лишь преобразование при помощи b^n. Из (4) получаем

$$b^{-n} a^p c^q d^m f^x b^n = a^p c^{np+q} d^{m+nq+\frac{pn(n-1)}{2}} f^{x+\frac{np(p-1)}{2}}.$$

Надо показать, что $\left(np + q - \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant 2p\left(m + q_n + \frac{pn(n-1)}{2}\right) = 2mp + 2qnp + p^2(n^2 - n)$. Так как, в силу (6), $\left(q - \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant 2mp$, то, действительно,

$$\left(np + \left(q - \frac{p}{2}\right)\right)^2 \leqslant p^2n^2 + 2pn\left(q - \frac{p}{2}\right) + 2mp = = 2mp + 2qnp + p^2(n^2 - n).$$

Наконец, так как $(a^p c^q d^m f^x)^{-1} = a^{-p} c^u d^v f^w$, то из условия $p > 0$, следует, что полугруппа P не содержит взаимно обратных элементов. Поэтому мы можем ввести в F частичный порядок, принимая P в качестве полугруппы положительных элементов.

Покажем, что для любого $g \in F$ из $g^n \geqslant e$ $(n > 0)$ следует $g \geqslant e$. Действительно, если $g = a^x b^y c^z d^u f^v$, то $g^n =$

$= a^{nx}b^{ny}c^{z}d^{s}f^{t}$ и условие $g^n \in P$ влечет $y = 0$, $g = a^x c^z d^u f^v$ и, значит,

$$g^n = a^{nx}c^{nz}d^{nu}f^t,$$

причем $\left(nz - \frac{nx}{2}\right)^2 \leqslant 2nx \cdot nu$. Но тогда $\left(z - \frac{x}{2}\right)^2 \leqslant 2xu$, а это означает, что g принадлежит P.

Докажем, наконец, что частичный порядок P в группе F не может быть пересечением линейных порядков. В самом деле, из (1) имеем $c = [a, b]$ и $a \in P$. Поэтому, в силу предложения 6 § 2 гл. II, элемент c должен быть меньше a при любом линейном порядке, содержащем P, т. е. элемент ac^{-1} входит в каждый линейный порядок, содержащий P, и, значит, ac^{-1} должен был бы входить в P, если бы P был пересечением линейных порядков. Но элемент ac^{-1} в P не входит, так как он не удовлетворяет условию (6). Поэтому P не есть пересечение линейных порядков.

Приведенный пример интересен также тем, что он показывает существование в нильпотентных группах без кручения инвариантных изолированных, но не строго изолированных полугрупп. В § 3 гл. II было доказано, что инвариантная изолированная подгруппа нильпотентной группы является строго изолированной.

ГЛАВА VII

ПОРЯДОК И ТОПОЛОГИЯ

§ 1. Порядковые типы линейно упорядоченных групп

В этом параграфе изучается вопрос о возможности превращения упорядоченного множества в л. у. группу.

Через η обозначим порядковый тип множества целых чисел Z, через σ — порядковый тип множества рациональных чисел Q, взятых в естественном упорядочении. Если ξ, τ — порядковые типы л. у. множеств X, Y, то через $\xi\tau$ обозначим порядковый тип кардинального произведения $Y \otimes X$ множеств X и Y, т. е. множества всех пар (y, x), $x \in X$, $y \in Y$, упорядоченных лексикографически: $(y_1, x_1) > (y_2, x_2)$ тогда и только тогда, когда $y_1 > y_2$ или $y_1 = y_2$ и $x_1 > x_2$. Если α — некоторое порядковое число, то ξ^α определяется индуктивно: если определено ξ^β для всех $\beta < \alpha$ и существует $\alpha - 1$, то $\xi^\alpha = \xi^{\alpha-1}\xi$. Если же α предельное, то ξ^α — объединение X_β, $\beta < \alpha$, где X_β — индуктивно построенные множества (с естественными вложениями) типа ξ^β. Очевидно, что $\xi^1 = \xi$. Будем обозначать через ξ^0 порядковый тип одноэлементного множества при любом ξ.

Лемма 1. *Если в линейно упорядоченной группе G найдутся элементы $a_1 < a_2$ такие, что неравенство $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ влечет $x = a_1$ или $x = a_2$, то в G найдется наименьший положительный элемент a, лежащий в центре G, такой, что подгруппа $\{a\}$ выпукла.*

В качестве a можно взять элемент $a_2a_1^{-1}$. Простая проверка показывает, что a — искомый элемент. #

Если G — линейно упорядоченная группа, H — ее выпуклая подгруппа, то можно рассматривать упорядоченное множество $\hat{G}/H$, являющееся фактор-множеством упорядоченного множества $\hat{G}$ группы G по отношению эквивалентности $\sim$, определяемому H. Именно, $a_1 \sim a_2$ тогда и только тогда, когда $a_1H = a_2H$. Такое определение корректно, так как это отношение эквивалентности сохраняет, ввиду выпуклости H, отношение порядка.

Действительно, если для каждого a $\bar{a} = aH$ — класс эквивалентных по $\sim$ элементов и $\bar{a}_1 \neq \bar{a}_2$, то положим $\bar{a}_1 > \bar{a}_2$, если $a_1 > a_2$. Это определение корректно, так как если $b_1 \sim a_1$, $b_2 \sim a_2$ и $b_1 \leqslant b_2$, то мы имеем $b_1 = a_1h_1$, $b_2 = a_2h_2$, $a_1h_1 \leqslant a_2h_2$, откуда $a_2^{-1}a_1 \leqslant h_2h_1^{-1}$. Но так как $a_2^{-1}a_1 > e$, то ввиду выпуклости H получаем $a_2^{-1}a_1 \in H$, т. е. $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, что противоречит предположению.

Лемма 2. *Пусть H — выпуклая подгруппа линейно упорядоченной группы G и ξ — порядковый тип H, τ — порядковый тип фактор-множества $\widehat{G}/H$. Тогда порядковый тип G равен $\xi\tau$.*

Разобьем G на смежные классы по подгруппе H: $G = \bigcup x_\alpha H$, где x_α пробегает множество представителей л. у. множества $\widehat{G}/H$. Тип множества $\{x_\alpha\}$ есть τ. Тогда каждый элемент G может быть представлен единственным образом в виде $x_\alpha h$, где $h \in H$, причем $x_\alpha h_1 > x_\beta h_2$ тогда и только тогда, когда $x_\alpha > x_\beta$ или $x_\alpha = x_\beta$, $h_1 > h_2$. Это означает, что G имеет тот же порядковый тип, что и множество пар (x_α, h), упорядоченных лексикографически, т. е. порядковый тип G есть $\xi\tau$. #

Теорема 1. (Мальцев [4].) *Порядковый тип счетной линейно упорядоченной группы G равен $\eta^\alpha\sigma^\varepsilon$, где α — подходящее счетное порядковое число*, $\varepsilon = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \ldots \subset A_\beta \subset A_{\beta+1} \ldots \subset A_\alpha \subset G$ — цепочка выпуклых инвариантных подгрупп группы G, обладающая следующими свойствами: $A_{\beta+1}/A_\beta$ — бесконечная циклическая группа; если β — предельное число, то $A_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} A_\gamma$; G/A_α не имеет наименьшего положительного элемента. Ввиду леммы 1 такая цепочка существует и единственна. Кроме того, порядковый тип множества A_α равен η^α. Если $A_\alpha = G$, то тип G есть η^α и $\varepsilon = 0$. Если же $G \neq A_\alpha$, то л. у. группа G/A_α не имеет наименьшего положительного элемента, следовательно, ее упорядочение таково, что между любыми двумя элементами $\bar{x}$, $\bar{y} \in G/A_\alpha$, $\bar{x} < \bar{y}$, найдется элемент $\bar{z} \in G/A_\alpha$ такой, что $\bar{x} < \bar{z} < \bar{y}$. Тогда

G/A_α — плотное в смысле порядка счетное упорядоченное множество и, следовательно, G/A_α имеет порядковый тип σ. По лемме 2 тип группы G равен $\eta^\alpha\sigma$. #

Итак, порядковый тип группы G в общем случае равен $\eta^\alpha\sigma^\varepsilon$. При этом если в G нет циклической выпуклой подгруппы, то $\alpha = 0$ и G упорядочена по типу рациональных чисел. Если же G есть объединение возрастающей цепочки выпуклых подгрупп с циклическими фактор-группами, то тип G есть η^α.

Следствие 1. (Мальцев [4].) *Для всякой счетной линейно упорядоченной группы G найдется абелева линейно упорядоченная группа A, имеющая тот же порядковый тип, что и G.*

Действительно, если тип G равен $\eta^\alpha\sigma$, то в качестве A можно взять прямое произведение α бесконечных циклических групп и аддитивной группы Q рациональных чисел, упорядоченное лексикографически:

$$A = \prod_{\alpha<\beta}\{a_\beta\} \times Q,$$

$(\ldots,\ a_\beta^{k_\beta},\ \ldots,\ r) > e$, если $r > 0$ или $r = 0$, $k_\beta > 0$, где β — наибольший номер такой, что $a_\beta \neq e$. Случай $\varepsilon = 0$ рассматривается аналогично. #

Следствие 2. *Элементарные теории л.у. групп и абелевых л.у. групп в сигнатуре $\{\leqslant\}$ совпадают.*

Это вытекает из теоремы Левенгейма (см., например, Мальцев [8], Кон [2]) и следствия 1. #

Л.у. множество M называется *плотным*, если для любых $x, y \in M$, $x < y$, найдется $z \in M$ такой, что $x < z < y$. Л.у. множество M называется *дискретным*, если для любого $x \in M$ найдутся элементы y, z такие, что $y < x$, $x < z$, и если $y_1 < x$, $x < z$, то $y_1 \leqslant y$ и $z \leqslant z_1$.

Следствие 3. *Элементарная теория л.у. групп в сигнатуре $\{\leqslant\}$ разрешима.*

По теореме 1 класс $\mathcal{A}$ л.у. групп в сигнатуре $\{\leqslant\}$ есть объединение класса $\mathcal{K}$ плотных л. у. множеств без наибольшего и наименьшего элементов и класса $\mathcal{K}_1$ дискретных л.у. множеств без наибольшего и наименьшего элементов. Утверждение следствия 3 вытекает из разрешимости элементарных теорий этих классов, как конечно аксиоматизируемых и полных (см., например, Линдон [1], Робинсон [1].) #

Проблема 30. Какое л. у. множество можно превратить в л.у. группу? (Мальцев [4].)

Проблема 31. Существует ли для произвольной л.у. группы абелева л.у. группа, имеющая тот же порядковый тип? (Мальцев [4].)

Абелевы л.у. группы, выделяемые некоторыми требованиями, накладываемыми на тип упорядоченного множества этих групп, рассматривались в работах Аллинга [1] — [3], Флейшера [2], Рибенбойма [4].

§ 2. Способы упорядочения групп

Вопрос об описании всех возможных упорядочений группы — один из центральных и недосягаемых вопросов теории упорядочиваемых групп. Исчерпывающие результаты получены пока лишь для абелевых групп конечного ранга (см. Зайцева [1], Тэ [1], Тревизан [1], Хион [1]).

Хорошую информацию о порядках абелевых групп дают теорема Гёльдера и тот факт, что любая изолированная подгруппа абелевой группы без кручения относительно выпукла. Действительно, полная система изолированных подгрупп абелевой группы, факторы которой имеют мощность, не превышающую мощность континуума, может быть превращена в систему всех выпуклых подгрупп при некотором линейном порядке группы.

1°. Дадим описание всех линейных упорядочений абелевой группы без кручения конечного ранга.

Пусть G — абелева группа без кручения конечного ранга r, записанная аддитивно, и $d_1, \ldots, d_r$ — максимальная линейно независимая над полем Q рациональных чисел система элементов группы G. Тогда всякий элемент $g \in G$ единственным образом записывается в виде $g = k_1d_1 + \ldots + k_rd_r$, где k_i — рациональные числа. Пусть G^* — пополнение G. Группу G^* можно рассматривать как векторное пространство над Q размерности r с базой $d_1, \ldots, d_r$. Для всякого $x \in G^*$ найдется такое натуральное число n_x, что $n_x x \in G$. Так как всякий порядок группы G продолжается единственным образом до линейного порядка группы G^*, то описание всех порядков G эквивалентно описанию всех порядков G^*. Зафиксируем некоторый порядок группы G^*. Из конечности ранга группы G^* вытекает конечность числа всех ее выпуклых подгрупп, а из полноты групп G^* следует, что G^* разлагается в лексикографическую прямую сумму скачков выпуклых подгрупп: $G^* = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, причем на каждой из подгрупп A_i индуцируется архимедов порядок. По теореме Гёльдера каждая подгруппа A_i порядково изоморфна подгруппе аддитивной группы R вещественных чисел в естественном упорядочении. Пусть $\varphi_i : A_i \to R$ — данный порядковый изоморфизм и $b_{i1}, \ldots, b_{ik_i}$ — база векторного пространства A_i. Тогда $\varphi_i(b_{ij}) = c_{ij}$, где $\{c_{ij} | 1 \leqslant j \leqslant \leqslant k_i\}$ — набор вещественных чисел, линейно независимых над Q.

Итак, всякий порядок группы G^* определяется ее разложением в прямую сумму $G^* = A_1 + \ldots + A_k$ и набором чисел $\{c_{ij}\}$. Очевидно, что одному упорядочению соответствует единственное разбиение G^* в прямую сумму, но отображения φ_i определены неоднозначно. Тем не менее, если наборы чисел

$$c_{i1}, \ldots, c_{ik_i}, \quad \varphi_i(b_{ij}) = c_{ij},$$
$$c'_{i1}, \ldots, c'_{ik_i}, \quad \varphi'_i(b_{ij}) = c'_{ij},$$

соответствуют одному и тому же упорядочению, то найдется такое положительное вещественное число c_i, что $c'_{ij} = c_i c_{ij}$. Действительно, если это не так, то найдутся целые числа m, n, такие, что $\frac{c_{ik}}{c_{ij}} < \frac{m}{n} < \frac{c'_{ik}}{c'_{ij}}$ для некоторых j, k. Но тогда элемент $nb_{ik} - mb_{ij} < 0$ в G^*, но в то же время $\varphi'_i(nb_{ik} - mb_{ij}) = nc'_{ik} - mc'_{ij} > 0$, а тогда $nb_{ik} - mb_{ij} > 0$, что невозможно.

Поэтому, если считать, что $\varphi_i(b_{i1}) = 1$, то разбиение группы G^* в сумму подгрупп A_i и отображения φ_i определяются по упорядочению однозначно (с точностью до выбора баз b_{ij}). Зафиксируем теперь произвольную базу $a_1, \ldots, a_r$ группы и разложим число r в сумму натуральных слагаемых всевозможными способами.

Каждому разбиению $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = r$ ставим в соответствие разбиение группы G^* в прямую сумму подгрупп B_i:$G^* = B_1 + \ldots + B_k$, где B_i — подпространство, порожденное элементами $a_{s_1+\ldots+s_i+1}, \ldots, a_{s_1+\ldots+s_{i+1}}$.

Затем выбираем всевозможные вложения φ_i: $a_{s_1+\ldots+s_i+t} \to c_{it}$ групп B_i в R так, чтобы $c_{i1} = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ и чтобы $c_{i1}, \ldots, c_{is_i}$ были линейно независимы над Q. Множество $P = \{x \in G | x = \Sigma t_i a_i > 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^{s_{i+1}} t_{s_1+\ldots+s_i+j} c_{ij} > 0$, где i — наибольшее число $<k$ такое, что данная сумма не равна нулю$\}$ определяет линейное упорядочение группы G^*, при котором подгруппы $B_1 + \ldots + B_i$ выпуклы, а отображения φ_i определяют архимедов порядок скачков $B_1 + \ldots + B_{i+1}/B_1 + \ldots + B_i$. Ясно, что построенное множество порядков группы G^* есть полная система представителей множества всех порядков G^* с точностью до автоморфизмов группы G^*.

С л е д с т в и е 1. *Всякая конечнопорожденная абелева л. у. группа есть лексикографическое произведение архимедовых л.у. групп.*

П р о б л е м а 32. Описать все способы упорядочения свободной группы конечного ранга. (Б и р к г о ф [1].)

П р о б л е м а 33. Описать все способы упорядочения свободной нильпотентной группы с конечным числом образующих.

П р о б л е м а 34. Получить элементарную классификацию л.у. свободных групп с фиксированным числом образующих. (Начало систематическому изучению элементарной теории л.у. абелевых групп положено работами Р о б и н с о н а и З а к о н а [1] и К а р г а п о л о в а [2]. Г у р е в и ч [1] дал элементарную классификацию л.у. абелевых групп и доказал разрешимость их элементарной теории.)

П р о б л е м а 35. Описать универсальную теорию л.у. свободных групп. (Г у р е в и ч и К о к о р и н [1] установили универсальную эквивалентность л.у. абелевых групп.)

2°. Этот пункт посвящен числу порядков на упорядочиваемой группе.

С л е д с т в и е 2. (М а ц у с и т а [2].) *Свободная группа с конечным числом образующих $n \geqslant 2$ допускает континуальное множество линейных порядков.*

Это вытекает из следствия 1. #

Приведем пример (Каргаполов, Кокорин, Копытов [1]) группы, число упорядочений которой конечно. Этот пример опровергает гипотезу о том, что число упорядочений группы равно 2^Δ, где Δ — некоторое, вообще говоря, трансфинитное число.

Пусть A есть прямое произведение конечного числа групп $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, изоморфных аддитивной группе всех рациональных чисел. Каждую из групп Q_i будем записывать в виде $Q_i = \{a_i^\alpha\}$, где α — рациональные числа, полагая $a_i^\alpha a_i^\beta = a_i^{\alpha+\beta}$. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Группа G есть расширение группы A с помощью бесконечной циклической группы $\{b\}$, удовлетворяющее соотношениям

$$b^{-1}a_i^\alpha b = a_i^{\alpha p_i}. \qquad (*)$$

Найдем число всех упорядочений группы G. При любом линейном порядке группы G подгруппа A выпукла (см. предложение 2 § 2 гл. V). Используя конечность числа выпуклых подгрупп в A, упорядочиваемость Q_i только двумя способами и соотношения (*), нетрудно показать, что при любом порядке группы G подгруппа A есть лексикографическое произведение подгрупп Q_i. Общее число лексикографических упорядочений группы A равно $2^n \cdot n!$ и, значит, общее число упорядочений группы G равно $2 \cdot 2^n \cdot n! = 2^{n+1} \cdot n!$ ⧺

Длабом [1] построен пример некоммутативной группы, упорядочиваемой единственным (с точностью до противоположного) способом. Баттсворт [1] построил серию групп, каждая из которых имеет в точности счетное число различных упорядочений.

Проблема 36. Описать группы, упорядочиваемые единственным (с точностью до противоположного) способом. В частности, будут ли такие группы простыми?

§ 3. Теорема Хана

В некоторых разделах теории линейно упорядоченных абелевых групп и функционального анализа применяются так называемые *группы Хана*: группы, являющиеся лексикографическим произведением упорядоченных аддитивных групп вещественных чисел. Точнее, если Π — л. у. множество, то $W(\Pi)$ называется группой Хана, если $W(\Pi)$ — подгруппа полного прямого произведения $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Pi}} R_\alpha$ групп R_α вещественных чисел, состоящая из элементов $\{x_\alpha\} = x \in \overline{\prod\limits_{\alpha\in\Pi}} R_\alpha$, для которых множество тех $\alpha \in \Pi$, что $x_\alpha \neq e$, вполне упорядочено, и если на $W(\Pi)$ задан порядок $P = \{x | x_\alpha > e$, где α — наименьшее из тех $\alpha \in \Pi$, что $x_\alpha \neq e\}$. Такие группы естественно являются векторными пространствами над полем вещественных чисел R. Напомним, что подмножество I л.у. множества M называется *кофинальным*, если для всякого $x \in M$ найдется такой $y \in I$, что $y > x$.

Теорема 1. (Хан [1].) *Всякая линейно упорядоченная абелева группа вкладывается в группу Хана.*

Доказательство. Пусть G — линейно упорядоченная группа и $G \supset \ldots \supset A_\alpha \supset B_\alpha \supset \ldots \supset E$, $\alpha \in \Pi$,— система всех выпуклых подгрупп группы G, $A_\alpha \supset B_\alpha$ — скачок выпуклых подгрупп, $C_\alpha = A_\alpha/B_\alpha$ — фактор скачка. Введем на Π линейный порядок, считая $\alpha > \beta$, если $A_\alpha \subset A_\beta$. Не ограничивая общности, можно считать G полной группой в смысле извлечения корней. Тогда любая верхняя подгруппа скачка A_α раскладывается в прямое произведение B_α и подгруппы, изоморфной C_α. Отождествив каждую C_α с этой подгруппой, мы запишем теперь $A_\alpha = B_\alpha \times C_\alpha$.

Также, не ограничивая общности, начиная с этого места, можно считать, что Π не имеет максимального элемента, т. е. в G нет наименьшей выпуклой подгруппы H, так как в этом случае мы можем H выделить как прямой множитель: $G = H \times G_1$.

Рассмотрим теперь лексикографическое произведение $\overline{G}$ групп C_α согласно порядку на Π и порядку на каждой C_α, индуцированному порядком на G. Так как каждая C_α изоморфна подгруппе аддитивной группы вещественных чисел в их естественном порядке, достаточно доказать, что G вкладывается в $\overline{G}$, так как $\overline{G}$ вкладывается в $W(\Pi)$ естественным образом.

Для доказательства вложимости G в $\overline{G}$ будут построены последовательности подгрупп

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\xi \subset \ldots \subset G,$$

$$G_0^* \subset G_1^* \subset \ldots \subset G_\xi^* \subset \ldots \subset G^* \subset \overline{G}$$

и порядковые изоморфизмы $\varphi_\xi\colon G_\xi \to G_\xi^*$, такие, что если $G_\xi \supset G_\eta$, то ограничение φ_ξ на G_η совпадает с φ_η. Объединение G^* всех G_ξ^* будет группой, порядково изоморфной G.

В качестве группы G_0 возьмем в G подгруппу, порожденную всеми C_α, $\alpha \in \Pi$. Очевидно, что $G_0 = \prod\limits_{\alpha\in\Pi} C_\alpha$ и что существует порядковый изоморфизм φ_0 подгруппы G_0 группы G на подгруппу G_0^* группы $\overline{G}$, являющуюся прямым произведением (в $\overline{G}$) групп C_α. Кроме того, выполняется следующее свойство естественного изоморфизма φ_0 группы G_0 на G_0^*:

(*) если $x = \{x_\alpha\} \in G_0^*$ и π — произвольный элемент из Π, то его отрезок

$$x_\pi = \begin{cases} x_\alpha, & \text{если} \quad \alpha < \pi, \\ e, & \text{если} \quad \alpha \geqslant \pi, \end{cases}$$

также принадлежит G_0^*.

Предположим, что мы построили $G_\beta \neq G$, G_β^*, φ_β, удовлетворяющие требуемым свойствам и свойству (*) для всех $\beta < \alpha$. Тогда если α — предельное, то в качестве G_α возьмем объединение всех G_β, $\beta < \alpha$, а в качестве G_α^* — объединение всех G_β^*, $\beta < \alpha$, что естественно определит изоморфизм φ_α. При этом, очевидно, будет выполняться свойство (*) для группы G_α^*. Пусть α не предельное. Тогда найдется элемент $x \in G \setminus G_{\alpha-1}$. В качестве G_α возьмем изолятор группы $\{G_{\alpha-1}, x\}$ в G.

Для построения G_α^* и φ_α рассмотрим, как расположен элемент x в G. Оказывается, что нет максимального элемента в множестве T тех $\beta \in \Pi$, что $xy^{-1} \in A_\beta \setminus B_\beta$, когда y пробегает $G_{\alpha-1}$. Действительно, если β — максимальный элемент в Π такой, что $xy^{-1} \in A_\beta \setminus B_\beta$, то $xy^{-1} = a_\beta$ и $a_\beta = c_\beta \cdot b_\beta$, где $c_\beta \in C_\beta$, $b_\beta \in B_\beta$. Тогда $xy^{-1}c_\beta^{-1} \in B_\beta$, следовательно, элемент $xy^{-1}c_\beta^{-1}$ лежит в скачке $A_\gamma \setminus B_\gamma$, где $\gamma > \beta$, что противоречит максимальности β, так как $yc_\beta \in C_{\alpha-1}$.

Выберем в T вполне упорядоченное кофинальное подмножество I. По каждому $i \in I$ выберем $z_i \in G_{\alpha-1}$ такой, что $x_i z_i^{-1} \in A_i \setminus B_i$. Если теперь $i < j$, $i, j \in T$, то $z_i z_j^{-1} \in A_i \setminus B_i$, поэтому $\varphi_{\alpha-1}(z_i)$ и $\varphi_{\alpha-1}(z_j)$ имеют одинаковые компоненты по всем индексам $\gamma \in \Pi$, $\gamma < i$. Выберем теперь элемент $x' \in \overline{G}$ как последовательность $\{\ldots, x'(\pi), \ldots\}$, где $x'(\pi)$ равен π-й компоненте элемента z_α, если найдется $\alpha \in I$, $\alpha > \pi$, и $x'(\pi) = e$ в противном случае. Из построения видно, что x' однозначно определен и лежит в $\overline{G}$. Покажем, что $x' \overline{\in} G^*_{\alpha-1}$. Пусть $x' = \varphi_{\alpha-1}(y)$, где $y \in G_{\alpha-1}$. Тогда для всех $\xi < i$, $i \in I$, имело бы место равенство $(\varphi_{\alpha-1}(y))(\xi) = \varphi_{\alpha-1}(z_i)(\xi)$, откуда следовало бы, что A_i содержит yz_i^{-1} и xz_i^{-1}. Тогда $xy^{-1} \in A_i$ для всех $i \in I$, что противоречит кофинальности I в T.

В качестве G^*_α в $\overline{G}$ возьмем изолятор $\{G^*_{\alpha-1}, x'\}$ в $\overline{G}$. Так как G^*_α и G_α — полные группы и $G_\alpha = G_{\alpha-1} \times R_x$, $G^*_\alpha = G^*_{\alpha-1} \times R^*_x$, где R_x, R^*_x — изоляторы x и x' соответственно в G и $\overline{G}$, то отображение φ_α, совпадающее с $\varphi_{\alpha-1}$ на $G_{\alpha-1}$ и переводящее x в x', продолжается единственным образом до изоморфизма G_α на G^*_α. Нам нужно еще показать, что φ_α — порядковый изоморфизм и что G^*_α удовлетворяет свойству (*).

Покажем сначала, что G_α удовлетворяет (*). Пусть $\pi \in \Pi$, $a \in G^*_\alpha$. Тогда $a = y\,(x')^r$, где r — рациональное число и, следовательно,

$$a(\pi) = y(\pi)\ (x')^r(\pi),$$

где $y \in G^*_{\alpha-1}$. Так как $G^*_{\alpha-1}$ удовлетворяет (*), то $y(\pi) \in G^*_{\alpha-1} \subseteq G^*_\xi$. Если $\pi < \xi$, $\xi \in I$, то $(x')^r(\pi) = (x'(\pi))^r = ((z_\xi)(\pi))^r$ и, так как $(z_\xi)(\pi) \in G^*_{\alpha-1}$, $(x'^r)(\pi) \in G^*_{\alpha-1} \subseteq G^*_\alpha$. Если же $\pi > \xi$ для всех $\xi \in I$, то $x'(\pi) = x'$ и $((x')^r)(\pi) = (x'(\pi))^r = (x')^r \in G^*_\alpha$, следовательно, $a \in G^*_\alpha$, т. е. G^*_α обладает свойством (*).

Оставшееся утверждение о том, что φ_α является порядковым изоморфизмом, будем доказывать от противного. Предположим, что найдется такой $y \in G_{\alpha-1}$, что $x > y$, но $\varphi_\alpha(x) = x' < \varphi_\alpha(y)$.

Пусть π — наименьший элемент из Π такой, что $x'(\pi) \neq (\varphi_\alpha(y))(\pi)$ и, следовательно, $x'(\pi) \geqslant (\varphi_\alpha(y))(\pi)$. Тогда найдется такой $i \in I$, что $i > \pi$, в противном случае x' был бы отрезком $\varphi_\alpha(y)(\xi)$ при некотором ξ, т. е. $x' = \varphi_\alpha(y)(\xi)$, и тогда x' лежал бы в $G^*_{\alpha-1}$, что невозможно.

Итак, существует $i \in I$ такое, что $i > \pi$ и $x'(\pi) = \varphi_\alpha(z_i)(\pi) < \varphi_\alpha(y)(\pi)$, а так как $\varphi_{\alpha-1}(z_i)(\xi) = \varphi_{\alpha-1}(y)(\xi)$ при $\xi < \pi$, имеем $\varphi_{\alpha-1}(z_i) < \varphi_{\alpha-1}(y)$, откуда $z_i < y$ при всех $i > \pi$.

Так же как при доказательстве того, что $x' \overline{\in} G^*_{\alpha-1}$, можно доказать, что тогда $\varphi_\alpha(y)\varphi_\alpha(z_i^{-1}) \in \prod\limits_{\xi \geqslant i} G_\xi$, откуда следует равенство $\varphi_\alpha(y)(\xi) = \varphi_\alpha(z_i)(\xi)$ при всех $\xi < i$ и, в частности, при $\xi = \pi$, т. е. $\varphi_\alpha(y)(\pi) = \varphi_\alpha(z_i)(\pi) = \varphi_\alpha(x)(\pi) = x'(\pi)$, а это противоречит выбору π. #

Группы Хана обладают хорошими топологическими свойствами, что будет рассмотрено в следующем параграфе.

Теорема Хана обобщалась и передоказывалась различными авторами (см. Банашевский [1], Грейветт [1], Фукс [8], Рибенбойм [2], Конрад [1], [6]). Аналог теоремы Хана для векторных пространств доказали Хауснер, Уэндел [1], а для коммутативных р. у. групп — Конрад, Харви, Холланд [1].

§ 4. Интервальная топология на линейно упорядоченной группе

1°. Л. у. группу G можно превратить в топологическую группу, взяв в качестве базы окрестностей топологического пространства G множество открытых интервалов $\langle a, b\rangle = \{x \in G \mid a < x < b\}$. Нетрудно видеть, что операция умножения и взятия обратного непрерывны в топологии, определяемой данной системой окрестностей, и что получившаяся топология хаусдорфова. Топологию, полученную таким образом, называют *интервальной топологией*.

Приведем некоторые простейшие свойства групп с интервальной топологией.

Предложение 1. *Л. у. группа с интервальной топологией дискретна тогда и только тогда, когда в ней имеется наименьшая выпуклая подгруппа, являющаяся циклической.* #

Далее всюду, если не оговорено противное, рассматриваются недискретные л. у. группы.

П р е д л о ж е н и е 2. *Подгруппа H л. у. группы G с интервальной топологией открыта тогда и только тогда, когда H содержит выпуклую подгруппу.*

Действительно, если H содержит выпуклую подгруппу N, то H открыта, так как $N = \bigcup_{x \in N} \langle x^{-1}, x \rangle$ открыта. Если H открыта, то H есть объединение открытых интервалов $\langle a, b \rangle$. Предположим, что $a^{-1}b$ лежит в скачке выпуклых подгрупп $N_1 \supset N_2$, $N_2 \neq E$. Тогда вместе с a в H лежат элементы ax, где $x \in N_2$, $x > e$ и, следовательно, $N_2 \subset H$. Если же H открыта и всякий интервал $\langle a, b \rangle$ таков, что $a^{-1}b$ лежит в наименьшей выпуклой подгруппе N, то $N \cap H \neq E$. Покажем, что в этом случае $H \supset N$. Пусть $h \in N$. Так как $E \neq N \cap H$ и подгруппа $N \cap H$ открыта в G, то найдется окрестность единицы $\langle x, y \rangle$, лежащая целиком в $N \cap H$; пусть $c \in \langle x, y \rangle$, $c \neq e$. Так как N — наименьшая выпуклая подгруппа в G, то она архимедова, и поэтому найдется такое n, что $c^n < h < c^{n+1}$. Тогда $e < c^{-n}h < c$, откуда следует $c^{-n}h \in \langle x, y \rangle$, т. е. $c^{-n}h \in H$ и $h \in H$. Итак, в этом случае $H \supseteq N$. #

С л е д с т в и е 1. *Если H — выпуклая подгруппа л. у. группы G, то однородное пространство G/H группы G с интервальной топологией дискретно.* #

П р е д л о ж е н и е 3. *Л. у. группа G с интервальной топологией связна тогда и только тогда, когда G изоморфна аддитивной группе вещественных чисел с их естественным порядком.*

Действительно, если группа G связна, то она архимедова ввиду предложения 2 и теоремы Гёльдера. Но, как легко видеть, архимедова группа G связна лишь в том случае, если она изоморфна аддитивной группе вещественных чисел R с естественным порядком. #

П р е д л о ж е н и е 4. *Линейно упорядоченная группа локально компактна тогда и только тогда, когда она имеет наименьшую выпуклую подгруппу, изоморфную аддитивной группе вещественных чисел.*

Если группа G содержит наименьшую выпуклую подгруппу H, изоморфную группе вещественных чисел, то G, очевидно, локально компактна.

Обратно, пусть группа G локально компактна. Тогда найдется окрестность единицы $\langle a, b \rangle$ с компактным замыканием $\overline{\langle a, b\rangle} = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$. Очевидно, что $\overline{\langle a, b\rangle}$ не может содержать выпуклой подгруппы, и поэтому в G имеется наименьшая выпуклая подгруппа $H \ni a, b$. Предположим, что H не изоморфна группе вещественных чисел, т. е. не связна, тогда она не полна в смысле Дедекинда и поэтому не локально компактна. #

2°. Наибольший интерес в л. у. группах с интервальной топологией представляют, пожалуй, вопросы, связанные с полнотой. Естественно рассматривать несколько определений полноты группы с интервальной топологией. Первым из таких является понятие порядковой полноты.

Группа называется *порядково полной*, если всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Порядково полные группы полностью описываются следующим предложением.

Предложение 5. *Л. у. группа порядково полна тогда и только тогда, когда она изоморфна аддитивной группе вещественных чисел с их естественным порядком.*

Пусть G — порядково полная группа. Если бы группа G была неархимедовой, то в G имелась бы выпуклая подгруппа H. Рассмотрим множество M всех таких элементов $x \in G$, что $x \leqslant h$ для некоторого $h \in H$. Ясно, что множество M ограничено сверху, но не имеет точной верхней грани, что противоречит условию. Обратное утверждение очевидно. #

3°. Полезным в приложениях и наиболее естественным понятием оказывается понятие *топологически полной упорядоченной группы*, являющееся интерпретацией понятия полной топологической группы в группах с интервальной топологией.

Пусть G — линейно упорядоченная группа с интервальной топологией. Говорят, что вполне упорядоченная последовательность $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$, где λ — порядковый тип последовательности $\{g_\alpha\}$, *сходится* к элементу g, если для любого $a > e$, $a \in G$, найдется номер $\alpha_0(a) < \lambda$ такой, что для всякого $\alpha > \alpha_0(a)$ выполняется соотношение $a^{-1} < gg_\alpha^{-1} < a$. В этом случае будем писать $g = \lambda\text{-}\lim\limits_{\alpha<\lambda} g_\alpha$, $\{g_\alpha\} \to g$. Вполне упорядоченная последовательность $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$, где λ — порядковое число, называется *фундаментальной последовательностью*, если для любого $a > e$, $a \in G$, найдется такой номер $\alpha_0(a)$, $\alpha_0 < \lambda$, что для всяких α, β, $\alpha_0 < \alpha < \lambda$, $\alpha_0 < \beta < \lambda$, выполняется соотношение $a^{-1} < g_\alpha g_\beta^{-1} < a$.

Очевидно, что всякая последовательность $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$, сходящаяся к некоторому элементу $g \in G$, является фундаментальной.

Лемма 1. *Если $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\} \to e$ и последовательность $\{h_\alpha | \alpha < \lambda\}$ фундаментальна, то $\{h_\alpha^{-1} g_\alpha h_\alpha | \alpha < \lambda\} \to e$.*

По элементу $a > e$, $a \in G$, выберем такое a_1, что $e < a_1^3 < a$, и по a_1 найдем α_1 такое, что для всяких α, $\alpha' < \lambda$, $\alpha > \alpha_1$, $\alpha' > \alpha_1$, имеют место неравенства $a_1^{-1} < h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} < a_1$. Выберем a_2, $e < a_2 < a_1$, и по нему возьмем $a_3 = h_{\alpha_1} a_2 h_{\alpha_1}^{-1}$. Из того, что $\lambda\text{-}\lim\limits_{\alpha<\lambda} g_\alpha = e$, по a_2' найдем $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$ такое, что для всякого α, $\alpha_0 < \alpha < \lambda$, выполняется соотношение $a_3^{-1} < g_\alpha < a_3$. Итак, по $a > e$ мы нашли такой номер α_0, что для любого α, $\alpha_0 < \alpha < \lambda$,

$$h_\alpha^{-1} a_3 h_\alpha < h_\alpha^{-1} g_\alpha h_\alpha < h_\alpha^{-1} a_3 h_\alpha$$

или

$$h_\alpha^{-1} h_{\alpha_1} a_2^{-1} h_{\alpha_1}^{-1} h_\alpha < h_\alpha^{-1} g_\alpha h_\alpha < h_\alpha^{-1} h_{\alpha_1} a_2 h_{\alpha_1}^{-1} h_\alpha,$$

откуда заключаем ввиду неравенств $\alpha_1 \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha < \lambda$ и выбора α_1, что

$$a^{-1} < a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} < h_\alpha^{-1} g_\alpha h_\alpha < a_1 a_2 a_1^{-1} < a. \ \#$$

Л. у. группа G с интервальной топологией называется *топологически полной*, если для всякой фундаментальной последовательности $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$ найдется элемент $g \in G$, к которому сходится последовательность.

Предложение 6. (Коэн и Гофман [1].) *Для всякой л. у. группы G существует такое предельное порядковое число ξ^*, что всякая фундаментальная последовательность элементов из G содержит фундаментальную подпоследовательность типа ξ^*.*

Доказательство. Рассмотрим множество Λ порядковых типов последовательностей $\{g_\alpha | \alpha < \lambda\}$ элементов из G таких, что $\lambda\text{-}\lim\limits_{\alpha<\lambda} g_\alpha = e$. Очевидно, что Λ не пусто, а тогда существует наименьшее $\xi^* \in \Lambda$.

Так как группа G недискретна, то ξ^* — предельное порядковое число.

Всякая фундаментальная последовательность $\{g_\alpha | \alpha < < \lambda\}$ имеет тип $\lambda \geqslant \xi^*$ и содержит фундаментальную подпоследовательность типа ξ^*. Действительно, последовательность $\{g_\alpha g_{\alpha+1}^{-1} | \alpha < \lambda\}$ сходится к e, так как для любого $h \in G$, $h > e$, найдется $\alpha_0 < \lambda$ такое, что $h^{-1} < < g_\alpha g_{\alpha+1}^{-1} < h$ при $\alpha > \alpha_0$. Второе утверждение доказывается так же просто. #

Теорема 1. (Эверет [1].) *Всякая л. у. группа G вкладывается в топологически полную линейно упорядоченную группу G^*, имеющую ту же систему выпуклых подгрупп, что и G.*

Доказательство. Пусть сначала в G нет наименьшей выпуклой подгруппы.

Для группы G построим порядковое число ξ^*, о котором говорится в предложении 6, и рассмотрим множество $\hat{G}$ всех фундаментальных последовательностей типа ξ^*. На множестве $\hat{G}$ определим операцию следующим образом: $\{g_\alpha\} \cdot \{h_\alpha\} = \{g_\alpha h_\alpha\}$. Покажем, что, действительно, $\{g_\alpha h_\alpha\} \in \hat{G}$. Зададим произвольное $a \in G$, $a > e$. Выберем a_1, $e < a_1 \ll a$. По элементу a_1, в силу фундаментальности $\{g_\alpha\}$, можно найти α_1 такое, что при $\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_1$ имеем $a_1^{-1} < g_\alpha g_{\alpha'}^{-1} < a_1$. Выберем элемент $e < a_2 \ll a$ и найдем $a_2' = g_{\alpha_0}^{-1} a_2 g_{\alpha_0}$. По элементу a_2' можно найти $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ такое, что $h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} < a_2'$ при $\alpha, \alpha' > \alpha_2$. Рассмотрим теперь $g_\alpha h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} g_{\alpha'}^{-1}$ при $\alpha, \alpha' > \alpha_2$:

$$g_\alpha h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} g_{\alpha'}^{-1} = g_\alpha g_{\alpha'}^{-1} \cdot g_{\alpha'} h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} g_{\alpha'}^{-1} < g_\alpha g_{\alpha'}^{-1} \cdot g_{\alpha'} \cdot a_2' \cdot g_{\alpha'}^{-1}. \qquad (*)$$

Но так как $\alpha' > \alpha_1$, можно записать $g_{\alpha'} = b_{\alpha'} g_{\alpha_0}$, где $a_1^{-1} < b_{\alpha'} < a_1$, и тогда неравенства (*) примут вид

$$g_\alpha h_\alpha h_{\alpha'}^{-1} g_{\alpha'}^{-1} < g_\alpha g_{\alpha'}^{-1} \cdot b_{\alpha'} g_{\alpha_0} a_2' g_{\alpha_0}^{-1} b_{\alpha'}^{-1} < a_1 b_{\alpha'} a_2 b_{\alpha'}^{-1} < a.$$

Это вытекает из того, что каждый из элементов a_1, a_2 и $b_{\alpha'}$ много меньше a.

Итак, операция на $\hat{G}$ определена корректно, и непосредственная проверка показывает, что $\hat{G}$ — группа, единица которой есть последовательность из единиц и $\{g_\alpha\}^{-1} =$

$= \{g_\alpha^{-1}\}$. Кроме того, считаем, что группа G стандартно вложена в $\hat{G}$: $g \to \{g\}$.

Рассмотрим в $\hat{G}$ множество M всех фундаментальных последовательностей, сходящихся к единице. Из леммы 1 следует, что M — инвариантная подгруппа в $\hat{G}$ и $M \cap G = \{e\}$. В качестве G^* мы возьмем $\hat{G}/M$. Очевидно, что $G^* \supseteq G$ и что G^* может быть упорядочена естественным образом, т. е. $\{g_\alpha\} M \geqslant M$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha_0 < \xi^*$, начиная с которого все члены последовательности $\{g_\alpha\}$ неотрицательны. Это определение задает на G^* линейный порядок, продолжающий упорядочение группы G, и система выпуклых подгрупп группы G^* совпадает с системой выпуклых подгрупп группы G, а факторы систем выпуклых подгрупп G и G^* изоморфны. Это непосредственно следует из того очевидного факта, что всякая фундаментальная последовательность $\{g_\alpha\}$ $\{g_\alpha\} \overline{\in} M$, начиная с некоторого номера α_0, состоит из членов, либо бо́льших некоторого $g > e$, либо меньших некоторого $g < e$. Элементы из G^* будем обозначать g^*, а если $g^* \in G$, то звездочку в обозначении будем опускать. Из построения G^* следует, что G — всюду плотная в G^* подгруппа, т. е. между любыми двумя элементами из G^* найдется элемент из G. Поэтому для доказательства полноты достаточно показать, что если имеется последовательность $\{g_\alpha^* | \alpha < \lambda\}$, удовлетворяющая условию: для всякого $g \in G$, $g > e$, существует такой номер $\alpha_0 < \lambda$, что $g^{-1} < g_\alpha^* g_{\alpha'}^{*-1} < g$ при всех $\alpha > \alpha_0$, $\alpha' > \alpha_0$, то найдется $g^* \in G^*$, $g^* = \lambda\text{-lim} g_\alpha^*$. Докажем справедливость этого утверждения. Для этого выберем последовательность $\{a_\zeta\}$ элементов из G типа ξ^*, сходящуюся к e, и из последовательности $\{g_\alpha^* | \alpha < \lambda\}$ выберем фундаментальную подпоследовательность $\{g_{\alpha\beta}^* | \alpha < \lambda, \beta < \xi^*\}$ типа ξ^* следующим образом: в качестве $g_{\alpha_0}^*$ возьмем первый такой элемент, что для всех $\alpha > \alpha_0$, $\alpha' > \alpha_0$ имеет место $a_0^{-1} < g_\alpha^* g_{\alpha'}^{*-1} < a_0$. Предположим, что построены последовательности $\{g_{\alpha\beta}^*\}$ при всех $\beta < \beta_0$. Если β_0 не предельное, то в качестве следующей последовательности берем $\{g_{\alpha\beta}^*, g_{\alpha\beta_0}^* | \beta < \beta_0\}$, где $g_{\alpha\beta_0}^*$ — первый такой элемент последовательности $\{g_\alpha^*\}$, что для всех $\alpha \geqslant \alpha\beta_0$, $\alpha' \geqslant \alpha\beta_0$ справедливо $a_{\beta_0}^{-1} < g_\alpha^* g_{\alpha'}^{*-1} < a_{\beta_0}$. Если же β_0 предельное, то в качестве последовательности $\{g_{\alpha\beta} \mid \beta \leqslant \beta_0\}$ берем объединение по β последовательностей $\{g_{\alpha\xi} \mid \xi < \beta < \beta_0\}$. Ясно, что $\{g^*_{\alpha\beta} \mid \beta < \xi^*\}$ — фундаментальная последовательность группы G^* типа ξ^*. Найдем теперь $g^* = \xi^*\text{-}\lim\limits_{\beta<\xi^*} g^*_\alpha$. Пусть $g^*_{\alpha\beta} = \{g_{\xi\alpha\beta} \mid \xi < \xi^*\}$. Тогда $g^* = \{g_{\xi\beta\alpha\beta} \mid \beta < \xi^*\}$, где $g_{\xi_\beta\alpha\beta}$ строится следующим образом: по a_β находим в $\{g^*_{\alpha\beta}\}$ такой номер ξ_β, что $a_\beta^{-1} < g_{\xi\alpha\beta} g^{-1}_{\xi'\alpha\beta} < a_\beta$ при $\xi > \xi_\beta$, $\xi' > \xi_\beta$. Полученная последовательность $\{h_\beta \mid \beta < \xi^*\}$, $h_\beta = g_{\xi_\beta\alpha\beta}$, фундаментальная. Действительно, по любому $a \in G$, $a > e$, найдем такой β_0, что $a_{\beta_0} \leqslant a$.

Тогда $a^{-1} < h_\beta h_{\beta'}^{-1} < a$ при любых $\beta, \beta' > \beta_0$, поскольку

$$h_\beta h_{\beta'}^{-1} \mid = \mid g_{\xi_\beta\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid =$$

$$= \mid g_{\xi_\beta\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid \leqslant$$

$$\leqslant \mid g_{\xi_\beta\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \mid \cdot \mid g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid .$$

Но $\mid g_{\xi_\beta\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \mid < a_{\beta_0}$ в силу выбора ξ_β в последовательности $g_{\xi\alpha\beta}$ и того, что $\beta > \beta_0$, $\beta' > \beta_0$, а второй сомножитель $\mid g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid < a^3_{\beta_0}$, так как $\mid g^*_{\alpha\beta} g^{*-1}_{\alpha\beta'} \mid < a_{\beta_0}$ по выбору $\alpha\beta_0$. Поэтому, начиная с достаточно больших номеров $\xi_{\beta''} > \xi_{\beta_0}$, выполняется неравенство $\mid g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta''}\alpha\beta'} \mid < a_{\beta_0}$, откуда

$$\mid g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid =$$

$$= \mid g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta''}\alpha\beta} \cdot g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta''}\alpha\beta'} \cdot g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta'} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid \leqslant$$

$$\leqslant \mid g_{\xi_{\beta'}\alpha\beta} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta''}\alpha\beta} \mid \cdot \mid g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta} \cdot g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta'} \mid \cdot \mid g_{\xi_{\beta''}\alpha\beta'} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta'}\alpha\beta'} \mid < a^3_{\beta_0}.$$

Это означает, что $\mid h_\beta h_{\beta'}^{-1} \mid < a$. Итак, последовательность $g^* = \{h_\beta \mid \beta < \xi^*\} = \{g_{\xi_\beta\alpha\beta}\}$ фундаментальна. Докажем, что $g^* = \xi^*\text{-}\lim g^*_{\alpha\beta}$. Пусть $a > e$. По a найдем такое β_0, что $a_{\beta_0} \leqslant a$.

Но тогда, по построению $g^*_{\alpha\beta}$, можно утверждать, что $\mid g^*_{\alpha\beta} g^{*-1}_{\alpha\beta'} \mid < a_{\beta_0}$ при всех $\beta > \beta_0$, $\beta' > \beta_0$. Поэтому $\mid g^*_{\alpha\beta} g^{*-1} \mid \leqslant \leqslant \mid g^*_{\alpha\beta} g^{*-1}_{\alpha\beta_0} \mid \cdot \mid g^*_{\alpha\beta_0} g^{*-1} \mid < a_{\beta_0} \mid g^*_{\alpha\beta_0} g^{*-1} \mid$ при $\beta > \beta_0$.

Рассмотрим $g^*_{\alpha\beta_0} g^{*-1} = \{g_{\beta\alpha\beta_0} \cdot g^{-1}_{\xi_\beta \alpha\beta}\} M$. Выберем β таким, чтобы $\beta > \xi_{\beta_0}$, $\alpha\beta > \alpha\beta_0$. Тогда

$$|g_{\beta\alpha\beta_0} \cdot g^{-1}_{\xi_\beta \alpha\beta}| = |g_{\beta\alpha\beta_0} \cdot g^{-1}_{\xi_{\beta_0} \alpha\beta_0} \cdot g_{\xi_{\beta_0} \alpha\beta_0} \cdot g^{-1}_{\xi_\beta \alpha\beta}| \leqslant$$
$$\leqslant a_{\beta_0} \cdot |g_{\xi_{\beta_0} \alpha\beta_0} \cdot g^{-1}_{\xi_\beta \alpha\beta}| \leqslant a^2_{\beta_0}.$$

Этим доказано равенство $g^* = \xi^*\text{-}\lim \{g^*_{\alpha\beta}\}$. Но тогда, как легко видно, $g^* = \lambda\text{-}\lim \{g^*_\alpha\}$, что и доказывает полноту группы G^* в случае, когда в G нет минимальной выпуклой подгруппы.

Если в группе G имеется наименьшая выпуклая подгруппа A, то A инвариантна в G и изоморфна подгруппе аддитивной группы вещественных чисел, причем каждый внутренний автоморфизм группы G при действии на элементы из A умножает их на одно и то же число, т. е. централизатор $C(A)$ содержит G'. Тогда, как делалось в доказательстве теоремы 2 § 3 гл. V, вкладываем G в группу $G^* = RG$ так, что R инвариантна в G^*, $R \cap G = A$ и внутренние автоморфизмы группы G^* действуют на R следующим образом: если в G имеем $g^{-1}ag = a^\alpha$, α — вещественное число, $a \in A$, то в G^* получим $g^{-1}xg = x^\alpha$, α — вещественное число, $x \in R$. Непосредственная проверка показывает, что G^* — топологически полная группа, системы выпуклых подгрупп у G^* и G одинаковы и факторы этих систем совпадают, за исключением A и R. #

Теорема 1 получена применением к упорядоченной группе канторовского процесса пополнения. Ясно, что другой метод пополнений, метод сечений Дедекинда, примененный к неархимедовой л. у. группе, не дает нам группы в силу того, что выпуклая подгруппа определит сечение, которое необратимо. Тем не менее, несколько изменив определение, можно использовать и метод сечений для построения топологического пополнения G^* л. у. группы G, что было сделано Коэном и Гофманом [1] для абелевых групп и здесь распространяется на произвольный случай.

Нижним сегментом в л. у. группе G называется множество $X \subseteq G$, содержащее вместе со всеми $x \in X$ все элементы $y \in G$, $y \leqslant x$, и некоторое $z > x$. Нижний сегмент X называется *дедекиндовым*, если для всякого $y \in G$, $y > e$, найдется $x \in X$ такой, что $yx \overline{\in} X$.

Пусть ξ^* — порядковое число группы G, построенное в предложении 6, $\{a_\xi\}$ — последовательность положительных элементов из G типа ξ^*, сходящаяся к e.

Л е м м а 2. *Нижний сегмент X является дедекиндовым тогда и только тогда, когда существует фундаментальная последовательность $\{x_\xi\}$ типа ξ^*, кофинальная в X и такая, что $a_\xi x_\xi \overline{\in} X$.*

Пусть нижний сегмент X дедекиндов. Тогда для всякого a_ξ найдется $x_\xi \in X$ такой, что $a_\xi x_\xi \overline{\in} X$. Покажем, что ξ^*-последовательность $\{x_\xi\}$ кофинальна в X и фундаментальна. Пусть $x \in X$. Мы можем найти $z > x$, $z \in X$. Теперь можно найти такое $\xi < \xi^*$, что $e < a_\xi < zx^{-1}$. Поскольку $z \in X$ и $a_\xi x_\xi \overline{\in} X$, то $z < a_\xi x_\xi < zx^{-1}x_\xi$, откуда следует $x < x_\xi$, т. е. последовательность $\{x_\xi\}$ кофинальна в X. Пусть $a \in G$, $a > e$. Найдем ξ такое, что $a_\xi < a$. Покажем, что для всех $\xi < \eta, \eta' < \xi^*$, $a_\xi^{-1} < x_\eta x_{\eta'}^{-1} < a_\xi$. Предположим противное, т. е. пусть для некоторых $\eta, \eta' > \xi$ оказывается $x_\eta x_{\eta'}^{-1} > a_\xi$ $(x_\eta x_{\eta'}^{-1} < a_\xi^{-1})$. Тогда $x_\eta > a_\xi x_{\eta'}$ $(x_{\eta'} > a_\xi x_\eta)$. Но так как $\eta' > \xi$ $(\eta > \xi)$, $a_\xi > a_{\eta'}$ $(a_\xi > a_\eta)$, и поэтому $x_\eta > a_{\eta'} x_{\eta'}$, следовательно, $a_{\eta'} x_{\eta'} \in X$, что противоречит условию. Итак, $|x_\eta x_{\eta'}^{-1}| < a_\xi < a$ для всех $\eta > \xi$, $\eta' > \xi$, т. е. последовательность $\{x_\xi\}$ фундаментальна.

Обратно, пусть $y > e$ и $a_\xi < y$. По условию $a_\xi x_\xi \overline{\in} X$, откуда $yx_\xi \overline{\in} X$, так как $yx_\xi > a_\xi x_\xi$, т. е. сегмент X дедекиндов. #

Если $x_0 \in G$, то $X(x_0) = \{x \mid x < x_0\}$ есть дедекиндов нижний сегмент, поскольку $\{x_\xi = a_\xi^{-1} x_0\}$ — фундаментальная последовательность, кофинальная в $X(x_0)$ и такая, что $a_\xi x_\xi \overline{\in} X(x_0)$. Очевидно, что множество всех сегментов $\{X(g) \mid g \in G\}$ есть линейно упорядоченная группа, изоморфная G, если определить умножение естественным образом:

$$X(g_1) \cdot X(g_2) = X(g_1 g_2) = \\ = \{z \in G \mid z = x_1 x_2,\ x_1 \in X(g_1),\ x_2 \in X(g_2)\}$$

и положить $X(g_1) < X(g_2)$ тогда и только тогда, когда $X(g_1) \subset X(g_2)$.

Рассмотрим множество G_D всех нижних дедекиндовых сегментов и определим на нем операцию $X_1 X_2 = \{z \mid z = x_1 x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$ и отношение $X_1 < X_2$, если $X_1 \subset X_2$.

Теорема 2. *Множество G_2 является топологически полной линейно упорядоченной группой, содержащей G.*

Доказательство. Докажем сначала, что произведение нижних дедекиндовых сегментов из G есть нижний дедекиндов сегмент. Пусть X, $Y \in G_2$ и $z < xy$, где $x \in X$, $y \in Y$. Тогда $z = x \cdot x^{-1}z$, причем $x^{-1}z \in Y$, так как $x^{-1}z < y$ и $y \in Y$. Далее, найдутся $x_1 \in X$, $x_1 > x$, $y_1 \in Y$, $y_1 > y$, и поэтому $x_1y_1 \in XY$, $x_1y_1 > xy$. Итак, XY есть нижний сегмент. Пусть теперь $z > e$. Так как группа G недискретна, то $z = z_1 \cdot z_2$, где $z_1 > e$, $z_2 > e$. Для $z_1 > e$ найдется $x \in X$ такой, что $z_1x \overline{\in} X$. Теперь по $x^{-1}z_2x > e$ найдем такой $y \in Y$, что $x^{-1}z_2x \cdot y \overline{\in} Y$. Тогда $zxy \overline{\in} XY$. Предположим противное, т. е. $z \cdot xy \leqslant x_1y_1$ или, иначе, $z_1x \cdot x^{-1}z_2xy \leqslant x_1y_1$, откуда следует $z_1x \leqslant \leqslant x_1y_1(x^{-1}z_2xy)^{-1}$. Но так как $x^{-1}z_2xy \overline{\in} Y$, $y_1 \in Y$, то можно утверждать, что $y_1 < x^{-1}z_2x \cdot y$, и поэтому $y_1 (x^{-1}z_2x \cdot y)^{-1} < e$, откуда $z_1x \leqslant x_1$, т. е. $z_1x \in X_1$, что противоречит выбору x. Итак, XY — нижний дедекиндов сегмент. Очевидно, что операция умножения ассоциативна и $X(e) = \{x \in G \mid x < e\}$ — единичный элемент в G_D.

Пусть теперь $X \in G_D$, $Y = \{y \mid y^{-1} \in X\}$, $Z = Y$, если Y не имеет точной верхней грани, и $Z = Y \setminus y_0$, если Y имеет точную верхнюю грань y_0. Покажем, что $Z \in G_D$ и $XZ = X(e)$. Пусть $z \in Z$, $w < z$. Тогда $w^{-1} > > z^{-1}$ и, так как $z^{-1} \overline{\in} X$, то $w^{-1} \overline{\in} X$ и поэтому $w \in Z$. Пусть теперь $\{x_\xi\}$ — фундаментальная последовательность в X такая, что $a_\xi x_\xi \overline{\in} X$. По лемме 1 последовательность $\{x_\xi^{-1}a_\xi x_\xi\}$ сходится к единице. Теперь легко показать, что Z — дедекиндов нижний сегмент. Пусть $a > e$, тогда найдем такой номер ξ, что $x_\xi^{-1}a_\xi x_\xi < a$. Мы имеем тогда $x_\xi a > x_\xi x_\xi^{-1}a_\xi x_\xi = a_\xi x_\xi \overline{\in} X$.

Итак, по a мы нашли такой x_ξ, что $x_\xi a \overline{\in} X$. Пусть $x_\xi a = y^{-1}$, $y \in Z$. В то же время $y^{-1}a^{-1} = x_\xi a \cdot a^{-1} = = x_\xi \in X$, т. е. $y^{-1}a^{-1} = (ay)^{-1} \in X$ и поэтому $ay \overline{\in} Z$. Это показывает, что Z — дедекиндов класс. Далее, $X \cdot Z = = X(e)$. Действительно, если $x \in X$, $y \in Z$, то $y^{-1} \overline{\in} X$, и тогда $y^{-1} > x$, откуда следует $xy < e$.

Этим доказано, что G_D — группа, содержащая группу G. Очевидно, что отношение $\leqslant$ на G_D:

$$X_1 \leqslant X_2 \text{ тогда и только тогда, когда } X_1 \subseteq X_2$$

определяет линейный порядок на G_D, продолжающий заданное упорядочение на G, а также что G всюду плотна в G_D, система выпуклых подгрупп у G_D такова же, как у G, а наименьшее порядковое число ξ^*, строящееся по предложению 6 для G_D, таково же, как для G. При этом порядке G_D оказывается топологически полной группой. Пусть $\{X_\xi\}$ — фундаментальная последовательность в G_D. Не ограничивая общности, считаем, что тип последовательности $\{X_\xi\}$ равен ξ^*. Так как группа G всюду плотна в G_D, оценки для элементов группы G_D можно делать элементами из G.

Пусть $Y_\eta = \bigcup\limits_{\eta<\xi<\xi^*} X_\xi$, $Y = \bigcap\limits_{\eta<\xi^*} Y_\eta$, $X = Y \setminus y_0$, если Y имеет максимальный элемент $y_0 = \sup Y$ и $X = Y$ в противном случае.

Если $x \in X$, $x_1 < x$, то $x \in Y_\eta$ для всякого $\eta < \xi^*$ и $x_1 \in Y_\eta$ для всякого $\eta < \xi^*$, откуда $x_1 \in X$. Так как группа G недискретна, то X не имеет наибольшего элемента, и поэтому найдется $w \in X$, $w > x$. Итак, X — нижний сегмент.

Пусть $y > e$. Найдем ξ_0 такое, что $a_{\xi_0}^3 < y$. Поскольку $\{X_\xi\}$ — фундаментальная последовательность, по $\eta > \xi_0$ найдется $\xi_\eta > \eta$ такое, что для всех $\xi_\eta < \xi < \xi^*$ получим $a_\eta^{-1} X_{\xi_\eta} \subseteq X_\xi \subseteq a_\eta X_{\xi_\eta}$. Следовательно, $Y = \bigcap\limits_{\zeta<\xi^*} Y_\zeta \subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{\xi_\eta<\xi<\xi^*} X_\xi \subseteq a_\eta X_{\xi_\eta}$, откуда следует $X \subseteq a_\eta X_{\xi_\eta}$. Если $\xi > \max\{\zeta, \xi_\eta\}$, то $Y_\zeta \supset X_\xi \supset a_\eta^{-1} X_\xi$ для всяких $\eta, \zeta < \xi^*$. Следовательно, $Y = \bigcap\limits_{\zeta>\xi^*} Y_\zeta \subset a_\eta^{-1} X_{\xi_\eta}$, откуда $X \supseteq a_\eta^{-1} X_{\xi_\zeta}$, т. е. $a_\eta^{-1} X_{\xi_\eta} \subseteq X \subseteq a_\eta X_{\xi_\eta}$ для всех $\xi_0 < \eta < \xi^*$. Поскольку $a_{\xi_0}^{-1} X_{\xi_0} \in G_D$, найдется $y \in a_{\xi_0}^{-1} X_{\xi_0}$ такое, что $a_{\xi_0} y \bar{\in} a_{\xi_0}^{-1} X_{\xi_0}$. Тогда $xy > a_{\xi_0}^3 x \bar{\in} a_{\xi_0} X_{\xi_0}$, откуда следует $xy \bar{\in} X$, т. е. X — нижний дедекиндов сегмент.

Покажем, что $X = \xi^*\text{-}\lim X_\xi$. Действительно, по всякому $a > e$ найдется $a_\eta < a$. По η найдем ξ_η, $\eta < \xi_\eta < \xi^*$, такое, что для всех $\zeta > \xi_\eta$ будет $a_\zeta^{-1} X_{\xi_\zeta} \subseteq X \subseteq a_\zeta X_{\xi_\zeta}$ или $|X \cdot X_{\xi_\zeta}^{-1}| \leqslant X(a_\zeta) < X(a)$, т. е. $X = \xi^*\text{-}\lim X_{\xi_\zeta}$. Итак, в $\{X_\xi\}$ нашлась подпоследовательность $\{X_{\xi_\zeta}\}$, сходящаяся к X, откуда следует, что $\xi^*\text{-}\lim X_\xi = X$. #

Теорема 2 была доказана Коэном и Гофманом [1] для абелевых л. у. групп. Их метод положен в основу приведенного здесь доказательства, хотя трудности, связанные с некоммутативностью группы, усложнили доказательство.

Теоремы 1 и 2 хорошо показывают связь между канторовским и дедекиндовым процессами пополнения линейно упорядоченных групп.

Предложение 7. *Группа G_D изоморфна пополнению G^* линейно упорядоченной группы G, построенному в теореме* 1. #

Предложение 8. *Группа Хана топологически полна.* #

4°. Напомним, что элементы $x, y > e$ л. у. группы G называются *архимедово эквивалентными*, если найдутся такие целые числа m, n, что $x^m > y$ и $y^n > x$. Говорят, что группа G *архимедово вложена* в л. у. группу H, если $G \subseteq H$ и для всякого элемента $h \in H$, $h > e$, найдется элемент $g \in G$, архимедово эквивалентный h. Л. у. группа G называется *архимедово полной*, если не существует линейно упорядоченной группы H, отличной от G, в которую G вкладывается архимедово.

Предложение 9. *Всякая л. у. группа G архимедово вкладывается хотя бы в одну архимедово полную группу H.*

Заметим сначала, что если G архимедово вложена в H, а H архимедово вложена в F, то G архимедово вложена в F. Кроме того, объединение F возрастающей последовательности архимедово вложенных друг в друга групп G_α таково, что каждая G_α архимедово вложена в F. Если группа G архимедово вложена в группу G_1, то системы выпуклых подгрупп у G и G_1 одинаковы, т. е. в G_1 нет новых выпуклых подгрупп.

Отсюда следует, что если мощность системы выпуклых подгрупп группы G равна $\aleph$ и группа G архимедово вкладывается в H, то мощность H не превышает $c^{\aleph}$, где c — мощность континуума. Дальнейшие рассуждения стандартны. #.

Теорема 3. (Коэн и Гофман [1].) *Всякая архимедово полная группа топологически полна.*

Доказательство. Действительно, если G не является топологически полной группой, то ее топологическое пополнение G^* отлично от G. Пусть $g^* \in G^* \setminus G$, $g^* > G$, тогда g^* есть предел фундаментальной последовательности $\{g_\alpha\}$, $g_\alpha \in G$. Возможно, что g^* не содержится в наименьшей выпуклой подгруппе. Тогда по элементу $g \ll g^*$ найдем номер α такой, что $g^{-1} < g_\alpha^{-1} g^* < g$. Это означает, что $g^* = g_\alpha h$, где $h \leqslant g^*$, и тогда, так как $h^{-1} g^* h \gg h$, $(g^*)^2 = g^* \cdot g^* > g_\alpha g^{-1} g^* > g_\alpha$ и $g_\alpha^2 = (g^* h^{-1})^2 = g^* h^{-1} g^* h \cdot h^{-2} > g^*$. Если же g^* лежит в наименьшей выпуклой подгруппе H группы G^*, то, начиная с некоторого α_0, все $g_\alpha \in H$. Ввиду архимедовости группы H элементы g^* и g_α архимедово эквивалентны при $\alpha > \alpha_0$. #

Т е о р е м а 4. (Х а н [1].) *Линейно упорядоченная абелева группа тогда и только тогда архимедово полна, когда она является группой Хана.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — архимедово полная группа и $\overline{G} = W(G)$ — группа Хана, построенная так, как в теореме 1 § 1. Тогда $\overline{G}$ есть архимедово расширение группы G и ввиду архимедовой полноты G совпадает с $\overline{G}$.

Обратно, пусть G — группа Хана. G есть лексикографическое произведение групп R_α вещественных чисел, где α пробегает л. у. множество П, и H — некоторое архимедово расширение группы G. Можно считать, что $H = \{G, x\}$ и $x \overline{\in} H$. Так как G есть лексикографическое произведение аддитивных групп вещественных чисел $R_\alpha \cong R$ и всякий скачок $A'_\alpha \supset B'_\alpha$ выпуклых подгрупп из H тоже изоморфен R, то ясно, что

$$A'_\alpha = B'_\alpha R_\alpha, \qquad (*)$$

где R_α — соответствующий лексикографический множитель группы G. Для доказательства того, что группа G архимедово полна, достаточно найти последовательность $\{x_\alpha\}$ элементов из G, сходящуюся к x в интервальной топологии, так как группа Хана топологически полна (см. Предложение 8). Это нетрудно сделать обычными методами, используя (*), что предоставляется читателю. #

П р о б л е м а 37. Существуют ли архимедово полные линейно упорядоченные группы, не все факторы полной системы выпуклых подгрупп которой изоморфны аддитивной группе вещественных чисел в естественном порядке?

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Расширения и сплетения

1°. Пусть даны группы A и B. Рассмотрим декартову степень A^B группы A, т. е. множество всех функций, заданных на B со значениями в A. Множество A^B является группой относительно покоординатного умножения функций из A^B: если $f, g \in A^B$, то $fg(b) = f(b)\,g(b)$ для всякого $b \in B$.

Полным сплетением групп A и B называется полупрямое произведение групп $\bar{A} = A^B$ и B, причем элементы из B действуют на элементы $\bar{A}$ следующим образом:

$$f^{b_1}(b) = f(bb_1^{-1}). \tag{1}$$

Подгруппа полного сплетения групп A и B, порожденная подгруппой B и подгруппой $\tilde{A}$ всех функций $f \in \bar{A}$ таких, что $f(b) \neq e$ лишь для конечного числа координат $b \in B$, называется *сплетением* групп A и B.

Полное сплетение групп A и B обозначается $A\bar{r}B$, сплетение групп A и B обозначается ArB.

Предложение 1. *Пусть A, B — группы и A^B — декартова степень группы A. Группа $\overline{W}$ всех подстановок $\theta(f, b)$ декартова произведения множеств A и B, определяемых соотношением*

$$(a, b)^{\theta(f, b_1)} = (af(b), bb_1) \tag{2}$$

(где $f \in A^B$; $a \in A$; $b, b_1 \in B$), изоморфна полному сплетению групп A и B.

Действительно, множество $\overline{W}$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного.

Установим изоморфизм φ групп $\overline{W}$ и $A\bar{r}B$ следующим образом: $\varphi(\theta(f, b)) = f\cdot b$. Очевидно, что φ — взаимно-однозначное соответствие, отображающее $\overline{W}$ на $A\bar{r}B$.

Если через $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, обозначить множества всех подстановок $\{\theta(f, e)\}$, $\{\theta(e, b)\}$ соответственно, где $f \in A^B$, $b \in B$, e — функция из A^B, тождественно равная единице группы A, то очевидно, что φ индуцирует изоморфизм подгрупп $\tilde{A}$ на $\bar{A}$ и $\tilde{B}$ на B соответственно. Для доказательства того, что φ — изоморфизм групп $\overline{W}$ и $A \wr B$, достаточно доказать равенство

$$\varphi(\theta(e, b)^{-1} \cdot \theta(f, e) \cdot \theta(e, b)) = \varphi(\theta(f_1, b)),$$

где $f_1(b_1) = f(b_1 b^{-1})$ для всякого $b_1 \in B$. Требуемое равенство следует из соотношений:

$$(a_1, b_1)^{\theta(e, b)^{-1}\theta(f, e)\theta(e, b)} = (a_1, b_1)^{\theta(e, b^{-1})\theta(f, e)\theta(e, b)} =$$
$$= (a_1 f(b_1 b^{-1}), b_1) = (a_1 f_1(b_1), b_1) = (a_1, b_1)^{\theta(f_1, e)}. \#$$

Теорема 1. (Калужнин, Краснер [1].) *Если группа G есть расширение группы A при помощи группы B, то существует изоморфизм π группы G в $A \wr B$, причем $\pi(A) \subseteq \bar{A}$ и $\pi(G)\bar{A}/\bar{A} = B$.*

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм ε группы G на B. Для каждого $b \in B$ выберем представитель $\varepsilon^{-1}(b)$ в таком смежном классе gA группы G по A, что $\varepsilon(gA) = b$, а также систему шрейеровских факторов $m(b_1, b_2) = \varepsilon^{-1}(b_1)\varepsilon^{-1}(b_2)(\varepsilon^{-1}(b_1 b_2))^{-1}$, определяющих расширение G группы A с помощью B.

Очевидно, что группа G изоморфна группе всех пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$, с законом умножения

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 \varepsilon^{-1}(b_1) a_2 \varepsilon^{-1}(b_1)^{-1} m(b_1, b_2), b_1 b_2).$$

Отождествим группу G с полученной группой пар и рассмотрим представление θ ее правыми сдвигами: если $x = (a, b)$, то

$$(a_1, b_1)^{\theta(x)} = (a_1 \varepsilon^{-1}(b_1) a (\varepsilon^{-1}(b_1))^{-1} m(b_1, b), b_1 b).$$

Тогда

$$(a_1, b_1)^{\theta(x)} = (a_1 f(b_1), b_1 b),$$

где $f(b_1) = \varepsilon^{-1}(b_1) a (\varepsilon^{-1}(b_1))^{-1} m(b_1, b)$ есть функция, определенная на B со значениями в A. Представление θ определяет вложение группы G в группу всех подстановок $\theta(f, b)$ множества $A \times B$, определяемую соотношениями (2), и, следовательно, в группу $A \wr B$. Свойства полученного вложения π группы G в группу $A\bar{\wr}B$ проверяются непосредственно. $\#$

2°. Теорема Г. Баумслага, приведенная в этом пункте, позволяет, в ряде случаев, свести изучение расширения группы A с помощью группы B к изучению сплетений групп A и B.

Пусть $\overline{W}$ — полное сплетение групп F и H. Тогда каждый элемент $w \in \overline{W}$ представляется единственным образом в виде tb, где $b \in \bar{F}$, $t \in H$.

Зададим отображение t группы $\overline{W}$ в группу H: $t(w) = t(bt) = t$ и отображение b группы $\overline{W}$ в группу $\bar{F}$: $b(w) = b(bt) = b$.

Аналогично определим отображения t и b группы $W = F\wr H$ в H и $\bar{F} = \prod_{h\in H} F_h$ соответственно. Очевидно, что t — гомоморфизм групп $\overline{W}$ и W на H.

В дальнейшем всюду Y — свободная группа и $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — ее свободная база. Пусть $v = v(y_1, \ldots, y_n)$ — редуцированное слово из Y, т. е.

$$y = y_{r(1)}^{\varepsilon(1)} \ldots r_{r(m)}^{\varepsilon(m)},$$

где $y_{r(j)}^{\varepsilon(j)} y_{r(j+1)}^{\varepsilon(j+1)} \neq e$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, $\varepsilon(i) = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

В любой группе $\overline{W}$ для всяких элементов $w_i = t_i b_i$, $i = 1,2, \ldots, n$, как показывает непосредственная проверка, справедливо следующее равенство:

$$v(w_1, \ldots, w_n) = v(t_1, \ldots, t_n) \prod b_{r(s)}^{\varepsilon_s u_s(t_1, \ldots, t_n)}, \tag{3}$$

где $u_s(t_1, \ldots, t_n) = t_{r(s)}^{1/2(\varepsilon_s - 1)} t_{r(s+1)}^{\varepsilon_{s+1}} \ldots t_{r(m)}^{\varepsilon_m}$.

Лемма 1. *Если $v = v(y_1, \ldots, y_n)$ — редуцированное слово из Y и $w_1, \ldots, w_n$ — такие элементы из $\overline{W} = F\bar{\wr}H$, что $v(w_1, \ldots, w_n) \neq e$, то найдутся элементы $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$ из $F\wr H$, для которых $v(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n) \neq e$ и $t(\tilde{w}_i) = t(w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Пусть $t(w_i) = t_i$, $b(w_i) = b_i$. Перепишем соотношение (3) в виде

$$v(w_1, \ldots, w_n) = v(t_1, \ldots, t_n) b^*, \tag{4}$$

где $b^* \in b(\overline{W})$.

Так как $v(w_1, \ldots, w_n) \neq e$, то либо $v(t_1, \ldots, t_n) \neq e$, либо $v(t_1, \ldots, t_n) = e$, $b^* \neq e$.

Если $v(t_1, \ldots, t_n) \neq e$, то в качестве $\widetilde{w}_i$ возьмем $t_i \cdot e$.

Если же $v(t_1, \ldots, t_n) = e$, то $b^* \neq e$, и следовательно, найдется $h_0 \in H$ такое, что $b^*(h_0) \neq e$.

Но ввиду (3)

$$b^*(h_0) = \left(\prod_{s=1}^{m} b_{r(s)}^{\varepsilon_s u_s(t_1, \ldots, t_n)}\right)(h_0) = \\ = \prod_{s=1}^{m} b_{r(s)}^{\varepsilon_s}(h_0 u_s(t_1, \ldots, t_n)^{-1}).$$

В качестве элементов $\widetilde{w}$ выберем элементы $\widetilde{w}_i = t_i \widetilde{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\widetilde{b}_i(h) = \begin{cases} b_i(h), \text{ если } h = h_0 u_s(t_1, \ldots, t_n)^{-1} \\ \qquad\qquad \text{для некоторого } s,\ 1 \leqslant s \leqslant m, \\ e \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\widetilde{b}_i \in b(W)$, а также что $v(t_1\widetilde{b}_1, \ldots, t_n\widetilde{b}_n) = \widetilde{b}^*$, $\widetilde{b}^* \in b(W)$, причем $\widetilde{b}^*(h_0) = b^*(h_0) \neq e$. Следовательно, $\widetilde{b}^* = e$ и $v(\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n) \neq e$. #

Напомним, что класс $\mathfrak{K}$ групп называется *многообразием*, если он замкнут относительно гомоморфизмов, взятия подгрупп и полных прямых произведений.

Пусть V — совокупность всех слов $v_\alpha(y_1, \ldots, y_n)$ свободной группы Y таких, что $v_\alpha(g_1, \ldots, g_n) = e$ для всяких $g_1, \ldots, g_n \in G$, где G — произвольная группа многообразия $\mathfrak{K}$. Тогда V — вполне характеристическая подгруппа группы Y и Y/V называется *свободной группой* многообразия $\mathfrak{K}$. Для произвольной группы A определим *вербальную подгруппу* $\mathfrak{K}(A)$ следующим образом: $\mathfrak{K}(A)$ — пересечение всех инвариантных подгрупп группы A, содержащих элементы $v_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$, где $v_\alpha(y_1, \ldots, y_n) \in V$, $a_i \in A$.

Очевидно, что группа A принадлежит $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}(A) = E$, и что для всякой группы A фактор-группа $A/\mathfrak{K}(A) \in \mathfrak{K}$.

Л е м м а 2. *Пусть R — инвариантная подгруппа свободной группы Y, S — вполне характеристическая подгруппа группы R, M — группа, содержащая инвариантную* *подгруппу N, причем N лежит в минимальном многообразии $\mathcal{K}$ групп, содержащем R/S. Пусть η — отображение множества $y_1S, \ldots, y_nS, \ldots$ в группу M. Если отображение η_1: $y_iR \to (y_iS)^{\eta}N$ продолжается до гомоморфизма η_2 группы Y/S на M/N, то η может быть продолжено до гомоморфизма γ группы Y/S в M.*

Обозначим через α естественный гомоморфизм Y на Y/R, α: $y_i \to y_iR$, и аналогично через μ — естественный гомоморфизм M на M/N.

Очевидно, что отображение η', определяемое равенством $y_i\eta' = (y_iS)\eta$, продолжается до гомоморфизма Y в M.

Рассмотрим гомоморфизм $\alpha\eta_2$ группы Y на M/N:

$$y_i\alpha\eta_2 = (y_iR)\eta_2 = (y_iS)\eta N = y_i\eta'\mu.$$

Отсюда следует, что гомоморфизм $\eta'\mu$ отображает Y на M/N и

$$v\eta\mu = v\alpha\eta_2 \tag{5}$$

для всякого $v \in Y$.

Обозначим через A ядро гомоморфизма $\eta'\mu$. Из (5) следует, что $A \supseteq R$. Если B — ядро η', то $A \supseteq B$ ввиду $A\eta'\mu = E$, $A\eta' \subseteq N$. По условию $N \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — минимальное многообразие, содержащее R/S, следовательно, $\mathcal{K}(N) = E$ и тогда $\mathcal{K}(A\eta') = E$. Но $A\eta' = AB/B \cong A/A \cap B = A/B$. Поэтому $\mathcal{K}(A\eta') = \mathcal{K}(A/B)$ и, так как $\mathcal{K}(A)$ — вербальная подгруппа, $\mathcal{K}(A)B/B \subseteq \mathcal{K}(A/B) = E$, откуда получается $\mathcal{K}(A) \subseteq B$. Но тогда $B \supseteq \mathcal{K}(A) \supseteq \mathcal{K}(R) = S$, следовательно, $B \supseteq S$. Отсюда следует, что отображение γ: $Y/S \to M$, $(y_iS)\gamma = y_i\eta'$ есть гомоморфизм $Y/S \to M$, продолжающий η. #

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп. Говорят, что группа G *аппроксимируется* классом $\mathcal{L}$, если для каждого элемента $g \in G$ найдется инвариантная подгруппа $N(g)$ из G, не содержащая элемента g такая, что $G/N(g)$ изоморфна некоторой группе из $\mathcal{L}$.

Нетрудно видеть, что группа, аппроксимирующаяся классом $\mathcal{L}$, вкладывается в полное прямое произведение подходящих групп из $\mathcal{L}$. Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и полных прямых произведений, то каждая группа, аппроксимирующаяся классом $\mathcal{L}$, лежит в $\mathcal{L}$.

Теорема 2. (Баумслаг [1].) *Пусть Y — свободная группа, R — инвариантная подгруппа группы Y и S — вполне характеристическая подгруппа группы R. Тогда группа $G = Y/S$ аппроксимируется семейством групп $G(g)$, являющихся подгруппами сплетения $F \wr H$, где $F = R/S$, $H = Y/R$.*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Достаточно показать, что найдется гомоморфизм γ_g группы G в $F \wr H$ такой, что $g\gamma_g \neq e$.

Пусть $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — свободная база группы Y, α — естественный гомоморфизм Y на Y/S, $v(y_1, \ldots, y_n) = v$ — элемент Y такой, что $v\alpha = g$.

По теореме 1 существует вложение π группы G в $\overline{W} = F \bar{\wr} H$. Обозначим через w_i образы $y_i\alpha$ в $\overline{W}$: $w_i = y_i\alpha\pi$. Тогда

$$g\pi = v(w_1, \ldots, w_n) \neq e. \tag{6}$$

По лемме 1 можно подобрать $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n$ в $W = F \wr H$ такие, что $v(\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n) \neq e$ и $t(w_i) = t(\widetilde{w}_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим отображение η множества $y_1\alpha, \ldots, y_n\alpha, \ldots$ в W следующим образом:

$$y_i\alpha\eta = \begin{cases} \widetilde{w}_j, & \text{если } y_i\alpha\pi = w_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ t(y_i\alpha\pi), & \text{если } y_i\alpha\pi \neq w_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$$

и отображение η_1 множества $y_1R, \ldots, y_nR, \ldots$ в $W/b(W)$ следующим образом: $(y_iR)\eta_1 = (y_iS)\eta \cdot b(W)$. Очевидно, что η_1 продолжается до гомоморфизма η_2: Y/R на $W/b(W)$. Тогда, по лемме 2, η продолжается до гомоморфизма γ_g группы G в W, причем ввиду (6)

$$g\gamma_g = v(y_1, \ldots, y_n)\alpha\gamma_g = v(y_1\alpha, \ldots, y_n\alpha)\gamma_g =$$
$$= v(y_1\alpha\gamma_g, \ldots, y_n\alpha\gamma_g) = v(\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n) \neq e. \qquad \#$$

Лемма 1 и теорема 2 сформулированы и доказаны здесь в более слабой формулировке, чем в работе Баумслага [1].

§ 2. Некоторые свойства центральных расширений групп

В этом разделе доказывается результат И. Шура о конечности фактор-группы $G' \cap N/[G', N]$, где N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Доказательство будем излагать по схеме Бэра [2].

1°. Пусть G есть центральное расширение группы Z с помощью группы H. Через $\{r(x)\}$ обозначим систему представителей фактор-группы G/Z, причем выбираем $r(e) = e$. Тогда можно сказать, что расширение G определяется системой центральных факторов $f(x, y) = r(x)\, r(y)\, r(xy)^{-1}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} f(x, e) = f(e, y) = e, \\ f(x, y)\, f(xy, z) = f(x, yz)\, f(y, z). \end{gathered} \tag{1}$$

Если через R обозначить подгруппу, порожденную $\{r(x) \mid x \in H\}$, то очевидно, что выполняются следующие соотношения:

$$R_1 = R \cap Z \quad \text{порождается} \quad \{f(x, y) \mid x, y \in H\}, \tag{2}$$

$$G = R \times Z\,(R_1), \tag{3}$$

где R_1 — объединенная подгруппа,

$$G' = R', \tag{4}$$

$$G' \cap Z \subseteq R \cap Z. \tag{5}$$

2°. Пусть дана группа H. Через $X = \{(x, y) \mid x, y, \in H\}$ обозначим декартово произведение $H \times H$, через A — свободную абелеву группу с базой X и через B — подгруппу группы A, порожденную всеми элементами вида

$$(x, e),\ (e, y),\ (xy, z)\,(x, y)\,(x, yz)^{-1}\,(y, z)^{-1}.$$

Рассмотрим фактор-группу H^* группы A по B. Образ элемента $(x, y) \in A$ в H^* при естественном гомоморфизме A на H^* обозначим $f(x, y)$. Тогда легко видеть, что множество $\{f(x, y) \mid x, y \in H\}$ является системой центральных факторов H в H^*. Будем называть эту систему *свободной центральной системой факторов* H в H^*. Отметим, что если группа H конечна, то группа H^* конечно-порождена.

Рассмотрим расширение G группы H^* с помощью H, соответствующее свободной системе центральных факторов H в H^*. Группу G будем называть *свободным центральным расширением* H^* с помощью H.

Нетрудно показать, что свободное центральное расширение G группы H^* с помощью H есть фактор-группа

$X/[X, N]$ подходящей свободной группы X по инвариантной подгруппе $[X, N]$, где N — инвариантная подгруппа группы X такая, что $X/N = H$.

В дальнейшем потребуются следующие свойства центральных расширений групп, которые не требуют доказательства:

Предложение 1. *Если G есть центральное расширение группы A с помощью группы H и η — гомоморфизм A в B, то существует гомоморфизм φ группы G в подходящее центральное расширение группы B с помощью H, продолжающий η на A и индуцирующий тождественный изоморфизм на H.* $\#$.

Предложение 2. *Если F — свободное центральное расширение группы H^* с помощью H и A — центральное расширение группы Z с помощью H, то существует гомоморфизм η группы F в группу H, индуцирующий тождественное отображение на H и переводящий систему $\{f(x, y) \mid x, y \in H\}$ свободных факторов H в H^* в систему $\{f'(x, y) \mid x, y \in H\}$ центральных факторов H в Z, определяющую A как расширение группы Z с помощью группы H, причем для всяких $x, y \in H$ имеет место соотношение $f(x, y)\eta = f'(x, y)$.* $\#$

Предложение 3. *Пусть G есть центральное расширение группы Z с помощью H, соответствующее системе $\{f(x, y) \mid x, y \in H\}$ центральных факторов H в Z. Тогда Z является прямым множителем в G тогда и только тогда, когда для каждого $x \in H$ найдется $t(x)$ из Z такое, что выполняется соотношение*

$$f(x, y) = t(x)\cdot t(y)\, t(xy)^{-1}. \ \# \tag{6}$$

Если система центральных факторов определяет G как прямое произведение Z и некоторой группы H_1, изоморфной H, то будем называть ее *системой прямых факторов.*

3°. Лемма 1. *Если G есть центральное расширение абелевой группы Z с помощью группы H, соответствующее системе $\{f(x, y) \mid x, y \in H\}$ центральных факторов H в Z, то следующие свойства подгруппы S из Z эквивалентны:*

(а) $S \supseteq G' \cap Z$;

(б) *существует абелева группа T, содержащая Z/S такая, что $\{Sf(x, y) \mid x, y \in H\}$ есть система прямых факторов H в T.*

Зафиксируем систему представителей $r(x)$, $x \in H$, классов смежности G/Z такую, что $f(x, y) = r(x)\, r(y)\, r(xy)^{-1}$. Пусть выполняется (а). В качестве T возьмем $G/G'S$:

$$T = G/G'S \supseteq ZG'S/G'S \cong \cong Z/Z \cap G'S = Z/(Z \cap G')S = Z/S.$$

Непосредственный подсчет показывает, что множество $\{Sf(x, y) \mid x, y \in H\}$ есть система прямых факторов H в T, если в качестве $t(x)$ взять $r(x)\, G'S$.

Обратно, пусть η — гомоморфизм Z в T с ядром S. Пусть H_1 — расширение T с помощью H, соответствующее системе прямых факторов $f(x, y)S$. Тогда T выделяется прямым множителем в H_1. Из предложения 1 следует, что существует гомоморфизм $\varphi\colon G \to H_1$, продолжающий η на Z и индуцирующий тождественное отображение на H, т. е. такой, что ядро φ на Z совпадает с S. Однако $(G' \cap Z)\varphi \subseteq \subseteq G'\varphi \cap Z\varphi \subseteq H_1' \cap T$. Так как T — прямой множитель в H_1, то $H_1' \cap T = E$ и, следовательно, $(G' \cap Z)\varphi = E$, т. е. $G' \cap Z \subseteq S$. #

Следствие 1. *Если G — центральное расширение группы Z с помощью H, определяемое системой $f(x, y)$ центральных факторов H в Z, то следующие свойства гомоморфизма η группы Z в абелеву группу A эквивалентны:*

(а) $(G' \cap Z)\,\eta = E$;

(б) *существует абелева группа T, содержащая A такая, что система $\{f(x, y)\eta \mid x, y \in H\}$ есть система прямых факторов H в T.* #

Теорема. (Шур [1].) *Если группа G имеет инвариантную подгруппу N конечного индекса, то фактор-группа $G' \cap N / [G, N]$ конечна.*

Доказательство. Положим $H = G/N$ и рассмотрим свободное центральное расширение F группы H^* с помощью H. Тогда $G' \cap N / [G, N]$ есть гомоморфный образ группы $H^* \cap F'$. Это следует из (2), (4), (5). Рассмотрим эндоморфизм η на H^*: $x\eta = x^n$ для всяких $x \in \in H^*$. Известно (см. Цассенхауз [1]), что η отображает систему свободных центральных факторов H в H^* в систему прямых факторов H в H^*. Но тогда, в силу следствия, $(F' \cap H^*)\,\eta = E$, что вместе с конечной порожденностью H^* дает конечность $F' \cap H^*$ и, следовательно, конечность $G' \cap N / [G, N]$. #

§ 3. О простых группах

В этом разделе излагается в сокращенном виде метод построения простых групп, предложенный Ф. Холлом в работах [2], [3].

Лемма 1. *Пусть группа G есть объединение возрастающей последовательности групп A_α, $\alpha < \lambda$, где λ — предельное число, и K_α — инвариантное замыкание A_α в $A_{\alpha+1}$. Если для любого $\alpha < \lambda$:*

а) *всякая подгруппа, инвариантная в K'_α, инвариантна в K_α;*

б) *всякая нетривиальная инвариантная подгруппа группы $A_{\alpha+1}$ содержит K'_α,*

то коммутант G' группы G есть простая группа.

Пусть N — нетривиальная инвариантная подгруппа группы G', $x \in N$, $y \in G$. Так как $G' = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} K'_\alpha$, найдем $\alpha < \lambda$ такое, что $x \in K_\alpha$, $y \in K_\alpha$. Тогда $x \in N \cap K'_\alpha$, и так как N инвариантна в G', то $N \cap K'_\alpha$ инвариантна в K_α. Но из а) следует, что $N \cap K'_\alpha$ инвариантна в K_α. Отсюда

$$y^{-1}xy \in N \cap K'_\alpha \subseteq N.$$

Этим доказано, что N инвариантна в G.

Так как N нетривиальна, то $A_{\alpha+1} \cap N$ нетривиальна для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\alpha_0 < \lambda$. Из б) следует, что $A_{\alpha+1} \cap N$ содержит K'_α для всякого α, $\lambda > \alpha \geqslant \alpha_0$. Но так как $G' = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} K'_\alpha$, то $G' = N$. #

Для доказательства основного результата понадобятся некоторые простые свойства сплетений. Пусть $G = (\ldots(A_1 \operatorname{r} A_2) \operatorname{r} \ldots) \operatorname{r} A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные группы. Отождествим группу A_1 с ее каноническим образом $A_1(e)$ в сплетении, а A_2 — с верхушкой сплетения $A_1 \operatorname{r} A_2$. Аналогично, отождествим каждую из групп A_i с верхушкой сплетения $(\ldots (A_1 \operatorname{r} A_2) \operatorname{r} \ldots) \operatorname{r} A_i$, а $(\ldots (A_1 \operatorname{r} A_2) \operatorname{r} \ldots) \operatorname{r} A_{i-1}$ с $(\ldots (A_1 \operatorname{r} A_2) \operatorname{r} \ldots) \operatorname{r} A_{i-1}(e)$. Этим мы определили каноническое вложение групп A_i в G, $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что в группе G подгруппа, порожденная $A_2, \ldots, A_n$, есть сплетение

$$\{A_2, \ldots, A_n\} = (\ldots (A_2 \operatorname{r} A_3) \operatorname{r} \ldots) \operatorname{r} A_n. \tag{1}$$

Если a, $b \in A_1$, $e \neq y \in \{A_2, \ldots, A_n\}$, то непосредственный подсчет показывает, что

$$[a^y, a] = [a^y, b] = e. \qquad (2)$$

Возьмем произвольную группу H и набор групп H_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, изоморфных H, и зафиксируем изоморфизмы φ_n групп H_n на H. Индуктивно построим последовательность групп $H_{(n)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &H_{(0)} = H_0, \; H_{(k)} = H_{(-k+1)} \wr H_k, \\ &H_{(-k)} = (\ldots (H_{-k} \wr H_{-k+1}) \wr \ldots) \wr H_k, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $k > 0$. Зафиксируем следующее вложение каждой группы $H_{(-k)}$ в $H_{(k+1)}$: $H_{(-k)} \to H_{(-k)}(e)$ в сплетении $H_{(-k)} \wr H_{k+1}$ и вложение $H_{(k)}$ в $H_{(-k)}$, определяемое соотношением (1), имея в виду каноническое вложение каждой H_i в $H_{(k)}$, $|i| \leqslant k$. Таким образом, определена возрастающая последовательность групп

$$H_{(0)} \subset H_{(1)} \subset H_{(-1)} \subset \ldots \subset H_{(k)} \subset H_{(-k)} \subset H_{(k+1)} \subset \ldots$$

Объединение C этой возрастающей последовательности будем называть *сплетенной Z-степенью* группы H и обозначать

$$C = \wr H^Z = (\ldots (\ldots \wr H_{-1}) \wr H_0) \wr H_1) \wr \ldots).$$

Простая проверка показывает, что отображение τ группы C в себя, определяемое равенством

$$\tau(H_i) = \varphi_{i+1}^{-1} \varphi_i (H_i), \; i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \ldots, \qquad (4)$$

продолжается до автоморфизма τ^* группы C. Через $f(H)$ обозначим полупрямое произведение группы C и бесконечной циклической группы $\{t\}$, причем

$$t^{-1} x t = \tau^*(x), \; x \in C. \qquad (5)$$

Лемма 2. *Всякая подгруппа N из C, инвариантная в C', инвариантна в C.*

Пусть $y \in N$, $x \in C$. Тогда найдется $k \geqslant 0$ такое, что $x, y \in H_{(-k)}$. Возьмем $z \in H_{k+1}$, отличное от e. Тогда по (2) x^z перестановочен с x и y. Следовательно,

$$[x^{-1}, y] = [x^{-1}, y]^{z^{-1}xz} [z^{-1}xz, y] = [[x, z], y].$$

Так как $[x, z] \in C'$ и подгруппа N инвариантна в C', то $[[x, z], y] = [x^{-1}, y] \in N$, откуда $x^{-1}yx \in N$. #

Лемма 3. *Всякая нетривиальная инвариантная подгруппа N из $f(H)$ содержит C'.*

Пусть $x = [a^{-1}, b]$, $a, b \in C$ и $e \neq y \in N$. Выберем такое k, что $a, b \in H_{(k)}$, и такое n, что $t^{-n}yt = y_1 \in \{H_{k+1}, \ldots, H_{k+p}\}$. Из (3) и (1) следует, что $\{H_{(k)}, H_{k+1}, \ldots, H_{k+p}\}$ есть сплетение:

$$\{H_{(k)}, H_{k+1}, \ldots, H_{k+p}\} = (\ldots (H_{(k)} \wr H_{k+1}) \ldots) \wr H_{k+p}.$$

Так как $a, b \in H_{(k)}$ и $y \in \{H_{k+1}, \ldots, H_{k+p}\}$, можно заключить из (2), что $y_1^{-1}ay_1$ перестановочен с a и b. Тогда $x = [a^{-1}, b] = [a^{-1}, b]^{y_1^{-1}ay_1} \cdot [y_1^{-1}ay_1, b] = [a^{-1}y_1^{-1}ay_1, b] = [[a, y_1], b]$. Так как N инвариантна в $f(H)$, то $[a, y_1] \in N$ и, следовательно, $x = [[a, y_1], b] \in N$. Но тогда $C' \in N$. #

Теорема 1. *Исходя из всякой группы H, можно построить простую группу $g(H)$.*

Доказательство. Построим возрастающую последовательность групп $g_n(H)$ следующим образом:

$$g_0(H) = H, \quad g_{n+1}(H) = f(g_n(H)),$$

причем определим вложение ψ_n группы $g_n(H)$ в $g_{n+1}(H)$ так: $\psi_n(g_n(H)) = (g_n(H))_0$, где $(g_n(H))_0$ есть подгруппа из

$$\wr\, g_n(H)^Z = (\ldots (\ldots \wr (g_n(H))_{-1}) \wr (g_n(H))_0) \wr \ldots),$$

лежащая в $f(g_n(H))$.

В качестве группы $g(H)$ возьмем коммутант группы H^*, являющейся объединением возрастающей последовательности групп $g_n(H)$. Леммы 1, 2, 3 доказывают простоту группы $g(H)$. #

§ 4. Представление нильпотентных групп без кручения матрицами

Теорема 1. (Мальцев [2].) *Всякая конечнопорожденная нильпотентная группа без кручения точно представима целочисленными унитреугольными матрицами.*

Доказательство. Используем метод Суона [1]. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ — конечнопорожденная нильпотентная группа без кручения. Индукцией по рангу группы G, т. е. по сумме рангов ее факторов верхнего центрального ряда, будем доказывать представимость группы G унитреугольными автоморфизмами свободной абелевой группы конечного ранга.

Если ранг G равен единице, то представление T группы G легко можно написать: $T(G)$ есть группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in Z,$$

где Z — кольцо целых чисел.

Предполагаем, что для конечнопорожденных групп ранга k теорема справедлива, и пусть G имеет ранг $k+1$. Тогда в G найдется инвариантная подгруппа

$$N = \{g_1, \ldots, g_s\}$$

ранга k такая, что G/N — бесконечная циклическая группа. Пусть $G = \{N, g\}$. По предположению индукции найдется представление T группы N унитреугольными матрицами степени $n = n(r)$. Очевидно, что T индуцирует представление (обозначаемое также T) целочисленного группового кольца $Z[N]$ группы N треугольными матрицами степени n:

$$T\left(\sum k_i x_i\right) = \sum k_i T(x_i), \quad x_i \in N, \quad k_i \in Z.$$

Пусть K — ядро представления T, L — разностный идеал в $Z[N]$, т. е. идеал, порожденный элементами $x - e$, где $x \in N$. Так как T — унитреугольное представление группы N, то $L^n \subseteq K$. Действительно,

$$T((x_1 - e)(x_2 - e) \ldots (x_n - e)) =$$
$$= T(x_1 - e) \cdot T(x_2 - e) \ldots T(x_n - e) = 0$$

ввиду того, что $T(x_i - e)$ — треугольные матрицы с нулевой диагональю. Но тогда идеал $(K + L)^n = \sum_{i=0}^{n-1} K^{n-i}L^i + L^n \subseteq K$. Более того, если J — совокупность всех элементов $x \in Z[N]$, некоторое кратное kx которых лежит в $(K + L)^n$, то J — идеал и $J \subseteq K$, так как аддитивная группа кольца $Z[N]/K$ — группа без кручения.

Кроме того, идеал $(K+L)^n$, а следовательно, и J, инвариантен относительно автоморфизма $\tilde{g}$, определяемого равенством

$$\tilde{g}\left(\sum k_i x_i\right) = \sum k_i x_i',$$

где $x_i' = g^{-1}x_i g$, x_i, $x_i' \in N$, так как при $x \in N$

$$\tilde{g}(x) = g^{-1}xg = x + g^{-1}xg - x = x + (g^{-1}xgx^{-1} - e)x = \\ = x + (x'x^{-1} - e)x,$$

т. е. $\tilde{g}(x) \equiv x \pmod{L}$, откуда $\tilde{g}(K+L) \subseteq K+L$, а тогда и $\tilde{g}(K+L)^n \subseteq (K+L)^n$.

Покажем теперь, что аддитивная группа кольца $Z[N]/J$ конечнопорождена. Для этого заметим, что любой элемент $x \in N$ алгебраичен над J, т. е. порождает конечнопорожденное подкольцо в $Z[N]/J$. Действительно, поскольку $(x-e)^n \in (K+L)^n$, x^n есть линейная комбинация (по модулю $(K+L)^n$) элементов $e, x, \ldots, x^{n-1}$. Отсюда, если $h_1, \ldots, h_k$ — элементы из N, являющиеся прообразами образующих в N факторов верхнего центрального ряда N, можно заключить, что любой элемент $Z[N]$ сравним (по модулю J) с целочисленной линейной комбинацией элементов $h_1^{s_1} h_2^{s_2} \ldots h_k^{s_k}$, где $1-n \leqslant s_i \leqslant n-1$. Но таких элементов лишь конечное число, что и показывает конечнопорожденность аддитивной группы кольца $Z[N]/J$.

Теперь можно представить N правыми сдвигами кольца $Z[N]/J$:

$$D(x)(y+J) = yx + J,$$

где $x \in N$, $y \in Z[N]$. Очевидно, что это представление точно и унитреугольно.

Кроме того, отметим, что $\tilde{g}$ также есть линейное преобразование $Z[N]/J$. Теперь искомое представление D_0 группы G строится следующим образом:

$$D_0(N) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & D \end{array}\right), \qquad D_0(G) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \tilde{g} \end{array}\right).$$

Непосредственная проверка показывает, что D_0 — действительно точное представление G и что оно унитреугольно в некоторой базе $Z[N]/J$. #

§ 5. О многообразиях групп

При изложении результатов следуем Смирнову [5].

1°. Через $V(\mathfrak{B}, A)$ обозначаем вербальную подгруппу, определяемую многообразием $\mathfrak{B}$ в группе A. Рассматриваются многообразия групп, содержащие неединичную группу.

Теорема 1. (Смирнов [5].) *Если фактор-группа F/A свободной группы F по некоторой инвариантной подгруппе A обладает нормальной системой Σ с факторами из произвольного многообразия групп $\mathfrak{B}$, то группа $F/V(\mathfrak{B}, A)$ обладает нормальной системой $\tilde{\Sigma}$, все факторы которой являются подгруппами свободных $\mathfrak{B}$-групп.*

Доказательство. Пусть дано некоторое многообразие групп $\mathfrak{B}$. Нормальную систему подгрупп произвольной группы G, все факторы которой принадлежат многообразию $\mathfrak{B}$, будем называть в дальнейшем кратко $\mathfrak{B}$-системой.

Если нормальная система $\Sigma = \{A_\alpha\}$ группы G содержит нормальную подгруппу A этой группы, то подсистему Δ системы Σ, состоящую из всех подгрупп A_α, содержащих A (включая и A), условимся называть *нормальной системой группы G относительно подгруппы A*. Фактор-группы подгрупп из Δ по нормальной подгруппе A образуют, очевидно, нормальную систему группы G/A.

Пусть группа G обладает относительно некоторой нормальной подгруппы A нормальной системой

$$\Sigma = \{G_\alpha\} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma,\ G_1 = G, G_\gamma = A).$$

Множество индексов $I = \{\alpha\}$ будем предполагать упорядоченным так, что если $\alpha < \beta$, то $G_\alpha \supset G_\beta$. Положим

$$V_0 = G,\ V_\alpha = V(\mathfrak{B}, G_\alpha)\ (\alpha \in I),\ \Sigma' = \{V_\alpha\}.$$

Укажем некоторые свойства системы Σ':

1) Система Σ' содержит группу G и подгруппу $V(\mathfrak{B}, A)$. Действительно, $V_0 = G$, $V_\gamma = V(\mathfrak{B}, A)$.

2) Если $\alpha < \beta$, то $V_\alpha \supseteq V_\beta$, т. е. система Σ' упорядочена по теоретико-множественному включению.

В самом деле, если $1 \leqslant \alpha < \beta$, то $G_\alpha \supset G_\beta$, откуда $V_\alpha \supseteq V_\beta$.

3) Система Σ' содержит объединение подгрупп любой своей подсистемы.

Рассмотрим произвольную подсистему Δ' системы Σ'. Если $V_0 \in \Delta'$, то объединение всех подгрупп из Δ', равное V_0, принадлежит Δ'.

Пусть $V_0 \overline{\in} \Delta'$. Тогда для каждой подгруппы V_α из Δ' существует в Σ хотя бы одна подгруппа, например G_α, вербальная подгруппа которой (относительно $\mathfrak{B}$) равна V_α. Множество всех подгрупп $G_\alpha \in \Sigma$, для которых $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \in \Delta'$, обозначим через Δ, а их объединение — через H. Так как система Σ является полной по условию, то $H \in \Sigma$, откуда $V(\mathfrak{B}, H) \in \Sigma'$. Покажем, что $V(\mathfrak{B}, H) = \bigcup V_\alpha$, $V_\alpha \in \Sigma'$.

Действительно, пусть K — объединение всех подгрупп V_α из множества Δ'. Если $V_\alpha \in \Delta'$, то $G_\alpha \subseteq H$, откуда $V_\alpha = V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \subseteq V(\mathfrak{B}, H)$. Следовательно, $K \subseteq V(\mathfrak{B}, H)$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим свободную группу W, свободно порожденную счетным множеством неизвестных $x_1, x_2, \ldots$ Каждый элемент h из $V(\mathfrak{B}, H)$ можно записать в виде произведения конечного числа элементов вида $v(a_1, \ldots, a_m)$, где $v(x_1, \ldots, x_m) \in V(\mathfrak{B}, W)$, а все $a_i \in H$. В этой записи участвует лишь конечное число элементов из H, и поэтому все они принадлежат некоторой подгруппе G_α из Δ, а $h \in V(\mathfrak{B}, G_\alpha)$. По определению множества Δ имеем $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \in \Delta'$, откуда $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \subseteq K$. Следовательно, $h \in K$ и включение $V(\mathfrak{B}, H) \subseteq K$ доказано. Свойство 3) доказано.

Присоединим к системе Σ' пересечения подгрупп первых классов всех дедекиндовых сечений в этой системе. Полученную систему подгрупп группы G обозначим через Σ^*. Система Σ^* останется, очевидно, упорядоченной, но будет уже полной.

Пусть

$$F(\mathfrak{B}, \Sigma) = \{G_\alpha / V_\alpha \mid G_\alpha \in \Sigma\}$$

— множество фактор-групп по вербальным подгруппам $V(\mathfrak{B}, G_\alpha)$ групп G_α, составляющих систему Σ. Ясно, что $F(\mathfrak{B}, \Sigma) \subseteq \mathfrak{B}$.

4) Если все факторы нормальной системы Σ группы G принадлежат заданному многообразию групп $\mathfrak{B}$, то для всякого скачка $B \supset C$ в системе Σ^* меньшая подгруппа C является нормальной подгруппой в большей подгруппе

B, а фактор-группа B/C содержится хотя бы в одной из групп множества $F(\mathfrak{B}, C)$.

Каждый скачок в полной системе подгрупп Σ^* может быть произведен некоторым элементом группы G. Пусть скачок $B \supset C$ произведен элементом $g \in G$, т. е. B есть пересечение всех подгрупп из Σ^*, содержащих элемент g, а C — объединение подгрупп из Σ^*, не содержащих элемента g. Покажем, что $C \in \Sigma'$.

Допустим, что $C \overline{\in} \Sigma'$. По определению системы Σ^* подгруппа C должна быть тогда пересечением первого класса некоторого дедекиндова сечения D в системе Σ'. Обозначим этот класс через D_1. Следовательно, можно записать, что

$$C = \bigcap V_\alpha \qquad (V_\alpha \in D_1).$$

Так как $g \overline{\in} C$, то в классе D_1 найдется подгруппа V_α такая, что $g \overline{\in} V_\alpha$, $V_\alpha \supset C$, $V_\alpha \neq C$. С другой стороны, C есть объединение подгрупп из Σ^*, не содержащих элемента g, и потому $C \supseteq V_\alpha$. Мы получили противоречие, которое и доказывает, что $C \in \Sigma'$.

Если $B \in \Sigma'$, то обозначим через $\hat{\mathfrak{B}}$ множество всех групп G_α, для которых $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) = B$. Если это множество пусто, то $B = V_0 = G$ и для всякой подгруппы G_α из Σ имеем $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \neq B$, в частности, $V(\mathfrak{B}, G_1) = V(\mathfrak{B}, G) \neq B$. Таким образом, при $\hat{\mathfrak{B}}$ пустом имеем $B = G \supset C = V(\mathfrak{B}, G)$, и утверждение 4) в этом случае очевидно.

Пусть множество $\hat{\mathfrak{B}}$ не пусто. Ввиду полноты система Σ содержит пересечение всех подгрупп из $\hat{\mathfrak{B}}$, которое мы обозначим через G_μ. Система Σ содержит также объединение всех подгрупп $G_\alpha \in \Sigma$, для которых $V_\alpha = C$. Обозначим это объединение через G_ν и покажем, что $G_\mu \supseteq G_\nu$.

Достаточно показать, что если $G_\alpha \in \hat{\mathfrak{B}}$, то $G_\alpha \supseteq G_\nu$. Допустим, что существует подгруппа $G_\alpha \in \hat{\mathfrak{B}}$, которая не содержит G_ν. Так как система Σ упорядочена по включению, то $G_\alpha \subset G_\nu$. Из определения группы G_ν следует, что $V(\mathfrak{B}, G_\nu) = C$. Поэтому, переходя к вербальным подгруппам, имеем $B = V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \subseteq C$, что противоречит условию. Включение $G_\mu \supseteq G_\nu$ доказано.

Возьмем произвольную подгруппу G_α из системы $\hat{\mathfrak{B}}$. Так как $G_\alpha \supseteq G_\mu \supseteq G_\nu$, то, переходя опять к вербальным подгруппам, получим $B \supseteq V_\mu \supseteq C$. Подгруппы $B \supset C$ образуют по условию скачок в системе Σ^*. Поэтому либо $V_\mu = B$, либо $V_\mu = C$.

Пусть $V_\mu = B$. Тогда $V_\mu \neq C$ и $G_\mu \neq G_\nu$. Из построения подгрупп G_μ, G_ν видно, что в этом случае они составляют в системе Σ скачок: $G_\mu \supset G_\nu$. Поэтому G_ν является нормальной подгруппой в G_μ, а фактор-группа G_μ/G_ν принадлежит многообразию $\mathfrak{B}$. Мы приходим к следующим включениям:

$$G_\mu \supset G_\nu \supseteq V_\mu = B \supset C = V_\nu.$$

Отсюда непосредственно видно, что C является нормальной подгруппой в B и что B/C содержится в группе G_ν/V_ν из множества $F(\mathfrak{B}, \Sigma)$.

Пусть $V_\mu = C$. Так как G_μ — пересечение тех подгрупп $G_\alpha \in \Sigma$, для которых $V_\alpha = B$, то $G_\mu \supseteq B \supset C = V_\mu$. Следовательно, опять C является нормальной подгруппой в B, а B/C есть подгруппа группы G_μ/V_μ.

Если же $B \overline{\in} \Sigma'$, то в этом случае B есть пересечение подгрупп первого класса некоторого дедекиндова сечения D в системе Σ'. Обозначим этот класс через D_1. Ясно, что класс D_1 не может состоять лишь из подгруппы V_0, так как иначе подгруппа B принадлежала бы системе Σ'. Поэтому можно считать, что $B = \bigcap V_\alpha$ $(V_\alpha \in D_1,\ \alpha \geqslant 1)$. Так как система Σ полная, то она содержит пересечение всех подгрупп $G_\alpha \in \Sigma$, для которых $V(\mathfrak{B}, G_\alpha) \in D_1$. Обозначим это пересечение через G_μ. Через G_ν обозначим снова объединение групп из Σ, вербальные подгруппы которых (относительно $\mathfrak{B}$) равны C. Как и в предыдущем случае, имеет место включение $G_\mu \supseteq G_\nu$.

Для доказательства этого включения достаточно показать, что каждая подгруппа $G_\alpha \in \Sigma$, для которой $V_\alpha \in D_1$, содержит G_ν. Допустим, что среди этих подгрупп существует такая подгруппа G_α, что $G_\alpha \subset G_\nu$. Тогда $B \subset V_\alpha \subseteq \subseteq V_\nu = C$, что противоречит условию.

Итак, $G_\mu \supseteq G_\nu$, откуда $V_\mu \supseteq V_\nu = C$. Получаем $G_\mu \supseteq \supseteq B \supseteq V_\mu \supseteq C$. Но так как $B \supset C$ — скачок в Σ^* и $B \overline{\in} \overline{\in} \Sigma'$, то $V_\mu = C$. Таким образом, имеем $G_\mu \supseteq B \supset C \supseteq V_\mu$, откуда снова заключаем, что C — нормальная подгруппа в B и что B/C содержится в G_μ/V_μ. Свойство 4) доказано.

5) Если группа G обладает относительно некоторой нормальной подгруппы A нормальной $\mathfrak{B}$-системой Σ, то она обладает также нормальной системой $\widetilde{\Sigma}$ относительно $V(\mathfrak{B}, A)$, все факторы которой являются подгруппами групп из множества $F(\mathfrak{B}, \Sigma)$.

Действительно, ввиду полноты системы Σ^* каждая совокупность равных между собой подгрупп из этой системы обладает как первой, так и последней подгруппой. Заменяя каждую такую совокупность одной из ее подгрупп, мы получим нормальную систему $\widetilde{\Sigma}$ группы G относительно $V(\mathfrak{B}, A)$ с требуемым свойством.

Для завершения доказательства теоремы 1 нам остается заметить лишь, что если G — свободная группа, то множество $F(B, \Sigma)$, определенное выше, будет состоять из свободных $\mathfrak{B}$-групп. #

Т е о р е м а 2. (С м и р н о в [5].) *Пусть $\mathfrak{B}$ — многообразие групп. Если $\Sigma = \{F_\alpha\}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma,\ F_1 = F,\ F_\gamma = A)$ — нормальная $\mathfrak{B}$-система некоммутативной свободной группы F относительно некоторой неединичной инвариантной подгруппы A этой группы, то система $\Sigma' = \{V_\alpha\}$ $(V_0 = F,\ V_\alpha = V(\mathfrak{B}, F_\alpha),\ 1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ не содержит повторений. Таким образом, нормальную систему группы F относительно $V(\mathfrak{B}, A)$, факторы которой были бы подгруппами свободных $\mathfrak{B}$-групп, можно получить пополнением системы Σ' пересечениями всех подгрупп каждой ее подсистемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{B}$ — неединичное многообразие групп. Пусть также в некоммутативной свободной группе F задана нормальная $\mathfrak{B}$-система $\Sigma = \{F_\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$, относительно нормальной подгруппы $A \neq E$. Множество индексов α предполагаем упорядоченным так, что если $\alpha < \beta$, то $F_\alpha \supset F_\beta$. Поэтому $F_1 = F$, $F_\gamma = A$. Покажем, что в системе Σ' нет повторений, т. е. что $V_\alpha \neq V_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

Будем рассуждать от противного; предположим, что для некоторых α, β, $\alpha \neq \beta$, имеет место равенство $V_\alpha = V_\beta$. Так как $V_0 = F$, $F_1 = V(\mathfrak{B}, F)$ и $\mathfrak{B}$ неединично, то $V_0 \neq V$. Следовательно, α и β отличны от нуля. Пусть $1 \leqslant \alpha < \beta$. Тогда $F_\alpha \supset F_\beta$, $F_\alpha \neq F_\beta$ (по определению нормальной системы). Возьмем произвольный элемент x из разности $F_\alpha \setminus F_\beta$. Он определяет в системе Σ скачок $F_\mu \supset F_\nu$, где F_μ — пересечение подгрупп этой системы, содержащих элемент x, а F_ν — объединение подгрупп из Σ, не содержащих элемента x. Очевидно, имеем

$$F_\alpha \supseteq F_\mu \supset F_\nu \supseteq F_\beta, \qquad V_\mu = V_\nu. \tag{*}$$

Так как нормальная подгруппа $A \neq E$ некоммутативной свободной группы F некоммутативна и $F_\mu \supseteq A$, то свободная группа F_μ также некоммутативна. В то же время соотношение (*) показывает, что F_μ содержит нормальную подгруппу F_ν такую, что

$$V(\mathfrak{B}, F_\mu) = V_\mu = V_\nu = V(\mathfrak{B}, F_\nu).$$

Так как $F_\mu \neq F_\nu$, то это противоречит известному свойству многообразия $\mathfrak{B}$ (см. Х. Нейман [1]). #

БИБЛИОГРАФИЯ

Аллинг (Alling N. L.)

1. On ordered divisible groups, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 498—514.
2. A characterisation of abelian η_α-groups in terms of their natural valuation, Proc. Nat. Acad. Sci. 47 (1961), 711—713.
3. On the existence of real-closed filds that are η_α-sets of power $\aleph_\alpha$, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 341—352.

Андрус, Бастон (Andrus J. P., Buston A. T.)

1. On ordered groups, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 619—628.
2. Ideals in ordered groups, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 265—269.

Артин, Шрейер (Artin E., Schreier O.)

1. Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5 (1926), 85—99.

Банашевский (Banaschewski B.)

1. Totalgeordnete Moduln, Arch. Math. 7 (1956), 430—440.
2. Über die Vervollständigung geordneter Gruppen, Math. Nachr. 16 (1957), 51—71.

Баттсворт (Buttsworth R. N.)

1. A family of groups with a countable infinity of full orders., Bull. Austr. Math. Soc. 4 (1971), 97—104.

Баумслаг (Baumslag G.)

1. Wreath products and extensions, Math. Z. 81 (1963), 286—299.

Бауэр (Bauer H.)

1. Geordnete Gruppen mit Zerlegungsligenschaft, S.-B. Bauer Acad. Wiss. Math. Nat. Klasse, 1958, 25—36.

Беран (Beran L.)

1. A note on Chehata's groups, Com. math., univ. Carolinal, Praga, 7, № 1 (1966), 117—120.

Берджесс (Burgess D. C.)

1. Generalized intervals in partially ordered groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. 55 (1959), 165—171.

Биркгоф Г.

1. Теория структур, ИЛ, 1952.

Бовди А. А.

1. О скрещенных произведениях полугруппы и кольца, ДАН СССР 137 (1961), 1267—1269.

Бринголе, Рибейро (Bringal D., Ribeiro H.)

1. On the universal equivalence for ordered abelian groups, Алгебра и логика 4, № 2 (1965), 51—55.

Бриттон, Шеппе рд (Britton J. L., Shepperd J.A.H.)
1. Almost ordered groups, Proc. Lond. Math. Soc. 1 (1951), 188—199.
Бузулини (Busulini B.)
1. Sui gruppi non regolarmente ordinati, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 33 (1963), 285—296.
Бурбаки Н.
1. Алгебра, гл. VI. Упорядоченные группы, «Наука», 1965.
Бэр (Baer R.)
1. Zur Topologie der Gruppen, J. reine and angew. Math. 160 (1929), 208—226.
2. Representations of groups as quotents groups II, Minimal central chains of a group, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 348—389.
Вайда (Vaida D.)
1. Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, Rev. Roum. Math. pures appl. 9, № 10 (1964), 929—948.
Ван-дер-Варден (van der Waerden B. L.)
1. Современная алгебра, Гостехиздат, 1947.
2. Moderne Algebra, V. I, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1950.
Ван Ши-цзян (Wang, Sh.-Ch.)
1. Representation of ordered Abelian groups and ordered rings of finite degree, Acta Math. Sinica 5 (1955), 425—432.
Виноградов А. А.
1. О свободном произведении упорядоченных групп, Матем. сб. 25 (1949), 163—168.
2. Частично упорядоченные локально нильпотентные группы, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 4 (1953), 3—18.
3. К теории частично упорядоченных нильпотентных групп, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 5 (1954), 61—64.
4. Замечания по теории частично упорядоченных групп и полугрупп, Алгебра и логика 1, № 2 (1962), 22—29.
5. Метабелевы частично упорядоченные группы, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 34 (1963), 20—26.
6. Упорядоченные алгебраические системы, Сб. Итоги науки. Алгебра. 1965, М., 1967; Алгебра. 1966, М., 1968.
Вулих Б. З.
1. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.
Габович Е. Я.
1. Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп, Уч. зап. Тартусск. ун-та 102 (1961), 289—293.
2. Частично упорядоченные Ω-группы, Уч. зап. Тартусск. ун-та 102 (1961), 294—300.
3. Об архимедовски упорядоченных Ω-группах, Тр. по матем. и механике Тартусск. ун-та 3 (1962), 19—22.
Гёльдер (Hölder O.)
1. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl. 53 (1901), 1—64.

Гильберт Д.
1. Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.
Горчаков Ю. М.
1. Пример G-периодической группы без кручения, Алгебра и логика 6, № 3 (1967), 5—7.
2. О центральных рядах свободных групп многообразий, Алгебра и логика 6, № 3 (1967), 13—24.
3. Мультинильпотентные группы, Алгебра и логика 6, № 3 (1967), 25—30.
4. Коммутаторные подгруппы, Сиб. матем. ж. 10 (1969), 1023—1033.
Грев (Greve W.)
1. Partial betweeness groups, Math. Z. 78 (1962), 305—318.
Грейветт (Gravett K.A.H.)
1. Ordered Abelian groups, Quart. J. Math. Oxford 7 (1956), 57—63.
Грюнберг (Gruenberg K. W.)
1. Residual properties of infinite soluble groups, Proc. Lond. Math. Soc. 7 (1957), 29—62.
Гуревич Ю. Ш.
1. Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика 3, № 1 (1964), 5—39.
Гуревич Ю. Ш., Кокорин А. И.
1. Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика 2, № 1 (1963), 37—39.
Данвуди (Dunwoody M. J.)
1. On verbal subgroups of free groups, Arch. Math. 16 (1965), 153—157.
Длаб (Dlab V.)
1. On a familly of simple ordered groups, J. Australian Math. Soc., VIII, 3 (1968), 591—608.
Дьедонне (Dieudonné J.)
1. Sur les corps ordonnables, Bol. Soc. Math. San Paolo 1 (1946), 69—75; 2 (1947), 35.
Дюбрей-Жакотэн, Лесьер, Круазо (Dubreil-Jacotin M. L., Lessieur L., Croisot R.)
1. Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, 1953.
Егер (Jaeger A.)
1. Adjunction of subfield closures to ordered division rings, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 35—39.
Ершов Ю. Л.
1. О числе линейных порядков на поле, Матем. заметки 6, № 2 (1969), 201—211.
Жаффар (Jaffard P.)
1. Les systèmes d'idéaux, Paris, 1960.
Житомирский В. Г.
1. Треугольные группы автоморфизмов квазиоператорных групп, ДАН СССР 144 (1962), 487—489.
Зайцева М. И.
1. О совокупности упорядочений абелевой группы, УМН 8, № 1 (1953), 135—137.

2. Правоупорядоченные группы, Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-та 6 (1958) 205—226.

Закон (Zakon E.)
1. Generalized archimedian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961), 21—40.

Заманский (Zamansky M.)
1. Groupes de Riesz, C. R. Acad. Sci., Paris, 248 (1959), 2933—2934.

Ивасава (Iwasawa K.)
1. On linearly ordered groups, J. Math. Soc. Japan 1 (1948), 1—9.

Исивата (Isiwata T.)
1. Non-diskrete linearly ordered groups, Ködai Math. Semin. Repts, 1950, 84—88.

Исэки (Iséki K.)
1. On simply ordered groups, Portug. Math. 10 (1951), 85—88.

Калужнин, Краснер (Kaloujnine L., Krasner M.)
1. Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes, Acta Sci. Math., Szeged, 13 (1950), 208—230; 14 (1951), 39—66.

Кальюлайд У.
1. О группах с отношением промежуточности, УМН 8, № 6 (1962), 226.

Каргаполов М. И.
1. Вполне доупорядочиваемые группы, Алгебра и логика 1, № 2 (1962), 16—21.
2. Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам, Алгебра и логика 2, № 2 (1963), 31—46.
3. Доупорядочиваемые группы, Алгебра и логика 2, № 6 (1963), 5—14.
4. Об универсальных группах, Алгебра и логика 9, № 4 (1970), 428—435.

Каргаполов М. И., Кокорин А. И., Копытов В. М.
1. К теории упорядочиваемых групп, Алгебра и логика 4, № 6 (1965), 21—27.

Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.
1. Основы теории групп, «Наука», 1972.

Картан (Cartan H.)
1. Un théorème sur les groupes ordonnés, Bull. Sci. Math. 63 (1939), 201—205.

Кацман А. Д.
1. О некоторых свойствах полугруппы, инвариантной в группе, УМН 11, № 2 (1956), 179—183.
2. К вопросу об образующих и необразующих элементах полугруппы, инвариантной в группе, Уч. зап. Уральск. ун-та 19 (1956), 43—50.

Клиффорд (Clifford A. H.)
1. Partially ordered Abelian groups, Ann. Math. 41 (1940), 465—473.
2. A noncommutative ordinally simple linearly ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 902—903.

3. A class of partially ordered Abelian groups related to by Hahn's characterizing subgroups, Amer. J. Math. 74 (1952), 347—356.
4. Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 860—863.
5. Partially ordered groups of the second and third kinds, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 219—225.

Кокорин А. И.
1. О классе структурно упорядоченных групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 3, № 3 (1962), 37—38.
2. О доупорядочиваемых группах, ДАН СССР 151 (1963), 31—33.
3. К теории вполне доупорядочиваемых групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 4, № 3 (1963), 25—29.
4. К теории доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика 2, № 6 (1963), 15—20.
5. Доупорядочиваемость прямого произведения доупорядочиваемых групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 4, № 3 (1963), 95—96.
6. Об упорядоченных группах, УМН 19, № 2 (1964), 215.
7. Г-доупорядочиваемые и относительно выпуклые подгруппы упорядочиваемых групп, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 713—717.
8. Пересечение и объединение относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемых групп, Алгебра и логика 7, № 3 (1968), 48—50.
9. Формализация теории упорядоченных групп, VIII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, Рига, 1967.
10. Упорядочиваемые группы, Новосибирск, НГУ (ротапринт), 1966.

Кокорин А. И., Копытов В. М.
1. О некоторых классах упорядоченных групп, Алгебра и логика 1, № 3 (1962), 21—23.
2. Относительная выпуклость обобщенных центров упорядочиваемых групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 5, № 1 (1965), 49—53.
3. Относительно выпуклые подгруппы упорядочиваемых групп, Сиб. матем. ж. 9 (1968), 833—839.

Кон (Cohn P. M.)
1. Groups of order automorphisms of ordered sets, Mathematika 4 (1957), 41—50.
2. Универсальная алгебра, «Мир», 1968.

Конрад (Conrad P.)
1. Embedding theorems for Abelian groups with valuations, Amer. J. Math. 75 (1953), 1—29.
2. Extensions of ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 516—528.
3. Methods of ordering a vector space, J. Indian Math. Soc. 22 (1958), 1—25.
4. On ordered vector spaces, J. Indian Math. Soc. 22 (1958), 27—32.
5. The group of order preserving automorphisms of an ordered Abelian group, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 383—389.

6. A note on valued linear spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 646—647.
7. A correction and improvement of a theorem on ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 182—184.
8. Non-Abelian ordered groups, Pacif. J. Math. 9 (1959), 25—41.
9. Right-ordered groups, Michigan Math. J. 6 (1959), 267—275.
10. Regularly ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 726—731.

Конрад, Харви, Холланд (Conrad P., Harvey J., Holland C.)
1. The Hahn embedding theorem for lattice-ordered groups, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 143—169.

Конторович П. Г.
1. К теории полугрупп в группе, ДАН СССР 48 (1953), 229—231.
2. К теории полугрупп в группе, I, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, № 8 (1954), 35—43.
3. К теории полугрупп в группе, II. Уч. зап. Уральск. ун-та 19 (мат.) (1956), 3—20.
4. Вопросы линейного и структурного упорядочения групп, Spisy přirodoved. fak. univ. Brně, № 9 (1964), 472—473.

Конторович П. Г., Кокорин А. И.
1. Об одном типе частично упорядоченных групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 3, № 3 (1962), 39—44.

Копытов В. М.
1. О пополнении центра упорядоченной группы, Матем. зап. Уральск. ун-та, 4, № 3 (1963), 20—24.
2. Некоторые вопросы теории упорядоченных групп, УМН 20, № 5 (1965), 305.
3. Некоторые виды произведений упорядочиваемых групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 5, № 3 (1966), 75—81.
4. К теории доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика 5, № 6 (1966), 27—31.
5. Упорядочиваемые группы с нильпотентным коммутантом, Матем. зап. Уральск. ун-та 7, № 3 (1970), 88—91.

Копытов В. М., Мамаев И. И.
1. Абсолютная выпуклость некоторых подгрупп упорядочиваемой группы, Алгебра и логика 7, № 2 (1968), 20—26.

Коэн, Гофман (Cohen L., Goffman C.)
1. The topology of ordered Abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 310—319.

Крулль (Krull W.)
1. Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine und angew. Math. 167 (1932), 160—196.
2. Halbgeordnete Gruppen und asymptotische Grossenordnung, Arch. Math. 3 (1952), 1—7.
3. Über geordneten Gruppen von reelen Funktionen, Math. Z. 64 (1956), 10—40.
4. Über die Endomorphismen von total geordneten archimedischen abelschen Gruppen, Math. Z. 74 (1960), 81—90.

Курош А. Г.
1. Теория групп, «Наука», 1967.
2. Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.

К у т ы е в К. М.

1. К теории частично упорядоченных групп, УМН 11, № 1 (1956), 258.
2. ПС-изоморфизмы частично упорядоченных локально нильпотентных групп, УМН 11, № 2 (1956), 193—198.
3. ПС-изоморфизм упорядоченной группы, ДАН СССР 135 (1960), 1326—1329.
4. О ПС-изоморфизме некоторых классов R-групп, Изв. АН СССР, сер. матем., 27 (1963), 701—722.

Л а в и (L a v i s A.)

1. Groupes topologiques ordonnés, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 31 (1962), 497—503.
2. Sur les quotients totalement ordonnés d'un groupe linéairement ordonné, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 32 (1963), 204—208.

Л е в и (L e v i F. W.)

1. Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen, Rend. Circolo mat. Palermo 35 (1913), 225—236.
2. Ordered groups, Proc. Indian Acad. Sci., A, 16 (1942), 256—263.
3. Contributions to the theory of ordered groups, Proc. Indian Acad. Sci., A, 17 (1943), 199—201.

Л и в ч а к Я. Б.

1. Об упорядочиваемых группах, Уч. зап. Уральск. ун-та 23 (1959), 11—12.

Л и н д о н Р.

1. Заметки по логике, «Мир», 1968.

Л о р е н ц е н (L o r e n z e n P.)

1. Abstracte Begründung der multiplicativen Idealtheorie, Math. Z. 45 (1939), 533—553.
2. Über halbgeordnete Gruppen, Arch. Math. 2 (1949), 66—70.
3. Über halbgeordnete Gruppen, Math. Z. 52 (1950), 483—526.

Л о с ь (L ó s J.)

1. On the existence of linear order in a group, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 2 (1954), 21—23.

Л у н с т р а (L o o n s t r a F.)

1. Ordered groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 49 (1946), 41—46.
2. The classes of ordered groups, Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge, 1950, № 1.
3. The classes of partially ordered groups, Compositio math. 9 (1951), 130—140.
4. Discrete groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 54 (1951), 162—168.
5. L'extension du groupe ordonné des entiers rationnels par le même groupe, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 58 (1955), 41—49.

М а л ь ц е в А. И.

1. О включении групповых алгебр в алгебры с делением, ДАН СССР, 60 (1948), 1499—1501.
2. Об одном классе однородных пространств, Изв. АН СССР, сер. матем., 13 (1949), 9—32.
3. Нильпотентные группы без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем., 13 (1949), 201—212.

4. Об упорядоченных группах, Изв. АН СССР, сер. матем., 13 (1949), 473—482.
5. О доупорядочении групп, Тр. Матем. ин-та АН СССР 38 (1951), 173—175.
6. Замечание о частично упорядоченных группах, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та 10 (1956), 3—5.
7. О частично упорядоченных нильпотентных группах, Алгебра и логика 1, № 2 (1962), 5—9.
8. Алгебраические системы, «Наука», 1970.

Мацусита (Matsushita S.)
1. On the foundation of orders in groups, J. Inst. Politechn. Osaka City Univ., A, 2 (1951), 19—22.
2. Sur la puissance des ordres dans un groupe libre, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 56 (1953), 15—16.

Мичиура (Michiura T.)
1. Sur les groupes semi-ordonnés, C. R. Acad. Sci., Paris, 231 (1950), 1403—1404.
2. On simply ordered groups, Portug. Math. 10 (1951), 89—95.
3. Remark on a representation of simply ordered groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 54 (1951), 386—387.
4. Commutativity in simply ordered groups, J. Osaka Inst. Sci. Techn. 3 (1951), 39—41.
5. Sur les groupes ordonnés. II—III, C. R. Acad. Sci., Paris, 234 (1952), 1422—1423, 1521—1522.
6. On partially ordered groups without proper convex subgroups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, 56 (1953), 231—232.

Монна (Monna A. F.)
1. On ordered groupes and linear spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Naturkunde 63 (1944), 178—182.

Мостовский, Эренфойхт (Mostowski A., Ehrenfeucht A.)
1. Models of axiomatic theories admitting automorphisms, Fundam. math. 43 (1956), 50—68.

Муфанг (Moufang R.)
1. Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper, J. reine und angew. Math. 176 (1937), 203—223.

Нейман Б. (Neumann B. H.)
1. On ordered groups, Amer. J. Math. 71 (1949), 1—18.
2. On ordered division rings, Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), 202—252.
3. An embedding theorem for algebraic systems, Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1954), 138—153.
4. Embedding theorems for ordered groups, J. Lond. Math. Soc. 35 (1960), 503—512.

Нейман, Шепперд (Neumann B. H., Shepperd J. A. H.)
1. Finite extensions of fully ordered groups, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 239 (1957), 320—327.

Нейман Х.
1. Многообразия групп, «Мир», 1969.

Огасавара (Ogasawara T.)
1. Commutativity of Archimedean semiordered groups, J. Sci. Hiroshima Univ., A, 12 (1948), 249—254.
Омаров А. И.
1. О фильтрованных произведениях моделей, Алгебра и логика 6, № 3 (1967), 77—90.
Ониси (Ohnishi M.)
1. On linearization of ordered groups, Osaka Math. J. 2 (1950), 161—164.
2. Linear-order on a group, Osaka Math. J. 4 (1952), 17—18.
Пикерт (Pickert G.)
1. Einfürung in die höher Algebra, Göttingen, 1951.
Поддерюгин В. Д.
1. Условия упорядочиваемости группы, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, (1957), 199—208.
Плоткин Б. И.
1. К теории разрешимых групп без кручения, ДАН СССР 84 (1952), 665—668.
2. Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966.
Раутенберг (Rautenberg W.)
1. Beweis des Kommutativgesetzes in elementar-archimedisch geordneten Gruppen, J. Mathem. Logik und Grund. Math. 11, № 1 (1965), 1—4.
Редеи (Rédei L.)
1. Algebra I, Budapest, 1954, Leipzig, 1959.
Ри (Ree R.)
1. On ordered, finitelly generated, solvable groups, Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. III, 48 (1954), 39—42.
Рибенбойм (Ribenboim P.)
1. Conjonction d'ordres dans les groupes abéliens ordonnés, Annals. Acad. Brasil. ciêns. 29 (1957), 201—224.
2. Sur les groupes totalement ordonnés et l'arithmétique des anneaux de valuation, Summa brasil. math. 4 (1958), 1—64.
3. Théorie des groupes ordonnés, Bahia Blanka, 1964.
4. On the existence of totally ordered Abelian groups which are η-sets, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astronomi et phys., 13, № 8 (1965), 545—548.
Ригер (Rieger L. S.)
1. On the ordered and cyclically ordered groups. I—III, Věstnik Král., Čerké Spol. Nauk, 1946, № 6, 1—31; 1947, № 1, 1—33; 1948, № 1, 1—26.
Рисс (Riesz F.)
1. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie génèrale des opérations linéaires, Ann. Math. 41 (1940), 174—2)6.
Робинсон А.
1. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, «Наука», 1967.
Робинсон, Закон (Robinson A., Zakon E.)
1. Elementary properties of ordered Abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 222—236.

Санкаран (Sankaran N.)
1. Classification of totally ordered Abelian groups, J. Indian Math. Soc. 29 (1965), 9—29.

Санкаран, Венкатараман (Sankaran N., Venkataraman R.)
1. A generalization of the ordered group of integers, Math. Z. 79 (1962), 21—31.

Сверчковский (Świerczkowski S.)
1. On cyclically ordered groups, Fundam. Math. 47 (1959), 161—166.

Сексенбаев К.
1. К теории полициклических групп, Алгебра и логика 4, № 3 (1965), 78—84.

Селе (Szele T.)
1. On ordered skew fields, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 410—413.

Серр (Serre J.-P.)
1. Extensions de corps ordonnés, C. R. Acad. Sci., Paris, 229 (1949), 576—577.

Сибирский К. С., Стахи А. М.
1. К вопросу о частичной упорядочиваемости групп, Сб. «Исследов. по алгебре и матем. анализу», Кишинев, 1965, 73—78.

Смирнов Д. М.
1. Инфраинвариантные подгруппы, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 4 (1953), 92—96.
2. О приведенно свободных мультиоператорных группах, ДАН СССР 150 (1963), 44—47.
3. Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах, ДАН СССР 155 (1964), 535—537.
4. Упорядоченные мультиоператорные группы, Сиб. матем. ж. 4 (1965), 433—458.
5. Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах, Матем. сб. 67 (1965), 366—383.
6. Группы автоморфизмов групповых колец правоупорядочиваемых групп, Алгебра и логика 4, №1 (1965), 31—46.
7. Правоупорядоченные группы, Алгебра и логика, 5, № 6 (1966), 41—59.

Смит (Smith D. B.)
1. On the number of finitelly generated O-group, Pacif. J. Math. 35 (1970), 499—502.

Стоун (Stone M. H.)
1. Pseudo-norms and partial orderings in Abelian groups, Ann. Math. 48 (1947), 851—856.

Суон (Swan R.)
1. Representations of polyciclic groups, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 573—574.

Тарский (Tarski A.)
1. Sur les groupes d'Abel ordonnés, Ann. Soc. Pol. Math. 7 (1929), 267—268.

Теллер (Teller J. R.)
1. On ordered algebraic structures, Doct. diss. Tulone Univ., 1964, «Dissert. Abstrs.» 25, № 7 (1965), 4182—4183.

Т е р е х о в А. А.
1. О вполне доупорядочиваемых группах, ДАН СССР **129** (1959), 34—36.
2. Структура локально разрешимых вполне доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика **1**, № 2 (1962), 10—15.
Т р е в и з а н (T r e v i s a n G.)
1. Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo can *n* generatori, Rend. Semin. mat. Univ. Padova **22** (1953), 143—156.
Т у л л и (T u l l y E. J.)
1. The existence of a total order on a group, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 217—219.
Т э (T e h H. H.)
1. Construction of orders in Abelian groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **57** (1961), 476—482.
У а й г о л д (W i e g o l d J.)
1. Semigroups coverings of groups, Mat. fys. cãs. **11**, № 1 (1961), 3—13; **12**, № 3 (1962), 217—223.
Ф а н-Ц ю й (F a n K.)
1. Partially ordered additive groups of continuons functions, Ann. Math. **51** (1950), 403—427.
Ф л е й ш е р (F l e i s c h e r I.)
1. Functional representation of partially ordered groups, Ann. Math. **64** (1956), 260—263.
2. A characterisation of lexicongraphically ordered η_α-sets, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50**, № 6 (1963), 1107—1108.
Ф р е н к е л ь В. И.
1. Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах, УМН **17**, № 4 (1962), 173—179.
2. Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах, ДАН СССР **152** (1963), 67—70.
Ф р и д (F r i e d E.)
1. Representation of partially ordered groups, Acta scient. math. **26** (1965), 15—18.
Ф у к с (F u c h s L.)
1. Absolutes in partially ordered groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, **52** (1949), 251—255.
2. On the extension of the partial order of groups, Amer. J. Math. **72** (1950), 191—194.
3. On partially ordered groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, **53** (1950), 828—834.
4. The extension of partially ordered groups, Acta Math. Akad. scient. Hung. **1** (1950), 118—124.
5. The Zappa extensions of partially ordered groups, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., A, **55** (1952), 363—368.
6. Note on ordered groups and rings, Fundam. Math. **46** (1958), 167—174.
7. Riesz Groups, Ann. Schola Norm. Super. Piesa, ser. III, **19**, № 1 (1965), 1—34.
8. Частично упорядоченные алгебраические системы, «Мир», 1965.

Фукс, Сонсяда (Fuchs L., Sąsiada E.)
1. Note on orderable groups, Ann. Univ. scient. Budapest, Sec. math., 7 (1964), 13—17.
Хан (Hahn H.)
1. Über die nichtarchimedischen Grössensysteme, S.-B. Acad. Wiss. Wien, 11a, 116 (1907), 601—655.
Хауснер, Уэндел (Hausner H., Wendel J. G.)
1. Ordered vector spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 977—982.
Хигман, Нейман Б., Нейман Х. (Higmenn G., Neumann B. H., Neumann H.)
1. Embeding theorems for groups, J. Lond. Math. Soc. 24 (1949), 247—254.
Хион Я. В.
1. Архимедовски упорядоченные кольца, УМН 9, № 4 (1954), 237—242.
Холл М.
1. Теория групп, ИЛ, 1962.
Холл Ф. (Hall P.)
1. Finiteness conditions for solable groups, Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1954), 419—436.
2. Wreats powers and characteristically simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. 58 (1962), 140—184.
3. On non strictly simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. 59 (1963), 531—553.
Холланд (Holland Ch.)
1. The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set, Michigan Math. J. 10 (1963), 399—408.
2. Extension of ordered groups and sequence completion, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 71—82.
3. A class of simple lattice-ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 326—329.
Цассенхауз (Zassenhaus H.)
1. Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig, Berlin, 1937.
Чехата (Chehata C. G.)
1. An algebraically simple ordered group, Proc. Lond. Math. Soc. 2 (1952), 183—197.
2. On a theorem on ordered groups, Proc. Glasgow. Math. Assoc. 4 (1958), 16—21.
3. On a relation on ordered groups, Proc. Math. and Phys. Soc., UAR, 1961 (1964), № 25, 79—82.
Чиампа (Ciampa S.)
1. Osservazioni sull'ordinabilitá dei gruppi, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Sci. fis. e mat. 18 (1964), 111—136.
Шеврин Л. Н.
1. Структурно-подполугрупповая характеристика упорядочиваемых групп, УМН 19, № 5 (1964), 157—161.
Шепперд (Shepperd J. A. H.)
1. Transitivities of betweenness and separation and the difinitions of betweenness and separation groups, J. Lond. Math. Soc. 31 (1956), 240—248.

2. Betweenness groups, J. Lond. Math. Soc. 32 (1957), 277—285.
3. Separations groups, Proc. Lond. Math. Soc. 7 (1957), 518—548.

Шик (Šik F.)

1. Erweiterungen teilweise geordneter Gruppen, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, № 410 (1960), 65—80.
2. Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen, Чехосл. матем. ж. 87 (1962), 611—621.
3. Über direkte Zerlegungen gerichteter Gruppen, Math. Nach. 25 (1963), 95—110.

Шиллинг (Schilling O. F. G.)

1. The theory of valuations, New York, 1950.

Шимбирева Е. П.

1. К теории частично упорядоченных групп, Матем. сб. 20 (1947), 145—178.
2. О прямых разложениях частично упорядоченных групп, Уч. зап. Московск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской 110, матем., в. 7 (1962), 347—350.

Шмелькин А. Л.

1. Свободные полинильпотентные группы, ДАН СССР 151 (1963), 73—75.
2. Свободные полинильпотентные группы, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 (1964), 91—122.

Штейнфельд (Steinfeld O.)

1. Über Hauptkomponenten und Primfaktorisation in halbgeordneten Halbgruppen, Spisy. přiro oved. fak. univ. Brně, 1964, № 9, 492.

Шур (Schur I.)

1. Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. reine and angew. Math. 127 (1904), 20—50.

Эверет (Everett C. J.)

1. Sequence completion of lattice moduls, Duke Math. 11 (1944), 109—119.
2. Note on a result of L. Fuchs on ordered groups, Amer. J. Math 72 (1950), 216.

Эверет, Улам (Everett C. J., Ulam S.)

1. On ordered groups, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 208—216.

Эндлер (Endler O.)

1. Über multiplikative Strukturen und endoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen, Math. Z. 77 (1961), 339—358.

Эрдёш (Erdös J.)

1. On the structure of ordered real vector spaces, Publ. Math. Debrecen 4 (1956), 334—343.

Якубик (Jakubic J.)

1. Konvexe Ketten in halbgeordneten Gruppen, Math.-Fiz. časop. 9 (1959), 236—247.

2. Прямые разложения частично упорядоченных групп, Чехосл. матем. ж. 10 (1960), 231—243; 11 (1961), 490—515.
3. Interval topology of an l-group, Colloq. Math., XI, № 1 (1963), 65—72.
4. Über halbgeordnete Gruppen mit verallgemeinerter jordansdor Zerlegung, Rev. Roum. de Math. Pures et appliq., IX, № 2 (1964), 187—190.
5. Kompakt erzeugte Verbandsgruppen, Math. Nachr. 30 (1965), 193—201.
6. Über Verbandsgruppen mit zwei Erzeugungen, Чехосл. матем. ж. 14 (1964), 444—454.
7. Лексикографические произведения частично упорядоченных группоидов, Чехосл. матем. ж. 14 (1964), 281—305.
8. Über die Intervalltopologie auf einer halbgeordneten Gruppe, Math.-Fys. časop. 15 (1965), 257—272.

Коуровская тетрадь, Нерешенные задачи теории групп, Новосибирск, 1965, 1967, 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Али Иванович Кокорин, Валерий Матвеевич Копытов

Линейно упорядоченные группы

(Серия: «Современная алгебра»)

М., 1972., 200 стр.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *С. Н. Емельянова, И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 25/IV 1972 г. Подп. к печати 20/X 1972 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 6,25. Условн. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,59. Тираж 6000 экз. Т-16826. Цена книги 69 коп. Заказ № 840

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука».
Москва, Шубинский пер., д. 10