



современная

алгебра

Ю. М. ГОРЧАКОВ

ГРУППЫ
С КОНЕЧНЫМИ
КЛАССАМИ
СОПРЯЖЕННЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ

В книге излагается один из разделов современной алгебры — группы с конечными классами сопряженных элементов. В ней осуществлен подход, появившийся в статьях С. Н. Черникова, М. И. Каргаполова, Ф. Холла конца пятидесятих годов, — описать группы с конечными классами сопряженных элементов в терминах прямых произведений конечных групп. Почти все работы, связанные с этим подходом, появились за последние 20 лет, именно они и взяты за основу. Приведены необходимые сведения о прямых произведениях из работ Ремака 30-х годов. Ряд результатов, ранее изложенных другим способом, рассмотрен с упомянутой точки зрения.

Книга рассчитана на математиков — аспирантов, научных работников, а также студентов старших курсов.



Ю. М. ГОРЧАКОВ

ГРУППЫ
С КОНЕЧНЫМИ
КЛАССАМИ
СОПРЯЖЕННЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ

СОВРЕМЕННАЯ
АЛГЕБРА

Ю. М. ГОРЧАКОВ

**ГРУППЫ
С КОНЕЧНЫМИ КЛАССАМИ
СОПРЯЖЕННЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.1
Г 71
УДК 512.8

Г $\frac{20203-048}{053(02)-78}$ 61-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

ВВЕДЕНИЕ

В теории бесконечных групп один из обычных способов выделить объект для изучения — описать его при помощи «условий конечности». Одно из таких условий — конечность классов сопряженных элементов.

Группы с конечными классами сопряженных элементов впервые появились (хотя и без названия) в работах А. П. Дицмана (1937, 1938, [19, 20]). Его лемма (см. лемму 1.1. гл. II): конечное инвариантное множество периодических элементов порождает конечную нормальную подгруппу, — послужила инструментом для изучения групп с конечными классами сопряженных элементов. Сам класс этих групп появился в работе Бера (1940, [65]) в связи с изучением силовских подгрупп в бесконечных группах. Силовская теория локально нормальных групп, т. е. периодических групп с конечными классами сопряженных элементов (см. следствие 1.3 гл. II), оказалась почти такой же, как в конечном случае, но сопряженность при этом пришлось заменить на локальную сопряженность. Понять, откуда появилась локальная сопряженность, нетрудно, так как силовские p -подгруппы локально нормальных групп — это, в точности, те подгруппы, пересечение которых с любой конечной нормальной подгруппой — силовская p -подгруппа в последней (см. теорему 3.1 гл. III). Другими словами, силовская p -подгруппа локально нормальной группы — объединение силовских p -подгрупп конечных нормальных подгрупп, а в конечных группах силовские подгруппы сопряжены. П. А. Гольберг (1946, [8]) ввел понятие локально внутреннего автоморфизма — автоморфизма, который на всяком конечном подмножестве группы действует как внутренний. Подгруппы называются локально сопряженными, если они переводятся друг в друга локально внут-

ренным автоморфизмом. В [8] доказано, что силовские p -подгруппы локально нормальной группы локально сопряжены (теорема 3.2 гл. III). Как оказалось (см. теорему 3.8 гл. III), холловские теоремы о существовании полных силовских баз и их сопряженности также верны. Верно (см. С. Н. Черников, 1955, [58]) с заменой сопряженности локальной сопряженностью обобщение теоремы Цассенхауза о дополняемости нормальной подгруппы, порядок которой взаимно прост с индексом (см. теорему 3.6 гл. III). Конечность числа силовских p -подгрупп и их сопряженность — эквивалентные условия в локально нормальных группах (см. теорему 3.5 гл. III). Этот результат для счетных групп получен Бером (1940, [65]), в общем случае (без использования счетного случая) — М. И. Каргатоловым (1957, [26]).

Хотя силовская теория получилась весьма гладкой, по моему мнению, она не является специфичной для локально нормальных групп. Именно поэтому в данной книге нет многочисленных обобщений теорем, подобных силовским.

И. Шур в связи с некоторыми вопросами теории представлений конечных групп изучал группы, конечные над центром. Для теории групп с конечными классами сопряженных элементов необходимо следующее утверждение Шура (см., например, [82], стр. 417): если центр группы имеет конечный индекс, то коммутант ее конечен. Более точное описание групп, конечных над центром, было получено И. Шуром в 1907 году (см., например, [82], стр. 631). Так как оно нам не понадобится, то формулировать его не будем. Как следствие теоремы Шура сразу получается теорема Б. Неймана (1951, [86]): в группе с конечными классами сопряженных элементов элементы конечных порядков образуют подгруппу, содержащую коммутант (см. следствие 1.5 гл. II). Так же просто получается интересная теорема Ю. Г. Федорова (1951, [52]): если все нетривиальные подгруппы бесконечной группы имеют конечный индекс, то группа является циклической.

Лемма Дицмана и теорема Шура имеют своими простыми следствиями следующие весьма важные критерии конечности классов сопряженных элементов в произвольной группе:

В группе G классы сопряженных элементов тогда и только тогда конечны, когда выполняется одно из следующих условий:

1) фактор-группа $G/Z(G)$ локально нормальна и каждый элемент группы G содержится в конечно порожденной нормальной подгруппе (Бер, 1948, [68]);

2) группа G либо локально нормальна, либо является центральным расширением абелевой группы без кручения при помощи локально нормальной группы (С. Н. Черников, 1957, [60]);

3) группа G — подгруппа прямого произведения локально нормальной группы и абелевой группы без кручения (1959, см. теорему 1.9 гл. II).

Из последней теоремы следует, что основные трудности для изучения представляет локально нормальный случай. Трудности, которые возникают в общем случае, недавно рассматривались Л. А. Курдаченко [32—39].

Прямые произведения конечных групп, их подгруппы и гомоморфные образы подгрупп, очевидно, локально нормальны. В некоторых случаях они действительно исчерпывают весь класс. Так Н. В. Черникова (см. 1956, [55]), С. Н. Черников (1958, [61]), М. И. Каргаполов (1958, [27]) доказали вложимость в прямое произведение конечных групп локально нормальных групп соответственно следующих классов: 1) групп, все подгруппы которых дополняемы, 2) слойно конечных групп с конечными силовскими p -подгруппами по всем p (см. теорему 4.1 гл. II), 3) групп без абелевых нормальных подгрупп (см. следствие 3.10 гл. II). Поэтому выглядит обоснованной программа изучения локально нормальных групп через прямые произведения конечных групп, выдвинутая С. Н. Черниковым (1959, [62]). Крупный вклад в изучение локально нормальных групп внес Ф. Холл (1959, [79]). Он доказал, что счетные локально нормальные группы — гомоморфные образы подпрямых произведений конечных групп (см. теорему 2.13 гл. II). Вместе с тем построенный им пример несчетной локально нормальной группы (см. пример 2.11 гл. II) показывает, что локально нормальные группы не исчерпываются гомоморфными образами подпрямых произведений конечных групп. Но все же, как тесна связь прямых произведений конечных групп и локально нормальных групп? Если группа вло-

жима в прямое произведение конечных групп, то она, очевидно, вложима в декартово произведение конечных групп. Условие вложимости локально нормальной группы в декартово произведение конечных групп не кажется очень жестким, так как (см. предложение 2.9 гл. II) фактор-группа любой локально нормальной группы по центру — поддекартово произведение конечных групп. Для произвольных групп (см. Ю. М. Горчаков, 1967, 1971, [14, 15]) результат Ф. Холла обобщен следующим образом: локально нормальная подгруппа декартова произведения конечных групп — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп (теорема 3.6 гл. II). Так как существуют примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты, неразложимые в прямое произведение циклических групп, то в формулировке теоремы нельзя выбросить слова «гомоморфный образ», т. е. вложимости в прямое произведение нет. Как мне кажется, эту теорему можно усилить таким образом: локально нормальную подгруппу декартова произведения конечных групп можно так вложить в (другое) декартово произведение конечных групп, что каждый элемент группы при этом вложении будет иметь лишь конечное число нецентральных проекций. Ввиду сделанного выше замечания, более сильное утверждение невозможно.

Недавно Томкинсон (1977) получил утверждение, подтверждающее это предположение, а именно он доказал вложимость в прямое произведение коммутанта финитно аппроксимируемой группы с конечными классами сопряженных элементов (см. теорему 3.15 гл. II). Мне кажется, что должен быть справедлив более сильный результат: коммутант произвольной локально нормальной группы разлагается в произведение счетных поэлементно перестановочных нормальных подгрупп. О других предположениях смотрите конец § 3 гл. II. На возможную справедливость сформулированного утверждения указывает такой результат (см. Ю. М. Горчаков, 1976, [17, 18]): коммутант подпрямого произведения конечных групп — прямое произведение счетных нормальных подгрупп (теорема 3.16 гл. II).

Теперь рассмотрим вопрос о представлении группы подпрямыми произведениями конечных групп.

В теории абелевых групп хорошо известны теоремы Прюфера и Куликова:

Абелева p -группа конечного периода разлагается в прямое произведение циклических подгрупп (Прюфер, см. [29], стр. 85).

Счетная абелева p -группа без элементов бесконечной высоты разлагается в прямое произведение циклических подгрупп (Прюфер, см. [29], стр. 87).

Примарная абелева группа A тогда и только тогда разложима в прямое произведение циклических групп, когда она является объединением возрастающей последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ таких своих подгрупп, что у каждой из них высоты элементов в группе A конечны и ограничены в совокупности (Л. Я. Куликов, см. [31]).

В соответствии с работой А. И. Мальцева [42] естественно считать, что элемент $a \neq 1$ (не обязательно коммутативной) группы A имеет конечную высоту, если его образ в некоторой конечной фактор-группе группы A отличен от единицы. Нетрудно установить зависимость между прюферовской высотой и высотой в рассматриваемом смысле. Если A — абелева p -группа и $a \neq 1$ — элемент из A , то высота h элемента a равна $h = \log_p(\min |A/A_i|)$, где A_i пробегает все подгруппы конечного индекса в A , не содержащие a . В силу теоремы о подгруппах прямых произведений циклических групп, вложимость в прямое произведение циклических групп и разложимость в прямое произведение таких же групп — одно и то же. Таким образом, следующие результаты являются аналогами и обобщениями теорем Прюфера и Куликова для некоммутативных групп (см. § 2 гл. II).

Локально нормальная группа, аппроксимируемая классом конечных групп, порядки которых ограничены в совокупности, изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп ограниченных порядков (Ю. М. Горчаков, 1974, [16]).

Счетная финитно аппроксимируемая локально нормальная группа изоморфна подгруппе прямого произведения конечных групп (Ф. Холл, 1959, [79]).

Группа A тогда и только тогда изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп, когда она локально нормальна и является объединением возрастающей последовательности $1 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ таких

своих нормальных подгрупп, что каждая фактор-группа A_{n+1}/A_n ($n=0, 1, \dots$) аппроксимируется в A/A_n классом конечных групп, порядки которых ограничены в совокупности (Ю. М. Горчаков, 1974, [16]).

В обзоре С. Н. Черникова (1959, [62]) сформулирован следующий вопрос: «Каким условиям должна удовлетворять локально нормальная группа, чтобы ее можно было вложить в прямое произведение конечных групп?» Приведенные выше теоремы, по-видимому, решают этот вопрос. Поскольку достаточные условия вложимости в прямое произведение нелегко получить из необходимого и достаточного, то сформулируем некоторые из них.

Ю. М. Горчаков (1976, [18]) и Томкинсон (1977) доказали, что фактор-группа финитно аппроксимируемой локально нормальной группы по центру — подпрямое произведение конечных групп (см. следствие 3.7 гл. II). Методы доказательства различные. В данной книге доказательство взято из [18]. Томкинсон вывел результат из теорем 2.8 и 3.15 гл. II. Условие финитной аппроксимируемости в теореме отбросить нельзя (пример 2.11 гл. II). В качестве следствия получаем: фактор-группа по второму члену верхнего центрального ряда любой локально нормальной группы — подпрямое произведение конечных групп (см. следствие 3.8 гл. II). Как опять показывает пример 2.11 гл. II, уменьшить ядро гомоморфизма здесь нельзя, так как существует локально нормальная группа, фактор-группа которой по центру содержит абелеву подгруппу без элементов бесконечной высоты, неразложимую в прямое произведение циклических подгрупп. Итак, с точностью до расширений локально нормальная группа — это подпрямое произведение конечных групп и опять-таки локально нормальная нильпотентная ступени 2 группа. Из последнего результата легко следует вложимость всей группы в прямое произведение конечных групп, если группа либо не имеет центра (Ю. М. Горчаков, 1961, [11]), либо не имеет абелевых нормальных подгрупп (М. И. Каргаполов, 1958, [27]).

Если проанализировать доказательства (см. §§ 2, 3 гл. II), то можно увидеть, что по существу все они проводились по одной схеме: строилась в группе всюду плотная нормальная подгруппа в некоторой топологии, либо — очень похожая на всюду плотную подгруппу.

В главе I сделана попытка (см. теорему 3.22 и следствие 3.23 гл. I) более откровенно провести идею построения всюду плотной подгруппы. В работе [18] доказательство теоремы содержит пробел, поэтому неясно, верна ли она. Все следствия из нее верны, так как для них достаточно более слабого варианта теоремы (доказательство в [18] дано именно для него), который здесь реализован (теорема 3.22 гл. I). В частности, теорема 3.22 дает существование в подпрямом произведении конечных групп всюду плотной в тихоновской топологии подгруппы, которая разлагается в прямое произведение счетных нормальных подгрупп. Эта всюду плотная подгруппа всегда содержит коммутант. В качестве следствия получаем описание нормальных подгрупп подпрямых произведений конечных групп несчетного числа множителей (см. следствие 3.23 гл. I). Оно оказалось очень похожим на ремаково описание нормальных подгрупп в прямых произведениях групп (см. предложение 3.4 гл. I). Описания нормальных подгрупп подпрямого произведения счетного числа конечных групп пока нет. Неясно, например, следующее: если G — подпрямое произведение конечных групп и N — нормальная в G подгруппа, то можно ли найти такое подпрямое произведение конечных групп H и в нем такую нормальную подгруппу M , что $G/N \simeq H/M$ и $M \subseteq Z(H)$. В силу следствия 3.23 гл. I, для справедливости этого утверждения достаточно, чтобы оно было верно для счетного числа множителей.

Слойно конечные (см. § 4 гл. II) группы счетны, но из холловского описания счетных локально нормальных групп как гомоморфных образов подпрямых произведений конечных групп результаты С. Н. Черникова (1948, 1958, [57, 61]) не следуют. Это произошло по двум причинам: 1) как уже отмечено, нормальные подгруппы подпрямых произведений счетного числа конечных групп не описаны, 2) слойно конечные группы с конечными силовскими подгруппами финитно аппроксимируемы, но доказать финитную аппроксимируемость в данном случае — это все равно, что доказать вложимость в прямое произведение конечных групп.

Устроены слойно конечные группы весьма просто (см. теоремы 4.1 и 4.5 гл. II): они — произведения двух множителей, один является центром (слойно конечным),

другой — слойно конечной группой с конечными силовскими подгруппами по всем p , т. е., как доказано, подпрямым произведением конечных групп, лишь конечное число прямых множителей которого могут иметь элементы равных порядков.

Вложимость в прямые произведения конечных групп и изучение свойств подпрямых произведений полезны при изучении вопросов определения мощностей классов сопряженных и локально сопряженных подгрупп. Точная их оценка дана следующим утверждением (Ю. М. Горчаков, 1971, [15], см. теорему 4.9 гл. I): если G — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп, H — подгруппа G , H_0 — наибольшая нормальная в G подгруппа из H и $|H:H_0| = h$ — бесконечное кардинальное число, то $|cl(H)| = h$, $|Lcl(H)| = 2^h$. Отсюда сразу следует, что в том же классе групп $cl(H) = Lcl(H)$ тогда и только тогда, когда $cl(H)$ конечен (Томкинсон, 1969, [107], см. теорему 4.9 гл. III). (Здесь символы $Lcl(H)$ и $cl(H)$ обозначают соответственно класс локально сопряженных подгрупп и сопряженных подгрупп, содержащий подгруппу H). Для произвольных локально нормальных групп теорема 4.9 гл. I позволяет свести исследование к случаю нильпотентных ступени 2 групп (см. доказательство теоремы 2.13 гл. III и лемму 2.12 той же главы). Ввиду теоремы 3.6 гл. II и следствия 3.8 гл. II, это неудивительно. Получилось равенство (Хартли, 1976, [80], см. теорему 2.13 гл. III) $|Lcl(H)| = 2^h$. Зависимость между $|cl(H)|$ и $|Lcl(H)|$ оказалась сложной (см. предложение 2.14 гл. III) и еще не исследована. В доказательстве нильпотентного случая использовано интересное (хотя и простое) описание группы локально внутренних автоморфизмов: она — проективный предел групп автоморфизмов, полученных ограничением группы внутренних автоморфизмов на конечных нормальных подгруппах. Группа внутренних автоморфизмов в ней плотна в топологии, определенной централизаторами конечных нормальных подгрупп (см. теорему 2.11 гл. III).

Как только начали изучать группы с конечными классами сопряженных элементов, сразу же возник вопрос о группах с конечными классами сопряженных подгрупп. Наиболее сильные результаты здесь получил И. И. Ере-

мин (1959, [22]). Он установил следующее интересное утверждение (см. теорему 4.2 гл. II): пусть G — локально нормальная группа, A — бесконечная над $Z(G)$ подгруппа с конечным множеством $\pi(A)$ простых делителей порядков элементов. Тогда в A существует абелева подгруппа, определяющая бесконечный класс сопряженных с ней подгрупп группы G . По моему мнению, эта теорема может быть развита в том же направлении, как теорема 4.9 гл. I и результаты § 2 гл. III, т. е. в ней можно получить равенства, связывающие $|C(A)|$ и мощности классов сопряженных и локально сопряженных абелевых подгрупп из A . Приведенная выше теорема позволила свести случай периодических групп с конечными классами сопряженных p -подгрупп по всем p к центральным расширениям при помощи слойно конечных групп с конечными силовскими подгруппами (теорема 4.5 гл. III). Указанные классы просто совпали. Там же получено описание групп с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп (см. теорему 4.6 гл. III): они конечны над центром. Из этого результата моментально следуют результаты Б. Неймана (1955) и Л. Фукса (1954) (см. следствия 4.7 и 4.8 гл. III). Избранный порядок изложения (см. § 4 гл. III) таков, что он ясно показывает особую роль слойно конечных групп в классе локально нормальных групп. Теорема 4.2 охватывает все случаи, кроме как раз слойно конечного, что не случайно. Пример 4.3 гл. III (на эту тему) настолько прост, что в комментариях не нуждается.

В результате можно сделать вывод, что с финитно аппроксимируемыми локально нормальными группами разобраться удалось, в смысле их связи с подгруппами прямых произведений конечных групп. Общий случай локально нормальных групп (если говорить точнее, ввиду следствия 3.8 гл. II, нильпотентных ступени 2 и не финитно аппроксимируемых) неясен. В настоящее время имеются лишь примеры, которые показывают, что удачных предположений о структуре таких групп нет. В тексте книги имеются такие примеры. Стоит отдельно сказать о примере несчетной локально нормальной группы, все абелевы подгруппы которой счетны (см. [71]). Он не дает надежды описать локально нормальные группы только в терминах абелевых подгрупп. Но если вспомнить

вопрос о разложимости коммутанта локально нормальной группы, то может возникнуть надежда, что в общем случае группа устроена так: в ней есть всюду плотная подгруппа (в некоторой топологии, определенной подгруппами конечного индекса), разложимая в произведение таких поэлементно перестановочных счетных нормальных подгрупп, что фактор-группа по этой всюду плотной подгруппе будет абелева и даже, более того, она будет состоять из частного вида локально внутренних автоморфизмов, действующих лишь на конечном числе множителей нестабильно. Поскольку все это предположения, то еще рано говорить о более точном строении.

Заметим, наконец, что данная книга (как видно по оглавлению и по введению) касается в основном тех вопросов теории групп с конечными классами сопряженных элементов, которые прямо связаны с прямыми произведениями конечных групп. По изучаемой теме приведена почти полная библиография. Значительная часть работ в тексте не упоминается.

ГЛАВА I

ДЕКАРТОВЫ И ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§ 1. Подгруппы декартовых произведений

Если задано семейство групп G_a ($a \in A$), то из групп этого семейства можно построить новую группу G следующим образом.

Элементы множества G — семейства элементов g_a по одному из G_a для каждого $a \in A$. Записывать их будем так:

$$\prod_{a \in A} g_a.$$

Умножение семейств определим следующим образом:

$$\prod_{a \in A} g_a \cdot \prod_{a \in A} h_a = \prod_{a \in A} r_a, \quad r_a = g_a h_a. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что множество G с умножением (1) — группа. Единицей ее служит элемент $\prod_{a \in A} 1_a$, где 1_a — единица группы G_a . Обратным к элементу $\prod_{a \in A} g_a$ является элемент $\prod_{a \in A} g_a^{-1}$.

Группу G с умножением (1) называют *декартовым произведением групп G_a ($a \in A$)* и часто обозначают символом $\prod_{a \in A} G_a$.

Каждую группу G_a называют *множителем G* .

Если $g = \prod_{a \in A} g_a$, то g_a называют *проекцией* элемента g на G_a или *a -й проекцией* элемента g . Пусть H — подгруппа в G . Совокупность a -х проекций элементов группы

H образует некоторую группу $H_a \subseteq G_a$. Ее называют проекцией H на G_a или a -й проекцией подгруппы H .

Если для всякого a из A проекция H на G_a равна G_a , то H называют поддекартовым произведением групп G_a ($a \in A$).

Очевидно следующее предложение ([96], § 3, лемма 3).

Лемма 1.1. Если G — поддекартово произведение групп G_a ($a \in A$) и H — его нормальная подгруппа, то проекции H_a группы H нормальны в G_a .

Пусть H_a ($a \in A$) — семейство нормальных подгрупп группы H . Определим отображение Ремака группы H в группу $\prod_{a \in A} H/H_a$:

$$h \rightarrow \prod_{a \in A} hH_a, \quad h \in H.$$

Теперь легко получается

Теорема 1.2 (Ремак [96], теорема 3). Если H_a ($a \in A$) — семейство нормальных подгрупп группы H с пересечением N , то отображение Ремака — гомоморфизм группы H в группу $\prod_{a \in A} H/H_a$ с ядром N , причем H/N — поддекартово произведение групп H/H_a ($a \in A$).

Группа $\prod_{a \in A} G_a$, где $A \subset B$, не принадлежит $G = \prod_{a \in B} G_a$. Она изоморфна подгруппе Q из G , состоящей из всех элементов группы G , которые имеют своими проекциями на G_a ($a \in B \setminus A$) единицу. Очень часто эти две группы мы будем отождествлять. Например, если H — подгруппа G , то через H^b будем часто обозначать подгруппу $H \cap Q$, где $A = B \setminus b$. Но писать будем при этом $H^b = H \cap \prod_{a \in A} G_a$.

Если H — подгруппа в G , то каждому элементу $h = \prod_{a \in B} h_a$ из H сопоставим «укороченное» произведение $\prod_{a \in A} h_a$. Совокупность всех таких укороченных произведений образует группу, которую называют проекцией H на $\prod_{a \in A} G_a$.

Пусть $g = \prod_{a \in A} g_a$ — элемент из $\prod_{a \in A} G_a$. Совокупность всех $a \in A$, для которых $g_a \neq 1$, называют носителем элемента g . Носитель единичного элемента пуст. Носителем подгруппы назовем объединение носителей всех ее элемен-

тов. Если g — элемент, H — подгруппа декартова произведения, то для их носителей употребляют обозначения $\text{supp } g$, $\text{supp } H$ (см. [29], стр. 19). Если H — подгруппа $\prod_{a \in A} G_a$ и M — проекция H на $\prod_{a \in B} G_a$ ($B \subseteq A$), то носителем M назовем $B \cap \text{supp } H$.

Совокупность элементов декартова произведения групп G_a ($a \in A$) с конечными носителями образует группу. Эту группу называют *прямым произведением групп* G_a ($a \in A$) и иногда обозначают $\times_{a \in A} G_a$. Элементы прямо-

го произведения обозначают при этом знаком $\times_{a \in A} g_a$. Эта

запись предполагает конечность носителя элемента. Прямое произведение, очевидно, нормально в декартовом. Декартово произведение конечного числа групп совпадает с прямым.

Другие обозначения для прямого произведения, например,

$$\prod_{a \in A} G_a, \quad \text{Dr } G_a \ (a \in A), \quad \text{d. p. } G_a \ (a \in A).$$

В теории групп принято считать, что группа G является произведением своих подгрупп G_a ($a \in A$), если выполняется ряд условий, одно из которых: группа G порождается подгруппами G_a ($a \in A$). Поэтому декартово произведение бесконечного множества групп — это просто не произведение.

Нетрудно охарактеризовать декартово произведение «внутренним» образом.

Предложение 1.3. *Группа H изоморфна декартову произведению $G = \prod_{a \in A} G_a$ тогда и только тогда, когда*

H имеет нормальные подгруппы H_a для всех $a \in A$, такие, что:

1) H/H_a изоморфна G_a для всех a ;

2) $\bigcap_{a \in A} H_a = 1$;

3) для любого семейства элементов h_a ($a \in A$) из H существует такой элемент $h \in H$, что $h_a H_a = h H_a$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Пусть семейство $H_a \triangleleft H$ ($a \in A$) удовлетворяет условиям 1)–3). Из теоремы 1.2 и усло-

вия 2) следует, что H изоморфна некоторой подгруппе группы $G = \prod_{a \in A} H/H_a$. Нужно показать, что отображение

Ремака — изоморфизм групп H и G , т. е. отображение H на всю G . Пусть $\prod_{a \in A} h_a H_a$ — произвольный элемент

из G . По условию 3) существует такой элемент $h \in H$, что $h_a H_a = h H_a$ при всех $a \in A$. Отсюда $\prod_{a \in A} h_a H_a = \prod_{a \in A} h H_a$,

что и требовалось.

Обратно, пусть $G = \prod_{a \in A} G_a$. Положим $H_a = \prod_{b \in A \setminus a} G_b$.

Для групп H_a условия 1) — 3) очевидны. Предложение доказано.

Говорят, что группа H *разложима в поддекартово произведение*, если в ней существует система отличных от единицы нормальных подгрупп, пересечение которых — единица, и *неразложима* в противном случае.

Нормальная подгруппа H группы G называется *минимальной*, если H содержится во всякой нормальной подгруппе из G , имеющей с H неединичное пересечение. Группа может не иметь минимальных нормальных подгрупп: такова бесконечная циклическая группа. Если N и M — две различные минимальные нормальные подгруппы, то $N \cap M = 1$. Конечная группа всегда имеет минимальные нормальные подгруппы.

Предложение 1.4. *Группа тогда и только тогда неразложима в поддекартово произведение, когда она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, содержащуюся во всякой неединичной нормальной подгруппе.*

Доказательство. Допустим, что группа G неразложима в поддекартово произведение групп. Тогда пересечение N всех нормальных неединичных подгрупп отлично от 1. По определению N содержится во всех неединичных нормальных подгруппах, т. е. N — минимальная нормальная подгруппа. Она единственна, так как, если M — другая минимальная нормальная подгруппа, то $N \cap M = 1$. Это означало бы, что G разложима в поддекартово произведение.

Пусть, обратно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся во всякой

неединичной нормальной подгруппе. Тогда пересечение всех неединичных нормальных подгрупп равно N . Отсюда G неразложима в поддекартово произведение групп. Предложение доказано.

Минимальные нормальные подгруппы конечных групп хорошо изучены: они (см. [95]) — прямые произведения изоморфных простых групп. В общем случае они устроены сложно. В группе с конечными классами сопряженных элементов минимальные нормальные подгруппы конечны (см. лемму 1.1 гл. II).

Теорема 1.5 (Биркгоф [69]). *Всякая группа — поддекартово произведение групп, неразложимых в поддекартово произведение.*

Доказательство. Если группа G неразложима в поддекартово произведение, то для G теорема верна. Пусть G разложима и $1 \neq g \in G$. По лемме Цорна (см., например, [54], стр. 28) в G существует максимальная нормальная подгруппа K_g , которая не содержит g . Всякая неединичная нормальная подгруппа фактор-группы G/K_g содержит gK_g . Следовательно, пересечение всех неединичных нормальных подгрупп группы G/K_g отлично от единицы, и группа G/K_g неразложима в поддекартово произведение. Пересечение $\bigcap_{g \in G} K_g = 1$, так как G разложима. Теорема теперь следует из теоремы 1.2.

Для случая конечных групп теорема 1.5 доказана Ремаком ([96], § 3, следствие из теоремы 6). Биркгоф [69] ее доказал для универсальных алгебр.

Несколько расширим одно из понятий, введенных Ремаком ([96], § 1). Подгруппу H поддекартова произведения G групп G_a ($a \in A$) назовем *ящичной* в G , если $H = G \cap \prod_{a \in A} H_a$, где H_a — проекция H на G_a . Если в G вве-

сти *тихоновскую топологию*, индуцированную топологией декартова произведения (см., например, [45], стр. 87, или [30], стр. 127, 131, 193, 194), то всякая ящичная подгруппа замкнута в этой топологии (считаем G_a дискретными). Обратное неверно, так как существуют замкнутые, но не ящичные подгруппы. Если подгруппа H ящична в G и если проекции некоторой подгруппы M совпадают с проекциями H_a группы H для всех $a \in A$, то H назовем *ящичком* группы M в G . Значение ящичных подгрупп состоит в следующем предложении.

Предложение 1.6. Если H — ящичная нормальная подгруппа поддекартова произведения G групп G_a ($a \in A$) и H_a — проекция H на G_a , то G/H — поддекартово произведение групп G_a/H_a ($a \in A$).

Доказательство. По лемме 1.1 $H_a \triangleleft G_a$. Пусть $g = \prod_{a \in A} g_a$. Рассмотрим отображение

$$g \rightarrow \prod_{a \in A} g_a H_a. \quad (2)$$

Оно, очевидно, является гомоморфизмом. Если g принадлежит ядру, то $g_a H_a = H_a$ для всех $a \in A$. Получаем $g_a \in H_a$ для всех $a \in A$, т. е. $g \in G \cap \prod_{a \in A} H_a$. Так как H — ящичная

подгруппа, то $g \in H$. Итак, H — ядро гомоморфизма (2). Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос о ящичности некоторых подгрупп.

Предложение 1.7. Пусть $G = \prod_{a \in A} G_a$, G' — коммутант группы G , G'_a — коммутант G_a . Коммутант G' группы G является ящичной подгруппой тогда и только тогда, когда в множестве A существуют такое конечное подмножество B (возможно пустое) и такое натуральное число n , что для всех $a \in A \setminus B$ каждый элемент из G'_a есть произведение n коммутаторов. Всегда $\prod_{a \in A} G'_a$ — ящик для G' .

Доказательство. Допустим, что G' — ящичная подгруппа. Так как каждый элемент $g \in G'$ есть произведение некоторого числа коммутаторов

$$g = [g^{(1)}, h^{(1)}] [g^{(2)}, h^{(2)}] \dots [g^{(n)}, h^{(n)}],$$

то имеем разложение

$$g = \prod_{a \in A} g_a = \prod_{a \in A} [g_a^{(1)}, h_a^{(1)}] [g_a^{(2)}, h_a^{(2)}] \dots [g_a^{(n)}, h_a^{(n)}]. \quad (3)$$

Если бы существовала такая бесконечная последовательность индексов из A

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots,$$

что в G'_{a_k} существует элемент g_{a_k} , представимый в виде произведения не менее чем k коммутаторов, то элемент

$g = \prod_k g_{a_k}$ нельзя представить в виде (3). Поэтому в A

существует такое конечное подмножество B (возможно пустое), что для $a \in B$ группа G_a' содержит элементы, которые нельзя записать в виде произведения n коммутаторов для любого заданного натурального числа n . Если же $a \in A \setminus B$, то существует такое натуральное число n , общее для всех $a \in A \setminus B$, что каждый элемент из G_a' есть произведение n коммутаторов.

Пусть, обратно, такие множество B и натуральное число n существуют, и пусть $g = \prod_{a \in A} g_a$ — элемент из

$\prod_{a \in A} G_a'$. Ввиду свойств B и n имеем

$$g_a = [g_a^{(1)}, h_a^{(1)}] [g_a^{(2)}, h_a^{(2)}] \dots [g_a^{(n)}, h_a^{(n)}] \quad \text{для } a \in A \setminus B,$$

$$g_a = [g_a^{(1)}, h_a^{(1)}] [g_a^{(2)}, h_a^{(2)}] \dots [g_a^{(n_a)}, h_a^{(n_a)}] \quad \text{для } a \in B.$$

Так как множество B конечно, то среди чисел n, n_a ($a \in B$) есть наибольшее. Обозначим его m . Тогда

$$g_a = [g_a^{(1)}, h_a^{(1)}] [g_a^{(2)}, h_a^{(2)}] \dots [g_a^{(m)}, h_a^{(m)}] \quad \text{для } a \in A$$

(там, где множителей меньше, добавим нужное число единиц $[g_a^{(i)}, h_a^{(i)}] = [1, 1] = 1$). Поэтому

$$g = [g^{(1)}, h^{(1)}] [g^{(2)}, h^{(2)}] \dots [g^{(m)}, h^{(m)}] \in G',$$

где

$$g^{(b)} = \prod_{a \in A} g_a^{(b)}, \quad h^{(b)} = \prod_{a \in A} h_a^{(b)} \quad (b = 1, 2, \dots, m).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.8. Коммутант декартова произведения конечного числа групп — ящичная подгруппа.

Следствие 1.9. Коммутант декартова произведения конечных групп, порядки которых ограничены в совокупности, — ящичная подгруппа.

Следующий пример изложим без доказательства.

Пример 1.10. Покажем, что не всегда коммутант декартова произведения групп — ящичная подгруппа.

Рассмотрим p -группу G_a ($a=1, 2, \dots$), заданную порождающими элементами $x_1, x_2, \dots, x_{2a}$ и определяющими

соотношениями

$$x_i^p = 1, \quad p \neq 2, \quad [x_i, x_j, x_k] = 1, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 2a.$$

Элемент

$$g = [x_1, x_2] [x_3, x_4] \dots [x_{2a-1}, x_{2a}]$$

нельзя представить в виде произведения $a-1$ коммутатора. Теперь по предложению 1.7 коммутант группы $\prod_a G_a$

не равен $\prod_a G'_a$.

Если считать, что G_a в предложении 1.7 дискретны, то можно доказать, что ящичность и замкнутость в тихоновской топологии коммутанта декартова произведения совпадают. В примере 1.10 коммутант не замкнут.

В поддекартовых произведениях коммутант может быть замкнутым, но не ящичным. Там все много сложнее.

Верхний центральный ряд начнем рассматривать с очевидного утверждения (Ремак [93], теорема 1).

Лемма 1.11. *Если два элемента декартова произведения перестановочны, то и все их проекции перестановочны.*

Отсюда сразу следует утверждение, для частного случая содержащееся в [96] (теорема 18).

Следствие 1.12. *Если G — поддекартово произведение групп G_a ($a \in A$), то централизатор $C_G(H)$ любого подмножества H из G — ящичная подгруппа.*

Следствие 1.13 (Ремак [96], теорема 15). *Любой член верхнего центрального ряда с натуральным номером является ящичной подгруппой в поддекартовом произведении.*

Заметим, что объединение таких членов, вообще говоря, не ящичная (и даже не замкнутая) подгруппа, в чем легко убедиться, рассмотрев декартово произведение нильпотентных групп возрастающих ступеней нильпотентности.

Следствие 1.14. *Если $G = \prod_{a \in A} G_a$ и γ — бесконечное порядковое число, то*

$$Z_\gamma(G) = \{ \prod_{a \in A} Z_\gamma(G_a) \} \cdot \{ \bigcup_n Z_n(G) \},$$

где n пробегает все натуральные числа.

Доказательство. Допустим, что следствие доказано для всех $\alpha < \gamma$. Если γ — предельное число, то утверждение следует из индуктивного предположения и определения верхнего центрального ряда. Пусть γ — непредельное порядковое число. Пусть $g = \prod_{a \in A} g_a \in Z_\gamma(G)$ и $h = \prod_{a \in A} h_a \in G$. Тогда $[g, h] \in Z_{\gamma-1}(G)$. По индуктивному предположению $[g, h] = zx$, где $z \in \times_{a \in A} Z_{\gamma-1}(G_a)$, $x \in \bigcup_n Z_n(G)$. Поэтому $x \in Z_n(G)$ для некоторого n . Следовательно (см. следствие 1.13),

$$[g_a, h_a] \in Z_n(G) \quad (3)$$

для всех $a \in A \setminus \text{supp } z$ (заметим, что $\text{supp } z$ — конечное множество.) Если $g = \prod_{a \in A} g_a \in Z_\gamma(G)$ и если существует такое конечное множество $B \subseteq A$, что $\prod_{a \in A \setminus B} g_a \in \bigcup_n Z_n(G)$, то $t = g \cdot \prod_{a \in A \setminus B} g_a^{-1} = \prod_{a \in B} g_a \in Z_\gamma(G)$. По индуктивному предположению для любого $a \in B$ $[g_a, h_a] \in Z_{\gamma-1}(G_a)$. Поэтому $g_a \in Z_\gamma(G_a)$, $a \in B$. Получаем ввиду конечности B , что $t \in \times_{a \in B} Z_\gamma(G_a)$. Допустим, что следствие неверно. Тогда (по только что доказанному) существует такой элемент $g = \prod_{a \in A} g_a \in Z_\gamma(G)$, что для всякого конечного множества $B \subseteq A$ элемент $\prod_{a \in A \setminus B} g_a$ не лежит в $\bigcup_n Z_n(G)$. Обозначим $B_1 = \emptyset$. Элемент $\prod_{a \in A \setminus B_1} g_a$ не лежит в $\bigcup_n Z_n(G)$. Поэтому существует такой $a_1 \in A \setminus B_1$, что $g_{a_1} \notin Z_1(G_{a_1})$. Через B_2 обозначим $\{a_1\}$. Элемент $\prod_{a \in A \setminus B_2} g_a$ не лежит в $\bigcup_n Z_n(G)$. Поэтому в $A \setminus B_2$ существует a_2 , для которого $g_{a_2} \notin Z_2(G_{a_2})$. Продолжая этот процесс, получим такое множество $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$, что $g_{a_k} \notin Z_k(G_{a_k})$. Но тогда существуют такие элементы $h_{a_k} \in G_{a_k}$, что

$$[g_{a_k}, h_{a_k}] \notin Z_{k-1}(G_{a_k}). \quad (4)$$

Обозначим $h = \prod_k h_{a_k}$ (остальные проекции равны 1). Тогда

$[g, h]$ как элемент из $Z_{\gamma-1}(G)$ должен удовлетворять (3), но (3) и (4) противоречивы. Следствие доказано.

Лемма 1.15. *Нормализатор ящичной подгруппы поддекартова произведения — ящичная подгруппа.*

Лемма очевидна.

Ясно, что нормализатор замкнутой подгруппы — замкнутая подгруппа, но не обязательно ящичная.

§ 2. Метод Ф. Холла представления группы гомоморфными образами поддекартовых произведений

Здесь будут изложены некоторые результаты из статьи [79].

Допустим, что группа G является произведением вполне упорядоченного семейства нормальных подгрупп

$$G = G_1 G_2 \dots G_i \dots \quad (i < \gamma),$$

γ — некоторое порядковое число. Каждому i сопоставим множество U_i пар (i, x) , $x \in G_i$. Пусть $U = \bigcup_{i < \gamma} U_i$. Представим каждую группу G_j подстановками на множестве U . Для каждого y из G_j построим подстановку $v_j(y)$ следующим образом:

$$(i, x) v_j(y) = \begin{cases} (i, y^{-1}xy), & \text{если } i < j, \\ (i, xy), & \text{если } i = j, \\ (i, x), & \text{если } i > j. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, подстановки $v_j(y)$ ($y \in G_j$) образуют группу. Обозначим ее $\bar{G}_j$.

Предложение 2.1. *Отображение*

$$y \rightarrow v_j(y) \quad (2)$$

— *изоморфизм группы G_j на группу $\bar{G}_j$.*

Доказательство. Пусть $y, z \in G_j$. Тогда

$$(i, x) v_j(y) v_j(z) = \begin{cases} (i, y^{-1}xy) v_j(z) = (i, z^{-1}y^{-1}xyz), \\ (i, xy) v_j(z) = (i, xyz), \\ (i, x) v_j(z) = (i, x) \end{cases}$$

в соответствии с каждым из случаев $i < j$, $i = j$, $i > j$. Отсюда $(i, x) v_j(y) v_j(z) = (i, x) v_j(yz)$. Следовательно, (2) —

гомоморфизм. Найдем его ядро. Пусть y — элемент ядра. Тогда $v_j(y)$ — тождественное преобразование, т. е. $(i, x)v_j(y) = (i, x)$ для всех $x \in G_i$. По определению $v_j(y)$ при $i=j$ имеем $(j, 1)v_j(y) = (j, 1 \cdot y) = (j, y)$. Отсюда $(j, 1) = (j, y)$ или $1 = y$, т. е. гомоморфизм (2) имеет единичное ядро. Предложение доказано.

Предложение 2.2. $v_s^{-1}(z)v_j(y)v_s(z) = v_j(z^{-1}yz)$ при $j < s$.

Доказательство. Легко проверить, что для всех $x \in G_i, y \in G_j, z \in G_s$ верны равенства

$$(i, x)v_s^{-1}(z)v_j(y)v_s(z) = \begin{cases} (i, z^{-1}y^{-1}zxz^{-1}yz), \\ (i, xz^{-1}yz), \\ (i, x) \end{cases}$$

соответственно для $i < j, i = j, i > j$. Следовательно, $v_s^{-1}(z)v_j(y)v_s(z) = v_j(z^{-1}yz)$. Предложение доказано.

Обозначим через $\bar{G}$ группу, порожденную всеми $\bar{G}_j$ ($j < \gamma$). Ее называют *накрывающей* для G .

Теорема 2.3 (Ф. Холл [79]). *Образование*

$$v_j(y) \rightarrow y$$

для всех $j < \gamma$ и всех $y \in G_j$ можно продолжить до гомоморфизма $\bar{G}$ на G .

Доказательство. Пусть

$$v_{j_1}(y_1)^{e_1} v_{j_2}(y_2)^{e_2} \dots v_{j_r}(y_r)^{e_r} = 1 \quad (3)$$

— произвольное соотношение группы $\bar{G}$. Нужно доказать (см., например, [64], стр. 54), что тогда в группе G верно соотношение

$$y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_r^{e_r} = 1.$$

В силу предложения 2.1, достаточно считать, что $e_i = 1$, $v_{j_i}(y_i) \neq 1$, $y_i \neq 1$ ($i = 1, \dots, r$) и $j_i \neq j_{i+1}$ ($i = 1, \dots, r-1$). Обозначим $y = y_1 y_2 \dots y_r$. Если $j_i > j_{i+1}$, то

$$v_{j_i}(y_i) v_{j_{i+1}}(y_{i+1}) = v_{j_i}(y_i) v_{j_{i+1}}(y_{i+1}) v_{j_i}(y_i^{-1}) \cdot v_{j_i}(y_i).$$

Теперь по предложению 2.2 левая часть равна $v_{j_{i+1}}(y_i y_{i+1} y_i^{-1}) v_{j_i}(y_i)$. Это означает, что множители в (3) можно переставлять, не меняя значения y . Поэтому

считаем $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Допустим теперь, что слово y непустое, т. е. $r \geq 1$. Тогда, в силу (1), $(j_r, 1)v_{j_r}(y_1) \dots v_{j_r}(y_r) = (j_r, y_r)$. Из (3) следует, что левая часть равна $(j_r, 1)$. Следовательно, $y_r = 1$, что противоречит предположению. Итак, слово y пустое. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь структуру группы $\bar{G}$.

Напомним определение полупрямого произведения любого множества групп (принадлежит С. Н. Черникову). Пусть

$$G_1, G_2, \dots, G_i, \dots \quad (i < \alpha)$$

— вполне упорядоченная система подгрупп группы G , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $G = \langle G_i; i < \alpha \rangle$;
- 2) $G_i \cap \langle G_j; j \neq i, j < \alpha \rangle = 1$;
- 3) $G_i \triangleleft \langle G_j; i \leq j < \alpha \rangle$.

В этом случае группа G называется *полупрямым произведением групп G_i ($i < \alpha$)*. Примем обозначение $G = \bigwedge_{i < \alpha} G_i$.

Предложение 2.4. *Группа $\bar{G}$ — полупрямое произведение групп $\bar{G}_j$ ($j < \gamma$): $\bar{G} = \bigwedge_{j < \gamma} \bar{G}_j$.*

Доказательство. Условие 1) выполнено по определению $\bar{G}$. Условие 3) доказано в предложении 2.2. Докажем 2). Пусть $v_j(y) \in \langle G_s; s \neq j, s < \gamma \rangle$. Если $v_j(y) \neq 1$, то, в силу предложений 2.1 и 2.2, его можно записать в виде

$$v_j(y) = v_{s_1}(y_1) v_{s_2}(y_2) \dots v_{s_k}(y_k), \quad (4)$$

где $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, $y_i \neq 1$, $j \neq s_i$ ($i = 1, \dots, k$). Если $j < s_k$, то по (1)

$$(s_k, 1)v_j(y) = (s_k, 1),$$

$$(s_k, 1)v_{s_1}(y_1) \dots v_{s_k}(y_k) = (s_k, y_k).$$

Из этих равенств следует $y_k = 1$, что противоречит (4). Поэтому считаем $j > s_k$. Тогда

$$(j, 1)v_j(y) = (j, y),$$

$$(j, 1)v_{s_1}(y_1) \dots v_{s_k}(y_k) = (j, 1).$$

Опять получаем $y=1$, что означает $v_j(y)=1$. Следовательно, 3) верно. Предложение доказано.

Обозначим через H_j ($j < \gamma$) группу подстановок, являющуюся ограничением $\bar{G}$ на U_j . Из (1) видно, что уже $\bar{G}_j$ транзитивна на U_j , так что каждое множество U_j — область транзитивности группы $\bar{G}$. Отсюда следует

Теорема 2.5 (Ф. Холл [79]). *Группа $\bar{G}$ — поддекартово произведение групп H_j ($j < \gamma$).*

Исследуем строение H_j ($j < \gamma$). Обозначим через Q_j группу подстановок, являющуюся ограничением $\bar{G}_j$ на U_j , а через A_{js} ($j < s$) — ограничение $\bar{G}_s$ на U_j . Элементы из Q_j будем обозначать $w_j(y)$ ($y \in G_j$), а из A_{js} — через $w_{js}(y)$ ($y \in G_s$).

Теперь каждый элемент $v_j(y)$ можно представить как элемент поддекартова произведения групп H_j ($j < \gamma$)

$$v_j(y) = \prod_{i < j} w_{ij}(y) \times w_j(y)$$

(остальные проекции равны 1). Из предложения 2.2 теперь следует

Предложение 2.6. 1) $w_{js}^{-1}(z)w_j(y)w_{js}(z) = w_j(z^{-1}yz)$,

2) $w_{js}^{-1}(z)w_{jr}(y)w_{js}(z) = w_{jr}(z^{-1}yz)$ при $s > r$.

Обозначим $A_j = \langle A_{js}; j < s < \gamma \rangle = A_{j,j+1} \dots A_{j,s} \dots$

Предложение 2.7. $Q_j \cap A_j = 1$.

Доказательство. Пусть $w_j(y) = w_{j,s_1}(y_1) \dots w_{j,s_k}(y_k)$. Тогда, в силу (1),

$$(j, 1)w_j(y) = (j, y),$$

$$(j, 1)w_{j,s_1}(y_1) \dots w_{j,s_k}(y_k) =$$

$$= (j, y_k^{-1} \dots y_1^{-1} \cdot 1 \cdot y_1 \dots y_k) = (j, 1).$$

Сравнивая равенства, получим $y=1$. Предложение доказано.

Теорема 2.8 (Ф. Холл [79]). *Группа H_j ($j < \gamma$) — полупрямое произведение нормальной подгруппы Q_j , которая является группой правых сдвигов группы G_j , и группы A_j — группы автоморфизмов, индуцированных в G_j сопряжениями с помощью элементов из $\langle G_s; j < s < \gamma \rangle$.*

Вытекает из предложений 2.6, 2.7 и определения Q_j , A_j .

Заметим, что группа $\bar{G}$ не обязательно нормальна в $\bar{G}$.

Пример 2.9. Пусть G — группа кватернионов порядка 8, порожденная элементами a, b : $a^2=b^2, a^4=1, b^{-1}ab=a^{-1}$. Положим $G=G_1G_2$, где $G_1=\langle a \rangle, G_2=\langle b \rangle$. Если бы $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ были нормальны, то по предложению 2.4 $\bar{G}$ была бы прямым произведением двух циклических групп порядка 4, т. е. абелевой. Гомоморфный образ $\bar{G}$ (группа G) неабелев. Поэтому $\bar{G}_2$ не нормальна в $\bar{G}$. Группа $\bar{G}$ равна $\bar{G}_1 \lambda \bar{G}_2$, где $\bar{G}_1=\langle v_1(a) \rangle, \bar{G}_2=\langle v_2(b) \rangle, v_2(b)^{-1}v_1(a)v_2(b)=v_1(a)^{-1}$ (см. предложение 2.2).

§ 3. Подгруппы прямых произведений

В § 1 определено прямое произведение любого семейства групп, как подгруппа декартова произведения. Это определение часто называют «внешним». Иногда удобнее «внутреннее» определение. Говорят, что группа G — *прямое произведение своих подгрупп* (или группа G *разлагается в прямое произведение своих подгрупп*) G_i ($i \in I$), если:

- 1) $G=\langle G_i; i \in I \rangle$;
- 2) $G_i \triangleleft G$;
- 3) $G_i \cap \langle G_j; j \neq i, j \in I \rangle = 1$.

Обозначение, как и для «внешнего» определения: $G = \times_{i \in I} G_i$. Если множество I конечно и равно, например, отрезку натурального ряда $\{1, 2, \dots, n\}$, то пишут также $G = \times_{i=1}^n G_i$ или $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.

Эквивалентность определений доказывать не будем, так как она доказывается во многих распространенных книгах (см., например, [45], § 5).

Если множество индексов вполне упорядочено, т. е. $I = \{1, 2, \dots, i, \dots; i < \alpha\}$, то прямое произведение можно задать более слабыми условиями.

Предложение 3.1. *Группа G — прямое произведение своих нормальных подгрупп G_i ($i \in I$) тогда и только тогда, когда верны следующие условия:*

- 1) $G=\langle G_i; i \in I \rangle$;
- 2) $\langle G_i; i < j \rangle \cap G_j = 1$ для всех $j < \alpha$.

Доказательство. Если G — прямое произведение групп G_i ($i \in I$), то условия 1) и 2) верны по определе-

нию. Пусть, обратно, выполняются условия 1) и 2). Нужно доказать, что для $j < \alpha$ $T_j = G_j \cap \langle G_i; i \neq j, i < \alpha \rangle = 1$. Пусть $T_j \neq 1$, и пусть $g \neq 1$ — элемент из T_j , $g = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$, где $g_{i_s} \in G_{i_s}$, $i_s \neq j$, $g_{i_s} \neq 1$ ($s = 1, 2, \dots, n$). В силу 2) имеем $j < i_n$. Но тогда $(i_1 < i_2 < \dots < i_n)$

$$g_{i_n} = g g_{i_1}^{-1} \dots g_{i_{n-1}}^{-1} \in G_{i_n} \cap \langle G_i; i < i_n \rangle = 1.$$

Отсюда $g_{i_n} = 1$ в противоречие с предположением о g . Предложение доказано.

Лемма 3.2 (Горчаков [13], лемма 5). Пусть N_α ($\alpha < \gamma$) — система нормальных подгрупп группы G , вполне упорядоченная по убыванию, т. е. если $\alpha \leq \beta$, то $N_\alpha \supseteq N_\beta$. Пусть также для любого предельного порядкового числа $\beta < \gamma$ верно $\bigcap_{\alpha < \beta} N_\alpha = N_\beta$. Тогда, если H_α ($\alpha < \gamma$) — система таких подгрупп H_α группы G , что $N_\alpha \cap H_\alpha = 1$, то $N_1 \cap \bigcap_{\alpha < \gamma} H_\alpha N_{\alpha+1} = \bigcap_{\alpha < \gamma} N_\alpha$.

Доказательство. Пусть n_1 — произвольный элемент из $N_1 \cap (\bigcap_{\alpha < \gamma} H_\alpha N_{\alpha+1})$. Тогда $n_1 = h_\alpha n_2 = \dots = h_\alpha n_{\alpha+1} = \dots$, где $h_\alpha \in H_\alpha$ и $n_\beta \in N_\beta$. Предположим, что α_0 — первое порядковое число, для которого $h_{\alpha_0} \neq 1$. Возможны два случая.

1) α_0 — неопредельное порядковое число. Тогда $n_{\alpha_0} = h_{\alpha_0} n_{\alpha_0+1}$ или $h_{\alpha_0} = n_{\alpha_0} n_{\alpha_0+1}^{-1}$. Так как $H_{\alpha_0} \cap N_{\alpha_0} = 1$ и $N_{\alpha_0+1} \subseteq N_{\alpha_0}$, то $h_{\alpha_0} = 1$. Это означает, что α_0 не может быть неопредельным порядковым числом.

2) α_0 — предельное порядковое число. Тогда $n_1 \in \bigcap_{\beta < \alpha_0} N_\beta = N_{\alpha_0}$. Потому $h_{\alpha_0} \in N_{\alpha_0}$, т. е. опять $h_{\alpha_0} = 1$. Противоречие с выбором h_{α_0} показывает, что α_0 не может быть предельным порядковым числом. Ввиду произвольности выбора n_1 , лемма доказана.

Если группа G такая подгруппа прямого произведения групп G_i ($i \in I$), что ее проекции на G_i равны G_i , то G называют *подпрямым произведением групп G_i ($i \in I$)*.

Хороших критериев вложимости группы в прямое произведение групп нет (таких, например, как в теореме 1.2 для представления поддекартовыми произведениями).

В статьях Черникова [61] и Ф. Холла [79] в процессе доказательств возник метод вложения групп в прямое произведение счетного числа групп. Здесь мы дадим ему явную формулировку.

Теорема 3.3. *Если группа G имеет две цепочки нормальных подгрупп (упорядоченных натуральными числами)*

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_i \subseteq \dots,$$

$$H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_i \supseteq \dots,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) G_i \cap H_i = 1,$$

$$2) \bigcup G_i = G,$$

то группа G — подпрямое произведение групп G/T_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), где $T_0 = H_1$, $T_i = G_i H_{i+1}$ ($i \geq 1$).

Доказательство. Пусть $H = \bigcap H_j$. Для всех i имеем $G_i \cap H \subseteq G_i \cap H_i = 1$ (см. 1)). Так как (см. 2)) $G \cap H = (\bigcup G_i) \cap H = \bigcup (G_i \cap H) = 1$, то (опять см. 2)) $H = 1$. Из леммы 3.2 получаем $\bigcap T_i = 1$. Теорема 1.2 теперь утверждает,

что G — поддекартово произведение групп G/T_i ($i \geq 0$). Осталось показать, что носители всех элементов конечны. Если $g \in G_{i+1} \setminus G_i$, то $g \in T_{i+1}$. Следовательно, проекции g на группы G/T_j ($j \geq i+1$) равны 1. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые подгруппы прямого произведения.

Предложение 3.4 (Ремак [96], теорема 2). *Если $G = \times_{i \in I} G_i$, $N \triangleleft G$, N_i — проекции N на G_i , то $G_i \cap N$ содержит $[G_i, N_i]$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. Пусть $n = \times_{i \in I} n_i$. Тогда $[n_i, g_i] = [n_i, g_i] \in G_i \cap N$, так как $N \triangleleft G$ и $G_i \triangleleft G$. Предложение доказано.

Следствие 3.5. *Коммутант прямого произведения — прямое произведение коммутантов.*

Доказательство. Из предложения 3.4 получаем, что коммутант прямого произведения содержит прямое произведение коммутантов множителей, а больше он быть не может. Следствие доказано.

Предложение 3.6. *Каждый член верхнего центрального ряда прямого произведения есть прямое произведение членов верхнего центрального ряда сомножителей с небольшими номерами.*

Вытекает из следствия 1.14.

Рассмотрим вопрос о ящичности подгрупп подпрямого произведения групп.

Предложение 3.7. *Любой член верхнего центрального ряда подпрямого произведения групп — ящичная подгруппа.*

Доказательство. Пусть G — подпрямое произведение групп G_i ($i \in I$), $Z_j(G)$ — j -й член верхнего центрального ряда. Для натуральных j предложение следует из следствия 1.13. Докажем для j бесконечных. Если j — неопредельное число и для всех меньших чисел предложение доказано, то $Z_{j-1}(G)$ — ящичная подгруппа. По предложению 1.6 $G/Z_{j-1}(G)$ — подпрямое произведение групп $G_i/(Z_{j-1}(G))_i$. В силу следствия 1.13, $Z_j(G)/Z_{j-1}(G)$ — ящичная подгруппа в $G/Z_{j-1}(G)$. Следовательно, $G/Z_{j-1}(G) \cap \bigtimes_{i \in I} (Z_j(G))_i / (Z_{j-1}(G))_i = Z_j(G)/Z_{j-1}(G)$. Отсюда $Z_j(G) \subseteq G \cap \bigtimes_{i \in I} (Z_j(G))_i$. Так как произведение пря-

мое, то обратное включение очевидно. Следовательно, $Z_j(G)$ — ящичная подгруппа. Пусть j — предельное число. Так как для всех $s < j$ $G \cap \bigtimes_{i \in I} (Z_s(G))_i = Z_s(G)$, то

$$G \cap \bigtimes_{i \in I} (Z_j(G))_i = G \cap \bigtimes_{i \in I} \left(\bigcup_{s < j} (Z_s(G))_i \right) \supseteq \bigcup_{s < j} Z_s(G) = Z_j(G).$$

Так как произведение прямое (носители элементов конечны), то $G \cap \bigtimes_{i \in I} Z_j(G_i) \subseteq Z_j(G)$. Это означает, что

$Z_j(G)$ — ящичная подгруппа. Предложение доказано.

Следствие 3.8 (Томкинсон). *Если G — подпрямое произведение конечных групп, то факторы верхнего центрального ряда группы G разлагаются в прямые произведения циклических групп.*

Вытекает из предложения 3.7 (или следствия 1.13), предложения 1.6 и результатов Прюфера по абелевым группам (см., например, [40], стр. 146).

Часто бывает полезной простая теорема Кляйна — Фрике (см. [96], теорема 1).

Предложение 3.9. Если G — подпрямое произведение групп G_1 и G_2 , $A_i = G \cap G_i$ ($i=1, 2$), то $G/A_1 \simeq G_2/A_2$.

Достаточно увидеть, что $G/A_1 \times A_2 \simeq G_i/A_i$ ($i=1, 2$).

Пример 3.10. Построим подпрямое произведение групп, коммутант которого не является ящичной подгруппой.

Пусть p — простое число. Группу G_i зададим порождающими элементами

$$a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$$

и определяющими соотношениями

$$a_i^{p^i} = b_i^{p^i} = c_i^{p^i} = d_i^{p^i} = e_i^{p^i} = 1,$$

$$[a_i, b_i] = [c_i, d_i] = e_i,$$

$$[a_i, c_i] = [b_i, c_i] = [a_i, d_i] = [b_i, d_i] = 1,$$

$$[a_i, e_i] = [b_i, e_i] = [c_i, e_i] = [d_i, e_i] = 1.$$

Группа G_i — произведение двух поэлементно перестановочных изоморфных групп $\langle a_i, b_i \rangle$ и $\langle c_i, d_i \rangle$ с общим центром $\langle e_i \rangle$. Коммутант и центр группы G_i совпадают и равны $\langle e_i \rangle$.

В $\times_{i=1,2,\dots} G_i$ возьмем подгруппу G , порожденную элементами $g_i = a_{2i-1}a_{2i}^p$, $h_i = b_{2i-1}b_{2i}^{-1}$, $r_i = c_{2i}c_{2i+1}^p$, $s_i = d_{2i}d_{2i+1}^{-1}$, e_i ($i = 1, 2, \dots$). Так как $[g_i, h_i] = e_{2i-1}e_{2i}^{-p}$, $[r_i, s_i] = e_{2i}e_{2i+1}^{-p}$, а остальные коммутаторы, составленные из порождающих группы G , равны 1, то коммутант G' группы G равен $\times_{i=1,2,\dots} \langle e_i e_{i+1}^p \rangle$. Центр группы G равен $\times_{i=1,2,\dots} \langle e_i \rangle$. Он же — ящик для G' . Очевидно, $Z(G) \neq G'$. Фактор-группа $Z(G)/G'$ — квазиклическая p -группа.

Подгруппы счетного числа конечных групп имеют следующее интересное описание, исходящее (идейно) из теоремы 3.3.

Теорема 3.11. Если G — подпрямое произведение конечных групп G_i ($i=1, 2, \dots$), то существует такое разбиение множества натуральных чисел на попарно непересекающиеся конечные множества A_i ($i=1, 2, \dots$), что $G = H_1 H_2 \dots H_i \dots$, где $H_i = G \cap \times_{j \in A_i \cup A_{i+1}} G_j$.

Группа G — подпрямое произведение групп P_i — проекций G на $\times_{j \in A_i} G_j$; носитель подгруппы H_i при этом вложении лежит в $\{i, i+1\}$.

Доказательство. Вторая часть теоремы очевидна, если доказана первая. Докажем первую.

Так как группа G_i конечна, то в G существует подгруппа S_i , проекция которой на G_i равна G_i . Обозначим $Q_i = G \cap \times_{j \neq i} G_j$. Тогда $G = S_i Q_i$. Пусть B_i — носитель S_i .

Он конечен. В Q_i существует такая конечная подгруппа S_2 , что проекция S_2 на $\times_{i \in B_i \cup \{2\}} G_i$ совпадает с проекцией

Q_i . Пусть $Q_2 = Q_i \cap \times_{i \notin B_i \cup \{2\}} G_i$. Тогда $Q_i = S_2 Q_2$. Нетрудно,

таким образом, построить конечные множества натуральных чисел

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_n$$

и подгруппы

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots \supseteq Q_n,$$

которые для $i > 1$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $B_i = \{i\} \cup B_{i-1} \cup \text{supp } S_i$;
- 2) S_i — любая конечная подгруппа, проекция которой на $\times_{j \in B_{i-1} \cup \{i\}} G_j$ совпадает с проекцией Q_{i-1} ;
- 3) $Q_i = Q_{i-1} \cap \times_{j \notin B_{i-1} \cup \{i\}} G_j$.

Из 2) и 3) получаем $Q_{i-1} = S_i Q_i$ ($i > 1$). Обозначим $H_i = Q_{i-1} \cap \times_{j \in \text{supp } S_i} G_j$. Очевидно, $H_i \supseteq S_i$ и $H_i \triangleleft G$. Теперь получаем равенства

$$G = H_1 Q_1, \quad Q_1 = H_2 Q_2, \quad \dots, \quad Q_i = H_{i+1} Q_{i+1}, \quad \dots$$

Из них получаем $G = H_1 H_2 \dots H_i \dots$. В силу 1) — 3), носители S_i и Q_{i+1} не пересекаются. Поэтому носители S_i и S_{i+2} также не пересекаются. Следовательно, не пересекаются носители H_i и H_{i+2} . Обозначим через $A_i = \text{supp } H_i \setminus \text{supp } H_{i+1}$. Тогда $\text{supp } H_i = (\text{supp } H_i \setminus \text{supp } H_{i+1}) \cup (\text{supp } H_{i+1} \setminus \text{supp } H_{i+2}) = A_i \cup A_{i+1}$. Теорема доказана.

Следствие 3.12 (Ф. Холл [79]). Если G — подпрямое произведение счетного числа конечных групп, то группа G является произведением двух своих подгрупп, каждая из которых — прямое произведение конечных нормальных подгрупп группы G .

Действительно,

$$G = H_1 H_2 \dots H_i \dots =$$

$$= (H_1 \times H_3 \times \dots \times H_{2i-1} \times \dots) \cdot (H_2 \times H_4 \times \dots \times H_{2i} \times \dots).$$

Следствие 3.13. Подпрямое произведение счетного числа конечных групп является расширением прямого произведения конечных групп, нормальных в группе, при помощи прямого произведения конечных групп.

Доказательство. Пусть, как в теореме 3.11, группа G — подпрямое произведение конечных групп P_i ($i = 1, 2, \dots$), $G = H_1 H_2 \dots H_i \dots$ ($i = 1, 2, \dots$) и носитель $H_i \subseteq \{i, i+1\}$. По предложению 1.6 $\bar{G} = G / \times_i M_i$, где $M_i = G \cap P_i$, — подпрямое произведение групп P_i / M_i . Обозначим $\bar{H}_i = H_i (\times_i M_i) / \times_i M_i$; получим $\bar{G} = \bar{H}_1 \bar{H}_2 \dots \bar{H}_i \dots$. Так как $\text{supp}(H_i \cap H_j) = \emptyset$ или $\{i+1\}$, то это произведение прямое. Следствие доказано.

Из теоремы 3.11 сразу видно, что примеры подпрямых произведений, неразложимых в прямое произведение конечных групп, нужно искать именно среди подгрупп, порожденных элементами, носители которых имеют мощность не более 2. Таковы примеры С. Н. Черникова и Ф. Холла.

Пример 3.14 (Черников [57]). Построим подпрямое (но не прямое) произведение конечных групп, лишь конечное число множителей которого имеют элементы одного простого порядка.

Возьмем бесконечную последовательность простых чисел

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

удовлетворяющую условиям

$$p_{2i} \equiv 1 \pmod{p_{2i-1} p_{2i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Она существует по теореме Дирихле.

Группа автоморфизмов циклической группы простого порядка p — циклическая порядка $p-1$. Поэтому существуют группы порядков $p_{2i} p_{2i-1} p_{2i+1}$

$$H_i = \langle a_i \rangle \lambda \langle b_i \rangle,$$

$a_i^{p_{2i}} = 1$; $b_i^{p_{2i-1}p_{2i+1}} = 1$, $b_i^{-1}a_ib_i = a_i^{m_i}$, m_i такое наименьшее натуральное число $\neq 1$, что $m_i^{p_{2i}} \equiv 1 \pmod{p_{2i-1}p_{2i+1}}$. В группе $\times_i H_i$ возьмем подгруппу H , порожденную элементами a_i ($i = 1, 2, \dots$), $c_1 = b_1^{p_2}$, $c_2 = b_1^{p_1}b_2^{p_2}$, $\dots$, $c_i = b_{i-1}^{p_{2i-3}}b_i^{p_{2i+1}}$, $\dots$

Группа H — полупрямое произведение двух локально циклических групп: $H = (\times_i \langle a_i \rangle) \lambda (\times_i \langle c_i \rangle)$. Следовательно, все ее силовские подгруппы — циклические.

Группа H неразложима в прямое произведение. Предположим, что $H = L \times M$. Пусть x — элемент простого порядка p из H ; $x = lm$, $l \in L$, $m \in M$. Так как силовские подгруппы группы H циклические, то либо l , либо m равен 1. Пусть $c_1 \in L$. Тогда $a_1 \in L$, так как $[c_1, a_1] \neq 1$. Из $[a_1, c_2] \neq 1$ следует $c_2 \in L$ и т. д. Получаем $c_1, a_1, c_2, a_2, \dots \in L$. Это означает, что $H \subseteq L$. Предположение $c_1 \in M$ приводит к $H \subseteq M$. Неразложимость H доказана.

Пример 3.15 (Ф. Холл [79]). Построим *подпрямое произведение изоморфных конечных групп, неразложимое в прямое произведение*.

Группу диэдра D_i ($i = 0, \pm 1, \dots$); можно задать порождающими a_i, b_i, c_i и соотношениями $a_i^2 = b_i^2 = c_i^2 = [a_i, b_i] = [b_i, c_i] = 1$, $[a_i, c_i] = b_i$. В $\times_i D_i$ возьмем подгруппу H , порожденную элементами $g_{2i-1} = a_{i-1}a_{2i}$, $g_{2i} = c_{2i}c_{2i+1}$ ($i = 0, \pm 1, \dots$). Центр H равен коммутанту и равен $\times_i \langle b_i \rangle$. Пусть $H = L \times M$.

Каждый элемент, лежащий вне центра, можно записать в виде

$$g = g_{i_1}g_{i_2} \dots g_{i_k}z, \quad (1)$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \geq 1$, $z \in Z(H)$. Элемент g_{i_1} назовем левым, а g_{i_k} — правым концом элемента g . Если g_{i_1} — левый конец как элемента $l \in L$, так и элемента $m \in M$, то $[g_{i_1}, l] = [g_{i_1}, m] = b_{i_1} \neq 1$. Это означает, что $L \cap M \neq 1$, в противоречии с тем, что $L \times M$ — прямое произведение. Итак, левые концы элементов l и m различны. Также можно показать, что различны их правые концы. Отсюда

следует, что lm (если l и $m \notin Z(H)$) имеет запись вида (1) с $k \geq 2$. Но тогда $g_i z_i \in L$ или M , $z_i \in Z(H)$. Пусть $g_i z_i \in L$. Тогда $g_i z_i$ и $g_0 z_0$ также лежат в L . Продолжая процесс выяснения принадлежности, получаем, что $g_i z_i$ лежат в L для всех i . Но тогда коммутант H' группы H лежит в L . Ввиду следствия 3.5 и $H' = Z(H)$, получаем $L = H$. Случай $g_i z_i \in M$ рассматривается аналогично. Тем самым доказана неразложимость H .

Прежде чем изучать подпрямые произведения несчетного числа конечных групп, докажем несколько простых вспомогательных утверждений.

Лемма 3.16. *Классы сопряженных элементов подпрямого произведения конечных групп конечны.*

Лемма очевидна.

Лемма 3.17 (Горчаков [18], лемма 1). *Если в группе G с конечными классами сопряженных элементов имеется отделимая топология, то централизатор любого ее элемента открыт.*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Подгруппа $C(g)$ замкнута (см., например, [4], гл. I, § 8, предложение 2). Индекс $C(g)$ в G конечен. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^n C(g) x_i$, где $x_1 = 1$.

Тогда $C(g) = G \setminus \left(\bigcup_{i=2}^n C(g) x_i \right)$. Так как $\bigcup_{i=2}^n C(g) x_i$ — замкнутое множество, то $C(g)$ — открытое. Лемма доказана.

Лемма 3.18 (Горчаков [18], лемма 2). *Пусть классы сопряженных элементов группы G конечны и H — плотная в G подгруппа. Тогда их коммутанты равны: $H' = G'$. Более того, для всяких $a, b \in G$ существуют такие элементы $h, r \in H$, что $[a, b] = [h, b] = [h, r]$.*

Доказательство. Пусть a, b — произвольные элементы из G . По лемме 3.17 $C(b)$ — открытая подгруппа. Так как H плотна, то $C(b)a \cap H \ni h$. Тогда существует такой элемент $c \in C(b)$, что $ca = h$ или $a = c^{-1}h$. Отсюда (см. [29], стр. 36) $[a, b] = [c^{-1}h, b] = h^{-1}[c^{-1}, b]h \cdot [h, b] = [h, b]$, так как $[c^{-1}, b] = 1$. Итак, $[a, b] = [h, b]$. Аналогично, $C(h)b \cap H \ni r$ и существует такой $u \in C(h)$, что $ub = r$ или $b = u^{-1}r$. Следовательно, $[a, b] = [h, b] = [h, u^{-1}r] = [h, r] \cdot r^{-1}[h, u^{-1}]r = [h, r]$, так как $[h, u^{-1}] = 1$. Лемма доказана.

Пусть G — поддекартово произведение групп G_i ($i \in I$). Подгруппа H группы G называется *плотной* в G ,

на $J \subseteq I$, если проекция $H(J)$ группы H на $\prod_{i \in J} G_i$ плотна в проекции $G(J)$ группы G на ту же группу.

Окрестностями элемента $g \in G$ служат пересечения

$$G \cap \left(\prod_{i \in M} V_i \times \prod_{i \in I \setminus M} G_i \right),$$

где M — произвольное конечное множество, а V_i — окрестность проекции g_i элемента g на G_i ($i \in M$).

Пусть $g(J)$ — проекция g на $\prod_{i \in J} G_i$ и V — окрестность

g . Произвольная окрестность элемента $g(J)$ — это проекция $V(J)$ множества V на $\prod_{i \in J} G_i$ для любой окрестности V элемента g , соответствующей конечному множеству $M \subseteq J$.

Лемма 3.19. *Для того чтобы H была плотна в G на $J \subseteq I$, необходимо и достаточно, чтобы группа H была плотна в G на всяком конечном подмножестве M из J .*

Доказательство. Если H плотна на J , то для всякого $g(J) \in G(J)$ и всякой его окрестности $V(J)$ имеем $V(J) \cap H(J) \neq \emptyset$. Тогда для любого конечного подмножества $M \subseteq J$ имеем $V(M) \cap H(M) \neq \emptyset$. Так как $V(M)$ — произвольная окрестность элемента $g(M)$, то $H(M)$ плотна в $G(M)$, т. е. H плотна в G на всяком конечном подмножестве M из J .

Пусть H плотна в G на всяком конечном подмножестве $M \subseteq J$. Пусть $g(J)$ — произвольный элемент из $H(J)$ и $V(J)$ — его окрестность. $V(J)$ — проекция на $\prod_{i \in J} G_i$ некоторой окрестности V элемента $g \in G$, соответствующей некоторому конечному множеству M . Так как $Q = G \cap \prod_{i \in M} V_i$ содержится во всякой окрестности единицы, со-

ответствующей множеству M , то $VQ = V$. Теперь из $V(M) \cap H(M) \neq \emptyset$ следует $VQ \cap H \neq \emptyset$ или $V \cap H \neq \emptyset$. Но тогда $V(J) \cap H(J) \neq \emptyset$. Лемма доказана.

Лемма 3.20 (Горчаков [18], лемма 4). Пусть $G \subseteq \prod_{i \in I} G_i$ и H_i плотны в G на J_i , где $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_i \subseteq \dots$ —

подгруппы G и $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_i \subseteq \dots$ — подмножества I . Тогда $H = \bigcup_i H_i$ плотна в G на $J = \bigcup_i J_i$.

Вытекает из леммы 3.19, так как всякое конечное подмножество $M \subseteq J$ принадлежит J_i для некоторого i .

Лемма 3.21 (Горчаков [18], лемма 5). Пусть G — бесконечная подгруппа прямого произведения $\times_{i \in I} G_i$ конечных групп и проекция G на G_i равна G_i для всех $i \in I$. Тогда существует такое счетное подмножество $J \subseteq I$, что подгруппа $G \cap \times_{i \in J} G_i$ плотна на J .

Доказательство. Пусть $I_0 = \{i_1\}$ для некоторого $i_1 \in I$. В G существует конечная нормальная подгруппа H_1 , проекция которой на G_{i_1} совпадает с G_{i_1} . Пусть I_1 — множество таких $i \in I$, что проекция H_1 на G_i отлична от 1. Очевидно, I_1 — конечное множество. $K_1 = G \cap \times_{i \notin I_1} G_i$ имеет в G конечный индекс. Итак, пусть для всех $s < t$ построены H_s , K_s и I_s со следующими условиями:

- 1) H_s — конечная подгруппа, $H_s \subseteq H_r$ при $s \leq r$.
- 2) I_s ($s \geq 1$) — подмножество в I , состоящее из всех i , для которых проекция H_s на G_i отлична от 1.

$$3) K_s = G \cap \times_{i \notin I_s} G_i,$$

$$4) H_{s+1} K_s = G \text{ для } s+1 \leq t.$$

Построим H_t , K_t , I_t , удовлетворяющие условиям 1) — 4). Так как H_{t-1} конечна (см. 1)), то конечно I_{t-1} (см. 2)). Но тогда конечен индекс в G группы K_{t-1} (см. 3)). Следовательно, существует конечная подгруппа H_t , содержащая H_{t-1} и удовлетворяющая условию $H_t K_{t-1} = G$. Множество I_t строим как в 2), а K_t — как в 3). Итак, H_s , K_s , I_s с условиями 1) — 4) построены для всех натуральных s .

Пусть $H = \bigcup_s H_s$, $J = \bigcup_s I_s$. Покажем, что H плотна на J . В силу условия 4), подгруппа H_{s+1} плотна в G на I_s . По лемме 3.20 получаем, что H плотна в G на J . Так как H содержится в $G \cap \times_{i \in J} G_i$, то лемма доказана.

Теорема 3.22. Пусть G — бесконечная подгруппа прямого произведения $\times_{i \in I} G_i$ конечных групп. Тогда I можно представить как объединение $\bigcup_{a < \kappa} I(a)$ вполне упорядоченной по включению цепочки таких подмножеств $I(a)$, что:

- 1) $I(a+1) \setminus I(a)$ — счетное множество;

2) подгруппа $G^{(a)} = G \cap \bigtimes_{i \in I(a)} G_i$ плотна в G на $I(a)$;

3) если a — предельное число, то $I(a) = \bigcup_{j < a} I(j)$.

Доказательство. По лемме 3.21 существует такое счетное подмножество $I(1)$, что $G^{(1)} = G \cap \bigtimes_{i \in I(1)} G_i$ плотна в G на $I(1)$. Пусть уже построена цепочка подмножеств

$$I(1) \subset I(2) \subset \dots \subset I(s) \subset \dots, \quad s < b,$$

удовлетворяющих условиям 1) — 3) заключения леммы. Возможны два случая.

А) b — предельное число. Тогда, в силу леммы 3.20, группа $\bigcup_{s < b} G^{(s)}$ плотна в G на $I(b) = \bigcup_{s < b} I(s)$. Так как $\bigcup_{s < b} G^{(s)} \subseteq G^{(b)}$, то $G^{(b)}$ плотна в G на $I(b)$.

Б) b — неперелыное число. Обозначим через $G(b-1)$ проекцию G на $\bigtimes_{i \in I(b-1)} G_i$. В силу леммы 3.21, существует такое счетное подмножество $J \subseteq I \setminus I(b-1)$, что $Q =$

$= G(b-1) \cap \bigtimes_{i \in J} G_i$ плотна в $G(b-1)$ на J . Q является проекцией подгруппы $H = G \cap \bigtimes_{i \in I(b-1) \cup J} G_i$. Пусть M — произ-

вольное конечное подмножество в $S = I(b-1) \cup J$. Тогда $M = (I(b-1) \cap M) \cup (J \cap M)$. В силу леммы 3.19, достаточно доказать, что H плотна в G на M . Пусть $g \in G$. Так как Q плотна в G на J , то H плотна в G на J . Поэтому H плотна в G на $J \cap M$. Это означает, что в H существует элемент h , проекция которого на $\bigtimes_{i \in J \cap M} G_i$ рав-

на проекции на эту же группу элемента g . Рассмотрим gh^{-1} . Его проекция на $\bigtimes_{i \in J \cap M} G_i$ равна 1. Так как $G^{(b-1)}$ плот-

на в G на $I(b-1)$, то она плотна в G на $I(b-1) \cap M$. Поэтому в $G^{(b-1)}$ существует элемент f , проекция которого на $\bigtimes_{i \in I(b-1) \cap M} G_i$ равна проекции gh^{-1} . Так как проекция f на

$\bigtimes_{i \in J} G_i$ равна 1, то $gh^{-1}f^{-1}$ имеет на $\bigtimes_{i \in M} G_i$ единичную проекцию, т. е. проекции g и fh на группу $\bigtimes_{i \in M} G_i$ равны. Это

означает, что H плотна в G на $I(b-1) \cup J$. Обозначим

$I(b) = I(b-1) \cup J$, $G^{(b)} = H$. Процесс выбора $I(b)$ закончится, как только получим $I = \bigcup_{a < c} I(a)$. Теорема доказана.

Следствие 3.23. В обозначениях теоремы 3.22 пусть $S \triangleleft G$, $J(a) = I(a+1) \setminus I(a)$, $J(0) = I(1)$, $Q^{(a)} = S \cap \prod_{i \in J(a)} G_i$. Тогда

$$[S, G] \subseteq \prod_{a < c} Q^{(a)},$$

$$C_G(G/S) = C_G(G / \prod_{a < c} Q^{(a)}).$$

Доказательство. Докажем первую часть следствия. Пусть $H^{(a)}$ — проекция S на $\prod_{i \in I(a)} G_i$, $D^{(a)}$ — проекция

G на ту же группу, $S^{(a)} = S \cap G^{(a)}$. По теореме 3.22 $G^{(c)}$ плотна в $D^{(a)}$. Следовательно, для любых $h \in H^{(a)}$, $d \in D^{(a)}$ в $G^{(a)}$ существует такой элемент r , что $[h, d] = [h, r]$ (см. лемму 3.18). Отсюда $[H^{(a)}, D^{(a)}] = [H^{(a)}, G^{(a)}] = [S, G^{(a)}] \subseteq S^{(a)}$. Так как $[S, G] = \bigcup_{a < c} [S, G^{(a)}]$, то достаточно доказать, что

$$[S, G^{(a)}] \subseteq \prod_{j < a} Q^{(j)}. \quad (2)$$

Так как $Q^{(0)} = S^{(1)}$, то $[S, G^{(1)}] \subseteq Q^{(0)}$. Пусть для всех $b < a$ включение (2) выполнено. Докажем его для a .

А) a — предельное порядковое число. Тогда $I(a) = \bigcup_{b < a} I(b)$. Отсюда $G^{(a)} = \bigcup_{b < a} G^{(b)}$. Получаем

$$\begin{aligned} [S, G^{(a)}] &= [S, \bigcup_{b < a} G^{(b)}] = \bigcup_{b < a} [S, G^{(b)}] \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{b < a} \left(\prod_{j < b} Q^{(j)} \right) = \prod_{j < a} Q^{(j)}. \end{aligned}$$

Б) a — непредельное порядковое число. По индуктивному предположению имеем

$$[S, G^{(a-1)}] \subseteq \prod_{j < a-1} Q^{(j)}.$$

Пусть, как и ранее, $h \in H^{(a)}$, $d \in D^{(a)}$, $r \in G^{(a)}$. Тогда $h = h'h''$, $d = d'd''$, где h' , $d' \in H^{(a-1)}$, h'' , d'' — проекции h и d на $\prod_{i \in J(a-1)} G_i$. По лемме 3.18 $[h', d'] = [h', r']$ для $r' \in G^{(a-1)}$.

Итак, $[h, d] = [h'h'', d'd''] = [h', d'][h'', d''] = [h', r'][h'', d'']$. Отсюда $[h'', d''] = [h', d']^{-1}[h, d] \in S^{(a)}$. Но $[h'', d''] \in \bigtimes_{i \in J(a-1)} G_i$.

Поэтому $[h'', d''] \in Q^{(a-1)}$. Следовательно, любой коммутатор из $[S, G^{(a)}]$ равен произведению коммутатора из $[S, G^{(a-1)}]$ и элемента из $Q^{(a-1)}$. Поэтому $[S, G^{(a)}] \subseteq [S, G^{(a-1)}] \times Q^{(a-1)} \subseteq \bigtimes_{j < a} Q^{(j)}$.

Первое утверждение следствия доказано. Докажем второе.

Пусть $qS \in Z(G/S)$, $q = \bigtimes_{a < s} q_a$, где q_a — проекция q на $\bigtimes_{j \in J(a)} G_j$. Пусть x — произвольный элемент из G и $x = \bigtimes_{a < c} x_a$, где x_a — проекции x на те же группы. Так как qS лежит в центре G/S , то $[q, x] \in S$. Найдем $[q, x]$. Коммутатор $[q, x]$ имеет конечное число неединичных проекций:

$$[q_{a_1}, x_{a_1}], [q_{a_2}, x_{a_2}], \dots, [q_{a_r}, x_{a_r}],$$

где $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. По лемме 3.18 существует такой $y_{a_1} \in G^{(a_1+1)}$, что $[q_{a_1}, x_{a_1}] = [q_{a_1}, y_{a_1}]$. Так как $[q_{a_1}, y_{a_1}] = [q, y_{a_1}]$, то $[q_{a_1}, x_{a_1}] \in S$. Пусть уже доказано, что $[q_{a_i}, x_{a_i}] \in S$ для $i < j \leq r$. По лемме 3.18 существует такой $y \in G^{(a_j+1)}$, что

$$[\bigtimes_{i \leq j} q_{a_i}, \bigtimes_{i \leq j} x_{a_i}] = [\bigtimes_{i \leq j} q_{a_i}, y].$$

Так как

$$[\bigtimes_{i \leq j} q_{a_i}, y] = [q, y] \in S,$$

то

$$[q_{a_j}, x_{a_j}] = [q, y] \cdot (\bigtimes_{i < j} [q_{a_i}, x_{a_i}])^{-1} \in S.$$

Итак, для всякого $i \leq r$

$$[q_{a_i}, x_{a_i}] \in S \cap \bigtimes_{j \in J(a_i)} G_j = Q^{(a_i)}.$$

Это доказывает вторую часть утверждения. Следствие доказано.

Заметим, что $G^{(a)}$ — замкнутая в тихоновской топологии подгруппа, но она может не совпадать с проекцией

группы G на $\times_{i \in I(a)} G_i$, так как в проекции она может быть не замкнутой.

Пример 3.24. Группа H из примера 3.15 не замкнута в $\times_i D_i$, но всюду плотна в этом прямом произведении.

Рассмотрим группы $\bar{D}_i$ ($i=0, \pm 1, \dots$), порожденные элементами $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$ с теми же соотношениями, как и в D_i . Подгруппу $\bar{H}$ породим элементами $\bar{g}_i$, которые выбраны подобно g_i . В прямом произведении

$$G = (\times_i D_i) \times (\times_i \bar{D}_i)$$

возьмем подгруппу $Q = \langle H \times \bar{H}, a_0 \bar{a}_0, c_0 \bar{c}_0 \rangle$. Группа $H \times \bar{H}$ всюду плотна в Q , H и $\bar{H}$ замкнуты в Q , H не замкнута, но всюду плотна в $\times_i D_i$.

§ 4. Гомоморфные образы подпрямых произведений

Пусть Ω — наименьший класс групп, содержащий данный класс групп Λ и удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) если группа H принадлежит Ω , то и любая ее подгруппа принадлежит Ω ;
- 2) класс Ω вместе с любой группой H содержит все ее гомоморфные образы;
- 3) если семейство групп H_i ($i \in I$) лежит в Ω , то в Ω лежит и группа $\times_{i \in I} H_i$.

Класс групп Ω назовем *прямым многообразием*, порожденным классом Λ . Часто для него употребляют обозначение $\text{qsd } \Lambda$ или $\text{QSD } \Lambda$.

Для групп с конечными классами сопряженных элементов большой интерес представляет прямое многообразие, порожденное классом всех конечных групп. Этот класс содержит все конечные группы, их прямые произведения, подгруппы прямых произведений и фактор-группы последних.

Предложение 4.1. *Прямое многообразие, порожденное классом всех конечных групп, совпадает с классом всех фактор-групп подпрямых произведений конечных групп.*

Это предложение получается из следующей более общей леммы.

Лемма 4.2. *Прямое многообразие Ω , порожденное данным классом групп Λ , совпадает с классом всех фактор-групп подгрупп прямых произведений групп класса Λ .*

Доказательство. Обозначим через Ω_1 класс всех фактор-групп всех подгрупп прямых произведений групп класса Λ . Нужно доказать, что $\Omega = \Omega_1$. Возможны следующие случаи:

1) Пусть $G \in \Omega_1$ и N — нормальная подгруппа G . Докажем, что G/N содержится в Ω_1 . Так как $G \simeq H/R$, где H — подпрямое произведение групп H_i ($i \in I$), которые являются подгруппами групп из Λ , то H содержит такую нормальную подгруппу D , что $D \supseteq R$, $D/R \simeq N$, $G/N \simeq H/D$. Поэтому $G/N \in \Omega_1$.

2) Пусть $G \in \Omega_1$ и H — подгруппа G . Докажем, что $H \in \Omega_1$. Группа G есть гомоморфный образ K/N подгруппы K прямого произведения $\bigtimes_{i \in I} K_i$ групп класса Λ . Так как $H \subset G$, то существует такая подгруппа D группы K , что $D/N \simeq H$. Следовательно, $H \in \Omega_1$.

3) Пусть $H = \bigtimes_{i \in I} H_i$, где $H_i \in \Omega_1$. Покажем, что $H \in \Omega$. Так как H_i изоморфна K_i/N_i , где $K_i \subseteq \bigtimes_{j \in A_i} D_{ij}$ (здесь $D_{ij} \in \Lambda$), то из этого включения и соотношения $\bigtimes_{i \in I} K_i/N_i \simeq (\bigtimes_{i \in I} K_i)/(\bigtimes_{i \in I} N_i)$ следует, что группа H изоморфна фактор-группе некоторой подгруппы группы $\bigtimes_{(i,j) \in V} D_{ij}$, где $V = I \times (\bigcup_{i \in I} A_i)$. Потому $H \in \Omega_1$. Лемма доказана.

Теорема 4.3 (Горчаков [18], следствие 1). *Бесконечный гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп можно представить как фактор-группу H/N по центральной подгруппе подпрямого произведения счетных групп. Представление можно выбрать так, чтобы центр H/N был образом центра H .*

Сразу вытекает из следствия 3.23.

Счетные группы здесь (очевидно) — гомоморфные образы подпрямых произведений счетного множества конечных групп.

Лемма 4.4 (Ф. Холл [79], лемма 1 из § 4). *Если H — бесконечная подгруппа группы G из прямого многообразия, порожденного конечными группами, то $|G : C_G(H)| \leq |H|$.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа подпрямого произведения G конечных групп G_i ($i \in I$). Тогда $|\text{supp } H| = |H|$. Группа $G \cap \bigtimes_{i \in \text{supp } H} G_i$ лежит в $C_G(H)$ и имеет индекс, не больший $|\text{supp } H|$. Итак, если H — подгруппа подпрямого произведения конечных групп, то лемма верна.

Пусть $H = S/N$ — подгруппа $G = Q/N$, где Q — подпрямое произведение конечных групп Q_i ($i \in I$). В каждом смежном классе группы S по N возьмем по одному представителю. Пусть J — объединение их носителей. Очевидно, $|J| \leq |H|$. Обозначим $P = S \cap \bigtimes_{i \in J} Q_i$. Тогда $S = PN$, $|P| \leq |H|$. Так как $C_G(H) = C_G(PN/N) \cong C_G(P)N/N$ и $|Q : C_Q(P)| \leq |P|$, то, учитывая предыдущее, получаем

$$|G : C_G(H)| \leq |H|.$$

В силу леммы 4.2, лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть P — периодическая часть центра декартова произведения конечных групп G_i ($i \in I$). Тогда группа $P(\bigtimes_{i \in I} G_i)$ принадлежит прямому многообразию, порожденному классом конечных групп.*

Доказательство. Группа P — объединение циклических поэлементно перестановочных конечных групп. Поэтому $P(\bigtimes_{i \in I} G_i)$ — произведение поэлементно перестановочных конечных групп. В силу предложения 2.4 и теоремы 2.3, $P(\bigtimes_{i \in I} G_i)$ — гомоморфный образ прямого произведения конечных групп. Лемма доказана.

Докажем, наконец, основное утверждение этого параграфа.

Теорема 4.6 (Горчаков [18], следствие 2). *Пусть G — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп. Тогда $G/Z(G)$ — подпрямое произведение конечных групп.*

Доказательство. В силу теоремы 4.3, предложения 1.6 и следствия 1.13, теорему достаточно доказать для счетного случая.

По условию $G \simeq H/N$, где $H \subset \bigtimes_{i=1}^{\infty} H_i$, H_i конечны.

В силу леммы 3.16, классы сопряженных элементов в H , а следовательно, и в G конечны. G — периодическая группа. Теперь сошлемся на теорему 2.7 из следующей главы. Теорема доказана.

Ссылка на утверждение следующей главы оказалась необходимой, так как нормальные подгруппы подпрямых произведений счетных групп еще плохо изучены.

Некоторое отношение к изучению нормальных подгрупп имеют следующие утверждения.

Предложение 4.7. Пусть N — нормальная подгруппа подпрямого произведения H групп H_i ($i=1, 2, \dots, s$). Тогда, если N является подпрямым произведением тех же групп H_i ($i=1, 2, \dots, s$), то фактор-группа H/N — нильпотентная группа класса не выше $s-1$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $N \cap H_i = 1$ ($i=1, 2, \dots, s$). В самом деле, это следует из предложения 1.6, так как подгруппа $(N \cap H_1) \times \dots \times (N \cap H_s)$ ящичная.

Докажем лемму индукцией по s . При $s=1$ ясно, что $H=H_1=N$ и фактор-группа H/N — единичная подгруппа, т. е. группа класса 0. Предположим, что лемма верна для всех целых чисел, меньших s .

Пусть h_1 и n — произвольные элементы из $H \cap H_1$ и N соответственно. Тогда, так как $H \cap H_1$ и N нормальны в H , то элемент $h_1^{-1}n^{-1}h_1n$ принадлежит пересечению групп N и $H \cap H_1$. Так как $N \cap H_1 = 1$, то $H \cap H_1 \cap N = 1$. Отсюда вытекает, что $h_1^{-1}n^{-1}h_1n = 1$, т. е. произвольный элемент из $H \cap H_1$ перестановочен с произвольным элементом из N . Так как проекция N в H_1 совпадает с H_1 , то $H \cap H_1$ лежит в центре H_1 , а потому и в центре H .

Каждому элементу $h=h_1h_2\dots h_s$ из H , где h_i — проекция h в H_i , сопоставим элемент $h_2\dots h_s$. Очевидно, это сопоставление определяет изоморфное отображение $H/H \cap H_1$ в $H_2 \times \dots \times H_s$. Ясно, что проекциями групп $H/H \cap H_1$ и $N(H \cap H_1)/H \cap H_1$ в H_i ($i=2, 3, \dots, s$) будут сами H_i . По индуктивному предположению, фактор-группа $H/H \cap H_1/N(H \cap H_1)/H \cap H_1$ — нильпотентная группа класса не выше $s-2$. Так как последняя группа изоморфна группе $H/N(H \cap H_1) \simeq H/N/N(H \cap H_1)/N$ и так как $H \cap H_1$ лежит в центре H , то H/N , как расширение под-

группы $N(H \cap H_1)/N$ своего центра с помощью группы $H/N(H \cap H_1)$ — группы класса $\leq s-2$, есть нильпотентная группа класса не выше $s-1$. Предложение доказано.

Предложение 4.8. Пусть N — нормальная подгруппа подпрямого произведения G групп G_i ($i \in I$). Если проекция N в G_i ($i \in I$) совпадает с G_i , то фактор-группа G/N имеет возрастающий центральный ряд.

Доказательство. Если доказать, что для любых групп G и N , удовлетворяющих условиям предложения, G/N имеет неединичный центр, то она имеет возрастающий центральный ряд.

В силу предложения 1.6 и следствия 1.13, можно ограничиться случаем $N_i = N \cap G_i = 1$ для всех $i \in I$.

Предположим, что для некоторого $i \in I$ пересечение $G \cap G_i$ отлично от единицы. Так как проекции групп G и N на G_i совпадают, то $[G \cap G_i, G] \subseteq [G_i, G] = [G_i, N] \subseteq N \cap G_i$. Но $N \cap G_i = 1$. Поэтому $G \cap G_i$ лежит в центре группы G/N . Это означает, что центр группы G/N отличен от единицы. Следовательно, нужно рассматривать случай, когда $G \cap G_i = 1$ для всех $i \in I$.

В этом доказательстве длиной элемента будем считать число его неединичных проекций, а длиной группы G относительно N — длину элемента из $G \setminus N$, который имеет наименьшую длину среди всех элементов из $G \setminus N$. Ясно, что длина группы G относительно N при различных вложениях в прямое произведение различна, но ≥ 1 .

Пусть n — длина группы G относительно N и наименьшая длина при всех гомоморфных вложениях группы G в прямое произведение, при которых ядро гомоморфизма содержится в N и при которых выполняются условия леммы. Существуют такое вложение группы G в $\bigtimes_{i \in I} G_i$ и такой элемент $g \in G \setminus N$, что $g = g_i g_{i_1} \dots g_{i_n}$, где $g_{i_j} \neq 1$, $g_{i_j} \in G_{i_j}$. Так как мы предполагаем верным условие $G \cap G_i = 1$, то $G \cap G_{i_1} = 1$ и $G \simeq G/G \cap G_{i_1}$. Поэтому при вложении группы G в прямое произведение $\bigtimes_{i \in I \setminus \{i_1\}} G_i$ дли-

на группы G относительно N уменьшилась, она $\leq n-1$. Но при этом вложении, вообще говоря, не выполняется условие $N \cap G_i = 1$. Так же, как сделано прежде, можно получить новое вложение, при котором это условие выполняется. Получим противоречие с тем, что n — наи-

меньшая длина при всех вложениях. Следовательно, группа G/N имеет неединичный центр. Предложение доказано.

Наконец, последнее утверждение главы составляет

Теорема 4.9 (Горчаков [15]). Пусть группа G принадлежит прямому многообразию, порожденному классом конечных групп, H — ее подгруппа и H_0 — наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H . Тогда, если индекс $|H:H_0| = h$ бесконечен, то $|cl(H)| = h$ и $|Lcl(H)| = 2^h$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $H_0 = 1$. По лемме 4.4 $|cl(H)| \leq h$. В силу предложения 4.1, группа G изоморфна фактор-группе K/N подгруппы K прямого произведения $\bigtimes_{i \in I} K_i$ конечных групп. H изоморфна подгруппе D/N .

Пусть $d^{(1)}N$ — произвольный неединичный элемент из D/N , $d^{(1)} = \bigtimes_{i \in \text{supp } d^{(1)}} d_i^{(1)}$. Так как $H_0 = 1$, в K существует такой элемент $x^{(1)} = \bigtimes_{i \in \text{supp } x^{(1)}} x_i^{(1)}$, что $(x^{(1)})^{-1} d^{(1)} x^{(1)}$ не принадлежит DN . Предположим, что уже построены цепочки элементов

$$d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(i)}, \dots, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)}, \dots, \quad i < b,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $d^{(i)} \in D, x^{(i)} \in K$;
- 2) $(x^{(i)})^{-1} d^{(i)} x^{(i)} \notin DN$;
- 3) $(\text{supp } d^{(i)} \cup \text{supp } x^{(i)}) \cap (\bigcup_{j < i} (\text{supp } d^{(j)} \cup \text{supp } x^{(j)})) = \emptyset$.

Пусть $|b| < |H|$. Положим

$$F = K \cap \bigtimes_{s \in M} K_s, \quad M = I \setminus \left(\bigcup_{i < b} (\text{supp } d^{(i)} \cup \text{supp } x^{(i)}) \right).$$

В группе K существует такая нормальная подгруппа A мощности, равной $|K/F|$, что $K = AF$. Пусть $R = K \cap \bigtimes_{s \in I \setminus \text{supp } A} K_s$, $P = R \cap D$. Так как $|K/F| < |H|$, то $PN/N \neq 1$. Отсюда в K существует такой элемент y , что $y^{-1}Py \not\subseteq PN$. Так как $K = AF$, в A существует элемент a , проекция которого в группе $\bigtimes_{s \in I \setminus M} K_s$ равна проекции в ней

элемента y . Тогда $a^{-1}y \in F$. Но проекция $a^{-1}y$ в группе $\times_{s \in \bigwedge \text{supp } A} K_s$ совпадает в ней с проекцией элемен-

та y . Поэтому $(a^{-1}y)P(a^{-1}y) \not\subseteq PN$. Возьмем $a^{-1}y = x^{(b)}$, а в качестве $d^{(b)}$ — элемент $p \in P$ с условием $(x^{(b)})^{-1}px^{(b)} \notin PN$. Элементы $d^{(b)}$ и $x^{(b)}$ удовлетворяют условиям 1) — 3). Следовательно, процесс выбора элементов $d^{(i)}$ и $x^{(i)}$ с условиями 1) — 3) закончится на номере b мощности, равной $|H|$.

Из определения элементов $d^{(i)}$ и $x^{(i)}$ видно, что группы $(x^{(i)})^{-1}Dx^{(i)}$, $i < b$, все различны. Действительно, если $(x^{(i)})^{-1}Dx^{(i)} = (x^{(j)})^{-1}Dx^{(j)}$, то $c = x^{(i)}(x^{(j)})^{-1} \in N(D)$. Но ввиду 3), $c^{-1}d^{(i)}c = (x^{(i)})^{-1}d^{(i)}x^{(i)} \notin D$. Противоречие с $c \in N(D)$. Получаем $|\text{cl}(H)| \geq h$. Так как $|\text{cl}(H)| \leq h$, то $|\text{cl}(H)| = h$.

Пусть V — множество всех функций, сопоставляющих $i < b$ числа ± 1 . Возьмем $v \in V$. Обозначим через X множество $\bigcup_{v(i)=-1} \text{supp } x^{(i)}$. Пусть $t \in \times_{i \in I} K_i$. Положим $X(t) = \text{supp } t \cap X$. Ясно, что для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_k < b$

$X(t) = \bigcup_{m=1}^k X_{i_m}(t)$, где $X_{i_m}(t) = X(t) \cap \text{supp } x^{(i_m)} \neq \emptyset$. Тогда

да $t = t' \times_{m=1}^k t_{i_m}$, где t' — проекция t на $\times_{j \in \bigwedge X} K_j$, t_{i_m} — проекция t на $\times_{j \in X_{i_m}(t)} K_j$. Через p_* обозначим отображение

группы $\times_{i \in I} K_i$ в $\times_{i \in I} K_i$, которое элементу t сопоставляет

элемент $p_*(t) = t' \times_{m=1}^k (x^{(i_m)})^{-1} t_{i_m} x^{(i_m)}$. Очевидно, p_* — автоморфизм группы $\times_{i \in I} K_i$. Пусть Y — произвольное конечное

подмножество в I . Тогда $p_*(\times_{i \in Y} K_i) = \times_{i \in Y} K_i$. Положим

$K(Y) = K \cap (\times_{i \in Y} K_i)$. Так как $x^{(i)}$ при любом $i < b$ принад-

лежит K , то $p_*(K(Y)) \subseteq K$. Поэтому $p_*(K(Y)) \subseteq K(Y)$. Так как p_* — взаимно однозначное отображение и $K(Y)$ конечно, то $p_*(K(Y)) = K(Y)$. Группы $K(Y)$ образуют локальную систему подгрупп группы K . Поэтому ограничение p_* на K есть локально внутренний автоморфизм группы K . Подгруппа N нормальна в K . Следовательно,

$p_v(N) = N$. Знаком p_v будем обозначать также и локально внутренний автоморфизм группы K/N , индуцированный ограничением автоморфизма p_v на группу K . Пусть $v \neq w$ — две функции из V . Тогда $v(i) = +1$, $w(i) = -1$ для некоторого $i < b$. Это означает по построению $d^{(i)}$, $x^{(i)}$ и автоморфизма p_v , что $p_v(d^{(i)}) = d^{(i)}$, $p_w(d^{(i)}) = (x^{(i)})^{-1} d^{(i)} x^{(i)}$. Отсюда следует, что $p_v \neq p_w$. Так как $|V| = 2^h$, то $|\text{Lcl}(H)| \geq 2^h$. Пусть H_z , $z \in Z$ — множество всех конечных подмножеств H . Так как $|H| = h$ (считаем $H_0 = 1$), то $|Z| = h$. Каждое H_z может иметь в G лишь конечное число сопряженных множеств. Поэтому множеств вида $c_z^{-1} H_z c_z$, $z \in Z$, существует не более чем 2^h . Следовательно, $|\text{Lcl}(H)| \leq 2^h$. Но тогда $|\text{Lcl}(H)| = 2^h$. Теорема доказана.

ГЛАВА II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1. Сведение к периодическому случаю

Подмножество M группы G нормально в G , если для всяких $t \in M$ и $g \in G$ $g^{-1}tg \in M$. Группа называется *локально нормальной*, если любое конечное множество ее элементов содержится в конечной нормальной подгруппе.

Лемма 1.1 (Дицман [19, 20]). *Конечное нормальное множество элементов конечного порядка порождает конечную нормальную подгруппу.*

Доказательство. Пусть G — группа, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ — конечное нормальное подмножество элементов, порядки которых равны $k_1, k_2, \dots, k_s$. Каждый элемент из $\langle M \rangle$ можно записать в виде

$$a = a_1 a_2 \dots a_q, \quad (1)$$

где $a_i \in M$ и каждый элемент m_i встречается не более $k_i - 1$ раз. Будем считать $m_1 < m_2 < \dots < m_s$. Если $b = b_1 b_2 \dots b_t$ — другое слово вида (1), то будем считать $a < b$, если выполняется одно из условий:

- 1) $q < t$;
- 2) $a_1 = b_1, \dots, a_p = b_p, a_{p+1} < b_{p+1}$.

Множество всех слов вида (1) вполне упорядочено. Наименьшее слово в нем m_1 . Слово вида (1) назовем *каноническим*, если $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_q$. Докажем что всякое слово вида (1) равно каноническому. Этим докажем лемму, так как канонических слов всего $k_1 k_2 \dots k_s$.

Слово m_1 каноническое. Пусть все слова, меньшие a , равны каноническим. Если в слове a вида (1) впервые $a_i > a_{i+1}$, то $a_i a_{i+1} = a_{i+1} (a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1})$. Так как M нормально,

то $a_{i+1}^{-1}a_ia_{i+1} \in M$. Итак, $a = a_1 \dots a_{i-1}a_{i+1}(a_{i+1}^{-1}a_ia_{i+1})a_{i+2}\dots a_s$. Если в этом слове некоторый элемент m_j встречается более чем $k_j - 1$ раз подряд, то, выбросив из него $m_j^{k_j}$, сократим длину записи (1) для слова a . В этом случае по индуктивному предположению a равно каноническому слову. Если же a после преобразования снова имеет вид (1), то новая запись для a меньше прежней, так как $a_{i+1} < a_i$. И опять по предположению a равно слову с канонической записью. Лемма доказана.

Следствие 1.2. *Если классы сопряженных элементов в группе G конечны, то элементы конечного порядка группы G образуют подгруппу (очевидно, характеристическую).*

Доказательство. Если a и b имеют конечные порядки, $a_1, a_2, \dots, a_s$ — сопряженные к a элементы, $b_1, b_2, \dots, b_r$ — сопряженные к b элементы, то $M = \{a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_r\}$ — конечное нормальное множество элементов конечного порядка. По лемме 1.1 $\langle M \rangle$ — конечная нормальная подгруппа, $ab \in M$. Следовательно, ab имеет конечный порядок. Следствие доказано.

Следствие 1.3. *Периодическая группа с конечными классами сопряженных элементов локально нормальна.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — элементы из G . Множество сопряженных к a_i элементов обозначим M_i . Множество $M = \bigcup_i M_i$ конечно и нормально. По лемме 1.1 $\langle M \rangle$ — конечная нормальная подгруппа.

В связи с представлениями конечных групп Шур изучал группы, конечные над центром. Одну из его теорем приведем ниже (см. Хупперт [82], стр. 417).

Теорема 1.4 (Шур). *Если центр группы имеет конечный индекс, то коммутант ее конечен.*

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^n Z(G)x_i$. Тогда каждый коммутатор из G имеет вид $[zx_i, z'x_j] = [x_i, x_j]$, где $z, z' \in Z(G)$. Следовательно, G имеет лишь конечное число коммутаторов.

Для любого $g \in G' \cap Z(G)$ по определению перемещения (см. Холл [54], стр. 226) имеем $V_{G \rightarrow Z(G)}(g) = g^n$. Так как ядро перемещения содержит G' , то $g^n = 1$.

Из конечности $G/Z(G)$ и периодичности $G' \cap Z(G)$ получаем, что каждый коммутатор имеет конечный порядок. В силу леммы 1.1, коммутант конечен. Теорема доказана.

Следствие 1.5 (Нейман [86]). *В группе с конечными классами сопряженных элементов элементы конечного порядка образуют подгруппу, содержащую коммутант.*

Доказательство. В силу следствия 1.2, достаточно доказать периодичность коммутанта. Ясно, что это нужно доказать для конечно порожденных групп.

Пусть $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$. Так как $Z(G) = \bigcap_{i=1}^n C(g_i)$ и индексы $C(g_i)$ в G конечны, то $G/Z(G)$ конечна. В силу теоремы 1.4, следствие доказано.

Следствие 1.6 (Федоров [52]). *Если каждая нетривиальная подгруппа бесконечной группы G имеет в G конечный индекс, то G — циклическая бесконечная группа.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Так как $C(g) \cong \langle g \rangle$, то индекс $C(g)$ в G конечен. Следовательно, классы сопряженных элементов в группе G конечны. Так как G конечно порождена, то $G/Z(G)$ — конечная группа. По теореме 1.4 коммутант группы G конечен. Но тогда $G' = 1$. Следствие доказано.

Теперь получим три критерия конечности классов сопряженных элементов.

Теорема 1.7 (Бер [68]). *В группе G классы сопряженных элементов тогда и только тогда конечны, когда $G/Z(G)$ локально нормальна и каждый элемент группы G содержится в конечно порожденной нормальной подгруппе.*

Доказательство. Пусть классы сопряженных элементов группы G конечны и $g \in G$. Индекс $C(g)$ в G конечен. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^n C(g) x_i$. Положим $U = C(g) \cap (\bigcap_{i=1}^n C(x_i))$.

Индекс U в G конечен. Это означает, что g^s лежит в U для некоторого s . Отсюда g^s перестановочен как с $C(g)$, так и со всеми x_i . Следовательно, $g^s \in Z(G)$. Итак, $G/Z(G)$ — периодическая группа. В силу следствия 1.3, $G/Z(G)$ локально нормальна. Так как g имеет конечное число сопряженных элементов, то он содержится в порожденной ими подгруппе, которая, очевидно, нормальна в G .

Пусть, обратно, $G/Z(G)$ локально нормальна и каждый элемент из G содержится в конечно порожденной нормальной подгруппе. Пусть $g \in N \triangleleft G$, где N конечно порождена. Так как $G/Z(G)$ — локально нормальная группа, то $NZ(G)/Z(G) \simeq N/N \cap Z(G)$ конечна. По теореме 1.4 коммутант K группы N конечен. Следовательно, достаточно доказать, что элемент Kg имеет конечное число сопряженных в G/K , т. е. можно считать, что N — абелева группа. В некоторой степени с элемент g лежит в $Z(G)$. Поэтому для всякого $x \in G$ имеем $x^{-1}g^s x = g^s$. Если $x^{-1}gx = gh$, где $h \in N$, то $x^{-1}g^s x = g^s h^s$. Отсюда $h^s = 1$. Так как N содержит конечное число элементов конечного порядка, то элемент g имеет конечное число сопряженных. Теорема доказана.

Следующий критерий имеет более простую формулировку.

Теорема 1.8 (Черников [60]). *Группа G тогда и только тогда имеет конечные классы сопряженных элементов, когда она либо локально нормальна, либо является центральным расширением абелевой группы без кручения при помощи локально нормальной группы.*

Доказательство. Пусть G имеет конечные классы сопряженных элементов. Если она периодическая, то локальная нормальность утверждается следствием 1.3. Если G не является периодической группой, то по теореме 1.7 $G/Z(G)$ локально нормальна. Так как расширение периодической группы при помощи периодической группы — периодическая группа, то достаточно доказать, что в $Z(G)$ содержится максимальная подгруппа H без кручения. Это вытекает из леммы Цорна ([54], стр. 28).

Пусть, обратно, G — центральное расширение группы H без кручения при помощи локально нормальной группы. Из теоремы 1.4 получаем $G' \cap H = 1$. Группа G как подпрямое произведение абелевой группы G/G' и локально нормальной группы G/H имеет конечные классы сопряженных элементов. Теорема доказана.

Утверждение третьего критерия более соответствует идее книги — описывать группы с конечными классами сопряженных элементов через прямые произведения. Оно сформулировано впервые, по-видимому, в работе Ф. Холла [79]. Заметим, что Ф. Холл не утверждает свое авторство.

Теорема 1.9. *Классы сопряженных элементов группы G тогда и только тогда конечны, когда G — подгруппа прямого произведения локально нормальной группы и абелевой группы без кручения.*

Доказательство. Всякая подгруппа прямого произведения локально нормальной группы и абелевой группы без кручения, очевидно, имеет конечные классы сопряженных элементов.

Пусть G имеет конечные классы сопряженных элементов. Если она периодическая, то по следствию 1.3 она локально нормальна. Пусть G не является периодической группой. В силу следствия 1.6, G имеет периодическую подгруппу H , содержащую коммутант группы G . Фактор-группа G/H — абелева группа без кручения. По теореме 1.8 в центре группы G содержится такая подгруппа без кручения Q , что фактор-группа G/Q локально нормальна. Так как $H \cap Q = 1$, то G — подпрямое произведение локально нормальной группы G/Q и абелевой группы без кручения G/H . Теорема доказана.

Лемма 1.10. *Если в группе G с конечными классами сопряженных элементов коммутант нормальной подгруппы H конечного индекса конечен, то и коммутант группы G конечен.*

Доказательство. Если доказать конечность коммутанта группы G/H' , то лемма будет доказана. Поэтому можно считать, что H — абелева группа. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^n Hx_i$. Ясно, что $Z(G) \cong H \cap (\bigcap_{i=1}^n C(x_i))$ имеет в G конечный индекс. Из теоремы 1.4 получаем конечность коммутанта. Лемма доказана.

Теорема 1.11 (Нейман [87]). *Мощности классов сопряженных элементов тогда и только тогда ограничены одним числом, когда коммутант группы конечен.*

Доказательство. Пусть коммутант G' группы G конечен, x — произвольный элемент из G . Тогда для любого $g \in G$ верно равенство $g^{-1}xg = x[x, g]$. Элементов $[x, g]$ существует не более чем $|G'|$. Отсюда мощности классов сопряженных элементов ограничены числом $|G'|$.

Пусть, наоборот, мощности классов сопряженных элементов ограничены одним числом. Пусть коммутант G' группы G бесконечен. Пусть $[a_i, b_i] \neq 1$. Коммутант груп-

пы $C_1 = C(\{a_1, b_1\})$ бесконечен по лемме 1.10. Поэтому в C_1 существуют такие элементы a_2, b_2 , что $[a_2, b_2] \neq 1$ и $[a_2, b_2] \neq [a_1, b_1]$. Положим $C_2 = C(\{a_1, b_1, a_2, b_2\})$. Коммутант группы C_2 бесконечен. Продолжая этот процесс, можно выбрать элементы a_i, b_i ($i=1, 2, \dots$), для которых справедливы соотношения: 1) $[a_i, b_i] \neq [a_j, b_j]$, 2) $a_i, b_i \in C(\{a_j, b_j\})$. Тогда элемент $a = a_1 a_2 \dots a_k$ имеет не менее k различных сопряженных элементов $b_i^{-1} a b_i = a[a, b_i] = a[a_i, b_i]$ ($i=1, 2, \dots, k$) в противоречие с ограниченностью мощностей классов. Теорема доказана.

§ 2. Теоремы типа Приюфера — Куликова

Пусть H — поддекартово произведение изоморфных конечных групп H_a ($a \in A$). Подмножество B из A назовем *однородным участком группы H в A* , если проекция группы $H/Z(H)$ в декартовом произведении $\prod_{a \in B} H_a/Z(H_a)$ изо-

морфна каждой из групп $H_a/Z(H_a)$. ($H/Z(H)$ можно рассматривать как подгруппу группы $\prod_{a \in A} H_a/Z(H_a)$.) Однород-

ный участок назовем *максимальным*, если он не содержится ни в каком большем однородном участке.

Лемма 2.1. *Существуют максимальные однородные участки.*

Доказательство. Пусть $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_i \subseteq \dots$, $i < j$, — последовательность однородных участков. Положим $B = \bigcup_{i < j} B_i$. Так как H_a изоморфны, то обозначим

группу, изоморфную $H_a/Z(H_a)$, через Q . Для каждого i проекция R_i группы $H/Z(H)$ на $\prod_{a \in B_i} H_a/Z(H_a)$ изоморфна

Q . Пусть R — проекция $H/Z(H)$ на $\prod_{a \in B} H_a/Z(H_a)$. Проекция R на $\prod_{a \in B_i} H_a/Z(H_a)$ совпадает с R_i . Если R не изоморфна

Q , то B содержит собственное подмножество C , для которого $R \cap \prod_{a \in C} H_a/Z(H_a) \neq 1$. Пусть $i < j$ такой первый ин-

декс, что $C \cap B_i \neq \emptyset$. Тогда $R_i \cap \prod_{a \in B_i \cap C} H_a/Z(H_a) \neq 1$

и R_i не изоморфна Q . Противоречие. Поэтому $R \simeq Q$. По лемме Цорна ([54], стр. 28) существуют максимальные однородные участки. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Различные максимальные однородные участки не пересекаются.

Доказательство. Пусть B_1 и B_2 — максимальные однородные участки и $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Обозначим через R_i проекцию $H/Z(H)$ на $\prod_{a \in B_i} H_a/Z(H_a)$ ($i = 1, 2$). Так как B_i —

максимальный однородный участок, то $R_i \cap \prod_{a \in C} H_a/Z(H_a) = 1$ для всякого $C \subset B_i$. Множество $B_1 \cup B_2$ не является однородным участком. Обозначим через R проекцию $H/Z(H)$ на $\prod_{a \in B_1 \cup B_2} H_a/Z(H_a)$. Имеем $R \cap \prod_{a \in C} H_a/Z(H_a) \neq 1$ для $C \subset B_1 \cup B_2$. Так как $C \cap B_i \neq B_i$ хотя бы для одного i , то для него из $C \cap B_i \neq \emptyset$ следует $R_i \cap \prod_{a \in C \cap B_i} H_a/Z(H_a) \neq 1$

Это противоречит максимальнойности B_i . Поэтому $C \cap B_i = \emptyset$ для этого i . Так как $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, то $C \cap B_j$ ($j \neq i$) — собственное подмножество B_j , что опять-таки невозможно. Лемма доказана.

Лемма 2.3 (Горчаков [16], лемма 1). Пусть H — поддекартово произведение конечных групп H_a ($a \in A$). Если A — однородный участок группы H , то

- 1) H разлагается в прямое произведение некоторой конечной подгруппы K и некоторой подгруппы центра T ;
- 2) существует такое конечное подмножество $B \subseteq A$, что K изоморфна своей проекции на $\prod_{a \in B} H_a$.

Доказательство. По определению однородного участка $H/Z(H) \simeq H_a/Z(H_a)$, т. е. индекс $Z(H)$ в H конечен. Группа H локально конечна. Поэтому представители смежных классов H по $Z(H)$ порождают конечную подгруппу S . $H = SZ(H)$, но это произведение, возможно, не прямое. Порядки элементов $Z(H)$ ограничены в совокупности. Поэтому $Z(H)$ разлагается в прямое произведение циклических групп (см. [29], стр. 85). Пересечение $S \cap Z(H)$ конечно. Носитель его в прямом произведении циклических групп конечен. Возьмем все циклические множители, соответствующие этому носителю. Их прямое произведение обозначим P . Положим $Z(H) =$

$= P \times Q$. Обозначим $K = SP$. Тогда $H = KZ(H) = K(P \times Q) = KQ$. Для $q \in K \cap Q = SP \cap Q$ получаем $q = sp$, где $s \in S$, $p \in P$. Отсюда $s = qp^{-1} \in P \times Q = Z(H)$, т. е. $s \in S \cap Z(H) \subseteq P$. В этом случае $q = sp \in P$. Так как $P \cap Q = 1$, то $q = 1$. Итак, $K \cap Q = 1$. Произведение $H = KQ$ — прямое. Утверждение 1) доказано.

Пусть $K \setminus \{1\} = \{k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(n)}\}$. Существует $a_i \in A$ такой, что проекция $k^{(i)}$ на H_{a_i} отлична от 1. Положим $B = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$. Тогда $H \cap \prod_{a \in A \setminus B} H_a$ не имеет общих неединичных элементов с K . Это означает, что K изоморфна подгруппе проекции H на $\prod_{a \in B} H_a$. Утверждение 2) доказано.

Лемма доказана.

Пусть H — поддекартово произведение изоморфных конечных групп H_a ($a \in A$). Подмножество B из A называется *участком понижения группы H* , если проекция H на $\prod_{a \in B} H_a$ изоморфно вложима в декартово произведение

групп меньших порядков. Участок понижения $B \subseteq A$ *максимален*, если $A \setminus B$ не содержит участков понижения.

Лемма 2.4 (Горчаков [16]). *Существует максимальный участок понижения.*

Доказательство. Очевидно, объединение попарно непересекающихся участков понижения — участок понижения. Если B — участок понижения, то либо он максимален, либо $A \setminus B$ содержит участок понижения C и тогда $B \cup C$ — также участок понижения. Лемма Цорна ([54], стр. 28) дает теперь существование максимального участка понижения. Лемма доказана.

Лемма 2.5 (Горчаков [16], лемма 2). *Пусть локально нормальная группа H является поддекартовым произведением конечных изоморфных групп H_a ($a \in A$) и допустим, что все однородные участки H в A конечны. Если некоторый элемент из H имеет бесконечно много нецентральных проекций, то A содержит бесконечный участок понижения для группы H .*

Доказательство. 1. Так как в A нет бесконечных однородных участков, то никакая конечная нормальная подгруппа не может иметь для бесконечного числа $a \in A$

своей проекцией группу H_a . Действительно, пусть K — конечная нормальная подгруппа H и пусть $B = \{a; a \in A, \text{ проекция } K \text{ на } H_a \text{ равна } H_a\}$. Пусть Y — проекция K на $\prod H_a$ и X — проекция H на ту же группу. По лемме 1.1 $a \in B$

гл. I $C_X(Y)$ совпадает с $X \cap \prod_{a \in B} Z(H_a)$, а ввиду локальной

нормальности группы H имеет в X конечный индекс. Пусть $l_1, l_2, \dots, l_t$ — все неединичные элементы группы $X/Z(X)$. Множество $\{1, 2, \dots, t\}$ имеет 2^t подмножеств $I(s)$, $s=1, 2, \dots, 2^t$. Для каждого s обозначим $A_s = \bigcap_{i \in I(s)} \text{supp } l_i$. Если $I(s) = \emptyset$, то $A_s = \emptyset$. Носитель эле-

мента l_i рассматривается в группе $\prod_{a \in B} H_a/Z(H_a)$. Опре-

делим $B(s)$ как разность A_s и объединения всех A_r , для которых $I(s) \subset I(r)$. $B(s)$ — однородный участок группы

X . Так как $B = \bigcup_{s=1}^{2^t} B(s)$, то B конечно. Сформулированное выше утверждение доказано.

2. Допустим, что существует бесконечное множество $B \subseteq A$, удовлетворяющее следующему условию: если $\bar{S}$ — проекция $H/Z(H)$ на $\prod_{a \in B} H_a/Z(H_a)$, $\bar{Q} = \bar{S} \cap \prod_{a \in B} H_a/Z(H_a)$,

если существует конечная нормальная подгруппа $\bar{K}$, для которой $H/Z(H) = \bar{Q} \bar{K}$, и если все проекции $\bar{K}$ на $H_a/Z(H_a)$ ($a \in B$) отличны от 1, то существует бесконечный участок понижения для группы H . Если лемму доказать для большей группы, то она будет верна и для любой ее подгруппы, являющейся поддекартовым произведением тех же групп. Поэтому считаем, что H содержит $\prod_{a \in A} Z(H_a)$.

Обозначим через S проекцию H на $\prod_{a \in B} H_a$. Ясно, что

$S/Z(S) \simeq \bar{S}$. Пусть Q и K — полные прообразы $\bar{Q}$ и $\bar{K}$ в S . Тогда $S = QK$. Так как $Z(S) = \prod_{a \in B} Z(H_a)$, то $Q = MZ(S)$,

где $M = Q \cap \prod_{a \in B} H_a$. Так как индекс $Z(S)$ в K конечен,

то $K = RZ(S)$, где R — конечная подгруппа, проекция которой на H_a содержит $Z(H_a)$ для всех $a \in B$. Имеем $S = MRZ(S)$. В силу утверждения первого абзаца, суще-

существует такое конечное множество $C \subset B$, что проекция R на H_a отлична от H_a для всех $a \in B \setminus C$. Обозначим через P носитель $R \cap \bigtimes_{a \in B} H_a$. Пусть $D = P \cup C$. Все неединичные

элементы проекции Q группы R на $\prod_{a \in B \setminus D} H_a$ имеют беско-

нечные носители. Обозначим через N проекцию M на $\prod_{a \in B \setminus D} H_a$ и через T — проекцию S на ту же группу. Тогда

$T = (N \times Q)Z(T)$, $(N \times Q) \cap Z(T) = Z(N) \times Z(Q)$. Обозначим через $Z_p(H_a)$, $Z_p(N)$, $Z_p(Q)$, $Z_p(T)$ силовские p -подгруппы соответственно групп $Z(H_a)$, $Z(N)$, $Z(Q)$, $Z(T)$. Тогда $Z_p(N) = \bigtimes_{a \in B \setminus D} Z_p(H_a)$, $Z_p(T) = \prod_{a \in B \setminus D} Z_p(H_a)$. Следова-

тельно, $Z_p(N)$ сервантна в $Z_p(T)$. Конечная подгруппа $(Z_p(Q) \times Z_p(N))/Z_p(N)$ группы $Z_p(T)/Z_p(N)$ содержится в конечной сервантной подгруппе $F_p/Z_p(N)$. Группа F_p сервантна в $Z_p(T)$. Поэтому $Z_p(T) = F_p \times L_p$. Группа $Z_p(N)$ сервантна в F_p . Отсюда получаем $F_p = Z_p(N) \times U_p$. Положим $V_p = Z_p(Q)U_p$. Имеем $Z_p(N) = (Z_p(N)V_p) \times L_p$. Обозначим $V = Q(\bigtimes_p V_p)$, $L = \bigtimes_p L_p$. Группа V конечна. $T =$

$= NVL$. Так как $Z(NV) = Z(N)Z(V)$, то $NV \cap L = Z(N)Z(V) \cap L$. Для силовских подгрупп имеем $Z_p(N)V_p \cap L_p = 1$. Следовательно, $NV \cap L = 1$. Произведение NV может не быть прямым, но пересечение $N \cap V$ конечно. Пусть $E = D \cup \text{supp}(N \cap V)$. Обозначим через W проекцию T на $\prod_{a \in B \setminus E} H_a$, через O — проекцию N на

$\prod_{a \in B \setminus E} H_a$, через Z — проекцию V и через J — проекцию L

на ту же группу. Тогда $W = Z \times J \times O$. Здесь J лежит в центре, O состоит из элементов с конечными носителями, а Z — конечная группа. $W/Z(W)$ — подгруппа декартова произведения групп $H_a/Z(H_a)$ для $a \in B \setminus E$. Ввиду $E \supseteq C$ и выбора C , проекции Z на $H_a/Z(H_a)$ и O на $H_a/Z(H_a)$ отличны от $H_a/Z(H_a)$ для всех $a \in B \setminus E$. Это означает, что W — поддекартово произведение некоторых подгрупп группы H_a , т. е. $B \setminus E$ — бесконечное множество понижения. Утверждение доказано.

3. Допустим, что H имеет элемент, бесконечное множество проекций которого находится вне групп $Z(H_a)$. Докажем, что существует множество B , указанное в п. 2 доказательства. Используем такое определение: если

h, g — произвольные элементы H , то назовем их параллельными на $C \subseteq A$; если их проекции для $a \in C$ различны, $h_a \neq g_a$. Пусть $h^{(1)} \in H$, $h_a^{(1)} \notin Z(H_a)$ для $a \in B_1$, где B_1 — бесконечное множество. Так как группы H_a конечны и изоморфны, то существуют такие элементы $h^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, s$), что 1) они попарно параллельны на некотором бесконечном подмножестве $C \subseteq B_1$, 2) если $h \neq h^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, s$), то существует такое конечное подмножество $D \subseteq C$, что $h_a = h_a^{(i)}$ для любого $a \in C \setminus D$ и некоторого j , зависящего от a . Действительно, если $h^{(1)}$ удовлетворяет условию 2), то система построена и $s=1$. Если же $h^{(1)}$ не удовлетворяет 2), то существует $h^{(2)}$, параллельный $h^{(1)}$ на бесконечном подмножестве B_2 из B_1 . Если уже построена система $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(i)}$ попарно параллельных элементов на бесконечном подмножестве $B_i \subseteq B_1$, то либо эти элементы удовлетворяют условию 2) на B_i , либо существует элемент $h^{(i+1)}$, параллельный всем $h^{(1)}, \dots, h^{(i)}$ на некотором бесконечном подмножестве $B_{i+1} \subseteq B_i$. Так как порядки групп H_a ограничены, то процесс выбора остановится на некоторой системе $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(s)}$, которая будет удовлетворять как 1), так и 2). Пусть K — минимальная нормальная подгруппа, порожденная элементами $h^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, s$). Так как она конечна, то на некотором бесконечном подмножестве $R \subseteq C$ любые два элемента из K либо равны, либо параллельны. Пусть Q — проекция K на $\prod_{a \in R} H_a$, S — проекция H на ту же группу. В силу условия 2), $S = QC(Q)$. Действительно, пусть $s \in S \setminus Q$. По условию 2) существует такой $a \in R$, что $s_a = q_a$ для некоторого $q = \prod q_a$ из Q . Так как sq^{-1} имеет на H_a единичную проекцию и так как лишь единичный элемент из нормальной подгруппы Q имеет хотя бы для одного $a \in R$ единичную проекцию, то $sq^{-1} \in C(Q)$. Так как для всех $a \in R$ группа Q имеет нецентральную проекцию Q_a , то проекция $C(Q)$ на H_a отлична от H_a для всех $a \in R$. Можно считать, что для $C(Q)$ утверждение верно. Но тогда оно, очевидно, верно для S . Лемма доказана.

Теперь можно доказать аналог первой теоремы Прюфера (см. [29], стр. 85).

Теорема 2.6 (Горчаков [16], теорема 4). *Локально нормальная группа, являющаяся поддекартовым произ-*

ведением конечных групп, порядки которых ограничены в совокупности, изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп ограниченных порядков.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для локально нормальной группы H , которая является поддекартовым произведением конечных групп H_a ($a \in A$), изоморфных одной и той же группе B . Пусть $A = \bigcup_{\varphi \in \Phi} A_\varphi$, где A_φ — максимальный однородный участок, H_φ — проекция H на $\prod H_a$. По лемме 2.3, п. 1), $H_\varphi = K_\varphi \times T_\varphi$, где

K_φ — конечная группа, T_φ — абелева группа. В множестве A_φ содержится такое конечное подмножество M_φ , что K_φ изоморфна своей проекции на $\prod_{a \in M_\varphi} H_a$ (см. лемму 2.3,

п. 2)). Теперь группа H — поддекартово произведение групп H_a ($a \in M = \bigcup_{\varphi \in \Phi} M_\varphi$) и T_φ ($\varphi \in \Phi$). При этом вложении группа H не имеет бесконечных однородных участков в M , так как однородные участки группы H в M — это M_φ ($\varphi \in \Phi$).

Итак, можно считать, что группа H — поддекартово произведение изоморфных конечных групп H_a ($a \in A$) и что все однородные участки H в A конечны.

Если M — максимальный участок понижения группы H , то по лемме 2.5 каждый элемент из H имеет в $\prod_{a \in A \setminus M} H_a$ лишь конечное число нецентральных проекций. Это доказывает теорему.

Аналог второй теоремы Прюфера для абелевых групп (см., например, [29], стр. 87) получил Ф. Холл.

Теорема 2.7 (Ф. Холл [79]). *Счетная локально нормальная группа, являющаяся поддекартовым произведением конечных групп, изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп.*

Доказательство. Пусть G — счетная локально нормальная подгруппа декартова произведения конечных групп K_i ($i = 1, 2, \dots$). Группу G можно представить как объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ конечных нормальных подгрупп G_i , удовлетворяющих условию $G_i \subseteq G_{i+1}$. Пусть $G_i = \{1, g_1, g_2, \dots, g_i\}$. Существует такой номер j , что проекция g_i на K_j отлична от 1. Положим $I = \{j_2, j_3, \dots, j_i\}$.

Тогда $S_i = G \cap \prod_{j \neq i} K_j$ имеет с G_i единичное пересечение и имеет в G конечный индекс. Обозначим $H_i = S_i \cap S_2 \cap \dots \cap S_i$ ($i=1, 2, \dots$). Группы G_i и H_i удовлетворяют условиям теоремы 3.3 гл. I. Теорема доказана.

Наконец, докажем аналог критерия Куликова [31]. Для формулировки его введем определение: *подгруппа H группы A аппроксимируется в A некоторым классом групп*, если для любого неединичного элемента h из H существует фактор-группа группы A рассматриваемого класса, образ элемента h в которой отличен от 1.

Теорема 2.8 (Горчаков [16], теорема 6). *Группа A тогда и только тогда изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп, когда она локально нормальна и является объединением возрастающей последовательности*

$$1 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \quad (1)$$

таких своих нормальных подгрупп, что каждая фактор-группа A_{n+1}/A_n ($n=0, 1, 2, \dots$) аппроксимируется в A/A_n классом конечных групп, порядка которых ограничены в совокупности.

Доказательство. Если A имеет ряд (1), то и всякая подгруппа $B \subseteq A$ имеет ряд $1 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq \dots$, где $B_n = A_n \cap B$. В группе A существует такая нормальная подгруппа S_n , что $S_n \cap A_n = A_{n-1}$ и A/S_n — поддекартово произведение конечных групп, порядка которых ограничены в совокупности. Пусть $Q_n = S_n \cap B$. Имеем $Q_n \cap B_n = (S_n \cap B) \cap (A_n \cap B) = (S_n \cap A_n) \cap B = B_{n-1}$, $B/Q_n \simeq BS_n/S_n$ — поддекартово произведение конечных групп, порядка которых ограничены в совокупности. Таким образом, B имеет ряд вида (1). Это означает, что существование ряда вида (1) можно доказывать лишь для прямых произведений конечных групп, а не любых подпрямых произведений. Но для прямых произведений существование ряда (1) очевидно.

Обратно, пусть локально нормальная группа A имеет ряд (1). Докажем, что A — подпрямое произведение конечных групп. Пусть S_n — такие же, как раньше, подгруппы в A . Очевидно, $\bigcap_{n=1, 2, \dots} S_n = 1$. Поэтому A вложима в $\prod_{n=1, 2, \dots} A/S_n$ (см. теорему 1.2 гл. I). Проекция группы A

равна 1 на всех группах A/S_n , начиная с $n=i+1$. Так как $A = \bigcup_n A_n$, то каждый элемент из A имеет лишь конечное число неединичных проекций. Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что теоремы 2.6 и 2.7 — частные случаи теоремы 2.8.

Полезно следующее очевидное утверждение.

Предложение 2.9. *Фактор-группа локально нормальной группы по центру — поддекартово произведение конечных групп.*

Доказательство. Центр локально нормальной группы — пересечение централизаторов конечных нормальных подгрупп, причем централизаторы сами нормальны и имеют конечные индексы в группе. Теперь из теоремы 1.2 гл. I получаем справедливость предложения.

Следствие 2.10 (Ф. Холл [79]). *Фактор-группа счетной локально нормальной группы по центру — подпрямое произведение конечных групп.*

Вытекает из предложения 2.9 и теоремы 2.7.

Для несчетных групп как теорема 2.7, так и следствие 2.10 неверны. Примером к теореме 2.7 служит периодическая часть декартова произведения циклических p -групп возрастающих порядков (см. [29], стр. 88). Для следствия 2.10 пример построен в [11]. Рассмотрим подобный

Пример 2.11 (Горчаков [13]). Обозначим через H_n ($n=1, 2, \dots$) группу, порожденную матрицами a_n и b_n ,

$$a_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

рассматриваемыми над кольцом вычетов по модулю p^n , где p — некоторое простое число. В группе $\bar{H} = \prod_n H_n$

возьмем две подгруппы $\bar{A} = \prod_n \langle a_n \rangle$ и $\bar{B} = \times_n \langle b_n \rangle$. Пусть

A — периодическая часть группы $\bar{A}$. Положим $H = \langle A, \bar{B} \rangle$. Ясно, что коммутант H' группы H совпадает с группой $\times_n \langle c_n \rangle$, где $c_n \in H_n$,

$$c_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В H' возьмем элементы $d_n = c_n c_{n+1}^{-1}$ ($n=1, 2, \dots$). Так как c_n принадлежит центру группы H_n , то H' есть центр группы H . Положим $D = \langle d_n; n=1, 2, \dots \rangle$. Тогда H'/D — коммутант группы H/D — является квазициклической группой. Тождество $[x^m, y] = [x, y]^m$ показывает, что взаимный коммутант любого элемента группы H/D с ней — циклическая группа. Отсюда H/D — локально нормальная группа. Фактор-группа $H/D/H'/D \simeq H/H'$, очевидно, изоморфна прямому произведению групп $(A \times H')/H'$, $(B \times H')/H'$. Так как $(A \times H')/H' \simeq A$, то, как известно (см. [29], стр. 88), $(A \times H')/H'$, а потому и $H/D/H'/D$, изоморфно не вложима в прямое произведение конечных групп. Итак, H/D локально нормальна и фактор-группа ее по центру не вложима в прямое произведение конечных групп.

Счетная локально нормальная группа также не всегда является подгруппой прямого произведения конечных групп.

Пример 2.12 (Эрдёш [72]). Пусть p — фиксированное простое число, G — группа, порожденная элементами $b_i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, которые удовлетворяют определяющим соотношениям $b^p = a_i^p = 1$, $a_i b = b a_i$, $a_i a_j = b a_j a_i$, где $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$

Центр и коммутант группы G равны $\langle b \rangle$. Так как коммутант конечен, то G локально нормальна. При вложении G в прямое произведение все множители должны быть нильпотентными класса 2. Если бы G была вложима в прямое произведение конечных групп, то центр G был бы бесконечен. Но он конечен и равен $\langle b \rangle$. Пример построен.

Все же для счетных групп дело обстоит неплохо.

Теорема 2.13 (Ф. Холл [79]). *Счетная локально нормальная группа — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп.*

Доказательство. Счетная локально нормальная группа — произведение конечных нормальных подгрупп:

$$G = G_1 G_2 \dots G_i \dots$$

В силу теорем 2.3 и 2.5 гл. I, теорема доказана.

Холл [79] построил пример локально нормальной группы несчетной мощности, которая не является гомо-

морфным образом подгруппы прямого произведения конечных групп. Такими же свойствами обладает группа H/D из примера 2.11.

Пример 2.14. Пусть H/D — группа из примера 2.11. Тогда централизатор BD/D в H/D совпадает с BH'/D , т. е. он счетен, а его индекс континуален. В силу леммы 4.4 гл. I, получаем, что H/D не является гомоморфным образом подпрямого произведения конечных групп (по этой лемме индекс должен быть счетным).

§ 3. Финитно аппроксимируемые локально нормальные группы

Финитно аппроксимируемые группы — это поддекартовы произведения конечных групп.

Начнем с леммы, принадлежащей Томкинсону. Она несколько точнее леммы 4 из [13]. Доказательство то же.

Лемма 3.1. Пусть локально нормальная группа G — поддекартово произведение групп G_α , $\alpha < \gamma$, пусть далее G имеет такую систему подгрупп H_α , $\alpha < \gamma$, что проекция каждого элемента группы H_α на G_β , $\beta \geq \alpha$, содержится в центре G_β , а произведение проекции $H_{\alpha+2}$ на группу G_α и $Z(G_\alpha)$ совпадает с G_α . Тогда G — подгруппа $(\times_{\alpha < \gamma} G_\alpha) \cdot Z(\prod_{\alpha < \gamma} G_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $g = \prod_{\alpha < \gamma} g_\alpha$ — некоторый элемент группы G , и пусть бесконечное множество его проекций лежат вне центров групп G_α , скажем, $g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \dots, g_{\alpha_k}, \dots$. Так как, по условию леммы, проекция группы H_{α_k+2} на G_{α_k} вместе с центром последней порождает группу G_{α_k} , то в H_{α_k+2} существует элемент $h^{(k)}$, проекция которого $h_{\alpha_k}^{(k)}$ на G_{α_k} непериодична с g_{α_k} . По условию леммы, проекция $h^{(k)}$ на G_β , $\beta \geq \alpha_k + 2$, лежит в центре G_β . Тогда элементы $(h^{(si+1)})^{-1}gh^{(si+1)}$, $i = 0, 1, \dots$, все различны. В самом деле, элемент $(h^{(si+1)})^{-1}gh^{(si+1)}$ имеет на группе $G_{\alpha_{si+1}}$ проекцию, отличную от $g_{\alpha_{si+1}}$, а на группах $G_{\alpha_{sj+1}}$, $j > i$, — проекции, равные $g_{\alpha_{sj+1}}$. Так как в локально нормальной группе любой элемент имеет конечное число со-

пряженных элементов, то полученное противоречие показывает, что лишь конечное число проекций каждого элемента группы G лежат вне центров групп G_α . Лемма доказана.

Теорема 3.2 (Горчаков [12], следствие 2). *Локально нормальная подгруппа декартова произведения счетного множества конечных групп изоморфна поддекартову произведению счетного множества конечных групп, каждый элемент которого имеет не более конечного числа нецентральных проекций.*

Доказательство. Пусть G — локально нормальная группа, являющаяся поддекартовым произведением конечных групп G_i ($i=1, 2, \dots$). Обозначим через $G^{(k)}$ подгруппу $G \cap \prod_{n \geq k} G_n$. Фактор-группа $G/G^{(1)}$ конеч-

на. Поэтому существует такая конечная нормальная подгруппа K_1 , что $G = K_1 G^{(1)}$. Обозначим $G^{(1)}$ через $H^{(1)}$. Предположим, что уже построены цепочки нормальных подгрупп $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$, $H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset \dots \supset H^{(n)}$, удовлетворяющие условиям:

- 1) K_i ($i=1, 2, \dots, n$) — конечные группы;
- 2) $H^{(i)} = G^{(s_i)}$ для некоторого s_i , $s_1 < s_2 < \dots < s_n$;
- 3) $G = K_n H^{(n)}$;
- 4) $K_i \cap H^{(i+1)} = 1$.

Построим K_{n+1} и $H^{(n+1)}$, удовлетворяющие условиям 1)–4). Ясно, что существует такое $s_{n+1} > s_n$, что $K_n \cap G^{(s_{n+1})} = 1$. Обозначим $G^{(s_{n+1})}$ через $H^{(n+1)}$. Так как последняя имеет в G конечный индекс, то существует такая конечная нормальная подгруппа K_{n+1} , содержащая K_n , что $G = K_{n+1} H^{(n+1)}$. Таким образом, построены бесконечные цепочки нормальных подгрупп

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots,$$

$$H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset \dots \supset H^{(n)} \supset \dots,$$

удовлетворяющие условиям 1)–4). Ясно, что $\bigcap H^{(n)} = 1$. Положим $P_0 = H^{(2)}$, $P_n = K_n H^{(n+2)}$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда в силу леммы 3.2 гл. I, $\bigcap_{n=0,1,\dots} P_n = 1$. По лемме 3.1 G — под-

декартово произведение конечных групп G/P_n , каждый элемент которого имеет не более конечного числа нецентральных проекций. Теорема доказана.

Неизвестно, справедливо ли утверждение теоремы 3.2 для несчетного числа множителей. Известно более слабое (см. лемму 4.5 гл. I) утверждение, а именно, что в этом случае группа — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп (см. ниже).

Теорема 3.3 (Горчаков [15], теорема 1). Пусть локально нормальная группа G есть подгруппа декартова произведения множества бесконечной мощности g конечных групп. Тогда она изоморфна поддекартову произведению групп меньших чем g мощностей, каждый элемент которого имеет лишь конечное число нецентральных проекций.

Доказательство. Если g счетна, то утверждение следует из теоремы 3.2. Пусть g — произвольная мощность. Предположим, что для всех меньших мощностей теорема верна. Докажем ее для g . Обозначим через a наименьшее порядковое число мощности g . Тогда $G \subseteq \prod_{i < a} G_i$. Обозначим через $G^{(i)}$ подгруппу $G \cap \prod_{i < i < a} G_j$. Фактор-группа $G/G^{(1)}$ конечна. Поэтому

$$G/G^{(1)} = P_1 G^{(1)}/G^{(1)} \cdot Z(G/G^{(1)}),$$

где P_1 — конечная нормальная подгруппа. Обозначим $G^{(1)}$ через H_1 . Пусть уже построены цепочки нормальных подгрупп группы G

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_i \subseteq \dots, \\ H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_i \supseteq \dots, \quad i < b,$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $G/H_i = P_i H_i/H_i \cdot Z(G/H_i)$;
- 2) P_i конечна, если i — конечное порядковое число, и $|P_i| \leq |i|$, если i — бесконечное порядковое число, где $|i|$ — мощность множества всех меньших порядковых чисел;
- 3) $H_{i+1} \cap P_i = 1$;
- 4) $H_i \subseteq G^{(i)}$;
- 5) если i конечно, то G/H_i — конечная группа; если i бесконечно, то G/H_i — подгруппа декартова произведения конечных групп в числе, не большем $|i|$.

Если b — предельное число и $\bigcap_{i < b} H_i \neq 1$, то это пересечение примем за H_b . Очевидно, H_b удовлетворяет усло-

виям 4) и 5). По индуктивному предположению $G/H_b = K_b/H_b \cdot Z(G/H_b)$, где $|K_b/H_b| \leq |b|$. Так как $|\bigcup_{i < b} P_i| \leq |b|$, то существует такая нормальная подгруппа P_b , содержащая $\bigcup_{i < b} P_i$, что $G/H_b = P_b H_b / H_b \cdot Z(G/H_b)$, $|P_b| \leq |b|$.

Если же b — непредельное число, то ввиду 2) существует нормальная подгруппа T с условием $T \cap H_{b-1} = 1$, удовлетворяющая условию 5). Положим $H_b = T \cap G^{(b)}$. Группу P_b выберем как и в предыдущем случае. Процесс выбора групп P_i и H_i закончится при некотором $b \leq a$.

Положим $D_i = P_i H_{i+2}$ ($1 \leq i < b \leq a$) и $D_0 = H_2$. В силу леммы 3.2 гл. I, $\bigcap D_i = 1$. Из леммы 3.1 следует, что G — поддекартово произведение групп G/D_i ($i < b$), каждый элемент которого имеет лишь конечное число нецентральных проекций. Каждый множитель G/D_i есть произведение группы, мощность которой меньше g , на центр. Ввиду следующего очевидного предложения: если R — подгруппа бесконечной мощности p абелевой группы T , то T имеет такую подгруппу V , что $R \cap V = 1$ и мощность фактор-группы T/V равна p , группу G/D_i можно изоморфно вложить в прямое произведение группы, мощность которой меньше g , и абелевой группы. Как известно, абелева группа изоморфна подгруппе прямого произведения счетных групп. Следовательно, если g — несчетная мощность, то для группы G получили нужное вложение. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.4 (Горчаков [15], следствие 1). Пусть локально нормальная группа G есть подгруппа декартова произведения множества бесконечной мощности g конечных групп. Тогда $|G/Z(G)| \leq g$.

Л е м м а 3.5 (Горчаков [15], лемма 4). Пусть G — декартово произведение групп G_i ($i \in I$), принадлежащих прямому многообразию, порожденному классом конечных групп. Тогда подгруппа $Z(G)$ ($\times_{i \in I} G_i$) также

принадлежит этому прямому многообразию.

Лемма очевидна.

Т е о р е м а 3.6 (Горчаков [14], теорема 2, [15], следствие). Финитно аппроксимируемая локально нормальная группа — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп.

Доказательство. Пусть G — локально нормальная финитно аппроксимируемая группа: $G \subset \prod_{i \in I} G_i$, G_i — конечные группы, $|I| = g$ — бесконечная мощность. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что G принадлежит прямому многообразию, порожденному конечными группами (см. предложение 4.1 гл. I). Теорема верна, если g счетна (см. теорему 2.7). Предположим, что для всех локально нормальных групп, которые вложимы в декартово произведение конечных групп в числе, меньшем g , теорема верна. Докажем ее для g . По теореме 3.3 группа G изоморфно вложима в декартово произведение групп меньших чем g мощностей: $G \subset \prod_{j \in N} H_j$, причем

каждый элемент имеет лишь конечное число нецентральных проекций. Считаем, что проекция G на H_j равна H_j . В этом случае H_j — фактор-группа группы G . Пусть $H_j = G/A$. В каждом смежном классе группы G по A выберем по представителю и породим ими подгруппу B . Мощности групп H_j и B равны и $H_j \cong B/A \cap B$. Так как B — подгруппа группы G , то она изоморфно вложима в декартово произведение конечных групп в числе, меньшем g (напомним, что $|H_j| < g$). По индуктивному предположению B , а потому и H_j , лежит в прямом многообразии, порожденном конечными группами. Теперь теорема следует из леммы 3.5.

Следствие 3.7 (Горчаков [18], Томкинсон). *Фактор-группа финитно аппроксимируемой локально нормальной группы по центру — подпрямое произведение конечных групп.*

Вытекает из теоремы 3.6 и из теоремы 4.6 гл. I.

Следствие 3.8. *Фактор-группа произвольной локально нормальной группы по второму члену верхнего центрального ряда — подпрямое произведение конечных групп.*

Вытекает из предложения 2.9 и следствия 3.7.

Как уже ранее отмечено (см. пример 2.11), фактор-группа локально нормальной группы по центру (по первому члену) не всегда вложима в прямое произведение конечных групп.

Следствие 3.9 (Горчаков [11]). *Локально нормальная группа без центра — подпрямое произведение конечных групп без центра.*

Получается из предыдущего следствия, так как второй член верхнего центрального ряда здесь равен 1. Множители не имеют центров, в силу предложений 1.6 и 3.7 гл. I.

Следствие 3.10 (Каргаполов [27]). *Локально нормальная группа без абелевых нормальных подгрупп — подпрямое произведение конечных полупростых групп.*

Вытекает из следствия 3.8, предложения 1.6 гл. I и того, что наибольшая локально разрешимая подгруппа подпрямого произведения конечных групп ящична.

Теорема 1 из [12] ошибочна. Существует финитно аппроксимируемая группа со счетным центром, не вложимая в прямое произведение конечных групп. Для построения группы нужна

Лемма 3.11. Если G — подпрямое произведение конечных групп G_i , $N \triangleleft G$ и порядки элементов из N взаимно просты с порядками элементов из G/N , то N — ящичная подгруппа.

Доказательство. В силу леммы 1.1 гл. I, проекции N_i группы N на G_i нормальны в G_i , порядки N_i и G_i/N_i взаимно просты. Пусть $Q = G \bigcap_{i \in I} N_i$. Очевидно, $Q \triangleleft G$, $Q \cong N$. Всякий простой делитель порядка элемента из Q является делителем порядка некоторого элемента из N . Так как порядки элементов N и G/N взаимно просты, то $Q = N$. Лемма доказана.

Пример 3.12. Пусть $p \neq 2$ — простое число. Пусть G_i — группа, порожденная элементами a_i, b_i, c_i, d_i, e_i , с определяющими соотношениями

$$a_i^{p^i} = b_i^{p^i} = c_i^{p^i} = d_i^{p^i} = e_i^{p^i} = 1,$$

$$[a_i, b_i] = [c_i, d_i] = e_i,$$

$$[a_i, c_i] = [b_i, c_i] = [a_i, d_i] = [b_i, d_i] = 1,$$

$$[a_i, e_i] = [b_i, e_i] = [c_i, e_i] = [d_i, e_i] = 1.$$

В $\times_{i=1,2,\dots} G_i$ возьмем подгруппу G , порожденную элементами

$$g_i = a_{2i-1} a_{2i}^{p^i}, h_i = b_{2i-1} b_{2i}^{-1}, r_i = c_{2i} c_{2i+1}^{p^i}, s_i = d_{2i} d_{2i+1}^{-1}, e_i$$

$$(i = 1, 2, \dots). \text{ Коммутант } G' \text{ группы } G \text{ равен } \times_{i=1,2,\dots} \langle e_i e_{i+1}^{p^i} \rangle.$$

Центр G равен $\times_{i=1,2,\dots} \langle e_i \rangle$. Фактор-группа $Z(G)/G'$ — квази-

циклическая p -группа. Далее, $G/G' = Z(G)/G' \times T$, где T разлагается в прямое произведение циклических групп. Пусть V_i — пространство над простым полем характеристики $q \neq p$, на котором G_i действует неприводимо. Записав сложение в V_i мультипликативно и рассматривая G_i как группу автоморфизмов абелевой элементарной группы V_i , образуем полупрямое произведение $D_i = V_i \rtimes G_i$ ($i = 1, 2, \dots$). В $\times_{i=1,2,\dots} D_i$ возьмем подгруппу D , порожденную всеми V_i ($i = 1, 2, \dots$) и группой G . Обозначим $V = \times_{i=1,2,\dots} V_i$. Тогда $D = V \rtimes G$.

Пусть Λ — множество континуальной мощности. Обозначим через $D^{(\lambda)} = V^{(\lambda)} \rtimes G^{(\lambda)}$ группы, изоморфные D , для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть $Q = \times_{\lambda \in \Lambda} D^{(\lambda)}$, $R = \times_{\lambda \in \Lambda} Z(G^{(\lambda)})$, $S = \times_{\lambda \in \Lambda} (G^{(\lambda)})'$, $W = \times_{\lambda \in \Lambda} V^{(\lambda)}$. Коммутант Q' группы Q равен $W \rtimes S$. Фактор-группа Q/Q' — прямое произведение группы, изоморфной R/S , и группы, разложимой в прямое произведение циклических групп: $Q/Q' = L/Q' \times P/Q'$, где $L/Q' \simeq R/S$.

Рассмотрим группы H_i ($i = 1, 2, \dots$) из примера 2.11 (простое число p в примерах одно и то же). Обозначим $C = ZH$, где Z — периодическая часть центра группы $\prod_{i=1,2,\dots} H_i$, $H = \times_{i=1,2,\dots} H_i$. Так как $L/Q' \simeq C/H$ (обе они —

прямые произведения квазициклических p -групп с континуальным числом множителей), то в прямом произведении $C \times Q$ можно взять подгруппу U , порожденную группами H , P и элементами, которые являются произведениями представителей смежных классов, соответствующих друг другу при изоморфизме $L/Q' \simeq C/H$, взятых по одному из класса. Ясно, что $U \cap C = H$, $U \cap Q = P$. Группа Q не имеет центра. Так как H счетна и $U \cap C = H$, то U имеет счетный центр, равный $Z(H)$, U финитно аппроксимируема.

Допустим, что U изоморфно вложима в прямое произведение конечных групп. По лемме 3.11 W ящична. Тогда, в силу предложения 1.6 гл. I, U/W — подпрямое произведение конечных групп. В группе U/W ящичной подгруппой является RW/W . В этом случае фактор-группа $U/W/RW/W \simeq U/RW$ — подпрямое произведение

конечных групп. Но она содержит подгруппу, изоморфную периодической части декартова произведения циклических p -групп возрастающих порядков, и не может быть подпрямым произведением конечных групп (см. [29], стр. 88). Итак, U — локально нормальная финитно аппроксимируемая группа со счетным центром, не вложимая в прямое произведение конечных групп.

Предложение 3.13 (Томкинсон). Пусть G — финитно аппроксимируемая локально нормальная группа, ω такое первое порядковое число, что $|\omega| = |G|$. Тогда G обладает цепями нормальных подгрупп

$$H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_i \subset \dots,$$

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq \dots, \quad i < \omega,$$

удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) $\bigcup_{i < \omega} H_i = G$;
- 2) $H_0 = 1, M_0 = G$;
- 3) $|H_i|$ конечна для конечного i и $|H_i| \leq |i|$ для бесконечного i ;
- 4) $H_i \cap M_i = 1$;
- 5) G/M_i конечна для конечного i , G/M_i — поддекартово произведение конечных групп в числе, не большем $|i|$, для бесконечного i ;
- 6) если i — предельное число, то $H_i Z_{i-1} = G$, где $Z_{i-1} = C_G(G/M_{i-1})$;
- 7) если i — предельное число, то $H_i = \bigcup_{j < i} H_j, M_i = \bigcap_{j < i} M_j$.

Доказательство. Группу G можно представить как объединение возрастающего ряда подгрупп G_i ($i < \omega$), которые удовлетворяют условию: если i конечно, то G_i конечна; если i бесконечно, то $|G_i| \leq |i|$. Допустим, что подгруппы H_i, M_i для всех $i < \omega$ выбраны так, что выполняются условия 2) — 7). Вместо условия 1) возьмем

$$1') H_i \supseteq G_i.$$

Построим подгруппы H_ω, M_ω , которые удовлетворяют условиям 1'), 2) — 7). Члены с натуральными номерами можно построить как в теореме 3.2. Поэтому сразу считаем номера бесконечными. Возможны два случая.

а) v — предельное порядковое число. Положим $H_v = \bigcup_{i < v} H_i$, $M_v = \bigcap_{i < v} M_i$. Так как $G_i \subseteq H_i$ для $i < v$, то $G_v = \bigcup_{i < v} G_i \subseteq \bigcup_{i < v} H_i = H_v$ (1') верно). Проверим 3). $|H_v| = \sum_{i < v} |H_i| \leq \sum_{i < v} |i| = |v|$. Условие 5) проверяется так же просто: $H_v \cap M_v = (\bigcup_{i < v} H_i) \cap M_v = \bigcup_{i < v} (H_i \cap M_v) \subseteq \bigcup_{i < v} (H_i \cap M_i) = 1$. Так как G/M_v — поддекартово произведение групп G/M_i ($i < v$), то из 6) для $i < v$ следует 6) для $i = v$.

б) v — непредельное порядковое число. В силу следствия 3.4, $|G/Z_{v-1}| \leq |v-1|$. Так как группа локально нормальна, то существует такая нормальная подгруппа K мощности $\leq |v-1|$, что $KZ_{v-1} = G$. Положим $H_v = H_{v-1}G_vK$. Для H_v выполняются 1'), 3), 6). Так как G финитно аппроксимируема, то для каждого $g \in H_v$ существует нормальная подгруппа $R(g)$ конечного индекса, не содержащая g . Обозначим через L пересечение всех $R(g)$. Фактор-группа C/L — поддекартово произведение конечных групп $G/R(g)$ (см. теорему 1.2 гл. I). Очевидно, $L \cap H_v = 1$. Определим $M_v = M_{v-1} \cap L$. Тогда $M_v \cap H_v = 1$ и $G/M_v \subseteq G/L \times G/M_{v-1}$ — поддекартово произведение конечных групп в числе, не большем $|v|$. Итак, группы H_i , M_i построены для всех $i < \omega$. Они удовлетворяют условиям 1'), 2) — 7). Отсюда получаем, что условие 1) также выполнено. Предложение доказано.

Предложение 3.14 (Томкинсон). *При условиях предложения 3.13 коммутант G' группы G — прямое произведение групп меньших чем $|G|$ мощностей. Каждый прямой множитель коммутанта содержится в коммутанте подгруппы, мощность которой меньше $|G|$.*

Доказательство. H_i , M_i возьмем как в предложении 3.13. Положим $N_0 = M_1$, $N_i = [H_i, G]M_{i+1}$ ($1 \leq i < \omega$). По лемме 3.2 гл. I $\bigcap_{i < \omega} N_i = 1$. Пусть $C_i = C_G(G/N_i)$.

Так как $N_i \supseteq M_{i+1}$, то $C_i \supseteq Z_{i+1}$. Имеем $H_{i+2}C_i \supseteq H_{i+2}Z_{i+1} = G$ (см. п. 6) предложения 3.13). Это означает, что при вложении G в $\prod_{i < \omega} G/N_i$ произведение проекции подгруппы

H_{i+2} на группу G/N_i и центра G/N_i (равного C_i/N_i) есть G/N_i . Для $j \geq i$ $[H_i, G] \subseteq [H_j, G] \subseteq N_j$. Поэтому проекция

H_i на все группы G/N_j ($j \geq i$) принадлежит их центрам. Условия леммы 3.1 выполнены. Получаем, что каждый элемент группы G' может не содержаться лишь в конечном числе C_i .

Пусть i — предельное порядковое число. Через $i + \omega$ обозначим следующее за i предельное число. Определим $X_i = [H_{i+\omega}, G] \cap M_i$. Докажем, что

$$G' = [H_\omega, G] \times \prod_{i < \omega} X_i, \quad (1)$$

где i пробегает все предельные числа, меньшие ω . Найдем пересечение

$$\begin{aligned} X_i \cap \langle X_j; j \neq i \rangle &= X_i \cap \langle X_j; j < i \rangle \langle X_j; j > i \rangle = \\ &= ([H_{i+\omega}, G] \cap M_i) \cap \\ &\cap \langle [H_{j+\omega}, G] \cap M_j; j < i \rangle \langle [H_{j+\omega}, G] \cap M_j; j > i \rangle. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} [H_{i+\omega}, G] \cap M_i &\subseteq H_{i+\omega} \cap M_i, \\ [H_{j+\omega}, G] \cap M_j &\subseteq H_{j+\omega} \quad (j < i), \\ \langle [H_{j+\omega}, G] \cap M_j; j > i \rangle &\subseteq M_{i+\omega}, \end{aligned}$$

то

$$X_i \cap \langle X_j; j \neq i \rangle \subseteq H_{i+\omega} \cap M_i \cap \langle H_{j+\omega}; j < i \rangle M_{i+\omega}.$$

Из равенств (см. пп. 7) и 4) предложения 3.13)

$$\langle H_{j+\omega}; j < i \rangle = H_i, \quad H_i \cap M_i = 1$$

следует

$$\begin{aligned} X_i \cap \langle X_j; j \neq i \rangle &\subseteq H_{i+\omega} \cap M_{i+\omega} (M_i \cap H_i) = \\ &= H_{i+\omega} \cap M_{i+\omega} = 1 \end{aligned}$$

Получаем

$$\langle X_i; i < \omega \rangle = \prod_{i < \omega} X_i.$$

Найдем

$$[H_\omega, G] \cap \prod_{i < \omega} X_i = [H_\omega, G] \cap \prod_{i < \omega} ([H_{i+\omega}, G] \cap M_i).$$

Так как $[H_\omega, G] \subseteq H_\omega$ и $[H_{i+\omega}, G] \cap M_i \subseteq M_\omega$, то $[H_\omega, G] \cap \prod_{i < \omega} X_i \subseteq H_\omega \cap M_\omega = 1$. Следовательно, в правой части (1) — прямое произведение.

Теперь покажем, что обе части в (1) равны.

Пусть $x \in G' = [G, G] = [\bigcup_{i < \omega} H_i, G] = \bigcup_{i < \omega} [H_i, G]$.

Пусть i такое наименьшее порядковое число, что $x \in [H_i, G]$. Тогда i — непредельное (среди предельных) порядковое число, т. е. $i = j + \omega$, где j — предельное порядковое число, или $i = \omega$.

Если $i = \omega$, то $x \in [H_\omega, G] \subseteq [H_\omega, G] \times \prod_{i < \omega} X_i$. Если $i > \omega$, то $i = j + \omega$. Элемент x , как доказано выше, содержится во всех, кроме конечного числа, $N_s = [H_s, G]M_{s+1}$. (Здесь s — любое, как предельное, так и непредельное, порядковое число.) Так как j — предельное число, то существует такое $k < j$, что $x \in [H_s, G]M_{s+1}$ для всех s из промежутка $k \leq s < j$.

Пусть $x = h_s m_{s+1}$, где $h_s \in [H_s, G]$, $m_{s+1} \in M_{s+1}$. Допустим, что уже доказаны равенства $h_s = h_r$ и $m_{s+1} = m_{r+1}$ для всех s, r из промежутка $k \leq s \leq r < t$ ($t < j$). Так как $h_{t-1} m_t = h_t m_{t+1}$, то $h_t^{-1} h_{t-1} = m_{t+1} m_t^{-1}$. Но включения $H_{t-1} \subseteq [H_t, G]$, $M_{t+1} \subseteq M_t$ дают $h_t^{-1} h_{t-1} \in H_t$, $m_{t+1} m_t^{-1} \in M_t$. Отсюда $h_t^{-1} h_{t-1} = m_{t+1} m_t^{-1} \in M_t \cap H_t = 1$ (см. п. 4) предложения 3.13) Это означает, что $h_{t-1} = h_t$ и $m_t = m_{t+1}$. Итак,

$$h_k = h_{k+1} = \dots = h_s = \dots, \quad s < j.$$

$$m_{k+1} = m_{k+2} = \dots = m_{s+1} = \dots,$$

Получаем $h_k \in \bigcup_{s < j} H_s = H_j$, $m_{k+1} \in \bigcup_{s < j} M_{s+1} = M_j$, т. е.

$x \in [H_j, G]M_j$. Так как $x \in [H_j, G] = [H_{j+\omega}, G]$, то $x \in [H_{j+\omega}, G] \cap [H_j, G]M_j = [H_j, G](M_j \cap [H_{j+\omega}, G]) = [H_j, G]X_j$.

Мы можем предположить, что для $s < i$ уже доказано, что всякий элемент $x \in [H_s, G]$ принадлежит правой части (1). В частности, $[H_j, G]$ принадлежит правой части (1). Отсюда и из $x \in [H_j, G]X_j$ получаем принадлежность x правой части (1). Равенство (1) доказано.

Каждый множитель правой части (1) имеет мощность, меньшую, чем G , так как $[H_\omega, G] \subseteq H_\omega$, $X_i = [H_{i+\omega}, G] \cap M_i \subseteq H_{i+\omega}$ (см. п. 3) предложения 3.13 и определение ω). Если $x \in X_i$, то $x = [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]$ для некоторых элементов $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$ из G , которые назовем

частями элемента x . Части x определяются неоднозначно. Для каждого $x \in X_i$ зафиксируем некоторую систему $M(x)$ его частей. Тогда группа $F_i = \langle M(x); x \in X_i \rangle$ имеет такую же мощность, как X_i . Коммутант группы F_i содержит X_i . Вторая часть предложения доказана. Предложение доказано.

Теорема 3.15. (Томкинсон). *Коммутант финитно аппроксимируемой локально нормальной группы — подпрямое произведение конечных групп.*

Для счетных групп утверждение следует из теоремы 2.7. Допустим, что теорема доказана для групп меньших мощностей. Тогда утверждение теоремы следует из предложения 3.14.

Теорема 3.16. *Коммутант подпрямого произведения конечных групп — прямое произведение счетных нормальных подгрупп.*

Доказательство. Примем обозначения теоремы 3.22 гл. I. Так как $I = \bigcup_{a < c} I(a)$, то $G = \bigcup_{a < c} G^{(a)}$. Обозначим через $D^{(a)}$ проекцию G на $\prod_{i \in I(a)} G_i$, через $H^{(a)}$ — проекцию G на $\prod_{i \in J(a)} G_i$, где $J(a) = I(a+1) \setminus I(a)$. Положим $Q^{(a)} = G \cap \prod_{i \in J(a)} G_i$, $R^{(a)} = Q^{(a)} \cap [G^{(a+1)}, G^{(a+1)}]$. Докажем, что

$$G' = [G^{(1)}, G^{(1)}] \times \times_{a < c} R^{(a)}, \quad (2)$$

где a пробегает непредельные числа.

Допустим, что уже доказано

$$[G^{(b)}, G^{(b)}] = [G^{(1)}, G^{(1)}] \times \times_{a < b} R^{(a)} \quad (3)$$

для всех $b < d \leq c$. Докажем (3) для d .

Если d — предельное число, то $G^{(d)} = \bigcup_{b < d} G^{(b)}$ и $[G^{(d)}, G^{(d)}] = \bigcup_{b < d} [G^{(b)}, G^{(b)}]$. Утверждение 3) в этом случае сразу следует из предложения 3.1 гл. I.

Пусть d — непредельное число. Тогда

$$[G^{(d)}, G^{(d)}] \subseteq [D^{(d-1)}, D^{(d-1)}] \times [H^{(d-1)}, H^{(d-1)}].$$

Так как по теореме 3.22 гл. I $G^{(d-1)}$ плотна в $D^{(d-1)}$, то по

лемме 3.18 гл. I имеем $[D^{(d-1)}, D^{(d-1)}] = [G^{(d-1)}, G^{(d-1)}]$. Теперь включение $[G^{(d-1)}, G^{(d-1)}] \subseteq [G^{(d)}, G^{(d)}]$ влечет $[H^{(d-1)}, H^{(d-1)}] \subseteq [G^{(d)}, G^{(d)}]$. Следовательно, получаем

$$[G^{(d)}, G^{(d)}] = [G^{(d-1)}, G^{(d-1)}] \times R^{(d-1)}.$$

Отсюда следует (3) для d . Из (3) для всех $d < c$ вытекает (2). Теорема доказана.

Следствие 3.17. *Если группа принадлежит прямому многообразию, порожденному классом конечных групп, то коммутант — произведение счетных поэлементно перестановочных нормальных подгрупп.*

Теперь, если вспомнить теорему 3.6, то возникает вопрос о том, не будет ли коммутант финитно аппроксимируемой локально нормальной группы разлагаться в прямое произведение счетных нормальных подгрупп. Также возможно, что коммутант произвольной локально нормальной группы разлагается в произведение счетных поэлементно перестановочных нормальных подгрупп, или хотя бы более слабое утверждение, что коммутант принадлежит прямому многообразию, порожденному классом конечных групп.

§ 4. Слойно конечные группы *)

Группа называется *слойно конечной*, если она имеет не более чем конечное число элементов каждого порядка. Ясно, что она периодическая. Так как при сопряжении порядки элементов сохраняются, то классы сопряженных элементов слойно конечной группы конечны. Также ясно, что слойно конечная группа счетна. Таким образом, слойно конечная группа является счетной локально нормальной. Очевидно, не всякая счетная локально нормальная группа слойно конечна. Структура слойно конечных групп оказалась тесно связанной с тонкими прямыми произведениями конечных групп (см. Черников [57, 61]), т. е. такими прямыми произведениями $\times_{i=1,2,\dots} G_i$, в которых для всякого простого числа p существует такой номер $i(p)$, что, как только $i \geq i(p)$, p не делит $|G_i|$. Под-

*) Класс слойно конечных групп впервые появился без термина) в статье [56], где были исследованы слойно конечные p -группы.

группу тонкого прямого произведения, являющуюся подпрямым произведением, будем называть *тонким подпрямым произведением*. Как показывает пример 3.14 гл. I, существуют тонкие подпрямые произведения, неразложимые в прямое произведение. Тонкие подпрямые произведения конечных групп — слойно конечные группы. Не всякая слойно конечная группа — тонкое подпрямое произведение конечных групп (например, квазициклическая p -группа).

Если для какого-либо простого числа p силовская p -подгруппа локально нормальной группы конечна, то, как это следует из теорем Силова для конечных групп, все силовские p -подгруппы конечны, они сопряжены и число их конечно. Так как всякий элемент конечного порядка — произведение попарно перестановочных p -элементов (p -элемент — элемент, порядок которого — степень p), то число элементов каждого фиксированного порядка в локально нормальной группе с конечными силовскими p -подгруппами по всем p конечно. Итак, локально нормальная группа с конечными силовскими p -подгруппами и слойно конечная группа с конечными силовскими p -подгруппами — это одно и то же.

Т е о р е м а 4.1 (Черников [61]). *Класс слойно конечных групп с конечными силовскими p -подгруппами по всем p совпадает с множеством всех тонких подпрямых произведений конечных групп.*

Доказательство. Пусть G — слойно конечная группа с конечными силовскими подгруппами, g — ее p -элемент, P — силовская p -подгруппа, содержащая g . Подгруппа $C(P)$ имеет в G конечный индекс, $D = C(P) \cap \bigcap P$ содержится в центре $C(P)$. Пусть $C(P) = \bigcup_{i=1,2,\dots} H_i$,

$D \subseteq H_i \subseteq H_{i+1}$, H_i конечна. Так как $H_i = D \times Q_i$ и множителем, ввиду взаимной простоты их порядков, определяются однозначно, то $C(P) = D \times Q$, где $Q = \bigcup_{i=1,2,\dots} Q_i$. Подгруп-

па Q имеет конечный индекс в G и не содержит p -элементов. Допустим, что выбраны для всех p нормальные подгруппы N_p конечного индекса, которые не содержат элементов порядка p . Тогда $\bigcap_p N_p = 1$. Группа G финитно аппроксимируема. По теореме 2.7 G — подпрямое произведение конечных групп. Так как силовские подгруппы

группы G конечны, то подпрямое произведение тонкое. Теорема доказана.

Лемма 4.2. Если A — абелева p -группа и A/B — ее бесконечная элементарная фактор-группа, то A имеет бесконечно много элементов порядка p .

Доказательство. Пусть $A/B = \times_{i=1,2,\dots} \langle a_i B \rangle$. Рассмотрим $A_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Очевидно, $A_n/B \cap A_n = A_n B/B$ — элементарная фактор-группа порядка p^n . Отсюда по теореме о конечно порожденных абелевых группах A_n — прямое произведение точно n циклических групп. Поэтому она имеет точно $p^n - 1$ элемент порядка p . Следовательно, A имеет бесконечно много элементов порядка p . Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пусть P — p -группа класса нильпотентности 2 и P/Z , где $Z \subseteq Z(P)$, — бесконечная элементарная фактор-группа. Тогда P имеет бесконечно много элементов порядка p .

Доказательство. Считаем, что Z имеет конечное число элементов порядка p . Если a и $b \in P$, то $a^p \in Z$ и $[a, b] \in Z$. Поэтому

$$[a, b]^p = [a^p, b] = 1.$$

Покажем, что для всякого $a \notin Z$ существуют такие a_i ($i=1, 2, \dots$), что $[a, a_i] = 1$ и $a_i Z \neq a_j Z$ при $i \neq j$. Так как элементов порядка p в Z конечное число, то существуют такие элементы b_i ($i=1, 2, \dots$), что $\langle b_i Z \rangle \neq \langle b_j Z \rangle$ и $[a, b_i] = [a, b_j]$. Обозначим $a_{i-1} = b_i b_i^{-1}$ ($i=2, 3, \dots$). Тогда $[a, a_i] = 1$ и $a_i Z \neq a_j Z$.

Рассмотрим подгруппу $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$. Так как $A/A \cap Z$ — бесконечная элементарная группа, то все условия леммы для A выполняются. Вместе с тем $A \subseteq C(a)$. Обозначим $a = b_1$. В A возьмем $b_2 \notin Z$. Центрилизатор $C_A(b_2)$ содержит такие элементы $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, что $c_i(Z \cap A) \neq c_j(Z \cap A)$. Пусть $C = \langle c_1, c_2, \dots, c_n, \dots \rangle$. Группа $C/C \cap Z$ — бесконечная элементарная. Продолжая этот процесс, получим такие попарно перестановочные элементы b_i ($i=1, 2, \dots$), что $b_i Z \neq b_j Z$. Группа $B/B \cap Z$ — бесконечная элементарная группа, B — абелева группа. В силу леммы 4.2, получаем справедливость леммы 4.3.

Лемма 4.4 (Черников [58]). Пусть G — локально конечная группа и Z — такая подгруппа $Z(G)$, что порядки элементов групп Z и G/Z взаимно просты. Тогда $G = Z \times H$.

Доказательство. Пусть $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ — объединение локальной системы конечных подгрупп группы G . Тогда $G_i = (G_i \cap Z) \times H_i$ — единственное разложение группы G_i , так как порядки групп $G_i \cap Z$ и $G_i / (G_i \cap Z) \simeq G_i Z / Z$ взаимно просты. Следовательно, $G = Z \times H$, где $H = \bigcup_{i \in I} H_i$. Лемма доказана.

Теорема 4.5 (Черников [57]). Группа G тогда и только тогда слойно конечна, когда $G = HQ$, $H \subseteq Z(G)$, $H = 1$ или H — прямое произведение квазициклических p -групп по некоторым p с конечным числом множителей для каждого p , Q — слойно конечная группа с конечными силовскими подгруппами.

Доказательство. Если A/Z — бесконечная элементарная p -подгруппа группы G/Z , где $Z \subseteq Z(G)$, то по лемме 4.4 $A = P \times Q$, где P — p -группа класса 2, удовлетворяющая условиям леммы 4.3, а Q — подгруппа из Z , не содержащая p -элементов. P имеет бесконечно много элементов порядка p , что невозможно. Итак, все элементарные подгруппы в G/Z конечны.

Так как по следствию 2.10 $G/Z(G)$ — подпрямое произведение конечных групп, то из конечности всех элементарных подгрупп группы $G/Z(G)$ следует, что это подпрямое произведение тонкое.

Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots$ — все простые делители порядков элементов $G/Z(G)$.

Для всякого p группа $G/Z(G)$ имеет конечное число p -элементов. Пусть p_1 — простое число, $P_1/Z(G)$ — множество всех p_1 -элементов $G/Z(G)$. Все p_1 -элементы группы G содержатся в P_1 . Так как $P_1/Z(G)$ конечно, то централизатор C_1 множества всех p_1 -элементов имеет в G конечный индекс. Пусть подгруппа $R_1/Z(G)$ конечного индекса в $G/Z(G)$ имеет единичное пересечение с $P_1/Z(G)$. В G существует такая конечная нормальная подгруппа S_1 , что $G = S_1(C_1 \cap R_1)$. Все p_1 -элементы группы $C_1 \cap R_1$ содержатся в центре. Они образуют силовскую p_1 -подгруппу T_0 группы $Z(G)$. По лемме 4.4 $C_1 \cap R_1 = T_0 \times L_1$, где L_1 не имеет p_1 -элементов. Получаем $G =$

$= S_1 T_0 L_1 = S_1 L_1 Z(G)$. Обозначим $\pi_0 = \{p_1\}$. Ясно, что $\pi_0 \cap \pi(L_1) = \emptyset$. Группа $L_1/Z(G) \cap L_1$ имеет лишь конечное множество $P_2/Z(G) \cap L_1$ π_1 -элементов для $\pi_1 = (\pi(S_1) \setminus \pi_0) \cup \{p_2\}$, где $p_2 \neq p_1$, $p_2 \in \pi(G/Z(G))$. Группа P_2 содержит все π_1 -элементы L_1 . Централизатор C_2 множества P_2 имеет в L_1 конечный индекс. Пусть подгруппа $R_2/Z(G) \cap L_1$ конечного индекса в $L_1/Z(G) \cap L_1$ имеет с $P_2/Z(G) \cap L_1$ единичное пересечение. Поэтому существует такая конечная нормальная в G подгруппа S_2 , что $L_1 = S_2(C_2 \cap R_2)$. Пусть T_1 — силовская π_1 -подгруппа группы $C_2 \cap R_2$, она лежит в $Z(G)$. По лемме 4.4 $C_2 \cap R_2 = T_1 \times L_2$. Получаем $G = S_1 S_2 L_2 Z(G)$.

Допустим, что уже выбраны нормальные подгруппы

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \quad L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_n,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) S_i конечна ($i=1, 2, \dots, n$);
- 2) $G = S_1 S_2 \dots S_i L_i Z(G)$;
- 3) $S_i \subset L_{i-1}$, $[S_i, L_{i+1}] = 1$;
- 4) $\pi(S_{i-1}) \cap \pi(L_i) = \emptyset$;
- 5) $\bigcup_{j=1}^i \pi(S_j)$ содержит $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Построим S_{n+1} и L_{n+1} . Пусть $\pi_n = \pi(S_n) \setminus \pi(S_{n-1})$, если $p_{n+1} \in \pi(S_1 S_2 \dots S_{n-1})$, и $\pi_n = (\pi(S_n) \setminus \pi(S_{n-1})) \cup \{p_{n+1}\}$ в противном случае. Группа $G/Z(G)$ содержит конечное множество $P_{n+1}/Z(G)$ π_n -элементов. Все π_n -элементы из G содержатся в P_{n+1} . Централизатор C_{n+1} множества P_{n+1} имеет в L_n конечный индекс. Пусть подгруппа $R_{n+1}/Z(G) \cap L_n$ конечного индекса в $L_n/Z(G) \cap L_n$ имеет единичное пересечение с $P_{n+1} \cap L_n/Z(G) \cap L_n$. Следовательно, существует такая конечная нормальная в G подгруппа S_{n+1} , что $L_n = S_{n+1}(C_{n+1} \cap R_{n+1})$. Силовская π_n -подгруппа T_n группы $C_{n+1} \cap R_{n+1}$ лежит в $Z(G)$. По лемме 4.4 $C_{n+1} \cap R_{n+1} = T_n \times L_{n+1}$. Ясно, что S_{n+1} и L_{n+1} удовлетворяют условиям 1)–5). Итак, группы S_n и L_n построены для всех натуральных n . Группа $S = S_1 S_2 \dots S_n \dots$ слойно конечна, в силу условий 1), 4), 3). По условию 2) $G = (S_1 S_2 \dots S_{i-1}) S_i L_i Z(G)$. По условию 3) $[S_1 S_2 \dots S_{i-1}, L_i] = 1$, а по условию 4) L_i и $S_1 S_2 \dots S_{i-1}$ не имеют элементов одинакового порядка. Поэтому, если какая-то силовская p -подгруппа группы $G/Z(G)$ содержится в

$S_1 S_2 \dots S_{i-1} Z(G)/Z(G)$, то все силовские p -подгруппы содержатся в $(S_1 S_2 \dots S_{i-1}) S_i Z(G)/Z(G)$. Это означает, что $SZ(G) = G$.

Пусть $Z(G) = \times_p Z_p$, где Z_p — силовская p -подгруппа $Z(G)$. Далее, $Z_p = {}^p H_p \times K_p$, где H_p — полная подгруппа, K_p — редуцированная. Так как Z_p имеет конечное число элементов порядка p , то H_p — прямое произведение конечного числа квазициклических p -групп или $H_p = 1$. Нетрудно убедиться, что K_p конечна. Пусть $H = \times_p H_p$, $K = \times_p K_p$, $Q = KS$. Тогда $G = HQ$.

Осталось показать, что силовские подгруппы в Q конечны. Пусть $S^{(p)}$ — конечная нормальная подгруппа, содержащая все силовские p -подгруппы из S . Подгруппа $K_p S^{(p)}$ конечна и нормальна в G . Образы K и S в $G/K_p S^{(p)}$ не имеют p -элементов. Они также нормальны в $G/K_p S^{(p)}$ и, следовательно, их произведение не имеет p -элементов. Это означает, что все p -элементы содержатся в $K_p S^{(p)}$. Теорема доказана.

Следствие 4.6 (Половицкий [43]). *Группа тогда и только тогда слойно конечна, когда она является тонким подпрямым произведением черниковских групп, конечных над центром.*

Доказательство. Если G — тонкое подпрямое произведение черниковских групп, конечных над центром, то G , очевидно, слойно конечна.

Нужно доказать обратное. По теореме 4.5 $G = HQ$, $H \subseteq Z(G)$, $H = \times_p H_p$, H_p — прямое произведение квазициклических p -групп в конечном числе или $H_p = 1$, Q — тонкое подпрямое произведение конечных групп Q_i ($i=1, 2, \dots$) (см. теорему 4.1). Пусть $H^{(i)} = \times_{p \notin \pi(Q_i)} H_p$.

Обозначим $Q^{(i)} = Q \cap \times_{j \neq i} Q_j$, $G^{(i)} = Q^{(i)} H^{(i)}$. Фактор-группа

$G/G^{(i)}$ — черниковская группа, конечная над центром. Всякий элемент как из H , так и из Q лежит во всех $G^{(i)}$, кроме конечного числа. Поэтому G/D — подпрямое произведение групп $G/G^{(i)}$, где $D = \bigcap_{i=1, 2, \dots} H^{(i)}$. Так как $G =$

$= D \times (\times_{p \notin \pi(D)} H_p) Q$, то следствие доказано.

ГЛАВА III

СОПРЯЖЕННЫЕ И ЛОКАЛЬНО СОПРЯЖЕННЫЕ ПОДГРУППЫ

§ 1. Существование нильпотентных подгрупп

Теорема 1.1 (Семенова [48]). Пусть G — финитно аппроксимируемая локально нормальная группа, H — ее бесконечная нормальная подгруппа и Q — подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами группы G , содержащимися в H . Тогда $|Q| = |H|$.

Доказательство. В локально нормальной группе минимальные нормальные подгруппы конечны. Так как G финитно аппроксимируема, то для всякого $g \neq 1$ из Q существует нормальная подгруппа $N(g)$ конечного индекса в G , не содержащая g . Пусть $N = \bigcap_{g \in Q} N(g)$. Ясно,

что $N \cap Q = 1$. Так как $N \cap H \triangleleft G$, то из $N \cap H \neq 1$ следовало бы, что $N \cap H$ содержит конечную отличную от 1 нормальную подгруппу группы G . Следовательно, $N \cap H$ содержит неединичную минимальную нормальную подгруппу K группы G . По определению подгруппы Q имеем $K \subseteq Q$. Отсюда $N \cap Q \neq 1$. Противоречие. Итак, $N \cap H = 1$. Рассмотрим ряд $G/N \cong HN/N \cong QN/N$. Докажем, что QN/N порождена всеми минимальными нормальными подгруппами группы G/N , содержащимися в HN/N . Группа QN/N порождается образами минимальных нормальных подгрупп группы G , содержащихся в H . Пусть M — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H . Тогда MN/N — минимальная нормальная подгруппа группы G/N . Действительно, если $R/N \subset MN/N$, то $R = N \times (M \cap R)$. Так как $R \triangleleft G$ и $M \triangleleft G$, то $M \cap R \triangleleft G$. Из минимальности M следует, что $M \cap R = 1$, т. е. $R = N$ и $R/N = 1$. Итак, QN/N порождается некото-

рыми минимальными нормальными подгруппами группы G/N , содержащимися в HN/N . Докажем, что всеми. Действительно, пусть M/N — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G/N , содержащаяся в HN/N . Тогда $M = N \times (M \cap H)$, $M \cap H \triangleleft G$. Если $R \subset M \cap H$, $R \triangleleft G$, то $RN/N \triangleleft G/N$, $RN/N \subset HN/N$. Так как M/N минимальна в G/N , то $RN/N = 1$, т. е. $RN = N$. Так как $R \subset H$ и $N \cap H = 1$, то $R = 1$. Итак, M/N — образ минимальной нормальной подгруппы $M \cap H$ группы G , содержащейся в H . А так как $M \cap H \subset Q$, то $M/N \subseteq QN/N$.

Поскольку $|QN/N| = |Q|$, $|HN/N| = |H|$, теорему достаточно доказать для случая $N = 1$. Поэтому считаем G поддекартовым произведением групп $G/N(g)$, $g \in Q$.

В силу следствия 3.4 гл. II, $G = Z(G)S$, где $|S| = |Q|$, $S \cong Q$ и $S \triangleleft G$. Пусть Z_p — силовская p -подгруппа группы $H \cap Z(G)$. Нижний слой T_p группы Z_p имеет ту же мощность, что и Z_p ; $T_p \cong Q$. Так как $H \cap Z(G) = \times_p Z_p$ и

$$|\times_p Z_p| = |\times_p T_p|, \text{ то } |H \cap Z(G)| \leq |Q|.$$

Рассмотрим фактор-группу

$$G/H \cap Z(G) = Z(G)/H \cap Z(G) \cdot S(H \cap Z(G))/H \cap Z(G).$$

Группа $H \cap Z(G)$ имеет с $Z(G)/H \cap Z(G)$ единичное пересечение. Следовательно, ее мощность не выше $|S| = |Q|$. Итак, $|H| \leq |H \cap Z(G)| \cdot |S| \leq |Q|$. Теорема доказана.

Цоколем группы называют подгруппу, порожденную минимальными нормальными подгруппами.

Следствие 1.2 (Семенова [48]). *Мощность цоколя бесконечной финитно аппроксимируемой локально нормальной группы совпадает с мощностью группы.*

Лемма 1.3. *Цоколь любой группы — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть G — группа, C — цоколь. Пусть N_i — минимальная нормальная подгруппа. Если $C = N_i$, то лемма доказана. Пусть уже выбраны такие минимальные нормальные подгруппы N_i ($i < j$), что $N^{(j)} = \times_{i < j} N_i \subseteq C$. Если $N^{(j)} = C$, то лемма доказана. Если

$N^{(j)} \neq C$, то $N^{(j)}$ не содержит некоторой минимальной нормальной подгруппы N_j . Ясно, что $N^{(j)} \cap N_j = 1$. В силу пред-

ложения 3.1 гл. I, $\langle N^{(j)}, N_j \rangle = \times_{i < j+1} N_i = N^{(j+1)}$. Для некоторого j должны получить $N^{(j)} = C$. Лемма доказана.

Следствие 1.4 (Семенова [48]). *Бесконечная финитно аппроксимируемая локально нормальная группа имеет равномогущую себе абелеву подгруппу.*

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условию, C — цокль G . По лемме 1.3 $C = \times_{i < j} N_i$, N_i — минимальные нормальные подгруппы G . В каждом множителе N_i возьмем абелеву подгруппу $A_i \neq 1$. Тогда $C \cong A = \times_{i < j} A_i$. Так как $|C| = |A|$, ввиду конечности N_i ($i < j$), и так как $|C| = |G|$ по теореме 1.1, то $|A| = |G|$. Следствие доказано.

Следствие 1.5 (Семенова [48]). *Бесконечная локально разрешимая финитно аппроксимируемая локально нормальная группа имеет равномогущую себе нормальную абелеву подгруппу.*

Доказательство. Пусть Q — цокль группы G . По лемме 1.3 $Q = \times_{i \in I} Q_i$. Из локальной разрешимости следует абелевость Q_i . В силу следствия 1.2, $|Q| = |G|$. Следствие доказано.

Следствие 1.6 (Семенова [48]). *Бесконечная финитно аппроксимируемая локально нормальная p -группа равномогуща со своим центром.*

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условию следствия, $C = \times_{i \in I} N_i$ — цокль G . По следствию 1.2 $|C| = |G|$. Так как G локально нормальна и является p -группой, то она локально нильпотентна, ввиду нильпотентности конечных p -групп (см. [64], стр. 117). По теореме 111 из [20] $N_i \subseteq Z(G)$. Следовательно, $C \subseteq Z(G)$ и $|C| \leq |Z(G)|$. Отсюда $|G| \leq |Z(G)|$, т. е. $|G| = |Z(G)|$. Следствие доказано.

Лемма 1.7 (Семенова [48]). *Пусть G — подпрямое произведение периодической группы G_1 и абелевой группы без кручения G_2 . Тогда $|G_2 \cap G| = |G_2|$.*

Доказательство. В силу предложения 3.9 гл. I, $G_1/G \cap G_1 \simeq G_2/G \cap G_2$. Так как G_1 — периодическая группа, то $G_2/G \cap G_2$ периодична и, следовательно, $G \cap G_2 \neq 1$. Группу G_2 можно представить как объединение попарно пересекающихся по 1 локально циклических групп:

$G_2 = \bigcup_{i \in I} H_i$. Так как $G_2/G \cap G_2$ периодична, то $H_i \cap \bigcap (G \cap G_2) \neq 1$. Если G_2 счетна, то $G \cap G_2$ счетна и $|G_2| = |G \cap G_2|$. Пусть G_2 несчетна. Тогда из счетности H_i следует, что $|G_2| = |I|$. Но $G \cap G_2 = \bigcup_{i \in I} (H_i \cap (G \cap G_2))$. Следовательно, $|G \cap G_2| = |I|$. Получаем $|G_2| = |G \cap G_2|$. Лемма доказана.

Теорема 1.8 (Семенова [48]). 1) *Бесконечная группа с конечными классами сопряженных элементов имеет равномошную себе нильпотентную подгруппу класса ≤ 2 .*

2) *При дополнительном условии локальной разрешимости она содержит равномошную себе нормальную нильпотентную подгруппу класса ≤ 2 .*

Доказательство. По теореме 1.9 гл. II G — прямое произведение локально нормальной группы G_1 и абелевой группы без кручения G_2 . Если $|G| = |G \cap G_2|$, то утверждение 1) теоремы доказано. Если $|G| > |G \cap G_2|$, то по лемме 1.7 $|G_2| < |G|$. Так как предложение 3.9 гл. I дает изоморфизм $G_1/G \cap G_1$ и $G_2/G \cap G_2$, то получаем $|G \cap G_1| = |G|$. Фактор-группа $(G \cap G_1)/Z(G \cap G_1)$ — финитно аппроксимируемая локально нормальная группа (см. предложение 2.9 гл. II). Поэтому (следствие 1.4) $(G \cap G_1)/Z(G \cap G_1)$ имеет равномошную себе абелеву подгруппу $A/Z(G \cap G_1)$. Класс A не превосходит 2 и $|A| = |G \cap G_1| = |G|$, что и требовалось. Утверждение 1) доказано.

Пусть G локально разрешима. Из теоремы 1.7 гл. II следует, что $G/Z(G)$ локально нормальна. Так как $G/Z(G)$ финитно аппроксимируема, то, в силу следствия 1.5, $G/Z(G)$ имеет равномошную себе нормальную абелеву подгруппу $A/Z(G)$. Группа A имеет класс нильпотентности ≤ 2 и равномошна G . Теорема доказана.

Теорема 1.9 (Семенова [48]). 1) *Любая подгруппа класса нильпотентности $n \geq 2$ бесконечной группы с конечными классами сопряженных элементов содержится в нильпотентной того же класса подгруппе, равномошной группе.*

2) *При дополнительном условии локальной разрешимости группы и нормальности исходной нильпотентной подгруппы объемлющая нильпотентная подгруппа может быть выбрана нормальной.*

Доказательство. Пусть группа G и ее подгруппа H удовлетворяют условиям утверждения 1) теоремы. Если $|Z(G)| = |G|$, то $Z(G)H$ — нильпотентная группа того же класса, что и H , и утверждение 1) доказано. Пусть $|Z(G)| < |G|$. Так как H и $Z(G)H$ одного и того же класса нильпотентности, то считаем, что $H \supseteq Z(G)$.

Классы сопряженных элементов группы G конечны. Поэтому индексы централизаторов этих классов конечны. Пересечение всех централизаторов — центр G . Итак, $G/Z(G)$ финитно аппроксимируема. По теореме 1.7 гл. II $G/Z(G)$ локально нормальна. Теперь теорема 3.6 гл. II утверждает, что $G/Z(G)$ — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп. По лемме 4.4 гл. I имеем $|G/Z(G) : C(H/Z(G))| \leq |H/Z(G)|$. Так как $|C(H/Z(G))| = |G|$, то из следствия 1.4 получаем, что $C(H/Z(G))$ имеет абелеву подгруппу $A/Z(G)$, равномошную G . Рассмотрим AH . Коммутаторные соотношения дают $\gamma_2(AH) = [AH, AH] = [A, A] [A, H] [H, H]$. Группа $D = [A, A] [A, H]$ по выбору A принадлежит $Z(G)$. Итак, $\gamma_2(AH) = D\gamma_2(H)$. Далее, $\gamma_3(AH) = [\gamma_2(AH), AH] = [D\gamma_2(H), AH] = [\gamma_2(H), AH] = [\gamma_2(H), A] [\gamma_2(H), H] = [\gamma_2(H), A] \gamma_3(H)$. Так как $[\gamma_2(H), A] = [H, H, A] = [H, A, H] [A, H, H]$ (см. [29], стр. 38, 39) и $[H, A] \subseteq Z(G)$, ввиду выбора A , то $[\gamma_2(H), A] = 1$. Итак, $\gamma_3(AH) = \gamma_3(H)$. Пусть уже доказано, для $i \geq 3$, что $\gamma_i(AH) = \gamma_i(H)$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}(AH) &= [\gamma_i(AH), AH] = [\gamma_i(H), AH] = \\ &= [\gamma_i(H), A] [\gamma_i(H), H] = [\gamma_i(H), A] \gamma_{i+1}(H). \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} [\gamma_i(H), A] &= [\gamma_{i-1}(H), H, A] = \\ &= [H, A, \gamma_{i-1}(H)] [A, \gamma_{i-1}(H), H]. \end{aligned}$$

Так как $[H, A] \subseteq Z(G)$, то оба последних множителя равны 1. Получаем $[\gamma_i(H), A] = 1$. Учитывая предыдущие равенства, имеем $\gamma_i(AH) = \gamma_i(H)$ для всех $i \geq 3$. Это означает, что классы нильпотентности групп AH и H совпадают. Утверждение 1) доказано.

Допустим теперь, что G и H удовлетворяют условиям утверждения 2). Так же, как в доказательстве утверждения 1), рассмотрим $C(H/Z(G))$. Из нормальности H сле-

дует нормальность $C(H/Z(G))$. Пусть $Q/Z(G)$ — подгруппа из $C(H/Z(G))$, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами группы $G/Z(G)$, содержащимися в $C(H/Z(G))$. По теореме 1.1 $Q/Z(G)$ равномощна $G/Z(G)$. Группа QH равномощна G . Так же, как в доказательстве утверждения 1), можно доказать, что

$$\gamma_i(QH) = \gamma_i(H) \quad \text{для } i \geq 3.$$

Это завершит доказательство утверждения 2). Теорема доказана.

Локально нормальная группа может, вообще говоря, не иметь равномощных себе абелевых подгрупп, так что в следствии 1.4 условие финитной аппроксимируемости нелишнее. Также в теоремах 1.8 и 1.9 нельзя отказаться от того, что класс нильпотентности $n \geq 2$.

§ 2. Мощность классов локально сопряженных подгрупп

Автоморфизм φ группы G называется *локально внутренним*, если для любого конечного множества $M \subseteq G$ существует такой элемент $g \in G$, что $m^\varphi = g^{-1}mg$ для всякого $m \in M$. Локально внутренние автоморфизмы образуют подгруппу в группе всех автоморфизмов. Если H и Q — подгруппы G , то их называют *локально сопряженными*, если существует такой локально внутренний автоморфизм φ группы G , что $H^\varphi = Q$. Совокупность всех подгрупп, локально сопряженных данной подгруппе H , называют *классом локально сопряженных подгрупп* и обозначают $\text{Lcl}_G(H)$ или просто $\text{Lcl}(H)$, если ясно, о какой группе идет речь.

Для доказательств необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. Пусть φ — локально внутренний автоморфизм локально нормальной группы G , N — нормальная подгруппа G . Тогда ограничение φ на N — автоморфизм N , т. е. $N^\varphi = N$.

Доказательство. Так как G локально нормальна, то $N = \bigcup_{i \in I} N_i$, где N_i — конечные нормальные подгруппы группы G . По определению локально внутреннего автоморфизма существует такой элемент g_i из G , что

$g_i^{-1}ng_i = n^*$ для всякого $n \in N_i$. Следовательно, $N_i^* = N_i$ для всех $i \in I$. Но тогда $N^* = N$. Лемма доказана.

Лемма 2.2 (Стоунхьюер [102]). Если G — локально нормальная группа, N — нормальная подгруппа в G , φ — локально внутренний автоморфизм G/N , то существует такой локально внутренний автоморфизм ψ группы G , что автоморфизм, индуцированный ψ на G/N , совпадает с φ .

Доказательство. Пусть $G_i (i \in I)$ — локальная система конечных нормальных подгрупп группы G . Считаем, что $i \leq j$ тогда и только тогда, когда $G_i \subseteq G_j$. Так как группа G_i конечна, то существует лишь конечное множество автоморфизмов группы G_i , полученных трансформированием группы G_i элементами из G , действие которых на $G_i/N \cap G_i$ совпадает с φ . Обозначим множество таких автоморфизмов через Φ_i . Для $i \geq j$ установим отображение $\pi_{ij}: \Phi_i \rightarrow \Phi_j$. Пусть $\psi_i \in \Phi_i$. Тогда существует такой элемент $g_i \in G$, что $g_i^{\psi_i} = g_i^{-1}gg_i$ для всякого $g \in G_i$. По определению ψ_i для любого $g \in G_i$ имеем

$$g^{\psi_i} = g^{\varphi}n, \quad n \in N \cap G_i.$$

Если $g \in G_j$, то $g^{\psi_i} \in G_j$ и $g^{\varphi} \in G_j$. Следовательно, $n = (g^{\varphi})^{-1}(g^{\psi_i}) \in G_j$, $g^{\psi_i} = g^{\varphi}n$, $n \in N \cap G_j$. Поэтому ограничение ψ_i на G_j принадлежит Φ_j . Остальные условия существования полного проекционного множества (см. [41]) очевидны. Итак, пусть $\psi_i (i \in I)$ — полное проекционное множество. Определим $\psi: G \rightarrow G$, считая ограничение ψ на G_i равным ψ_i . Очевидно, ψ — локально внутренний автоморфизм. По лемме 2.1 $N^* = N$ и можно определить $(gN)^* = g^*N$. Докажем, что ψ и φ совпадают на G/N .

Нормальные подгруппы $G_iN/N (i \in I)$ образуют локальную систему в G/N . Поэтому, если для любого $i \in I$ доказать, что ψ и φ совпадают на G_iN/N , то лемма доказана. Пусть $g \in G_i$. Тогда

$$g^{\psi} = g^{\psi_i} = g^{\varphi}n, \quad n \in N \cap G_i.$$

Это завершает доказательство.

Лемма 2.3. Пусть G — группа, N — подгруппа из $H \subseteq G$, нормальная в G . Тогда

$$|\text{cl}_G(H)| = |\text{cl}_{G/N}(H/N)|.$$

Лемма очевидна.

Лемма 2.4 (Хартли [80]). Пусть G — локально нормальная группа, H — ее подгруппа и N — подгруппа из H , нормальная в G . Тогда

$$|\text{Lcl}_G(H)| = |\text{Lcl}_{G/N}(H/N)|.$$

Доказательство. В силу леммы 2.1, $N^\varphi = N$; здесь φ — локально внутренний автоморфизм G . Поэтому, если H_1 и H_2 содержат N и $H_1^\varphi = H_2$, то $(H_1/N)^\varphi = H_2/N$. Итак,

$$|\text{Lcl}_G(H)| \geq |\text{Lcl}_{G/N}(H/N)|.$$

Пусть $(H_1/N)^\varphi = H_2/N$, где φ — локально внутренний автоморфизм G/N . По лемме 2.2 существует такой локально внутренний автоморфизм ψ группы G , что ψ и φ совпадают на G/N . Но тогда $(H_1/N)^\psi = H_2/N$. Следовательно, $H_1^\psi = H_2$. Отсюда

$$|\text{Lcl}_G(H)| \leq |\text{Lcl}_{G/N}(H/N)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5 (Стоунхьюер [102]). Если φ — локально внутренний автоморфизм подгруппы H локально нормальной группы G , то существует такой локально внутренний автоморфизм ψ группы G , что ограничение ψ на H равно φ .

Доказательство. Пусть G_i ($i \in I$) — локальная система конечных нормальных подгрупп группы G . Считаем, что I упорядочено согласно включениям групп G_i . Пусть Φ_i — множество автоморфизмов группы G_i , совпадающих на $H \cap G_i$ с φ и полученных трансформированиями при помощи элементов из G . Определим отображения $\pi_{ij}: \Phi_i \rightarrow \Phi_j$ для $i > j$. Пусть $\psi_i \in \Phi_i$. Тогда $g^{\psi_i} = g_i^{-1} g g_i$ для некоторого $g_i \in G$ и всякого $g \in G_i$. Если $g \in H \cap G_i$, то $g^{\psi_i} = g^\varphi$. Так как $H \cap G_j \subseteq H \cap G_i$, то ограничение ψ_i на G_j принадлежит Φ_j . Итак, получаем полное проекционное множество ψ_i ($i \in I$) (см. [41]). Определим $\psi: G \rightarrow G$, считая $g^\psi = g^{\psi_i}$ для $g \in G_i$.

Лемма 2.6 (Хартли [80], предложение 3). Пусть G — локально нормальная группа, H — ее подгруппа, H_0 — наибольшая нормальная в G подгруппа из H . Если

$h = |H : H_0|$ — бесконечное кардинальное число, то $|\text{Lcl}(H)| \leq 2^h$.

Доказательство. Пусть D — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая H . Так как $|D/H_0| = |H/H_0|$, то локально сопряженных подгрупп не больше чем подмножеств в D/H_0 , т. е. не больше чем 2^h . Лемма доказана.

Лемма 2.7. Пусть G — локально нормальная группа, H — ее подгруппа, $N \triangleleft G$ и $N \cap H = 1$, Q — такая подгруппа H , что $QN \triangleleft G$, φ — локально внутренний автоморфизм G . Тогда из $Q^\varphi \neq Q$ следует $H^\varphi \neq H$.

Доказательство. Пусть $Q^\varphi \neq Q$ и $H^\varphi = H$. Если $g \in Q$, то $g \in H$ и $g^\varphi \in H$. Но $QN \triangleleft G$. Поэтому $g^\varphi = sn$, $s \in Q$, $n \in N$. Отсюда $n = s^{-1}g^\varphi \in H$. Это означает, что $n = 1$. Итак, $g^\varphi = s \in Q$ или $Q^\varphi \subseteq Q$. Так как $H^{\varphi^{-1}} = H$ и $Q \neq Q^{\varphi^{-1}}$, то можно доказать $Q^{\varphi^{-1}} \subseteq Q$, т. е. $Q \subseteq Q^\varphi$. Получили $Q^\varphi = Q$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.8. В локально нормальной группе существует набор силовских p -подгрупп (по одной для каждого p), который порождает всю группу.

Доказательство. Пусть G локально нормальна, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ — объединение конечных нормальных подгрупп.

Каждая подгруппа G_i имеет конечное множество M_i наборов силовских подгрупп (по одной для каждого p), любой из которых порождает G_i . Если $G_i \subseteq G_j$, то определим отображение $\psi_{ij}: M_j \rightarrow M_i$ по правилу:

$$\psi_{ij}(P_1, \dots, P_n) = (P_1 \cap G_i, \dots, P_n \cap G_i),$$

где $(P_1, \dots, P_n)$ — набор силовских подгрупп группы G_j . Группы $P_1 \cap G_i, \dots, P_n \cap G_i$ либо равны 1, либо — силовские подгруппы группы G_i . Очевидно, если $G_i \subseteq G_j \subseteq G_k$, то $\psi_{jk}\psi_{ij} = \psi_{ik}$. Поэтому (см. [41]) существует полное проекционное множество наборов силовских подгрупп групп G_i . Объединение их — набор силовских подгрупп группы G , порождающий G . Лемма доказана.

Лемма 2.9. Пусть G — локально нормальная группа, H — ее абелева p -подгруппа, $Z = Z(G)$, $H \cap Z = 1$, $HZ/Z = \bigtimes_{i \in I} H_i/Z$ — прямое произведение минимальных нор-

мальных подгрупп группы G/Z , Q — некоторое множество p' -элементов. Если мощность множества групп $H \cap H_i$ та-

ких, что $N(H \cap H_i) \not\subseteq Q$, равна β , то индекс в H наибольшей нормальной относительно Q подгруппы из H равен β .

Доказательство. Рассмотрим $R = \times_{i \in J} (H \cap H_i)$ — прямое произведение тех $H \cap H_i$, для которых $Q \not\subseteq N(H \cap H_i)$. Пусть $h_i \in H \cap H_i$, $x_i \in Q$ и $x_i^{-1} h_i x_i \notin H \cap H_i$. Пусть M — наибольшая нормальная относительно Q подгруппа из R .

Если $x \in G$, то через $I(x)$ обозначим те $i \in J$, для которых x действует на H_i/Z нетождественно. Пусть $h_i Z$ — такой элемент из H_i/Z , что

$$x^{-1} Z h_i Z x Z_i^1 \neq h_i Z \quad (i \in I(x)).$$

Так как $[h_i Z, x Z] \neq 1$ и $[h_i Z, x Z]$ принадлежат разным H_i/Z , то они все различны. Отсюда следует конечность $I(x)$.

Пусть p' -элемент x действует тождественно на H_i/Z . Для всякого $h \in H \cap H_i$ имеем $x^{-1} h x = h z$, где $z \in Z$. Пусть t — порядок x . Тогда $h = x^{-t} h x^t = h z^t$. Отсюда $z^t = 1$. Порядки h и $h z$ равны p . Так как h и z перестановочны, то $z^p = 1$. Из взаимной простоты t и p получаем $z = 1$. Итак, если p' -элемент x действует на H_i/Z тождественно, то он действует тождественно на $H \cap H_i$.

Пусть $i_1 \in J$. Элементы

$$x_{i_1}^{-1} h_{i_1} h_j^{-1} x_{i_1} = x_{i_1}^{-1} h_{i_1} x_{i_1} \cdot x_{i_1}^{-1} h_j^{-1} x_{i_1}$$

не лежат в R для всех $j \in J$, кроме конечного числа, так как $x_{i_1}^{-1} h_{i_1} x_{i_1} \notin R$, а $x_{i_1}^{-1} h_j^{-1} x_{i_1} = h_j^{-1}$ для всех j , кроме конечного числа. Получили, что $h_{i_1} h_j^{-1} \notin M$ для $j \in J \setminus I(x_{i_1})$. Пусть уже выбраны индексы $i_1, i_2, \dots, i_s, \dots$ ($s < r$) такие, что $h_{i_s} h_j^{-1} \notin M$ для всех $s, j < r$. Если $|r| = \beta$, то из того, что образы элементов h_{i_s} различны в R/M , получаем $|R/M| = \beta$, что и требовалось доказать. Пусть $|r| < \beta$. Тогда $|\bigcup_{s < r} I(x_{i_s})| < \beta$. Следовательно, $J \setminus (\bigcup_{s < r} I(x_{i_s})) \neq \emptyset$. Возьмем в этом множестве i_r . Как и выше, можно показать, что $h_{i_s} h_r^{-1} \notin M$ для всех $s < r$. Это означает, что можно построить такое множество индексов $i_1, i_2, \dots, i_s, \dots$ ($s < r$), что $h_{i_s} h_j^{-1} \notin M$ для всех $s, j < r$ и $|r| = \beta$. Лемма доказана.

Хорошо известна следующая

Лемма 2.10. Если N — нормальная подгруппа группы G , то ограничение на N группы внутренних автоморфизмов группы G — группа некоторых автоморфизмов N , изоморфная $G/C(N)$.

Доказательство. Если $g \in G$, то отображение $\varphi(g): x \rightarrow g^{-1}xg$ для всякого $x \in G$ — автоморфизм группы G , который называют внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом g . Так как $N^{\varphi(g)} = g^{-1}Ng = N$, то ограничение $\psi(g)$ автоморфизма $\varphi(g)$ на N — автоморфизм N . Соответствие $\varphi(g) \rightarrow \psi(g)$ есть гомоморфизм группы внутренних автоморфизмов группы G на группу некоторых автоморфизмов группы N . Найдем его ядро. Пусть $\varphi(g)$ действует на N тождественно, т. е. $x^{\varphi(g)} = x$ для любого $x \in N$. Отсюда $g^{-1}xg = x$ для любого $x \in N$. Это равносильно тому, что $g \in C(N)$. Итак, ядро гомоморфизма $\varphi(g) \rightarrow \psi(g)$ состоит из всех $\varphi(g)$ с $g \in C(N)$. Лемма доказана.

Для дальнейшего нужно описание группы локально внутренних автоморфизмов, данное Хартли [80].

Рассмотрим локально нормальную группу G . Она — объединение всех своих конечных нормальных подгрупп G_i ($i \in I$). Считаем $i \leq j$ тогда и только тогда, когда $G_i \subseteq G_j$. Обозначим через A группу внутренних автоморфизмов группы G . Ограничение A_i группы A на G_i изоморфно G/C_i , $C_i = C(G_i)$ (см. лемму 2.10). Обозначим через f_i гомоморфизм A на A_i . Если $i \leq j$, то A_i — ограничение A_j на G_i . Соответствующий гомоморфизм обозначим через f_{ji} . Очевидно, $f_i = f_{ji}f_j$. Если $i \leq j \leq k$, то $f_{ki} = f_{kj}f_{ji}$. В группе G введем топологию, взяв в качестве системы открытых окрестностей единицы группы C_i . Эта топология, вообще говоря, неотделима. Группа A изоморфна G/Z , $Z = Z(G) = \bigcap_{i \in I} C_i$. В группе A возьмем топологию группы G/Z , т. е. фактор-топологию. Полученная топология хаусдорфова. Она совпадает с индуцированной на A топологией проективного предела групп A_i ($i \in I$). Обозначим через L проективный предел групп A_i ($i \in I$); $L = \lim A_i$.

Теорема 2.11 (Хартли [80]). *Примем обозначения предыдущего абзаца. Тогда каждый элемент группы L можно рассматривать как автоморфизм группы G . Группа L — группа всех локально внутренних автоморфизмов группы G . Группа A плотна в L .*

Доказательство. Пусть $l = \lim a_i \in L$. Если $i < j$, то $a_i = f_{ji}(a_j)$. В группе A существуют такие элементы b_i , что $f_i(b_i) = a_i$. Рассмотрим l как отображение $G \rightarrow G$. Если $g \in G_i$, то считаем $l(g) = a_i(g)$. Пусть $g \in G_i \cap G_j$. Так как $G_i \subset G_k$ и $G_j \subset G_k$ для некоторого k , то $g \in G_k$. Так как a_i и a_j — ограничения a_k на G_i и G_j , то $a_k(g) = a_i(g)$ и $a_k(g) = a_j(g)$, т. е. $a_i(g) = a_j(g)$. Следовательно, $l(g)$ однозначно определен. Теперь ясно, что l — автоморфизм G . Действительно, если $h, g \in G$, то $h, g \in G_i$ для некоторого i . Тогда $l(hg) = a_i(hg) = a_i(h)a_i(g) = l(h)l(g)$. Если $l(g) = g$ для всех $g \in G$, то $a_i(g) = g$ для всех $g \in G_i$. Тогда a_i — тождественный автоморфизм G_i . Следовательно, ядро отображения группы L в группу автоморфизмов группы G единичное. По определению действия l на G l — локально внутренний автоморфизм G .

Пусть φ — произвольный локально внутренний автоморфизм группы G . На каждой из групп G_i он индуцирует некоторый внутренний автоморфизм a_i . Для всякого $x \in G_i$ $a_i(x) = g_i^{-1}xg_i$, где $g_i \in G$. Пусть $i < j$. Тогда $G_i \subseteq G_j$. Имеем $a_j(x) = g_j^{-1}xg_j$ для всех $x \in G_j$ и некоторого $g_j \in G$. На G_i $g_j^{-1}xg_j = g_i^{-1}xg_i$, т. е. ограничение a_j на G_i равно a_i . Получаем $a_i = f_{ji}(a_j)$. Это означает, что φ и $l = \lim a_i$ действуют на G одинаково. Итак, $L = \lim A_i$ — группа всех локально внутренних автоморфизмов.

Если $a \in A$, то $a = \lim a_i$, где a_i — ограничение a на G_i . Пусть L_i — централизатор G_i в L . Тогда $L = AL_i$. Это означает, что A плотна в L . Теорема доказана.

Лемма 2.12 (Хартли [80], лемма 5.2). Пусть G — локально нормальная группа, H — элементарная абелева r -группа из G , $[H, G, G] = 1$, H не содержит неединичных нормальных подгрупп группы G . Тогда $|Lcl_\alpha(H)| = 2^{1/r!}$.

Доказательство. Пусть, как и ранее, L — группа локально внутренних автоморфизмов группы G , A — группа внутренних автоморфизмов. Пусть $P = N(H)$. Из $[H, G, G] = 1$ следует $[H, G] \subseteq Z = Z(G)$. Пусть $x \in P$, $h \in H$. Тогда $x^{-1}hx = h[h, x]$. Так как $[h, x] \in Z$, $x^{-1}hx \in H$ и $H \cap Z = 1$ (ввиду $H \cap Z \triangleleft G$), то $[h, x] \in H$ и, следовательно, $[h, x] = 1$. Получаем $N(H) = C(H)$. Централизатор $C(H)$ — замкнутая подгруппа в G (см. [5], гл. III, § 2, предложение 3; нужно еще учесть, что,

хотя топология в G неотделима, замыкание единицы лежит в центре).

Обозначим через B группу внутренних автоморфизмов группы G , индуцируемых элементами из $C(H)$. Через B_i обозначим $f_i(B)$ ($i \in I$). Сужение изоморфизма $A \rightarrow \lim A_i$ на B есть изоморфизм $B \rightarrow \lim B_i$ (см. [5], гл. III, § 7, предложение 3). Если доказать, что $|L : M| = 2^\alpha$, где $\alpha = |H|$, $M = \lim B_i$, то лемма будет доказана.

Так как $C(H) = C(HZ)$, то $C(H) \triangleleft G$. В силу того же предложения (см. ссылку выше), $L/M = \lim A_i/B_i$. Следовательно, $G/C(H)$ — группа автоморфизмов группы HZ (см. лемму 2.9).

Пусть $H = \bigcup_{j \in J} H_j$, Q_j — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая H_j . Тогда $Q_j = H_j \times (Q_j \cap Z)$. Система подгрупп Q_j ($j \in J$) — часть системы G_i ($i \in I$). Пусть $C_j = C(Q_j)$ ($j \in J$). Ясно, что $C(H) = \bigcap_{j \in J} C_j$. Если $R_j = C_H(C_j)$,

то $R_j \supseteq H_j$. Так как индекс C_j в G конечен, то $G = C_j K_j$, где K_j — конечная нормальная в G подгруппа. Для каждого $k \in K_j$ $C_{R_j}(k)$ имеет в R_j конечный индекс. Тогда $C = \bigcup_{k \in K_j} C_{R_j}(k)$ имеет в R_j конечный индекс. Очевидно,

$C \triangleleft G$. Так как H не имеет неединичных нормальных подгрупп группы G , то $C = 1$. Получили, что R_j — конечная группа. Это означает, что различных C_j ($j \in J$) столько же, сколько элементов в H . Ввиду $C(H) = \bigcap_{j \in J} C_j$, проективный

предел $L/M = \lim A_i/B_i$ имеет не менее α различных проекций A_i/B_i . Каждое вполне упорядоченное подмножество в I счетно. Поэтому $|L/M| \geq 2^\alpha$. Получаем $|\text{Lcl}_G(H)| \geq 2^\alpha$. Но по лемме 2.6 $|\text{Lcl}_G(H)| \leq 2^\alpha$. Лемма доказана.

Теорема 2.13 (Хартли [80]). Пусть G — локально нормальная группа, H — ее подгруппа, H_0 — наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H . Если $\alpha = |H : H_0|$ — бесконечное кардинальное число, то $|\text{Lcl}(H)| = 2^\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим сперва счетный случай. Пусть

$$H = H_0 \cup H_0 x_2 \cup \dots \cup H_0 x_n \cup \dots$$

В группе G существуют такие элементы g_n ($n=2, 3, \dots$), что $g_n^{-1}x_ng_n \notin H$. Рассмотрим группу

$$Q = \langle H, g_n \ n=2, 3, \dots \rangle.$$

Она счетна. Наибольшая нормальная в Q подгруппа из H равна H_0 , в силу выбора элементов g_n ($n=2, 3, \dots$). По теореме 2.13 гл. II Q — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп. В силу теоремы 4.9 гл. I, $|\text{Lcl}_Q(H)| = 2^\alpha$. Так как $|\text{Lcl}_G(H)| \geq |\text{Lcl}_Q(H)|$, то $|\text{Lcl}_G(H)| \geq 2^\alpha$. По лемме 2.6 $|\text{Lcl}_G(H)| \leq 2^\alpha$. Для счетного случая теорема доказана.

Пусть α — несчетное кардинальное число. В силу леммы 2.6, $|\text{Lcl}_G(H)| \leq 2^\alpha$. Нужно доказать обратное неравенство.

По лемме 2.4 $|\text{Lcl}_G(H)| = |\text{Lcl}_{G/H_0}(H/H_0)|$. Группа H/H_0 не имеет неединичных нормальных подгрупп группы G/H_0 . Поэтому считаем, что $H_0 = 1$. В частности, $H \cap Z = 1$, где $Z = Z(G)$.

Рассмотрим $(H \times Z)/Z$ как подгруппу G/Z . В силу предложения 2.9 гл. II, G/Z финитно аппроксимируема. Поэтому G/Z — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп (см. теорему 3.6 гл. II). Если наибольшая нормальная в G/Z подгруппа B/Z группы HZ/Z имеет в HZ/Z индекс α , то по теореме 4.9 гл. I $|\text{Lcl}_{G/Z}(HZ/Z)| = 2^\alpha$. В силу леммы 2.4, $|\text{Lcl}_G(HZ)| = |\text{Lcl}_{G/Z}(HZ/Z)|$. Так как $|\text{Lcl}_G(H)| \geq |\text{Lcl}_G(HZ)|$, то $|\text{Lcl}_G(H)| \geq 2^\alpha$.

Пусть индекс B/Z в HZ/Z меньше α . Тогда $|B/Z| = |HZ/Z|$. Так как $B = (H \cap B) \times Z$, то $|H \cap B| = |B/Z| = \alpha$. Если доказать, что $|\text{Lcl}(H \cap B)| = 2^\alpha$, то по лемме 2.7 получим $|\text{Lcl}(H)| \geq 2^\alpha$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $HZ \triangleleft G$.

Так как $(H \times Z)' = H'$ и H не имеет неединичных нормальных подгрупп группы G , то $H' = 1$. Следовательно, H — абелева группа. Пусть $H = \times_p H_p$ — прямое произведение силовских p -подгрупп. Хотя бы для одного p имеем $|H| = |H_p|$ (в противном случае теорема верна для каждой из групп H_p , а потому и для $\times_p H_p$). Так как, в силу леммы 2.7, $|\text{Lcl}(H_p)| \leq |\text{Lcl}(H)|$, то теорему достаточно доказать для H_p . Поэтому далее считаем, что H является p -группой.

По теореме 1.1 подгруппа Q/Z группы HZ/Z , порожденная минимальными нормальными подгруппами группы G/Z , содержащимися в HZ/Z , равносильна HZ/Z . Отсюда $|Q \cap H| = |H|$. По лемме 2.7 $|\text{Lcl}(Q \cap H)| \leq |\text{Lcl}(H)|$. Следовательно, теорему достаточно доказать для $Q \cap H$. Поэтому считаем, что $HZ/Z = \times_{i \in I} H_i/Z$, где H_i/Z — некоторые минимальные нормальные подгруппы группы G/Z . Получаем $H = \times_{i \in I} (H \cap H_i)$.

В силу леммы 2.8, G порождается некоторым набором своих силовских q -подгрупп G_q , взятых по одной для каждого q из $\pi(G)$.

Рассмотрим группу $T = G_p HZ$. Пусть наибольшая нормальная в $G_p HZ$ подгруппа $H^{(p)}$ из H имеет в H индекс α . По лемме 2.5 $|\text{Lcl}_T(H)| \leq |\text{Lcl}_G(H)|$. Теорему достаточно доказать для $T = G$. Считаем $H^{(p)}$, как и ранее, равной 1. Так как HZ/Z — произведение минимальных нормальных подгрупп и T/Z — p -группа, то HZ/Z лежит в центре T/Z . Лемма 2.12 утверждает в этом случае справедливость теоремы. Считаем $|H : H^{(p)}| < \alpha$.

Пусть $H^{(p')}$ — наибольшая подгруппа из H , нормальная относительно $S = \langle G_q; q \neq p \rangle$. Так как $H^{(p)} \cap H^{(p')} = H_0 = 1$, то $|H : H^{(p')}| = \alpha$. Теперь, в силу леммы 2.9, мощность множества групп $H \cap H_i$, для которых существуют такие p' -элементы x_i из S , что $x_i^{-1}(H \cap H_i)x_i \neq H \cap H_i$, равна α . Но тогда равна α мощность аналогичного множества для p' -элементов x_i из группы G_q для некоторого $q \neq p$. По лемме 2.9 индекс в H наибольшей нормальной относительно G_q подгруппы из H равен α . Следовательно, теорему достаточно доказать для группы $G = G_q HZ$. Рассмотрим $\langle G_q, H \rangle$. Для всяких $x \in G_q, h \in H$ имеем $x^{-1}hx = h'z, h' \in H, z \in Z$. Так как $h^p = 1$, то $|h'z| = p$. Из $|h'| = p$ и перестановочности h' и z следует, что $z = 1$ или $|z| = p$. Следовательно, $D = \langle G_q, H \rangle \cap Z$ — элементарная абелева группа. Отсюда

$$\langle G_q, H \rangle = (D \times H) \rtimes G_q = F.$$

Ясно, что $\text{Lcl}_F(H) = \text{Lcl}_G(H)$. Пусть $[G_q, H \cap H_i] = D_i$. По теореме Машке о приводимых представлениях

$(H \cap H_i) \times D_i = K_i \times D_i$, где $K_i \triangleleft G$. Получаем

$$H \times D = \bigtimes_{i \in I} (H \cap H_i) \times D = \bigtimes_{i \in I} K_i \times D.$$

В результате

$$F = ((\bigtimes_{i \in I} K_i) \wedge G_q) \times D.$$

Так как F/D финитно аппроксимируема, то F финитно аппроксимируема. Из теоремы 3.6 гл. II и теоремы 4.9 гл. I получаем, что $|\text{Lcl}_F(H)| = 2^\alpha$. Теорема доказана.

Предложение 2.14 (Хартли [80], предложение 3). Если G — локально нормальная группа, H — ее подгруппа, $\beta = |\text{cl}(H)|$, $\bar{\beta} = |\text{Lcl}(H)|$, $\alpha = |H : H_0|$, где H_0 — наибольшая нормальная в G подгруппа из H и α — бесконечное число, то

$$1) \alpha \leq 2^\beta;$$

$$2) \beta \leq \bar{\beta} = 2^\alpha \leq 2^{2^\beta}.$$

Доказательство. 1) Пусть S — множество представителей (по одному из каждого класса) группы G по $N_G(H)$. Тогда $|S| = \beta$. Пусть $s \in S$. Так как G локально нормальна и $C_H(s) \subseteq H \cap s^{-1}Hs$, то индекс $H \cap s^{-1}Hs$ в H конечен. Поэтому $H \cap s^{-1}Hs$ содержит нормальную в H подгруппу $H(s)$ конечного индекса в H , содержащую H_0 . Тогда $H_0 = \bigcap_{s \in S} H(s)$. В силу теоремы 1.2 гл. I, H/H_0 — декартово произведение групп $H/H(s)$. Следовательно, $|H/H_0| \leq 2^\beta$.

2) Очевидно, $\beta \leq \bar{\beta}$. По теореме 2.13 $\bar{\beta} = 2^\alpha$. Из 1) следует последнее неравенство. Предложение доказано.

Утверждение $\bar{\beta} \leq 2^{2^\beta}$ было ранее получено Т. Я. Семеновым (см. [49]).

Равенства в предложении 2.14 могут достигаться. В этом легко убедиться на примере 2.11 гл. II (см. примеры из [80]).

§ 3. Силовские подгруппы

Силовская p -подгруппа группы G — это p -подгруппа, которая не содержится ни в какой большей p -подгруппе. По лемме Цорна ([54], стр. 28) силовские p -подгруппы существуют в G , если существуют p -подгруппы. Более

того, любая p -подгруппа содержится в некоторой силовой p -подгруппе. В случае локально нормальных групп Бер [65] дал более удобное описание силовских p -подгрупп. В этой теореме допустим некоторую непоследовательность (обычную в таких случаях) в определениях, считая силовой p -подгруппой единичную подгруппу, если в группе нет элементов порядка p .

Теорема 3.1 (Бер [65]). *Подгруппа H локально нормальной группы G тогда и только тогда является силовой p -подгруппой группы G , когда для всякой конечной нормальной подгруппы F пересечение $H \cap F$ — силовая p -подгруппа группы F .*

Доказательство. Пусть H — силовая p -подгруппа G , F — любая конечная нормальная подгруппа группы G . Так как $C_H(F) \triangleleft H$, то $C_H(F) \triangleleft HF$. Индекс $C_H(F)$ в H конечен. Очевидно,

$$HF/C_H(F) = H/C_H(F) \cdot FC_H(F)/C_H(F).$$

Так как $C_H(F)$ — p -группа и так как расширение p -группы при помощи p -группы — p -группа, то $H/C_H(F)$ — силовая p -подгруппа $HF/C_H(F)$. Индекс $H/C_H(F)$ в $HF/C_H(F)$ взаимно прост с p . Поэтому $|HF:H| = |F:(H \cap F)|$ взаимно прост с p . Следовательно, $H \cap F$ — силовая p -подгруппа в F .

Пусть, обратно, $H \cap F$ — силовая p -подгруппа в каждой конечной нормальной подгруппе F группы G . Так как $H = \bigcup_F (H \cap F)$, то H — p -группа. Пусть $Q \cong H$,

Q — силовая p -подгруппа группы G . Тогда для всякой конечной нормальной подгруппы F пересечение $Q \cap F$ — силовая p -подгруппа группы F . Но $H \cap F \subseteq Q \cap F$ и $Q \cap F$ также является силовой p -подгруппой в F , т. е. $H \cap F = Q \cap F$. Отсюда $H = \bigcup_F (H \cap F) = \bigcup_F (Q \cap F) = Q$. Теорема доказана.

Теорема 3.2 (Гольберг [8], теорема 7). *В локально нормальной группе любые две силовские p -подгруппы локально сопряжены.*

Доказательство. Пусть локально нормальная группа $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ — объединение конечных нормальных подгрупп. Считаем $i \leq j$, если $G_i \subseteq G_j$. Пусть P и Q — две силовские p -подгруппы, $P = \bigcup_{i \in I} (P \cap G_i)$, $Q = \bigcup_{i \in I} (Q \cap G_i)$.

По теореме 3.1 $P \cap G_i$ и $Q \cap G_i$ — силовские p -подгруппы в G_i . По теореме Силова они сопряжены, т. е. существуют такие $x_i \in G_i$, что $x_i^{-1}(P \cap G_i)x_i = Q \cap G_i$. Пусть A — группа внутренних автоморфизмов группы G . Обозначим через A_i ограничение A на G_i . Если $i \leq j$, то ограничение A_j на G_i равно A_i . Пусть f_j — отображение, которое сопоставляет каждому элементу из A_j его ограничение на G_i . Если $i \leq j \leq k$, то $f_{kj}f_j = f_k$. Пусть B_i — множество всех автоморфизмов a_i из A_i , для которых $a_i(P \cap G_i) = Q \cap G_i$. Через t_j обозначим ограничение f_j на B_j . Имеем $t_{kj}t_j = t_k$ для $i \leq j \leq k$. Поэтому (см. [41]) существует полное проекционное множество b_i ($i \in I$). Пусть $b = \lim b_i$ — локально внутренний автоморфизм, для которого $b(P) = Q$ (см. теорему 2.11). Теорема доказана.

Л е м м а 3.3 (Каргаполов [26]). Пусть N — нормальная подгруппа локально нормальной группы G . Тогда, если P — силовская p -подгруппа группы G , то PN/N — силовская p -подгруппа группы G/N . Обратно, каждая силовская p -подгруппа фактор-группы G/N является образом некоторой силовской p -подгруппы группы G при естественном отображении G на G/N .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — силовская p -подгруппа группы G и M/N — произвольная конечная нормальная подгруппа в G/N . В каждом смежном классе группы M по N возьмем по одному представителю. Из конечности M/N следует, что они содержатся в конечной нормальной подгруппе K группы G . Отсюда $M = NK$. По теореме 3.1 $P \cap K$ — силовская p -подгруппа группы K .

Рассмотрим отображение

$$\psi: Nx \rightarrow (N \cap K)x,$$

где $x \in K$. Как известно (и ясно), ψ — изоморфизм $M/N = NK/N$ на $K/N \cap K$. При этом изоморфизме $(P \cap K)N/N$ переходит в $(P \cap K)(N \cap K)/N \cap K$. Так как K — конечная группа и $P \cap K$ — ее силовская подгруппа, то $(P \cap K)(N \cap K)/N \cap K$ — силовская подгруппа группы $K/N \cap K$. Но тогда $(P \cap K)N/N$, как прообраз при изоморфизме ψ силовской подгруппы, является силовской в M/N . Очевидно,

$$PN/N \cap M/N \supseteq (P \cap K)N/N \cap M/N = (P \cap K)N/N.$$

Так как подгруппа $(P \cap K)N/N$ является силовской в M/N , то $PN/N \cap M/N$, как p -группа, ее содержащая, также силовская p -подгруппа в M/N . Теперь, в силу теоремы 3.1, PN/N — силовская p -подгруппа G/N . Лемма доказана.

Следствие 3.4 (Каргаполов [26]). *Если все силовские p -подгруппы локально нормальной группы сопряжены между собой, то все силовские p -подгруппы любой фактор-группы также сопряжены между собой.*

Теорема 3.5 (Каргаполов [26]). *Силовские p -подгруппы локально нормальной группы G сопряжены тогда и только тогда, когда их число конечно.*

Доказательство. Пусть силовские p -подгруппы группы G сопряжены. По следствию 3.4 силовские p -подгруппы $G/Z(G)$ также сопряжены. Пусть $P/Z(G)$ — силовская p -подгруппа, $P_0/Z(G)$ — наибольшая нормальная в $G/Z(G)$ подгруппа из $P/Z(G)$. В силу предложения 2.9, теоремы 3.6 гл. II и теоремы 4.9 гл. I, индекс $P_0/Z(G)$ в $P/Z(G)$ конечен. Это означает, что силовские подгруппы в $G/P_0 \simeq G/Z(G)/P_0/Z(G)$ конечны. Так как G локально нормальна, то число силовских p -подгрупп в G/P_0 конечно. Поэтому конечно число силовских p -подгрупп в $G/Z(G)$. Пусть P_1 и P_2 — различные силовские подгруппы в G . По лемме 3.3 $P_1Z(G)/Z(G)$ и $P_2Z(G)/Z(G)$ — силовские подгруппы в $G/Z(G)$. Пусть они равны. Тогда $T = P_1Z(G) = P_2Z(G) = P_1 \times H = P_2 \times H$, где H — совокупность всех p' -элементов группы $Z(G)$. Разложение группы T в прямое произведение единственно из-за того, что множители не имеют элементов одинаковых порядков. Следовательно, $P_1 = P_2$, в противоречие с их выбором. Получаем $P_1Z(G)/Z(G) \neq P_2Z(G)/Z(G)$. Это означает, что число силовских подгрупп в G конечно.

Обратное утверждение справедливо в более общей ситуации (см. [40], стр. 346). Для полноты все же его докажем.

Так как силовских p -подгрупп в G конечное число, то по теореме 2.13 силовская p -подгруппа P группы G содержит нормальную в G подгруппу P конечного индекса в P . Группа G/P_0 имеет конечную силовскую p -подгруппу. Поэтому все силовские p -подгруппы G/P_0 конечны и сопряжены. Всякая силовская p -подгруппа из G содержит P_0 и, следовательно, является прообразом некоторой

силовской подгруппы из G/P_0 . Отсюда следует сопряженность всех силовских p -подгрупп. Теорема доказана.

Хорошо известна теорема Цассенхауза (см. [82], стр. 126, 127): если индекс нормальной подгруппы N конечной группы взаимно прост с $|N|$, то N имеет дополнение и все дополнения сопряжены. Приведем обобщение этой теоремы.

Максимальную π -подгруппу группы обычно называют *силовской π -подгруппой* группы. (Напомним, что π -группа — это периодическая группа, порядки элементов которой делятся лишь на простые числа из множества π .) Определений силовских π -подгрупп и π -групп существует много. Здесь достаточно этого (как самого простого).

Т е о р е м а 3.6. *Нормальная силовская π -подгруппа A локально нормальной группы дополняема в ней (Черников [58]); все дополнения к A локально сопряжены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа G — объединение всех конечных нормальных подгрупп: $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Считаем $i \leq j$

тогда и только тогда, когда $G_i \subseteq G_j$. Так как расширение π -группы при помощи π -группы — π -группа, то G/A не имеет неединичных π -подгрупп. Пересечение $A_i = A \cap G_i$ — π -подгруппа и $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Так как $AG_i/A \simeq G_i/A \cap G_i =$

$= G_i/A_i$, то G_i/A_i не имеет неединичных π -подгрупп. По теореме Цассенхауза (см. выше) $G_i = A_i \lambda H_i$ и все дополнения к A_i сопряжены в G_i . Обозначим через Φ группу внутренних автоморфизмов группы G , через Φ_i — ограничение Φ на G_i . Пусть M_i — множество всех дополнений к A_i в G_i . Для $i < j$ определим $\delta_{ji}: M_j \rightarrow M_i$ следующим образом. Если $H_j \in M_j$, то $\delta_{ji}(H_j) = H_j \cap G_i$. Действительно, $A_i H_j = G_j$. Пусть $g \in G_i$. Тогда $g = ah$, $a \in A_j$, $h \in H_j$. Так как $aG_i = h^{-1}G_i$ и порядки их взаимно просты, то $a \in G_i$ и $h \in G_i$. Следовательно, $H_j \cap G_i$ — дополнение к A_i в G_i . Если $i \leq j \leq k$, то $\delta_{kj}\delta_{ji} = \delta_{ki}$. Поэтому существует полное проекционное множество H_i ($i \in I$) (см. [41]). Пусть $H = \bigcup_{i \in I} H_i$. Так как $G_i = A_i H_i$, то $G = \bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} A_i H_i =$
 $= (\bigcup_{i \in I} A_i) (\bigcup_{i \in I} H_i) = AH$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть H и Q — дополнения к A в G . Обозначим $H_i = H \cap G_i$, $Q_i = Q \cap G_i$. Тогда H_i и Q_i — дополнения к A_i в G_i . Действительно, если $g \in G_i$, то $g = ah$, $a \in A$, $h \in H$.

Элементы aG_i , $h^{-1}G_i$ равны и имеют взаимно простые порядки. Поэтому $a \in G_i$, $h \in G_i$. Следовательно, $G_i = A_i H_i$. Также доказывается $G_i = A_i Q_i$. По теореме Цассенхауза для $\varphi_i \in \Phi_i$ $H_i^{\varphi_i} = Q_i$. Пусть Δ_i — множество таких $\varphi \in \Phi_i$, что $H_i^{\varphi} = Q_i$. Отображение f_{ij} , которое для $i < j$ сопоставляет $\varphi \in \Delta_i$ его ограничение на G_i , отображает Δ_i на Δ_j . Если $i \leq j \leq k$, то $f_{jk} f_{ji} = f_{ik}$. Поэтому (см. [41]) существует полное проекционное множество φ_i ($i \in I$). Тогда $\varphi = \lim \varphi_i$ — локально внутренний автоморфизм с $H^{\varphi} = Q$ (см. теорему 2.11). Теорема доказана.

Продолжим изучение локально нормальных групп в соответствии с идеями Холла — Черникова о дополняемости подгрупп.

Теорема 3.7 (Черников [58]). *Локально нормальная группа локально разрешима тогда и только тогда, когда ее силовские p -подгруппы (по всем p) дополняемы.*

Доказательство. 1) Пусть локально нормальная группа G локально разрешима; $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, где G_i —

конечные нормальные подгруппы. Так как G локально разрешима, то G_i разрешимы. Пусть p — фиксированное простое число, P — силовская p -подгруппа. По теореме 3.1 $P \cap G_i$ — силовская p -подгруппа в G_i . В силу результатов Ф. Холла [76], $G_i = (P \cap G_i) H_i$, где H_i — p' -подгруппа из G_i . Обозначим через M_i множество всех дополнений группы $P \cap G_i$ в G_i . Пусть f_{ij} — отображение M_j в M_i при $i \leq j$, определенное так: если $H_j \in M_j$, то $f_{ij}(H_j) = H_j \cap G_i$. Покажем, что $H_j \cap G_i \in M_i$. Пусть $g \in G_i$. Так как $G_j = (P \cap G_j) H_j$, то $g = uh$, где $u \in P \cap G_j$, $h \in H_j$. Элементы uG_i и $h^{-1}G_i$ равны и имеют взаимно простые порядки. Отсюда $u \in G_i$ и $h \in G_i$. Это означает, что $H_j \cap G_i \in M_i$. Если $i \leq j \leq k$, то, очевидно, $f_{jk} f_{ji} = f_{ik}$. Следовательно, существует полное проекционное множество H_i ($i \in I$). Тогда $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ — дополнение к P в G .

Пусть, обратно, всякая силовская p -подгруппа P группы G дополняема в G , т. е. $G = PH$, $P \cap H = 1$. Группа G — объединение $\bigcup_{i \in I} G_i$ конечных нормальных подгрупп. По теореме 3.1 $P \cap G_i$ — силовская p -подгруппа G_i . Пусть $g \in G_i$. Тогда $g = uh$, $u \in P$, $h \in H$. Так как $uG_i = h^{-1}G_i$ и порядки их взаимно просты, то $u \in G_i$ и $h \in G_i$ (напомним, что $G_i \triangleleft G$). Это означает, что $G_i = (P \cap G_i)(H \cap G_i)$, т. е.

каждая силовская p -подгруппа (по любому p) группы G_i дополняема в G_i . В этом случае группа G_i разрешима (см. Ф. Холл [78], Чунихин [63]). Итак, G локально разрешима. Теорема доказана.

Пусть G — группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков её элементов. Для каждого $p \in \pi(G)$ возьмем силовскую p -подгруппу G_p . Множество G_p ($p \in \pi(G)$) называется *полной силовской базой* G , если:

- 1) $G = \langle G_p; p \in \pi(G) \rangle$;
- 2) $G_p G_q = G_q G_p$ для всех $p, q \in \pi(G)$.

Пусть H_p ($p \in \pi(G)$) и Q_p ($p \in \pi(G)$) — две *полные силовские базы* группы G . Они называются *локально сопряженными*, если существует такой локально внутренний автоморфизм ϕ группы G , что $H_p^\phi = Q_p$ для всех $p \in \pi(G)$.

Если H — подгруппа группы G , H_p ($p \in \pi(H)$) — полная силовская база H , то будем говорить, что *базу H_p ($p \in \pi(H)$) группы H можно включить в полную силовскую базу группы G* , если G имеет полную силовскую базу G_p ($p \in \pi(G)$) и для всякого $p \in \pi(H)$ $H_p \subseteq G_p$.

Теорема 3.8. *Локально нормальная группа тогда и только тогда имеет полную силовскую базу, когда она локально разрешима (Бер [65]).*

Все полные силовские базы локально нормальной группы локально сопряжены (см. Стоунхьюер [102]).

Всякую полную силовскую базу подгруппы локально нормальной и локально разрешимой группы можно включить в некоторую полную силовскую базу всей группы.

Доказательство. 1) Пусть локально нормальная группа G имеет полную силовскую базу G_p ($p \in \pi(G)$) и F — конечная нормальная в G подгруппа. Тогда $FC(F)/C(F)$ — подгруппа в $G/C(F)$. По лемме 3.3 $G/C(F)$ имеет полную силовскую базу $G_p C(F)/C(F)$ ($p \in \pi(G)$). Поэтому $G/C(F)$ разрешима (см. [78]). Отсюда разрешима

$$FC(F)/C(F) \simeq F/F \cap C(F).$$

Так как $F \cap C(F) = Z(F)$, то F разрешима. Это означает, что G локально разрешима.

2) Пусть H_p ($p \in \pi(G)$) и Q_p ($p \in \pi(G)$) — две полные силовские базы группы G . Группа G — объединение

$\bigcup_{i \in I} G_i$ конечных нормальных подгрупп. Считаем $i \leq j$ тогда и только тогда, когда $G_i \subseteq G_j$. Группы $H_p \cap G_i = H_{pi}$ и $Q_p \cap G_i = Q_{pi}$ — силовские p -подгруппы в G_i (см. теорему 3.1). Так как $G_i = \langle H_{pi}; p \in \pi(G) \rangle = \langle Q_{pi}; p \in \pi(G) \rangle$, то условие 1) в определении полной силовской базы выполнено для групп H_{pi} и Q_{pi} . Пусть $p, q \in \pi(G)$. Группа $H_p H_q / Z(H_p H_q)$ финитно аппроксимируема (см. предложение 2.9 гл. II). По лемме 3.3 образы H_p и H_q в факторгруппах образуют полную силовскую базу. Поэтому конечные фактор-группы $H_p H_q$ являются π -группами, где $\pi = \{p, q\}$. Группа $H_p H_q / Z(H_p H_q)$ — как поддекартово произведение конечных π -групп (она периодическая) — π -группа. Пусть $g = ab$, $a \in H_p$, $b \in H_q$, — элемент из $Z(H_p H_q)$. Тогда $[ab, a] = [b, a] = 1$. Отсюда g — π -элемент. $H_p H_q$, как расширение π -групп при помощи π -группы, — π -группа. Следовательно, $G_i \cap H_p H_q$ является π -группой. Так как $H_{pi} H_{qi} \subseteq G_i \cap H_p H_q$ и $|H_{pi} H_{qi}| = |G_i \cap H_p H_q|$, то $H_{pi} H_{qi} = G_i \cap H_p H_q$ — группа. Отсюда H_{pi} ($p \in \pi(G)$) — полная силовская база группы G_i . Так же можно показать, что Q_{pi} ($p \in \pi(G)$) — полная силовская база группы G_i . Как показал Ф. Холл [77], полные силовские базы конечной группы сопряжены, т. е. в G_i существует такой элемент x , что $x^{-1} Q_{pi} x = H_{pi}$ ($p \in \pi(G)$).

Пусть Φ — группа внутренних автоморфизмов группы G , Φ_i — ограничение Φ на G_i , Δ_i — множество тех $\varphi \in \Phi_i$, которые переводят базу Q_{pi} ($p \in \pi(G)$) в базу H_{pi} ($p \in \pi(G)$). Пусть f_{ji} — отображение, которое каждому $\varphi \in \Delta_j$ ставит в соответствие его ограничение на G_i . Так как $Q_{pj} \cap G_i = Q_{pi}$, $H_{pj} \cap G_i = H_{pi}$ и $(Q_{pj} \cap G_i)^\varphi = H_{pj} \cap G_i$, то $Q_{pi}^\varphi = H_{pi}$. Это означает, что ограничение φ на G_i — элемент Δ_i . Очевидно, $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$ для $i \leq j \leq k$. Существует (см. [41]) полное проекционное множество φ_i ($i \in I$). Так как $Q_{pi}^{\varphi_i} = H_{pi}$ и $Q_p = \bigcup_{i \in I} Q_{pi}$, $H_p = \bigcup_{i \in I} H_{pi}$, то $Q_p^\varphi = H_p$, где $\varphi = \lim \varphi_i$ — локально внутренний автоморфизм (см. теорему 2.11). Получили, что базы H_p ($p \in \pi(G)$) и Q_p ($p \in \pi(G)$) локально сопряжены.

3) Пусть H — подгруппа локально нормальной и локально разрешимой группы G . Пусть H_p ($p \in \pi(H)$) — полная силовская база группы H . Группа G — объеди-

нение конечных нормальных подгрупп G_i ($i \in I$). Считаем, что $i \leq j$ эквивалентно $G_i \subseteq G_j$. Пусть $H_i = H \cap G_i$ ($i \in I$). Тогда $H = \bigcup_{i \in I} H_i$. Как в 2), можно показать, что $H_{pi} = H_i \cap H_p$ ($p \in \pi(H)$) — полная силовская база группы H_i . Как показал Ф. Холл [77], в G_i существует такая полная силовская база G_{pi} ($p \in \pi(G)$), что $H_{pi} \subseteq G_{pi}$. Объединение $G_p = \bigcup_{i \in I} G_{pi}$ — силовская подгруппа группы G (см. теорему 3.1). Если $p, q \in \pi(G)$, то из $G_{pi}G_{qi} = G_{qi}G_{pi}$ следует, что $G_pG_q = G_qG_p$. Следовательно, G_p ($p \in \pi(G)$) — полная силовская база группы G . Так как

$$H_p = \bigcup_{i \in I} H_{pi} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_{pi} = G_p,$$

то силовскую базу H_p ($p \in \pi(H)$) можно включить в полную силовскую базу группы G . Теорема доказана.

Как видим, все силовские результаты, верные в конечном случае, верны в локально нормальном с заменой сопряженности локальной сопряженностью. Можно ли то же самое сказать о локально конечных группах? Оказывается почти всегда — нет. Каргаполов [28] построил пример периодической разрешимой группы G , которая имеет следующие свойства:

1) G имеет нормальную, но не дополняемую p -подгруппу;

2) G не имеет полной силовской базы.

Построим другой пример (см. Горчаков [10]), который решает те же вопросы, но при несколько больших ограничениях.

Пример 3.9. Рассмотрим множество функций $\varphi(n)$, $\psi(n)$, ... натурального аргумента n , принимающих целые положительные значения. Пусть равенство $\varphi(n) = \psi(n)$ выполняется лишь для конечного числа значений аргумента n . Такие функции будем называть конечно сцепленными. Множество M попарно конечно сцепленных функций будем называть максимальным, если оно не содержится в другом множестве попарно конечно сцепленных функций. В силу теоремы Цорна (см., например, [3], стр. 388), существует хотя бы одно максимальное множество попарно конечно сцепленных функций.

Рассмотрим декартово произведение

$$G = \prod_{k,l} G_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \dots)$$

неабелевых групп G_{kl} порядка $2p_{kl}$, где p_{kl} — простое число. В каждой из групп G_{kl} выберем по два элемента a_{kl} и b_{kl} второго порядка. В группе G возьмем элементы a_n ($n=1, 2, \dots$) по правилу: проекция элемента a_n в группе G_{ns} ($s=1, 2, \dots$) равна a_{ns} , остальные проекции элемента a_n равны единице, т. е.

$$a_n = a_{n1}a_{n2} \dots a_{ns} \dots$$

Любой функции φ из некоторого (фиксированного) максимального множества M попарно конечно сцепленных функций поставим в соответствие элемент b_φ группы G по правилу: проекция элемента b_φ в группе $G_{s, \varphi(s)}$ ($s=1, 2, \dots$) равна элементу $b_{s, \varphi(s)}$, все остальные проекции элемента b_φ равны единице, т. е.

$$b_\varphi = b_{1, \varphi(1)} b_{2, \varphi(2)} \dots b_{s, \varphi(s)} \dots$$

Положим $A = \langle a_n; n=1, 2, \dots \rangle$, $B = \langle b_\varphi; \varphi \in M \rangle$. Пусть $H = \times_{k,l} G_{kl}$ ($k, l=1, 2, \dots$). Покажем, что коммутант N'

группы N , порожденной группами A, B, H , равен коммутанту H' группы H . Очевидно, для этого достаточно доказать, что взаимный коммутант $[A, B]$ принадлежит группе H' .

Все проекции элементов a_n ($n=1, 2, \dots$) и b_φ ($\varphi \in M$), кроме проекций с индексами $n, \varphi(n)$, перестановочны, потому

$$[a_n, b_\varphi] = [a_n, \varphi(n), b_n, \varphi(n)] \in H'.$$

Следовательно, $N' = H'$.

Докажем, что коммутант N' группы N не дополняем в N . Для этого достаточно показать, что в группе N не существует силовой 2-подгруппы V_2 , дополняющей подгруппу N' .

Предположим, что такая подгруппа V_2 существует, т. е. $N = V_2 N'$. Тогда любой элемент a_n ($n=1, 2, \dots$) представим в виде $a_n = v_n \omega_n$, где $v_n \in V_2$, $\omega_n \in N'$. Элемент v_n отличается от элемента a_n лишь конечным числом проекций, так как элемент $\omega_n \in N'$ имеет конечное число проекций, отличных от единицы. Потому существует такой

номер s_n , что проекция элемента v_n с индексами n , s_n равна a_n, s_n . Пусть φ — функция натурального аргумента n , сопоставляющая натуральному числу n число s_n . Так как M — максимальное множество попарно конечно сцепленных функций, то в нем найдется функция ψ , не конечно сцепленная с φ , т. е. такая, что равенство $\varphi(n) = \psi(n)$ выполняется для бесконечного числа значений аргумента n . Элемент b_ψ представим в виде $b_\psi = v_\psi \omega_\psi$, где $v_\psi \in V_2$, $\omega_\psi \in N'$. Элемент v_ψ лишь конечным числом проекций отличен от элемента b_ψ . Так как функции φ и ψ не конечно сцепленные, то среди элементов $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ существует бесконечное число элементов, неперестановочных с элементом v_ψ . Пусть $[v_n, v_\psi] \neq 1$. Так как силовские p -подгруппы группы G , очевидно, элементарные абелевы, то мы пришли к противоречию с тем, что элементы v_n, v_ψ принадлежат одной и той же силовой 2-подгруппе V_2 группы N .

Следовательно, группа N' не дополняема в группе N .

Выберем числа p_k двумя способами.

1) Пусть $p_k = p_{sr}$ тогда и только тогда, когда $k=s$ и $l=r$. В этом случае силовские p -подгруппы группы N при $p \neq 2$ имеют простые порядки. В силу теоремы 5 из работы Горчакова [9], они дополняемы в N . Любая 2-подгруппа V группы N дополняема в N , так как она имеет единичное пересечение с N' . Следовательно, в группе N дополняемы все p -подгруппы по всем p . Коммутант N' группы N является нормальной π -подгруппой, где $\pi = \{p_k; k, l=1, 2, \dots\}$. Так что нормальные π -подгруппы могут быть недополняемыми, если даже все p -подгруппы по всем p дополняемы. Группа N не имеет полной силовой базы, так как 2-подгруппа из этой базы дополняла бы N' . Это, в частности, означает, что условие дополняемости силовских p -подгрупп отлично от условия существования полной силовой базы, хотя в локально нормальных группах они совпадают (см. теоремы 3.7 и 3.8).

2) Пусть $p_k = 3$ для всех k и l . Тогда силовая 3-подгруппа N' группы N не дополняема в N , хотя она нормальна в N .

В связи с теоремой 3.8 уместно напомнить известный вопрос: *является ли локально разрешимой локально конечная группа, обладающая полной силовой базой?*

§ 4. Конечность классов сопряженных подгрупп

Лемма 4.1. Пусть A — абелева p -подгруппа локально нормальной группы G . Если индекс $C(A)$ в G бесконечен, то A содержит подгруппу, которая определяет бесконечный класс сопряженных подгрупп.

Доказательство. Так как индекс $C(A)$ в G бесконечен, то $A \cap Z(G)$ имеет в A бесконечный индекс. (Будем говорить в таких случаях, что A бесконечна над центром.) В силу предложения 2.9 гл. II, нижний слой $BZ(G)/Z(G)$ группы $AZ(G)/Z(G)$ бесконечен. Так как $B = Z(G)(B \cap A)$, то вместо A можно рассматривать $B \cap A$. Итак, считаем, что $AZ(G)/Z(G)$ — элементарная абелева p -группа.

Известно, что $A \subseteq \bigtimes_{i \in I} A_i$, где A_i — локально циклические (или циклические) p -группы (см. [29], стр. 79). Пусть $a_1 \in A \setminus Z(G)$. Пусть $I_1 = \text{supp } a_1$. Обозначим $A^{(1)} = A \cap \bigtimes_{i \in I \setminus I_1} A_i$. Фактор-группа $A/A^{(1)}$, как подгруппа прямого произведения конечного числа квазициклических p -групп, имеет полную (возможно единичную) подгруппу $B_1/A^{(1)}$ конечного индекса. Так как группа $A/A \cap Z(G)$ элементарна, то $A^{(1)}(A \cap Z(G))$ содержит B_1 . Следовательно, $A^{(1)}$ бесконечна над центром. Поэтому $A^{(1)} \setminus \langle a_1, Z(G) \rangle$ непусто. Возьмем в нем a_2 . Обозначим $I_2 = I_1 \cup \text{supp } a_2$. Фактор-группа $A/A^{(2)}$, где $A^{(2)} = A \cap \bigtimes_{i \in I \setminus I_2} A_i$, имеет полную подгруппу $B_2/A^{(2)}$ конечного индекса. Также $B_2 \subseteq A^{(2)}(A \cap Z(G))$. Таким образом, можно выбрать элементы a_i ($i = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие условию

$$a_i \in A^{(i-1)} \setminus \langle a_1, \dots, a_{i-1}, Z(G) \rangle,$$

$$A^{(i)} = A \cap \bigtimes_{s \in I \setminus I_i} A_s,$$

$$I_i = I_{i-1} \cup \text{supp } a_i.$$

Но тогда $B = \langle a_1, a_2, \dots \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots, a_i Z(G) \neq a_j Z(G)$ при $i \neq j$.

Итак, положим $A = \bigtimes_{i=1,2,\dots} \langle a_i \rangle$, $|a_i| = p^{k_i}$, $k_1 \leq k_2 \leq \dots$, $A \cap Z(G) = \bigtimes_{i=1,2,\dots} \langle a_i^p \rangle$. Пусть $\langle a_i \rangle \triangleleft G$ для всех i . Возьмем

такой x_i , что $x_i^{-1}a_i x_i \neq a_i$. Так как G локально нормальна, то существует такое $m > i$, что $x_i^{-1}a_j x_i = a_j$ для всех $j \geq m$. Положим $b_i = a_i a_m^{p_m^{k_m-k_i}}$. Имеем

$$x_i^{-1}b_i x_i = a_i^{s_i} a_m^{p_m^{k_m-k_i}} = (a_i a_m^{p_m^{k_m-k_i}}) a_i^{s_i-1} = b_i a_i^{s_i-1}.$$

Так как $|a_i| = |b_i|$, то $x_i^{-1}b_i x_i \notin \langle b_i \rangle$. Итак, мы получили другое разложение $A = \bigtimes_{i=1,2,\dots} \langle b_i \rangle$, все множители которого не нормальны в G .

Если не все множители из $\bigtimes_{i=1,2,\dots} \langle a_i \rangle$ нормальны в G , то либо среди них бесконечно много нормальных и тогда все из них можно заменить ненормальными, либо среди множителей бесконечно много не являющихся нормальными и тогда будем рассматривать только их. Поэтому считаем, что все множители из $A = \bigtimes_{i=1,2,\dots} \langle a_i \rangle$ не нормальны в G .

Пусть $[a_1, x_1] = c_1 \notin \langle a_1 \rangle$. Существует m_1 , для которого $A^{(1)} \times \langle a_1 \rangle = (\bigtimes_{i \geq m_1} \langle a_i \rangle) \cap C(x_1)$, не содержит c_1 .

Либо $A^{(1)}$ определяет бесконечный класс сопряженных подгрупп, либо $A^{(1)}$ имеет нормальную подгруппу $B^{(1)}$ конечного индекса. (Это следует из этого, что если $g_i^{-1}A^{(1)}g_i$, $i=1, 2, \dots, n$, — все сопряженные с $A^{(1)}$ подгруппы в G , то из конечности индекса $C(g_i) \cap A^{(1)}$ в $A^{(1)}$ следует, что

$$C(g_i) \cap A^{(1)} = C(g_i) \cap g_i^{-1}A^{(1)}g_i \subseteq A^{(1)} \cap g_i^{-1}A^{(1)}g_i$$

имеет конечный индекс в $A^{(1)}$. Поэтому $N = \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}A^{(1)}g_i$

нормальна в G и имеет в $A^{(1)}$ конечный индекс.) Группа $\langle a_1 \rangle \times B^{(1)}$ не содержит c_1 , и $B^{(1)} \triangleleft G$. Чтобы много раз не менять обозначений, считаем $B^{(1)} = \bigtimes_{i=2,3,\dots} \langle a_i \rangle$. Существуют такой x_2 , что $[a_2, x_2] = c_2 \notin \langle a_2 \rangle$, и такой m_2 , что

$A^{(2)} \times \langle a_2 \rangle$, где $A^{(2)} = (\bigtimes_{i \geq m_2} \langle a_i \rangle) \cap C(x_2)$, не содержит c_2 .

Либо $A^{(2)}$ определяет бесконечный класс сопряженных подгрупп, либо в $A^{(2)}$ есть нормальная в G подгруппа $B^{(2)}$ конечного индекса, $B^{(2)} \not\subseteq c_2$. Пусть $c_2 \in \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times B^{(2)}$. Так как $B^{(1)} \triangleleft G$, то $c_2 \in B^{(1)}$. Это означает, что проекция

c_2 на $\langle a_1 \rangle$ равна 1. Но тогда $c_2 \in \langle a_2 \rangle \times B^{(2)}$, что противоречит выбору $B^{(2)}$. Итак, существуют такие элементы a_i, x_i, c_i ($i=1, 2, \dots$), что $[a_i, x_i] = c_i \notin \langle a_1, a_2, \dots \rangle = H$, $x_i^{-1} a_i x_i = a_j$ для $i < j$. Группы $x_i^{-1} H x_i$ ($i=1, 2, \dots$), очевидно, различны. Действительно, если $i < j$ и $x_i^{-1} H x_i = x_j^{-1} H x_j$, то $x_i x_j^{-1} \in N(H)$. Тогда из $x_i x_j^{-1} a_i x_i x_j^{-1} = x_j^{-1} a_j x_j = a_j c_j$ и того, что левая часть содержится в H , получаем, что $c_j \in H$ в противоречие с выбором c_j . Лемма доказана.

Теорема 4.2 (Еремин [22]). Пусть G — локально нормальная группа, A — бесконечная над $Z(G)$ подгруппа с конечным множеством $\pi(A)$. Тогда в A существует абелева подгруппа, определяющая бесконечный класс сопряженных с ней подгрупп группы G .

Доказательство. В силу леммы 2.8, существует силовская p -подгруппа P группы A , бесконечная над центром G . Пусть $a_1 \in P \setminus Z(G)$. Так как $C_P(a_1)$ имеет в P конечный индекс, то $C_P(a_1)$ бесконечна над $Z(G)$. Поэтому $C_P(a_1)$ бесконечна над $\langle a_1, Z(G) \rangle$. Пусть $a_2 \in C_P(a_1) \setminus \langle a_1, Z(G) \rangle$. Тогда $C_P(a_1, a_2)$ имеет в P конечный индекс. Следовательно, $C_P(a_1, a_2)$ — группа, бесконечная над $\langle a_1, a_2, Z(G) \rangle$. Продолжая эти рассуждения, получим абелеву подгруппу $H = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ из P , бесконечную над $Z(G)$. В силу леммы 4.1, H содержит подгруппу, определяющую бесконечный класс сопряженных подгрупп. Теорема доказана.

Пример 4.3 (Еремин [22]). Условие, что $\pi(A)$ конечно, не является в теореме 4.2 лишним. Действительно, пусть $G_i = \langle a_i \rangle \rtimes \langle b_i \rangle$ — неабелева группа порядка $p_i q_i$, где p_i и q_i — простые числа, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Пусть $G = \times_{i=1,2,\dots} G_i$, $A = \times_{i=1,2,\dots} \langle a_i \rangle$. Так как $Z(G) = 1$, то A бесконечна над центром, но каждая подгруппа из A нормальна в G .

Лемма 4.4 (Еремин [22]). Периодическая группа G , являющаяся расширением своего центра при помощи слойно конечной группы с конечными силовскими подгруппами, локально нормальна.

Доказательство. Пусть $g \in G$. Тогда $g = g_1 g_2 \dots g_n$ — произведение p_i -элементов g_i ($i=1, 2, \dots, n$). Если доказать, что классы сопряженных p -элементов конечны при каждом p , то $C(g) \supseteq \bigcap_{i=1}^n C(g_i)$ имеет

в G конечный индекс. Тогда конечны все классы сопряженных элементов. Группа $G/Z(G)$ для каждого p имеет конечное множество p -элементов. Они порождают конечную нормальную подгруппу $F/Z(G)$. Все p -элементы группы G содержатся в группе F . Так как группа F имеет конечное число коммутаторов, то F по лемме 1.1 гл. II локально нормальна. Коммутант F' группы F конечен. F/F' — абелева нормальная подгруппа группы G/F' . Так как $G/F'Z(G)$ — фактор-группа слойно конечной группы с конечными силовскими подгруппами, то по лемме 3.3 она такова же. Все p -элементы группы G/F' содержатся в F/F' . Это означает, что силовская p -подгруппа группы G/F' нормальна в G/F' и абелева. Так как группа F' конечна, то из конечности классов сопряженных p -элементов в G/F' будет следовать их конечность в G . Поэтому считаем, что $P \triangleleft G$, P — абелева силовская p -подгруппа группы G . Группа G индуцирует в P группу Φ p' -автоморфизмов. Пусть Φ_0 — группа автоморфизмов, действующих тождественно на $P/P \cap Z(G)$. Как стабильная p' -группа автоморфизмов p -группы, Φ_0 — единичная группа, Φ/Φ_0 — группа автоморфизмов группы $P/P \cap Z(G)$. Так как последняя конечна, то группа Φ/Φ_0 конечна. Итак, Φ конечна. Следовательно, $C(P)$ имеет в G конечный индекс, а это означает, что каждый p -элемент имеет конечное число сопряженных. Как ранее отмечено, отсюда следует конечность классов сопряженных элементов в G . В силу леммы 1.1 гл. II, лемма доказана.

Т е о р е м а 4.5 (Еремин [22]). *Каждая абелева p -подгруппа периодической группы G тогда и только тогда определяет конечный класс сопряженных с ней подгрупп группы G , когда последняя является расширением своего центра при помощи слойно конечной группы с конечными силовскими подгруппами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть каждая абелева p -подгруппа периодической группы G определяет конечный класс сопряженных с ней подгрупп. В частности, конечны классы циклических примарных групп. Отсюда конечны классы p -элементов по всем p . Так как всякий элемент — произведение p -элементов по некоторым p , то конечны классы любых элементов группы G . По лемме 1.1 гл. II G локально нормальна. Пусть $P/Z(G)$ — бесконечная p -подгруппа группы $G/Z(G)$. В силу леммы 3.3,

существует такая p -подгруппа A , что $AZ(G)/Z(G) = P/Z(G)$. По теореме 4.2 группа A , как бесконечная над $Z(G)$, имеет абелеву подгруппу, определяющую бесконечный класс сопряженных подгрупп. Это противоречит условию. Следовательно, силовские p -подгруппы в $G/Z(G)$ конечны. Как показано в § 4 гл. II (см. начало параграфа), $G/Z(G)$ — слойно конечная группа. В одну сторону теорема доказана.

Пусть, обратно, $G/Z(G)$ — слойно конечная группа с конечными силовскими подгруппами. Она локально нормальна (см. лемму 4.4). Пусть A — абелева p -подгруппа G . Ее образ в $G/Z(G)$ является p -подгруппой. Но в $G/Z(G)$ имеется конечное множество p -элементов. Следовательно, $A \cap Z(G)$ имеет в A конечный индекс. Так как $A = (A \cap Z(G))K$, где K — конечная группа, то $C(A) = C(K) \leq N(A)$ имеет в G конечный индекс, т. е. A имеет конечное число сопряженных подгрупп. Теорема доказана.

Теорема 4.6 (Еремин [22]). *Группа является конечным расширением центра тогда и только тогда, когда все ее абелевы подгруппы имеют конечное число сопряженных подгрупп.*

Доказательство. Если группа конечна над центром, то, очевидно, все абелевы подгруппы имеют конечное число сопряженных подгрупп.

Пусть в группе G конечны классы сопряженных абелевых подгрупп. Пусть $g \in G$. Так как $C(\langle g \rangle)$ имеет в $N(\langle g \rangle)$ конечный индекс, то $C(g) = C(\langle g \rangle)$ также имеет в G конечный индекс. Классы сопряженных элементов в G конечны. В силу теоремы 1.4 гл. II, G — подпрямое произведение абелевой группы без кручения A и локально нормальной группы B . Пусть H — произвольная абелева подгруппа из B , и пусть K — подгруппа из G , проекция которой на B равна H . Очевидно, K абелева. Так как сопряженных подгрупп K имеет конечное число, то и H имеет в B конечное число сопряженных подгрупп. Следовательно, теорему достаточно доказать для локально нормальных групп.

Пусть G локально нормальна. По теореме 4.5 $G/Z(G)$ — слойно конечная группа с конечными силовскими подгруппами. Из теоремы 4.1 гл. II следует, что $G/Z(G)$ — тонкое подпрямое произведение конечных

групп. Если среди множителей произведения лишь конечное множество неабелевых, то в $G/Z(G)$ имеется абелева подгруппа $D/Z(G)$ конечного индекса. Группа $D/Z(G) = \bigtimes_{p \in \pi(G)} D_p/Z(G)$ — прямое произведение силовских p -подгрупп. Так как D локально нормальна, то существует такая силовская p -подгруппа H_p , что $D_p = H_p Z(G)$ (см. лемму 3.3). $[H_p, H_q] \subseteq Z(G)$ влечет $[H_p, H_q] = 1$. Следовательно $D = \bigtimes_{p \in \pi(G)} H_p$.

Если бесконечное количество силовских p -подгрупп H_p ($p \in \pi$) содержат циклические подгруппы $\langle h_p \rangle$, не нормальные в H_p , то $\bigtimes_{p \in \pi} \langle h_p \rangle$ — абелева подгруппа, имеющая бесконечно много сопряженных подгрупп. Следовательно, для всех $p \in \pi(G)$ все подгруппы в H_p , кроме конечного числа p , абелевы. Так как все они содержат абелеву подгруппу конечного индекса, то D содержит абелеву подгруппу H конечного индекса. Это означает, что $G = HK$, где K — конечная нормальная подгруппа. Тогда $C_H(K)$ имеет в G конечный индекс и лежит в $Z(G)$. В этом случае теорема доказана.

Пусть среди множителей тонкого подпрямого разложения группы $G/Z(G)$ бесконечно много неабелевых. Тогда $G/Z(G)$ содержит бесконечную подгруппу $D/Z(G) = \bigtimes_{p \in \pi} \langle Z(G)a_p \rangle$, где $\langle Z(G)a_p \rangle$ не нормальна в $G/Z(G)$, a_p — p -элементы. Как и выше, можно показать, что D — прямое произведение силовских подгрупп. Подгруппа $\bigtimes_{p \in \pi} \langle a_p \rangle$ имеет бесконечно много сопряженных

подгрупп, что противоречит условию. Теорема доказана.

Следствие 4.7 (Б. Нейман [89]). *Группа конечна над центром тогда и только тогда, когда все ее подгруппы определяют конечные классы сопряженных подгрупп.*

Следствие 4.8 (Фукс [74]). *Группа — конечное расширение периодической локально циклической центральной подгруппы тогда и только тогда, когда все классы изоморфных подгрупп в ней конечны.*

Теорема 4.9 (Томкинсон [107]). *Пусть G — гомоморфный образ подпрямого произведения конечных групп, H — подгруппа из G . Тогда $\text{cl}(H) = \text{Lcl}(H)$ в том и только в том случае, если $\text{cl}(H)$ конечен.*

Вытекает из теоремы 4.9 гл. I.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамовский И. Н., О подгруппах прямых произведений конечных групп, IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме научных сообщений, Гомель, 1968, 3—4.
2. Абрамовский И. Н., Подгруппы прямых произведений групп, В сб. «Некоторые вопросы теории групп и колец», Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1973, 3—8.
3. Бурбаки Н., Теория множеств, «Мир», 1965.
4. Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры, «Наука», 1968.
5. Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства, «Наука», 1969.
6. Берлинков М. Л., О структуре подгрупп-слоисто-конечной группы, УМН 12, № 4 (1957), 267—271.
7. Гельфанд А. В., Некоторые оценки индекса центра в *FIZ*-группе, В сб. «Теория групп и некоторые вопросы алгебры», Пермский гос. ун-т, 1975, 29—45.
8. Гольберг П. А., Силовские π -подгруппы локально нормальных групп, Матем. сб. 19 (1946), 451—460.
9. Горчаков Ю. М., Примитивно факторизуемые группы, Учен. зап. Пермского гос. ун-та 17, № 2 (1960), 15—31.
10. Горчаков Ю. М., Примарно факторизуемые группы, ДАН СССР 134, № 1 (1960), 23—24.
11. Горчаков Ю. М., О вложимости локально нормальных групп в прямые произведения конечных групп, ДАН СССР 138, № 1 (1961), 26—28.
12. Горчаков Ю. М., О локально нормальных группах, ДАН СССР 147, № 3 (1962), 537—539.
13. Горчаков Ю. М., О локально нормальных группах, Матем. сб. 67, № 2 (1965), 244—254.
14. Горчаков Ю. М., Локально нормальные группы, II Всесоюзный симпозиум по теории групп (Батуми, 1966). Резюме, Тбилиси, 1967, 10—12.
15. Горчаков Ю. М., Локально нормальные группы, Сиб. матем. ж. 12, № 6 (1971), 1259—1272.
16. Горчаков Ю. М., Теоремы типа Прюфера — Куликова, Алгебра и логика 13, № 6 (1974), 655—661.
17. Горчаков Ю. М., Подгруппы локально нормальных групп, Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Краснодар, 1976). Тезисы докладов, Новосибирск, 1976, 21.
18. Горчаков Ю. М., Подгруппы прямых произведений, Алгебра и логика 15, № 6 (1976), 622—627.
19. Дидман А. П., О p -группах, ДАН СССР 15 (1937), 71—76.

20. Дицман А. П., О центре p -групп, Труды семин. по теории групп, 1938, 30—34.
21. Еремин И. И., Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп, ДАН СССР 118, № 2 (1958), 223—224.
22. Еремин И. И., Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп, Матем. сб. 47, № 1 (1959), 45—54.
23. Еремин И. И., О центральных расширениях с помощью тонких слойно-конечных групп, Изв. вузов, Математика 2 (1960), 93—95.
24. Еремин И. И., Группы с конечными классами сопряженных бесконечных подгрупп, Уч. зап. Пермского гос. ун-та 17, № 2 (1960), 13—14.
25. Еремин И. И., О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданным свойством, ДАН СССР 137, № 4 (1961), 772—773.
26. Каргаполов М. И., О сопряженности силовских p -подгрупп локально нормальной группы, УМН 12, № 4 (1957), 297—300.
27. Каргаполов М. И., К теории полупростых локально нормальных групп, Научн. докл. высшей школы, физ.-матем. науки, № 6 (1958), 3—7.
28. Каргаполов М. И., Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, ДАН СССР 127 (1959), 1164—1166.
29. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, «Наука», 1977.
30. Келли Дж. Л., Общая топология, «Наука», 1968.
31. Куликов Л. Я., К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб. 16 (1945), 129—162.
32. Курдаченко Л. А., FC -группы со слойно-конечной периодической частью, Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов, Новосибирск, 1973, 93—98.
33. Курдаченко Л. А., Некоторые обобщения слойно-конечных групп, В сб. «Группы с заданными свойствами подгрупп», Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1973, 270—308.
34. Курдаченко Л. А., Про деякі узагальнення шарово-скінченних груп, Доповіді АН УССР, (А), № 3 (1974), 213—216.
35. Курдаченко Л. А., Непериодические группы с ограничениями для слоев элементов, Укр. матем. ж. 26, № 3 (1974), 386—389.
36. Курдаченко Л. А., FC -группы со слойно-конечной периодической частью, В сб. «Некоторые вопросы теории групп», Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1975, 160—172.
37. Курдаченко Л. А., fc -группы с ограниченными в совокупности порядками элементов периодической части, Сиб. матем. ж. 16, № 6 (1975), 1205—1213.
38. Курдаченко Л. А., FC -группы, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп, Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Краснодар, 1976). Тезисы докладов, Новосибирск, 1976, 49—50.
39. Курдаченко Л. А., FC -группы, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп. Матем. заметки 21, № 1 (1977), 9—20.
40. Курош А. Г., Теория групп, «Наука», 1967.
41. Курош А. Г., Черников С. Н., Разрешимые и нильпотентные группы, УМН 2, № 3 (1947), 18—59.

42. Мальцев А. И., О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. зап. Ивановского пед. ин-та 18 (1958), 49—60.
43. Половицкий Я. Д., Слобно-экстремальные группы, Матем. сб. 56, № 1 (1962), 95—106.
44. Половицкий Я. Д., О локально экстремальных и слобно-экстремальных группах, Матем. сб. 58, № 2 (1962), 685—694.
45. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, «Наука», 1973.
46. Розенфельд Х. М., Некоторые классы бесконечных групп с заданными свойствами индексов, Уч. зап. Пермск. ун-та 22 (1962), 58—64.
47. Розенфельд Х. М., О локально нормальных группах с одним свойством индексов инвариантных подгрупп, Уч. зап. Пермск. ун-та 103 (1963), 73—76.
48. Семенова Т. Я., О нильпотентных подгруппах FC -групп, В сб. «Некоторые вопросы теории групп и колец», Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1973, 150—159.
49. Семенова Т. Я., О сравнении мощности класса локально сопряженных подгрупп с мощностью класса сопряженных подгрупп, Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Часть первая, Гомель, 1975, 162.
50. Семенова Т. Я., Одно достаточное условие принадлежности локально нормальной группы прямому многообразию, порожденному классом конечных групп, Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Краснодар, 1976). Тезисы докладов, Новосибирск, 1976, 79.
51. Трахтенберг А. М., Подгруппа Фраттини FC -группы, Матем. исслед. 7, № 2 (1972), 248—252, 293.
52. Федоров Ю. Г., О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс, УМН 6, № 1 (1951), 187—189.
53. Фукс Л., Об абелевых группах, в которых классы изоморфных собственных подгрупп содержат одинаковое число подгрупп, Чехосл. матем. ж. 2 (77) (1952), 387—390.
54. Холл М., Теория групп, ИЛ, 1962.
55. Черникова Н. В., Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб. 39 (1956), 273—292.
56. Черников С. Н., К теории бесконечных p -групп, ДАН СССР 50 (1945), 71—74.
57. Черников С. Н., Бесконечные слобно-конечные группы, Матем. сб. 22 (1948), 101—133.
58. Черников С. Н., О дополняемости силовских p -подгрупп в некоторых классах бесконечных групп, Матем. сб. 37 (1955), 557—566.
59. Черников С. Н., О группах с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР 114 (1957), 1177—1179.
60. Черников С. Н., О строении групп с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР 115 (1957), 60—63.
61. Черников С. Н., О слобно-конечных группах, Матем. сб. 45 (1958), 415—416.
62. Черников С. Н., Условия конечности в общей теории групп, УМН 14, № 5 (1959), 45—96.
63. Чунжихин С. А., О разрешимых группах, Изв. НИИММ Томского гос. ун-та 2 (1938), 220—223.

64. Шмидт О. Ю., Избранные труды, Изд-во АН СССР, 1959.
65. Baer R., Sylow theorems of infinite groups, Duke Math. J. 6 (1940), 598—614.
66. Baer R., Representations of groups as quotient groups, II. Minimal central chains of a group, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 348—389.
67. Baer R., Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen, Math. Ann. 124 (1952), 161—177.
68. Baer R., Finiteness properties of groups, Duke Math. J. 15 (1948), 1021—1032.
69. Birkhoff G., Subdirect unions in universal algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 764—768.
70. Bridge Iain M., Second nilpotent *BFC*-groups, J. Austral. Math. Soc. 11 (1970), 9—18.
71. Ehrenfeucht A., Jaber V., Do infinite nilpotent groups always have equipotent abelian subgroups, Indagat. math. 34, № 3 (1972), 202—209.
72. Erdős J., The theory of groups with finite classes of conjugate elements, Acta Math. Sci. Hungar. 5 (1954), 45—58.
73. Fuchs L., Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen, Monatsch. Math. 57 (1953), 109—112.
74. Fuchs L., On groups with finite classes of isomorphic subgroups, Publ. Math. Debrecen 3 (1954), 243—252.
75. Haimo Franklin, Groups with a certain condition on conjugates, Canad. J. Math. 4 (1952), 369—372.
76. Hall Ph., A note on soluble groups, J. London Math. Soc. 3 (1928), 98—105.
77. Hall Ph., On the Sylow systems of a soluble group, Proc. London Math. Soc. 43 (1937), 316—323.
78. Hall Ph., A characteristic property of soluble groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 198—200.
79. Hall Ph., Periodic *FC*-groups, J. London Math. Soc. 34 (1959), 289—304.
80. Hartly B., Subgroups of locally normal groups, Compositio mathematica 32, № 2 (1976), 185—201.
81. Hartly B., Sylow subgroups of locally finite groups, Proc. London Math. Soc. 23 (1971), 159—192.
82. Huppert B., Endliche Gruppen, I, Springer — Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, 1967.
83. Macdonald I. D., A class of *FC*-groups, J. London Math. Soc. 34 (1959), 73—80.
84. Meyn Helmut, *FC*-groups and related classes, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 47 (1972), 65—75.
85. Miller G. A., Moreno H. C., Non-abelian groups in which every subgroups is abelian, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), 398—404.
86. Neumann B. H., Groups with finite classes of conjugate elements, Proc. London Math. Soc. 1 (1951), 178—187.
87. Neumann B. H., Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc. 29 (1954), 236—248.
88. Neumann B. H., Groups covered by finitely many cosets, Publ. Math. Debrecen 3, № 3—4 (1954), 227—242.

89. Neumann B. H., Groups with finite classes of conjugate subgroups, *Math. Z.* **63** (1955), 76—96.
90. Neumann B. H., Isomorphism of Sylow subgroups of infinite groups, *Math. Scand.* **6** (1958), 299—307.
91. Neumann P. M., An improved bound for *BFC* p -groups, *J. Austral. Math. Soc.* **11** (1970), 19—27.
92. Nishigōri Noboru, On some properties of *FC*-groups, *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A*, **21** (1957/58), 99—105.
93. Remak R., Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *J. reine angew. Math.* **139** (1911), 293—308.
94. Remak R., Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *J. reine angew. Math.* **153** (1923), 131—140.
95. Remak R., Über minimale invariante untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen, *J. reine angew. Math.* **162** (1930), 1—16.
96. Remak R., Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte, *J. reine angew. Math.* **163** (1930), 1—44.
97. Remak R., Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen, *J. reine angew. Math.* **164** (1931), 197—242.
98. Remak R., Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren, *J. reine angew. Math.* **166** (1931), 65—100.
99. Remak R., Schiefelbusch Lary, The Trofimov number of some infinite groups with finiteness conditions, *Arch. Math.* **18** (1967), 122—127.
100. Scott W. R., On a result of B. H. Neumann, *Math. Z.* **66** (1956), 240.
101. Schur J., Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. reine angew. Math.* **127** (1904), 20—50.
102. Stonehewer S. E., Locally soluble *FC*-groups, *Arch. Math.* **16** (1965), 158—177.
103. Stonehewer S. E., Formations and a class of locally soluble groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62** (1966), 613—635.
104. Stonehewer S. E., Some finiteness conditions in locally soluble groups, *J. London Math. Soc.* **43** (1968), 689—694.
105. Takeyiro Seki, Über die Existenz der Zerfallungsgruppe in der Erweiterungstheorie der Gruppen, *Tōhoku Math. J.* **48** (1941), 235—238.
106. Tomkinson M. J., Local conjugacy classes, *Math. Z.* **108** (1969), 202—212.
107. Tomkinson M. J., Local conjugacy classes, II, *Arch. Math.* **20** (1969), 567—571.
108. Tomkinson M. J., f -injectors of locally soluble *FC*-groups, *Glasgow Math. J.* **10** (1969), 130—136.
109. Tomkinson M. J., Formations of locally soluble *FC*-groups, *Proc. London Math. Soc.* **19** (1969), 675—708.
110. Tomkinson M. J., Extraspecial sections of periodic *FC*-groups, *Comp Math.* **31** (1975), 285—302.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аutomорфизм внутренний 3
— локально внутренний 3

Высота элемента 7

Группа автоморфизмов стабильная 110

— без центра 67
— квазициклическая 68
— конечная над центром 4
— локально конечная 106
— — нормальная 3, 48
— — разрешимая 106
— — циклическая 83
— накрывающая 23
— примарная 6
— разлагается в прямое произведение подгрупп 26
— разложимая в поддекартово произведение 16
— с конечными классами сопряженных элементов 3
— слойно конечная 75
— финитно аппроксимируемая 63
— чернишковская 80

Класс локально сопряженных подгрупп 10, 86
— сопряженных подгрупп 10

Локально сопряженные подгруппы 3
— — силовские базы 102

Множитель декартова произведения 13

Носитель подгруппы 14
— элемента 14

Отображение Ремака 14

Подгруппа бесконечная над центром 107

— минимальная нормальная 16
— сервантная 57
— ящичная 17

Полная силовская база 102

Полное проекционное множество 98

Проекция подгруппы 14

— элемента 13

Произведение групп декартова 13

— — поддекартово 14

— — подпрямое 27

— — полупрямое 24

— — прямое 15

— — тонкое подпрямое 76

— — — прямое 75

Прямое многообразие, порожденное классом групп 40

— произведение подгрупп 26

p -элемент 76

p' -автоморфизм 110

p' -элемент 89

π -группа 100

Расширение центральное 11

Силовская p -подгруппа 3, 96

— π -подгруппа 100

Тихоновская топология 17

Универсальная алгебра 17

Условие конечности 3

Цоколь группы 82

Ящик группы 17

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Г л а в а I	
Декартовы и прямые произведения	13
§ 1. Подгруппы декартовых произведений	13
§ 2. Метод Ф. Холла представления группы гомоморфными образами поддекартовых произведений	22
§ 3. Подгруппы прямых произведений	26
§ 4. Гомоморфные образы подпрямых произведений	40
Г л а в а II	
Представления в прямых произведениях конечных групп	48
§ 1. Сведение к периодическому случаю	48
§ 2. Теоремы типа Прюфера — Куликова	53
§ 3. Финитно аппроксимируемые локально нормальные группы	63
§ 4. Слоино конечные группы	75
Г л а в а III	
Сопряженные и локально сопряженные подгруппы	81
§ 1. Существование нильпотентных подгрупп	81
§ 2. Мощность классов локально сопряженных подгрупп	86
§ 3. Силовские подгруппы	96
§ 4. Конечность классов сопряженных подгрупп	107
Литература	113
Предметный указатель	118

Юрий Михайлович Горчаков
ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМИ КЛАССАМИ
СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Серия: «Современная алгебра»)

М., 1978 г. 120 стр.

Редактор *Ф. И. Кизнер.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректоры *В. П. Сорокина, Е. В. Сидоркина.*

ИБ № 11174

Сдано в набор 28.10.77. Подписано к печати 21.02.78. Т-05143.

Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Литературная гарнитура.

Высокая печать. Условн. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,53.

Тираж 6000 экз. Заказ № 4786. Цена книги 45 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Шубинский пер., 10.

45 к.

Алгебра — одна из наиболее подвижных частей математики. Последнее по счету крупное изменение ее структуры произошло в середине 20-го века, когда из чисто теоретической науки, снабжавшей идеями и методами более «прикладные» разделы математики, алгебра сама стала «прикладной» наукой, найдя непосредственные контакты с обширной областью синтеза и математического обеспечения вычислительной техники, с физикой и другими отраслями науки. Это послужило одним из стимулов к современному подъему алгебраических исследований, созданию новых алгебраических дисциплин и коренной перестройке ряда классических областей алгебры.

В серии «Современная алгебра» публикуются монографии, содержащие изложение современного состояния новых или наиболее быстро меняющихся разделов алгебры и смежных областей математики. Особое внимание уделяется освещению нерешенных вопросов и перспектив развития соответствующих разделов науки. Как правило, монографии этой серии независимы друг от друга и рассчитаны на квалифицированных читателей: научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов, занимающихся математикой и математическими вопросами других наук.

