В.Н.САЛИЙ

РЕШЕТКИ С ЕДИНСТВЕННЫМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ

СОВРЕМЕННАЯ
АЛГЕБРА

В. Н. САЛИЙ

РЕШЕТКИ С ЕДИНСТВЕННЫМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.14
С 16
УДК 512.9

Салий В. Н. **Решетки с единственными дополнениями.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 г. — 128 с.

Известно, что класс решеток с единственными дополнениями содержит все булевы решетки, но не сводится к ним. Однако до сих пор не указан явный пример небулевой решетки из этого класса. Нет ответа и на вопрос о том, существуют ли в нем полные небулевы решетки. Книга является первой монографией, посвященной этим классическим проблемам теории решеток. Она содержит все необходимые сведения об упорядоченных множествах и решетках и не требует от читателя предварительных специальных знаний.

Для научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся или интересующихся общей алгеброй и математической логикой.

Вячеслав Николаевич Салий

РЕШЕТКИ С ЕДИНСТВЕННЫМИ ДОПОЛНЕНИЯМИ

(Серия: «Современная алгебра»)

Редактор *Т. А. Панькова*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *А. Л. Ипатова*

ИБ № 12211
Сдано в набор 17.07.83. Подписано к печати 28.02.84. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 6,72. Условн. кр.-отт. 6,93. Уч.-изд. л. 7,36. Тираж 4400 экз. Заказ № 194. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, с матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

С $\frac{1702030000-066}{053(02)-84}$ 43-84

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Время идет, и одна за другой сдаются классические проблемы теории решеток. Уже известно, что решетками конгруэнций алгебр являются компактно порожденные решетки и только они (Гретцер и Шмидт, 1963), что многообразие всех решеток все-таки можно определить одним тождеством (Маккензи, 1970), что каждая конечная решетка изоморфна решетке разбиений конечного множества (Пудлак и Тума, 1977), что конечные подрешетки свободной решетки в самом деле описываются квазитождествами полудистрибутивности и условием Уитмена (Нейшн, 1982). По-видимому, в ближайшее время будет доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы тождества слов для свободной модулярной решетки с четырьмя порождающими.

В этом ряде занимает свое место и проблема, относящаяся к загадочному классу решеток с единственными дополнениями.

Еще в 1904 г., исследуя различные системы аксиом для булевой алгебры, Хантингтон предположил, что ее, вероятно, можно определить как решетку, в которой каждый элемент имеет одно и только одно дополнение. Незадолго до того немецкие математики (Шредер, Фойгт, Люрот, Корсельт и Дедекинд) серией все более убедительных контрпримеров сломили, наконец, упорное сопротивление Пирса, считавшего все решетки дистрибутивными, и новая попытка вычеркнуть дистрибутивность из списка булевых постулатов, конечно, не могла остаться незамеченной.

К концу 30-х годов ни доказательства, ни опровержения гипотезы Хантингтона все еще не было, но перед лицом многочисленных подкрепляющих фактов (когда привлекались дополнительные условия — модулярность, атомность, законы Де Моргана и т. д.) уже мало кто сомневался в ее справедливости. Тем большей неожиданностью явилась опубликованная в 1945 г. теорема Дилуорса

всякая решетка вложима в подходящую решетку с единственными дополнениями.

Чрезвычайно сложное построение действительно приводило к недистрибутивным решеткам с единственными дополнениями, но получались они с помощью некоторого предельного процесса и были столь громоздки, что, например, каждая такая решетка содержала свободную решетку со счетным числом порождающих. За прошедшие почти сорок лет доказательство Дилуорса трижды существенно упрощалось и в последней версии (Адамса и Сихлера) выглядит вполне доступным. И все же вызывает беспокойство тот факт, что до сих пор вне класса булевых алгебр нет ни одного явного примера решетки с единственными дополнениями — такие решетки пока не встречались в математической практике.

Другим, более важным обстоятельством является то, что имеющиеся способы построения недистрибутивных решеток с единственными дополнениями заведомо не сохраняют полноту. Поэтому в классе полных решеток вопрос Хантингтона все еще остается без ответа. *Существуют ли полные недистрибутивные решетки с единственными дополнениями?* — это и есть та проблема, о которой говорилось в самом начале.

Решетки в свете одной проблемы — так можно кратко охарактеризовать содержание предлагаемой книги. В ней действительно содержатся все — от самых первоначальных определений — сведения из теории решеток, так или иначе связанные с центральной задачей.

Вся первая глава и некоторые части второй и третьей глав носят вспомогательный характер: в них вводятся основные понятия и доказываются нужные для дальнейшего предложения. Общеалгебраические конструкции и соответствующие свойства считаются известными. Из лежащих в их основе утверждений об упорядоченных множествах постулируется принцип Хаусдорфа, а из него выводятся лемма Куратовского — Цорна, теорема Цермело и теорема о существовании функции выбора. Все они постоянно и явным образом используются в доказательствах.

Имея узкую направленность, упомянутые разделы ни в коей мере не могут претендовать на роль общего введения в теорию решеток и булевых алгебр — здесь читателю следует обратиться к книгам Л. А. Скорнякова [1] и Д. А. Владимирова [1].

Вторую главу можно воспринимать как математическую историю проблемы Хантингтона. Решетки с единст-

венными дополнениями возникли при исследовании аксиоматики булевых алгебр (теорема Хантингтона). Начиная с определения булевой алгебры и теоремы Пирса, мы пройдем через целый ряд предложений, устанавливающих дистрибутивность решетки с единственными дополнениями при тех или иных ограничениях. Новый критерий дистрибутивности для таких решеток (теорема 13) позволяет достаточно просто и единообразно изложить все полученные в этом направлении результаты. В тексте много рисунков: они помогают привлечь непосредственную геометрическую интуицию к проверке неочевидных выкладок. Глава завершается доказательством теоремы Дилуорса и взятым тоже у Адамса и Сихлера примером собственного решеточного многообразия, в котором имеются недистрибутивные решетки с единственными дополнениями.

В третьей главе рассматриваются различные попытки продвинуться в решении основной проблемы. Наряду с уже известными результатами (дистрибутивность компактно порожденных и, вообще, непрерывных решеток с единственными дополнениями, разложение полной решетки с единственными дополнениями в прямое произведение атомной и безатомной компонент, пополнение булевой алгебры сечениями) излагаются и новые подходы, в первую очередь связанные с поисками удобных представлений для полных решеток. Таковы теорема 23, реализующая полную решетку как решетку всех P-подалгебр элементарной унарной P-алгебры, теорема 38 о прямых разложениях полной решетки с единственными дополнениями с помощью правильных элементов, интерпретация свойств полных решеток на языке решеточных преобразований множеств (§7). Некоторые важные утверждения о полных булевых алгебрах удается доказать без использования дистрибутивности, и тогда они становятся теоремами для всего класса полных решеток с единственными дополнениями (как, например, теоремы 26, 31 или 32).

Я благодарен проф. Л. А. Скорнякову за сделанные им замечания, некоторые из них оказались весьма существенными.

Книга завершается сводным списком из десяти проблем со ссылками на контекст, в котором они возникли, и библиографией, содержащей работы, где уделяется специальное внимание решеткам с единственными дополнениями.

Как показывает история, окончательное решение трудных алгебраических задач не всегда имеет споследствия,

равнозначные тем математическим ценностям, которые были завоеваны в процессе достижения цели. Упоминавшиеся нами проблемы не были в этом смысле исключением, и можно сказать заранее, что ни доказательство дистрибутивности полных решеток с единственными дополнениями, ни открытие опровергающего ее примера не вызовут решительных изменений в теории решеток. Но кажущаяся неприступность обсуждаемой проблемы свидетельствует об отсутствии должных методов ее трактовки, и поэтому можно надеяться, что, как это часто бывало, создание таких методов даст толчок к новым плодотворным исследованиям.

В. Салий

Саратов, май 1982 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

§ 1. Упорядоченные множества

1. *Упорядоченное множество*[1]) (коротко: у-множество) — это пара (A, ω), где A — непустое множество, а $\omega \subseteq \subseteq A \times A$ — бинарное отношение на A, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(x, x) \in \omega$ (рефлексивность);

2) $(x, y) \in \omega \,\&\, (y, z) \in \omega \Rightarrow (x, z) \in \omega$ (транзитивность);

3) $(x, y) \in \omega \,\&\, (y, x) \in \omega \Rightarrow x = y$ (антисимметричность)

для любых $x, y, z \in A$. При этом ω называется *отношением порядка* на множестве A или упорядочением множества A.

Тот факт, что пара (x, y) принадлежит отношению ω, обычно обозначают при помощи инфиксного знака $\leqslant$. Выражение $x \leqslant y$ читается по-разному: «x меньше (меньше или равен, не больше, содержится в, включается в) y» или, соответственно, «y больше (больше или равен, не меньше, содержит, включает) x». Тот же смысл имеет и запись $y \geqslant x$. Наконец, в том случае, когда $x \leqslant y$ и $x \neq y$, пишут знак $<$ строгого неравенства: $x < y$ или $y > x$.

Заметим, что в каждом конкретном у-множестве для обозначения порядка, как правило, имеется свой традиционный знак.

2. В качестве первого примера у-множества укажем $(\mathbf{N}, \leqslant)$ — множество всех натуральных чисел с обычным для них порядком.

Другой пример — у-множество $(P(A), \subseteq)$ всех подмножеств некоторого множества A с отношением включения подмножеств.

3. Одно и то же множество можно упорядочивать по-разному.

---

[1]) В другой терминологии — *частично упорядоченное множество.*

Так, в множестве $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, кроме естественного порядка, можно ввести упорядоченность при помощи отношения делимости, считая, что m содержится в n тогда и только тогда, когда $m \mid n$ (т. е. m делит n). У-множества $(\mathbf{N}, \leqslant)$ и $(\mathbf{N}, \mid)$, конечно, различны: например, $2 \leqslant 3$, но $2 \nmid 3$.

4. Пусть (A, ω) — у-множество и X — некоторое непустое подмножество в A. Через ω_X обозначим ограничение бинарного отношения ω на подмножестве X, т. е. $\omega_X = \omega \cap (X \times X)$. Ясно, что ω_X рефлексивно, транзитивно и антисимметрично на X. Говорят, что порядок ω индуцирует упорядоченность ω_X на подмножестве X, а пару (X, ω_X) называют *упорядоченным подмножеством* (у-подмножеством) упорядоченного множества (A, ω). Обычно для индуцированного порядка сохраняют то же обозначение и пишут просто (X, ω).

5. Если в естественно упорядоченном множестве $(\mathbf{R}, \leqslant)$ всех действительных чисел выделить множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, сохраняя имеющийся в $(\mathbf{R}, \leqslant)$ порядок, то получится у-подмножество $(\mathbf{Z}, \leqslant)$. В свою очередь $(\mathbf{N}, \leqslant)$ является у-подмножеством в $(\mathbf{Z}, \leqslant)$ (а значит, и в $(\mathbf{R}, \leqslant)$).

У-подмножествами у-множества $(P(A), \subseteq)$ будут $(P^*(A), \subseteq)$ и $(P_0(A), \subseteq)$, где $P^*(A)$ обозначает совокупность всех непустых, а $P_0(A)$ — совокупность всех конечных подмножеств множества A.

У-подмножеством в $(\mathbf{N}, \mid)$ является множество $\mathbf{N}^*$ всех натуральных чисел, свободных от квадратов, т. е. имеющих вид $n = p_1 p_2 \ldots p_s$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа.

6. Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ — два у-множества. Гомоморфизмом (*изотонным отображением*) первого во второе называется такое отображение $\varphi\colon A \to B$ множества A в множество B, что

$$x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$$

для любых $x, y \in A$. Отображение $\varphi\colon A \to B$, по определению, *антиизотонно*, если

$$x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(y).$$

Если φ изотонно, взаимно однозначно и *обратно изотонно* (т. е. $\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Rightarrow x \leqslant y$), то φ называют *вложением* у-множества $(A, \leqslant)$ в у-множество $(B, \leqslant)$. Наконец, вложение, являющееся отображением на (наложением), есть, по определению, *изоморфизм* у-множеств $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$.

7. Если ω — отношение порядка на множестве A, то обратное ему отношение ω^{-1} (напомним, что $(x, y) \in \omega^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \omega$) также будет упорядоченностью. Это *дуальный*, или *двойственный*, для ω *порядок*. У-множество, изоморфное у-множеству (A, ω^{-1}), называется *дуально изоморфным* для (A, ω).

Например, у-множество $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$ отрицательных целых чисел дуально изоморфно у-множеству $(\mathbf{N}, \leqslant)$.

Очевидно следующее утверждение.

Принцип двойственности для упорядоченных множеств. *Если класс у-множеств таков, что вместе с каждым входящим в него у-множеством* (A, ω) *он содержит и двойственное* (*дуально изоморфное*) *ему у-множество* (A, ω^{-1}), *и в этом классе истинно некоторое утверждение* $C(\omega)$, *то в нем выполняется и двойственное утверждение, получающееся из* C *заменой всюду* ω *на* ω^{-1}.

8. Элемент a у-множества $(A, \leqslant)$ называется *минимальным*, если в нем не содержится никакой другой элемент множества A. Элемент $a \in A$ называется *наименьшим* в у-множестве $(A, \leqslant)$, если он содержится в любом элементе из A. Двойственно определяются *максимальный* и *наибольший* элементы в $(A, \leqslant)$.

В общем случае наименьший элемент у-множества обозначается символом O (и называется также *нулем*), а наибольший — символом I (и часто называется *единицей*), но в каждой конкретной ситуации используют имеющиеся традиционные знаки.

У-множество с O и I называется *ограниченным*.

В ограниченном у-множестве $(P(A), \subseteq)$ наименьшим элементом является пустое подмножество $\emptyset$, а наибольшим — само множество A. У-множество $(\mathbf{R}, \leqslant)$ не ограничено ни снизу, ни сверху. В $(\mathbf{N}, \leqslant)$ нет наибольшего элемента, но есть наименьший — число 1, а в $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$ — двойственная ситуация: наибольшим элементом здесь будет число —1, а наименьшего элемента нет. В у-множестве $(\mathbf{N}, |)$ меньше всех элементов снова будет единица 1, а наибольшего элемента нет. Впрочем, если к натуральным числам присоединить нуль (число), то он будет содержать (в смысле делимости) все числа из $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

В у-множестве $(P^*(A), \subseteq)$ всех непустых подмножеств неодноэлементного множества A уже нет наименьшего элемента, но зато много минимальных: ими будут все одноэлементные подмножества. Если ограничиться только конечными подмножествами бесконечного множе-

ства A, то наименьшим элементом в $(P_0(A), \subseteq)$ будет пустое подмножество, а максимальных элементов нет.

Если у-множество имеет наименьший (наибольший) элемент, то он будет единственным минимальным (максимальным) элементом. Напротив, если, например, к отношению естественной упорядоченности в $\mathbf{Z}$ присоединить всего одну пару (α, α), то в полученном у-множестве α будет единственным минимальным (и максимальным) элементом, но наименьшего (и наибольшего тоже) элемента нет.

9. Пусть a, b — элементы у-множества $(A, \leqslant)$ и $a < b$. *Интервалом*, определяемым элементами a и b, называется подмножество

$$[a, b] = \{x \in A: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Аналогично вводится открытый интервал (a, b). Это множество таких $x \in A$, что $a < x < b$. Понятно, какой смысл имеют обозначения $(a, b]$ и $[a, b)$.

Интервал $[a, b]$ называют *простым*, если $[a, b] = \{a, b\}$. В этом случае говорят, что элемент b *покрывает* элемент a.

10. Если у-множество $(A, \leqslant)$ имеет наименьший элемент О, то элементы, покрывающие О, называются *атомами*. Двойственно определяются *дуальные атомы*[1]): это элементы, покрываемые наибольшим элементом I.

В у-множестве $(P(A), \subseteq)$ атомами будут все одноэлементные подмножества, и только они, а дуальные атомы представляют собой подмножества, получающиеся из A удалением какой-либо одной точки каждое.

В у-множестве $(\mathbf{N}, |)$ атомы — это простые числа.

11. Элементы x и y у-множества $(A, \leqslant)$ называются *сравнимыми* (обозначение: $x \diamond y$), если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$. В противном случае x и y *не сравнимы*, и этот факт обозначается так: $x \| y$. У-множество, в котором любые два элемента сравнимы, называется *линейно упорядоченным*. У-множество $(\mathbf{R}, \leqslant)$ и все его у-подмножества линейно упорядочены, а в $P(A)$ отношение включения будет линейным порядком лишь в том случае, когда A имеет не более одного элемента.

Линейно упорядоченные подмножества у-множества $(A, \leqslant)$ называются *цепями* в $(A, \leqslant)$. Например, степени фиксированного простого числа составляют цепь в $(\mathbf{N}, |)$.

Цепи у-множества $(A, \leqslant)$ сами образуют у-множество относительно теоретико-множественного включения. Мак-

---

[1]) В другой терминологии — *коатомы*.

симальные элементы этого у-множества называются *максимальными цепями* в $(A, \leqslant)$.

Мы принимаем в качестве аксиомы следующий

Принцип Хаусдорфа. *Всякая цепь упорядоченного множества содержится в некоторой его максимальной цепи.*

12. *Убывающей цепью* в у-множестве $(A, \leqslant)$ называется последовательность его элементов, имеющая вид

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$$

Теорема 1. *Для всякого у-множества $(A, \leqslant)$ следующие утверждения равносильны:*

1) (условие обрыва убывающих цепей) *В $(A, \leqslant)$ каждая убывающая цепь конечна;*

2) (условие минимальности) *Если X — непустое подмножество множества A, то у-подмножество $(X, \leqslant)$ имеет хотя бы один минимальный элемент;*

3) (условие индуктивности) *Пусть некоторое свойство C таково, что*

а) *им обладают все минимальные элементы у-множества $(A, \leqslant)$,*

б) *если оно выполняется для всех элементов, строго меньших элемента $a \in A$, то оно выполняется для a.*

Тогда это свойство C универсально в $(A, \leqslant)$, т. е. оно выполняется для всех элементов множества A.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если в у-множестве $(A, \leqslant)$ существует непустое у-подмножество $(X, \leqslant)$, не имеющее минимальных элементов, то в $(A, \leqslant)$ из элементов подмножества X можно построить бесконечную убывающую цепь, что нарушает условие обрыва убывающих цепей в $(A, \leqslant)$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть в $(A, \leqslant)$ условие минимальности выполняется, но существует имеющее смысл для элементов у-множества $(A, \leqslant)$ свойство C, которое удовлетворяет требованиям а) и б) в условии индуктивности и тем не менее не универсально в $(A, \leqslant)$. Тогда подмножество X, составленное из тех элементов множества A, для которых C не выполняется, не пусто и, следовательно, у-подмножество $(X, \leqslant)$ имеет хотя бы один минимальный элемент, — пусть это будет a. (Заметим, что a ввиду а) не будет минимальным во всем $(A, \leqslant)$.) В силу минимальности элемента a в $(X, \leqslant)$, все элементы множества A, строго меньшие, чем a, в X не попадают, а тогда, согласно требованию б) условия индуктивности, свойство C выполняется и для a, что невозможно, так как $a \in X$.

$3 \Rightarrow 1$. Если в $(A, \leqslant)$ имеет место условие индуктивности, то пусть свойство C для элемента x означает, что всякая убывающая цепь, начинающаяся с x, конечна. Нетрудно проверить, что для C выполняются требования а) и б) условия индуктивности. Значит, C универсально в $(A, \leqslant)$, т. е. всякая убывающая цепь, начинающаяся с любого элемента, конечна.

13. У-множества $(\mathbf{N}, \leqslant)$, $(\mathbf{N}, |)$ и $(P_0(A), \subseteq)$ удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей (и, следовательно, условиям минимальности и индуктивности), а у-множество $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$ и содержащие его в качестве у-подмножества $(\mathbf{Z}, \leqslant)$ и $(\mathbf{R}, \leqslant)$, а также $(P(A), \subseteq)$ для бесконечного A — нет.

Предложения, двойственные для условия обрыва убывающих цепей и условия минимальности, называются соответственно *условием обрыва возрастающих цепей* и *условием максимальности*.

Возрастающие цепи конечны, например в у-множестве $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$.

14. *Высотой элемента* x в у-множестве называется наибольшая (если она существует) из длин убывающих цепей, начинающихся с x. При этом под длиной цепи понимают либо число элементов в ней, либо это число, уменьшенное на единицу («количество звеньев»). Мы принимаем второе толкование.

Очевидно, что в у-множестве $(\mathbf{N}, \leqslant)$ высота $h(n)$ числа n будет равна $n-1$. В $(\mathbf{N}, |)$ высота того же n совпадает с числом множителей в представлении n в виде произведения простых чисел (с повторами). Например, $h(12) = h(2 \cdot 2 \cdot 3) = 3$. В $(P_0(A), \subseteq)$ высота подмножества равна числу его элементов.

Об элементе, начиная с которого можно строить сколь угодно длинные убывающие цепи, говорят, что он имеет бесконечную высоту.

Если высоты всех элементов у-множества $(A, \leqslant)$ конечны и среди них есть наибольшая, то она называется *длиной у-множества* $(A, \leqslant)$ (обозначение: $l(A)$). В противном случае говорят, что $(A, \leqslant)$ имеет бесконечную длину. Если у-множество имеет конечную длину, то все цепи его конечны, но обратное, вообще говоря, не верно (см. п. 17).

15. У-множество, в котором никакие (т. е. любые) два различные элемента не сравнимы, называется *тривиально упорядоченным*. Тривиально упорядоченные подмножества у-множества $(A, \leqslant)$ называют *антицепями* в $(A, \leqslant)$. На-

пример, простые числа образуют антицепь в у-множестве (**N**, |).

Шириной антицепи называется количество элементов в ней. Если ширины всех антицепей у-множества $(A, \leqslant)$ конечны и среди них есть наибольшая, то она называется *шириной у-множества* $(A, \leqslant)$ (обозначение: $w(A)$). В противном случае говорят, что $(A, \leqslant)$ имеет бесконечную ширину.

16. Всякому конечному (т. е. с конечным числом элементов) у-множеству $(A, \leqslant)$ можно следующим образом сопоставить его *диаграмму*. Пусть длина $l(A)=n$. Разместим элементы множества A в соответствии с их высотой на $n+1$ параллельных прямых (они не изображаются), а затем, если элемент b покрывает элемент a, и только в этом случае, соединим a и b прямолинейным отрезком. Тогда для любых $x, y \in A$ соотношение $x<y$ выполняется, если и только если на диаграмме имеется восходящая от x к y ломаная.

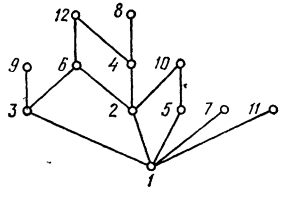

Рис. 1.

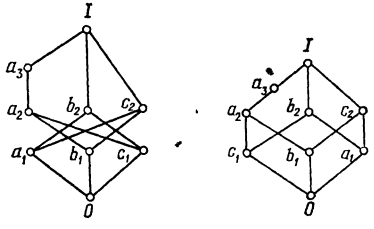

Рис. 2.

Построим, например (рис. 1), диаграмму у-множества ({1, 2, ..., 12}, |) (первые 12 натуральных чисел, упорядоченные делением).

Окончательный вид диаграммы (их стараются рисовать по возможности без самопересечений) зависит, конечно, от эстетических взглядов исполнителя. На рис. 2 приведены две диаграммы одного и того же у-множества (левый вариант считается стандартным).

В дальнейшем мы будем обращаться к у-множествам, диаграммы которых изображены на рис. 3, *а — г*.

17. Иногда рисуют диаграммы и для бесконечных у-множеств. Конечно, мы не можем изобразить все элементы такого у-множества, но получающиеся рисунки дают ясное представление о его устройстве. Рис. 4, *а*, *б* представляют соответственно у-множества (**N**, $\leqslant$) и ($\mathbf{N}^-$, $\leqslant$), а на рис. 4, *в* изображено у-множество бесконечной длины, все цепи которого конечны.

18. Элемент a называется *верхней гранью* непустого подмножества X у-множества $(A, \leqslant)$, если все элементы из X содержатся в a. Двойственно вводится понятие *нижней грани* непустого подмножества у-множества. Ясно, что подмножество может иметь много верхних и много нижних граней, а может и не иметь их совсем.

Лемма Куратовского—Цорна. *Если в упорядоченном множестве каждая цепь имеет верхнюю грань, то всякий элемент этого упорядоченного множества содержится в некотором максимальном элементе.*

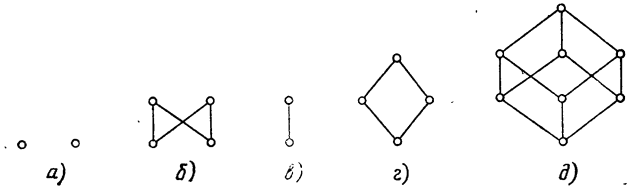

Рис. 3.

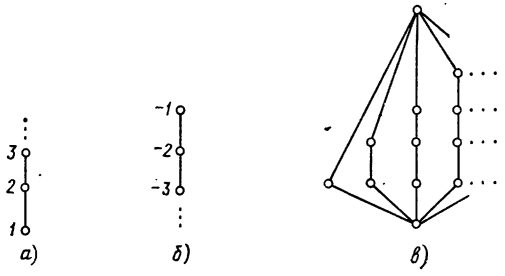

Рис. 4.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент у-множества $(A, \leqslant)$, удовлетворяющего условию теоремы. Подмножество $\{x\}$ является цепью в $(A, \leqslant)$ и, согласно принципу Хаусдорфа, эта цепь может быть включена в некоторую максимальную цепь C. Но, по условию, каждая цепь в $(A, \leqslant)$ имеет верхнюю грань. Пусть c и есть (какая-нибудь) верхняя грань цепи C. Так как цепь C максимальна, а c содержит все ее элементы, то $c \in C$ (иначе подмножество $C \cup \{c\}$ было бы цепью, собственным образом включающей в себя максимальную цепь C, что невозможно). Таким образом, c является наибольшим элементом цепи C и C не имеет других верхних граней, откуда следует, что элемент c максимален в $(A, \leqslant)$. Конечно, c содержит элемент x.

19. Пусть A — непустое множество. *Функцией выбора* на нем называется отображение φ: $P^*(A) \to A$ такое, что $\varphi(X) \in X$ для любого $X \in P^*(A)$. Таким образом, функция выбора «отмечает» по одному элементу в каждом непустом подмножестве множества A.

Теорема 2. *На каждом непустом множестве существует функция выбора.*

Доказательство. Частичной функцией выбора на множестве A будем называть функцию ψ с областью задания $\mathscr{A} \subseteq P^*(A)$ такую, что $\psi(X) \in X$ для любого $X \in \mathscr{A}$. Нетрудно указать примеры частичных функций выбора. Так, можно взять в качестве $\mathscr{A}$ совокупность всех одноэлементных подмножеств множества A и положить $\psi(\{x\}) = x$ для каждого $x \in A$. Множество Ψ всех частичных функций выбора на A упорядочено теоретико-множественным включением (мы рассматриваем эти функции как однозначные бинарные отношения между множествами $P^*(A)$ и A). Таким образом, $\psi_1 \subseteq \psi_2$ означает, что область определения $\operatorname{dom}\psi_1$ функции ψ_1 содержится в области определения $\operatorname{dom}\psi_2$ функции ψ_2 и ψ_1 совпадает с ψ_2 на $\operatorname{dom}\psi_1$).

Пусть $\{\psi_i\colon\ i \in I\}$ — некоторая цепь в у-множестве $(\Psi; \subseteq)$. Рассмотрим отношение $\psi = \bigcup\limits_{i \in I} \psi_i$. Пара (X, a), где $X \in P^*(A)$ и $a \in A$, принадлежит ему тогда и только тогда, когда $\psi_i(X) = a$ для некоторого $i \in I$. Так что ψ будет функцией с $\operatorname{dom}\psi = \bigcup\limits_{i \in I} \operatorname{dom}\psi_i$ и при этом $\psi(X)$ равно значению на X (одному и тому же для всех) частичных функций выбора ψ_i, для которых $X \in \operatorname{dom}\psi_i$. Но тогда $\psi(X) \in X$ для каждого $X \in \operatorname{dom}\psi$, и, значит, ψ — частичная функция выбора на A. При этом $\psi_i \subseteq \psi$, $i \in I$.

Теперь мы видим, что в у-множестве $(\Psi, \subseteq)$ выполняется условие Куратовского — Цорна: каждая цепь имеет верхнюю грань. Следовательно, в $(\Psi, \subseteq)$ существуют максимальные элементы.

Пусть φ — один из них. Покажем, что частичная функция выбора φ является функцией выбора на множестве A.

Предположим противное, т. е. что $\operatorname{dom}\varphi \neq P^*(A)$. Тогда существует непустое подмножество $X \subseteq A$, на котором φ не определена. Выберем произвольным образом элемент $a \in X$ и построим функцию φ^*, полагая

$$\varphi^*(Y) = \begin{cases} \varphi(Y), & \text{если} \quad Y \in \operatorname{dom}\varphi, \\ a, & \text{если} \quad Y = X. \end{cases}$$

Ясно, что φ^* является частичной функцией выбора на A и при этом φ^* строго больше, чем φ в у-множестве $(\Psi, \subseteq)$. Но это невозможно, так как φ — максимальный элемент этого у-множества.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

20. У-множество называется *вполне упорядоченным*, если оно линейно упорядочено и удовлетворяет условию минимальности (и, следовательно, условию обрыва убывающих цепей и условию индуктивности — теорема 1). Вполне упорядоченным является, например, у-множество $(\mathbf{N}, \leqslant)$.

Одним из фундаментальных предложений математики считается

Теорема Цермело. *Всякое непустое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство (Девиде [1]). Пусть A — непустое множество и φ — какая-нибудь функция выбора на нем (теорема 2). Для $X \in P^*(A)$ положим $X^0 = X \setminus \{\varphi(X)\}$.

Подмножество $\mathscr{A}$ множества $P(A)$ назовем отмеченным, если 1°) $A \in \mathscr{A}$, 2°) $X \in \mathscr{A} \Rightarrow X^0 \in \mathscr{A}$, 3°) объединение любого семейства подмножеств, входящих в $\mathscr{A}$, принадлежит $\mathscr{A}$. Например, само $P(A)$ будет отмеченным.

Нетрудно убедиться, что пересечение всех отмеченных подмножеств — обозначим его через $\mathscr{A}_0$ — тоже отмечено. Это наименьшее отмеченное подмножество.

1) *$\mathscr{A}_0$ линейно упорядочено теоретико-множественным включением.*

Предположим противное, т. е. что в $\mathscr{A}_0$ имеются несравнимые элементы (подмножества A). Подмножество X, входящее в $\mathscr{A}_0$, назовем широким, если оно содержит любую пару несравнимых подмножеств, являющихся элементами множества $\mathscr{A}_0$. Например, A — широкое подмножество.

Пусть X_0 будет наименьшим широким подмножеством (т. е. пересечением всех широких подмножеств). Положим

$$\mathscr{X} = \{X \in \mathscr{A}_0 \colon X \diamond X_0\}$$

и покажем, что $\mathscr{X}$ — отмеченное подмножество,

Действительно, 1°) $A \in \mathscr{X}$ и 3°) если $\{X_i \colon i \in I\} \subseteq \mathscr{X}$, то либо все X_i содержатся в X_0, и тогда $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \subseteq X_0$, либо найдется подмножество X_{i_0}, $i_0 \in I$, содержащее X_0, и тогда подавно $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ содержит X_0.

Покажем, что 2°) если $X \in \mathscr{X}$, то $X^0 \in \mathscr{X}$. Нетривиальным здесь будет один случай: когда X_0 содержится в X, но не содержится в X^0. Тогда $\varphi(X) \in X_0$, множества X^0 и X_0 несравнимы и, поскольку X_0 — широкое подмножество, обязательно $X^0 \subset X_0$.

Итак, $\mathscr{X}$ — отмеченное подмножество, содержащееся в наименьшем отмеченном подмножестве $\mathscr{A}_0$. Следовательно, $\mathscr{X} = \mathscr{A}_0$.

Пусть теперь X, Y — произвольные элементы подмножества $\mathscr{A}_0$. Если X и Y несравнимы, то они содержатся в X_0 и, значит, в X_0^0. Но тогда получается, что X_0^0 — широкое подмножество, меньшее, чем X_0, а это противоречит определению подмножества X_0.

2) *У-множество* $(\mathscr{A}_0, \subseteq)$ *удовлетворяет условию максимальности.*

Действительно, если $\{X_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{A}_0$, то $X = \bigcup_{i \in I} X_i \in \mathscr{A}_0$. Если ни одно подмножество X_i не совпадает с X, то все они содержатся в X^0, откуда $X \subseteq X^0$, что невозможно. Значит, каждое непустое у-подмножество из $\mathscr{A}_0$ имеет наибольший элемент.

3) *Отношение* $x \leqslant y \Leftrightarrow \alpha(x) \supseteq \alpha(y)$, *где* $\alpha(t)$ — *наименьшее из* $\mathscr{A}_0$-*множеств, содержащих элемент* $t \in A$, *вполне упорядочивает множество* A.

Каждый элемент множества A лежит в некотором $\mathscr{A}_0$-множестве (например, в A), так что соответствие $x \longmapsto \alpha(x)$ отображает A в $\mathscr{A}_0$. При этом если $X \in \mathscr{A}_0$, то всякое подмножество $Y \in \mathscr{A}_0$, содержащее элемент $\varphi(X)$, должно содержать все подмножество X (иначе $X^0 \| Y$). Следовательно, $X = \alpha(\varphi(X))$, т. е. α — наложение.

Далее, так как $\varphi(\alpha(t)) = t$ для любого $t \in A$, то при $\alpha(x) = \alpha(y)$ будет $x = y$.

Таким образом, α устанавливает дуальный изоморфизм между у-множествами $(A, \leqslant)$ и $(\mathscr{A}_0, \subseteq)$. Значит, $(A, \leqslant)$ линейно упорядочено и удовлетворяет условию минимальности.

Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы Цермело достаточно просто выводится принцип Хаусдорфа, и, таким образом, оба эти предложения оказываются равносильными лемме Куратовского — Цорна и тезису о существовании функции выбора на любом непустом множестве (знаменитая аксиома выбора, см. теорему 2).

21. У-множество $(A, \leqslant)$, в котором для любого двухэлементного подмножества существует верхняя грань, на-

зывается *направленным вверх*. Двойственно определяется *направленное вниз* у-множество, но это понятие используется реже.

22. Пусть $(A, \leqslant)$ — некоторое у-множество и X — его непустое подмножество. Элемент $a \in A$ называется *точной верхней гранью подмножества* X, если a является наименьшей (в смысле упорядоченности в $(A, \leqslant)$) среди всех верхних граней подмножества X. В произвольном у-множестве не все подмножества имеют точную верхнюю грань: данное подмножество может вообще не иметь верхних граней (рис. 3, *а*) или среди его верхних граней может не быть наименьшей (как, например, у множества минимальных элементов на диаграмме рис. 3, *б*).

Точная верхняя грань подмножества X обозначается $\operatorname{Sup} X$ (читается: «супремум X»).

У-множество, в котором любое двухэлементное подмножество (или, проще, любая пара элементов) имеет точную верхнюю грань, называется *верхней полурешеткой* (или, короче, *$\vee$-полурешеткой*, смысл обозначения станет ясным после п. 4 § 2). Понятно, что верхняя полурешетка направлена вверх.

Двойственно вводится понятие *точной нижней грани подмножества* (это его наибольшая нижняя грань) и *нижней полурешетки* (*$\wedge$-полурешетки*) (когда любая пара элементов имеет точную нижнюю грань). Точная нижняя грань подмнжоества X обозначается $\operatorname{Inf} X$ (читается: «инфимум X»).

У-множество, одновременно являющееся верхней и нижней полурешеткой, называется *решеткой* [1]). Таким образом, решетка — это у-множество, в котором любые два элемента имеют точную верхнюю грань и точную нижнюю грань.

У-множество, обладающее тем свойством, что каждое его непустое подмножество имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань, называется *полной решеткой*.

Этой серией определений (поясняющие примеры появятся позже) мы завершаем первый параграф.

§ 2. Решетки

1. Повторим основное определение: решеткой называется у-множество, в котором у любой пары элементов имеется точная (т. е. наибольшая) нижняя грань и точная (т. е. наименьшая) верхняя грань. Среди рассмотренных

[1]) В другой терминологии — *структурой*. Полурешетки называются также *полуструктурами*.

у-множеств решетками будут, например, $(\mathbf{R}, \leqslant)$, $(\mathbf{Z}, \leqslant)$, $(\mathbf{N}, \leqslant)$, $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$, $(\mathbf{N}, |)$, $(\mathbf{N}^*, |)$, $(P(A), \subseteq)$, $(P_0(A), \subseteq)$. Впрочем, для первых четырех у-множеств имеется некоторое простое объединяющее их наблюдение: *всякое линейно упорядоченное множество является решеткой*. Действительно, для пары сравнимых элементов у-множества точной нижней гранью будет меньший из этих элементов, а точной верхней гранью — больший.

2. Пусть $(A, \leqslant)$ — некоторая решетка. Сопоставляя каждой паре элементов $(x, y) \in A \times A$ их точную нижнюю грань $\inf(x, y)$, мы определяем на множестве A бинарную операцию (конечно, $\inf(x, x) = x$). Другая бинарная операция на A задается правилом $(x, y) \longmapsto \sup(x, y)$. Таким образом, с каждой решеткой ассоциируется алгебра с двумя бинарными операциями: $(A, \inf, \sup)$. Из самого определения точных граней следует идемпотентность и коммутативность обеих операций:

$$\inf(x, x) = x = \sup(x, x), \tag{1}$$

$$\inf(x, y) = \inf(y, x), \quad \sup(x, y) = \sup(y, x). \tag{2}$$

Простые рассуждения доказывают ассоциативность

$$\begin{aligned} \inf(x, \inf(y, z)) &= \inf(\inf(x, y), z), \\ \sup(x, \sup(y, z)) &= \sup(\sup(x, y), z). \end{aligned} \tag{3}$$

Действительно, если $\inf(x, \inf(y, z)) = u$, а $\inf(\inf(x, y), z) = v$, то

$$\left.\begin{aligned} u &\leqslant x \\ u &\leqslant \inf(y, z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u &\leqslant x \\ u &\leqslant y \\ u &\leqslant z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u &\leqslant \inf(x, y) \\ u &\leqslant z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \leqslant \inf(\inf(x, y), z) = v$$

и

$$\left.\begin{aligned} v &\leqslant \inf(x, y) \\ v &\leqslant z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v &\leqslant x \\ v &\leqslant y \\ v &\leqslant z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v &\leqslant x \\ v &\leqslant \inf(y, z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \leqslant \inf(x, \inf(y, z)) = u.$$

Итак, $u \leqslant v$ и $v \leqslant u$. В силу антисимметричности порядка, $u = v$. Двойственно доказывается ассоциативность операции sup.

Важнейшую роль в теории решеток играют и следующие *законы поглощения*, которые связывают операции inf и sup:

$$\begin{aligned} \inf(x, \sup(x, y)) &= x, \\ \sup(x, \inf(x, y)) &= x. \end{aligned} \tag{4}$$

(Так как $x \leqslant \sup(x, y)$ для любого y, то всегда $\inf(x, \sup(x, y)) = x$. Двойственные рассуждения доказывают второе равенство.)

Оказывается, рассмотренные свойства являются характеристическими для операций inf и sup в решетке.

Будем говорить, что алгебра $(A, \wedge, \vee)$ с двумя бинарными операциями ассоциирована с решеткой, если на множестве A можно задать порядок $\leqslant$ таким образом, чтобы у-множество $(A, \leqslant)$ было решеткой и при этом чтобы операция inf в этой решетке совпала с заданной на A операцией $\wedge$, а операция sup — с заданной операцией $\vee$.

Теорема 3. *Алгебра $(A, \wedge, \vee)$ с двумя бинарными операциями тогда и только тогда ассоциирована с некоторой решеткой, когда в ней выполняются следующие условия:*

I. 1) $x \wedge x = x$, 2) $x \vee x = x$ (идемпотентность);

II. 1) $x \wedge y = y \wedge x$; 2) $x \vee y = y \vee x$ (коммутативность);

III. 1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, 2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность);

IV. 1) $x \wedge (x \vee y) = x$, 2) $x \vee (x \wedge y) = x$ (законы поглощения).

Доказательство. Необходимость условий теоремы, т. е. выполнимость законов I — IV для операций inf и sup решетки, мы уже доказали.

Достаточность. Пусть в алгебре $(A, \wedge, \vee)$ истинны тождества I — IV.

1) Рассмотрим на множестве A бинарное отношение

$$\omega = \{(x, y): x \wedge y = x\}.$$

Условие I 1) обеспечивает рефлексивность отношения ω.

Далее,

$$(x, y) \in \omega \,\&\, (y, z) \in \omega \Rightarrow x \wedge y = x \,\&\, y \wedge z = y \Rightarrow x \wedge z = \\ = (x \wedge y) \wedge z \overset{\text{III 1}}{=\!=} x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x \Rightarrow (x, z) \in \omega,$$

и, значит, ω транзитивно.

Наконец,

$$(x, y) \in \omega \,\&\, (y, x) \in \omega \Rightarrow x \wedge y = x \,\&\, y \wedge x = y \Rightarrow \\ \Rightarrow x = x \wedge y \overset{\text{II 1}}{=\!=} y \wedge x = y,$$

так что ω антисимметрично.

Таким образом, (A, ω) является упорядоченным множеством.

Теперь, как обычно, вместо $(x, y) \in \omega$ будем писать $x \leqslant y$.

2) Докажем, что у-множество $(A, \leqslant)$ является нижней полурешеткой, в которой $\inf = \wedge$.

В самом деле,

$$(x \wedge y) \wedge x \overset{\text{II 1}}{=\!=} x \wedge (x \wedge y) \overset{\text{III 1}}{=\!=} (x \wedge x) \wedge y \overset{\text{I 1}}{=\!=} x \wedge y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \wedge y \leqslant x,$$
$$(x \wedge y) \wedge y \overset{\text{III 1}}{=\!=} x \wedge (y \wedge y) \overset{\text{I 1}}{=\!=} x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \leqslant y.$$

Это означает, что элемент $x \wedge y$ является нижней гранью для x и y. Если t — другая нижняя грань для x и y, то имеем

$$t \leqslant x \,\&\, t \leqslant y \Rightarrow t \wedge x = t \,\&\, t \wedge y = t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \wedge (x \wedge y) \overset{\text{III 1}}{=\!=} (t \wedge x) \wedge y = t \wedge y = t,$$

откуда $t \leqslant x \wedge y$.

Значит, элемент $x \wedge y$ является наибольшей нижней гранью для x и y.

3) Оказывается, отношение порядка $\leqslant$ можно определить и другим способом. Именно,

$$\omega = \{(x, y)\colon\ x \vee y = y\}.$$

Действительно,

$$(x, y) \in \omega \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow x \vee y =$$
$$= (x \wedge y) \vee y \overset{\text{II 2}}{=\!=} y \vee (x \wedge y) \overset{\text{II 1}}{=\!=} y \vee (y \wedge x) \overset{\text{IV 2}}{=\!=} y,$$

а, с другой стороны,

$$x \vee y = y \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (x \vee y) \overset{\text{IV 1}}{=\!=} x \Rightarrow (x, y) \in \omega.$$

4) Теперь установим, что в у-множестве $(A, \leqslant)$ для любых элементов x, y существует $\sup(x, y)$ и что он совпадает с $x \vee y$.

Действительно,

$$x \wedge (x \vee y) \overset{\text{IV 1}}{=\!=} x \Rightarrow x \leqslant x \vee y,$$
$$y \wedge (x \vee y) \overset{\text{II 2}}{=\!=} y \wedge (y \vee x) = y \Rightarrow y \leqslant x \vee y,$$

так что $x \vee y$ является верхней гранью для x и y.

Предположим, что элемент $t \in A$ тоже будет верхней гранью для x и y в $(A, \leqslant)$. Используя новое выражение для порядка, получаем, что $x \vee t = t$ и $y \vee t = t$, откуда

$$(x \vee y) \vee t \overset{\text{III 2}}{=\!=} x \vee (y \vee t) = x \vee t = t,$$

и, значит, $x \vee y \leqslant t$. Элемент $x \vee y$ является наименьшей верхней гранью для x и y.

Мы показали, что у-множество $(A, \leqslant)$ является верхней полурешеткой и операция sup в ней совпадает с заранее заданной операцией $\vee$.

Теорема доказана.

3. Система тождеств I — IV не является независимой: идемпотентность обеих операций выводится из законов поглощения. В самом деле, применяя к выражению

$$x \wedge (x \vee (x \wedge x))$$

тождество IV 1), получаем x, а вследствие тождества IV 2) оно равно $x \wedge x$. Двойственно получается I 2).

4. Теорема 3 позволяет рассматривать решетку одновременно в двух аспектах: как упорядоченное множество, в котором определены точные грани для всех пар элементов, и как алгебру с двумя идемпотентными, коммутативными и ассоциативными операциями, удовлетворяющими законам поглощения.

Переход от одной формы задания к другой осуществляется, как мы видели, формулой

$$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Рассматривая решетку как алгебру $(A, \wedge, \vee)$, будем называть операцию $\wedge$ *пересечением*, а операцию $\vee$ — *объединением*.

В решетках $(\mathbf{R}, \leqslant)$, $(\mathbf{Z}, \leqslant)$, $(\mathbf{N}, \leqslant)$ и $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$ операция пересечения, как уже отмечалось, состоит в выборе меньшего из двух аргументов, а операция объединения выделяет больший аргумент. В решетках $(\mathbf{N}, |)$ и $(\mathbf{N}^*, |)$ пересечением двух натуральных чисел будет их наибольший общий делитель, а объединением — наименьшее общее кратное. В решетках $(P(A), \subseteq)$ и $(P_0(A), \subseteq)$ пересечение и объединение совпадают с одноименными теоретико-множественными операциями.

Запишем решетки $(\mathbf{R}, \leqslant)$, $(\mathbf{N}, |)$ и $(P(A), \subseteq)$ как алгебры: $(\mathbf{R}, \min, \max)$, $(\mathbf{N}, \text{нод}, \text{нок})$, $(P(A), \cap, \cup)$.

Важным примером решетки является совокупность $E(A)$ всех отношений эквивалентности на множестве A. Точной нижней гранью для двух эквивалентностей является их теоретико-множественное пересечение, а точной верхней гранью — транзитивное замыкание теоретико-множественного объединения. Решетку $E(A)$ называют также решеткой всех разбиений множества A, имея в виду естественную связь между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нем.

5. Для решеток как алгебр обычным образом определяются понятия подрешетки, конгруэнции, прямого произведения, гомоморфизма, изоморфизма, (изоморфного) вложения.

Следующие примеры показывают различие между соответствующими алгебраическими и порядковыми конструкциями для решеток.

Пример 1. Заштрихованные на рис. 5 элементы решетки образуют в ней у-подмножество, являющееся решеткой относительно индуцированного порядка. Но это подмножество не будет подрешеткой указанной решетки: оно не замкнуто относительно операции объединения.

Пример 2. На рис. 6 показано изотонное отображение (порядковый гомоморфизм) четырехэлементной решетки на трехэлементную цепь, не сохраняющее ни одной из решеточных операций.

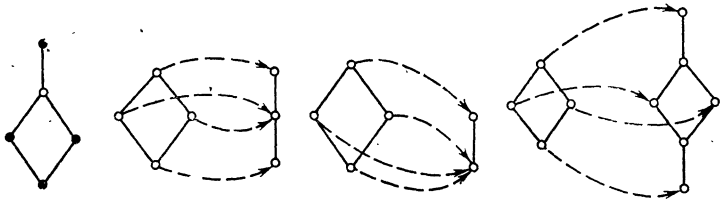

Рис. 5. Рис. 6 Рис. 7. Рис. 8.

Пример 3. Рис. 7 представляет изотонное отображение той же четырехэлементной решетки на двухэлементную решетку, сохраняющее только пересечения. Перевернув рисунок, получим пример изотонного наложения, сохраняющего лишь объединения.

Примеры 2 и 3 показывают, что порядковые гомоморфизмы решеток в общем случае не являются их алгебраическими гомоморфизмами. Зато всякое отображение одной решетки в другую, сохраняющее хотя бы одну из решеточных операций, изотонно, т. е. будет порядковым гомоморфизмом. Например, если отображение φ сохраняет пересечение, то

$$x \leqslant y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) = \\ = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y),$$

и, значит, φ изотонно.

Пример 4. Вложение одного у-множества в другое, не сохраняющее решеточных операций, изображено на рис. 8.

Эта ситуация, кажущаяся особенно неприятной, к счастью, исключается в случае изоморфизмов.

Теорема 4. *Две решетки изоморфны как алгебры тогда и только тогда, когда они изоморфны как у-множества.*

Доказательство. Необходимость. Пусть φ — изоморфизм решетки $(A, \wedge, \vee)$ на некоторую другую решетку. Так как отображение φ взаимно однозначно и изотонно, то остается убедиться в его обратной изотонности. Но, в самом деле,

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \\ = \varphi(x \wedge y) \overset{*}{\Rightarrow} x = x \wedge y \Rightarrow x \leqslant y$$

(в отмеченном звездочкой переходе использована взаимная однозначность отображения φ).

Достаточность. Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ — две решетки и φ — взаимно однозначное, изотонное и обратно изотонное отображение A на B, т. е. порядковый изоморфизм.

Возьмем произвольные элементы $x, y \in A$. В силу изотонности отображения φ элемент $\varphi(x \wedge y)$ решетки B будет нижней гранью для элементов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Пусть b — также нижняя грань для $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ в $(B, \leqslant)$. Так как φ является наложением, то в A найдется элемент a такой, что $\varphi(a) = b$, и такой элемент, конечно, один. Но тогда ($*$ отмечает использование обратной изотонности)

$$\varphi(a) \leqslant \varphi(x) \,\&\, \varphi(a) \leqslant \varphi(y) \overset{*}{\Rightarrow} a \leqslant x \,\&\, a \leqslant y \Rightarrow \\ \Rightarrow a \leqslant x \wedge y \Rightarrow b = \varphi(a) \leqslant \varphi(x \wedge y).$$

Таким образом, $\varphi(x \wedge y)$ будет наибольшей нижней гранью для пары $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, т. е. $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

Двойственно доказывается φ-устойчивость операции объединения.

Пример 5. Применяя доказанную теорему, установим изоморфность решеток $(\mathbf{N}^*$, нод, нок) и $(P_0(A), \cap, \cup)$, где A — счетное множество. Именно, реализуем множество A как множество всех простых чисел (пока никому не удалось выписать явную формулу для этого соответствия, но (Евклид доказал, что) множество простых чисел счетно) и каждому натуральному n, свободному от квадратов, сопоставим совокупность $\varphi(n)$ всех его простых делителей. Отображение φ является порядковым изоморфизмом решеток $(\mathbf{N}^* \mid)$ и $(P_0(A), \subseteq)$.

6. Система аксиом I—IV, определяющая класс всех решеток, замечательна тем, что если в каждой аксиоме

взаимно заменить знаки $\wedge$ и $\vee$, то общая совокупность аксиом останется той же самой. Отсюда вытекает

Принцип двойственности для решеток. *Если некоторый класс решеток можно задать системой аксиом, не изменяющейся при взаимной замене знаков $\wedge$ и $\vee$ во всех аксиомах, и в этом классе истинна формула $\Phi(\wedge, \vee)$, то в нем истинна и двойственная формула, получающаяся из Φ взаимной заменой знаков $\wedge$ и $\vee$.*

Конечно, принцип двойственности для решеток является следствием принципа двойственности для у-множеств: если класс решеток задается системой аксиом, не меняющейся при взаимной замене в каждой аксиоме знаков $\wedge$ и $\vee$ (такая система аксиом называется самодвойственной), то этот класс замкнут относительно дуальных порядковых изоморфизмов.

7. Пусть L — некоторая решетка. *Идеалом* в ней называется непустое подмножество $J \subseteq L$ такое, что

1) если $x \in J$ и $y \leqslant x$, то $y \in J$;

2) если $x, y \in J$, то $x \vee y \in J$.

Заметим, что поскольку в этом определении не участвует операция пересечения, можно считать его и определением *идеала $\vee$-полурешетки.*

Когда решетка имеет наименьший элемент O, этот элемент содержится в каждом идеале решетки, так что подмножество $\{O\}$ является наименьшим ее идеалом. В случае, когда наименьшего элемента в решетке нет, в число ее идеалов договариваются включать пустое подмножество $\varnothing$. Множество L всегда является идеалом решетки L. Это ее наибольший идеал. Все идеалы решетки L, отличные от L, называются ее *собственными идеалами.*

Если зафиксировать некоторый элемент $a \in L$, то подмножество

$$J(a) = \{x \in L\colon\ x \leqslant a\},$$

как нетрудно заметить, будет идеалом. Это — *главный идеал*, соответствующий элементу a. В конечной решетке все идеалы главные, но в общем случае это не так. Например, если множество A бесконечно, то совокупность $P_0(A)$ всех его конечных подмножеств будет неглавным идеалом в решетке $(P(A), \subseteq)$.

Двойственным к понятию идеала решетки является дуальный идеал. Это подмножество F, вместе с каждым своим элементом содержащее и все большие него элементы

и замкнутое относительно операции пересечения. Дуальные идеалы решетки называют еще ее фильтрами.

Собственный идеал J решетки L называется *простым*, если для любых $x, y \in L$ при $x \wedge y \in J$ обязательно $x \in J$ или $y \in J$.

Теорема 5. *Простые идеалы решетки — это в точности полные прообразы нуля при ее гомоморфизмах на двухэлементную решетку.*

Доказательство. 1) Пусть φ: $L \to \{O, I\}$ — гомоморфизм решетки L на двухэлементную решетку (рис. 3, *в*) и $J_0 = \varphi^{-1}(O)$. Если $x \in J_0$ и $y \leqslant x$, то в силу изотонности отображения φ будет $\varphi(y) \leqslant \varphi(x) = O$, откуда $y \in J_0$. Далее, при $x, y \in J_0$ имеем $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) = O \vee O = O$, так что $x \vee y \in J_0$. Итак, J_0 — идеал решетки L. Допустим, что $x \wedge y \in J_0$. Тогда $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) = O$ и, значит, $\varphi(x) = O$ или $\varphi(y) = O$, т. е. $x \in J_0$ или $y \in J_0$. Мы показали, что J_0 — простой идеал.

2) Пусть J_0 — простой идеал решетки L. Определим отображение φ: $L \to \{O, I\}$, полагая для $x \in L$

$$\varphi(x) = \begin{cases} O, & \text{если} \quad x \in J_0, \\ I, & \text{если} \quad x \notin J_0. \end{cases}$$

Если для $x, y \in L$ будет $\varphi(x \wedge y) = O$, т. е. $x \wedge y \in J_0$, то в силу простоты идеала J_0 это означает, что $\varphi(x) = O$ или $\varphi(y) = O$, так что $\varphi(x \wedge y) = O$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = O$, и, следовательно, φ сохраняет пересечения.

Если $\varphi(x \vee y) = O$, т. е. $x \vee y \in J_0$, то это равносильно принадлежности идеалу J_0 обоих элементов x и y. Значит, $\varphi(x \vee y) = O$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \vee \varphi(y) = O$, и, следовательно, φ сохраняет объединения.

8. Собственные идеалы решетки L образуют у-множество $(J_*(L), \subseteq)$ относительно теоретико-множественного включения. Максимальные элементы этого у-множества называются *максимальными идеалами* решетки L. Если решетка L имеет наибольший элемент I, то очевидно, что идеал $J \subseteq L$ тогда и только тогда собственный, когда $I \notin J$.

Теорема 6. *Всякий собственный идеал решетки с* I *содержится в некотором ее максимальном идеале.*

Доказательство. Покажем, что в у-множестве $(J_*(L), \subseteq)$ всех собственных идеалов решетки L с I каждая цепь имеет верхнюю грань, и затем сошлемся на лемму Куратовского — Цорна.

Пусть $\{J_k\colon k \in K\}$ — некоторая цепь собственных идеалов решетки L с I и $J = \bigcup_{k \in K} J_k$. Если $x \in J$, то $x \in J_k$ для некоторого k. Пусть $y \leqslant x$. Тогда $y \in J_k \subseteq J$. Далее, если $x, y \in J$, то $x \in J_k$ и $y \in J_l$ для некоторых $k, l \in K$. Но по условию $J_k \diamond J_l$ в у-множестве $(J_*(L), \subseteq)$. Пусть, например, $J_k \subseteq J_l$. Тогда $x, y \in J_l$, а так как J_l — идеал, то $x \vee y \in J_l \subseteq J$. Остается проверить, что идеал J — собственный, т. е. что $\mathrm{I} \notin J$. Но это очевидно, так как элемент I не входит ни в одно из объединяемых подмножеств. Идеал J и будет верхней гранью цепи $\{J_k\colon k \in K\}$ в у-множестве $(J_*(L), \subseteq)$. По лемме Куратовского — Цорна каждый элемент этого у-множества содержится в некотором максимальном элементе.

Теорема доказана.

Заметим, что поскольку в доказательстве не участвует операция пересечения, теорема справедлива и для идеалов произвольной $\vee$-полурешетки с I.

9. Когда решетка конечна и имеет небольшое число элементов, удобным способом ее задания является диаграмма. Чем более сложно устроена решетка, тем большую потребность мы испытываем в каком-нибудь наглядном «геометрическом» представлении о ней или о ее фрагментах, но обращение к диаграммам в этих случаях мало помогает интуиции. Другие возможности для этого дает

Теорема 7. *Всякую решетку можно с сохранением всех точных нижних граней вложить в упорядоченное включением множество всех подмножеств некоторого множества.*

Доказательство. Пусть $(A, \leqslant)$ — произвольная решетка. Рассмотрим отображение $\varphi\colon A \to P(A)$, сопоставляющее каждому элементу $x \in A$ главный идеал $J(x) \in P(A)$. Нужно доказать, что φ 1) взаимно однозначно, 2) изотонно, 3) обратно изотонно, 4) сохраняет пересечения. В этом порядке и будем устанавливать свойства отображения φ.

1) Пусть $\varphi(x) = \varphi(y)$. Так как $\varphi(x) = J(x)$ и всегда $x \in J(x)$ (в силу рефлексивности порядка), то $x \in J(y)$ и $y \in J(x)$. Но тогда одновременно $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, откуда $x = y$ (антисимметричность).

2) Пусть $x \leqslant y$, т. е. $x \in J(y)$. В этом случае если $z \in J(x)$, то $z \leqslant x \leqslant y$, и, значит, $z \in J(y)$ (транзитивность). Таким образом, $\varphi(x) = J(x) \subseteq J(y) = \varphi(y)$.

3) Если наоборот $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$, т. е. $J(x) \subseteq J(y)$, то $x \in J(y)$ (так как $x \in J(x)$), и, значит, $x \leqslant y$.

4) Поскольку в решетке $(P(A), \subseteq)$ точная нижняя грань семейства элементов (ими являются подмножества множества A), очевидно, совпадает с их теоретико-множественным пересечением, доказываемое свойство отображения φ выражается равенством $\varphi(\operatorname{Inf}\{x_i\colon i \in I\}) = \bigcap_{i \in I} \varphi(x_i)$.

Докажем его. В самом деле,

$$z \in \varphi(\operatorname{Inf}\{x_i\}) \Leftrightarrow z \in J(\operatorname{Inf}\{x_i\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z \leqslant \operatorname{Inf}\{x_i\colon i \in I\} \Leftrightarrow (\forall i \in I)(z \leqslant x_i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(z \in J(x_i)) \Leftrightarrow z \in \bigcap_{i \in I} J(x_i) \Leftrightarrow z \in \bigcap_{i \in I} \varphi(x_i).$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы можем считать элементы любой решетки подмножествами некоторого множества A, а операцию пересечения в ней отождествить с теоретико-множественным пересечением в A. При этом наибольший элемент I решетки (если он существует) будет представлен как само множество A (в теореме 7 $\varphi(\mathrm{I}) = J(\mathrm{I}) = A$),

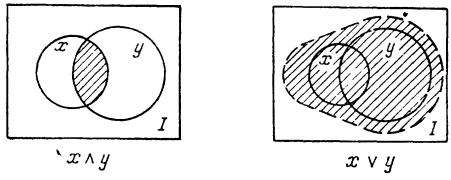

Рис. 9.

а наименьшему (если он есть) элементу O договариваются сопоставлять пустое подмножество множества A (на самом деле в теореме 7 $\varphi(\mathrm{O}) = J(\mathrm{O}) = \{\mathrm{O}\}$, но точка O, как уже отмечалось, содержится во всех идеалах решетки, и мы можем ее удалить, не нарушая отношение включения между идеалами).

Теперь можно пользоваться схемами, подобными эйлеровым диаграммам (рис. 9). Разница будет в рисунке для объединения двух элементов: в представлении, описанном в теореме 7, $\varphi(x \vee y) \supseteq \varphi(x) \cup \varphi(y)$ (действительно,

$$z \in \varphi(x) \cup \varphi(y) = J(x) \cup J(y) \Rightarrow z \in J(x) \text{ или}$$
$$z \in J(y) \Rightarrow z \leqslant x \text{ или}$$
$$z \leqslant y \Rightarrow z \leqslant x \vee y \Rightarrow z \in J(x \vee y) = \varphi(x \vee y))$$

но равенства в общем случае нет (нетрудно заметить, что оно имеет место тогда и только тогда, когда x и y сравнимы).

На схемах элементы решетки изображаются в виде связных выпуклых областей. Название элемента пишется внутри соответствующей области у ее границы.

§ 3. Модулярные решетки

1. Решетка L называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ имеет место импликация

V. $x \leqslant y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$,

называемая *модулярным законом*.

Заметим, что при $x \leqslant y$ в любой решетке $x \vee (y \wedge z) \leqslant \leqslant y \wedge (x \vee z)$, так что смысл модулярного закона — в провозглашении противоположного неравенства.

Изображая ситуацию, описываемую модулярным законом, на схеме (рис. 10), мы видим, что элементы, содержащиеся в z, но не содержащиеся в y, не влияют на величину объединения $x \vee (y \wedge z)$.

2. Из числа встречавшихся нам решеток модулярными будут все линейно упорядоченные решетки, а также решетки $(\mathbf{N}, |)$, $(P(A), \subseteq)$ и их подрешетки (впоследствии мы увидим, что во всех этих случаях имеет место более сильное условие дистрибутивности).

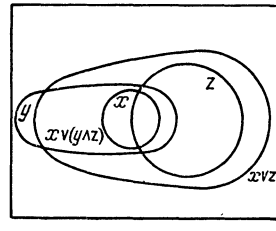

Рис. 10.

Покажем, что *решетка нормальных подгрупп группы модулярна*. (Этот результат, установленный Дедекиндом в 1900 году, на многие годы закрепил за модулярными решетками другое название: дедекиндовы решетки.)

Пусть X, Y, Z — нормальные подгруппы группы G, причем $X \subseteq Y$. Как известно, объединение $U \vee V$ двух нормальных подгрупп совпадает с их произведением UV, так что нам нужно установить справедливость включения $Y \cap XZ \subseteq X(Y \cap Z)$. Но, в самом деле,

$$t \in Y \cap XZ \Rightarrow t \in Y \,\&\, t = xz \,\&\, x \in X \,\&\, z \in Z \overset{z = x^{-1}t \in Y}{\Rightarrow}$$

$$\overset{z = x^{-1}t \in Y}{\Rightarrow} t = xz \,\&\, x \in X \,\&\, z \in Y \cap Z \Rightarrow t \in X(Y \cap Z),$$

что и доказывает требуемое включение.

3. Не всякая решетка модулярна. Так, на четырехэлементном множестве $\{1, 2, 3, 4\}$ три разбиения с единственными нетривиальными классами соответственно $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ и $\{2, 3, 4\}$ вместе с отношением равенства и уни-

версальным отношением образуют решетку, диаграмма которой изображена на рис. 11. Эта решетка не модулярна — три средние элемента нарушают модулярный закон. Абстрактная решетка с такой диаграммой имеет стандартное обозначение N_5 («пятиугольник N_5»).

Следующий критерий является основным средством проверки модулярности решетки.

Теорема 8. *Решетка модулярна тогда и только тогда, когда в ней нет подрешеток, изоморфных решетке N_5.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что решетка N_5 не модулярна, а подрешетка модулярной решетки, конечно же, должна быть модулярной. Поэтому не будут, например, модулярными решетки, изображенные на рис. 2, 4, *в*, 24, 27.

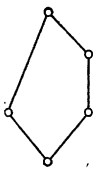

Рис. 11.

Достаточность. Предположим, что решетка L не модулярна. Тогда в ней найдутся элементы x, y, z такие, что $x \leqslant y$, но $x \vee (y \wedge z) < y \wedge (x \vee z)$. Покажем, что элементы $y \wedge z$, $x \vee (y \wedge z)$, $y \wedge (x \vee z)$, z, $x \vee z$ образуют запрещенную подрешетку N_5.

В самом деле, $y \wedge z < z < x \vee z$ и одновременно $y \wedge z < x \vee (y \wedge z) < y \wedge (x \vee z) < x \vee z$, поскольку допустив замену первого, второго, третьего или пятого знака $<$ равенством, мы получим $x \leqslant z$ или $z \leqslant y$, откуда сразу следует модулярность.

Далее,

$$x \vee z = (x \vee z) \vee z \leqslant (x \vee (y \wedge z)) \vee z \leqslant$$
$$\leqslant (y \wedge (x \vee z)) \vee z \leqslant (x \vee z) \vee z = x \vee z,$$

и, значит, элементы $x \vee (y \wedge z)$ и $y \wedge (x \vee z)$ оба дают в объединении с z элемент $x \vee z$.

Кроме того,

$$y \wedge z = (y \wedge z) \wedge z \leqslant (x \vee (y \wedge z)) \wedge z \leqslant (y \wedge (x \vee z)) \wedge z =$$
$$= y \wedge ((x \vee z) \wedge z) = y \wedge z,$$

так что $x \vee (y \wedge z)$ и $y \wedge (x \vee z)$ в пересечении с z дают элемент $y \wedge z$. Этим завершается доказательство.

4. Из теоремы 8 следует, что класс всех модулярных решеток замкнут относительно дуальных изоморфизмов и, следовательно, *к модулярным решеткам применим принцип двойственности.*

5. Модулярный закон равносилен тождеству

$$x \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Действительно, так как всегда $x \leqslant x \vee y$, то, заменяя в модулярном законе y на $x \vee y$, получаем указанное тождество. С другой стороны, если в решетке выполняется это тождество, то она модулярна, поскольку при $x \leqslant y$, т. е. при $x \vee y = y$, тождество превращается в заключение импликации, выражающей модулярный закон.

Таким образом, модулярные решетки образуют эквациональный класс, или многообразие решеток. Следовательно, *любой гомоморфный образ и любая подрешетка модулярной решетки модулярны и прямое произведение модулярных решеток является модулярной решеткой.*

§ 4. Дистрибутивные решетки

1. Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество

VI 1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

называемое *дистрибутивным законом.*

Заметим, что в любой решетке

$$x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

так что смысл дистрибутивного закона состоит в провозглашении противоположного неравенства.

2. Легко заметить, что модулярный закон является ослабленной формой дистрибутивного закона VI 1) и, следовательно, *всякая дистрибутивная решетка модулярна.*

3. Для проверки того, что всякая линейно упорядоченная решетка дистрибутивна, формально нужно рассмотреть все шесть случаев сравнимости для трех элементов x, y, z. Но в четырех из них — когда $x \leqslant y$ или $x \leqslant z$ — левая часть дистрибутивного закона обращается в x, поскольку $x \leqslant y \vee z$, а правая часть тоже равна x, в силу закона поглощения IV 2).

В двух оставшихся случаях $x \geqslant y$ и $x \geqslant z$, так что левая часть дистрибутивного тождества равна $y \vee z$, но и правая часть тоже совпадает с $y \vee z$.

4. Из встречавшихся уже решеток дистрибутивными будут все цепи, а также решетки $(P(A), \cap, \cup)$ и $(\mathbf{N}$, нод, нок). Если выполнимость дистрибутивного закона для теоретико-множественных операций можно считать известной, то соотношение

$$\text{нод}(x, \text{нок}(y, z)) = \text{нок}(\text{нод}(x, y), \text{нод}(x, z))$$

(для любых трех натуральных чисел x, y, z) требует некоторой мотивировки.

Используя каноническое представление чисел, запишем

$$x=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}, \quad y=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}, \quad z=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\gamma_i},$$

считая, что показатели степеней могут равняться нулю (если соответствующего простого не будет в разложении данного числа). Тогда, как нетрудно понять,

$$\text{нод}(x, \text{нок}(y, z))=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))},$$

а

$$\text{нок}(\text{нод}(x, y), \text{нод}(x, z))=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))}$$

Но числа α_i, β_i, γ_i являются элементами линейно упорядоченной решетки неотрицательных целых чисел, в которой (как во всякой цепи) min и max являются соответственно пересечением и объединением. Так что нужное нам равенство

$$\min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))=\max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$$

представляет собой не что иное, как дистрибутивный закон, а он выполняется во всех линейно упорядоченных решетках.

Впоследствии мы увидим, что любая конечная дистрибутивная решетка вложима в решетку (**N**, нод, нок).

5. Не всякая модулярная решетка дистрибутивна. Рассмотрим, например, четверную группу Клейна (четыре упорядоченные пары, составленные из чисел 1 и —1, с покомпонентным умножением). Она абелева, и потому все ее подгруппы нормальны. Следовательно, образуемая ими решетка (рис. 12) модулярна (мы ссылаемся на п. 2 § 2). Но она не дистрибутивна: дистрибутивный закон нарушается для трех ее атомов.

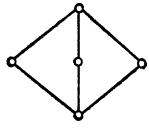

Рис. 12.

Абстрактная решетка с диаграммой на рис. 12 имеет стандартное обозначение M_3 («ромб M_3»). Заметим, что M_3 реализуется также как решетка всех разбиений трехэлементного множества.

Следующий критерий является основным средством проверки дистрибутивности (или, скорее, недистрибутивности) решетки.

Теорема 9. *Модулярная решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней нет подрешеток, изоморфных решетке M_3.*

Доказательство. Условие теоремы очевидным образом необходимо.

Достаточность. Пусть решетка L модулярна и не содержит M_3 в качестве подрешетки. Для произвольных $x, y, z \in L$ рассмотрим следующие пять элементов:

$$a=(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z),$$
$$b=(y \wedge (z \vee x)) \vee (z \wedge x),$$
$$c=(z \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge y),$$
$$u=(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x),$$
$$v=(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Покажем, что $a \vee b=b \vee c=c \vee a=v$ и $a \wedge b=b \wedge c= =c \wedge a=u$.

Имеем

$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (z \vee x))=$

(модулярный закон с учетом неравенства $y \wedge (z \vee x) \leqslant y \vee z$)

$(y \vee z) \wedge ((y \wedge (z \vee x)) \vee x)=$

(модулярный закон с учетом неравенства $x \leqslant z \vee x$)

$(y \vee z) \wedge ((z \vee x) \wedge (x \vee y))=v.$

Отсюда сразу следует, что $a \vee b=v$ и, в силу симметрии, $b \vee c=c \vee a=v$.

Учитывая модулярный закон и очевидное неравенство $y \wedge z \leqslant y \vee z$, получаем другое выражение для a — двойственное по отношению к исходному:

$$a=(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z).$$

Аналогично

$$b=(y \vee (z \wedge x)) \wedge (z \vee x),$$
$$c=(z \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y).$$

Используя теперь принцип двойственности для модулярных решеток, получим, что $a \wedge b=b \wedge c=c \wedge a=u$ (поскольку u двойственно для v).

Таким образом, если элементы a, b, c попарно различны, мы построили в L подрешетку $\{u, a, b, c, v\}$, изоморфную ромбу M_3. Это невозможно, и, значит, $a=b= =c=u=v$.

Но тогда

$$x \wedge (y \vee z) \leqslant a=u \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

и следовательно, в L выполняется дистрибутивный закон.

Следствие. *Решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней нет подрешеток, изоморфных решеткам M_3 и N_5.*

6. Поскольку обе решетки M_3 и N_5 являются самодвойственными (дуально изоморфными себе), из теоремы 9 следует, что класс дистрибутивных решеток замкнут относительно дуальных изоморфизмов и, следовательно, *к дистрибутивным решеткам применим принцип двойственности.*

Отсюда получается, в частности, что во всякой дистрибутивной решетке объединение дистрибутивно относительно пересечения, т. е. истинно двойственное для VI 1) тождество.

VI 2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

7. Класс дистрибутивных решеток определяется тождествами, т. е. представляет собой многообразие. Поэтому *любой гомоморфный образ и любая подрешетка дистрибутивной решетки дистрибутивны и прямое произведение дистрибутивных решеток является дистрибутивной решеткой.*

Используя эти и другие общеалгебраические факты, можно получить следующий замечательный результат, усиливающий для дистрибутивных решеток теорему 7.

Теорема Биркгофа. *Каждая дистрибутивная решетка вкладывается в решетку всех подмножеств подходящего множества.*

Доказательство. Согласно теореме Биркгофа из универсальной алгебры, всякая алгебра любого многообразия изоморфна подходящему подпрямому произведению подпрямо неразложимых алгебр из этого многообразия. При этом алгебра подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда в ней существует наименьшая нетривиальная (т. е. отличная от тождественной) конгруэнция. Мы сначала докажем, что в многообразии дистрибутивных решеток подпрямо неразложимая решетка не может иметь более двух элементов, а затем установим изоморфизм между произвольным прямым произведением двухэлементных решеток и решеткой всех подмножеств подходящего множества.

1) Пусть дистрибутивная решетка L содержит элемент a, отличный от O и I. Рассмотрим на L отношения

$$\theta_1 = \{(x, y)\colon x \wedge a = y \wedge a\} \quad \text{и} \quad \theta_2 = \{(x, y)\colon x \vee a = y \vee a\}.$$

Если $(x, y) \in \theta_1$ и $(u, v) \in \theta_1$, то

$$(x \wedge u) \wedge a = (x \wedge a) \wedge (u \wedge a) = (y \wedge a) \wedge (v \wedge a) = (y \wedge v) \wedge a,$$
$$(x \vee u) \wedge a = (x \wedge a) \vee (u \wedge a) = (y \wedge a) \vee (v \wedge a) = (y \vee v) \wedge a,$$

т. е. отношение θ_1 устойчиво относительно операций пересечения и объединения, и значит, является конгруэнцией решетки L.

Аналогично доказывается, что и θ_2 — конгруэнция.

Далее,

$$(x, y) \in \theta_1 \cap \theta_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x, y) \in \theta_1 \,\&\, (x, y) \in \theta_2 \Rightarrow x \wedge a = y \wedge a \,\&\, x \vee a = y \vee a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = x \wedge (x \vee a) = x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) =$$
$$= (x \wedge y) \vee (y \wedge a) = (x \wedge y) \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y =$$
$$= (y \vee a) \wedge y = y,$$

т. е. $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$ (отношение равенства).

Это означает, что на решетке L нет наименьшей нетривиальной конгруэнции и, следовательно, L подпрямо разложима.

Таким образом, каждая дистрибутивная решетка вкладывается в подходящее прямое произведение двухэлементных решеток.

2) Пусть $\{L_s\colon s \in S\}$ — некоторый произвольный набор двухэлементных решеток. Элементами прямого произведения $\Pi = \prod\limits_{s \in S} L_s$ являются двоичные (т. е. составленные из нулей и единиц) векторы, компоненты которых нумерованы элементами множества S (читатель без труда переведет эти условные выражения в точные математические слова). Сопоставим каждому такому вектору p его носитель $\varphi(p)$ — подмножество множества S, состоящее из номеров ненулевых компонент этого вектора. Очевидно, что так построенная функция φ взаимно однозначно отображает решетку Π на решетку $(P(S), \subseteq)$ (каждое подмножество множества S является носителем одного и только одного вектора из Π) и при этом $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q)$ и $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q)$.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, в частности, что в рассуждениях, связанных с дистрибутивными решетками, в качестве схем можно использовать эйлеровы диаграммы для теоретико-множественных операций.

Интересный факт констатирует и другое вытекающее из теоремы Биркгофа

Следствие. *Всякая конечная дистрибутивная решетка вложима в упорядоченную делимостью решетку натуральных чисел.*

Доказательство. Поскольку конечная алгебра изоморфна подпрямому произведению конечного числа

подпрямо неразложимых алгебр, то для конечной дистрибутивной решетки L решетку $(P(S), \subseteq)$, в которую ее вкладывает конструкция теоремы Биркгофа, тоже можно считать конечной. Но, как мы видели (пример 5 § 2), решетка $(P(S), \subseteq)$ для конечного S вкладывается в решетку $(\mathbf{N}^*, |)$ натуральных чисел, свободных от квадратов, а значит, в решетку $(\mathbf{N}$, нод, нок$)$.

Как же осуществить представление конечной дистрибутивной решетки натуральными числами? Делается это индуктивно следующим образом (Бартолоцци [1]). Наименьшему элементу O решетки сопоставляется число 1, а ее атомам $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — первые n простых чисел. Пусть натуральные числа приписаны всем элементам высоты h. Если элемент a высоты $h+1$ покрывает несколько элементов меньшей высоты, мы приписываем ему число, равное наименьшему общему кратному всех чисел, соответствующих элементам, которые a покрывает. Если элемент a покрывает точно один элемент, обозначенный, например, числом k, то меткой для a будет произведение kp, где p — первое из еще не использованных простых чисел. Пример такого представления показан на рис. 13.

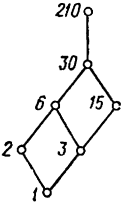

Рис. 13.

ГЛАВА ВТОРАЯ

§ 1. Решетки с дополнениями

1. *Дополнением* элемента x в решетке с O и I называется такой элемент y, что

$$x \wedge y = \mathrm{O}, \quad x \vee y = \mathrm{I}.$$

Решетка, в которой каждый элемент имеет хотя бы одно дополнение, называется *решеткой с дополнениями*. Если каждый элемент решетки обладает в точности одним дополнением, то такую решетку называют *решеткой с единственными дополнениями*.

Решетки, изображенные на рис. 2, 3, *в—д*, 4, *в*, 11, 12, 27, являются решетками с дополнениями. При этом диаграммы на рис. 3, *в—д* изображают решетки с единственными дополнениями. В решетке на рис. 5 незаштрихованный элемент не имеет дополнений. Дополнений не имеют и все элементы решетки на рис. 13, отличные от наименьшего и наибольшего элементов.

Классический пример решетки с дополнениями представляет собой решетка $(P(A), \subseteq)$: дополнением подмножества X здесь будет его теоретико-множественное дополнение X', и это единственное дополнение для X.

Из теоремы Биркгофа следует что *каждая дистрибутивная решетка вложима в дистрибутивную решетку с единственными дополнениями*.

2. Класс всех решеток с дополнениями и его подкласс — совокупность всех решеток с единственными дополнениями — оба замкнуты относительно дуальных изоморфизмов. Для них справедлив принцип двойственности.

3. Решетка с O называется *атомной*, если каждый ее ненулевой элемент содержит атом. Например, всякая решетка, удовлетворяющая условию обрыва убывающих цепей, будет атомной.

Критерий модулярности (теорема 8) для атомных решеток с дополнениями существенно упрощается.

Теорема Маклафлина. *Если атомная решетка с дополнениями L не содержит в качестве подрешетки пятиугольник N_5, наименьший и наибольший элементы которого совпадают с* O *и* I *решетки L, то L модулярна.*

Доказательство. Условие теоремы означает, что никакой элемент решетки L не имеет двух различных сравнимых дополнений.

Доказательство разбивается на несколько этапов.

Через x^* будем обозначать произвольное фиксированное дополнение элемента x.

1) *Каждый элемент решетки L содержится в некотором дуальном атоме.*

Пусть $x \in L$ — произвольный элемент. Ясно, что не все атомы содержатся в x, ибо иначе никакое дополнение x^* элемента x не содержало бы атомов, а решетка L по условию атомная.

Покажем, что если атом p не содержится в x, то элемент $x \vee (p \vee x)^*$ будет дуальным атомом. Действительно, $p \vee (x \vee (p \vee x)^*) = (p \vee x) \vee (p \vee x)^* = \mathrm{I}$. Кроме того, p не содержится в $x \vee (p \vee x)^*$ (иначе x и $p \vee x$ были бы различными сравнимыми дополнениями для элемента $(p \vee x)^*$), и, следовательно, $p \wedge (x \vee (p \vee x)^*) = \mathrm{O}$. Таким образом, $x \vee (p \vee x)^*$ является дополнением для атома p. Если теперь $u > x \vee (p \vee x)^*$ и $p \| u$, то u будет тоже дополнением для p. В силу единственности сравнимых дополнений, элемент $x \vee (p \vee x)^*$ — дуальный атом, и он содержит x.

2) Теперь мы видим, что *класс всех решеток, удовлетворяющих условию теоремы, замкнут относительно дуальных изоморфизмов и, значит, в нем выполняется принцип двойственности.*

Далее, каждый четный пункт доказательства получается по принципу двойственности из предыдущего нечетного.

3) *Каждый отличный от* O *элемент решетки L является точной верхней гранью некоторого множества атомов.*

Пусть элемент $x_0 \leqslant x$, являющийся верхней гранью множества всех атомов, содержащихся в элементе x, отличен от x. Каково бы ни было дополнение x_0^* элемента x_0, обязательно $x_0^* \wedge x \neq \mathrm{O}$ (иначе у x_0^* было бы два различных сравнимых дополнения: x_0 и x). Так как решетка L атомная, найдется атом p, содержащийся в $x_0^* \wedge x < x$. Но этот атом не содержится в x_0, что невозможно.

4) *Каждый отличный от* I *элемент решетки* L *является точной нижней гранью некоторого множества дуальных атомов.*

5) *Если* p — *атом, не содержащийся в* x, *то элемент* $x \vee p$ *покрывает* x.

Как было показано, каждый элемент вида $x \vee (x \vee p)^*$ является дуальным атомом (когда p не содержится в x). Рассмотрим элемент $y = (x \vee (x \vee p)^*) \wedge (x \vee p)$. Так как $x \leqslant y \leqslant x \vee (x \vee p)^*$, то $y \vee (x \vee p)^* = x \vee (x \vee p)^*$. Если $y < u \leqslant x \vee p$, то u содержит атом q, не содержащийся в $x \vee (x \vee p)^*$, откуда

$$(x \vee p)^* \vee u \geqslant (x \vee p)^* \vee y \vee q = (x \vee (x \vee p)^*) \vee q = \mathrm{I},$$

и, значит, элемент u будет дополнением для $(x \vee p)^*$. В силу единственности сравнимых дополнений, $u = x \vee p$ и, следовательно, элемент $x \vee p$ покрывает y.

Покажем, что $y = x$. Очевидно, что $y^* \wedge (x \vee p) \neq \mathrm{O}$ и $x \vee (y^* \wedge (x \vee p)) \leqslant x \vee p$ Так как $y^* \wedge (x \vee p)$ содержит некоторый атом q, не входящий в $x \vee (x \vee p)^*$ (иначе было бы $y^* \wedge (x \vee p) \leqslant x \vee (x \vee p)^*$, откуда $y^* \wedge (x \vee p) \leqslant (x \vee (x \vee p)^*) \wedge \wedge (x \vee p) = y$, что невозможно), то

$$(x \vee p)^* \vee (x \vee (y^* \wedge (x \vee p))) \geqslant ((x \vee p)^* \vee x) \vee q = \mathrm{I},$$

и допустив строгое неравенство $x \vee (y^* \wedge (x \vee p)) < x \vee p$, мы нашли бы для $(x \vee p)^*$ два сравнимых дополнения. Значит, $x \vee (y^* \wedge (x \vee p)) = x \vee p$, откуда

$$x \vee y^* = x \vee ((y^* \wedge (x \vee p)) \vee y^*) = (x \vee (y^* \wedge (x \vee p))) \vee y^* = \\ = (x \vee p) \vee y^* \geqslant y \vee y^* = \mathrm{I},$$

и если $y \neq x$, то у элемента y^* будет два сравнимых дополнения: x и y. Итак, $y = x$ и, следовательно, элемент $x \vee p$ покрывает x.

6) *Если* α — *дуальный атом, не содержащий* x, *то* $x \wedge \alpha$ *покрывается элементом* x.

7) *Если* $x < y$, *то* $x \vee (x^* \wedge y) = y$.

Действительно, пусть p — произвольный атом, не содержащийся в x, но содержащийся в y. Согласно 5), элемент $x \vee p$ покрывает x. Так как элемент $(x^* \wedge y) \wedge (x \vee p)$ отличен от O (поскольку он в силу неравенства $x \vee p \leqslant y$ совпадает с $x^* \wedge (x \vee p)$), то найдется атом $q \leqslant (x^* \wedge y) \wedge \wedge (x \vee p)$. Тогда $q \vee x = p \vee x$, и, значит, $p \leqslant x \vee q \leqslant x \vee \vee (x^* \wedge y)$. Вследствие 3), $y \leqslant x \vee (x^* \wedge y)$, а противоположное неравенство очевидно.

8) *Если* $x > y$, *то* $x \wedge (x^* \vee y) = y$.

9) *Решетка* L *модулярна.*

Если решетка L не модулярна, она содержит в качестве подрешетки пятиугольник N_5. Пусть его образуют элементы x, u, v, w, y, где $x<u<v<y$, $x<w<y$. Покажем, что элемент $(x^* \wedge w) \vee y^*$, где x^* и y^* — какие-то дополнения соответствующих элементов, имеет два сравнимых дополнения: u и v.

Действительно, вследствие 7), $x \vee (x^* \wedge w) = w$, а, согласно 8), $y \wedge ((x^* \wedge w) \vee y^*) = x^* \wedge w$ (понятно, что $y > w \geqslant x^* \wedge w$).

Используя эти равенства, получаем

$$u \wedge ((x^* \wedge w) \vee y^*) = (u \wedge y) \wedge ((x^* \wedge w) \vee y^*) = \\ = u \wedge (y \wedge ((x^* \wedge w) \vee y^*)) = u \wedge x^* \wedge w = (u \wedge w) \wedge x^* = \\ = x \wedge x^* = \mathrm{O},$$

$$u \vee ((x^* \wedge w) \vee y^*) = (u \vee x) \vee ((x^* \wedge w) \vee y^*) = \\ = u \vee (x \vee ((x^* \wedge w) \vee y^*)) = u \vee w \vee y^* = y \vee y^* = \mathrm{I},$$

т. е. u является дополнением для элемента $(x^* \wedge w) \vee y^*$. Заменяя в последних выкладках u на v, получаем, что и v будет дополнением для того же $(x^* \wedge w) \vee y^*$. Мы вступили в противоречие с условием теоремы, и, следовательно, решетка L не может не быть модулярной.

Теорема доказана.

Из теоремы Маклафлина следует, что атомная решетка с единственными дополнениями модулярна. Впоследствии будет установлена ее дистрибутивность (теорема Биркгофа — Уорда).

4. Оказывается, в дистрибутивных решетках нет необходимости выделять требование о единственности дополнений.

Теорема 10. *Дистрибутивная решетка с дополнениями является решеткой с единственными дополнениями.*

Доказательство. Пусть в дистрибутивной решетке с O и I элементы y_1 и y_2 являются дополнениями для некоторого элемента x. Тогда

$$y_1 = y_1 \wedge \mathrm{I} = y_1 \wedge (x \vee y_2) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) = \mathrm{O} \vee (y_1 \wedge y_2) = \\ = (x \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge y_2 = \mathrm{I} \wedge y_2 = y_2.$$

§ 2. Булевы алгебры

1. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*. Как показывает теорема 10, *всякая булева решетка является решеткой с единственными дополнениями*. На рис. 3, *в—д* представлены диаграммы булевых решеток.

Из I.4.6. и II.1.2[1]) следует, что *для класса булевых решеток справедлив принцип двойственности.*

2. Поскольку в булевой решетке L каждый элемент a имеет однозначно определенное дополнение, которое стандартно обозначается a', то отображение $x \longmapsto x'$ решетки L в (на самом деле, на) себя можно рассматривать как унарную операцию на множестве L. Булеву решетку в сигнатуре $(\bigwedge, \bigvee, ', O, I)$ называют *булевой алгеброй.*

Первый пример — двоичная булева алгебра логики: двухэлементное множество $\{0, 1\}$ с заданными на нем логическими операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (рис. 3, *в*).

Булеву алгебру образуют и случайные события, связанные с некоторым экспериментом. Мы не различаем события, которые в данном эксперименте появляются только одновременно, и вводим для событий три операции: умножение AB (одновременное появление A и B), сложение $A+B$ (наступление хотя бы одного из данных событий A, B), переход $A \longmapsto \bar{A}$ к противоположному (наступающему только при непоявлении данного события) событию. Кроме того, фиксируются невозможное (никогда не наступающее) событие $\varnothing$ и достоверное (всегда наступающее при проведении данного эксперимента) событие Ω.

Простые рассуждения показывают, что совокупность всех случайных событий, связанных с данным экспериментом, является булевой алгеброй относительно операций $\cdot$, $+$, $^-$, $\varnothing$, Ω (последние две операции — нульарные).

3. Классический пример булевой алгебры дает совокупность всех подмножеств некоторого (непустого) множества A с теоретико-множественными операциями: $(P(A), \cap, \cup, ', \varnothing, A)$.

Пусть A — некоторое множество и $\mathscr{A}$ — совокупность его подмножеств, удовлетворяющая следующим условиям:

1) если $X, Y \in \mathscr{A}$, то $X \cap Y \in \mathscr{A}$ и $X \cup Y \in \mathscr{A}$;
2) если $X \in \mathscr{A}$, то $X' \in \mathscr{A}$;
3) $\varnothing \in \mathscr{A}$, $A \in \mathscr{A}$.

Другими словами, $\mathscr{A}$ является непустой частью множества $P(A)$, замкнутой относительно теоретико-множественных пересечения, объединения, взятия дополнения и нульарных операций, фиксирующих $\varnothing$ и A, т. е. является подалгеброй булевой алгебры $(P(A), \cap, \cup, ', \varnothing, A)$.

Поскольку подрешетка дистрибутивной решетки дистрибутивна, $(\mathscr{A}, \cap, \cup, ', \varnothing, A)$ будет булевой алгеброй.

---

[1]) I.4.6 означает пункт 6 в § 4 главы I. При ссылках внутри главы ее номер опускается, а перед номером параграфа ставится знак §.

Булева алгебра такого вида называется *булевой алгеброй множеств*.

4. Кроме естественных решеточных свойств, для операций булевой алгебры имеют место еще следующие важные соотношения:

1) $(x')' = x$ (*инволютивность дополнения*);

2) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ (*законы Де Моргана*).

Инволютивность операции дополнения сразу следует из единственности дополнений.

Докажем первый из законов Де Моргана (другой получается по принципу двойственности). В проводимых выкладках будем свободно пользоваться непосредственно вытекающими из определения свойствами булевых алгебр. Итак,

$$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = ((x \vee y) \wedge x') \wedge y' =$$
$$= ((x \wedge x') \vee (y \wedge x')) \wedge y' = (\mathrm{O} \vee (y \wedge x')) \wedge y' =$$
$$= (y \wedge x') \wedge y' = (y \wedge y') \wedge x' = \mathrm{O} \wedge x' = \mathrm{O},$$
$$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = (x \vee (x' \wedge y')) \vee y =$$
$$= ((x \vee x') \wedge (x \vee y')) \vee y = (\mathrm{I} \wedge (x \vee y')) \vee y =$$
$$= (x \vee y') \vee y = x \vee (y' \vee y) = x \vee \mathrm{I} = \mathrm{I},$$

— мы показали, что элемент $x' \wedge y'$ является дополнением для элемента $x \vee y$. В силу единственности дополнений получаем, что $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

5. Следующий факт понадобится при доказательстве теоремы Стоуна, но он представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 11. *Идеал (неодноэлементной) булевой алгебры тогда и только тогда является простым, когда он максимален.*

Доказательство. Необходимость. Пусть J — простой идеал булевой алгебры L. Так как $\mathrm{O} \in J$, а $\mathrm{O} = x \wedge x'$, то в силу простоты идеала J обязательно $x \in J$ или $x' \in J$ для любого элемента $x \in L$. Поэтому если идеал K собственным образом содержит J, то найдется $x \in K$ такой, что $x \notin J$. Но тогда $x' \in J$ и, следовательно, в K входят x и x', откуда $\mathrm{I} = x \vee x' \in K$, — идеал K не является собственным. Таким образом, J — максимальный идеал.

Обратно, пусть J — максимальный идеал и $x \wedge y \in J$. Если $x \notin J$, то очевидно, что подмножество

$$K = \{z\colon\ (\exists t \in J)(z \leqslant x \vee t)\}$$

является идеалом в L и притом собственным образом содержащим J, поскольку $x \leqslant x \vee O \in K$.

В силу максимальности идеала J это означает, что $K = L$ и, в частности, $I \in K$, т. е. $I = x \vee t$ для некоторого $t \in J$. Но тогда

$$y = y \wedge I = y \wedge (x \vee t) = (y \wedge x) \vee (y \wedge t) \in J,$$

так как $x \wedge y \in J$ по условию, а $y \wedge t \leqslant t \in J$.

Таким образом, идеал J простой.

6. Следующая теорема показывает, что элементы любой булевой алгебры (например, случайные события) можно считать подмножествами некоторого множества, а булевы операции отождествлять с одноименными теоретико-множественными операциями.

Теорема Стоуна. *Всякая булева алгебра изоморфна подходящей булевой алгебре множеств.*

Доказательство. Пусть $(L, \wedge, \vee, ', O, I)$ — произвольная булева алгебра. Нашей задачей является построение булевой алгебры множеств $(\mathscr{A}, \cap, \cup, ', \varnothing, A)$ и взаимно однозначного соответствия φ: $L \to \mathscr{A}$ такого, что 1) $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$, 2) $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \cup \varphi(y)$, 3) $\varphi(x') = [\varphi(x)]'$, 4) $\varphi(O) = \varnothing$, 5) $\varphi(I) = A$.

По теореме 6 в L существуют максимальные идеалы. Множество всех максимальных идеалов булевой алгебры L и возьмем в качестве множества A.

Построим отображение φ: $L \to P(A)$, для каждого $x \in L$ полагая $\varphi(x) = \{J \in A\colon x \notin J\}$, т. е. сопоставляя каждому элементу x совокупность всех не содержащих его максимальных идеалов булевой алгебры L.

По теореме 11 всякий идеал, входящий в A, является простым, так что

$$x \wedge y \notin J \Leftrightarrow x \notin J \,\&\, y \notin J,$$

откуда $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$, — доказано свойство 1).

Снова в силу простоты

$$x \notin J \Leftrightarrow x' \in J,$$

откуда $\varphi(x') = [\varphi(x)]'$, — для φ доказано свойство 3).

Используя первый закон Де Моргана, можно выразить в L операцию объединения через пересечение и дополнение: $x \vee y = (x' \wedge y')'$. Тогда

$$\varphi(x \vee y) = \varphi((x' \wedge y')') = [\varphi(x' \wedge y')]' = \\ = [\varphi(x') \cap \varphi(y')]' = ([\varphi(x)]' \cap [\varphi(y)]')' = \varphi(x) \cup \varphi(y),$$

— доказано свойство 2).

Так как элемент O, и только он, входит во все идеалы булевой алгебры L, то $\varphi(\mathrm{O})=\varnothing$. С другой стороны, элемент I, и только он, не содержится ни в одном максимальном идеале, и, значит, $\varphi(\mathrm{I})=A$. Для φ доказаны свойства 4) и 5).

Осталось установить взаимную однозначность отображения φ.

Если $\varphi(x)=\varphi(y)$, то $\varphi(x' \wedge y)=[\varphi(x)]' \cap \varphi(y)=\varnothing$, откуда $x' \wedge y=\mathrm{O}$. Аналогично $\varphi(x' \vee y)=A$, откуда $x' \vee y=\mathrm{I}$. Но это означает, что элемент y является дополнением для элемента x'. В силу инволютивности дополнения, $y=(x')'=x$.

§ 3. Аксиоматика булевых алгебр

1. Булева алгебра как дистрибутивная решетка с дополнениями предстает в системе аксиом, восходящей к Уайтхеду [1]. В сигнатуре ($\wedge$, $\vee$, $'$, O, I) она задается следующими тождествами.

W I 1) $x \wedge x=x$, 2) $x \vee x=x$;
W II 1) $x \wedge y=y \wedge x$, 2) $x \vee y=y \vee x$;
W III 1) $x \wedge (y \wedge z)=(x \wedge y) \wedge z$,
2) $x \vee (y \vee z)=(x \vee y) \vee z$;
W IV 1) $x \wedge (x \vee y)=x$, 2) $x \vee (x \wedge y)=x$;
W V 1) $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2) $x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
W VI 1) $x \wedge \mathrm{I}=x$, 2) $x \vee \mathrm{O}=x$;
W VII 1) $x \wedge \mathrm{O}=\mathrm{O}$, 2) $x \vee \mathrm{I}=\mathrm{I}$;
W VIII 1) $x \wedge x'=\mathrm{O}$, 2) $x \vee x'=\mathrm{I}$.

Анализируя аксиомы Уайтхеда, Хантингтон [1] показал, что число их можно значительно сократить, сохраняя свойство самодвойственности системы.

Теорема Хантингтона. *Класс булевых алгебр в сигнатуре* ($\wedge$, $\vee$, $'$, O, I) *может быть задан следующими тождествами*:

H I 1) $x \wedge y=y \wedge x$, 2) $x \vee y=y \vee x$;
H II 1) $x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2) $x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
H III 1) $x \wedge \mathrm{I}=x$, 2) $x \vee \mathrm{O}=x$;
H IV 1) $x \wedge x'=\mathrm{O}$, 2) $x \vee x'=\mathrm{I}$.

Доказательство. Нужно показать, что тождества W II — W VIII могут быть получены из тождеств H I — H IV (идемпотентность W I, как было отмечено в I.2.3, вытекает из законов поглощения W IV).

По условию, W II $\equiv$ H I, W V $\equiv$ H II, W VI $\equiv$ H III, W VIII $\equiv$ H IV, так что остается вывести W III 1), W IV 1), W VII 1), а 2-аксиомы получаются по принципу двойственности.

Последовательно применяя H III 2), H I 2), H IV 1), H II 1), H III 2) и H IV 1), получаем W VII 1):

$$x \wedge O = (x \wedge O) \vee O = O \vee (x \wedge O) = (x \wedge x') \vee (x \wedge O) = \\ = x \wedge (x' \vee O) = x \wedge x' = O.$$

С помощью H III 2), H II 2), H I 1), W VII 1) и H III 2) выводим W IV 1):

$$x \wedge (x \vee y) = (x \vee O) \wedge (x \vee y) = x \vee (O \wedge y) = \\ = x \vee (y \wedge O) = x \vee O = x.$$

Доказательство ассоциативности операции пересечения (W III 1)) потребует значительно больших усилий.

1) Покажем, что если $x \wedge y = O$ и $x \vee y = I$, то $y = x'$.

Используя H III 1), H IV 2), H II 1), H I 1), условие $x \wedge y = O$, H IV 1), H I 1), H II 1), условие $x \vee y = I$ и H III 1), имеем

$$y = y \wedge I = y \wedge (x \vee x') = (y \wedge x) \vee (y \wedge x') = \\ = (x \wedge y) \vee (y \wedge x') = O \vee (y \wedge x') = (x \wedge x') \vee (y \wedge x') = \\ = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge y) = x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge I = x'.$$

В частности, $x = (x')'$.

2) Выведем второй закон Де Моргана: $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

Ссылаясь на H III 2), H IV 1), H II 1), H I 2), W IV 2) и H IV 1), получаем

$$x \wedge (x' \wedge y) = (x \wedge (x' \wedge y)) \vee O = (x \wedge (x' \wedge y)) \vee (x \wedge x') = \\ = x \wedge ((x' \wedge y) \vee x') = x \wedge (x' \vee (x' \wedge y)) = x \wedge x' = O,$$

т. е. $x \wedge (x' \wedge y) = O$ (*).

Двойственно доказывается равенство $x \vee (x' \vee y) = I$ (**).

Далее, последовательно применяя H II 1), H I 1), тождество $(x')' = x$, (*) и H III 2), имеем

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y') = \\ = (x' \wedge (x \wedge y)) \vee (y' \wedge (y \wedge x)) = (x' \wedge ((x')' \wedge y) \vee \\ \vee (y' \wedge ((y')' \wedge x)) = O \vee O = O.$$

С помощью H I 2), H II 2), H I 2), (**) и H III 1) выводим:

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x' \vee y') \vee (x \wedge y) = \\ = ((x' \vee y') \vee x) \wedge ((x' \vee y') \vee y) = \\ = (x \vee (x' \vee y')) \wedge (y \vee (y' \vee x')) = I \wedge I = I.$$

В силу 1), $x' \vee y' = (x \wedge y)'$.

Двойственно доказывается первый закон Де Моргана $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

3) Пусть $x \wedge (y \wedge z) = a$ и $(x \wedge y) \wedge z = b$. Сначала получим некоторые вспомогательные формулы.

Из H I 1), выражения для a и (*) получаем

$$a \wedge x' = x' \wedge a = x' \wedge (x \wedge (y \wedge z)) = \mathrm{O}.$$

Теперь применяем H III 2), H IV 1), H I 1), H II 1), выражение для a, H I 2), H II 2), W IV 2), H I 1), тождество $(x')' = x$ и (*):

$$\begin{aligned} a \wedge y' &= (a \wedge y') \vee \mathrm{O} = (a \wedge y') \vee (y \wedge y') = \\ &= (y' \wedge a) \vee (y' \wedge y) = y' \wedge (a \vee y) = \\ &= y' \wedge [(x \wedge (y \wedge z)) \vee y] = y' \wedge [y \vee (x \wedge (y \wedge z))] = \\ &= y' \wedge [(y \vee x) \wedge (y \vee (y \wedge z))] = y' \wedge [(y \vee x) \wedge y] = \\ &= y' \wedge [y \wedge (y \vee x)] = y' \wedge [(y')' \wedge (y \vee x)] = \mathrm{O}. \end{aligned}$$

Аналогично $a \wedge z' = \mathrm{O}$. Итак, получили, что

$$a \wedge x' = a \wedge y' = a \wedge z' = \mathrm{O}. \tag{1}$$

Покажем, что

$$b' \vee x = b' \vee y = b' \vee z = \mathrm{I}. \tag{2}$$

Действительно (H III 1), H IV 2), H I 2), H II 2), выражение для b, второй закон Де Моргана, H I 1), H II 1), W IV 1), (**)),

$$\begin{aligned} b' \vee x &= (b' \vee x) \wedge \mathrm{I} = (b' \vee x) \wedge (x \vee x') = \\ &= (x \vee b') \wedge (x \vee x') = x \vee (b' \wedge x') = \\ &= x \vee (((x \wedge y) \wedge z)' \wedge x') = x \vee (((x' \vee y') \vee z') \wedge x') = \\ &= x \vee (x' \wedge ((x' \vee y') \vee z')) = \\ &= x \vee ((x' \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge z')) = x \vee (x' \vee (x' \wedge z')) = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Аналогично $b' \vee y = \mathrm{I}$.

Далее (H I 2), выражение для b, второй закон Де Моргана, H I 2), (**)),

$$\begin{aligned} b' \vee z &= z \vee b' = z \vee ((x \wedge y) \wedge z)' = z \vee ((x \wedge y)' \vee z') = \\ &= z \vee (z' \vee (x \wedge y)') = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Тогда (выражение для b, второй закон Де Моргана, H I 1), H II 1), еще раз H II 1), (1), дважды H III 2))

$$\begin{aligned} b' \wedge a &= ((x \wedge y) \wedge z)' \wedge a = ((x' \vee y') \vee z') \wedge a = \\ &= a \wedge ((x' \vee y') \vee z') = (a \wedge (x' \vee y')) \vee (a \wedge z') = \\ &= ((a \wedge x') \vee (a \wedge y')) \vee (a \wedge z') = (\mathrm{O} \vee \mathrm{O}) \vee \mathrm{O} = \mathrm{O} \end{aligned}$$

и (выражение для a, дважды H II 2), (2), дважды H III 1))

$$b' \vee a = b' \vee (x \wedge (y \wedge z)) = (b' \vee x) \wedge (b' \vee (y \wedge z)) = \\ = (b' \vee x) \wedge ((b' \vee y) \wedge (b' \vee z)) = \mathrm{I} \wedge (\mathrm{I} \wedge \mathrm{I}) = \mathrm{I}.$$

В силу 1) получаем, что $a = (b')' = b$.

2. Приведенная система аксиом для булевых алгебр в сигнатуре ($\wedge$, $\vee$, $'$, O, I), к сожалению, не независима. Например, последовательно используя H IV 1), H III 1), H II 1), H I 1), H III 1), H IV 2), H I 2), H II 2), H I 1), H III 1), H I 2), H IV 2), H III 1), выводим тождество H III 2):

$$x \vee \mathrm{O} = x \vee (x \wedge x') = (x \wedge \mathrm{I}) \vee (x \wedge x') = \\ = x \wedge (\mathrm{I} \vee x') = x \wedge (x' \vee \mathrm{I}) = x \wedge ((x' \vee \mathrm{I}) \wedge \mathrm{I}) = \\ = x \wedge ((x' \vee \mathrm{I}) \wedge (x \vee x')) = x \wedge ((x' \vee \mathrm{I}) \wedge (x' \vee x)) = \\ = x \wedge (x' \vee (\mathrm{I} \wedge x)) = x \wedge (x' \vee (x \wedge \mathrm{I})) = x \wedge (x' \vee x) = \\ = x \wedge (x \vee x') = x \wedge \mathrm{I} = x.$$

Заметим, что равенства H I — H IV, действительно, фигурировали в работе Хантингтона [1], исследовавшего различные системы постулатов для булевых алгебр. Однако содержавшая их Первая система постулатов, независимость которой была установлена в указанной работе, выглядела иначе. В современной формулировке ее можно представить следующим образом: «Класс булевых алгебр в сигнатуре ($\wedge$, $\vee$) может быть задан следующей независимой системой аксиом: H I, H II,

H III′. 1) Существует элемент I такой, что $x \wedge \mathrm{I} = x$ для всех x.

2) Существует элемент O такой, что $x \vee \mathrm{O} = x$ для всех x.

H IV′. Если элементы I и O, упомянутые в H III′, существуют и единственны, то для любого x найдется элемент x' такой, что

1) $x \wedge x' = \mathrm{O}$, 2) $x \vee x' = \mathrm{I}$.»

В последующие годы точные формулировки постулатов Хантингтона были забыты, и свойства самодвойственности и независимости приписывались уже любой системе аксиом, выражавшейся (с различными преамбулами) восемью равенствами H I — H IV (подробности см. в работе Гериша [1]).

3. Пирс [1] в своей фундаментальной работе 1880 года «Об алгебре логики» отметил первооткрывателей различных аксиом булевой алгебры. Коммутативность и ассоциативность операций пересечения и объединения ввел в рассмот-

рение сам Буль, идемпотентность выделил Джевонс, законы поглощения связаны с именами Грасмана и Шредера. Что касается дистрибутивности, то VI 1) сформулировал Буль, а VI 2) — Пирс.

Пирс отметил, что оба дистрибутивные закона могут быть получены из других аксиом решетки, но доказательство не привел, ссылаясь на то, что оно «слишком длинное и неинтересное».

Шредер [1] путем сложных многословных рассуждений установил независимость законов VI 1) и VI 2) от других аксиом решетки и сообщил об этом Пирсу, который в 1884 году признал свою ошибку, указав, что сам еще раньше обнаружил ее.

Насколько непростым был этот вопрос, показывает тот факт, что тривиальные контрпримеры к гипотезе Пирса — ромб M_3 и пятиугольник N_5 — были найдены соответственно Корсельтом [1] в 1894 г. и Дедекиндом [1] в 1900 г.

Теперь самолюбие Пирса было уязвлено, и в канун рождества 1903 года он пишет письмо Хантингтону, который в это время готовил свою статью об аксиоматике булевых алгебр и попросил прокомментировать историю с дистрибутивностью. Пирс объясняет, что его понимание упорядоченности несколько отличалось от ставшего впоследствии общепринятым и что среди свойств, вытекающих из такого понимания упорядоченности, нужно было бы — он не сделал этого в работе 1880 года — отметить и такое:

если элемент a не содержится в каком-либо дополнении элемента b, то существует элемент $x > 0$ такой, что $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$.

И вот отсюда получается дистрибутивность!

Во втором письме (от 14 февраля 1904 года) это доказательство сопровождается следующим замечательным рассказом[1]), по мнению Пирса, завершающим тягостную полемику.

«Дорогой мистер Хантингтон! Если Вы решите опубликовать доказательство Принципа дистрибутивности (а это не только избавило бы меня от затянувшегося исполнением долга, но и представило бы определенную ценность для логики, устранив темное место, благодаря которому метод трактовки предмета, предложенный мною в 3-м томе «American Journal of Mathematics», был сочтен неясным), то я счел бы себя крайне обязанным объяснить причину моего столь долгого молчания.

---

[1]) Цитируется по работе Хантингтона [1].

Дело в том, что упомянутая статья была написана в дни вынужденного досуга, предоставленного мне сильнейшей инфлюэнцей. Готовя работу к печати, я опустил доказательство, отметив, что оно „слишком длинное и неинтересное" и что оно кажется мне достаточно очевидным. Но когда д-р Шредер усомнился в самой его возможности, я оказался не в состоянии восстановить ход рассуждений и подумал, что, таким образом, обнаружена еще одна из многочисленных в этой работе нелепых ошибок, которыми я был обязан гриппу, — убеждение, укрепившееся еще более от сообщения Шредера, решившего, что он установил независимость законов дистрибутивности. (Должен признаться, что я ни разу не прочитал внимательно его доказательство, поскольку мой письменный стол буквально завален книгами по логике, для ознакомления с которыми не хватило бы целой жизни.)

И лишь много лет спустя, просматривая для других целей свои бумаги 1880 года, я наткнулся на доказательство, тщательно подготовленное к печати — и в конце концов изъятое ... Беру на себя смелость подтвердить, что оно вполне заслуживает моей характеристики "длинного и неинтересного". Впрочем, для меня это еще один повод принести свои извинения логикам».

Посмотрим, как Пирс выводит дистрибутивность из условия (П).

Теорема Пирса. *Пусть в решетке с дополнениями L выполняется условие*:

(П) если элемент x не содержится в каком-нибудь дополнении элемента y, то $x \wedge y \neq 0$.

Тогда решетка L дистрибутивна.

Доказательство разбивается на несколько шагов.

1) *L — решетка с единственными дополнениями.*

В самом деле, пусть y_1 и y_2 — два дополнения для элемента x. Тогда $y_1 \leqslant y_2$, поскольку в противном случае, вследствие условия (П), было бы $y_1 \wedge x \neq 0$, что невозможно. В силу симметрии, $y_2 \leqslant y_1$, откуда $y_1 = y_2$.

Единственное дополнение элемента x, как обычно, обозначается через x'. Понятно, что $(x')' = x$.

2) *В решетке L истинно квазитождество*

$$x \leqslant y \Rightarrow x' \geqslant y'.$$

Действительно, если элемент y' не содержится в x', то $y' \wedge x \neq 0$, что невозможно, так как $x \leqslant y$.

3) *В решетке L выполняется первый закон Де Моргана* $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Так как $x \vee y \geqslant x$ и $x \vee y \geqslant y$, то, по доказанному в 2), $(x \vee y)' \leqslant x'$ и $(x \vee y)' \leqslant y'$, откуда $(x \vee y)' \leqslant x' \wedge y'$. С другой стороны, поскольку $x' \wedge y' \leqslant x'$ и $x' \wedge y' \leqslant y'$, то $(x' \wedge y')' \geqslant x$ и $(x' \wedge y')' \geqslant y$ и, значит, $(x' \wedge y')' \geqslant x \vee y$. Снова применяя свойство антиизотонности операции дополнения, получаем, что

$$x' \wedge y' \leqslant (x \vee y)'.$$

4) *Решетка L дистрибутивна.*

Доказываем от противного. Пусть $x, y, z \in L$ — произвольные элементы. Так как во всякой решетке $(x \wedge y) \vee \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$, то нарушение закона дистрибутивности для тройки x, y, z означает, что

$$u = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) < x \wedge (y \vee z) = v.$$

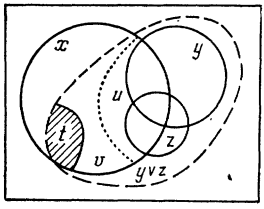

Рис. 14.

Согласно условию (П), $t = u' \wedge v \neq O$ (иначе, $v \leqslant u$). Но (рис. 14)

$$t \wedge y = (t \wedge x) \wedge y = t \wedge (x \wedge y) \leqslant t \wedge u = \\ = (u' \wedge v) \wedge u = (u' \wedge u) \wedge v = O$$

и аналогично $t \wedge z = O$. Согласно условию (П), $t \leqslant y'$ и $t \leqslant z'$, откуда $t \leqslant y' \wedge z' = (y \vee z)'$ (здесь использован полученный в предыдущем пункте закон Де Моргана). Мы пришли к противоречию, поскольку $t \leqslant v \leqslant y \vee z$ и, следовательно, $t \leqslant (y \vee z) \wedge (y \vee z)' = O$.

4. Таким образом, система аксиом для булевой решетки, предложенная Пирсом (решетка с дополнениями, удовлетворяющая условию (П)), не включает дистрибутивности ни в одном из двух ее вариантов. Однако заменяющий дистрибутивность постулат (П) все же выглядит достаточно непривлекательным: он не обращается к непосредственной интуиции и нарушает симметрию, вытекающую из принципа двойственности для операций пересечения и объединения.

Отмечая этот факт и то, что согласованное со столь естественной симметрией условие единственности дополнений (оно выражается квазитождеством $x \wedge y = O \,\&\, x \vee y = I \Rightarrow x' = y$) сразу вытекает из (П), Хантингтон поставил следующий вопрос: нельзя ли доказать, что постулат Пирса равносилен требованию единственности дополнений? Другими словами (знаменитая проблема Хантингтона), *верно ли, что решетка с единственными дополнениями дистрибутивна?*

§ 4. Существуют ли недистрибутивные решетки с единственными дополнениями?

1. Термин «решетка с единственными дополнениями», конечно, не приспособлен для постоянного использования, и мы договоримся, как правило, заменять его сокращением «ЕД-решетка», употребляя полное название лишь в формулировках предложений и в некоторых других по разным соображениям необходимых местах.

2. Напомним, что *класс решеток с единственными дополнениями замкнут относительно дуальных изоморфизмов*. Поэтому вместе со всяким предложением, истинным в этом классе, истинным в нем будет и двойственное утверждение.

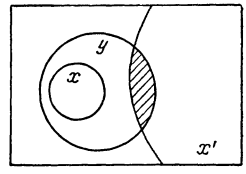

Рис. 15.

3. Следующее очевидное свойство будет постоянно использоваться в доказательствах.

Лемма 1. Если *в решетке с единственными дополнениями* $x<y$, *то* $x' \wedge y \neq O$ (рис. 15).

Доказательство. Действительно, при $x' \wedge y = O$ мы получили бы для элемента x' два различных дополнения: x и y.

4. В классе модулярных решеток, как мы сейчас увидим, ответ на вопрос, вынесенный в заглавие параграфа, оказывается отрицательным.

Лемма 2. *Если решетка с единственными дополнениями модулярна, то в ней*

1) $x \wedge y = O \Rightarrow x \leqslant y'$;

2) $x < y \Rightarrow x \vee (x' \wedge y) = y$.

Доказательство. 1) Покажем, что при $x \wedge y = O$ элемент $x \vee (x \vee y)'$ будет дополнением для y.

В самом деле, применяя модулярный закон (с учетом неравенства $x \leqslant x \vee y$), получаем

$$(x \vee y) \wedge (x \vee (x \vee y)') = x \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee y)') = x \vee O = x,$$

откуда

$$(x \vee (x \vee y)') \wedge y = (x \vee (x \vee y)') \wedge ((x \vee y) \wedge y) =$$
$$= ((x \vee (x \vee y)') \wedge (x \vee y)) \wedge y = x \wedge y = O.$$

Но $(x \vee (x \vee y)') \vee y = (x \vee y) \vee (x \vee y)' = I$.

В силу единственности дополнений, $x \vee (x \vee y)' = y'$ и, значит, $x \leqslant y'$.

2) Если $x < y$, то (лемма 1) $x' \wedge y \neq O$. Предположив, что $x \vee (x' \wedge y) = z < y$, получаем $z' \wedge y \neq O$. Поскольку $z' \wedge x \leqslant z' \wedge z = O$, то вследствие 1) $z' \leqslant x'$, откуда $z' \wedge y \leqslant \leqslant x' \wedge y \leqslant z$, — противоречие.

Теорема Биркгофа—фон Неймана. *Модулярная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть ЕД-решетка L модулярна. Покажем, что она не содержит подрешетки, изоморфной ромбу M_3. Это и будет означать ее дистрибутивность (теорема 9).

Доказываем от противного. Пусть элементы $x, y, z \in \in L$ порождают подрешетку, изоморфную решетке M_3, т. е. пусть

$$x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = u, \quad x \vee y = y \vee z = z \vee x = v.$$

Логически могут представиться два случая — и оба будут отвергнуты.

1) $u = O$. Согласно первому утверждению леммы 2, $y \leqslant x'$ и $z \leqslant x'$, откуда $x \leqslant v = y \vee z \leqslant x'$, что невозможно.

2) $u \neq O$. Вводя элементы $x_1 = u' \wedge x$, $y_1 = u' \wedge y$, $z_1 = = u' \wedge z$ (рис. 16), приходим к уже рассмотренному случаю. Действительно, $x_1 \wedge y_1 = y_1 \wedge z_1 = z_1 \wedge x_1 = O$, а применяя второе утверждение леммы 2, получаем, что каждый из элементов $x_1 \vee y_1$, $y_1 \vee z_1$, $z_1 \vee x_1$ является дополнением для $u \vee v'$, и, значит, все они равны. Например,

$$(u \vee v') \wedge (x_1 \vee y_1) = (u \vee v') \wedge (v \wedge (x_1 \vee y_1)) = \\ = ((u \vee v') \wedge v) \wedge (x_1 \vee y_1) \overset{M}{=} \\ \overset{M}{=} (u \vee (v \wedge v')) \wedge (x_1 \vee y_1) = u \wedge (x_1 \vee y_1) \leqslant u \wedge u' = O$$

(буквой M отмечено применение модулярного закона),

$$(u \vee v') \vee (x_1 \vee y_1) = (u \vee v') \vee (u' \wedge x) \vee (u' \wedge y) = \\ = v' \vee (u \vee (u' \wedge x)) \vee (u \vee (u' \wedge y)) \overset{*}{=} v' \vee x \vee y = v' \vee v = I$$

(звездочкой отмечено применение леммы 2).

Теорема доказана.

В различных источниках теорема о дистрибутивности модулярной ЕД-решетки связывается с именами Сколема [1], Бергмана [1] и даже Хантингтона [1] (впрочем, автору довелось услышать ссылку и на Шредера [1]). Но первым, у кого приводится (хотя и весьма опосредованное) доказательство, является Биркгоф [1, упр. 2 к § X.13 и теорема VIII.10], который ссылается на более общий результат фон Неймана.

5. Теорема Биркгофа — фон Неймана в сочетании с теоремой Маклафлина приводит к одному из центральных результатов для решеток с единственными дополнениями.

Теорема Биркгофа — Уорда. *Атомная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Эта теорема в предположении полноты решетки была получена Биркгофом и Уордом [1], короткое доказательство для общего случая нашли Огасавара и Сасаки [1], совсем просто она выводится как следствие приводимой в этом параграфе теоремы 13.

Следствие 1. *Если в решетке с единственными дополнениями каждый отличный от I элемент содержится в некотором дуальном атоме, то эта решетка дистрибутивна.*

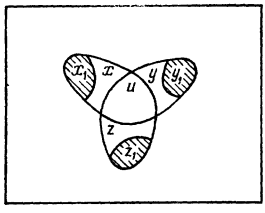

Рис. 16.

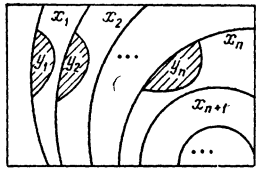

Рис. 17.

Доказательство. Это утверждение двойственно теореме Биркгофа — Уорда (см. п. 2 этого параграфа).

Следствие 2. *Если в решетке с единственными дополнениями выполняется условие обрыва убывающих цепей или условие обрыва возрастающих цепей, то она дистрибутивна.*

Доказательство. При выполнении условия обрыва убывающих цепей каждый ненулевой элемент решетки содержит атом.

Следствие 3. *Решетка с единственными дополнениями, имеющая конечную ширину, дистрибутивна.*

Доказательство. Покажем, что ЕД-решетка конечной ширины удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Пусть это не так и $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ является бесконечной убывающей цепью (рис. 17). Согласно лемме 1 каждый элемент $y_i = x_i \wedge x'_{i+1}$, $i \geqslant 1$, отличен от нуля. Если $i < j$, то $y_j \leqslant x_j \leqslant x_{i+1}$ и, значит, $y_i \wedge y_j \leqslant \leqslant x'_{i+1} \wedge x_{i+1} = 0$, т. е. элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ образуют бесконечную антицепь, что противоречит условию.

Следствие 4. *Конечная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Таким образом, недистрибутивные ЕД-решетки не удовлетворяют простейшим условиям конечности, что сильно затрудняет поиски соответствующих примеров.

Другая интерпретация следствия 4: *в классе конечных решеток булева алгебра может быть определена как решетка с единственными дополнениями.*

6. Еще одно следствие теоремы Биркгофа — Уорда выделим особо ввиду его важности.

Теорема 12. *Если в решетке с единственными дополнениями каждый (неодноэлементный) главный идеал содержит простой интервал, то эта решетка дистрибутивна.*

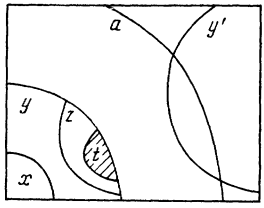

Рис. 18.

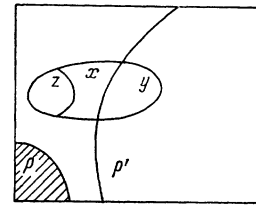

Рис. 19.

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы каждый ненулевой элемент решетки L содержит атом. Действительно, пусть элемент a отличен от нуля (рис. 18). Тогда найдется простой интервал $[x, y]$ такой, что $y \leqslant a$. По лемме 1, $z = x' \wedge y > 0$. Если z не является атомом, то существует элемент $t > 0$ такой, что $t < z$. Так как элемент y покрывает x, то $x \vee t = y$. Тем более $x \vee z = y$.

Теперь обратимся к элементу y'. В силу простоты интервала $[x, y]$, пересечение $(x \vee y') \wedge y$ может равняться только x или y. Но во втором случае элемент x был бы дополнением для y' (отличным от y), что невозможно. Значит, $(x \vee y') \wedge y = x$. Но теперь у элемента $x \vee y'$ два различных дополнения: z и t. Полученное противоречие показывает, что элемент z — атом. Решетка L атомная.

Теорема доказана.

Этот результат содержится (в другой формулировке) в работе Бандельта и Падманабхана [1]. Приведенное доказательство взято из работы автора [2], где оно является основным этапом в доказательстве дистрибутивности компактно порожденной ЕД-решетки.

7. Элемент a решетки с единственными дополнениями L называется *правильным*, если

$$a \wedge x = a \wedge y = 0 \Rightarrow a \wedge (x \vee y) = 0$$

для любых x, $y \in L$.

Элементы, не являющиеся правильными, будем называть *неправильными*.

Например, 0 и 1 — правильные элементы.

Менее тривиальный пример указывает

Лемма 3. *В решетке с единственными дополнениями каждый атом является правильным элементом.*

Доказательство. Если p — атом ЕД-решетки L, то для любого $x \in L$ будет $p \wedge x = 0$ или $p \leqslant x$. Отсюда сразу следует, что p' является дуальным атомом: допустив, что $p' < a < 1$ для некоторого $a \in L$, мы обнаружили бы у p два разных дополнения (p' и a).

Покажем теперь, что если $p \wedge x = 0$, то $x \leqslant p'$. Если это не так (рис. 19), то $y = p' \wedge x < x$. Согласно лемме 1, $z = y' \wedge x > 0$. Так как p' — дуальный атом и

$$p' \wedge z = p' \wedge (x \wedge z) = (p' \wedge x) \wedge z = y \wedge z = y \wedge (y' \wedge x) = 0,$$

мы получаем, что z является дополнением для p', отличным от p (ведь $p \wedge z \leqslant p \wedge x = 0$). Это невозможно, и, значит, $x \leqslant p'$.

Но тогда для произвольных x, $y \in L$, если $p \wedge x = p \wedge y = 0$, то $x \leqslant p'$ и $y \leqslant p'$, откуда $x \vee y \leqslant p'$ и, следовательно, $p \wedge (x \vee y) = 0$, т. е. p — правильный элемент. Лемма доказана.

Теорема 13 (критерий дистрибутивности решетки с единственными дополнениями). *Решетка с единственными дополнениями дистрибутивна тогда и только тогда, когда каждый ее ненулевой элемент содержит ненулевой правильный элемент.*

Доказательство. Необходимость очевидна: в дистрибутивной решетке все элементы правильные.

Достаточность доказывается от противного. Пусть x, y, z — произвольные элементы ЕД-решетки L и $u = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \neq x \wedge (y \vee z) = v$, т. е. $u < v$. Тогда (см. рис. 14) по лемме 1 $t = u' \wedge v > 0$. При этом

$$t \wedge y = (u' \wedge v) \wedge y \leqslant (u' \wedge x) \wedge y = u' \wedge (x \wedge y) \leqslant u' \wedge u = 0$$

и, аналогично, $t \wedge z = 0$.

Если теперь a — правильный элемент, содержащийся в t, то $a \wedge (y \vee z) = 0$. Но $a \leqslant t \leqslant v \leqslant y \vee z$, откуда $a = 0$.

Значит, ненулевой элемент t не содержит ненулевых правильных элементов, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 13 и леммы 3 является теорема Биркгофа — Уорда.

Отметим еще одно

Следствие. *Если наибольший элемент решетки с единственными дополнениями является точной верхней гранью множества ее атомов, то эта решетка дистрибутивна.*

Доказательство. Покажем, что в этом случае каждый ненулевой элемент содержит атом, т. е. что решетка будет атомной. Действительно, если элемент x не содержит атомов, то все атомы, будучи правильными элементами (лемма 3), содержатся в его дополнении x', откуда $x' = \mathrm{I}$ и, значит, $x = \mathrm{O}$.

8. Теорема 13 показывает, что в недистрибутивных решетках с единственными дополнениями основную роль должны играть неправильные элементы. Важнейшее свойство таких элементов устанавливает

Теорема 14. *Элемент x решетки с единственными дополнениями L тогда и только тогда является неправильным, когда существует ненулевой элемент $y \in L$ такой, что*

$$x \wedge y = x' \wedge y = \mathrm{O}.$$

Доказательство. Необходимость. Если x — неправильный элемент, то найдется хотя бы один элемент $z \in L$ такой, что $x \wedge z = \mathrm{O}$, но z не содержится в x'. Тогда $x' \wedge z < z$. Согласно лемме 1, $y = (x' \wedge z)' \wedge z > \mathrm{O}$. Этот элемент y и будет искомым:

$$x \wedge y \leqslant x \wedge z = \mathrm{O}$$

и

$$x' \wedge y = x' \wedge ((x' \wedge z)' \wedge z) = (x' \wedge z) \wedge (x' \wedge z)' = \mathrm{O}.$$

Достаточность. Если $y \neq \mathrm{O}$ и $x' \wedge y = \mathrm{O}$, то $x \wedge (x' \vee y) \neq \mathrm{O}$ (иначе элемент x имел бы два разных дополнения: x' и $x' \vee y$). Но это означает, что если и $x \wedge y = \mathrm{O}$, то x не является правильным элементом.

Следствие 1. *Если в решетке с единственными дополнениями для каждого ненулевого элемента существует не содержащий его простой идеал, то эта решетка дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть x — неправильный элемент ЕД-решетки L, удовлетворяющий условию теоремы. Согласно теореме 14 найдется элемент $y > O$ такой, что $x \wedge y = x' \wedge y = O$. Если J — простой идеал решетки L, не содержащий элемент y, то получается, что $x \in J$ и $x' \in J$, откуда $I = x \vee x' \in J$, что невозможно, так как J — собственный идеал. Полученное противоречие показывает, что в решетке L нет неправильных элементов и, следовательно (теорема 13), она дистрибутивна.

Доказанное следствие содержит результат Чена [1]. Заметим, что вводимое в нем условие дистрибутивности ЕД-решетки и необходимо. Действительно, по теореме 11 каждый простой идеал булевой алгебры максимален, а по теореме 6 для любого $x \neq O$ элемент x' содержится в некотором максимальном идеале J (поскольку, например, $x' \in J(x')$), и, значит, $x \notin J$ (иначе, $I \in J$).

Из сказанного и теоремы 5 вытекает

Следствие 2. *Решетка с единственными дополнениями L дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любого ее ненулевого элемента x существует гомоморфизм φ: $L \to \{O, I\}$ на двухэлементную решетку, при котором $\varphi(x) = I$.*

(Здесь мы отступим от общей направленности параграфа — создавать впечатление, что любое дополнительное условие влечет дистрибутивность ЕД-решетки, — и предложим одну задачу, вписывающуюся в контекст п. 8.

Пусть x — некоторый ненулевой элемент ЕД-решетки L. Рассмотрим ее подмножество $Z(x) = \{y \in L: x \wedge y = x' \wedge \wedge y = O\}$. Как следует из теорем 13 и 14, решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда $Z(x) = \{O\}$ для любого $x \in L$. Интересно было бы выяснить, какие еще свойства у-подмножеств вида $Z(x)$ решетки L влекут ее дистрибутивность. Например, *ЕД-решетка L дистрибутивна, если для любого $x \in L$ в $Z(x)$ есть наибольший элемент.*

Действительно, пусть $y > O$ будет наибольшим элементом в $Z(x)$, а u — наибольшим элементом в $Z(y)$. Элемент $t = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y')$ не может равняться нулю, так как в противном случае $x \wedge y' = O = x' \wedge y'$, откуда $y' \in Z(x)$, и, значит, $y' \leqslant y$, что невозможно. Далее, если $t < y'$, то элемент $t' \wedge y'$ ($\neq O$ по лемме 1) будет принадлежать множеству $Z(x)$ (так как $x \wedge (t' \wedge y') = (x \wedge y') \wedge t' \leqslant t \wedge t' = O$, и точно так же $x' \wedge (t' \wedge y') = O$), т. е. $t' \wedge y' \leqslant y$ и в то же время $(t' \wedge y') \wedge y = O$, — противоречие. Значит, $t = y'$.

Элемент $v=(x\wedge u)\vee(x\wedge y')$ должен совпадать с x, иначе $v'\wedge x$ ($\neq$ O по лемме 1) лежит в $Z(y)$, т. е. $v'\wedge x\leqslant u$, и в то же время $(v'\wedge x)\wedge u=v'\wedge(x\wedge u)\leqslant v'\wedge v=\mathrm{O}$, — противоречие. Аналогично $(x'\wedge u)\vee(x'\wedge y')=x'$, откуда

$$u\vee y'\geqslant((u\wedge x)\vee(u\wedge x'))\vee y'=$$
$$=((u\wedge x)\vee(u\wedge x'))\vee((x\wedge y')\vee(x'\wedge y'))=$$
$$=[(x\wedge u)\vee(x\wedge y')]\vee[(x'\wedge u)\vee(x'\wedge y')]=x\vee x'=\mathrm{I},$$

и, значит, у элемента y' два разных дополнения: y и u. Полученное противоречие показывает, что $Z(x)=\{\mathrm{O}\}$ для любого $x\in L$. Как уже отмечалось, это влечет дистрибутивность решетки L.

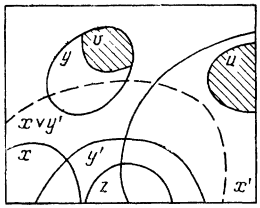

Рис. 20.

Будет ли ЕД-решетка L дистрибутивной, если в $Z(x)$ (при любом x) каждый элемент содержится в некотором максимальном элементе и этих максимальных элементов конечное число?)

9. Решетка с O называется *решеткой с начальными дополнениями*, если каждый ее главный идеал является решеткой с дополнениями. Не всякая решетка с дополнениями обладает начальными дополнениями (достаточно взглянуть на пятиугольник N_5). Напротив, если в решетке, кроме O, есть еще и наибольший элемент I, то начальные дополнения в главном идеале $J(\mathrm{I})$ будут обычными дополнениями соответствующих элементов.

В формулировке теоремы 15 из соображений благозвучия для решеток с единственными дополнениями придется использовать сокращенное название.

Теорема 15. *ЕД-решетка с начальными дополнениями дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть ЕД-решетка L обладает начальными дополнениями, но не является дистрибутивной. Тогда в ней найдется хотя бы один неправильный элемент x. Пользуясь теоремой 14, выберем такой элемент $y>\mathrm{O}$, чтобы $x\wedge y=x'\wedge y=\mathrm{O}$ (рис. 20). Не может быть, чтобы x и x' оба содержались в y' (тогда, очевидно, $y'=\mathrm{I}$, т. е. $y=\mathrm{O}$). Пусть, например, x' не содержится в y'. В этом случае $x\vee y'\neq\mathrm{I}$ (иначе начальное дополнение z для $x\wedge y'$ в интервале $[\mathrm{O}, y']$ было бы еще одним — кроме x' — дополнением для x:

$$x\vee z=(x\vee(x\wedge y'))\vee z=x\vee((x\wedge y')\vee z)=x\vee y'=\mathrm{I}).$$

Но теперь мы получаем, что начальное дополнение u для элемента $(x \vee y') \wedge x'$ в интервале $[O, x']$ и начальное дополнение v для элемента $(x \vee y') \wedge y$ в интервале $[O, y]$ будут различными (так как $u \wedge v \leqslant x' \wedge y = O$) дополнениями для элемента $x \vee y'$. Действительно,

$$(x \vee y') \vee u = x \vee ((x \vee y') \vee u) \geqslant$$
$$\geqslant x \vee (((x \vee y') \wedge x') \vee u) = x \vee x' = I,$$
$$(x \vee y') \vee v = y' \vee ((x \vee y') \vee v) \geqslant$$
$$\geqslant y' \vee (((x \vee y') \wedge y) \vee v) = y' \vee y = I,$$

а с другой стороны,

$$(x \vee y') \wedge u = (x \vee y') \wedge (u \wedge x') = ((x \vee y') \wedge x') \wedge u = O,$$
$$(x \vee y') \wedge v = (x \vee y') \wedge (v \wedge y) = ((x \vee y') \wedge y) \wedge v = O.$$

Полученное противоречие означает, что в рассматриваемой решетке нет неправильных элементов, и ссылка на теорему 13 завершает доказательство.

Если в решетке L каждый интервал является решеткой с дополнениями, то L называется *решеткой с относительными дополнениями.*

Следствие. *ЕД-решетка с относительными дополнениями дистрибутивна.*

Доказательство. Решетка с относительными дополнениями, обладающая нулем, является решеткой с начальными дополнениями.

Результат теоремы 15 принадлежит Грийе и Варле [1], дистрибутивность ЕД-решетки с относительными дополнениями доказал Сас [1].

Заметим, что поскольку всякая булева алгебра является решеткой с относительными дополнениями (относительным дополнением для элемента x в интервале $[a, b]$ будет $a \vee (x' \wedge b)$), теорема 15 и указанное следствие тоже являются критериями дистрибутивности ЕД-решетки.

10. Установим еще один полезный критерий дистрибутивности решетки с единственными дополнениями.

Теорема 16. *Решетка с единственными дополнениями дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней*

$$(x \vee ((x \vee y) \wedge x')) \wedge y > O$$

для любого x и любого $y > O$.

(Заметим, что при $x \wedge y \neq O$ или $x' \wedge y \neq O$ указанное неравенство тривиально выполняется, так что содержательный смысл оно приобретает, когда $x \wedge y = x' \wedge y = O$, т. е. когда x является неправильным элементом (рис. 21).)

Доказательство. Необходимость очевидна: в булевой алгебре левая часть неравенства совпадает с y.

Достаточность. Докажем (от противного), что условие теоремы влечет существование начальных дополнений в рассматриваемой решетке.

Пусть элемент x лежит в интервале $[O, z]$ и не имеет в нем дополнений. Тогда $x \vee (x' \wedge z) < z$ (заметим, что по лемме 1 $x' \wedge z > O$). Для $y = (x \vee (x' \wedge z))' \wedge z$ (этот элемент тоже отличен от нуля) будет $x \vee y < z$, откуда $(x \vee y) \wedge x' \leqslant x' \wedge z$, и, значит, $x \vee ((x \vee y) \wedge x') \leqslant x \vee \vee (x' \wedge z)$ (на самом деле, конечно, равенство). Но в таком случае

$$(x \vee ((x \vee y) \wedge x')) \wedge y \leqslant$$
$$\leqslant (x \vee (x' \wedge z)) \wedge (x \vee (x' \wedge z))' = O,$$

что противоречит условию. Теперь можно сослаться на теорему 15.

Рис 21.

Следствие 1. *В решетке с единственными дополнениями квазитождество*

$$x \leqslant y \Rightarrow x' \geqslant y'$$

влечет дистрибутивность.

Доказательство. Если решетка, удовлетворяющая условию теоремы, недистрибутивна, то по теореме 16 в ней найдутся элементы x и $y > O$ такие, что $(x \vee ((x \vee y) \wedge \wedge x')) \wedge y = O$ (понятно, что в этом случае и $x > O$). Рассмотрим элемент $z = x \vee ((x \vee y) \wedge x')$. Так как $z \geqslant x$, то по условию $z' \leqslant x'$, так что $z' = x' \wedge z'$. Очевидно, что $z < x \vee y$ (иначе левая часть в неравенстве теоремы 16 совпадает с y и не может равняться нулю). Значит, по лемме 1 $z' \wedge (x \vee y) > O$. Но

$$z' \wedge (x \vee y) = (z' \wedge x') \wedge (x \vee y) = z' \wedge ((x \vee y) \wedge x') \leqslant$$
$$\leqslant z' \wedge (x \vee ((x \vee y) \wedge x')) = z' \wedge z = O,$$

— противоречие.

Следствие 1 доказано у Биркгофа [1, теорема X.17] и Чена [1], но, конечно, этот результат знал еще Хантингтон.

Следствие 2. *В решетке с единственными дополнениями каждый из законов Де Моргана влечет дистрибутивность.*

Доказательство. Если в ЕД-решетке выполняется, например, тождество $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, то операция дополнения в ней антиизотонна:

$$x \leqslant y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow x' \vee y' = x' \Rightarrow x' \geqslant y'.$$

Прямое доказательство дистрибутивности ЕД-решетки, удовлетворяющей законам Де Моргана, можно найти в книге Л. А. Скорнякова [1, с. 142].

Решетка с дополнениями L называется *орторешеткой*, если каждому ее элементу x можно сопоставить такое его дополнение (ортодополнение) $x^{\perp}$, что 1) $(x^{\perp})^{\perp}=x$ и 2) $(x \wedge y)^{\perp}=x^{\perp} \vee y^{\perp}$ для любых $x, y \in L$.

Следствие 3. *Орторешетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Орторешетка с условием $x \leqslant y \Rightarrow x \vee (x^{\perp} \wedge y)=y$ называется *ортомодулярной* решеткой.

Следствие 4. *Ортомодулярная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Прямое доказательство результата следствия 4 приведено в книге Кальмбах [1].

На самом деле дистрибутивность в решетках с единственными дополнениями обеспечивается, как показал Сас [4], уже ослабленными законами Де Моргана.

Следствие 5. *В решетке с единственными дополнениями любое из следующих условий влечет дистрибутивность:*

1) $(x \wedge y)'=x' \vee y'$ *для любых сравнимых элементов* x, y;

2) $(x \wedge y')=x' \vee y'$ *для любых несравнимых элементов* x, y.

Доказательство. 1) Именно случай $x \diamond y$ рассматривается для закона Де Моргана в доказательстве следствия 2.

2) Пусть $u<v$ — произвольные элементы ЕД-решетки L, удовлетворяющей условию 2). В силу единственности дополнений, элемент u' не может содержаться в v'. Тогда либо $u'>v'$, либо $u' \| v'$. Но второй случай на самом деле невозможен:

$$(u' \wedge v')'=u'' \vee v''=u \vee v=v=v'',$$

откуда в силу единственности дополнений $u' \wedge v'=v'$, т. е. $u'>v'$.

Таким образом, в решетке L операция дополнения антиизотонна, и можно сослаться на следствие 1.

11. Теорема Биркгофа — фон Неймана утверждает, что в классе модулярных решеток все решетки с единственными дополнениями дистрибутивны. Но оказывается, что они дистрибутивны и в гораздо более широком классе.

Решетка L называется *полумодулярной*[1]), если для любых трех элементов $x, y, z \in L$ таких, что $y \wedge z < x < z$ и $y \| z$, найдется элемент t, удовлетворяющий условиям $y \wedge z < t \leqslant y$ и $(x \vee t) \wedge z = x$ (рис. 22). Если в этом определении вместо $y \| z$ положить $y \wedge z = \mathrm{O}$, то получается более общее определение О-*полумодулярной* решетки.

Теорема 17. *О-полумодулярная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

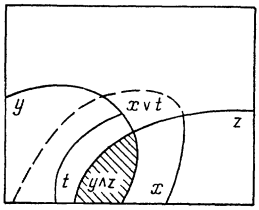

Рис. 22.

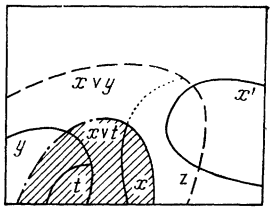

Рис. 23.

Доказательство. Допустим, что решетка, удовлетворяющая условиям теоремы, недистрибутивна. По теореме 16 в ней найдутся ненулевые элементы x и y такие, что $x \wedge y = x' \wedge y = \mathrm{O}$, а $z = x \vee ((x \vee y) \wedge x')$ в пересечении с y дает О (рис. 23). Тогда вследствие О-полумодулярности существует элемент t такой, что $\mathrm{O} < t \leqslant y$ и $(x \vee t) \wedge z = x$, откуда

$$(x \vee t) \wedge x' = ((x \vee t) \wedge (x \vee y)) \wedge x' =$$
$$= (x \vee t) \wedge ((x \vee y) \wedge x') = (x \vee t) \wedge (z \wedge ((x \vee y) \wedge x')) =$$
$$= ((x \vee t) \wedge z) \wedge ((x \vee y) \wedge x') =$$
$$= x \wedge ((x \vee y) \wedge x') \leqslant x \wedge x' = \mathrm{O},$$

так что $x \vee t$ является дополнением для x', отличным от x, что невозможно.

Следствие 1. *Полумодулярная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Решетка с О называется О-*модулярной*, если в ней истинно квазитождество

$$x \leqslant z \,\&\, y \wedge z = \mathrm{O} \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = \mathrm{O}.$$

---

[1]) Приводимое определение восходит к Маклейну (см. Сас [3, с. 157], Гретцер [1, с. 232, упр. 20—21]) и на решетках конечной длины равносильно стандартному понятию полумодулярности, которое тривиально выполняется на всех решетках, не имеющих простых интервалов, и поэтому не представляет для нас интереса.

Следствие 2. *О-модулярная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Утверждение следствия 2 впервые было установлено Грийе и Варле [1].

Так как всякая модулярная решетка О-модулярна, отсюда получается теорема Биркгофа — фон Неймана.

§ 5. Недистрибутивные решетки с единственными дополнениями существуют

1. Результаты, приведенные в предыдущем параграфе, вызывают сильное сомнение в существовании недистрибутивных решеток с единственными дополнениями. К концу 30-х годов это сомнение (при гораздо меньшем наборе подкрепляющих фактов) приобрело характер всеобщей убежденности. Тем большей неожиданностью явилась опубликованная в 1945 г.

Теорема Дилуорса. *Всякая решетка может быть вложена в подходящую решетку с единственными дополнениями.*

(В частности, можно взять пятиугольник N_5, и тогда теорема Дилуорса даст немодулярную решетку с единственными дополнениями.)

Доказательство. Оригинальное доказательство Дилуорса [1] и последующие его редакции Чена и Гретцера [1], а также Кроули и Дилуорса [1], чрезвычайно сложны. Способ построения ЕД-решеток, предложенный Адамсом и Сихлером [1], позволил этим авторам получить существенно более доступное доказательство теоремы Дилуорса. Его мы сейчас и изложим.

Пусть L — произвольная решетка. Не нарушая общности, можно считать, что L содержит наименьший элемент O и наибольший элемент I и что каждый элемент решетки L имеет не более одного дополнения (в противном случае присоединим к решетке L новый наибольший элемент — и в ней совсем не будет нетривиальных дополняемых элементов).

Пусть S обозначает множество элементов решетки L, не имеющих дополнений, и пусть $T = S \cup \{O\}$ (понятно, что $O \notin S$). Каждому $s \in S$ сопоставим экземпляр трехэлементной цепи $L_s = \{O, x, I\}$ и образуем прямое произведение $\Pi = \prod_{t \in T} L_t$, считая, что $L_0 = L$. В решетке Π выделим подрешетку Π_*, состоящую из таких и только таких элементов (векторов) p, для которых лишь конечное

число значений $p(t)$ (компонент) отлично от О. Двойственно строится подрешетка Π^*.

Если $s \in S$, то пусть p_s обозначает такой элемент из Π_*, что

$$p_s(t) = \begin{cases} s, \text{ если } t = \text{O}, \\ x, \text{ если } t = s, \\ \text{O в остальных случаях,} \end{cases}$$

а q_s определим в Π^* равенствами

$$q_s(t) = \begin{cases} s, \text{ если } t = \text{O}, \\ x, \text{ если } t = s, \\ \text{I в остальных случаях.} \end{cases}$$

В Π_* выделим подмножество R_*, которое состоит из векторов p таких, что 1) хотя бы одна из компонент вектора p равна I или 2) $p \geqslant p_s$ для некоторого $s \in S$. Аналогично в Π^* выделяется подмножество R^*: оно состоит из векторов q, в которых 1) хотя бы одна из компонент равна О или 2) $q \leqslant q_s$ для некоторого $s \in S$. Ясно, что $\Pi_* \setminus R_*$ будет $\wedge$-подполурешеткой в Π_*, а $\Pi^* \setminus R^*$ будет $\vee$-подполурешеткой в Π^*. Присоединяя к первой новый элемент I, а ко второй новый элемент О, мы получим соответственно решетки Γ_* и Γ^*.

Теперь построим вложения φ_* и φ^* решетки L в Γ_* и Γ^* соответственно. Именно, положим $\varphi_*(\text{O}) = \varphi^*(\text{O}) = \text{O}$, $\varphi_*(\text{I}) = \varphi^*(\text{I}) = \text{I}$, а для $a \in L \setminus \{\text{O}, \text{I}\}$ пусть $\varphi_*(a)$ будет вектор с О-компонентой, равной a, и всеми остальными компонентами, равными О, а $\varphi^*(a)$ тоже имеет О-компонентой a, а все остальные компоненты этого вектора равны I.

Наконец, если $s \in S$, то через s_* обозначается вектор из Γ_* с s-компонентой x и нулевыми остальными компонентами, а через s^* — вектор из Γ^* с s-компонентой x и остальными компонентами, равными I.

Решетка L^+ определяется как наименьшая подрешетка прямого произведения $\Gamma_* \times \Gamma^*$, содержащая все пары вида $(\varphi_*(a), \varphi^*(a))$, где $a \in L \setminus \{\text{O}, \text{I}\}$, все пары вида (s_*, s^*), где $s \in S$, и пару (О, I). Таким образом, каждый элемент в L^+ получается из элементов указанного вида («порождающих») конечным числом объединений и / или пересечений. Наименьшим элементом в L^+ будет пара (О, О), а наибольшим — пара (I, I).

Мы утверждаем, что

1) решетка L допускает вложение в решетку L^+, сохраняющее O и I;

2) каждый элемент решетки L (рассматриваемой как подрешетка в L^+) имеет в L^+ дополнение;

3) каждый элемент решетки L^+ имеет не более одного дополнения.

Первое утверждение почти очевидно: отображение φ: $L \to L^+$, определяемое условием $\varphi(a) = (\varphi_*(a), \varphi^*(a))$, удовлетворяет требованиям.

Второе утверждение тоже нетрудно доказать: если элемент $a \in L$ имел дополнение a', то дополнением для $\varphi(a)$ будет $\varphi(a')$, а если $s \in S$, то

$$\varphi(s) \wedge (s_*, s^*) = (\varphi_*(s) \wedge s_*, \varphi^*(s) \wedge s^*) = (\mathrm{O}, \mathrm{O}),$$

поскольку $\varphi^*(s) \wedge s^* = q_s$ в Π^*, а

$$\varphi(s) \vee (s_*, s^*) = (\varphi_*(s) \vee s_*, \varphi^*(s) \vee s^*) = (\mathrm{I}, \mathrm{I}),$$

поскольку $\varphi_*(s) \vee s_* = p_s$ в Π_*.

Гораздо больших усилий потребует доказательство третьего утверждения.

Прежде всего посмотрим, как устроены элементы решетки L^+.

Оказывается, они могут быть классифицированы по следующим четырем типам: I. (p, I); II. (O, q); III. (s_*, s^*), $s \in S$; IV. $(\varphi_*(a), \varphi^*(b))$, где $a \leqslant b$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$.

Поскольку все порождающие элементы решетки L^+ являются элементами указанных типов (типовыми элементами), нам достаточно убедиться в том, что если (p, q) и (u, v) являются в L^+ элементами типов I — IV, то элементы $(p, q) \wedge (u, v)$ и $(p, q) \vee (u, v)$ тоже будут типовыми. В силу принципа двойственности можно ограничиться пересечением.

В принципе нужно рассмотреть 16 случаев, но в силу коммутативности пересечения дело сводится к десяти (первое число обозначает тип элемента (p, q), второе — тип элемента (u, v)): I I, I II, I III, I IV, II II, II III, II IV, III III, III IV, IV IV. В ситуациях I II, II II, II III, II IV, III IV мы сразу получаем для пересечения тип II, в случае I I — тип I. Так что более пристального внимания требуют сочетания I III, I IV, III III и IV IV. Рассмотрим их в этой последовательности.

I III. Здесь $(p, q) = (p, \mathrm{I})$, $(u, v) = (s_*, s^*)$.

Если $p \wedge s_* = \mathrm{O}$, получаем для пересечения тип II. Пусть $p \wedge s_* > \mathrm{O}$. Так как s_* имеет единственную ненулевую компоненту $s_*(s) = x$, то обязательно $p(s) = x$, и,

значит, $p \geqslant s_*$, откуда $p \wedge s_* = s_*$, так что $(p, q) \wedge (u, v) = (s_*, s^*)$ (тип III).

I IV. Здесь $(p, q) = (p, \mathrm{I})$, $(u, v) = (\varphi_*(a), \varphi^*(b))$, где $a \leqslant b$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$.

Пусть $p \wedge \varphi_*(a) > \mathrm{O}$. Так как $\varphi_*(a)$ имеет единственную ненулевую компоненту $\varphi_*(a)(\mathrm{O}) = a$, то $c = p(\mathrm{O}) > \mathrm{O}$. Но тогда

$$(\varphi_*(a) \wedge p)(t) = \left\{\begin{matrix} a \wedge c, \text{ если } t = 0, \\ \mathrm{O} \text{ в остальных случаях} \end{matrix}\right\} = \varphi_*(a \wedge c)(t).$$

Значит, $(p, q) \wedge (u, v) = (\varphi_*(a \wedge c), \varphi^*(b))$, где $a \wedge c \leqslant a \leqslant b$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$, — пересечение имеет тип IV.

III III. Здесь $(p, q) = (s_*, s^*)$, $(u, v) = (t_*, t^*)$, где $s, t \in S$.

Пусть $s_* \wedge t_* > \mathrm{O}$. Тогда, поскольку s_* и t_* имеют единственную ненулевую компоненту $s_*(s) = x = t_*(t)$, мы получаем, что $s = t$, откуда $(p, q) = (s_*, s^*) = (u, v)$, и, значит, пересечение имеет тип III.

IV IV. Здесь $(p, q) = (\varphi_*(a), \varphi^*(b))$, $(u, v) = (\varphi_*(c), \varphi^*(d))$, где $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$.

В этом случае $\varphi_*(a) \wedge \varphi_*(c) = \varphi_*(a \wedge c)$ и $\varphi^*(b) \wedge \varphi^*(d) = \varphi^*(b \wedge d)$, причем $a \wedge c \leqslant b \wedge d$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$, — пересечение имеет тип IV.

Учитывая структуру элементов решетки L^+, мы можем теперь доказать, что каждый из них имеет в L^+ не более одного дополнения.

Итак, пусть $(p, q) \in L^+$ и элемент (u, v) является дополнением для (p, q) в решетке L^+. В зависимости от типа элемента (p, q) могут представиться четыре случая.

I. $(p, q) = (p, \mathrm{I})$.

В этом случае $v = \mathrm{O}$, и тогда (u, v) может иметь только тип II, откуда $u = \mathrm{O}$, и, значит, $p = \mathrm{I}$. Итак, $(p, q) = (\mathrm{I}, \mathrm{I})$ и единственным дополнением этого элемента является (O, O).

II. $(p, q) = (\mathrm{O}, q)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $u = \mathrm{I}$, откуда $v = \mathrm{I}$, и, значит, $q = \mathrm{O}$. Единственным дополнением для $(p, q) = (\mathrm{O}, \mathrm{O})$ будет элемент (I, I).

III. $(p, q) = (s_*, s^*)$, $s \in S$.

Так как $\mathrm{O} < u < \mathrm{I}$, то (u, v) может быть либо элементом типа III, либо элементом типа IV. Но если $(u, v) = (t_*, t^*)$, где $t \in S$, то ясно, что (u, v) не может быть дополнением для (p, q), так что остается один случай: когда $(u, v) = (\varphi_*(a), \varphi^*(b))$, где $a \leqslant b$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$.

Поскольку $\varphi_*(a) \vee s_* = \mathrm{I}$ в Γ_*, то это означает, что в Π_* будет $\varphi_*(a) \vee s_* \geqslant p_t$ для некоторого $t \in S$. Понятно, что при $t \neq s$ это невозможно. Значит, $a = \varphi_*(a)(\mathrm{O}) \geqslant \geqslant p_s(\mathrm{O}) = s$ (напомним, что $s_*(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$). С другой стороны, $\varphi^*(b) \wedge s^* = \mathrm{O}$, а это может быть лишь в случае, когда $\varphi^*(b) \wedge s^* \leqslant q_s$ в Π^*, откуда $b = \varphi^*(b)(\mathrm{O}) \leqslant q_s(\mathrm{O}) = s$. Итак, $s \leqslant a \leqslant b \leqslant s$, т. е. $a = b = s$, и, следовательно, $(u, v) = (\varphi_*(s), \varphi^*(s))$ является единственным дополнением для (s_*, s^*).

IV. $(p, q) = (\varphi_*(a), \varphi^*(b))$, где $a \leqslant b$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$.

Остается рассмотреть случай, когда $(u, v) = (\varphi_*(c), \varphi^*(d))$, где $c \leqslant d$ в $L \setminus \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$. Здесь сразу получается, что a и c являются дополнениями друг для друга в L, и точно так же b и d дополняют друг друга в L. Учитывая неравенства $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, получаем, что $a \wedge d \leqslant \leqslant b \wedge d = \mathrm{O}$ и одновременно $a \vee d \geqslant a \vee c = \mathrm{I}$, т. е. и d является в L дополнением для a. Но в L каждый элемент имеет не более одного дополнения, так что $c = d$. Аналогично $a = b$. Отсюда $(p, q) = (\varphi_*(a), \varphi^*(a))$, $(u, v) = = (\varphi_*(a'), \varphi^*(a'))$, где a' — дополнение для a в L, а оно по условию единственно.

Итак, если нам дана решетка L с O и I, каждый элемент которой имеет не более одного дополнения, то мы можем построить содержащую ее в качестве подрешетки решетку L^+ с теми же O и I, каждый элемент которой имеет не более одного дополнения и при этом все элементы решетки L дополняемы в L^+.

Положим теперь $L_0 = L$, $L_{n+1} = (L_n)^+$. Решетка $\Lambda = = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} L_n$ и будет решеткой с единственными дополнениями, содержащей исходную решетку L в качестве подрешетки.

Теорема доказана.

2. Заметим, что если исходная решетка L конечна, то конечными будут и все решетки L_n, $n \geqslant 1$, и, следовательно, решетка Λ в этом случае не более чем счетна.

3. В каждую решетку с единственными дополнениями, получавшуюся по методу Дилуорса, вкладывалась свободная решетка со счетным числом порождающих, в которой не выполняется никакое нетривиальное (т. е. не выводимое из начальных аксиом) решеточное тождество. Под влиянием этого факта и успехов в исследовании эквациональных свойств решеток (кроме привычных дистрибутивности и модулярности, в практику вошли и многие другие тождества) оформилась еще одна гипотеза о решетках с единст-

венными дополнениями: что ни одна из них не может принадлежать никакому собственному многообразию решеток, не будучи дистрибутивной. К концу 70-х годов в справедливости этого предположения мало кто сомневался, пока Адамс и Сихлер [1] не установили, что *существует континуум многообразий решеток, в которых каждая решетка вложима в подходящую решетку с единственными дополнениями, принадлежащую этому же многообразию.* Такие многообразия назовем *многообразиями Дилуорса.* Мы не будем доказывать континуальность класса многообразий Дилуорса, а используя фрагменты доказательства Адамса и Сихлера, покажем, что справедлива следующая

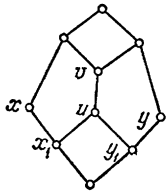

Рис. 24.

Теорема 18. *В многообразии решеток V, определяемом тождеством*

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee t)) = \\ = ((x \wedge (y \vee z)) \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))), \quad (*)$$

существуют недистрибутивные решетки с единственными дополнениями.

Это многообразие было открыто Гедеоновой [1] в 1971 г., и решетки, принадлежащие ему, называются *р-модулярными.*

Лемма. *Решетка р-модулярна тогда и только тогда, когда в ней нет подрешеток, изоморфных решетке G, изображенной на рис.* 24.

Доказательство. Необходимость. Тождество p-модулярности (*) нарушается для элементов x, y, $z = x_1$, $t = y_1$ решетки G (левая часть дает u, а правая v). Значит, никакая p-модулярная решетка не может содержать G в качестве подрешетки (многообразия замкнуты относительно перехода к подалгебрам).

Достаточность. Пусть решетка L не имеет подрешеток, изоморфных решетке G. Мы хотим доказать, что в ней выполняется тождество (*). Пусть $x, y, z, t \in L$ — произвольные элементы. Могут представиться два случая.

1) $x \diamond y$. Пусть $x \leqslant y$. Тогда $x \wedge (y \vee z) = x$ и $y \wedge (x \vee t) \leqslant y \wedge (y \vee t) = y$, так что $x \vee (y \wedge (x \vee t)) \leqslant x \vee y$ и, значит,

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee t)) = x \vee (y \wedge (x \vee t)) = \\ = (x \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))) = \\ = ((x \wedge (y \vee z)) \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))),$$

— тождество (*) выполняется для x, y, z, t.

2) $x \| y$. Очевидно, что

$$x \wedge y \leqslant x \wedge (y \vee z) \leqslant x \leqslant x \vee (y \wedge (x \vee t)) \leqslant x \vee y,$$
$$x \wedge y \leqslant y \wedge (x \vee t) \leqslant y \leqslant (x \wedge (y \vee z)) \vee y \leqslant x \vee y. \qquad (**)$$

Отсюда сразу получаем неравенство

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee t)) \leqslant$$
$$\leqslant ((x \wedge (y \vee z)) \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))).$$

Если допустить здесь строгое неравенство и считать все восемь элементов в (**) различными, то отождествляя x, y, $x_1 = x \wedge (y \vee z)$ и $y_1 = y \wedge (x \vee t)$ с одноименными элементами на диаграмме решетки G, мы получаем в L подрешетку, изоморфную решетке G.

Таким образом, или для x, y, z, t выполняется тождество (*) или хотя бы одно из неравенств в (**) на самом деле является равенством. Но в каждом таком случае, как нетрудно убедиться, получается равенство (*) для x, y, z, t. (Например, если $x \wedge y = x \wedge (y \vee z)$, то слева в (*) сразу получается $y \wedge (x \vee t)$, а справа $y \wedge (x \vee (y \wedge \wedge (x \vee t)))$, что также совпадает с $y \wedge (x \vee t)$, поскольку

$$y \wedge (x \vee t) = (y \wedge (x \vee t)) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))) \leqslant$$
$$\leqslant y \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee t))) \leqslant$$
$$\leqslant y \wedge ((x \vee t) \vee (y \wedge (x \vee t))) = y \wedge (x \vee t).$$

Остальные случаи или проще или сводятся к этому.)

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 18. Возвращаясь к конструкции Адамса и Сихлера в доказательстве теоремы Дилуорса, покажем, что если решетка L p-модулярна, то p-модулярной будет и решетка L^+.

В самом деле, если решетка L p-модулярна, то p-модулярным будет и прямое произведение $\Pi = L \times \prod_{s \in S} L_s$, поскольку все L_s являются трехэлементными цепями и, конечно, не содержат G в качестве подрешетки, а многообразия замкнуты относительно прямых произведений. Но тогда p-модулярными будут и подрешетки Π_* и Π^* в Π.

Теперь установим, что решетка Γ_* тоже принадлежит нашему многообразию (для Γ^*—двойственные рассуждения). Вспомним, что Γ_* получилась из Π_* исключением подмножества R_* и последующим добавлением наибольшего элемента. Следовательно, если бы решетка Γ_* содержала G в качестве подрешетки, то все элементы решетки G, кроме может быть ее наибольшего элемента, лежали бы в Π_*.

Примем это «может быть» и рассмотрим «частичную подрешетку» в Π_*, образованную девятью оставшимися элементами решетки G.

Мы хотим показать, что как бы ни были определены объединения в решетке Π_*, элементы $x \vee y$, $x \vee (y \vee v)$, $(x \vee v) \vee y$ и $(x \vee v) \vee (y \vee v)$ все будут равны между собой и, следовательно, совпадут с наибольшим элементом решетки G.

Действительно, в любом случае

$$x \vee y \leqslant x \vee (v \vee y) \leqslant (x \vee v) \vee (v \vee y)$$

и

$$x \vee y \leqslant (x \vee v) \vee y \leqslant (x \vee v) \vee (v \vee y).$$

Но $x \vee y \geqslant x_1 \vee y_1 = u$, так что $x \vee y = (x \vee u) \vee (u \vee y)$, а поскольку $x \vee u = x \vee v$ и $u \vee y = v \vee y$, мы получаем, что $x \vee y = (x \vee v) \vee (v \vee y)$, откуда и следует вложимость решетки G в решетку Π_*.

Итак, если решетка Π_* p-модулярна (т. е. не имеет подрешеток, изоморфных решетке G), то p-модулярна и решетка Γ_*.

Но решетка L^+ является подрешеткой прямого произведения $\Gamma_* \times \Gamma^*$ и, следовательно, тоже p-модулярна.

Таким образом, во всех решетках $L_1 = L^+$, $L_2 = L_1^+$, ... выполняется тождество (*).

В решетке $\Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ выберем произвольные четыре элемента x, y, z, t. Все они лежат в какой-нибудь одной решетке L_n и, значит, удовлетворяют тождеству (*). Так что решетка Λ p-модулярна. Если исходная решетка L была немодулярной (можно взять пятиугольник N_5 с присоединенным наибольшим элементом, чтобы исключить двойные дополнения), то немодулярной будет и p-модулярная решетка с единственными дополнениями Λ. Теорема доказана.

Анализируя доказательство, можно увидеть, что на самом деле была установлена справедливость более общего предложения: каждая p-модулярная решетка вложима в p-модулярную решетку с единственными дополнениями. Иными словами, *многообразие p-модулярных решеток является многообразием Дилуорса.*

Многообразие дистрибутивных решеток также является многообразием Дилуорса (§ 1.1), а многообразие модулярных решеток — нет (теорема Биркгофа — фон Неймана).

Неизвестно, будет ли многообразие p-модулярных решеток наименьшими из недистрибутивных многообразий Дилуорса.

4. В предисловии к «Общей теории решеток» Д. Гретцер [1] вспоминает, как в конце 50-х годов он и Е. Т. Шмидт (столь уверенно заявившие о себе уже первыми совместными работами) «часто рассуждали о том, как нужна была бы двух- или трехтомная работа по теории решеток, в которой предмет раскрывался бы во всей полноте. Мы чувствовали, однако, что время для осуществления такого проекта еще не наступило. Ведь подобная работа не могла бы претендовать на завершенность, если бы в ней, скажем, не был указан хотя бы один пример недистрибутивной решетки с единственными дополнениями. А мы не знали, как это сделать, не воспроизводя почти тридцати страниц знаменитого доказательства Р. П. Дилуорса».

Приведенная выше конструкция Адамса и Сихлера несравненно проще построений Дилуорса, но тем не менее и она задает желанный объект лишь в виде предельного процесса.

Мы знаем, что недистрибутивные решетки с единственными дополнениями существуют, но до сих пор не имеем ни одного явного примера: эти решетки еще не встречались в математической практике.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

§ 1. Полные решетки

1. Напомним, что полной решеткой называется у-множество $(L, \leqslant)$, в котором каждое непустое подмножество X имеет точную нижнюю грань $\operatorname{Inf} X$ и точную верхнюю грань $\operatorname{Sup} X$. Среди уже встречавшихся решеток полной будет, например, $(P(A), \subseteq)$ — совокупность всех подмножеств некоторого множества A, упорядоченная теоретико-множественным включением. Действительно, если $\mathscr{A} \subseteq P(A)$ — некоторый непустой набор подмножеств множества A, то $\operatorname{Inf} \mathscr{A} = \bigcap\limits_{X \in \mathscr{A}} X$ и $\operatorname{Sup} \mathscr{A} = \bigcup\limits_{X \in \mathscr{A}} X$.

Полная решетка $(L, \leqslant)$ обязательно ограничена: ее наименьшим элементом будет $\mathrm{O} = \operatorname{Inf} L$, а наибольшим — элемент $\mathrm{I} = \operatorname{Sup} L$.

Довольно часто встречаются решетки, которые хотя и не являются полными, но становятся таковыми, если к ним присоединить отсутствующие наименьший или наибольший элемент (или оба сразу). Так «пополняются», например, знакомые нам решетки $(\mathbf{R}, \leqslant)$ (добавлением несобственных точек $-\infty$ и $+\infty$), $(\mathbf{N}, \leqslant)$ и $(\mathbf{N}^-, \leqslant)$ (им не хватает соответственно наибольшего и наименьшего элемента), $(\mathbf{N}, |)$ (сюда в качестве наибольшего элемента присоединяют число 0 с дополнительным соглашением $0 | 0$).

2. Следующий результат постоянно используется для установления полноты решеток.

Теорема 19. *Решетка тогда и только тогда полна, когда в ней есть наибольший элемент и любое ее непустое подмножество имеет точную нижнюю грань.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна.

Пусть L — решетка, удовлетворяющая условиям теоремы, и X — произвольное ее непустое подмножество. Подмножество

$$\bar{X} = \{y \in L\colon\ (\forall x \in X)\,(y \geqslant x)\},$$

состоящее из всех верхних граней для X, не пусто (оно содержит, например, наибольший элемент I решетки L), и по условию существует $a = \operatorname{Inf} \bar{X}$. Этот элемент a будет наименьшей верхней гранью подмножества X. В самом деле, так как каждый элемент $x \in X$ является нижней гранью подмножества $\bar{X}$, а a — наибольшая нижняя грань этого подмножества, то $x \leqslant a$. Это означает, что a входит в $\bar{X}$ и, следовательно, является наименьшей среди верхних граней подмножества X.

Итак, каждое непустое подмножество решетки L имеет наибольшую нижнюю грань (по условию) и наименьшую верхнюю грань (как было доказано), — L является полной решеткой.

Теорема доказана.

Применяя этот критерий, устанавливаем, например, полноту решетки $\operatorname{Sub} A$ всех подалгебр произвольной алгебры A.

3. Пусть A — некоторое непустое множество и $P^*(A)$ — совокупность всех его непустых подмножеств. *P-операцией* на A называется всякое отображение o: $P^*(A) \to A$. Таким образом, P-операция соотносит каждому непустому подмножеству множества A некоторый элемент из A. Например, всякая функция выбора является P-операцией.

P-алгеброй называется множество с заданным на нем набором P-операций. P-алгебру с одной P-операцией будем называть *P-оперативом*.

Если $(L, \leqslant)$ — некоторая полная решетка, то, сопоставляя каждому непустому подмножеству $X \subseteq L$ его точную нижнюю грань $\operatorname{Inf} X$, мы определяем P-операцию на множестве L. Другая P-операция на L вводится правилом $X \longmapsto \operatorname{Sup} X$. Таким образом, с каждой полной решеткой $(L, \leqslant)$ ассоциируется P-алгебра $(L, \operatorname{Inf}, \operatorname{Sup})$.

Будем говорить, что P-алгебра $(L, \bigwedge, \bigvee)$ с двумя P-операциями ассоциирована с полной решеткой, если на множестве L можно задать порядок $\leqslant$ таким образом, чтобы у-множество $(L, \leqslant)$ было полной решеткой и при этом чтобы P-операция Inf в этой полной решетке совпала с заданной P-операцией $\bigwedge$, а P-операция Sup — с заданной P-операцией $\bigvee$.

Теорема 20. *P-алгебра* $(L, \bigwedge, \bigvee)$ *с двумя P-операциями тогда и только тогда ассоциирована с полной решеткой, когда в ней выполняются следующие условия:*

$$(\alpha)\ 1)\ \bigwedge \bigcup_{X \in \mathscr{L}} X = \bigwedge \{\bigwedge X\colon X \in \mathscr{L}\},$$

$$2)\ \bigvee \bigcup_{X \in \mathscr{L}} X = \bigvee \{\bigvee X\colon X \in \mathscr{L}\}$$

для любого семейства $\mathscr{L} \subseteq P^*(L)$ (ассоциативность);

IV. 1) $\bigwedge \{x, \bigvee \{x, y\}\} = x$,

2) $\bigvee \{x, \bigwedge \{x, y\}\} = x$ (законы поглощения).

Доказательство. Необходимость. Пусть $(L, \mathrm{Inf}, \mathrm{Sup})$ — полная решетка, рассматриваемая как P-алгебра. Понятно, что законы поглощения IV выполняются в ней. Перепишем условие (α 1):

$$u = \mathrm{Inf}\left(\bigcup_{X \in \mathscr{L}} X\right) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Inf}\, X\colon X \in \mathscr{L}\} = v$$

для любого семейства $\mathscr{L} \subseteq P^*(L)$.

По определению, $u \leqslant x$ для любого $x \in \bigcup_{X \in \mathscr{L}} X$. Тогда $u \leqslant \mathrm{Inf}\, X$ для любого $X \in \mathscr{L}$, откуда $u \leqslant v$.

С другой стороны, так как $v \leqslant \mathrm{Inf}\, X$ для любого $X \in \mathscr{L}$, то $v \leqslant x$ для каждого x из любого $X \in \mathscr{L}$, т. е. $v \leqslant x$ для всех $x \in \bigcup_{X \in \mathscr{L}} X$. Значит, $v \leqslant u$.

Равенство (α 2) для Sup доказывается двойственно.

Достаточность. Пусть P-алгебра $(L, \bigwedge, \bigvee)$ удовлетворяет условиям теоремы. Ограничивая P-операции $\bigwedge$ и $\bigvee$ на двухэлементных подмножествах (в привычных инфиксных обозначениях: $\bigwedge \{x, y\} = x \wedge y$, $\bigvee \{x, y\} = x \vee y$), мы легко получаем из условия (α) коммутативность и ассоциативность построенных бинарных операций. Кроме того, они удовлетворяют законам поглощения и, следовательно, идемпотентны. Значит, отношение порядка $\omega = \{(x, y)\colon \bigwedge \{x, y\} = x\}$, как в теореме 3, определяет на L структуру решетки, в которой порядковые операции inf и sup совпадают с бинарными операциями $\bigwedge$ и $\bigvee$ соответственно.

Покажем теперь, что на самом деле (L, ω) — полная решетка и в ней $\mathrm{Inf} = \bigwedge$ и $\mathrm{Sup} = \bigvee$.

Действительно, пусть $X \subseteq L$ — произвольное непустое подмножество. Обозначим $\bigwedge X = x_*$. Тогда для любого $x \in X$ будет

$$\bigwedge \{x_*, x\} = \bigwedge \{\bigwedge X, \bigwedge \{x\}\} \overset{\alpha 1}{=} \bigwedge (X \cup \{x\}) = \bigwedge X = x_*,$$

так что x_* является нижней гранью подмножества X.

Пусть $\underline{x}$ — другая нижняя грань для X, т. е. $\bigwedge \{\underline{x}, x\} = \underline{x}$ для любого $x \in X$. Тогда, применяя (α 1), имеем

$$\bigwedge \{\underline{x}, x_*\} = \bigwedge \{\bigwedge \{\underline{x}\}, \bigwedge X\} = \bigwedge (X \cup \{\underline{x}\}) =$$
$$= \bigwedge \left(\bigcup_{x \in X} \{\underline{x}, x\} \right) = \bigwedge \{\bigwedge \{\underline{x}, x\} : x \in X\} = \bigwedge \{\underline{x}\} = \underline{x},$$

т. е. $\underline{x} \leqslant x_*$, и, значит, x_* является наибольшей нижней гранью подмножества X. Двойственно доказывается совпадение порядковой P-операции Sup с заданной P-операцией $\bigvee$.

4. Доказанная теорема позволяет рассматривать полную решетку в двух аспектах: как у-множество, в котором определены точные грани всех непустых подмножеств, и как P-алгебру с двумя ассоциативными P-операциями, удовлетворяющими законам поглощения.

Рассматривая полную решетку L как P-алгебру $(L, \bigwedge, \bigvee)$ будем называть P-операцию $\bigwedge$ *пересечением*, а P-операцию $\bigvee$ — *объединением*. При этом выражения $\bigwedge X$ и $\bigvee X$ читаются соответственно как «пересечение множества X» и «объединение множества X», а если X индексировано: $X = \{x_i : i \in I\}$, то употребляются еще и записи $\bigwedge\limits_{i \in I} x_i$ и $\bigvee\limits_{i \in I} x_i$ с их естественным чтением. Распространяя P-операции объединения и пересечения и на случай пустого подмножества, полагают $\bigvee \varnothing = \mathrm{O}$, что кажется вполне естественным, и тогда, из соображений двойственности, $\bigwedge \varnothing = \mathrm{I}$ — равенство, не воспринимаемое непосредственной интуицией.

P-подалгебры полной решетки $(L, \bigwedge, \bigvee)$, т. е. подмножества ее, замкнутые относительно P-операций пересечения и объединения называются ее *полными подрешетками*.

§ 2. Пополнение сечениями

1. Пусть L — произвольная решетка. Идеал J в ней называется *замкнутым*, если он содержит все нижние грани множества всех своих верхних граней. Например, каждый главный идеал решетки замкнут. *Замкнутые идеалы решетки* L, будучи упорядочены теоретико-множественным включением, *образуют полную решетку* $CJ(L)$. Действительно, если J — замкнутый идеал и $X \subseteq J$, то совокупность $\bar{X}$ всех верхних граней подмножества X, конечно, содержит совокупность $\bar{J}$ всех верхних граней идеала J. Но тогда каждая нижняя грань для $\bar{X}$ будет нижней гранью для $\bar{J}$ и, следовательно, принадлежит J. Отсюда выводим, что теоретико-множественное пересечение любого набора замкнутых идеалов будет замкнутым идеалом, и можно применить теорему 19.

Замкнутые идеалы играют важную роль в доказательстве следующего замечательного результата.

Теорема Макнила. *Всякая решетка может быть вложена с сохранением всех имеющихся в ней точных граней в подходящую полную решетку.*

Доказательство. Покажем, что всякая решетка L допускает требуемое вложение в полную решетку $CJ(L)$ своих замкнутых идеалов и что в качестве такого вложения можно взять соответствие $x \longmapsto J(x)$, сопоставляющее каждому элементу $x \in L$ определяемый им главный идеал.

Решетка $(CJ(L), \subseteq)$, конечно, является у-подмножеством в решетке $(P(L), \subseteq)$, причем P-операция пересечения в этих полных решетках совпадает. В теореме 7 было доказано, что отображение φ: $L \to P(L)$: $x \longmapsto J(x)$ взаимно однозначно и сохраняет все точные нижние грани. Следовательно, остается доказать, что для любого непустого подмножества $X \subseteq L$ имеет место равенство $\varphi\left(\bigvee X\right) = \bigvee\limits_{x \in X} \varphi(x)$.

Для простоты положим $\bigvee X = x^*$.

Так как $x \leqslant x^*$ для любого $x \in X$, то $J(x^*)$ содержит все идеалы $J(x)$, $x \in X$. Покажем, что $J(x^*)$ является наименьшим среди замкнутых идеалов, содержащих все $J(x)$, $x \in X$.

Лемма. *Если J — замкнутый идеал решетки L и Y — его непустое подмножество, имеющее в L точную верхнюю грань y^*, то $y^* \in J$.*

(Действительно, всякая верхняя грань идеала J, будучи верхней гранью подмножества Y, содержит элемент y^*, т. е. y^* является нижней гранью множества $\bar{J}$ всех верхних граней идеала J. В силу замкнутости, $y^* \in J$.)

Но тогда, если, $J \in CJ(L)$, то

$$(\forall x \in X)(J(x) \subseteq J) \Rightarrow X \subseteq J \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* = \bigvee X \in J \Rightarrow J(x^*) \subseteq J.$$

Итак,

$$\varphi\left(\bigvee X\right) = \varphi(x^*) = J(x^*) = \bigvee_{x \in X} J(x) = \bigvee_{x \in X} \varphi(x).$$

Поскольку в L определены пересечения и объединения двухэлементных подмножеств и отображение φ сохраняет эти бинарные операции, φ является решеточным вложением решетки L в полную решетку $CJ(L)$.

2. Если решетка L полна, то замкнутыми идеалами в ней будут главные идеалы, и только они, и следовательно, решетка $CJ(L)$ оказывается в этом случае изоморфной самой решетке L.

3. Рациональные числа относительно естественного порядка образуют решетку $(\mathbf{Q}, \leqslant)$, которая не является полной, даже если присоединить к ней несобственные элементы $-\infty$ и $+\infty$. Примененный Дедекиндом аксиоматический метод введения иррациональных чисел есть не что иное, как построение для $\mathbf{Q}$ полной решетки замкнутых идеалов $CJ(\mathbf{Q})$ (дедекиндовы сечения — это пары (J, J'), где J — замкнутый идеал в $\mathbf{Q}$, а J' — его теоретико-множественное дополнение). Теорема Макнила переносит конструкцию Дедекинда на случай произвольной решетки (на самом деле — на случай произвольного у-множества). Имея в виду эту связь, вложение $L \to CJ(L)$ и саму полную решетку $CJ(L)$ называют *пополнением решетки L сечениями*.

Теперь покажем, что класс булевых алгебр замкнут относительно пополнений сечениями.

Теорема Гливенко. *Пополнение сечениями булевой алгебры является булевой алгеброй.*

Доказательство. Пусть L — булева алгебра и $CJ(L)$ — полная решетка всех ее замкнутых идеалов.

Покажем, что $CJ(L)$ является решеткой с единственными дополнениями, в которой операция дополнения антиизотонна. В силу следствия 1 из теоремы 16, $CJ(L)$ будет булевой алгеброй.

Пусть J — произвольный замкнутый идеал булевой алгебры L. Положим

$$J^* = \{y \in L\colon\ (\forall x \in J)(y \leqslant x')\},$$

т. е. J^* состоит из нижних граней для множества дополнений элементов из J.

1) *J^* — замкнутый идеал.*

Понятно, что J^* — идеал решетки L. Если z — нижняя грань множества всех верхних граней для J^*, то z будет нижней гранью и для множества $\{x'\colon\ x \in J\}$, все элементы которого являются верхними гранями для J^*. Отсюда следует, что идеал J^* замкнутый.

2) *J^* является дополнением для J в решетке $CJ(L)$.*

Нужно показать, что $J \cap J^* = \{0\}$ и $J \vee J^* = L$.

Если $z \in J \cap J^*$, то z, с одной стороны, входит в J, а с другой стороны, должен содержаться в дополнении каждого элемента из J; в частности, $z \leqslant z'$, откуда $z = 0$. Итак, $J \cap J^* = \{0\}$.

Если элемент u является верхней гранью для множества $J \cup J^*$, т. е. если он больше каждого $x \in J$ и больше каждого $y \in J^*$, то $u' \leqslant x'$ для всех $x \in J$, т. е. $u' \in J^*$, и $u' \leqslant y'$ для всех $y \in J^*$; в частности, $u' \leqslant (u')' = u$, откуда $u' = 0$, и, следовательно, $u = 1$. Таким образом, у множества $J \cup J^*$ есть только одна верхняя грань: элемент 1. Но подмножество $J \vee J^*$ (это ведь замкнутый идеал) должно содержать все нижние грани множества всех верхних граней любого своего подмножества и, в частности, подмножества $J \cup J^*$. Это означает, что $J \vee J^* = L$.

3) *$CJ(L)$ — решетка с единственными дополнениями.*

Пусть K — некоторое дополнение для J в решетке $CJ(L)$. По определению, $J \cap K = \{0\}$. Если $x \in J$, $z \in K$, то $x \wedge z \in J \cap K = \{0\}$ и, следовательно, $x \wedge z = 0$ для любых $x \in J$, $z \in K$. В булевой алгебре это означает, что $z \leqslant x'$, каковы бы ни были $x \in J$, $z \in K$, т. е. установлено включение $K \subseteq J^*$.

С другой стороны, если u — общая верхняя грань для J и K, то J и K оба содержатся в главном идеале $J(u)$, и, значит, $J \vee K \subseteq J(u)$. Но $J \vee K = L$, и, следовательно, единственной общей верхней гранью для J и K будет элемент 1.

Пусть $y \in J^*$. Так как $y \leqslant x'$ для всех $x \in J$, то y' будет верхней гранью для J. Если v — произвольная верхняя грань для K, то элемент $y' \vee v$, будучи общей

верхней гранью для J и K, совпадает с I. Тогда

$$y = y \wedge \mathrm{I} = y \wedge (y' \vee v) = (y \wedge y') \vee (y \wedge v) = y \wedge v,$$

откуда $y \leqslant v$, т. е. всякий элемент из J^* является нижней гранью множества всех верхних граней замкнутого идеала K. Это означает, что $J^* \subseteq K$.

Итак, $K = J^*$.

4) *В решетке с единственными дополнениями $CJ(L)$ истинно квазитождество $J \subseteq K \Rightarrow J^* \supseteq K^*$.*

В самом деле, если некоторый элемент меньше всех дополнений для элементов замкнутого идеала K, то он и подавно меньше всех дополнений для элементов подмножества J из K. Отсюда и следует антиизотонность операции дополнения в решетке $CJ(L)$.

Теорема доказана.

Следующий вопрос является проблемой 36 из книги Биркгофа [2]: если L — решетка с единственными дополнениями, то обязательно ли $CJ(L)$ будет решеткой с единственными дополнениями? Другими словами, *замкнут ли класс ЕД-решеток относительно пополнений сечениями?*

§ 3. Представления полных решеток

1. *Операцией замыкания* на множестве A называется отображение φ: $P(A) \to P(A)$: $X \mapsto \bar{X}$, удовлетворяющее условиям:

C1. $X \subseteq \bar{X}$ (экстенсивность);

C2. $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$ (идемпотентность);

C3. $X \subseteq Y \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$ (изотонность).

Подмножества множества A такие, что $\bar{X} = X$, называются *замкнутыми*.

Из теоремы 19 следует, что совокупность $C(A)$ всех замкнутых (относительно фиксированной операции замыкания C) подмножеств данного множества A, упорядоченная теоретико-множественным включением, является полной решеткой. Действительно, если подмножества X_i, $i \in I$, все замкнуты, то $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \bar{X}_i = X_i$ для любого $i \in I$, откуда $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$, а обратное включение обеспечивается первой аксиомой замыкания; это означает, что $\bigcap_{i \in I} X_i$ является в $C(A)$ точной нижней гранью семейства $\{X_i : i \in I\}$. Кроме того, $A \in C(A)$,

Итак, в решетке $C(A)$ будет $\bigwedge_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i$, а объединение $\bigvee_{i\in I} X_i$ семейства $\{X_i\colon i\in I\}$ замкнутых подмножеств совпадает, как нетрудно сообразить, с $\overline{\bigcup_{i\in I} X_i}$ — замыканием теоретико-множественного объединения этих подмножеств.

Гораздо больший интерес представляет следующая

Теорема 21. *Всякая полная решетка изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества, замкнутых относительно подходящей операции замыкания.*

Доказательство. Пусть L — полная решетка. Каждому непустому подмножеству $X\subseteq L$ сопоставим главный идеал $J(\operatorname{Sup} X)$. Понятно, что $X\subseteq J(\operatorname{Sup} X)$ и что если $X\subseteq Y$, то $J(\operatorname{Sup} X)\subseteq J(\operatorname{Sup} Y)$ для любых X, $Y\in P(L)$. Кроме того, если подмножество X является главным идеалом, и следовательно, имеет наибольший элемент, то $J(\operatorname{Sup} X)=X$. Таким образом, соответствие $X\longmapsto J(\operatorname{Sup} X)$ определяет на L операцию замыкания. Замкнутыми подмножествами относительно нее будут главные идеалы, и только они. В силу полноты решетки L главными идеалами исчерпываются все ее замкнутые идеалы, так что решетка замкнутых подмножеств совпадает с решеткой $CJ(L)$. Но для полных решеток решетка $CJ(L)$ изоморфна самой решетке L (§ 2.2).

2. Другой тип представления для полных решеток получается, если использовать понятие P-операции.

Пусть (A, o) — некоторый P-оператив. Непустое подмножество $X\subseteq A$ такое, что $\mathrm{o}(Y)\in X$ для любого непустого $Y\subseteq X$, называется *P-подоперативом* в (A, o). Совокупность всех P-подоперативов P-оператива (A, o) обозначим $\operatorname{Sub} A$. Очевидно, что $(\operatorname{Sub} A, \subseteq)$ является полной решеткой (если в $\operatorname{Sub} A$ нет наименьшего элемента, придется считать P-подоперативом и пустое подмножество).

Теорема 22. *Всякая полная решетка изоморфна решетке всех P-подоперативов подходящего P-оператива.*

Доказательство. Пусть L — полная решетка. По теореме 21 она изоморфна решетке $C(A)$ всех замкнутых (относительно подходящей операции замыкания) подмножеств некоторого множества A (мы помним, что на самом деле $A=L$, но сейчас это не имеет значения).

Определим P-операцию на A следующим образом. Если φ — некоторая фиксированная функция выбора на A

(теорема 2), то положим

$$\mathrm{o}(X)=\begin{cases}\varphi(X), & \text{если } \bar{X}=X,\\ \varphi(\bar{X}\setminus X), & \text{если } \bar{X}\neq X,\end{cases}$$

где $X\in P^*(A)$, а $\bar{X}$ обозначает замыкание подмножества X.

Пусть $X\in \mathrm{Sub}\,A$. Покажем, что подмножество X замкнуто, т. е. что $\bar{X}=X$. Действительно, если $\bar{X}\setminus X\neq\varnothing$, то $\mathrm{o}(X)=\varphi(\bar{X}\setminus X)\in\bar{X}\setminus X$, по определению P-операции o, и, значит, $\mathrm{o}(X)\notin X$, т. е. X не является P-подоперативом. Полученное противоречие означает, что $\bar{X}\subseteq X$, т. е. X — замкнутое подмножество.

С другой стороны, если подмножество X замкнуто, то для любого непустого $Y\subseteq X$ будет $\mathrm{o}(Y)\in\bar{Y}\subseteq\bar{X}=X$, откуда следует, что X является P-подоперативом в (A, o).

Итак, P-подоперативами в A будут замкнутые подмножества и только они. Решетка $\mathrm{Sub}\,A$ изоморфна решетке $C(A)$, и ей же изоморфна решетка L.

3. Оказывается, для представления полных решеток можно ограничиться P-оперативами довольно специального вида.

P-оператив A называется *однопорожденным*, если в A существует элемент a, не содержащийся ни в каком собственном P-подоперативе P-оператива A. Этот элемент a называется порождающим для P-оператива A. P-оператив назовем *элементарным*, если все его P-подоперативы являются однопорожденными.

Теорема 23. *Всякая полная решетка изоморфна решетке всех P-подоперативов некоторого элементарного P-оператива.*

Доказательство. Если учесть теорему 22, дело сводится к доказательству следующего утверждения: для любого P-оператива A существует элементарный P-оператив A^* такой, что решетки $\mathrm{Sub}\,A$ и $\mathrm{Sub}\,A^*$ изоморфны.

Пусть (A, o) — заданный P-оператив и φ: $P^*(A)\to A$ — некоторая функция выбора на множестве A (теорема 2). На множестве $A^*=A\cup\mathrm{Sub}\,A$ определим P-операцию o^* следующим образом. Если $X\subseteq A$ и $\mathscr{X}\subseteq\mathrm{Sub}\,A$, то положим (считая, конечно, что $X\neq\varnothing$ или $\mathscr{X}\neq\varnothing$)

$$\mathrm{o}^*(X\cup\mathscr{X})=\begin{cases}X, & \text{если } \mathrm{Sup}\,\mathscr{X}\subseteq X \text{ и } X\in\mathrm{Sub}\,A,\\ \mathrm{o}(X), & \text{если } \mathrm{Sup}\,\mathscr{X}\subseteq X \text{ и } X\notin\mathrm{Sub}\,A,\\ \varphi(\mathrm{Sup}\,\mathscr{X}\setminus X), & \text{если } \mathrm{Sup}\,\mathscr{X}\not\subseteq X.\end{cases}$$

Здесь $\operatorname{Sup}\mathscr{X}$ обозначает точную верхнюю грань подмножества $\mathscr{X}$ в решетке $\operatorname{Sub} A$, т. е. наименьший P-подоператив P-оператива A, содержащий все P-подоперативы, входящие в семейство $\mathscr{X}$.

Покажем, что построенный P-оператив (A^*, o^*) и будет удовлетворять нашим требованиям.

1) *Все P-подоперативы в A^* имеют вид $X \cup \operatorname{Sub} X$, где $X \in \operatorname{Sub} A$.*

Пусть $X \in \operatorname{Sub} A$ и $Y \subseteq X$, $\mathscr{Y} \subseteq \operatorname{Sub} X$. Заменяя в определении P-операции o^* всюду X на Y, а $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, рассмотрим три возникающие возможности.

В первом случае (где $\operatorname{Sup}\mathscr{Y} \subseteq Y$ и $Y \in \operatorname{Sub} A$) будет

$$\mathrm{o}^*(Y \cup \mathscr{Y}) = Y \in \operatorname{Sub} Y \subseteq \operatorname{Sub} X \subseteq X \cup \operatorname{Sub} X.$$

Во втором (где $\operatorname{Sup}\mathscr{Y} \subseteq Y$, но $Y \notin \operatorname{Sub} A$)

$$\mathrm{o}^*(Y \cup \mathscr{Y}) = \mathrm{o}(Y) \in X$$

(так как X является P-подоперативом в A), и, значит,

$$\mathrm{o}^*(Y \cup \mathscr{Y}) \in X \cup \operatorname{Sub} X.$$

В третьем случае (где $\operatorname{Sup}\mathscr{Y} \nsubseteq Y$)

$$\mathrm{o}^*(Y \cup \mathscr{Y}) = \varphi(\operatorname{Sup}\mathscr{Y} \setminus Y) \in \operatorname{Sup}\mathscr{Y} \setminus Y \subseteq$$
$$\subseteq \operatorname{Sup}\mathscr{Y} \subseteq X \subseteq X \cup \operatorname{Sub} X.$$

Таким образом, подмножество $X \cup \operatorname{Sub} X$ устойчиво относительно P-операции o^* в A^*, т. е. $X \cup \operatorname{Sub} X \in \operatorname{Sub} A^*$.

Обратно, пусть подмножество $X \cup \mathscr{X}$, где $X \subseteq A$ и $\mathscr{X} \subseteq \operatorname{Sub} A$, является P-подоперативом в (A^*, o^*), но при этом нарушается хотя бы одно из условий $X \in \operatorname{Sub} A$ или $\mathscr{X} = \operatorname{Sub} X$.

Предположим сначала, что $X \notin \operatorname{Sub} A$.

Если это так, то найдется непустое подмножество $Y \subseteq X$, для которого $\mathrm{o}(Y) \notin X$. Понятно, что тогда $Y \notin \operatorname{Sub} A$, и, значит,

$$\mathrm{o}^*(Y) = \mathrm{o}^*(Y \cup \varnothing) = \mathrm{o}(Y) \notin X \cup \mathscr{X},$$

что противоречит устойчивости подмножества $X \cup \mathscr{X}$ в P-оперативе (A^*, o^*).

Значит, если $X \cup \mathscr{X} \in \operatorname{Sub} A^*$, то обязательно $X \in \operatorname{Sub} A$.

Предположим теперь, что $\mathscr{X} \neq \operatorname{Sub} X$. Здесь возникают два случая.

а) $\mathscr{X} \subset \operatorname{Sub} X$. В этом случае существует $Y \in \operatorname{Sub} X$ такой, что $Y \notin \mathscr{X}$. Очевидно, что $Y \subseteq X \cup \mathscr{X}$, но, по определению, $\mathrm{o}^*(Y) = \mathrm{o}^*(Y \cup \varnothing) = Y \notin X \cup \mathscr{X}$, что противоречит устойчивости подмножества $X \cup \mathscr{X}$ в P-оперативе (A^*, o^*).

б) $\mathscr{X} \not\subseteq \operatorname{Sub} X$. В этом случае найдется $Y \in \operatorname{Sub} A$ такой, что $Y \in \mathscr{X}$, но $Y \notin \operatorname{Sub} X$. Тогда $\operatorname{Sup}\{Y\} = Y \not\subseteq X$, и, значит, $\mathrm{o}^*(X \cup \{Y\}) = \varphi(Y \setminus X) \in Y \setminus X \notin X$, т. е. $\mathrm{o}^*(X \cup \{Y\}) \notin X \cup \mathscr{X}$, что противоречит устойчивости подмножества $X \cup \mathscr{X}$ относительно P-операции o^*.

Итак, все P-подоперативы в (A^*, o^*) имеют вид $X \cup \operatorname{Sub} X$, где X пробегает множество $\operatorname{Sub} A$.

2) *P-оператив (A^*, o^*) является элементарным.*

Покажем, что P-подоператив $(X \cup \operatorname{Sub} X, \mathrm{o}^*)$ порождается в (A^*, o^*) своим элементом X (понятно, что $X \in \operatorname{Sub} X \subseteq X \cup \operatorname{Sub} X$).

Действительно, если P-подоператив $(Y \cup \operatorname{Sub} Y, \mathrm{o}^*)$ содержит элемент X, то $X \in \operatorname{Sub} Y$, откуда $X \subseteq Y$, и, следовательно, $X \cup \operatorname{Sub} X \subseteq Y \cup \operatorname{Sub} Y$, так что $X \cup \operatorname{Sub} X$ является наименьшим P-подоперативом в (A^*, o^*), содержащим элемент $X \in A^*$.

3) *Решетки* $\operatorname{Sub} A$ *и* $\operatorname{Sub} A^*$ *изоморфны.*

Как нетрудно убедиться, отображение $\operatorname{Sub} A \to \operatorname{Sub} A^*$: $X \longmapsto X \cup \operatorname{Sub} X$ будет изотонным и обратно изотонным взаимно однозначным соответствием между у-множествами $(\operatorname{Sub} A, \subseteq)$ и $(\operatorname{Sub} A^*, \subseteq)$.

4. Из доказанной теоремы получается аналогичный результат для операций замыкания. Будем называть операцию замыкания элементарной, если каждое замкнутое относительно нее подмножество является замыканием некоторой точки (точнее, одноэлементного подмножества).

Следствие. *Всякая полная решетка изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества, замкнутых относительно подходящей элементарной операции замыкания.*

Доказательство. Действительно, если на множестве A задана структура элементарного P-оператива, то сопоставляя каждому подмножеству $X \subseteq A$ наименьший среди содержащих его P-подоперативов, мы получаем операцию замыкания на A, которая очевидным образом элементарна: всякое замкнутое подмножество X является P-подоперативом; этот P-подоператив порождается некоторым элементом, замыканием подмножества, состоящего из этого элемента, и будет X.

§ 4. Алгебраические решетки

1. Представление полной решетки в виде решетки замкнутых подмножеств дает возможность классифицировать полные решетки по свойствам представляющих их операций замыкания.

Операция замыкания на множестве A называется *алгебраической*, если теоретико-множественное объединение любого направленного (вверх) семейства замкнутых относительно нее подмножеств является замкнутым подмножеством.

Полная решетка называется *алгебраической*, если она изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества, замкнутых относительно подходящей алгебраической операции замыкания.

Название это мотивирует следующая

Теорема Биркгофа—Фринка. *(Полная) решетка тогда и только тогда является алгебраической, когда она изоморфна решетке всех подалгебр некоторой алгебры.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — некоторая алгебра и $\{X_i\colon i \in I\}$ — направленное (вверх) семейство ее подалгебр. Нужно доказать, что подмножество $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ является подалгеброй, т. е. что оно замкнуто относительно всех операций алгебры A. Пусть o — одна из n-арных операций алгебры A и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные элементы из X. Тогда каждый x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, входит в некоторую подалгебру X_{i_k}. В силу направленности рассматриваемого семейства подалгебр (и в силу конечности n) в нем существует подалгебра X_{i_0}, содержащая все подалгебры $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ и, значит, все элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Но тогда $\mathrm{o}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_{i_0} \subseteq X$.

Достаточность. Пусть L — алгебраическая решетка. Представим ее как решетку всех подмножеств, замкнутых относительно подходящей алгебраической операции замыкания на некотором множестве A. Нужно ввести на множестве A структуру алгебры таким образом, чтобы подалгебрами оказались элементы решетки L (мы теперь воспринимаем их как замкнутые подмножества), и только они.

Если наименьший элемент O решетки L представляется пустым подмножеством, т. е. если $\overline{\varnothing} = \varnothing$, то нульарных операций в определяемой алгебре не будет, а если

$\overline{\varnothing} \neq \varnothing$, то для каждого элемента $a \in \overline{\varnothing}$ определим нульарную операцию, фиксирующую этот элемент.

Пусть теперь $n > 0$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольная упорядоченная n-ка элементов множества A. Образуем множество $\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ и для каждого $a \in \overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ определим на A n-арную операцию:

$$o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} a, \text{ если } x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n, \\ x_1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тем самым на множестве A определена структура алгебры с бесконечным числом операций вида $o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$, где при $n = 1, 2, \ldots$ верхний индекс пробегает множество A^n, а нижний — множество $\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ для каждой упорядоченной n-ки $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$.

Пусть X — замкнутое подмножество, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ — произвольные элементы и $o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ — некоторая n-арная операция в A. Если окажется, что $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \ldots$, $x_n = a_n$, то, по определению,

$$o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \in \overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}} \subseteq \overline{X} = X,$$

а если $x_i \neq a_i$ хотя бы для одного i, то

$$o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \in X.$$

Таким образом, всякое замкнутое подмножество является подалгеброй в A (понятно, что X замкнуто относительно всех нульарных операций: $\overline{\varnothing} \subseteq X$).

С другой стороны, пусть X — некоторая подалгебра алгебры A. Нужно показать, что $\overline{X} = X$. Прежде всего убедимся, что замыкание любого конечного подмножества из X содержится в X. Действительно, если $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq X$ и $a \in \overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$, то в A определена n-арная операция $o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ и при этом $o_a^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$. Так как X — подалгебра, то $a \in X$, откуда $\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}} \subseteq X$. Но в таком случае подмножество X совпадает с теоретико-множественным объединением замыканий своих конечных подмножеств. Конечные подмножества множества X образуют направленное семейство, а из свойства изотонности операции замыкания следует, что тогда направленным будет и семейство замыканий конечных подмножеств множества X. Так как операция замыкания, с которой мы

имеем дело, алгебраическая, то X' оказывается замкнутым подмножеством.

Теорема доказана.

Пример. Пусть L — полная решетка, получающаяся присоединением к решетке $(\mathbf{N}, \leqslant)$ наибольшего элемента ∞. На множестве $\mathbf{N}$ определим унарную операцию, полагая

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ n-1, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

В алгебре $(\mathbf{N}, \delta)$ подалгебрами будут главные идеалы решетки $(\mathbf{N}, \leqslant)$, и только они (пустое подмножество в данном случае можно не включать в число подалгебр). Нетрудно понять, что решетка $\operatorname{Sub}\mathbf{N}$ подалгебр алгебры $(\mathbf{N}, \delta)$ изоморфна решетке L. Так что решетка L алгебраическая.

Укажем представление решетки L, удовлетворяющее условиям теоремы 23, т. е. в виде решетки всех P-подоперативов некоторого элементарного P-оператива.

На множестве $\mathbf{N}^\infty = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ определим P-операцию o, для непустого $X \subseteq \mathbf{N}^\infty$ полагая

$$\mathrm{o}(X) = \begin{cases} n, & \text{если } X = [1, n], \\ n+1, & \text{если } X = [1, n] \cup B, \text{ где } \operatorname{Inf} B > n+1, \\ \infty, & \text{если } X = \mathbf{N}, \\ \operatorname{Inf} X - 1, & \text{если } \operatorname{Inf} X > 1, \\ 1, & \text{если } X = \{\infty\}. \end{cases}$$

Из этого определения видно, что P-подоперативами в $\mathbf{N}^\infty$ будут лишь главные идеалы решетки $(\mathbf{N}^\infty, \leqslant)$. При этом P-подоператив $[1, n]$ порождается элементом n, а решетка $\operatorname{Sub}\mathbf{N}^\infty$ изоморфна решетке L. Но, конечно, элементарная операция замыкания, соответствующая P-операции o, не будет алгебраической (теоретико-множественное объединение всех P-подоперативов совпадает с $\mathbf{N}$, а $\mathbf{N}$ не является P-подоперативом).

2. Следующий результат с учетом строения решеток подалгебр вытекает из теоремы 12.

Теорема 24. *Алгебраическая решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Доказательство. Покажем, что в алгебраической решетке каждый главный идеал содержит простой интервал.

Пусть L — алгебраическая решетка. По теореме Биркгофа — Фринка можно считать ее решеткой всех подалгебр

некоторой алгебры A. Пусть X — произвольная непустая подалгебра в A (считаем, что в A нет нульарных операций). Если X не содержит собственных подалгебр, то интервал $[\phi, X]$ будет простым в L. Предположим, что X имеет хотя бы одну собственную подалгебру. Тогда не всякий элемент из X порождает X. Допустим, например, что наименьшая подалгебра $S(a)$, содержащая элемент $a \in X$, не совпадает с X (рис. 25).

Рассмотрим упорядоченное включением множество $\mathscr{S}(a)$ всех собственных подалгебр в $S(a)$. Будем считать, что оно не пусто, поскольку иначе интервал $[\phi, S(a)]$ простой и доказательство закончено.

Если $\{X_i\colon i \in I\}$ — какая-нибудь цепь в у-множестве $\mathscr{S}(a)$, то теоретико-множественное объединение $\bigcup_{i \in I} X_i$ является подалгеброй в $S(a)$. Эта подалгебра не содержит элемента a, так как в противном случае элемент a входил бы в некоторую подалгебру X_{i_0}, $i_0 \in I$, и она совпала бы с $S(a)$, что невозможно. Таким образом, в у-множестве $\mathscr{S}(a)$ каждая цепь имеет верхнюю грань, и, следовательно, по лемме Куратовского — Цорна в $\mathscr{S}(a)$ существуют максимальные элементы — максимальные собственные подалгебры в $S(a)$. Если X^* — одна из них, то интервал $[X^*, S(a)]$ и будет простым интервалом решетки L, содержащимся в ее главном идеале $J(X)$. Доказательство завершается ссылкой на теорему 12.

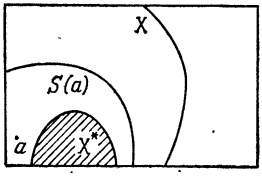

Рис. 25.

Дистрибутивность алгебраической решетки с единственными дополнениями была установлена автором в [2].

3. У алгебраических решеток есть простое и эффективное для проверки характеристическое свойство.

Элемент c полной решетки L называется *компактным*, если из неравенства $c \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$ следует, что $c \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} x_{i_k}$, $i_k \in I$, для некоторого натурального n (словами: если c содержится в объединении некоторого семейства, то можно выбрать конечное подсемейство, объединение которого содержит c — знакомое из топологии понятие компактности).

Если каждый элемент полной решетки L может быть представлен в виде объединения подходящего семейства

компактных элементов, то L называется *компактно порожденной* решеткой.

Теорема 25. *Компактно порожденные решетки, и только они, являются алгебраическими решетками.*

Доказательство. Необходимость. Пусть L — решетка подалгебр некоторой алгебры A. Покажем, что однопорожденные алгебры являются компактными элементами в L. В самом деле, пусть подалгебра $S(a)$ порождена элементом a, и пусть $S(a) \subseteq \bigvee_{i \in I} X_i$, где X_i — какие-то подалгебры.

Рассмотрим множество всех конечных объединений элементов семейства $\{X_i\colon i \in I\}$. Эти объединения $X_K = \bigvee_{k \in K \in P_0(I)} X_k$ образуют направленное семейство, и, значит,

$$a \in S(a) \subseteq \bigvee_{i \in I} X_i = \bigvee_{K \in P_0(I)} X_K = \bigcup_{K \in P_0(I)} X_K.$$

Поэтому найдется $K_0 \in P_0(I)$ такое, что $a \in X_{K_0}$. Но тогда $S(a) \subseteq X_{K_0}$, и если $K_0 = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, то $S(a) \subseteq \bigvee_{k=1}^{n} X_{i_k}$ — элемент $S(a)$ решетки L компактен.

Очевидно, что каждая алгебра является объединением своих однопорожденных подалгебр.

Достаточность. Покажем сначала, что компактно порожденная решетка изоморфна решетке всех идеалов некоторой $\vee$-полурешетки с нулем.

Пусть $(L, \leqslant)$ — компактно порожденная решетка.

1) *$\mathcal{Y}$-подмножество $(C, \leqslant)$ решетки L, состоящее из ее компактных элементов, является $\vee$-полурешеткой с нулем.*

Ясно, что $0 \in C$. Если $c_1, c_2 \in C$ и $c_1 \vee c_2 \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$, то $c_1, c_2 \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$, и, следовательно, в силу компактности, c_1 и c_2 оба содержатся в некоторых конечных объединениях элементов семейства $\{x_i\colon i \in I\}$. Но тогда и $c_1 \vee c_2$ будет содержаться в объединении конечного набора элементов из $\{x_i\colon i \in I\}$, т. е. $c_1 \vee c_2 \in C$.

2) *Решетка L изоморфна решетке $J(C)$ всех идеалов $\vee$-полурешетки C.*

Определим отображение φ, сопоставляя каждому $x \in L$ совокупность всех компактных элементов, содержащихся

в x, т. е. положим $\varphi(x) = J(x) \cap C$, где $J(x)$ — главный идеал в решетке L.

Понятно, что $\varphi(x)$ является идеалом в C, так что φ в самом деле отображает L в $J(C)$.

В силу компактной порожденности, $x = \bigvee \varphi(x)$. Отсюда сразу следует взаимная однозначность отображения φ, его изотонность и обратная изотонность.

Покажем, что φ является наложением. Пусть $J \in J(C)$ — некоторый идеал и $x = \bigvee J$. Проверим, что $\varphi(x) = J$. Действительно, $J \subseteq \varphi(x)$, а с другой стороны, если $c \in \varphi(x)$, то $c \leqslant x \leqslant \bigvee J$, и в силу компактности элемента c, найдутся элементы $c_1, c_2, \ldots, c_n \in J$ такие, что $c \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} c_k$. Так как J — идеал, то $c \in J$, и, значит, $\varphi(x) \subseteq J$.

Решетки L и $J(C)$ изоморфны как у-множества и, значит (теорема 4), как алгебры.

Итак, компактно порожденная решетка изоморфна решетке идеалов своей $\bigvee$-подполурешетки, состоящей из компактных элементов данной решетки.

Пусть C — произвольная $\bigvee$-полурешетка с О. Сопоставляя каждому подмножеству $X \subseteq C$ наименьшей из содержащих его идеалов полурешетки C (такой идеал существует: он равен теоретико-множественному пересечению всех идеалов, содержащих подмножество X (среди них будет, например, наибольший идеал C)), получаем на C операцию замыкания. Замкнутыми подмножествами относительно нее являются идеалы полурешетки C, и только они. Пусть $\{J_k\colon k \in K\}$ — некоторое направленное семейство идеалов $\bigvee$-полурешетки C. Понятно, что множество $J = \bigcup_{k \in K} J_k$ удовлетворяет первому условию в определении идеала. Пусть $x_1, x_2 \in J$. Тогда $x_1 \in J_{k_1}$ и $x_2 \in J_{k_2}$ для некоторых $k_1, k_2 \in K$. В силу направленности найдется идеал J_{k_0}, принадлежащий нашему семейству, такой, что $J_{k_1}, J_{k_2} \subseteq J_{k_0}$. Тогда $x_1, x_2 \in J_{k_0}$, а поскольку J_{k_0} — идеал, будет $x_1 \bigvee x_2 \in J_{k_0} \subseteq J$. Итак, J — идеал. Отсюда следует, что решетка $J(C)$ алгебраическая, а значит, алгебраической будет и решетка L.

Теорема доказана.

4. Компактные элементы полной решетки с единственными дополнениями, оказывается, лежат в ее «самой нижней» части.

Теорема 26. *Компактные элементы полной решетки с единственными дополнениями суть конечные объединения атомов.*

Доказательство. Сначала докажем, что каждый компактный элемент содержит атом. Пусть c — компактный элемент ЕД-решетки L. Рассмотрим интервал $[O, c)$. Согласно принципу Хаусдорфа, каждая цепь этого у-множества содержится в некоторой максимальной цепи. Пусть $\{x_i: i \in I\}$ и будет максимальной цепью в $[O, c)$. Положим $\bigvee_{i \in I} x_i = x$. Если $x = c$, то в силу компактности элемента c будет $c = x_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$, что невозможно, так как $x_i < c$ для всех $i \in I$. Значит, $x < c$ и, следовательно, x будет максимальным элементом в у-множестве $[O, c)$. (Так что каждый элемент у-множества $[O, c)$ содержится в некотором максимальном элементе.)

Заметим, что $(c' \vee x) \wedge c = x$. Действительно, в силу максимальности элемента x в у-множестве $[0, c)$, элемент $(c' \vee x) \wedge c$ мог бы быть равным еще лишь c, но в этом случае у c' было бы два разных дополнения: c и x (так как тогда $c' \vee x \geqslant c$ и, значит, $c' \vee x = I$).

Возьмем теперь элемент $p = c \wedge x'$. Согласно лемме 1 §II.4, $y > O$, а в силу максимальности элемента x в у-множестве $[O, c)$, будет $x \vee p = c$. Но тогда

$$(c' \vee x) \vee p = c' \vee (x \vee p) = c' \vee c = I,$$

$$(c' \vee x) \wedge p = (c' \vee x) \wedge (c \wedge p) = ((c' \vee x) \wedge c) \wedge p =$$
$$= x \wedge p = x \wedge (c \wedge x') = (x \wedge x') \wedge c = O,$$

и, значит, p является дополнением для $c' \vee x$. Этот элемент p и будет атомом решетки L, поскольку, допустив существование ненулевого $t < p$, мы получили бы, что и t является дополнением для элемента $c' \vee x$ (в доказательстве того, что p является дополнением для $c' \vee x$, конкретный вид p не существен, важно лишь, что $x \vee p = c$ и $x \wedge p = O$. Эти условия, очевидно, выполнены и для t).

Итак, мы нашли атом, содержащийся в компактном элементе c.

Покажем теперь, что элемент c совпадает с объединением всех содержащихся в нем атомов. Действительно, если принять противное, то элемент a, являющийся объединением всех атомов, меньших, чем элемент c, содержится в некотором максимальном элементе x у-множества $[O, c)$. Но тогда построенный в первой части дока-

зательства элемент $p=c\wedge x'$ будет атомом и при этом $x\wedge p=0$. Это невозможно, так как x содержит все атомы, содержащиеся в c.

Таким образом, каждый компактный элемент ЕД-решетки является объединением некоторого множества атомов. В силу компактности, из этих атомов можно выбрать конечное число с тем же объединением.

Доказанная теорема была установлена автором в [6].

Следствие 1. *Если в полной решетке с единственными дополнениями наибольший элемент* I *компактен, то эта решетка является конечной булевой алгеброй.*

Доказательство. Если I является компактным элементом, то согласно теореме 26 и следствию из теоремы 13 рассматриваемая ЕД-решетка дистрибутивна. В силу своей компактности наибольший элемент I будет объединением конечного множества атомов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Заметим, что любой элемент $a>0$ обязательно содержит по крайней мере один из этих атомов, так как в противном случае $a\wedge p_\alpha=0$ для $\alpha=1, 2, \ldots, n$, откуда

$$a=a\wedge \mathrm{I}=a\wedge \bigvee_{\alpha=1}^{n} p_\alpha=\bigvee_{\alpha=1}^{n}(a\wedge p_\alpha)=0, \text{ что невозможно.}$$

Таким образом, наша решетка является атомной булевой алгеброй с n атомами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Сопоставляя теперь каждому элементу совокупность содержащихся в нем атомов, мы, как нетрудно проверить, получаем изоморфизм между исходной решеткой и булевой алгеброй всех подмножеств n-элементарного множества.

Следствие 2. *Если в полной решетке с единственными дополнениями из всякого семейства ее элементов, имеющего нулевое пересечение, можно выбрать конечное подсемейство с нулевым пересечением, то эта решетка является конечной булевой алгеброй.*

Доказательство. Это утверждение, как нетрудно заметить, является двойственным для следствия 1.

§ 5. Непрерывные решетки

1. Подмножество U полной решетки L называется открытым, когда для него выполняются следующие условия:

1) из того, что $x\in U$ и $x\leqslant y$, следует принадлежность $y\in U$;

2) для любого направленного (вверх) подмножества $D\subseteq L$, если $\bigvee D\in U$, то $D\cap U\neq\varnothing$.

Нетрудно убедиться в том, что так определенные открытые множества удовлетворяют обычным аксиомам для открытых подмножеств топологического пространства. Задаваемая с их помощью топология называется топологией Скотта на решетке L.

2. Будем говорить, что элемент x полной решетки L лежит *явно ниже* элемента y (обозначение: $x \ll y$), если $y \in [F(x)]^0$, где $[F(x)]^0$ обозначает внутренность (в топологии Скотта) главного дуального идеала $F(x)$, соответствующего элементу x, т. е. $[F(x)]^0$ — это наибольшее открытое в L подмножество, содержащееся в $F(x)$. Очевидно, что все элементы, лежащие явно ниже данного элемента, не превосходят его в смысле упорядоченности в L, но обратное, вообще говоря, не верно.

Пример 1. Рассмотрим решетку L, являющуюся прямым произведением двух единичных отрезков числовой прямой (с их естественной упорядоченностью): $L = [0,1] \times [0,1]$. Наглядно L можно представить себе как единичный квадрат на плоскости (рис. 26). При этом $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$, т. е. когда точка (x_2, y_2) лежит правее и выше точки (x_1, y_1) (точнее, не левее и не ниже). Возьмем теперь точку $\mathbf{x} = (1,0)$. Главный дуальный идеал $F(\mathbf{x})$ геометрически представляется правой стороной квадрата. Пусть $\mathbf{y} \in [F(\mathbf{x})]^0$ и $\mathbf{y} = (1, y)$. Подмножество

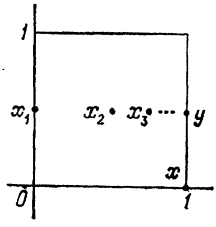

Рис. 26.

$$D = \left\{\mathbf{x}_n \in L:\ \mathbf{x}_n = \left(1 - \frac{1}{n},\ y\right),\ n = 1,\ 2,\ \ldots\right\}$$

направлено вверх в решетке L и $\bigvee D = \mathbf{y}$. Поскольку подмножество $[F(\mathbf{x})]^0$ открыто, должно быть $D \cap [F(\mathbf{x})]^0 \neq \neq \varnothing$, но это не так. Полученное противоречие показывает, что $[F(\mathbf{x})]^0 = \varnothing$.

Следовательно, какой бы мы ни предложили $\mathbf{y} \in L$, точка $\mathbf{x}$ не будет лежать явно ниже $\mathbf{y}$. С другой стороны, точка $\mathbf{x}$ лежит в L ниже любой точки, взятой на правой стороне квадрата (т. е. взятой в $F(\mathbf{x})$).

3. Полная решетка L называется *непрерывной*, если каждый ее элемент является объединением всех лежащих явно ниже него элементов.

Пример 2. *Конечная решетка непрерывна.*

Поскольку в конечной решетке условие 2) в определении открытого подмножества всегда выполняется, открытыми будут в точности подмножества, вместе с каждым элементом содержащие и все его верхние грани. В частности, открытым будет и каждый главный дуальный идеал: $F(x)=[F(x)]^0$. Но тогда $x \ll y$ означает попросту, что $x \leqslant y$. Следовательно, $x \ll x$ для любого элемента x.

Пример 3. *Алгебраическая решетка непрерывна.*

Покажем, что компактность элемента c полной решетки равносильна открытости главного дуального идеала $F(c)$.

Пусть элемент c компактен в решетке L и $D=\{x_i: i \in I\}$ — некоторое направленное подмножество в L, причем $\bigvee D \in F(c)$. Тогда $c \leqslant \bigvee\limits_{i \in I} x_i$ и, по свойству компактности, $x \leqslant \bigvee\limits_{k=1}^{n} x_{i_k}$, $i_k \in I$. В силу направленности, $\bigvee\limits_{k=1}^{n} x_{i_k} = x_{i_0} \in D$. Значит, $D \cap F(c) \neq \varnothing$ — подмножество $F(c)$ открыто в топологии Скотта.

Обратно, пусть главный дуальный идеал $F(c)$ является открытым подмножеством в топологии Скотта и $c \leqslant \bigvee\limits_{i \in I} x_i$, где $\{x_i: i \in I\}$ — произвольное подмножество в L. Тогда если для $K \in P_0(I)$ положить $x_K = \bigvee\limits_{i \in K} x_i$, мы получаем, что $\bigvee\limits_{K \in P_0(I)} x_K \geqslant c \in F(c)$. Так как $F(c)$ — открытое подмножество, а $\{x_K: K \in P_0(I)\}$ — направленное семейство, то $x_{K_0} \in F(c)$ для некоторого $K_0 \in P_0(I)$. Таким образом, $c \leqslant \bigvee\limits_{i \in K_0} x_i$: мы нашли конечный набор элементов из множества $\{x_i: i \in I\}$, в объединении которых содержится c. Значит, c — компактный элемент.

Из доказанного следует, что компактный элемент c лежит явно ниже элемента x тогда и только тогда, когда $c \leqslant x$. В алгебраической решетке каждый элемент является объединением компактных элементов, содержащихся в нем и, значит, лежащих явно ниже него.

Теорема 27. *Полная решетка L непрерывна тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in L$ имеет*

место представление

$$y = \bigvee \bigwedge_{y \in U} U,$$

где U пробегает все открытые подмножества решетки L.

Доказательство. Необходимость. Пусть решетка L непрерывна и $y \in L$. Возьмем произвольный элемент $x \in L$ такой, что $x \ll y$. По определению, $y \in [F(x)]^0$. Но тогда $x \leqslant \bigwedge [F(x)]^0 \leqslant y$, откуда $\bigvee_{x \ll y} x \leqslant \bigvee_{x \ll y} \bigwedge [F(x)]^0 \leqslant y$.

В силу непрерывности $y = \bigvee_{x \ll y} x$, так что $y = \bigvee_{x \ll y} \bigwedge [F(x)]^0$. Но понятно, что

$$\bigvee_{x \ll y} \bigwedge [F(x)]^0 \leqslant \bigvee \bigwedge_{y \in u} U \leqslant y,$$

так что $y = \bigvee \bigwedge_{y \in U} U$.

Достаточность. Если U — открытое подмножество в L и $y \in U$, то, очевидно, $U \subseteq \left[F\left(\bigwedge U\right)\right]^0$, и, значит, $\bigwedge U \ll y$. Из равенства $y = \bigvee \bigwedge_{y \in U} U$ следует непрерывность решетки L.

4. Точные нижние грани открытых подмножеств полной решетки будем называть ее *граничными элементами*.

Теорема 28. *Если в полной решетке с единственными дополнениями каждый ненулевой элемент содержит ненулевой граничный элемент, то эта решетка дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть ЕД-решетка L удовлетворяет условию теоремы и x — ее произвольный граничный ненулевой элемент. Покажем, что в у-множестве $[0, x)$ существует хотя бы один максимальный элемент.

В самом деле, возьмем в $[0, x)$ (принцип Хаусдорфа) некоторую максимальную цепь $\{x_k\colon k \in K\}$ и положим $\bigvee_{k \in K} x_k = x_0$. Если $x_0 < x$, то мы нашли в $[0, x)$ максимальный элемент.

Пусть $\bigvee_{k \in K} x_k = x$. Рассмотрим совокупность элементов $x_k \vee x'$, $k \in K$. Понятно, что это цепь и что в силу единственности дополнений $x_k \vee x' < \mathrm{I}$ для любого $k \in K$. Так как элемент x граничный, то, по определению, $x = \bigwedge U$,

где U — некоторое открытое подмножество решетки L. Но

$$\bigvee_{k\in K}(x_k \vee x') = \left(\bigvee_{k\in K} x_k\right) \vee x' = x \vee x' = \mathrm{I} \in U.$$

Согласно второму характеристическому свойству открытых подмножеств, U содержит некоторый элемент $x_{k_0} \vee x'$, $k_0 \in K$. А тогда $x = \bigwedge U \leqslant x_{i_0} \vee x'$, откуда $x_{k_0} \vee x' = \mathrm{I}$, т. е. x_{k_0} будет дополнением для x', отличным от x (напомним, что $x_{k_0} < x$). Это невозможно, и, следовательно, $\bigvee_{k\in K} x_k = x_0$ является максимальным элементом в у-множестве $[\mathrm{O}, x)$, т. е. интервал $[x_0, x]$ решетки L простой.

Пусть теперь y — произвольный ненулевой элемент решетки L. По условию найдется ненулевой граничный элемент $x \leqslant y$, а в силу доказанного это означает, что начальный интервал $[\mathrm{O}, y]$ содержит простой интервал $[x_0, x]$. Доказательство завершается ссылкой на теорему 12.

Следствие. *Непрерывная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна.*

Последний результат был анонсирован автором в [4]. Доказательство опубликовано в [6]. Независимо дистрибутивность непрерывной ЕД-решетки установил Бандельт [1].

5. Полная решетка L называется *$\bigwedge$-непрерывной*, если в ней $x \wedge \bigvee_{i\in I} x_i = \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i)$ для любого элемента x и любого направленного (вверх) множества $\{x_i\colon i \in I\} \subseteq L$.

Теорема Скотта. *Всякая непрерывная решетка $\bigwedge$-непрерывна.*

Доказательство. Поскольку в любой полной решетке всегда $\bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i) \leqslant x \wedge \bigvee_{i\in I} x_i$, то достаточно установить, что в непрерывных решетках

$$x \wedge \bigvee_{i\in I} x_i \leqslant \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i)$$

для любого направленного вверх множества $\{x_i\colon i \in I\}$.

Так как каждый элемент непрерывной решетки является объединением граничных элементов, лежащих явно ниже него, то дело сводится к проверке истинности импликации

$$t \ll x \wedge \bigvee_{i\in I} x_i \Rightarrow t \leqslant \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i).$$

Итак, пусть $t \leqslant x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i$. Тогда, конечно, $t \leqslant x \wedge \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \leqslant x$.

Далее, $\bigvee_{i \in I} x_i \in [F(t)]^0$, так как $x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \in [F(t)]^0$. Значит, $t \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$. В силу направленности подмножества $\{x_i\colon i \in I\}$ и непрерывности решетки L, мы получаем, что $x_{i_0} \in [F(t)]^0$ для некоторого $i_0 \in I$. Но в этом случае $t \leqslant \leqslant x \wedge x_{i_0} \leqslant \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$, что и требовалось доказать.

(Здесь приведен фрагмент теоремы Скотта о непрерывности решеточных операций в непрерывной решетке.)

6. Полная решетка L называется *бесконечно дистрибутивной*, если $x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$ для любого ее элемента x и любого подмножества $\{x_i\colon i \in I\}$.

Из определения видно, что бесконечно дистрибутивная решетка $\bigwedge$-непрерывна.

Теорема 29. *Всякая полная булева алгебра бесконечно дистрибутивна (и, следовательно, $\bigwedge$-непрерывна).*

Доказательство. Достаточно установить справедливость неравенства

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \leqslant \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i),$$

поскольку противоположное неравенство выполняется в любой полной решетке.

Пусть $y \geqslant \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$. Тогда

$$x' \vee y \geqslant x' \vee (x \wedge x_i) = (x' \vee x) \wedge (x' \vee x_i) = x' \vee x_i \geqslant x_i$$

для любого $i \in I$.

Таким образом, $x' \vee y \geqslant \bigvee_{i \in I} x_i$.

Далее,

$$y = 0 \vee y = (x \wedge x') \vee y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y) \geqslant (x \vee y) \wedge \bigvee_{i \in I} x_i.$$

Итак, если $y \geqslant \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$, то $y \geqslant x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i$, т. е. $x \wedge \bigvee_{i \in I} x_i \leqslant \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$.

7. Неизвестно, *будет ли в общем случае $\bigwedge$-непрерывная решетка с единственными дополнениями дистрибутивной.*

§ 6. Решетки с коллективными дополнениями

1. Решетка с O и I называется *решеткой с коллективными дополнениями*, если она допускает взаимно однозначный в O и I гомоморфизм на некоторую решетку с единственными дополнениями.

Из определения сразу следует, что *в решетке с коллективными дополнениями L каждый элемент имеет по крайней мере одно дополнение.*

Действительно, если $x \in L$ и φ—гомоморфизм указанного вида, то элемент $\varphi(x)$ имеет дополнение в φ-образе решетки L. Пусть это будет $\varphi(y)$. Тогда

$$\mathrm{O} = \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) \text{ и } \mathrm{I} = \varphi(x \vee y).$$

Так как отображение φ взаимно однозначно в нуле и в единице, то $x \wedge y = \mathrm{O}$ и $x \vee y = \mathrm{I}$, т. е. элемент y будет дополнением для x в решетке L.

2. Решеткой с коллективными дополнениями будет, например, пятиугольник N_5 (см. рис. 11): отождествляя два его сравнимые элемента, отличные от O и I, получаем гомоморфизм на четырехэлементную булеву решетку (см. рис. 3, *г*), взаимно однозначный в нуле и в единице.

Другой (связанный с рассмотренным) пример — решетка, изображенная на рис. 2 (удобнее взять правую диаграмму): «склеивая» элементы a_2 и a_3, получаем гомоморфизм требуемого вида на трехатомную булеву решетку (см. рис. 3, *д*).

Понятно, что каждая ЕД-решетка является решеткой с коллективными дополнениями.

Название введенного класса решеток мотивируется следующим наблюдением.

Лемма. *Если φ — гомоморфизм решетки с коллективными дополнениями L на некоторую ЕД-решетку, взаимно однозначный в нуле и в единице, то его ядро можно представить в виде*

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(x,y) \in L \times L : (\forall z \in L)(x \wedge z = \mathrm{O} \,\&\, x \vee z = \mathrm{I} \Leftrightarrow y \wedge z = \mathrm{O} \,\&\, y \vee z = \mathrm{I})\}.$$

Доказательство. Равенство, которое нужно доказать, означает, что два элемента x, y решетки L φ-неразличимы тогда и только тогда, когда у них общие дополнения, т. е. когда каждое дополнение элемента x является дополнением для y и обратно.

Действительно, если $\varphi(x)=\varphi(y)$ и z — дополнение для x в решетке L, то

$$\varphi(y \wedge z)=\varphi(y) \wedge \varphi(z)=\varphi(x) \wedge \varphi(z)=\varphi(x \wedge z)=\varphi(\mathrm{O})=\mathrm{O}$$

и двойственно $\varphi(y \vee z)=\mathrm{I}$.

В силу взаимной однозначности φ в нуле и в единице, $y \wedge z=\mathrm{O}$ и $y \vee z=\mathrm{I}$, — элемент z является дополнением для y в решетке L.

Обратно, если x и y имеют хотя бы одно общее дополнение z, то элементы $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, конечно, будут дополнениями для $\varphi(z)$. Ввиду единственности дополнений в φ-образе решетки L, получаем, что $\varphi(x)=\varphi(y)$, т. е. $(x, y) \in \operatorname{Ker} \varphi$.

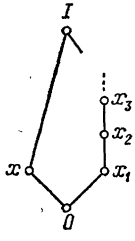

Рис. 27.

Лемма доказана.

Таким образом, решетка с коллективными дополнениями имеет единственный (с точностью до изоморфизма) гомоморфный образ в классе ЕД-решеток. Будем называть его *каноническим образом* исходной решетки, а соответствующий гомоморфизм — *каноническим гомоморфизмом*.

3. Канонический гомоморфизм решетки с коллективными дополнениями не обязательно сохраняет точные грани бесконечных подмножеств. Например, в полной решетке, изображенной на рис. 27, все элементы счетной цепи $x_1<x_2<\ldots$ имеют общее дополнение x, каноническим образом этой решетки является четырехэлементная булева решетка, в которой $\varphi\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right)=\varphi(\mathrm{I})$ будет наибольшим элементом, а $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(x_i)=[\varphi(x)]'$ — атомом. Следовательно, φ не сохраняет бесконечных объединений.

Полную решетку назовем *решеткой с полными коллективными дополнениями*, если она является решеткой с коллективными дополнениями и ее канонический гомоморфизм сохраняет все точные грани. Решетка с полными коллективными дополнениями, имеющая каноническим образом булеву решетку, называется *решеткой с полными дополнениями*.

Следующую внутреннюю характеристику решеток с полными дополнениями получил В. В. Пашенков [1].

Теорема 30. *Полная решетка с дополнениями L тогда и только тогда будет решеткой с полными допол-*

нениями, когда в ней выполняются обобщенные законы Де Моргана: для любого подмножества $\{x_k\colon k \in K\} \subseteq L$ *и любого набора дополнений* $\{x'_k\colon k \in K\}$ *элементов этого подмножества элемент* $\bigwedge\limits_{k \in K} x'_k$ *является дополнением для* $\bigvee\limits_{k \in K} x_k$ *и, двойственно, элемент* $\bigvee\limits_{k \in K} x'_k$ *является дополнением для* $\bigwedge\limits_{k \in K} x_k$.

Доказательство. Необходимость. Пусть L — решетка с полными дополнениями, $\{x_k\colon k \in K\}$ — какое-нибудь ее подмножество и $\{x'_k\colon k \in K\}$ — произвольный набор дополнений для элементов x_k, $k \in K$. Так как канонический гомоморфизм φ сохраняет по условию все точные грани и дополнения переводит в дополнения, то

$$\varphi\left(\bigvee_{k \in K} x_k \wedge \bigwedge_{k \in K} x'_k\right) = \varphi\left(\bigvee x_k\right) \wedge \varphi\left(\bigwedge x'_k\right) =$$
$$= \bigvee \varphi(x_k) \wedge \bigwedge \varphi(x'_k) = \bigvee \varphi(x_k) \wedge \bigwedge [\varphi(x_k)]' \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \bigvee (\varphi(x_k) \wedge \bigwedge [\varphi(x_k)]') \leqslant \bigvee (\varphi(x_k) \wedge [\varphi(x_k)]') = \mathrm{O}$$

(звездочкой отмечено применение бесконечного дистрибутивного закона в булевой алгебре — теорема 2).

Поскольку отображение φ взаимно однозначно в нуле, будет $\bigvee\limits_{k \in K} x_k \wedge \bigwedge\limits_{k \in K} x'_k = \mathrm{O}$. Двойственно устанавливается равенство $\bigvee\limits_{k \in K} x_k \vee \bigwedge\limits_{k \in K} x'_k = \mathrm{I}$. Итак, элемент $\bigvee\limits_{k \in K} x_k$ имеет своим дополнением $\bigwedge\limits_{k \in K} x'_k$.

Двойственно выводится второй обобщенный закон Де Моргана.

Достаточность. Пусть L — полная решетка с дополнениями, в которой выполняются обобщенные (далее для краткости мы опускаем это слово) законы Де Моргана.

1) *Отношение*

$$\theta = \{(x, y) \in L \times L\colon (\exists z \in L)\ (x \wedge z = y \wedge z = \mathrm{O} \,\&\, x \vee z = y \vee z = \mathrm{I})\}$$

является конгруэнцией на решетке L.

Рефлексивность отношения θ следует из существования дополнений в решетке L, симметричность очевидна.

Пусть $(x, y) \in \theta$ и $(y, z) \in \theta$. Тогда существует общее дополнение u для элементов x и y, а также общее допол-

нение v для элементов y и z. Выбирая среди дополнений элемента y элемент v, а среди дополнений элемента u элемент x, применяем законы Де Моргана: $v \vee x$ является дополнением для элемента $y \wedge u$ $(=\mathrm{O})$, откуда $v \vee x = \mathrm{I}$, и $v \wedge x$ является дополнением для элемента $y \vee u$ $(=\mathrm{I})$, откуда $v \wedge x = \mathrm{O}$. Это означает, что элемент v будет дополнением для x. Но он является дополнением и для z. Отношение θ транзитивно.

Пусть теперь элементы x и y имеют общее дополнение z, а элементы u и v — общее дополнение t. Согласно законам Де Моргана, элемент $z \vee t$ будет общим дополнением для $x \wedge u$ и $y \wedge v$, а элемент $z \wedge t$ — общим дополнением для $x \vee u$ и $y \vee v$. Тем самым доказано, что эквивалентность θ устойчива относительно операций пересечения и объединения.

Заметим, что поскольку классы $\theta(\mathrm{O})$ и $\theta(\mathrm{I})$ одноэлементны, естественное отображение φ: $L \to L/\theta$ взаимно однозначно в нуле и в единице.

Отсюда следует (как в п. 1), что у элементов одного θ-класса все дополнения общие.

2) *Отображение* φ *сохраняет все точные грани.*

Пусть $\{x_k\colon k \in K\}$ — произвольное подмножество решетки L. Покажем, что $\varphi\left(\bigvee\limits_{k \in K} x_k\right) = \bigvee\limits_{k \in K} \varphi(x_k)$.

Так как $x_k \leqslant \bigvee\limits_{k \in K} x_k$ для любого $k \in K$, то $\varphi(x_k) \leqslant \varphi\left(\bigvee\limits_{k \in K} x_k\right)$, — элемент $\varphi\left(\bigvee\limits_{k \in K} x_k\right)$ является верхней гранью семейства $\{\varphi(x_k)\colon k \in K\}$. Покажем, что это точная верхняя грань.

Заметим сначала, что каждый θ-класс является полной подрешеткой решетки L. Действительно, если $Y \subseteq \theta(x)$, то все элементы подмножества Y имеют хотя бы одно общее дополнение, скажем, y. Применяя законы Де Моргана, получаем, что этот элемент y будет дополнением для $\bigvee Y$ и для $\bigwedge Y$, т. е. элементы $\bigvee Y$ и $\bigwedge Y$ входят в класс $\theta(x)$.

Наименьший элемент класса $\theta(x)$ обозначим через $\mathrm{O}(x)$.

Так как $\varphi(\mathrm{O}(x)) = \varphi(x)$, то для любых $x, y \in L$

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Leftrightarrow \mathrm{O}(x) \leqslant \mathrm{O}(y)$$

(это сразу следует из соотношений $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(\mathrm{O}(x)) \wedge \varphi(\mathrm{O}(y))$ и $u \leqslant v \Leftrightarrow u \wedge v = u$)

Пусть элемент $\varphi(x)$ тоже $\left(\text{т. е. вместе с } \varphi\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)\right)$ является верхней гранью семейства $\{\varphi(x_k)\colon k\in K\}$ в решетке L/θ. Тогда $O(x_k)\leqslant O(x)$ для любого $k\in K$, откуда $\bigvee_{k\in K} O(x_k)\leqslant O(x)$.

Вследствие первого закона Де Моргана, любой элемент вида $\bigwedge_{k\in K}[O(x_k)]'$, где штрих обозначает произвольное дополнение соответствующего элемента, будет дополнением для элемента $\bigvee_{k\in K} O(x_k)$. Но x_k и $O(x_k)$ находятся в одном θ-классе, так что у них общие дополнения, и, значит, элементы вида $\bigwedge_{k\in K}[O(x_k)]'$ будут дополнениями и для $\bigvee_{k\in K} x_k$.

Но тогда элемент $\bigvee_{k\in K} O(x_k)$ лежит в классе $\theta\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)$, а элемент $O\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)$ является наименьшим элементом этого класса.

Следовательно,

$$O\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)\leqslant \bigvee_{k\in K} O(x_k)\leqslant O(x),$$

откуда $\varphi\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)\leqslant \varphi(x)$, т. е. элемент $\varphi\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)$ является точной верхней гранью семейства $\{\varphi(x_k)\colon k\in K\}$.

Двойственно доказывается, что φ сохраняет точные нижние грани.

3) *Решетка L/θ — булева.*

Понятно, что L/θ — решетка с дополнениями. Если $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ — два дополнения для элемента $\varphi(z)$ в решетке L/θ, то поскольку отображение φ взаимно однозначно в нуле и в единице, x и y будут дополнениями для z в решетке L. Имея общее дополнение z, элементы x и y попадают в один θ-класс, и, значит, $\varphi(x)=\varphi(y)$.

Таким образом, решетка L/θ является решеткой с единственными дополнениями, в которой выполняются законы Де Моргана. Следствие 2 из теоремы 16 обеспечивает дистрибутивность решетки L/θ.

Теорема доказана.

Внутренняя характеризация общего класса решеток с полными коллективными дополнениями неизвестна. От-

метим, что всякое предложение (или совокупность предложений), описывающее этот класс, должно быть истинным в каждой решетке с единственными дополнениями (как законы Де Моргана, описывающие класс решеток с полными дополнениями, истинны в каждой булевой алгебре).

§ 7. Ортогональные системы и решеточные преобразования множеств

1. Не содержащее нуля подмножество решетки с нулем называется *ортогональной системой*, если пересечение двух любых его различных элементов равно нулю.

Совокупность всех простых чисел образует ортогональную систему в решетке (**N**, |). В решетке с дополнениями любая пара «элемент — дополнение» является ортогональной системой.

Роль ортогональных систем в решетках с единственными дополнениями иллюстрирует

Теорема 31. *Решетка с единственными дополнениями полна, если в ней каждая ортогональная система имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть L — ЕД-решетка, удовлетворяющая условию теоремы, а J — произвольный ее замкнутый идеал.

Через $\mathscr{S}$ обозначим совокупность всех ортогональных систем решетки L, содержащихся в J, т. е. составленных из элементов идеала J. Множество $\mathscr{S}$ упорядочено теоретико-множественным включением, и в нем выполняется условие Куратовского — Цорна: если $\{S_k\colon k \in K\}$ — некоторая цепь в у-множестве $(\mathscr{S}, \subseteq)$, то очевидно, что $\bigcup\limits_{k \in K} S_k$ является ортогональной системой в J, содержащей все S_k, $k \in K$, т. е. верхней гранью цепи $\{S_k\colon k \in K\}$ в $(\mathscr{S}, \subseteq)$.

Пусть S — максимальная ортогональная система в J. По условию теоремы существует $s = \operatorname{Sup} S$ и, согласно лемме из § 2, $s \in J$.

Покажем, что $s = \operatorname{Sup} J$, т. е. что $x \leqslant s$ для любого $x \in J$. Пусть это не так и в J существует элемент x такой, что $x \nleqslant s$. Тогда $s_0 = s \wedge x < x$ и по лемме 1 § II.4 элемент $s_0' \wedge x > 0$. При этом для любого $s^* \in S$ будет

$$s^* \wedge (s_0' \wedge x) \leqslant s \wedge (s_0' \wedge x) = (s \wedge x) \wedge s_0' = s_0 \wedge s_0' = 0.$$

Так как J — идеал, то $s_0' \wedge x \in J$, и множество $S \cup \cup \{s_0' \wedge x\}$ оказывается ортогональной системой, входящей

в совокупность $\mathscr{S}$ и собственным образом содержащей максимальную в $\mathscr{S}$ ортогональную систему S. Это невозможно, и, значит, $s = \operatorname{Sup} J$, т. е. s является наибольшим элементом в J.

Мы показали, что каждый замкнутый идеал в решетке L имеет наибольший элемент и, таким образом, будет главным идеалом. Но тогда решетка L изоморфна своему пополнению сечениями $CJ(L)$ и, следовательно, полна.

Теорема доказана.

Лемма. *В полной решетке с единственными дополнениями для любого $x \neq O$ и ненулевого $y < x$ существует ортогональная система, содержащая y и имеющая объединением x.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\mathscr{S}$ всех ортогональных систем в интервале $[O, x)$. В у-множестве $(\mathscr{S}, \subseteq)$ каждая цепь имеет верхнюю грань, и, следовательно, по лемме Куратовского — Цорна каждая ортогональная система из $[O, x)$ содержится в некоторой максимальной ортогональной системе, составленной из элементов этого множества.

Пусть S — максимальная в $\mathscr{S}$ ортогональная система, содержащая ортогональную систему $\{y, x \wedge y'\}$ (по лемме 1 из § II.4 $x \wedge y' > O$). Если $\bigvee S = z < x$, то присоединяя к S ненулевой элемент $x \wedge z'$, мы получим в $[O, x)$ ортогональную систему, собственным образом содержащую S. Это невозможно, и, значит, $\bigvee S = x$. Лемма доказана.

Замечание. В булевой алгебре ортогональная система, удовлетворяющая условиям леммы, находится очевидным образом: можно взять, например, пару $\{y, x \wedge y'\}$.

Теорема 32. *В полной решетке с единственными дополнениями для любого подмножества $\{x_k: k \in K\}$ существует ортогональная система S такая, что*

1) *для каждого ее элемента найдется x_k, $k \in K$, в котором этот элемент содержится;*

2) $\bigvee S = \bigvee\limits_{k \in K} x_k$.

Доказательство. Если $\bigwedge\limits_{k \in K} x_k \neq O$, то пусть $\bigwedge\limits_{k \in K} x_k = x_0$ и $K_0 = K \cup \{O\}$. Ссылаясь на теорему Цермело, вполне упорядочим множество K_0 (мы считаем K-индексацию элементов x взаимно однозначной) и O будем считать первым элементом.

Положим, $S_0=\{x_0\}$ и через S_k, $k\in K$, обозначим какую-нибудь ортогональную систему в интервале $[0, x_k)$, которая содержит элемент $x_k \wedge \bigvee\limits_{i<k} x_i$ и имеет объединением x_k (по лемме 1 она существует, если $x_k \wedge \bigvee\limits_{i<k} x_i < x_k$, а в противном случае будет пустой). Пусть $S=\bigcup\limits_{k\in K} S_k^*$, где $S_k^*=S_k\setminus\left\{x_k \wedge \bigvee\limits_{i<k} x_i\right\}$. Ясно, что каждый элемент множества S содержится в подходящем x_k, $k\in K$.

1) *S — ортогональная система.*

Пусть y_1, $y_2\in S$. Возможны два случая: y_1, $y_2\in S_k^*$ для некоторого $k\in K$ или $y_1\in S_i^*$, $y_2\in S_k^*$, $i<k$.

В первом случае $y_1\wedge y_2=0$, так как S_k^* — ортогональная система.

Рассмотрим второй случай. Здесь y_1 лежит в интервале $[0, x_i)$, а y_2 — в интервале $[0, x_k)$. Поэтому

$$y_1\wedge y_2=y_1\wedge(x_k\wedge y_2)=(y_1\wedge x_k)\wedge y_2\leqslant(x_i\wedge x_k)\wedge y_2\leqslant$$
$$\leqslant\left(x_k\wedge\bigvee_{i<k} x_i\right)\wedge y_2=0,$$

так как элементы $x_k\wedge\bigvee\limits_{i<k} x_i$ и y_2 входят в одну ортогональную систему S_k.

2) $\bigvee\bigcup\limits_{i\leqslant k} S_i^*=\bigvee\limits_{i\leqslant k} x_i$ *для любого* $k\in K_0$.

Поскольку множество K_0 вполне упорядочено, к нему применим принцип индукции (теорема 1).

При $k=0$ доказываемое соотношение принимает вид $\bigvee\{x_0\}=x_0$ и очевидным образом выполняется.

Пусть $\bigvee\bigcup\limits_{j\leqslant i} S_j^*=\bigvee\limits_{j\leqslant i} x_j$ для всех $i<k$. Тогда

$$\bigvee\bigcup_{i\leqslant k} S_i^*=\bigvee S_k^*\vee\bigvee_{i<k}\bigvee\bigcup_{j\leqslant i} S_j^*=$$
$$=\bigvee S_k^*\vee\bigvee_{i<k}\bigvee_{j\leqslant i} x_j=\bigvee S_k^*\vee\bigvee_{i<k} x_i=$$
$$=\bigvee S_k^*\vee\left(x_k\wedge\bigvee_{i<k} x_i\right)\vee\bigvee_{i<k} x_i=$$
$$=\left[\bigvee S_k^*\vee\left(x_k\wedge\bigvee_{i<k} x_i\right)\right]\vee\bigvee_{i<k} x_i=$$
$$=\bigvee S_k\vee\bigvee_{i<k} x_i=x_k\vee\bigvee_{i<k} x_i=\bigvee_{i\leqslant k} x_i.$$

3) $\bigvee S = \bigvee\limits_{k \in K} x_k$.

Неравенство $\bigvee S \leqslant \bigvee\limits_{k \in K} x_k$ очевидно. С другой стороны, так как

$$x_k \leqslant \bigvee_{i \leqslant k} x_i = \bigvee \bigcup_{i \leqslant k} S_i^* \leqslant \bigvee S,$$

то $\bigvee\limits_{k \in K} x_k \leqslant \bigvee S$.

Теорема доказана.

Замечание. Если ЕД-решетка дистрибутивна, то, используя замечание к лемме 1, можно значительно упростить вид ортогональной системы, удовлетворяющей условиям теоремы: ее образуют элементы $x_0^* = x_0$, $x_k^* = x_k \cdot \bigwedge \left(\bigvee\limits_{i < k} x_i\right)'$, $k \in K$.

2. Ортогональная система $\{x_k\colon k \in K\}$ полной решетки L называется *независимой*, если при любом разбиении $K = I \cup J$, $I \cap J = \varnothing$, выполняется равенство

$$\bigvee_{i \in I} x_i \wedge \bigvee_{j \in J} x_j = 0.$$

Лемма 2. *Полная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней каждая ортогональная система независима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть L — полная булева алгебра. По теореме 29 в ней выполняется бесконечный дистрибутивный закон:

$$x \wedge \bigvee_{k \in K} x_k = \bigvee_{k \in K} (x \wedge x_k)$$

для любого элемента x и любого подмножества $\{x_k\colon k \in K\}$.

Применяя его дважды: к ортогональной системе $\{x_j\colon j \in J\}$ и к ортогональной системе $\{x_i\colon i \in I\}$, образующим разбиение заданной ортогональной системы $\{x_k\colon k \in K\}$, получаем

$$\bigvee_{i \in I} x_i \wedge \bigvee_{j \in J} x_j = \bigvee_{j \in J} \left(x_j \wedge \bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{j \in J} \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge x_j) = 0,$$

поскольку I и J не имеют общих элементов (напомним, что по принятому соглашению множество K взаимно однозначно индексирует элементы x).

Достаточность. Пусть в ЕД-решетке L каждая ортогональная система независима и x — неправильный элемент этой решетки. По теореме 14 существует элемент $y > 0$

такой, что $x \wedge y = x' \wedge y = \mathrm{O}$. Тогда $\{x, x', y\}$ — ортогональная система, и в силу ее независимости $\mathrm{O} = (x \vee x') \wedge \wedge y = \mathrm{I} \wedge y = y$, что невозможно.

Значит, в решетке L все элементы правильные, и по теореме 13 она дистрибутивна.

Лемма 3. *В решетке с полными дополнениями каждая ортогональная система независима.*

Доказательство. Пусть $\{x_k\colon k \in K\}$ — какая-нибудь ортогональная система решетки с полными дополнениями L, $\{I, J\}$ — разбиение множества K и φ — канонический гомоморфизм решетки L. Понятно, что φ-образом ортогональной системы будет ортогональная система. Тогда, учитывая независимость ортогональных систем в булевой алгебре, имеем

$$\varphi\left(\bigvee_{i \in I} x_i \wedge \bigvee_{j \in J} x_j\right) = \varphi\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \wedge \varphi\left(\bigvee_{j \in J} x_j\right) = \\ = \bigvee_{i \in I} \varphi(x_i) \wedge \bigvee_{j \in J} \varphi(x_j) = \mathrm{O}.$$

Так как канонический гомоморфизм взаимно однозначен в нуле, получаем, что $\bigvee_{i \in I} x_i \wedge \bigvee_{j \in J} x_j = \mathrm{O}$.

3. Пусть A — произвольное непустое множество и L — полная решетка. Отображение $f\colon A \times A \to L$ называется бинарным (далее мы опускаем это слово) *L-отношением* на множестве A.

Если L — двухэлементная булева алгебра, то L-отношения на множестве A — это в точности индикаторы обычных (бинарных) отношений на A.

Когда нет необходимости специально выделять решетку L, будем говорить о *решеточных отношениях* на данном множестве A, а когда L — булева алгебра, — о *булевых отношениях* на данном множестве.

Пусть f_1 и f_2 — произвольные L-отношения на множестве A. Их *произведением* (или суперпозицией) называется L-отношение, обозначаемое $f_2 \circ f_1$ (читается справа налево), такое, что

$$(f_2 \circ f_1)(x, z) = \bigvee_{y \in A} (f_1(x, y) \wedge f_2(y, z))$$

для любых $x, z \in A$.

Если $L = \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$, получаем обычное умножение отношений.

Если множество A конечно и имеет, скажем, n элементов, L-отношение f на множестве A удобно задавать

матрицей $M(f)$ размерности $n \times n$, проставляя на пересечении строки, соответствующей элементу x, и столбца, соответствующего элементу y, элемент $f(x, y)$ решетки L. Тогда, как нетрудно убедиться, произведению $f_2 \circ f_1$ отношений f_1 и f_2 будет соответствовать произведение $M(f_1) M(f_2)$ матриц с элементами из решетки L: при умножении строки на столбец берутся пересечения элементов, стоящих на соответствующих местах, и все результаты объединяются.

L-отношение f на множестве A называется *однозначным* или *L-преобразованием* множества A, если

$$f(x, y_1) \wedge f(x, y_2) = \mathrm{O}$$

для любых элементов x и $y_1 \neq y_2$ множества A.

Матрица, соответствующая L-преобразованию, характеризуется тем, что элементы каждой ее строки образуют ортогональную систему решетки L.

Совокупность всех L-преобразований множества A обозначим через $F_L(A)$. Когда $L = \{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$, получаются обычные (частичные) преобразования множества A.

В отличие от обычных преобразований, суперпозиция решеточных преобразований не всегда однозначна как L-отношение.

Пример. Пусть A — множество, состоящее из всех простых чисел, числа 0 и числа 1, а L (для удобства сохраним это обозначение) — полная дистрибутивная решетка $(\mathbf{N} \cup \{0\}, |)$. На множестве A определим два L-отношения, полагая (p — простое число)

$$f_1(m, n) = \begin{cases} p, & \text{если} \quad m = 0, \ n = p, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_2(m, n) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad m = 2, \ n = 0, \\ p, & \text{если} \quad m = p \neq 2, \ n = 1, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку простые числа являются атомами решетки L, L-отношения f_1 и f_2 в самом деле будут однозначными.

Однако произведение $f_2 \circ f_1$ уже не однозначно.

Действительно (напомним, что точная нижняя грань в решетке L — это наибольший общий делитель соответствующих чисел, а точная верхняя грань — их наименьшее

общее кратное),

$$(f_2 \circ f_1)(0,\ 0) \wedge (f_2 \circ f_1)(0,\ 1) =$$
$$= \bigvee_p (f_1(0,\ p) \wedge f_2(p,\ 0)) \wedge \bigvee_p (f_1(0,\ p) \wedge f_2(p,\ 1)) =$$
$$= 2 \wedge \bigvee_{p \neq 2} p = 2 \wedge 0 = 2 \neq 1.$$

Еще проще привести аналогичный пример для недистрибутивной решетки L. В решетке $L = M_3$ (см. рис. 12) обозначим атомы буквами x, y, z и рассмотрим L-преобразование f трехэлементного множества, задаваемое матрицей

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & z \end{pmatrix}.$$

Первая строка матрицы, соответствующей L-отношению f^2, имеет вид $(\mathrm{I}\ \mathrm{O}\ z)$ и не является ортогональной системой, — f^2 не однозначно.

Теорема 33. *Совокупность $F_L(A)$ всех L-преобразований множества A тогда и только тогда замкнута относительно умножения при любом выборе множества A, когда в решетке L каждая ортогональная система независима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть произведение любых двух L-преобразований любого множества однозначно, $\{x_k\colon k \in K\}$ — произвольная ортогональная система в L и $\{I,\ J\}$ — разбиение множества K.

Положим $A = \{x_k\colon k \in K\} \cup \{\mathrm{O},\ \mathrm{I}\}$ и рассмотрим следующие L-отношения на этом подмножестве решетки L:

$$f_1(x,\ y) = \begin{cases} x_k, & \text{если } x = \mathrm{O} \text{ и } y = x_k,\ k \in K, \\ \mathrm{O} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$f_2(x,\ y) = \begin{cases} x_i, & \text{если } y = \mathrm{O} \text{ и } x = x_i,\ i \in I, \\ x_j, & \text{если } y = \mathrm{I} \text{ и } x = x_j,\ j \in J, \\ \mathrm{O} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $F_L(A)$ замкнуто относительно умножения, произведение $f_2 \circ f_1$ однозначно, и, следовательно,

$$\mathrm{O} = (f_2 \circ f_1)(\mathrm{O},\ \mathrm{O}) \wedge (f_2 \circ f_1)(\mathrm{O},\ \mathrm{I}) =$$
$$= \bigvee_{x \in A} (f_1(\mathrm{O},\ x) \wedge f_2(x,\ \mathrm{O})) \wedge \bigvee_{x \in A} (f_1(\mathrm{O},\ x) \wedge f_2(x,\ \mathrm{I})) =$$
$$= \bigvee_{i \in I} x_i \wedge \bigvee_{j \in J} x_j,$$

т. е. ортогональная система $\{x_k\colon k \in K\}$ независима.

Достаточность. Пусть в решетке L каждая ортогональная система независима и A — произвольное множество, содержащее не менее двух элементов.

Если f_1 и f_2 являются L-преобразованиями множества A, то для произвольных элементов x и $y_1 \neq y_2$ множества A будет

$$(f_2 \circ f_1)(x, y_1) \wedge (f_2 \circ f_1)(x, y_2) = \\ = \bigvee_{u \in A} (f_1(x, u) \wedge f_2(u, y_1)) \wedge \bigvee_{v \in A} (f_1(x, v) \wedge f_2(v, y_2)).$$

Покажем, что последнее выражение равно нулю.

Действительно, в силу однозначности L-отношения f_1, при $u_1 \neq u_2$ будет

$$(f_1(x, u_1) \wedge f_2(u_1, y_1)) \wedge (f_1(x, u_2) \wedge f_2(u_2, y_1)) = \\ = (f_1(x, u_1) \wedge f_1(x, u_2)) \wedge (f_2(u_1, y_1) \wedge f_2(u_2, y_1)) = 0,$$

т. е. $\{f_1(x, u) \wedge f_2(u, y_1)\colon u \in A\}$ является ортогональной системой.

Аналогично однозначность L-отношения f_2 влечет попарную ортогональность элементов подмножества $\{f_1(x, v) \wedge \wedge f_2(v, y_2)\colon v \in A\}$.

Далее, используя однозначность f_1 и f_2, получаем

$$(f_1(x, u) \wedge f_2(u, y_1)) \wedge (f_1(x, v) \wedge f_2(v, y_2)) = \\ = (f_1(x, u) \wedge f_1(x, v)) \wedge (f_2(u, y_1) \wedge f_2(v, y_2)) = \\ = f_1(x, u) \wedge (f_2(u, y_1) \wedge f_2(u, y_2)) = f_1(x, u) \wedge 0 = 0.$$

Таким образом, подмножества $\{f_1(x, u) \wedge f_2(u, y_1)\colon u \in \in A\}$ и $\{f_1(x, v) \wedge f_2(v, y_2)\colon v \in A\}$ образуют разбиение ортогональной системы решетки L.

По условию каждая ортогональная система в L независима, так что произведение $f_2 \circ f_1$ всегда однозначно.

Теорема доказана.

Теперь из леммы 2 сразу получается

Следствие 1. *Если L — решетка с единственными дополнениями, то $F_L(A)$ при любом выборе множества A тогда и только тогда замкнуто относительно умножения, когда L дистрибутивна.*

Из леммы 3 вытекает

Следствие 2. *Если L — решетка с полными дополнениями, $F_L(A)$ замкнуто относительно умножения при любом выборе множества A.*

4. В теории группоидов пока нет естественных понятий, при помощи которых можно было бы описать группоиды решеточных преобразований множеств для всех ре-

шеток с полными дополнениями. Но если ограничиться полными булевыми алгебрами, это можно сделать.

Напомним, что полугруппа называется регулярной, если для любого ее элемента a уравнение $axa=a$ разрешимо.

Теорема 34. *Совокупность всех булевых преобразований множества является регулярной полугруппой.*

Доказательство. Пусть A — произвольное непустое множество, L — полная булева алгебра.

1) *Умножение булевых преобразований ассоциативно.*

Пусть f_1, f_2, f_3 будут L-преобразованиями множества A. Используя бесконечную дистрибутивность (теорема 29) и обобщенную ассоциативность объединения (теорема 20), получаем

$$((f_3\circ f_2)\circ f_1)(x,\ y)=\bigvee_{u\in A}(f_1(x,\ u)\wedge(f_3\circ f_2)(u,\ y))=$$
$$=\bigvee_{u\in A}\left(f_1(x,\ u)\wedge\bigvee_{v\in A}(f_2(u,\ v)\wedge f_3(v,\ y))\right)=$$
$$=\bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in A}(f_1(x,\ u)\wedge f_2(u,\ v)\wedge f_3(v,\ y))=$$
$$=\bigvee_{v\in A}\bigvee_{u\in A}(f_1(x,\ u)\wedge f_2(u,\ v)\wedge f_3(v,\ y))=$$
$$=\bigvee_{v\in A}\left(\left(\bigvee_{u\in A}(f_1(x,\ u)\wedge f_2(u,\ v))\right)\wedge f_3(v,\ y)\right)=$$
$$=\bigvee_{v\in A}((f_2\circ f_1)(x,\ v)\wedge f_3(v,\ y))=(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x,\ y)$$

для любых x, $y\in A$, т. е. $(f_3\circ f_2)\circ f_1=f_3\circ(f_2\circ f_1)$.

2) *Полугруппа $F_L(A)$ регулярна.*

Пусть f будет L-преобразованием множества A. Для каждого элемента $a\in A$ положим

$$A(a)=\{x\in A:\ f(x,\ a)\neq 0\}.$$

В булевой алгебре L рассмотрим подмножество $\{x_{(a,t)}:\ t\in A(a)\}$, где $x_{(a,t)}=f(t,\ a)$.

По теореме 32 (и согласно замечанию к ней) в L существует ортогональная система $\{x^*_{(a,t)}:\ t\in A(a)\cup\{0\}\}$ такая, что

1) $x^*_{(a,t)}\leqslant x_{(a,t)}$ для любого $t\in A(a)$,

2) $x^*_{(a,0)}\vee\bigvee_{t\in A(a)}x^*_{(a,t)}=\bigvee_{t\in A(a)}x_{(a,t)}$.

Определим L-отношение g_a на множестве A условием

$$g_a(u, v) = \begin{cases} x^*_{(a, v)}, & \text{если } u = a \text{ и } v \in A(a), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Наконец, пусть $g(u, v) = \bigvee_{a \in A} g_a(u, v)$ для любых $u, v \in A$. По построению,

$$g(u, v) = \bigvee_{a \in A} g_a(u, v) = g_u(u, v) = \begin{cases} x^*_{(u, v)}, & \text{если } v \in A(u), \\ 0, & \text{если } v \notin A(u). \end{cases}$$

При произвольном $u \in A$ и различных v_1, v_2 имеем

$$g(u, v_1) \wedge g(u, v_2) = \\ = g_u(u, v_1) \wedge g_u(u, v_2) = x^*_{(u, v_1)} \wedge x^*_{(u, v_2)} = 0,$$

т. е. g однозначно.

Заметив, что $g(u, v) = x^*_{(u, v)} \leqslant x_{(u, v)} = f(v, u)$, для любых $a_1, a_2 \in A$ получаем

$$(f \circ g \circ f)(a_1, a_2) = \bigvee_{u, v \in A} (f(a_1, u) \wedge g(u, v) \wedge f(v, a_2)) =$$

$$= \bigvee_{u, v \in A} (f(a_1, u) \wedge (g(u, v) \wedge f(v, u)) \wedge f(v, a_2)) =$$

$$= \bigvee_{u, v \in A} ((f(a_1, u) \wedge g(u, v)) \wedge (f(v, u) \wedge f(v, a_2))) \overset{u = a_2}{=}$$

$$\overset{u = a_2}{=} \bigvee_{v \in A} (f(a_1, a_2) \wedge g(a_2, v) \wedge f(v, a_2)) =$$

$$= f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{v \in A} (g(a_2, v) \wedge f(v, a_2)) =$$

$$= f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{v \in A} g(a_2, v) = f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{v \in A(a_2)} x^*_{(a_2, v)} =$$

$$= f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{v \in A(a_2)} x_{(a_2, v)} =$$

$$= f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{v \in A(a_2)} f(v, a_2) = f(a_1, a_2),$$

т. е. $f \circ g \circ f = f$.

Таким образом, L-преобразование g множества A является решением уравнения $f \circ x \circ f = f$ в полугруппе $F_L(A)$.

5. Пусть L — полная решетка, A — произвольное множество, f — некоторое L-отношение на множестве A. Обратным для f называется L-отношение, обозначаемое f^{-1}

и такое, что

$$f^{-1}(x, y) = f(y, x)$$

для любых $x, y \in A$.

Лемма 4. *Для любых L-отношений f_1, f_2 на множестве A имеет место равенство* $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

Доказательство. Для произвольных $x, y \in A$

$$(f_2 \circ f_1)^{-1}(x, y) = (f_2 \circ f_1)(y, x) = \bigvee_{z \in A} (f_1(y, z) \wedge f_2(z, x)) =$$

$$= \bigvee_{z \in A} (f_2^{-1}(x, z) \wedge f_1^{-1}(z, y)) = (f_1^{-1} \circ f_2^{-1})(x, y).$$

Лемма доказана.

L-преобразование f множества A называется *взаимно однозначным*, если однозначно обратное для него L-отношение f^{-1}, т. е. если

$$f(x_1, y) \wedge f(x_2, y) = 0$$

для любого y и различных x_1, x_2 из A.

L-преобразование f множества A, по определению, *полно*, если для любого $x \in A$

$$\bigvee_{y \in A} f(x, y) = 1 \text{ и } \bigvee_{y \in A} f(y, x) = 1.$$

Совокупность всех полных взаимно однозначных L-преобразований множества A обозначается через $K_L(A)$.

В матрице, представляющей полное взаимно однозначное L-преобразование, каждая строка и каждый столбец есть ортогональная система с объединением, равным единице (*полная ортогональная система*).

Группоид с единицей называется *ассоциацией*, если каждый его элемент обратим и умножение ассоциативно в единице (т. е. если произведение нескольких сомножителей равно единице хотя бы при одной расстановке скобок, то оно равно единице при любой расстановке скобок).

Теорема 35. *Если L — решетка с полными дополнениями, то для любого множества A совокупность $K_L(A)$ всех полных взаимно однозначных L-преобразований множества A является ассоциацией.*

Доказательство.

1) *Множество $K_L(A)$ замкнуто относительно умножения.*

Согласно следствию 2 из теоремы 33, для любых $f_1, f_2 \in K_L(A)$ произведение $f_2 \circ f_1$ однозначно. По лемме 4 $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$. Но f_1^{-1}, f_2^{-1} тоже однозначны, и, следовательно, однозначно L-отношение $(f_2 \circ f_1)^{-1}$.

Таким образом, $f_2 \circ f_1$ является взаимно однозначным L-преобразованием множества A. Докажем его полноту, т. е. что для любого $x \in A$

$$\bigvee_{y \in A} (f_2 \circ f_1)(x, y) = \mathrm{I} = \bigvee_{y \in A} (f_2 \circ f_1)(y, x).$$

Рассмотрим образ элемента, стоящего в левой части, при каноническом гомоморфизме решетки L на соответствующую булеву алгебру:

$$\varphi\left(\bigvee_{y \in A} (f_2 \circ f_1)(x, y)\right) = \varphi\left(\bigvee_{y \in A} \bigvee_{z \in A} (f_1(x, z) \wedge f_2(z, y))\right) =$$
$$= \bigvee_{y \in A} \bigvee_{z \in A} (\varphi(f_1(x, z)) \wedge \varphi(f_2(z, y))) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} \bigvee_{y \in A} (\varphi(f_1(x, z)) \wedge \varphi(f_2(z, y))) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} \left(\varphi(f_1(x, z)) \wedge \bigvee_{y \in A} \varphi(f_2(z, y))\right) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} \left(\varphi(f_1(x, z)) \wedge \varphi\left(\bigvee_{y \in A} f_2(z, y)\right)\right) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} (\varphi(f_1(x, z)) \wedge \varphi(\mathrm{I})) = \bigvee_{z \in A} \varphi(f_1(x, z)) =$$
$$= \varphi\left(\bigvee_{z \in A} f_1(x, z)\right) = \varphi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}.$$

Так как канонический гомоморфизм взаимно однозначен в единице, то $\bigvee_{y \in A} (f_2 \circ f_1)(x, y) = \mathrm{I}$.

Аналогично доказывается и второе условие полноты. Итак, $f_2 \circ f_1 \in K_L(A)$.

2) *Группоид $K_L(A)$ имеет единицу.*

Единицей группоида $K_L(A)$ является индикатор отношения равенства на множестве A:

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{если } x = y, \\ \mathrm{O}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Действительно, для любого $f \in K_L(A)$ и произвольных $x, y \in A$ имеем

$$(f \circ \Delta)(x, y) = \bigvee_{z \in A} (\Delta(x, z) \wedge f(z, y)) \overset{x=z}{=\!=} \mathrm{I} \wedge f(x, y) = f(x, y).$$

И аналогично $\Delta \circ f = f$.

3) *В группоиде $K_L(A)$ каждый элемент обратим.*

Обратным для f будет L-преобразование f^{-1} (понятно, что оно тоже взаимно однозначно и полно):

$$(f \circ f^{-1})(x, y) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} (f^{-1}(x, z) \wedge f(z, y)) = \bigvee_{z \in A} (f(z, x) \wedge f(z, y)) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} \bigvee_{z \in A} f(z, x) = \mathrm{I}, & \text{если } x = y, \\ \mathrm{O}, & \text{если } x \neq y \end{array} \right\} = \Delta(x, y)$$

и аналогично $f^{-1} \circ f = \Delta$.

4) *В группоиде $K_L(A)$ произведения, равные единице, ассоциативны.*

Пусть $f \in K_L(A)$ и φ — канонический гомоморфизм решетки L на булеву алгебру Λ. Положим $\varphi(f)(x, y) = \varphi(f(x, y))$ для любых $x, y \in A$ и покажем, что $\varphi(f_2 \circ f_1) = \varphi(f_2) \circ \varphi(f_1)$. Действительно, для любых $x, y \in A$

$$\varphi(f_2 \circ f_1)(x, y) = \varphi((f_2 \circ f_1)(x, y)) =$$
$$= \varphi\left(\bigvee_{z \in A} (f_1(x, z) \wedge f_2(z, y))\right) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} (\varphi(f_1(x, z)) \wedge \varphi(f_2(z, y))) =$$
$$= \bigvee_{z \in A} (\varphi(f_1)(x, z) \wedge \varphi(f_2)(z, y)) = (\varphi(f_2) \circ \varphi(f_1))(x, y),$$

что и требовалось.

Пусть теперь $(f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1) = \Delta$ при какой-нибудь расстановке скобок в этом произведении. Это означает, что

$$(f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I}, & \text{если } x = y, \\ \mathrm{O}, & \text{если } x \neq y. \end{array} \right.$$

Пусть $[f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1]$ — произведение тех же сомножителей, но вычисленное при другой расстановке скобок. По доказанному,

$$\varphi((f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)) = (\varphi(f_n) \circ \ldots \circ \varphi(f_2) \circ \varphi(f_1)),$$
$$\varphi([f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1]) = [\varphi(f_n) \circ \ldots \circ \varphi(f_2) \circ \varphi(f_1)].$$

Поскольку умножение булевых преобразований ассоциативно, получаем равенство $\varphi((f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)) = \varphi([f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1])$. Следовательно, для любых $x, y \in A$ будет

$$\varphi([f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1](x, y)) = \varphi((f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)(x, y)) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}, & \text{если } x = y, \\ \varphi(\mathrm{O}) = \mathrm{O}, & \text{если } x \neq y. \end{array} \right.$$

Используя взаимную однозначность канонического гомоморфизма φ в нуле и в единице, заключаем, что $[f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1] = \Delta$.

Теорема доказана.

Неизвестно, *любая ли ассоциация (изоморфно) вложима в ассоциацию вида $K_L(A)$, где A — непустое множество, а L — решетка с полными дополнениями.*

Частным случаем ассоциации является группа, и поэтому естественно в связи с указанным вопросом рассмотреть случай групп.

Теорема 36. *Пусть L — полная решетка с дополнениями. Группоид $K_L(A)$ при любом выборе множества A тогда и только тогда будет группой, когда решетка L дистрибутивна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группоид $K_L(A)$ при любом выборе множества A является группой.

1) *L — решетка с единственными дополнениями.*

Пусть y_1 и y_2 — два дополнения для элемента $x \in L$. В качестве A возьмем какое-нибудь двухэлементное множество и зададим L-преобразования f_1 и f_2 соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_1 & x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x & y_2 \\ y_2 & x \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что f_1 и f_2 — полные взаимно однозначные L-преобразования и при этом

$$\begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y_2 \\ y_2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y_2 \\ y_2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y_1 \\ y_1 & x \end{pmatrix},$$

т. е. $f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = \Delta$.

Это означает, что в группе $K_L(A)$ элемент f_1 имеет два различных обратных элемента: f_1 и f_2. Полученное противоречие доказывает единственность дополнений в решетке L.

2) *В решетке L все элементы правильные*

Пусть x — неправильный элемент ЕД-решетки L. По теореме 14 в ней существует элемент $y > \mathrm{O}$ такой, что $x \wedge y = x' \wedge y = \mathrm{O}$.

На каком-нибудь шестиэлементном множестве A зададим L-преобразование f матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} & x & x' & y & \mathrm{O} \\ y' & y & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & x & x' & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & x' & \mathrm{O} & x & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & y' & y \\ y & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & y' \end{pmatrix}.$$

Каждая строка и каждый столбец этой матрицы является полной ортогональной системой решетки L, так что f — полное взаимно однозначное L-преобразование.

Поскольку множество $K_L(A)$ замкнуто относительно умножения, L-отношение f^2 тоже должно быть однозначным. Но в матрице, задающей f^2, первая строка, как легко убедиться, имеет вид (O I O O O y) и, следовательно, не является ортогональной системой решетки L.

Полученное противоречие показывает, что в решетке L нет неправильных элементов. По теореме 12 решетка L дистрибутивна.

Достаточность. Пусть L — полная булева алгебра. Согласно теореме 35, совокупность $K_L(A)$ всех полных взаимно однозначных L-преобразований произвольного множества A является ассоциацией. Как было установлено в теореме 34, умножение булевых преобразований ассоциативно. Значит, $K_L(A)$ является группой.

§ 8. Правильные элементы и теоремы о разложении полных решеток с единственными дополнениями

1. Особую роль играют правильные элементы в полных решетках с единственными дополнениями.

Теорема 37. *Правильные элементы полной решетки с единственными дополнениями образуют в ней полную булеву подрешетку.*

Доказательство теоремы разбивается на несколько этапов. В последующих леммах устанавливаются основные свойства правильных элементов полной решетки с единственными дополнениями L.

Лемма 1. *Если a — правильный элемент, то*

$$a \wedge x = \mathrm{O} \Rightarrow x \leqslant a'$$

для любого $x \in L$.

(Если x не содержится в a', то пусть $y = (a' \wedge x)' \wedge x$ (рис. 28). Заметим, что $a' \wedge y = \mathrm{O}$, а по лемме 1 § II. 4 $y > \mathrm{O}$. Очевидно, что $a \wedge a' = \mathrm{O} = a \wedge y$. Однако $a \wedge (a' \vee y) \neq \mathrm{O}$, поскольку иначе элемент $a' \vee y$ был бы дополнением для a, отличным от a'. Мы получили противоречие с правильностью элемента a.)

Лемма 2. *Если a — правильный элемент, то*

$$(a \wedge x) \vee (a' \wedge x) = x$$

для любого $x \in L$.

(Предположим, что $(a \wedge x) \vee (a' \wedge x) = y < x$. Тогда по лемме 1 § II. 4 $x \wedge y' \neq O$ и при этом

$$a \wedge (x \wedge y') = (a \wedge x) \wedge y' \leqslant y \wedge y' = O.$$

Согласно лемме 1, $x \wedge y' \leqslant a'$, но это невозможно, поскольку

$$a' \wedge (x \wedge y') = (a' \wedge x) \wedge y' \leqslant y \wedge y' = O.)$$

Лемма 3. *Если a — правильный элемент, то*

$$x \leqslant a \Leftrightarrow x' \geqslant a$$

для любого $x \in L$.

(Пусть $x < a$, но x' не содержит a', т. е. $a' \wedge x' < a'$. Используя лемму 2, получаем, что

$$a \vee (a' \wedge x') \geqslant (x \vee (a \wedge x')) \vee (a' \wedge x') =$$
$$= x \vee ((a \wedge x') \vee (a' \wedge x')) = x \vee x' = I.$$

Значит, $a' \wedge x'$ является дополнением для a, что невозможно.

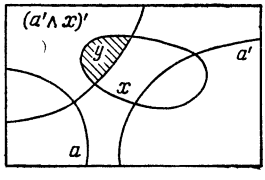

Рис. 28.

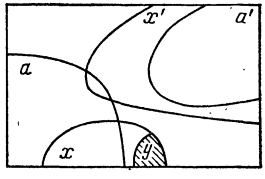

Рис. 29.

С другой стороны, пусть $x' > a'$, но x не содержится в a, т. е. $a \wedge x < x$ (рис. 29). Тогда для $y = (a \wedge x)' \wedge x > O$ будет $a' \wedge y \leqslant x' \wedge y \leqslant x' \wedge x = O$, и значит, чтобы $a' \vee y$ не оказалось дополнением для a, должно быть $a \wedge (a' \vee \vee y) \neq O$. Однако, $a \wedge a' = O = a \wedge y$, и мы получаем противоречие с правильностью элемента a.)

Лемма 4. *Если a — правильный элемент, то*

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$$

для любых $x, y \in L$.

(Предположим, что $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) = z < a \wedge (x \vee y)$. Тогда

$(a \wedge (x \vee y))' \vee z =$

(неравенство $a \wedge (x \vee y) \leqslant a$ и лемма 3)

$$= ((a \wedge (x \vee y))' \vee a') \vee z = (a \wedge (x \vee y))' \vee (a' \vee z) \geqslant$$

(неравенство $a' \geqslant (a' \wedge x) \vee (a' \wedge y)$)

$$\geqslant (a \wedge (x \vee y))' \vee [((a' \wedge x) \vee (a' \wedge y)) \vee z] =$$

(выражение для z)

$$= (a \wedge (x \vee y))' \vee [((a' \wedge x) \vee (a' \wedge y)) \vee$$
$$\vee ((a \wedge x) \vee (a \wedge y))] = (a \wedge (x \vee y))' \vee$$
$$\vee [((a \wedge x) \vee (a' \wedge x)) \vee ((a \wedge y) \vee (a' \wedge y))] =$$

(лемма 2)

$$= (a \wedge (x \vee y))' \vee (x \vee y) \geqslant (a \wedge (x \vee y))' \vee (a \wedge (x \vee y)) = \mathrm{I}.$$

Это означает, что элемент z является дополнением для $(a \wedge (x \vee y))'$, отличным от $a \wedge (x \vee y)$, — противоречие.)

Лемма 5. *Если a — правильный элемент, то a' также будет правильным элементом.*

(Пусть $a' \wedge x = \mathrm{O}$ для некоторого произвольного элемента $x \in L$. Покажем, что $x \leqslant a$, откуда и будет следовать правильность элемента a'.

Предположим, что x не содержится в a, т. е. что $a \wedge x < x$. Тогда по лемме 1 § II.4 $y = (a \wedge x)' \wedge x \neq \mathrm{O}$ и

$$a \wedge a' = \mathrm{O} = (a \wedge x)' \wedge (a \wedge x) = ((a \wedge x)' \wedge x) \wedge a = y \wedge a,$$

откуда, в силу правильности элемента a, будет $\mathrm{O} = a \wedge \wedge (a' \vee y)$, что невозможно, поскольку иначе элемент $a' \vee y$ окажется дополнением для a, отличным от a'.)

Лемма 6. *Если $\{a_k\colon k \in K\}$ — некоторая совокупность правильных элементов, то*

$$\left(\bigvee_{k \in K} a_k\right)' = \bigwedge_{k \in K} a_k'.$$

(Пусть $\bigvee\limits_{k \in K} a_k = a$. Используя лемму 3, получаем, что

$$\bigwedge_{k \in K} a_k' \leqslant a_k' \Rightarrow \left(\bigwedge_{k \in K} a_k'\right)' \geqslant (a_k')' = a_k \Rightarrow \left(\bigwedge_{k \in K} a_k'\right)' \geqslant \bigvee_{k \in K} a_k = a$$

и

$$a_k \leqslant \bigvee_{k \in K} a_k \Rightarrow a_k' \geqslant \left(\bigvee_{k \in K} a_k\right)' \Rightarrow \bigwedge_{k \in K} a_k' \geqslant \left(\bigvee_{k \in K} a_k\right)' = a'.$$

Итак, $a' \leqslant \bigwedge\limits_{k \in K} a_k'$ и $a \leqslant \left(\bigwedge\limits_{k \in K} a_k'\right)'$.

Если предположить, что $a' < \bigwedge\limits_{k \in K} a_k'$, то $\bigwedge\limits_{k \in K} a_k'$ становится дополнением для a, отличным от a'. Это невозможно и, значит, $\left(\bigvee\limits_{k \in K} a_k\right)' = \bigwedge\limits_{k \in K} a_k'$.)

Лемма 7. *Правильные элементы образуют полную подрешетку в L.*

(Если $x \wedge \bigvee_{k \in K} a_k = 0$ для некоторого $x \in L$, то $a_k \wedge \wedge x = 0$ для любого $k \in K$, откуда, согласно лемме 1, $x \leqslant a'_k$ для любого $k \in K$, т. е. $x \leqslant \bigwedge_{k \in K} a'_k = \left(\bigvee_{k \in K} a_k\right)'$ (здесь применяется лемма 6). Следовательно, $\bigvee_{k \in K} a_k$ — правильный элемент. Множество всех правильных элементов решетки L замкнуто относительно P-операции $\bigvee$.

Так как все a_k являются правильными элементами, то согласно лемме 5 правильными элементами будут и их дополнения a'_k. Но в этом случае объединение $\bigvee_{k \in K} a'_k$ — тоже правильный элемент, а в силу леммы 6 $\left(\bigvee_{k \in K} a'_k\right)' = \bigwedge_{k \in K} (a'_k)' = \bigwedge_{k \in K} a_k$. Следовательно, пересечение $\bigwedge_{k \in K} a_k$, будучи дополнением правильного элемента, само будет правильным элементом. Множество всех правильных элементов замкнуто относительно P-операции $\bigwedge$.)

Лемма 8. *Подрешетка, образуемая правильными элементами, дистрибутивна.*

(Так как подрешетка, состоящая из всех правильных элементов решетки L, является подрешеткой решетки с единственными дополнениями и замкнута относительно операции дополнения, то и сама она является ЕД-решеткой. Но лемма 6 показывает, что в ней выполняется второй закон Де Моргана. В силу следствия 2 из теоремы 16 решетка правильных элементов дистрибутивна.)

Теорема 37 доказана.

2. Правильные элементы полной решетки с единственными дополнениями можно использовать для получения ее прямых разложений.

Теорема 38. *Если a — правильный элемент полной решетки с единственными дополнениями L, то интервалы $[0, a]$ и $[0, a']$ являются полными решетками с единственными дополнениями и решетка L изоморфна их прямому произведению $[0, a] \times [0, a']$.*

Доказательство. Пусть $x \in [0, a]$. Покажем, что элемент $a \wedge x'$ является единственным дополнением для x в решетке $[0, a]$.

В самом деле, $x \wedge (a \wedge x') = (x \wedge x') \wedge a = O$, а если предположить, что $x \vee (a \wedge x') < a$, то используя лемму 2, получим

$$(x \vee (a \wedge x')) \vee a' = x \vee ((a \wedge x') \vee a') \geqslant$$
$$\geqslant x \vee ((a \wedge x') \vee (a' \wedge x')) = x \vee x' = I.$$

Но в этом случае a' имеет дополнением элемент $x \vee (a \wedge x')$, что невозможно.

Итак, элемент $a \wedge x'$ является дополнением для x в решетке $[O, a]$.

Пусть y — другое дополнение для x в $[O, a]$, т. е. пусть $x \wedge y = O$, $x \vee y = a$ и $y \neq a \wedge x'$. Согласно лемме 4,

$$a \wedge (a' \vee y) = (a \wedge a') \vee (a \wedge y) = a \wedge y = y,$$

так что

$$x \wedge (a' \vee y) = (x \wedge a) \wedge (a' \vee y) =$$
$$= x \wedge (a \wedge (a' \vee y)) = x \wedge y = O.$$

Но при этом

$$x \vee (a' \vee y) = (x \vee y) \vee a' = a \vee a' = I,$$

откуда следует, что $a' \vee y$ будет дополнением для элемента x в решетке L и притом отличным от x', поскольку $a \wedge (a' \vee y) = y \neq a \wedge x'$.

Полученное противоречие доказывает единственность дополнений в решетке $[O, a]$.

Понятно, что тем самым доказано аналогичное утверждение и для решетки $[O, a']$ в силу леммы 5.

Теперь рассмотрим отображение φ: $L \to [O, a] \times [O, a']$ такое, что $\varphi(x) = (a \wedge x, a' \wedge x)$ для любого $x \in L$. По лемме 2 φ взаимно однозначно.

Если $x \in [O, a]$ и $y \in [O, a']$, то по лемме 4

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = (a \wedge x) \vee O = a \wedge x = x$$

и, аналогично, $a' \wedge (x \vee y) = y$, так что $(x; y) = \varphi(x \vee y)$ и, следовательно, φ отображает решетку L на прямое произведение $[O, a] \times [O, a']$. Очевидно, что φ сохраняет пересечения, а по лемме 4 φ является и $\vee$-гомоморфизмом.

Следствие. *Всякая полная решетка с единственными дополнениями изоморфна прямому произведению полной атомной булевой алгебры и полной безатомной решетки с единственными дополнениями.*

Доказательство. Пусть полная ЕД-решетка L содержит хотя бы один атом. Так как атомы являются правильными элементами (лемма 3 § II.4), то их объеди-

нение a тоже будет правильным элементом (теорема 37). По теореме 38 решетка L изоморфна прямому произведению $[0, a]\times[0, a']$.

Покажем, что $[0, a]$ — атомная решетка. Пусть $x<a$ и x не содержит атома p, т. е. $x\wedge p=0$. Элемент $a\wedge x'$ является дополнением для x в решетке $[0, a]$, и если p не содержится в $a\wedge x'$, т. е. если $(a\wedge x')\wedge p=0$, то в силу правильности атома p должно быть

$$0=p\wedge(x\vee(a\wedge x'))=p\wedge a=p,$$

что невозможно. Значит, $p\leqslant a\wedge x'$.

Таким образом, если атом p не содержится в x, то p содержится в $a\wedge x'$. В силу произвольности выбора p, мы получаем, что все атомы решетки L содержатся в элементе $a\wedge x'$, откуда $a\wedge x'=a$ и, следовательно (лемма 1 § II.4), $x=0$.

По теореме Биркгофа — Уорда полная решетка $[0, a]$ будет атомной булевой алгеброй.

Простые рассуждения показывают, что полная ЕД-решетка $[0, a']$ не имеет атомов. В самом деле, если p — атом решетки $[0, a']$, то он должен быть атомом во всей решетке L, но все ее атомы содержатся в главном идеале $[0, a]$. Значит, $p\leqslant a$, что невозможно.

Теорема 38 была установлена автором в [7]; результат, сформулированный в виде следствия, анонсирован с наброском доказательства в [3]; полное его доказательство (без теоремы 38) содержится в [6].

3. Пример. Открытое подмножество топологического пространства называется *регулярным*, если оно совпадает с внутренностью своего замыкания: $X=\bar{X}^0$. Покажем, что *регулярные открытые подмножества интервала* $(0, 1)$ *числовой прямой образуют полную безатомную булеву алгебру.*

В последующих рассуждениях будут использоваться стандартные топологические соотношения для внутренности, замыкания и теоретико-множественных операций:

$$(X\cap Y)^0=X^0\cap Y^0,\quad \overline{X\cup Y}=\bar{X}\cup\bar{Y},$$
$$\overline{X'}=(X^0)',\quad (X')^0=\bar{X}',$$

$X=X^0$ для открытого подмножества X и $\bar{X}=X$ для замкнутого X.

Пусть $\mathscr{A}$ обозначает совокупность всех регулярных открытых подмножеств в $(0, 1)$. Например, всякий интервал вида (x, y), где $x, y\in(0, 1)$, входит в $\mathscr{A}$. Вообще, $\bar{X}^0\in\mathscr{A}$ для любого $X\subseteq(0, 1)$. В самом деле, так как

$\bar{X}^0 \subseteq \bar{X}$, то $\overline{\bar{X}^0} \subseteq \bar{\bar{X}} = \bar{X}$, откуда $\overline{\bar{X}^0}^0 \subseteq \bar{X}^0$, а обратное включение очевидно.

1) *Множество $\mathscr{A}$, упорядоченное теоретико-множественным включением, является полной решеткой.*

Действительно, если $\{X_i\colon i \in I\}$ — некоторая совокупность регулярных открытых множеств в (0, 1), то пусть $X = \overline{\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)}^0$. Так как $\bar{X}^0 = \overline{\overline{\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)}^0}^0 = \overline{\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)}^0 = X$, то $X \in \mathscr{A}$, так что X является нижней гранью семейства $\{X_i\colon i \in I\}$ в $\mathscr{A}$. Если Y — другая нижняя грань этого семейства в $\mathscr{A}$, то $Y \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$, откуда $Y = \bar{Y}^0 \subseteq \overline{\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)}^0 = X$ и, следовательно, X — точная нижняя грань.

Итак, любое подмножество в $\mathscr{A}$ имеет точную нижнюю грань, а так как $(0, 1) \in \mathscr{A}$, то в силу теоремы 19 $\mathscr{A}$ — полная решетка.

В полной решетке $\mathscr{A}$ точные грани задаются соотношениями $\bigwedge_{i \in I} X_i = \overline{\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)}^0$ и $\bigvee_{i \in I} X_i = \overline{\bigcup_{i \in I} X_i}^0$. Заметим, что пересечение конечного числа регулярных открытых множеств совпадает с их теоретико-множественным пересечением: если $X, Y \in \mathscr{A}$, то

$$X \wedge Y = \overline{(X \cap Y)}^0 = \bar{X}^0 \cap \bar{Y}^0 = X \cap Y,$$

но для объединения это не так: например, если (x, y) и (y, z) — два интервала в (0, 1), то

$$(x, y) \vee (y, z) = \overline{(x, y) \cup (y, z)}^0 = \\ = [x, z]^0 = (x, z) \neq (x, y) \cup (y, z).$$

2) *$\mathscr{A}$ — решетка с единственными дополнениями.*

Покажем, что единственным дополнением X^* для (подмножества) X в решетке $\mathscr{A}$ будет теоретико-множественное дополнение замыкания этого множества: $X^* = \bar{X}'$ $(= (X')^0 = ((\bar{X}^0)')^0 = \overline{\bar{X}'}^0 \in \mathscr{A})$.

В самом деле,

$$X \cap X^* = X \cap \bar{X}' \subseteq \bar{X} \cap \bar{X}' = \varnothing$$

и

$$X \vee X^* = X \vee \bar{X}' = \overline{X \cup \bar{X}'}^0 = (\bar{X} \cup \overline{\bar{X}'})^0 = (\bar{X} \cup (\bar{X}^0)')^0 = \\ = (\bar{X} \cup X')^0 \supseteq (X \cup X')^0 = (0, 1)^0 = (0, 1),$$

т. е. множество $\bar{X}'$ является дополнением для X в решетке $\mathscr{A}$.

Пусть для некоторого $Y \in \mathscr{A}$ тоже имеют место соотношения $X \cap Y = \emptyset$ и $X \vee Y = (0, 1)$. Тогда

$$(0, 1) = \overline{\emptyset}' = \overline{X \cap Y}' = (\bar{X} \cap \bar{Y})' = \bar{X}' \cup \bar{Y}'$$

и

$$\emptyset = \overline{(0, 1)}' = \overline{X \vee Y}' = \overline{\overline{X \cup Y}^0}' = \overline{X \cup Y}' =$$
$$= (\bar{X} \cup \bar{Y})' = \bar{X}' \cap \bar{Y}'.$$

Следовательно, подмножество $\bar{Y}'$ является теоретико-множественным дополнением для $\bar{X}'$. Итак, $\bar{Y}' = (\bar{X}')' = \bar{X}$, откуда $\bar{Y} = \bar{X}'$ и, значит, $Y = \bar{Y}^0 = (\bar{X}')^0 = \bar{X}' = X^*$.

Таким образом, $\bar{X}'$ является единственным дополнением для X.

3) *Решетка $\mathscr{A}$ не содержит атомов.*

В самом деле, любое открытое подмножество интервала $(0, 1)$ содержит некоторый интервал вида (x, y). Все такие интервалы, как уже отмечалось, входят в $\mathscr{A}$, и ни один из них не может быть атомом, поскольку сам содержит собственным образом интервалы того же вида.

Хорошо бы остановиться на этом, но оказывается, что

4) *Решетка $\mathscr{A}$ дистрибутивна.*

Действительно, если $X, Y \in \mathscr{A}$ и $X \subseteq Y$, то и $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$, откуда $X^* = \bar{X}' \supseteq \bar{Y}' = Y^*$, — в решетке $\mathscr{A}$ операция дополнения антиизотонна. Ввиду следствия 1 из теоремы 16 $\mathscr{A}$ является булевой алгеброй.

Мы не можем привести аналогичный пример вне класса булевых алгебр, поскольку неизвестен ответ на главный вопрос: *существуют ли вообще полные недистрибутивные решетки с единственными дополнениями*? Следствие из теоремы 38 сводит дело к безатомному случаю.

ПРОБЛЕМЫ

I. Верно ли, что если для любого элемента x решетки с единственными дополнениями L каждый элемент ее у-подмножества $Z(x)=\{y \in L\colon\ x \wedge y = x' \wedge y = 0\}$ содержится в некотором максимальном элементе и $Z(x)$ имеет конечное число максимальных элементов, то L — дистрибутивная решетка? (II.4.8)

II. Не будет ли многообразие p-модулярных решеток наименьшим из недистрибутивных многообразий Дилуорса? (II.5.3)

III. Указать явный пример недистрибутивной решетки с единственными дополнениями. (II.5.4)

IV. Сохраняется ли свойство единственности дополнений при пополнении сечениями? (III.2.3)

V. Можно ли доказать теорему 28 без использования аксиомы выбора? (III.5.4)

VI. Верно ли, что всякая $\wedge$-непрерывная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна? (III.5.7)

VII. Будет ли дистрибутивной решетка с единственными дополнениями, которая одновременно $\wedge$-непрерывна и (двойственно) $\vee$-непрерывна? (III.5.7)

VIII. Найти внутреннюю характеризацию класса решеток с полными коллективными дополнениями. (III.6.3)

IX. Любая ли ассоциация (изоморфно) вложима в ассоциацию вида $K_L(A)$, где A — непустое множество, а L — решетка с полными дополнениями? (III.7.5)

X. *Существует ли полная недистрибутивная решетка с единственными дополнениями?*

БИБЛИОГРАФИЯ

Адамс и Сихлер (Adams M. E., Sichler J.)

[1] Lattices with unique complementation. — Pacific J. Math., 1981, 92, № 1, p. 1—13.

Бандельт (Bandelt H.-J.)

[1] Complemented continuous lattices. — Arch. Math., 1981, 36, № 5, p. 474—475.

Бандельт и Падманабхан (Bandelt H.-J., Padmanabhan R.)

[1] A note on lattices with unique comparable complements. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1979, 48, S. 112—113.

Бартолоцци (Bartolozzi F.)

[1] Immersione di un reticolo distributivo finito nel reticolo degli interi rispetto alla divisione. — Boll. Unione mat. ital., 1966, 21, № 2, p. 178—185.

Беран (Beran L.)

[1] Über die Charakterisierung von Boole-Verbänden. — Prax. Math., 1975, 17, № 4, S. 98—103.

Бергман (Bergmann G.)

[1] Zur Axiomatik der Elementargeometrie. — Monatshefte Math. Phys., 1929, 36, S. 269—284.

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1] Lattice theory. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 25, N. Y., 1948. [Русский перевод: Биркгоф Г. Теория структур. — М.: ИЛ, 1951.]

[2] Lattice theory. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 25, N. Y., 1967 (Third, new edition). [Русский перевод: Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.]

Биркгоф и Уорд (Birkhoff G., Ward M.)

[1] A characterization of Boolean algebras. — Math., 1939, 40, p. 609—610.

Владимиров Д. А.

[1] Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969.

Гедеонова (Gedeonova E.)

[1] Jordan — Hölder theorem for lines. — Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1971, N Mimor., p. 23—24.

Гериш (Gerrish F.)

[1] The independence of «Huntington's axioms» for Boolean algebra. — Math. Gaz., 1978, 62, № 419, p. 35—40.

Гливенко В. И.

[1] Théorie general des structures. — Paris, 1938.

Гретцер (Grätzer G.)
[1] General lattice theory. — Basel-Stuttgart, 1978. [Русский перевод: Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.]
Грийе и Варле (Grillet P. A., Varlet J. C.)
[1] Complementedness conditions in lattices. — Bull. Soc. roy. sci. Liége, 1967, **36**, № 11—12, p. 628—642.
Девиде (Devidé V.)
[1] A proof of Zermelo's theorem. — J. Symbolic Logic, 1967, **32**, № 3, p. 366.
Дедекинд (Dedekind R.)
[1] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. — Math. Ann., 1900, **53**, S. 371—403.
Дилуорс (Dilworth R. P.)
[1] On complemented lattices. — Tohoku Math. J., 1940, **47**, p. 18—23.
[2] Lattices with unique complements. — Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, p. 123—154.
Джаярам (Jayaram C.)
[1] Complemented Semilattices — Math. Semin. Notes. Kobe Univ., 1980, **8**, № 2, p. 259—267.
Кальмбах (Kalmbach G.)
[1] Orthomodular lattices. — London, 1983.
Корсельт (Korselt A.)
[1] Bemerkung zur Algebra der Logik. — Math. Ann., 1894, **44**, S. 156—157.
Кроули и Дилуорс (Crawley P., Dilworth R. P.)
[1] Algebraic theory of lattices. — Prentice-Hall, 1973.
Маклафлин (McLaughlin J. E.)
[1] Atomic lattices with unique comparable complements. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, p. 864—866.
Огасавара и Сасаки (Ogasawara T., Sasaki U.)
[1] On a theorem in lattice theory. — J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 1949, **14**, p. 13.
Падманабхан (Padmanabhan R.)
[1] A minimal selfdual equational basis for Boolean algebras. — Notices AMS, 1974, **21**, A-368.
Пашенков В. В.
[1] Об одном классе структур с неединственными дополнениями. — Изв. ВУЗов, Математика, 1958, № 4, с. 191—201.
Пирс (Peirce C. S.)
[1] On the algebra of logic. — Amer. J. Math., 1880, **3**, p. 15—57.
Салий В. Н.
[1] Лекции по теории решеток. — Саратов, 1970.
[2] Компактно порожденная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна. — Матем. заметки, 1972, **12**, № 5, с. 619—621.
[3] О полных решетках с единственными дополнениями. — В кн.: Всесоюзн. алгебраич. симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, ч. II, с. 443—444.
[4] Непрерывная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна. — В кн.: Пятая Всесоюзн. конф. по математической логике. Тезисы докладов. Новосибирск, 1979, с. 134.
[5] Несколько условий дистрибутивности решетки с единственными дополнениями. — Изв. ВУЗов, Математика, 1980, № 5, с. 47—49.
[6] Три теоремы о полных решетках с единственными дополнени ями. — В кн.: Упорядоченные множества и решетки. Вып. 6 Саратов, 1980, с. 63—69.

[7] Regular elements in complete uniquely complemented lattices. — Universal Algebra and Applications. Banach Center Publs., **9**, Warsaw, 1982, p. 15—19.

Сас (Szász G.)

[1] On complemented lattices. — Acta sci. mat., 1958, **19**, p. 77—81.

[2] Komplementumos hálók szerkezetéröl. — Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1959, **9**, № 1, p. 57—79.

[3] Einführung in die Verbandstheorie. — Leipzig, 1962.

[4] On the De Morgan formulae and the antitonity of complements in lattices. — Czechosl. Math. J., 1978, **28**, p. 400—406.

Сколем (Skolem T.)

[1] Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. — Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, 1. Mat.-Nat. Kl., 1919, № 3, p. 1—37.

Скорняков Л. А.

[1] Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982.

Скотт (Scott D.)

[1] Continuous lattices. — Lect. Notes Math., 1972, **274**, p. 97—136.

Уайтхед (Whitehead A. H.)

[1] Universal algebra. — London, 1898.

Хантингтон (Huntington E. V.)

[1] Sets of independent postulates for the algebra of logic. — Trans. Amer. Math. Soc., 1904, **5**, p. 288—309.

Чен (Chen C. C.)

[1] On uniquely complemented lattices. — J. Nanyang Univ., 1969, **3**, p. 380—384.

Чен и Гретцер (Chen C. C., Grätzer G.)

[1] On the construction of complemented lattices. — J. Algebra, 1969, **11**, № 1, p. 56—63.

Шредер (Schröder E.)

[1] Algebra der Logik. — Leipzig, 1890.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава первая
§ 1. Упорядоченные множества 7
§ 2. Решетки 18
§ 3. Модулярные решетки 29
§ 4. Дистрибутивные решетки 31

Глава вторая
§ 1. Решетки с дополнениями 37
§ 2. Булевы алгебры 40
§ 3. Аксиоматика булевых алгебр 44
§ 4. Существуют ли недистрибутивные решетки с единственными дополнениями? 51
§ 5. Недистрибутивные решетки с единственными дополнениями существуют 63

Глава третья
§ 1. Полные решетки 72
§ 2. Пополнение сечениями 76
§ 3. Представления полных решеток 79
§ 4. Алгебраические решетки 84
§ 5. Непрерывные решетки 91
§ 6. Решетки с коллективными дополнениями 97
§ 7. Ортогональные системы и решеточные преобразования множеств 102
§ 8. Правильные элементы и теоремы о разложении полных решеток с единственными дополнениями 116

Проблемы 124

Библиография 125