



**Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая,
А. Г. Мордкович**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Министерство просвещения РСФСР

Московский государственный
заочный
педагогический институт

Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая,
А. Г. Мордкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Учебное пособие для студентов-заочников
II курса физико-математических факульте-
тов педагогических институтов*

Москва
«Просвещение»
1979

*Рекомендовано к печати Главным управлением
высших и средних педагогических учебных заведений*

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Рецензенты: кандидат физико-математических наук
В. В. Цукерман, кандидат физико-математических
наук *В. Ф. Молчанов*, кандидат физико-математических
наук *А. С. Симонов*

В $\frac{60602 - 248}{103 (03) - 79}$ заказное



© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ),
1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена интегральному исчислению функций одной переменной и является третьей в серии учебных пособий по математическому анализу, предназначенных для студентов-заочников. Ранее вышли в свет книги Н. Я. Виленкина и Е. С. Куницкой «Математический анализ. Введение в анализ», М., «Просвещение», 1973 (ниже цитируется как «Введение в анализ») и Н. Я. Виленкина, Е. С. Куницкой и А. Г. Мордковича «Математический анализ. Дифференциальное исчисление», М., «Просвещение», 1978 (ниже цитируется как «Дифференциальное исчисление»).

Значение раздела «Интегральное исчисление» для будущего учителя математики определяется в первую очередь тем, что соответствующие вопросы изучаются теперь в средней школе. Поэтому главной задачей авторов было выяснение тех основных понятий, которые нужны для школьного преподавания, строгое доказательство утверждений, которые в школе лишь поясняются. Это определило то, что главное внимание уделяется существу разбираемых вопросов, естественно-научным и геометрическим истокам вводимых понятий, а техника вычисления интегралов играет подчиненную роль.

По мнению авторов, вопрос о выражении интегралов через элементарные функции, игравший столь большую роль в математике XVIII и начала XIX в., сейчас можно считать устаревшим, так как наряду с элементарными функциями в математике широко используются различные классы специальных функций, а при вычислении интегралов применяют таблицы неопределенных интегралов. Поэтому авторы сократили часть, посвященную неопределенным интегралам. Например, в пособии ничего не говорится о подстановках Эйлера, биномиальных дифференциалах и о некоторых искусственных приемах интегрирования. Чтобы облегчить студентам вычисление интегралов, в Приложении I приведена таблица неопределенных интегралов, составленная на основе имеющейся в «Справочнике по математике» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева.

В то же время усилена часть, касающаяся принципиальных вопросов курса: понятий площади плоской фигуры, объема тела, длины дуги и площади поверхности. При этом основное внимание

уделяется не вычислительным формулам, а существу этих понятий, их свойствам.

Отметим некоторые методические особенности книги. Понятия неопределенного и определенного интегралов появляются одновременно, причем определенный интеграл трактуется как разность значений первообразной. Это вызвано тем, что именно такой подход к понятию определенного интеграла принят сейчас в школе. Во второй главе вводится понятие интегрируемой функции и развивается иной подход к понятию определенного интеграла, основанный на том, что определенный интеграл разделяет множества нижних и верхних сумм Дарбу. Авторы в основном отказались от рассмотрения интегральных сумм и традиционного определения интеграла как предела интегральных сумм. Как известно, пределы интегральных сумм являются пределами особого рода (пределами по фильтру) и справедливость для них обычных свойств пределов остается обычно недоказанной. По мнению авторов, выбранный ими подход к понятию определенного интеграла нагляднее и проще усваивается студентами. Доказывается, что непрерывные функции интегрируемы и имеют первообразную, причем в классе непрерывных функций оба подхода к понятию интеграла приводят к одному и тому же результату. Это свидетельствует о том, что определенные интегралы от непрерывных функций обладают свойствами, доказанными в первой главе для интегралов от функций, имеющих первообразную.

Третья глава посвящена геометрическим и физическим приложениям определенного интеграла. В примерах приложений интегрального исчисления к решению физических задач авторы позволили себе использовать «язык бесконечно малых», применяемый и в настоящее время в книгах по физике. Как известно, несмотря на строгость этого языка, он обладает достоинствами наглядности и простоты применения.

Книга состоит из трех глав, разбитых на параграфы, которые, в свою очередь, делятся на пункты. Нумерация определений, теорем и формул сохраняется в пределах параграфа. Каждый пункт содержит, помимо теоретического материала, подробно решенные примеры (их нумерация сохраняется в пределах параграфа), а в конце каждого параграфа приведены вопросы для самопроверки и упражнения. Нумерация упражнений сквозная. Количество упражнений, на наш взгляд, является достаточным для проведения аудиторных занятий и для составления заданий студентам на межсессионный период.

В Приложении 2 приведены примерные варианты контрольной работы и образец выполнения «нулевого» варианта работы.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Задача восстановления функции по ее производной. В дифференциальном исчислении рассматривались задачи, решение которых требовало отыскания производной данной функции. В ряде случаев приходится решать обратную задачу: по заданной производной отыскивать функцию, которую дифференцировали. Задачи такого рода решаются в разделе математического анализа, называемом *интегральным исчислением*. Методы интегрального исчисления позволяют решать задачи на вычисление площадей плоских фигур, длин дуг, объемов тел и другие геометрические и физические задачи.

Пример 1. Пусть скорость v движения точки в момент времени t равна $2t$. Найдем выражение для координаты точки в момент времени t (точка движется по прямой).

Решение. Известно, что $v = \frac{dx}{dt}$. Так как в данном случае $\frac{dx}{dt} = 2t$, то ответом к задаче могут быть функции $x = t^2$; $x = t^2 + 3$ и т. д.; в общем виде ответ на поставленный вопрос записывается в виде $x = t^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Из приведенного примера видно, что обратная задача имеет бесконечное множество решений. Чтобы получить определенный закон движения, необходимо знать, например, положение точки в момент времени $t = 0$. Если при $t = 0$ имеем $x = 0$, то $0 = 0 + C$, и потому $C = 0$.

Перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$ равно $(b^2 + C) - (a^2 + C) = b^2 - a^2$, и, следовательно, оно не зависит от C .

2. Первообразная функция.

Определение 1. Пусть на некотором промежутке X задана функция $y = f(x)$. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной*¹ для $f(x)$ на этом промежутке, если для всех $x \in X$

$$F'(x) = f(x).$$

Следующая теорема позволяет свести нахождение всех первообразных данной функции к отысканию одной из них.

¹ Термин «первообразная» был введен французским математиком Ж. Л. Лагранжем (1736—1813).

Т е о р е м а 1. Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке X первообразную $F(x)$, то и все функции вида $F(x) + C$ будут для нее первообразными на том же промежутке. Обратно, любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $y = f(x)$, $x \in X$, может быть представлена в виде $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функций, а C — произвольная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению первообразной имеем $F'(x) = f(x)$. Учитывая, что производная постоянной равна нулю, получаем:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Это и означает, что $F(x) + C$ является первообразной для $y = f(x)$ на промежутке X .

Покажем теперь, что если функция $y = f(x)$ задана на промежутке X и $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

В самом деле, по определению первообразной имеем:

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ и } F'(x) = f(x).$$

Но две функции, имеющие на промежутке X равные производные, отличаются лишь на постоянное слагаемое¹. Значит, $\Phi(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать.

3. Определения неопределенного и определенного интегралов.

О п р е д е л е н и е 2. Множество всех первообразных для функции $y = f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* для $f(x)$ и обозначается $\int f(x) dx$.

Функцию $y = f(x)$ называют *подынтегральной функцией* для $\int f(x) dx$, а произведение $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*.

Таким образом,

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

На практике принята более короткая запись:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Часто говорят: «взять неопределенный интеграл» или «вычислить неопределенный интеграл», понимая под этим следующее: найти множество всех первообразных для подынтегральной функции.

Мы видели, что если функция имеет хоть одну первообразную, то она имеет бесконечно много первообразных. На практике часто приходится искать разность значений первообразной в точках b и a . Эта разность не зависит от выбора произвольной постоянной C . В самом деле, если $\Phi(x) = F(x) + C$, то

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Итак,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a).$$

¹ См.: Дифференциальное исчисление, с. 82.

Поскольку разность значений первообразной в точках b и a не зависит от того, какую именно первообразную функции $y = f(x)$ мы выбираем, эту разность называют определенным интегралом от функции по отрезку $[a, b]$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем первообразную $y = F(x)$. Разность $F(b) - F(a)$ называют *определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$* и обозначают $\int_a^b f(x) dx$. Итак,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x) \Big|_a^b$, тогда $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$. Числа a и b называют *пределами интегрирования*.

Например, $y = \frac{x^3}{3}$ — одна из первообразных для функции $y = x^2$. Поэтому

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Остановимся на геометрическом смысле введенных понятий. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. Угловой коэффициент касательной в каждой точке графика функции $y = F(x)$ равен $F'(x)$, т. е. $f(x)$. Поэтому задача о нахождении первообразной геометрически означает следующее: *зная угловой коэффициент касательной в каждой точке, найти кривую*. Так как при параллельном переносе вдоль оси ординат угловой коэффициент касательной в точке с заданной абсциссой не изменяется, то, найдя одну такую кривую, все остальные искомые кривые получают из нее параллельным переносом в направлении оси ординат. Это семейство кривых (рис. 1) и представляет собой геометрическую иллюстрацию неопределенного интеграла.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ показывает изменение ординаты каждой из кривых $y = F(x) + C$ при переходе от точки a к точке b . Так как все эти кривые получаются друг из друга параллельным переносом в направлении оси ординат, то указанное изменение ординаты для всех кривых одно и то же (рис. 2).

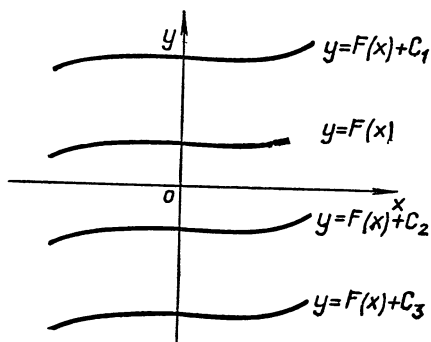


Рис. 1

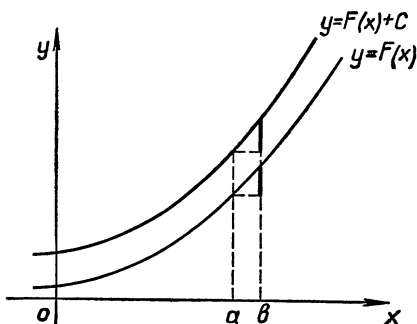


Рис. 2

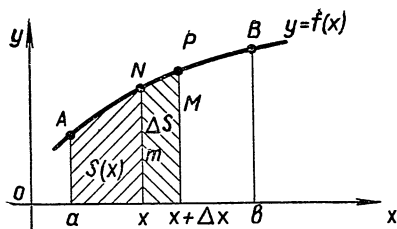


Рис. 3

Решение. Мы знаем, что если $x = x(t)$ — закон движения точки, то $v(t) = x'(t)$. Поэтому $x(t)$ — одна из первообразных для функции $v = v(t)$. Но перемещение s точки M за промежуток времени $[a; b]$ равно разности ее координат в моменты времени b и a , т. е. равно $x(b) - x(a)$. Иными словами, это перемещение равно разности значений первообразной для функции $v = v(t)$ в моменты времени b и a . Таким образом,

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

Так, например, скорость тела при свободном падении выражают формулой $v = gt$. В этом случае путь, пройденный падающим телом за b секунд с начала падения, вычисляется так:

$$s = \int_0^b gt dt = \left. \frac{gt^2}{2} \right|_0^b = \frac{gb^2}{2}.$$

Задача 2. Найдем площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком непрерывной на $[a; b]$ функции $y = f(x)$, принимающей на этом отрезке только неотрицательные значения (рис. 3).

Прежде чем переходить к решению задачи, заметим, что здесь мы используем наглядное представление о площади плоской фигуры (более детально вопрос об определении площади будет рассмотрен в гл. III).

Решение. Обозначим через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции $aANx$ ($a < x < b$). Докажем, что $S'(x) = f(x)$.

Дадим абсциссе x приращение Δx (положим для определенности $\Delta x > 0$), тогда площадь получит приращение ΔS . Обозначим через m наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x; x + \Delta x]$, а через M — наибольшее значение той же функции на том же отрезке. Ясно, что тогда $m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x$, а значит,

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M.$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то в силу непрерывности функции $y = f(x)$ будем иметь:

Рассмотрим задачи, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Задача 1. Пусть точка M движется по прямой и пусть известна скорость $v = v(t)$ движения этой точки в любой момент времени t промежутка $[a; b]$. Найдем перемещение s точки M за этот промежуток времени.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M = f(x).$$

Значит, существует и $\lim_{\Delta x} \frac{\Delta S}{\Delta x}$, причем этот предел равен $f(x)$. Таким образом,

$$S'(x) = f(x).$$

Полученное равенство означает, что $S(x)$ — одна из первообразных для функции $y = f(x)$. Поскольку прямая $x = a$ «отсекает» от трапеции $aABb$ фигуру нулевой площади, то $S(a) = 0$. С другой стороны, $S(b)$ — площадь всей криволинейной трапеции $aABb$. Значит, *искомая площадь S равна $S(b) - S(a)$, т. е. равна разности значений одной из первообразных для функции $y = f(x)$ в точках b и a .* Это означает, что

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример 2. Найдем площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ (рис. 4).

Решение. Искомая площадь S выражается формулой $S = \int_0^{\pi} \sin x dx$. Одной из первообразных для функции $y = \sin x$ является $(-\cos x)$, так как $(-\cos x)' = \sin x$. Значит,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = \\ &= -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2. \end{aligned}$$

В заключение данного пункта остановимся на двух свойствах неопределенного интеграла, легко получающихся из определения.

1°. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

Доказательство. Так как

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$, то

$$\begin{aligned} \left(\int f(x) dx\right)' &= (F(x) + C)' = \\ &= F'(x) + C' = f(x). \end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} d\left(\int f(x) dx\right) &= \left(\int f(x) dx\right)' dx = \\ &= f(x) dx. \end{aligned}$$

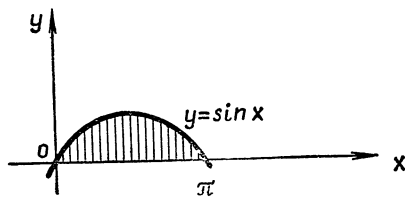


Рис. 4

Это утверждение часто используется для проверки результата интегрирования. Пусть, например, нужно показать, что

$$\int 5x \, dx = \frac{5}{2} x^2 + C.$$

Дифференцируя правую часть равенства, получим подынтегральную функцию:

$$\left(\frac{5}{2} x^2 + C\right)' = \frac{5}{2} \cdot 2x + 0 = 5x.$$

Значит,

$$\int 5x \, dx = \frac{5}{2} x^2 + C.$$

2°. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int F'(x) \, dx = F(x) + C.$$

Доказательство. Так как

$$(F(x) + C)' = F'(x),$$

то по определению неопределенного интеграла

$$\int F'(x) \, dx = F(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

Учитывая, что $F'(x) \, dx = dF(x)$, свойство 2° можно записать и так:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Таблица основных интегралов. Пользуясь свойством 1° из предыдущего пункта, можно по таблице производных составить таблицу основных интегралов. Например, так как

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, \text{ то} \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Докажем, что } \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$$

В самом деле, если $x > 0$, то $|x| = x$ и, следовательно,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и, следовательно,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Итак, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, а значит,

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$$

Эту формулу можно применять или на открытом луче $]0; +\infty[$, или на открытом луче $]-\infty; 0[$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C;$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
5. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \int e^x dx = e^x + C;$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Заметим, что переменную x , входящую в эти формулы, можно заменить любой другой. Например, вместо формулы $\int \cos x dx = \sin x + C$ можно написать $\int \cos t dt = \sin t + C$ и т. д.

Пример 3. Вычислим интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2+16}; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2-16}; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}.$$

Решение. 1) Воспользуемся формулой 3:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C;$$

2) Воспользуемся формулой 5:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16} = \int \frac{dx}{x^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C;$$

3) Воспользуемся формулой 12:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 16} = \int \frac{dx}{x^2 - 4^2} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C;$$

4) Воспользуемся формулой 6:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C;$$

5) Воспользуемся формулой 13:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| + C.$$

5. Свойства неопределенного интеграла. Вычисление многих интегралов сводится к табличным, если использовать свойства неопределенных интегралов, вытекающие из соответствующих свойств дифференциалов. Рассмотрим некоторые из них:

а) *Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла:*

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцировав правую часть равенства, получаем:

$$d \left(\lambda \int f(x) dx \right) = \lambda d \left(\int f(x) dx \right) = \lambda f(x) dx.$$

Таким образом, дифференциал правой части доказываемой формулы равен подынтегральному выражению левой части, а это и означает справедливость формулы (1).

б) *Если существуют интегралы $\int f_1(x) dx$ и $\int f_2(x) dx$, то неопределенный интеграл суммы $f_1(x) + f_2(x)$ равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:*

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем правую часть равенства (2):

$$\begin{aligned} d \left(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx \right) &= d \left(\int f_1(x) dx \right) + \\ + d \left(\int f_2(x) dx \right) &= f_1(x) dx + f_2(x) dx = (f_1(x) + f_2(x)) dx. \end{aligned}$$

Мы получили подынтегральное выражение неспределенного интеграла, стоящего в левой части равенства (2), откуда и следует справедливость утверждения.

Пример 4. Вычислим $\int \frac{x \sqrt{x} + x^2 - 5}{x^2 \sqrt{x}} dx$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель и используя свойство б), получаем табличные интегралы:

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt{x+x^2-5}}{x^2\sqrt{x}} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 5 \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \\ &- 5 \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + C = \ln|x| + 2\sqrt{x} + \frac{10}{3x\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Каждый из трех неопределенных интегралов содержит свою произвольную постоянную. В окончательном ответе через C обозначают их сумму, которая также является произвольной постоянной.

Пример 5. Вычислим $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Решение. Записав единицу, стоящую в числителе, в тригонометрическом виде ($1 = \sin^2 x + \cos^2 x$), разделим числитель почленно на знаменатель. Применив затем свойство б), получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислим $\int (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx$.

Решение. Раскроем скобки, перейдем к дробным показателям, а затем применим правила интегрирования:

$$\begin{aligned} \int (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx &= \int (1 + 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + x) dx = \\ &= \int (1 + 3x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x) dx = \int dx + 3 \int x^{\frac{1}{3}} dx + \\ &+ 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int x dx = x + 3 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 3 \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^2}{2} + C = \\ &= x + \frac{9}{4} x \sqrt[3]{x} + \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

6. Свойства определенного интеграла. Так как определенный интеграл равен разности значений первообразной, то его свойства выводятся из свойств неопределенного интеграла.

а) Если существует $\int_a^b f(x) dx$ и λ — любое число, то

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. Из соответствующего свойства неопределенных интегралов следует, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\lambda F(x)$ — первообразная для $\lambda f(x)$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda F(x) \Big|_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \\ &= \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

б) Если функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ имеют первообразные на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Доказательство. Из соответствующего свойства неопределенных интегралов следует, что если $F_1(x)$ — первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ — первообразная для $f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $F_1(x) + F_2(x)$ — первообразная для $f_1(x) + f_2(x)$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx &= (F_1(x) + F_2(x)) \Big|_a^b = (F_1(b) + F_2(b)) - \\ &- (F_1(a) + F_2(a)) = (F_1(b) - F_1(a)) + (F_2(b) - F_2(a)) = \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

в) Если функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a; b]$ и если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(аддитивное свойство определенного интеграла).

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a), \quad \int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a), \quad \int_c^b f(x) dx = \\ &= F(b) - F(c). \end{aligned}$$

Но

$$F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)).$$

Значит,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Доказанное свойство имеет простой геометрический смысл: оно выражает аддитивность площади криволинейной трапеции. Так, на рисунке 5

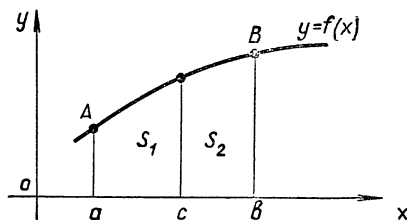


Рис. 5

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx;$$

$$S_1 = \int_a^c f(x) dx; S_2 = \int_c^b f(x) dx.$$

Тогда

$$S_{aABb} = S_1 + S_2.$$

г) Если функция $y = f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a; b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b).$$

Но

$$F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)),$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

д)
$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Доказательство.

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Пример 7. Вычислим $\int_0^3 \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$.

Решение. Сначала выделим целую часть неправильной дроби, содержащейся под знаком интеграла:

$$\int_0^3 \frac{x^4 dx}{x^2 + 1} = \int_0^3 \frac{(x^4 - 1) + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^3 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx.$$

Воспользовавшись теперь свойством б) определенного интеграла, получим:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx + \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 - x \Big|_0^3 + \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 = (9 - 0) - (3 - 0) + \\ &+ (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 0) = 6 + \operatorname{arctg} 3.\end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется первообразной для функции $y = f(x)$?
 2. Могут ли две первообразные одной и той же функции отличаться друг от друга на $\sin x$?
 3. Чем является неопределенный интеграл: числом, функцией или совокупностью функций?
 4. Что означает фраза «функция $y = f(x)$ имеет первообразную на промежутке X »?
 5. Чем является определенный интеграл: числом, функцией или совокупностью функций?
 6. Как связаны понятия первообразной и определенного интеграла?
 7. На основе какого свойства интегралов составлена таблица основных интегралов?
 8. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
 9. Можно ли вынести $\cos 3x$ за знак неопределенного интеграла?
- А е³?
10. Равен ли интеграл от произведения функций произведению интегралов?
 11. Истолкуйте геометрический смысл определенного интеграла.
 12. Как с помощью определенного интеграла можно вычислить площадь криволинейной трапеции?

Упражнения

Вычислите следующие неопределенные интегралы:

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}}.$ | 2. $\int \frac{6x^3 - 24x + 1}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx.$ |
| 3. $\int \frac{x^4 + 5x \sqrt{x} - 7x^3 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx.$ | 4. $\int \frac{(x+2)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx.$ |
| 5. $\int \frac{3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$ | 6. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ |
| 7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx.$ | 8. $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx.$ |

$$9. \int e^x (2^x + 3^x) dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{9x^2 + 45}.$$

$$11. \int \frac{dx}{3x^2 - 12}.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 9x^2}} \quad 13. \int \frac{dx}{\sqrt{7 - 4x^2}}.$$

$$14. \int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} dx.$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 3}.$$

Вычислите следующие определенные интегралы:

$$16. \int_1^2 \frac{5x^3 - 3x^2 + 45x - 6}{x^3} dx.$$

$$17. \int_0^{\pi} \frac{dx}{9 + x^2}.$$

$$18. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

19. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$ и графиком функции $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

20. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$ и графиком функции $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

1. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Метод вычисления интегралов, называемый интегрированием по частям, основан на правиле дифференцирования произведения.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, дифференцируемые на некотором промежутке X . Тогда, как известно, дифференциал произведения этих функций вычисляется по формуле

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Взяв неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (u dv + v du).$$

Так как

$$\int d(uv) = uv + C,$$

а

$$\int (u dv + v du) = \int u dv + \int v du,$$

то получаем:

$$uv + C = \int u dv + \int v du,$$

откуда

$$\int u dv = uv + C - \int v du.$$

Поскольку $\int v du$ уже содержит произвольную постоянную, в правой части полученного равенства C можно опустить и записать равенство в виде

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*.

При выводе формулы (1) мы предположили, что функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы. Этой формулой обычно пользуются в тех случаях, когда подынтегральное выражение $v du$ проще, чем подынтегральное выражение $u dv$.

Заметим, что одно и то же подынтегральное выражение можно различными способами записать в виде $u dv$. Например,

$$x^4 \sin x dx = x^4 \cdot d(-\cos x) = \sin x \cdot d\left(\frac{x^5}{5}\right) = x^2 \sin x \cdot d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

и т. д. Поэтому иногда приходится испытывать различные формы такой записи, прежде чем метод приведет к успеху. Обычно стараются подынтегральное выражение разбить на части u и dv так, чтобы вид v был не сложнее, чем вид v' , а вид u' проще, чем вид u . В частности, полезно иметь в виду, что для таких функций, как $y = \ln x$, $y = x^n$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcsctg} x$, производные имеют вид более простой, чем сами функции. Поэтому в большинстве случаев эти функции удобно принимать за u .

Пример 1. Вычислим $\int x \cos x dx$.

Решение. Положим $\left. \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \cos x dx. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Тогда } du = dx, \\ v = \sin x. \end{array}$

Используя формулу (1), получаем:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

З а м е ч а н и е. При нахождении v не пишут промежуточную произвольную постоянную C_1 , так как она не оказывает влияния на окончательный результат.

Пример 2. Вычислим $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. Положим $\left. \begin{array}{l} u = x^2, \\ dv = \sin x dx. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Тогда } du = 2x dx, \\ v = -\cos x. \end{array}$

Используя формулу (1), получим:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \quad (2)$$

Чтобы вычислить полученный в правой части равенства (2) интеграл, приходится снова использовать метод интегрирования по частям. Получим (см. пример 1):

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1.$$

Возвращаясь к исходному интегралу и воспользовавшись промежуточным равенством (2), окончательно получаем:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C_1) = 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C \quad (\text{здесь } C = 2C_1).$$

Пример 3. Вычислим $\int x^3 \ln x \, dx$.

Решение. В данном случае удобнее за u принять не степенную функцию, как в предыдущих примерах, а логарифмическую функцию. Положим $u = \ln x$, Тогда $du = \frac{1}{x} dx$,
 $dv = x^3 dx$. $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$

Используя формулу (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4} + C_1 \right) = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислим $\int e^x \sin x \, dx$.

Решение. В данном случае под знаком интеграла содержится произведение двух функций e^x и $\sin x$. Производная и первообразная каждой из этих функций не проще самой функции. Это значит, что в данном случае за u можно принять любую из функций e^x , $\sin x$. Положим

$$\begin{array}{l|l} u = e^x, & \text{Тогда } du = e^x dx, \\ dv = \sin x \, dx. & v = -\cos x. \end{array}$$

Преобразуем данный интеграл, воспользовавшись формулой (1):

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x \, dx.$$

В правой части получили интеграл того же вида, что и данный. Для его вычисления применим метод интегрирования по частям, снова взяв за u показательную функцию:

$$\begin{array}{l|l} u = e^x, & \text{Тогда } du = e^x dx, \\ dv = \cos x \, dx. & v = \sin x. \end{array}$$

Таким образом,

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \quad (3)$$

В правой части равенства (3) содержится точно такой же интеграл, что и в левой части, но с другим знаком. Из равенства (3) получаем:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1$$

и далее:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \quad (\text{здесь } C = \frac{C_1}{2}).$$

З а м е ч а н и е. После переноса интеграла в левую часть равенства (3) надо оставить в правой части произвольную постоянную C_1 , неявно содержащуюся в записи интеграла.

2. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Для определенного интеграла формула интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad (4)$$

В самом деле, если

$$\int u \, dv = F(x) + C_1, \quad \int v \, du = \Phi(x) + C_2,$$

то по формуле интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеем:

$$F(x) = u(x) v(x) - \Phi(x) + C.$$

Поэтому

$$F(b) = u(b) v(b) - \Phi(b) + C$$

и

$$F(a) = u(a) v(a) - \Phi(a) + C.$$

Значит,

$$F(b) - F(a) = (u(b) v(b) - u(a) v(a)) - (\Phi(b) - \Phi(a)),$$

а это и есть формула (4).

Пример 5. Вычислим $\int_1^2 x e^x \, dx$.

Решение. Положим

$$\begin{array}{l|l} u = x, & \text{Тогда } du = dx, \\ dv = e^x dx. & v = e^x. \end{array}$$

Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x e^x \, dx &= x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx = \\ &= 2 \cdot e^2 - 1 \cdot e^1 - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2. \end{aligned}$$

3. Рекуррентные формулы. Метод интегрирования по частям применяется в ряде случаев для вывода *рекуррентных* (возвратных) формул. Рассмотрим примеры вывода рекуррентных формул как в случае неопределенного, так и в случае определенного интеграла,

Пример 6. Вычислим $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Решение. Введем обозначение $I_k = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^k}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Положим } u = \frac{1}{(a^2 + x^2)^n}, \\ dv = dx. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Тогда } du = -n(a^2 + x^2)^{-n-1} \cdot 2x dx = \\ = -\frac{2nx dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}, \\ v = x. \end{array}$$

Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}. \quad (5)$$

Преобразуем интеграл, содержащийся в правой части равенства (5), следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} &= \int \frac{(a^2 + x^2) - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} - \\ &- a^2 \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в формулу (5):

$$I_n = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).$$

Из этого равенства находим:

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^n}. \quad (6)$$

Полученная рекуррентная формула (6), как бы возвращая нас назад от $n+1$ к n , позволяет свести вычисление интеграла с индексом $n+1$ к вычислению интеграла с меньшим индексом n .

Пусть, например, нужно вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$. Воспользуемся рекуррентной формулой (6). В данном случае $n+1=2$, следовательно, $n=1$. Имеем:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2},$$

т. е.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2 + x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Для определенных интегралов рекуррентные формулы часто упрощаются за счет того, что при подстановке пределов интегрирования a и b выражение $u(x)$ $v(x)$ обращается в нуль.

Пример 7. Вычислим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Решение. Введем обозначение $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

и положим $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$. Тогда $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$.
 Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\left(\cos \frac{\pi}{2} \sin^{n-1} \frac{\pi}{2} - \cos 0 \sin^{n-1} 0\right) + \\ &+ (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \\ &- (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Итак,

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Это значит, что

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad (7)$$

т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx.$$

Таким образом, рекуррентная формула (7) позволяет свести вычисление интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ к вычислению интеграла, где $\sin x$ имеет более низкую степень. Например,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{3-1}{3} I_1 = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \\ &= \frac{2}{3} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая формула дифференцирования используется при выводе формулы интегрирования по частям?
2. В чем состоит метод интегрирования по частям?

3. Как записывается формула интегрирования по частям в случае неопределенного интеграла? В случае определенного интеграла?

4. В чем заключается идея вычисления интегралов по рекуррентным формулам?

5. Что надо принять за u , а что за dv в следующих интегралах:

а) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$; б) $\int x^4 \ln x dx$; в) $\int x^5 e^{2x} dx$? Обоснуйте свой ответ.

Упражнения

Методом интегрирования по частям вычислите следующие неопределенные интегралы:

21. $\int (x - 2) \sin x dx.$

22. $\int \ln x dx.$

23. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

24. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

25. $\int (x^2 + 1) e^x dx.$

26. $\int (x^3 - 5x^2 + 1) e^x dx.$

27. $\int (x + 1) \ln^2 x dx.$

28. $\int \frac{x dx}{3^x}.$

29. $\int e^x \cos x dx.$

Методом интегрирования по частям вычислите следующие определенные интегралы:

30. $\int_{-\frac{1}{2\pi}}^1 x 2^x dx.$

31. $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx.$

32. $\int_0^{\frac{1}{2\pi}} x^2 \sin x dx.$

33. $\int_1^2 \ln^2 x dx.$

Воспользовавшись рекуррентной формулой (6), вычислите следующие интегралы:

34. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$

35. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$

Воспользовавшись рекуррентной формулой (7), вычислите следующие интегралы:

36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx.$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x dx.$

38. Выведите рекуррентную формулу для вычисления инте-

грала $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Замена переменной в неопределенном интеграле. Одним из наиболее мощных методов интегрирования является *замена переменной*. Поясним суть этого метода. Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Но в силу инвариантности формы дифференциала равенство

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$$

остается справедливым и в случае, когда x — промежуточный аргумент, т. е. $x = \varphi(t)$. Это значит, что формула

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

верна и при $x = \varphi(t)$. Таким образом,

$$\int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C,$$

или

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Итак, если $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на промежутке X , а $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая на промежутке T функция, значения которой принадлежат X , то $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, $t \in T$, и, следовательно,

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx.$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ к вычислению интеграла $\int f(x) dx$. При этом мы подставляем вместо $\varphi(t)$ переменную x , а вместо $\varphi'(t) dt$ дифференциал этой переменной, т. е. dx . Поэтому полученная формула называется *формулой замены переменной под знаком неопределенного интеграла*. Она используется на практике как «слева направо», так и «справа налево». Метод замены переменной позволяет сводить многие интегралы к табличным. После вычисления интеграла $\int f(x) dx$ надо снова заменить x на $\varphi(t)$.

Пример 1. Вычислим $\int \cos 2t dt$.

Решение. Введем новую переменную x , положив $2t = x$. Тогда $2dt = dx$, $dt = \frac{1}{2} dx$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \cos 2t dt &= \int \cos x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x + C = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2t + C. \end{aligned}$$

Замечание. Вычисление короче записывают так:

$$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) = \frac{1}{2} \sin 2t + C.$$

Аналогичными преобразованиями мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Пусть известно, что $\int f(t) = F(t) + C$. Тогда

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Итак, если

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

то

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Например,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

и потому

$$\int \frac{dx}{5x - 3} = \frac{1}{5} \ln |5x - 3| + C.$$

Пример 2. Вычислим $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} t} dt}{1 + t^2}$.

Решение. В состав данного подынтегрального выражения входит множитель $\frac{dt}{1 + t^2}$, являющийся дифференциалом функции $\operatorname{arctg} t$. Полагая $\operatorname{arctg} t = x$, получим:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} t} dt}{1 + t^2} = \int e^x dx = e^x + C = e^{\operatorname{arctg} t} + C.$$

Пример 3. Вычислим $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 9}$.

Решение. Числитель данного подынтегрального выражения напоминает дифференциал для x^3 : в самом деле, $dx^3 = 3x^2 dx$. Кроме того, знаменатель подынтегрального выражения легко выражается через x^3 :

$$x^6 + 9 = (x^3)^2 + 9.$$

Это наводит на мысль о целесообразности подстановки $x^3 = u$.

Тогда $du = 3x^2 dx$, откуда $x^2 dx = \frac{1}{3} du$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 9} &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{u^2 + 9} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + 3^2} = \\ &= \frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + C = \frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

В рассмотренных примерах новая переменная была функцией от переменной интегрирования. В ряде случаев бывает целесообразно

переменную интегрирования в заданном интеграле заменить функцией от другой переменной. В частности, при интегрировании некоторых видов иррациональных функций оказываются удобными тригонометрические подстановки.

Пример 4. Вычислим $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Положим $x = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$) и выразим все множители, входящие в состав подынтегрального выражения, через новую переменную t :

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 (1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t, \\ dx = a \cos t dt.$$

При этом $\cos t \geq 0$, так как $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Переходя к новой переменной под знаком неопределенного интеграла, учитывая, что $\cos t \geq 0$ и потому $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, получим:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 \cos^2 t} a \cos t dt = \\ &= \int a \cos t a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t d(2t) = \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} 2 \sin t \cos t + C = \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C. \end{aligned}$$

Так как $x = a \sin t$, то $\sin t = \frac{x}{a}$, откуда $t = \arcsin \frac{x}{a}$ (переход к обратной тригонометрической функции возможен, поскольку по условию $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$). Далее имеем:

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

(перед радикалом берется знак «плюс», поскольку $\cos t \geq 0$). Значит,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

2. Замена переменной в определенном интеграле. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и пусть $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha; \beta]$, отображающая его в отрезок $[a; b]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. В предыдущем пункте мы видели, что

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

В результате мы приходим к следующему утверждению:

Пусть функция $y = f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha; \beta]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

На этом утверждении и основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла. Заметим, что на практике формула (1) используется как «слева направо», так и «справа налево».

Условие, что при $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ имеем: $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b]$, заведомо выполняется, если функция $x = \varphi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha; \beta]$. Это имеет место, если ее производная сохраняет знак на $[\alpha; \beta]$.

Пример 5. Вычислим $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = \varphi(t) = a \sin t$. Найдем пределы интегрирования α и β для новой переменной t .

Функция $x = a \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает на нем все значения от 0 до a . Поэтому 0 и $\frac{\pi}{2}$ соответственно нижний и верхний пределы интегрирования для новой переменной t .

Функция $\varphi(t) = a \sin t$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ определена и дифференцируема внутри него, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ и $\varphi\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0; a]$. Значит, мы можем воспользоваться формулой (1). Используя решение примера 4, получаем:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{a^2}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 6. Вычислим $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$4x^2 - 4x + 5 = (4x^2 - 4x + 1) + 4 = (2x - 1)^2 + 4.$$

Положим $u = 2x - 1$, тогда $du = 2dx$. Если $x = 0,5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 0,5 - 1 = 0$; если $x = 1,5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 1,5 - 1 = 2$. Таким образом, 0 и 2 — новые пределы интегрирования. Функция $u = 2x - 1$ на отрезке $[0,5; 1,5]$ определена, дифференцируема и монотонно возрастает; значит, можно воспользоваться формулой (1) (но если в предыдущем примере мы использовали эту формулу «слева направо», то теперь будем идти «справа налево»). Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} &= \frac{1}{2} \int_{0,5}^{1,5} \frac{2dx}{(2x - 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{du}{u^2 + 2^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. На каком свойстве дифференциала основан метод замены переменной?

2. Как осуществляется замена переменной под знаком неопределенного интеграла? В каких случаях целесообразно применение этого метода?

3. Что следует написать вместо многоточия в интеграле $\int \sin^n t \dots dt$, чтобы целесообразно было сделать подстановку $\sin t = y$?

4. Целесообразно ли в интеграле $\int \operatorname{arctg}^5 x \, dx$ делать подстановку $\operatorname{arctg} x = z$? Целесообразно ли делать ее в интеграле $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x \, dx}{1 + x^2}$?

5. Что должно стоять в знаменателе в интеграле $\int \frac{\arcsin^6 x \, dx}{\dots \dots \dots}$, чтобы была целесообразна подстановка $\arcsin x = z$?

6. Чем отличается замена переменной в определенном интеграле от замены переменной в неопределенном интеграле?

7. Каким условиям должна удовлетворять функция $x = \varphi(t)$, чтобы в определенном интеграле можно было переменную t заменить на x ?

Упражнения

Используя метод замены переменной, вычислите следующие интегралы:

39. $\int \sin 3x \, dx.$
40. $\int \sqrt{1-8x} \, dx.$
41. $\int \frac{dx}{5x-7}.$
42. $\int e^{5-3x} \, dx.$
43. $\int e^{\cos x} \sin x \, dx.$
44. $\int e^{x^2} x \, dx.$
45. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^3+6}.$
46. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$
47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+10} \, dx.$
48. $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx.$
49. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2(x^2+3)}.$
50. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}.$
51. $\int \frac{\arcsin^2 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
52. $\int \frac{x^3 \, dx}{x^8+7}.$
53. $\int \frac{x^7 \, dx}{x^8+7}.$
54. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$
55. $\int \operatorname{tg} x \, dx.$
56. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}.$
57. $\int \sin^3 x \, dx.$
58. $\int \cos^4 x \, dx.$
59. $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{\cos x}}.$
60. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{9-x^2}} \, dx.$
61. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2+x^2}} \, dx.$
62. $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+8} \, dx.$
63. $\int \frac{2x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$
64. $\int x^3 e^{x^2} \, dx.$
65. $\int \sqrt{4-x^2} \, dx.$
66. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$
67. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx$ (положите $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$).
68. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x}.$
69. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx.$
70. $\int_0^1 \frac{e^x \, dx}{1+e^{2x}}.$
71. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$

$$\begin{array}{ll}
72. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx. & 73. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^4 x dx}{\cos^2 x}. \\
74. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} & 75. \int_1^{\sqrt{2}} x \operatorname{ctg}(x^2+1) dx. \\
76. \int_1^{\ln 4} \frac{dx}{e^x+2}. & 77. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \left(\text{положите } x = \frac{1}{t} \right). \\
78. \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (\text{положите } t = \sqrt{x}). \\
79. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} \quad \left(\text{положите } u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).
\end{array}$$

§ 4. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В ряде случаев по виду подынтегральной функции можно предположить, что ее первообразная будет иметь ту же структуру, что и подынтегральная функция. Это бывает в тех случаях, когда, например, подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена и показательной функции, произведение многочлена и синуса или косинуса или произведение показательной функции и синуса или косинуса (см. примеры 1, 2, 4, 5 из § 2). Тогда записывают искомую первообразную в предполагаемом виде с неопределенными буквенными коэффициентами. Задача в этом случае сводится к нахождению неопределенных буквенных коэффициентов, для чего, пользуясь свойствами неопределенного интеграла, сначала дифференцируют обе части равенства, а затем сравнивают левую часть полученного равенства с правой. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Вычислим $\int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x dx$.

Решение. Если вычислить этот интеграл с помощью трехкратного интегрирования по частям, то получим:

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x dx = (x^3 - x^2 + 2x + 3) e^x + C.$$

Этот ответ имеет ту же структуру, что и подынтегральная функция, т. е. является (с точностью до произвольной постоянной) произведением многочлена третьей степени на показательную функ-

цию e^x . Поэтому первообразную можно было сразу искать в следующем виде:

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) e^x + E, \quad (1)$$

где E — произвольная постоянная.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты A, B, C, D , продифференцируем обе части равенства (1), учитывая при этом, что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(x^3 + 2x^2 + 5) e^x = (3Ax^2 + 2Bx + C) e^x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) e^x.$$

Разделив обе части этого равенства на e^x , получим:

$$x^3 + 2x^2 + 5 = 3Ax^2 + 2Bx + C + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

откуда

$$x^3 + 2x^2 + 5 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + (C + D). \quad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Сравнив в тождестве (2) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , получим:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A = 1, \\ x^2 & 3A + B = 2, \\ x^1 & 2B + C = 0, \\ x^0 & C + D = 5. \end{array}$$

Мы получили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными A, B, C, D . Решая ее, находим: $A = 1, B = -1, C = 2, D = 3$.

Таким образом,

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x dx = (x^3 - x^2 + 2x + 3) e^x + E.$$

Пример 2. Вычислим $\int e^{3x} \sin 2x dx$.

Решение. Здесь подынтегральная функция является произведением показательной функции и синуса. Мы видели (см. с. 19), что в этом случае ее первообразная равна произведению показательной функции и линейной комбинации синуса и косинуса того же аргумента:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + C. \quad (3)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B продифференцируем обе части равенства (3):

$$e^{3x} \sin 2x = 3e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{3x}(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x).$$

Разделим обе части этого равенства на e^{3x} :

$$\sin 2x = 3A \cos 2x + 3B \sin 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x.$$

Далее имеем:

$$\sin 2x = (3B - 2A) \sin 2x + (3A + 2B) \cos 2x.$$

Полученное равенство справедливо для любых значений x . Это имеет место тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства. Приравняв друг другу указанные коэффициенты, получим:

$$\begin{array}{l} \sin 2x \mid 3B - 2A = 1, \\ \cos 2x \mid 3A + 2B = 0. \end{array}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными A и B находим: $A = -\frac{2}{13}$, $B = \frac{3}{13}$. Значит,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 2x \, dx &= e^{3x} \left(-\frac{2}{13} \cos 2x + \frac{3}{13} \sin 2x \right) + C = \\ &= \frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается сущность метода неопределенных коэффициентов? Для вычисления каких интегралов целесообразно применять этот метод?

2. Напишите линейную комбинацию $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ с неопределенными коэффициентами.

3. Напишите общий вид многочлена пятой степени с неопределенными коэффициентами.

Упражнения

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, вычислите следующие интегралы:

$$80. \int (3x^2 + 2x - 1) e^{2x} \, dx. \quad 81. \int (5x^2 - 8x + 2) e^{-x} \, dx.$$

$$82. \int e^{-x} \cos 3x \, dx. \quad 83. \int (x + 8) \sin 2x \, dx.$$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущих параграфах речь шла об общих приемах интегрирования. В этом и следующих параграфах мы будем говорить об интегрировании конкретных классов функций с помощью рассмотренных приемов.

1. **Интегрирование простейших рациональных функций.** Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x) \, dx,$$

где $y = R(x)$ — рациональная функция. Всякое рациональное выражение $R(x)$ можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ —

многочлены. Если эта дробь неправильная, т. е. если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби. Поэтому достаточно рассмотреть интегрирование правильных дробей.

Покажем, что интегрирование таких дробей сводится к интегрированию *простейших дробей*, т. е. выражений вида:

$$1) \frac{A}{x-a}; \quad 2) \frac{A}{(x-a)^n}; \quad 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad 4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

где A, B, a, p, q — действительные числа, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней. Выражения вида 1) и 2) называют *дробями 1-го рода*, а выражения вида 3) и 4) — *дробями 2-го рода*.

Интегралы от дробей 1-го рода вычисляются непосредственно

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

($n = 2, 3, 4, \dots$).

Рассмотрим вычисление интегралов от дробей 2-го рода:

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx.$$

Сначала заметим, что

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

$$\int \frac{t dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+a^2) + C.$$

Чтобы свести вычисление интеграла 3) к этим двум интегралам, преобразуем квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, выделив из него полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как по предположению этот трехчлен не имеет действительных корней, то $q - \frac{p^2}{4} > 0$ и мы можем положить $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Подстановка $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$ преобразует интеграл 3) к линейной комбинации указанных двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2+a^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= A \int \frac{t \, dt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\
&= \frac{A}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a}.
\end{aligned}$$

В окончательном ответе нужно лишь заменить t на $x + \frac{p}{2}$, а a на $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Так как $t^2 + a^2 = x^2 + px + q$, то

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\
&+ \frac{\left(B - \frac{Ap}{2} \right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.
\end{aligned}$$

$$4) \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

Как и в предыдущем случае, положим $x + \frac{p}{2} = t$. Получим:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx = A \int \frac{t \, dt}{(t^2 + a^2)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}.$$

Первое слагаемое вычисляется так:

$$\begin{aligned}
A \int \frac{t \, dt}{(t^2 + a^2)^n} &= \frac{A}{2} \int (t^2 + a^2)^{-n} d(t^2 + a^2) = \\
&= \frac{A}{2(-n+1)} (t^2 + a^2)^{-n+1} = \frac{A}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Второй же интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы (6) § 2.

Пример 1. Вычислим $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3} dx$.

Решение. Имеем: $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$. Положим $x+1 = t$. Тогда $dx = dt$, $3x+2 = 3(t-1)+2 = 3t-1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3} dx &= \int \frac{3t-1}{t^2+2} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+2} - \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \\
&= \frac{3}{2} \ln(t^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\
&= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим $\int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^3} dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1.$$

Введем новую переменную, положив $x + 3 = t$. Тогда $dt = dx$, $x + 2 = t - 1$. Заменяя переменную под знаком интеграла, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx &= \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Положим $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$. Имеем (см. формулу (6) § 2):

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1}.$$

Но

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t.$$

Таким образом,

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx &= -\frac{1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \\ &= -\frac{t}{2(t^2+1)} = -\frac{1}{2(x^2+6x+10)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+3) - \\ &= -\frac{x+3}{2(x^2+6x+10)} + C = \frac{-x-4}{2(x^2+6x+10)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+3) + C. \end{aligned}$$

2. Интегрирование правильных дробей. Рассмотрим правильную

дробь $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ — многочлен степени n . Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент в $Q(x)$ равен 1. В курсе алгебры доказывается, что такой многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами:

$$Q(x) = (x - x_1)^\alpha \dots (x - x_k)^\beta (x^2 + px + q)^\gamma \dots (x^2 + rx + s)^\delta,$$

где x_1, \dots, x_k — действительные корни многочлена $Q(x)$, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней. Можно доказать¹, что тогда $R(x)$ представляется в виде суммы простейших дробей вида 1) — 4):

¹ См.: Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., 1966, гл. VIII, § 2.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-x_1} +$$

$$+ \dots + \frac{B_1}{(x-x_k)^\beta} + \frac{B_2}{(x-x_k)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-x_k} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\gamma} +$$

$$+ \dots + \frac{M_\gamma x+N_\gamma}{x^2+px+q} + \dots + \frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+s)^\delta} + \dots + \frac{E_\delta x+F_\delta}{x^2+rx+s}, \quad (1)$$

где показатели у знаменателей последовательно уменьшаются от α до 1, ..., от β до 1, от γ до 1, ..., от δ до 1, а A_1, \dots, F_δ — неопределенные коэффициенты. Для того чтобы найти эти коэффициенты, необходимо освободиться от знаменателей и, получив равенство двух многочленов, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Другой способ определения коэффициентов $A_1, \dots, A_\alpha, \dots, F_\delta$ основан на подстановке значений переменной x . Подставляя в равенство, полученное из равенства (1) после освобождения от знаменателей, вместо x любое число, придем к линейному уравнению относительно искомых коэффициентов. Путем подстановки необходимого количества таких частных значений переменной получим систему уравнений для отыскания коэффициентов. В качестве частных значений переменной удобнее всего выбирать корни знаменателя (как действительные, так и комплексные). При этом почти все члены в правой части равенства (имеется в виду равенство двух многочленов) обращаются в нуль, что позволяет легко находить оставшиеся коэффициенты. При подстановке комплексных значений следует иметь в виду, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны соответственно их действительные и мнимые части. Поэтому из каждого равенства, содержащего комплексные числа, получаются два уравнения.

После нахождения неопределенных коэффициентов остается вычислить интегралы от полученных простейших дробей. Так как при интегрировании простейших дробей получаются, как мы видели, лишь рациональные функции, арктангенсы и логарифмы, то *интеграл от любой рациональной функции выражается через рациональную функцию, арктангенсы и логарифмы.*

Пример 3. Вычислим $\int \frac{6x+1}{x^2+2x-3} dx$.

Решение. Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Освободившись в этом равенстве от знаменателей, получим:

$$6x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1). \quad (2)$$

Для отыскания коэффициентов воспользуемся методом подстановки частных значений. Для нахождения коэффициента A положим $x = 1$. Тогда из равенства (2) получим $7 = 4A$, откуда $A = \frac{7}{4}$.

Для отыскания коэффициента B положим $x = -3$. Тогда из равенства (2) получим $-17 = -4B$, откуда $B = \frac{17}{4}$.

Итак,

$$\frac{6x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{7}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{17}{4}}{x + 3}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x + 1}{x^3 + 2x - 3} dx &= \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{17}{4} \int \frac{dx}{x + 3} = \\ &= \frac{7}{4} \ln |x - 1| + \frac{17}{4} \ln |x + 3| + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислим $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 8x + 5}{(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2)} dx$.

Решение. Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. В знаменателе содержится множитель $x^2 + 2$, не имеющий действительных корней, ему соответствует дробь 2-го рода:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + 2},$$

множителю $(x - 1)^2$ соответствует сумма двух дробей 1-го рода:

$$\frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{x - 1};$$

наконец, множителю $x + 2$ соответствует одна дробь 1-го рода $\frac{E}{x + 2}$. Таким образом, подынтегральную функцию мы представим в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 8x + 5}{(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{x - 1} + \frac{E}{x + 2}. \quad (3)$$

Освободимся в этом равенстве от знаменателей. Получим:

$$x^4 + 2x^3 + 8x + 5 = (Ax + B)(x - 1)^2(x + 2) + C(x^2 + 2) \times \times (x + 2) + D(x^2 + 2)(x - 1)(x + 2) + E(x^2 + 2)(x - 1)^2. \quad (4)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет два действительных корня $x = 1$, $x = -2$. При подстановке в равенство (4) значения $x = 1$ получаем $16 = 9C$, откуда находим $C = \frac{16}{9}$. При подста-

новке $x = -2$ получаем $13 = 54E$ и соответственно определяем $E = \frac{13}{54}$. Подстановка значения $x = i\sqrt{2}$ (корня многочлена $x^2 + 2$) позволяет перейти к равенству

$$4 - 4 + 8i\sqrt{2} + 5 = (Ai\sqrt{2} + B)(i\sqrt{2} - 1)^2(i\sqrt{2} + 2).$$

Оно преобразуется к виду:

$$(10A + 2B) + (2A - 5B)\sqrt{2}i = 5 + 8\sqrt{2}i,$$

откуда $10A + 2B = 5$, а $(2A - 5B)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Решив систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 10A + 2B = 5, \\ 2A - 5B = 8, \end{cases}$$

находим: $A = \frac{41}{54}, \quad B = -\frac{35}{27}.$

Осталось определить значение коэффициента D . Для этого в равенстве (4) раскроем скобки, приведем подобные члены, а затем сравним коэффициенты при x^4 . Получим:

$$A + D + E = 1, \text{ т. е. } D = 0.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в равенство (3):

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 8x + 5}{(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{41}{54} \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{35}{27} \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{16}{9} \frac{1}{x + 2} + \frac{13}{54},$$

а затем перейдем к интегрированию:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x^2 + 8x + 5}{(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2)} dx &= \frac{41}{54} \int \frac{x dx}{x^2 + 2} - \frac{35}{27} \int \frac{dx}{x^2 + 2} + \\ &+ \frac{16}{9} \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \frac{13}{54} \int \frac{dx}{x + 2} = \frac{41}{108} \ln(x^2 + 2) - \frac{35}{27\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \\ &- \frac{16}{9(x - 1)} + \frac{13}{54} \ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$

3. Интегрирование неправильных дробей. Пусть нужно проинтегрировать функцию $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, причем степень многочлена $f(x)$ больше или равна степени многочлена $g(x)$. В этом случае прежде всего необходимо выделить целую часть неправильной дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, т. е. представить ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

где $s(x)$ — многочлен степени, равной разности степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а $\frac{r(x)}{g(x)}$ — правильная дробь.

Тогда

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx.$$

Пример 5. Вычислим

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx.$$

Решение. Имеем:

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6,$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11.$$

Для выделения целой части разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11 & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x & \\ \hline -2x^3 + 6x^2 + 10x - 11 & \\ -2x^3 + 4x^2 + 10x - 12 & \\ \hline 2x^2 & + 1 \end{array}$$

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x - 2 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

Значит,

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx = \int (x-2) dx + \int \frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx.$$

Имеем:

$$\int (x-2) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C_1.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$ применяется,

как и выше, метод неопределенных коэффициентов. После вычислений, которые мы оставляем читателю, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2} \ln |x-1| + \\ &+ \frac{3}{5} \ln |x+2| + \frac{19}{10} \ln |x-3| + C. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры простейших рациональных функций вида 1) — 4).

2. Какая рациональная функция называется правильной дробью? Какая рациональная функция называется неправильной дробью?

3. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать лишь дроби 1-го рода?

4. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать и дроби 2-го рода?

5. В каком случае приходится применять рекуррентную формулу при интегрировании рациональных функций? Какой вид имеет эта формула?

6. К какой задаче сводится отыскание коэффициентов при разложении правильной дроби на простейшие?

7. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональных функций.

8. Как найти A и B из равенства

$$(2A - 3B) + (6A + 8B)i = 8 - 10i?$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от простейших дробей:

$$\begin{array}{ll} 84. \int \frac{dx}{(x-3)^4}. & 85. \int \frac{dx}{(2x+3)^3}. \\ 86. \int \frac{dx}{6x^2+x+2}. & 87. \int \frac{3x+2}{x^2-3x+8} dx. \\ 88. \int \frac{5x+3}{(x^2+2)^2} dx. & 89. \int \frac{2x-7}{(x^2+4x+15)^2} dx. \end{array}$$

Вычислите следующие интегралы от правильных дробей:

$$\begin{array}{ll} 90. \int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x} dx. & 91. \int \frac{3x-2}{(x+1)(x^2-9)} dx. \\ 92. \int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x+3)^2}. & 93. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}. \\ 94. \int \frac{x dx}{x^3+1}. & 95. \int \frac{2x-1}{(x^2+2)(x^2+4)} dx. \\ 96. \int \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+1)^2} dx. \end{array}$$

Вычислите следующие интегралы от неправильных дробей:

$$\begin{array}{ll} 97. \int \frac{x^5+x-1}{x-2} dx. & 98. \int \frac{x^4+2}{x^3-x} dx. \\ 99. \int \frac{x^3+4}{x^2-6x+8} dx. & 100. \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx. \end{array}$$

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

При интегрировании иррациональных функций используются различные приемы. Мы рассмотрим метод *рационализации* подынтегрального выражения. Он заключается в выборе такой подста-

новки $t = \varphi(x)$, которая данное подынтегральное выражение преобразует в рациональное относительно новой переменной t . Поскольку рациональные функции мы умеем интегрировать, такие подстановки позволяют интегрировать и иррациональные функции.

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция от x и y , т. е. функция, получаемая из x , y и чисел с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, умножения и деления). Примерами таких функций могут служить

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2(4x - y)}; \quad z = \frac{x^3 + y^3}{x - y} + \frac{(x^5 - 6y^2)^7}{(8x^3 - 9xy)^3}.$$

Если заменить в $R(x, y)$ переменную y выражением $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то получим функцию $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ от одной переменной x . Интеграл от нее имеет вид:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Этот интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$$

В самом деле, так как подкоренное выражение представляет собой дробно-линейную относительно x функцию, то переменная x рационально выражается через переменную t :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} = g(t).$$

Тогда $x' = g'(t)$ — рациональная функция. Заменяя теперь переменную в данном интеграле, получим интеграл от рациональной функции новой переменной t :

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(g(t), t) g'(t) dt.$$

З а м е ч а н и е. Если под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же дробно-линейным относительно x подкоренным выражением, то сначала следует привести их к одному показателю, после чего использовать указанный прием.

Пример 1. Вычислим
$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2) \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}.$$

Р е ш е н и е. Учитывая, что под корнем содержится дробно-линейное выражение, воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t, \text{ откуда } x = \frac{t^4+2}{t^4-1}.$$

Выразим все компоненты подынтегрального выражения через t .

$$x-1 = \frac{t^4+2}{t^4-1} - 1 = \frac{3}{t^4-1}; \quad x+2 = \frac{t^4+2}{t^4-1} + 2 = \frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx = \left(\frac{t^4+2}{t^4-1} \right)' dt = -\frac{12t^3}{(t^4-1)^2} dt.$$

Заменяя под знаком интеграла переменную x новой переменной t , получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}} &= \int \frac{-\frac{12t^3}{(t^4-1)^2} dt}{\frac{3}{t^4-1} \cdot \frac{3t^4}{t^4-1} \cdot t} = \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим

$$I = \int \frac{1+7\sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}-5x}{\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}} + \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}} + \sqrt{\frac{5x-1}{7}}} dx.$$

Решение. В данном случае под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же подкоренным выражением. Наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в состав подынтегрального выражения, равно 6, поэтому данный интеграл от иррациональной функции может быть рационализирован с помощью подстановки:

$$\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}} = t, \quad x = \frac{7t^6+1}{5}.$$

Тогда

$$dx = \frac{42}{5} t^5 dt, \quad \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}} = t^3, \quad \sqrt{\frac{5x-1}{7}} = t^2.$$

Заменяя переменную под знаком интеграла, получим:

$$I = \int \frac{1+7t^2-(7t^6+1)}{t+t^2+t^3} \cdot \frac{42}{5} t^5 dt = -\frac{294}{5} \int \frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1} dt.$$

Под знаком интеграла содержится неправильная рациональная дробь. Для выделения целой части разделим числитель на знаменатель так, как это было сделано в примере 5 п. 3 § 5.

Получаем:

$$\frac{t^{10} - t^6}{t^2 + t + 1} = t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1 + \frac{t-1}{t^2 + t + 1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= -\frac{294}{5} \int \left(t^8 - t^7 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^2 - 2t + 1 + \frac{t-1}{t^2 + t + 1} \right) dt = \\ &= -\frac{294}{5} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 + t + \int \frac{t-1}{t^2 + t + 1} dt \right). \end{aligned}$$

Для вычисления $\int \frac{t-1}{t^2 + t + 1} dt$ выделим в знаменателе полный квадрат аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Получим:

$$\int \frac{t-1}{t^2 + t + 1} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно находим:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{294}{5} \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 + t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C, \end{aligned}$$

где $t = \sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}.$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от иррациональных функций:

101. $\int \frac{\sqrt{4+x}}{x} dx.$

102. $\int x \sqrt{1+x} dx.$

103. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$

104. $\int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx.$

105. $\int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx.$

106. $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1} + 1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)} dx.$

107. $\int_{-1}^0 \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$

108. $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

109. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция. Такие интегралы всегда рационализируются подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$). В самом деле,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Выразим далее переменную x через переменную t . Так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $x = 2 \operatorname{arctg} t$, а потому $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$. Значит

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Таким образом, задача свелась к вычислению интеграла от рациональной функции. Поскольку подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ позволяет

рационализировать любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, то ее называют *универсальной подстановкой*. Любой интеграл этого вида выражается через элементарные функции.

Пример 1. Вычислим $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4}$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Имеем:

$$\begin{aligned} 2 \sin x + 3 \cos x + 4 &= 2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + 3 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 4 = \\ &= \frac{t^2 + 4t + 7}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Заменив переменную под знаком интеграла, получим:

$$\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 4} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{t^2 + 4t + 7}{1 + t^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 7} = 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+2}{\sqrt{3}} + C = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

Хотя подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ универсальна, она часто приводит к слишком громоздким выкладкам. Во многих случаях удается упростить вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, воспользовавшись другими подстановками. Так, если при изменении знака $\sin x$ меняется знак $R(\sin x, \cos x)$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл можно рационализировать с помощью подстановки $\cos x = t$. Если при изменении знака $\cos x$ меняется знак $R(\sin x, \cos x)$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то целесообразна подстановка $\sin x = t$. Если при одновременном изменении знака $\sin x$ и $\cos x$ $R(\sin x, \cos x)$ не меняется:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то рационализация достигается с помощью одной из подстановок:

$$\operatorname{tg} x = t, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ или } \operatorname{ctg} x = t, 0 < x < \pi.$$

Поясним сказанное на примерах.

Пример 2. Вычислим $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Решение. В данном случае имеем:

$$\begin{aligned}
 R(-\sin x, \cos x) &= (-\sin x)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x = \\
 &= -R(\sin x, \cos x).
 \end{aligned}$$

Воспользуемся подстановкой $\cos x = t$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \sin^3 x \cos^2 x dx &= \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \times \\
 &\times (-\sin x dx) = -(1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x).
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= -\int (1 - t^2) t^2 dt = \int (t^4 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \\
 &= \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.
 \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x dx}{1 + \sin^2 x}$.

Решение. В данном случае имеем:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{1 + \sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} d(\sin x) = \\ &= \int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = \int \left(\frac{2}{1 + t^2} - 1 \right) dt = 2 \operatorname{arctg} t - t + C = \\ &= 2 \operatorname{arctg}(\sin x) - \sin x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислим $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение. В данном случае имеем:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Значит, в качестве рационализирующей может выступить одна из двух подстановок $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$. Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

В данном случае целесообразно сделать подстановку $\operatorname{ctg} x = t$. Тогда $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций для преобразования подынтегральных выражений часто используются различные формулы тригонометрии. В первую очередь применяют формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}; \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}; \quad (2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (3)$$

и их частные случаи:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad (4)$$

Из формул (1), (2), (3) получаем, что при $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) + C.\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислим $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x \cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cos 2x) \, dx = \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} \, dx \right) = \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \right) + C = \frac{1}{16} \left(x + \frac{1}{4} \sin 2x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x \right) + C.\end{aligned}$$

Пример 6. Вычислим $\int \sin x \sin 3x \sin 5x \, dx$.

Решение. Несколько раз воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму:

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 3x \sin 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) \sin 5x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2x \sin 5x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x \sin 5x \, dx = \frac{1}{4} \int (\sin 7x + \\ &\quad + \sin 3x) \, dx - \frac{1}{4} \int (\sin 9x + \sin x) \, dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3} \right) - \\ &- \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos 9x}{9} - \cos x \right) + C = \frac{7\cos 9x + 63\cos x - 9\cos 7x - 21\cos 3x}{252} + C.\end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Почему подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ называют универсальной?
2. Какими свойствами должна обладать подынтегральная функция, чтобы целесообразно было пользоваться другими тригонометрическими подстановками?

Упражнения

Вычислите следующие интегралы от тригонометрических функций:

$$110. \int \operatorname{tg}^5 x \, dx.$$

$$112. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} \, dx.$$

$$114. \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \, dx.$$

$$116. \int \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

$$118. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$$

$$120. \int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$$

$$122. \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

$$124. \int_0^{\pi} \sin^2 3x \cos^2 x \, dx.$$

$$126. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$128. \int \frac{dx}{3 + 2\cos x + \sin x}.$$

$$111. \int \sin^5 x \cos^4 x \, dx.$$

$$113. \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

$$115. \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} \, dx.$$

$$117. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$119. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$121. \int \cos^8 x \, dx.$$

$$123. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

$$125. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$$

$$127. \int \frac{dx}{5 + 4\sin x}.$$

$$129. \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2\sin x)}.$$

Докажите следующие соотношения:

$$130. \text{ а) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$\text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0.$$

$$131. \text{ а) } \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$\text{ б) } \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ

Изучив предыдущие параграфы, разобрав приведенные в них примеры и решив достаточное количество упражнений, читатель получил некоторое представление об основных приемах интегрирования. На практике при вычислении интегралов прибегают к различным таблицам неопределенных интегралов. В Приложении 1 приведена таблица, содержащая 206 интегралов. Таблица состоит из 4-х разделов:

I. Интегралы от рациональных функций.

II. Интегралы от иррациональных функций.

III. Интегралы от тригонометрических функций.

IV. Интегралы от показательной, логарифмической и обратных тригонометрических функций.

Каждый раздел, в свою очередь, разбит на несколько пунктов (всего 15). Чтобы с помощью таблицы вычислить неопределенный интеграл, нужно прежде всего определить, в каком разделе и в каком пункте надо искать соответствующий интеграл.

В дальнейшем при вычислении интегралов рекомендуем читателю, если это окажется необходимым, использовать таблицу. Если интеграла в таблице нет, следует подумать, нельзя ли с помощью несложных преобразований свести данный интеграл к табличному.

Рассмотрим ряд примеров из числа уже решенных в предыдущих параграфах и вычислим предлагаемые в них интегралы с помощью таблиц. Это не только позволит приобрести необходимые навыки в использовании табличного метода, но и даст возможность сопоставить усилия, затрачиваемые на вычисление того или иного интеграла с помощью таблиц и без них.

Пример 1 (см. пример 2 из § 2).

Вычислим

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Решение. Под знаком интеграла содержится тригонометрическая функция, следовательно, соответствующий интеграл надо искать в разделе III 8). Воспользовавшись формулой № 94 при $n = 2$, $a = 1$, получим:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Интеграл $\int x \cos x dx$ находим в разделе III 9) под № 119:

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + C_1.$$

Окончательно получаем:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \cos x + 2x \sin x + C.$$

Пример 2 (см. пример 3 из § 2).

Вычислим $\int x^3 \ln x \, dx$.

Решение. Интеграл от логарифмической функции следует искать в разделе IV 13). Воспользовавшись формулой № 188 при $m = 3$, получим:

$$\int x^3 \ln x \, dx = x^4 \left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16} \right) + C.$$

Пример 3 (см. пример 4 из § 2).

Вычислим

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Решение. Интеграл от заданной трансцендентной функции следует искать в разделе IV 15). Под № 203 находим соответствующую формулу. Применив ее к случаю $a = 1$, $b = 1$, получаем:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 4 (см. пример 4 из § 3).

Вычислим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Решение. Интеграл от заданной иррациональной функции следует искать в разделе II 5). Применив формулу № 49, получаем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

Пример 5 (см. пример 1 из § 4).

Вычислим $I = \int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x \, dx$.

Решение. Этот интеграл следует искать в IV 12). Но среди формул, содержащихся в указанном пункте, нет подходящей к данному случаю. Преобразуем заданный интеграл следующим образом:

$$I = \int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x \, dx = \int x^3 e^x \, dx + 2 \int x^2 e^x \, dx + 5 \int e^x \, dx.$$

Воспользовавшись формулой № 181, получим:

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx.$$

Значит,

$$I = x^3 e^x - \int x^2 e^x \, dx + 5e^x.$$

Осталось вычислить $\int x^2 e^x \, dx$. По формуле № 181 имеем:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Снова воспользуемся формулой № 181. Получим:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int x^0 e^x dx = x e^x - e^x + C_1.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 2x^2 + 5) e^x dx &= x^3 e^x - x^2 e^x + 2x e^x + 3e^x + C = \\ &= (x^3 - x^2 + 2x + 3) e^x + C. \end{aligned}$$

Пример 6 (см. пример 2 из § 5).

Вычислим

$$\int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx.$$

Решение. Заданный интеграл от рациональной функции следует искать в разделе I. Но в этом разделе нет формул для вычисления интегралов от выражений, содержащих квадратный трехчлен. Поэтому прежде всего нужно преобразовать подынтегральное выражение, выделив из трехчлена $x^2 + 6x + 10$ полный квадрат. Имеем:

$$x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1.$$

Положив $x + 3 = t$, получим:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx = \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{t dt}{(t^2+1)^2} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Для вычисления первого интеграла воспользуемся формулой № 29. Получим:

$$\int \frac{t dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} + C_1.$$

Для вычисления второго интеграла применим формулу № 27 при $n = 1$. Получим:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C_2.$$

Итак,

$$\int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{1}{2(t^2+1)} - \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, находим:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+6x+10)^2} dx = \frac{-x-4}{2(x^2+6x+10)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

Предлагаем читателю с помощью таблиц найти интегралы, вычисленные нами выше в примерах 5 из § 1, 1 и 5 из § 2, 2 из § 4, 3 из § 5 и 4 и 5 из § 7.

В главе I мы ввели определенный интеграл как разность значений первообразной для подынтегральной функции. При этом предполагалось, что подынтегральная функция имеет первообразную на промежутке интегрирования.

В случае, когда первообразная выражается через элементарные функции, мы можем быть уверенными в ее существовании. Но если такого выражения нет, то вопрос о существовании первообразной остается открытым, и мы не знаем, существует ли соответствующий определенный интеграл.

Геометрические соображения подсказывают, что хотя, например, для функции $y = e^{-x^2}$ нельзя выразить первообразную через элементарные функции, интеграл $\int_a^b e^{-x^2} dx$ существует и равен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = e^{-x^2}$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 6). Но при более строгом анализе выясняется, что само понятие площади нуждается в обосновании, а потому нельзя опираться на него, решая вопросы существования первообразной и определенного интеграла.

В этой главе мы докажем, что *любая функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на этом отрезке первообразную*, и, следовательно, для нее существует определенный интеграл по этому отрезку. Для этого нам понадобится иной подход к понятию опре-

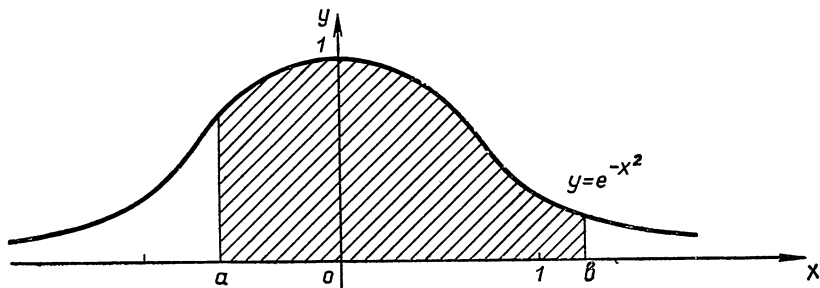


Рис. 6

деленного интеграла, не опирающийся на предположение о существовании первообразной.

В следующей главе мы увидим, что для многочисленных приложений наиболее целесообразен именно второй подход. Кроме того, мы увидим, что для широкого класса функций оба подхода приводят к одному и тому же результату.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ЧИСЛО, РАЗДЕЛЯЮЩЕЕ ДВА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВА

Установим сначала некоторые свойства определенного интеграла, понимаемого как разность значений первообразной.

1. Оценки определенных интегралов.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$, m и M , соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на $[a; b]$, причем на этом отрезке функция $y = f(x)$ имеет первообразную. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

По теореме Лагранжа¹

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a),$$

где $a < c < b$. Но $F'(c) = f(c)$, значит,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

По условию для всех значений x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство

$$m \leq f(x) \leq M,$$

поэтому $m \leq f(c) \leq M$ и, следовательно,

$$m(b-a) \leq f(c)(b-a) \leq M(b-a),$$

т. е.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

что и требовалось доказать.

¹ См.: Дифференциальное исчисление, с. 80.

Двойное неравенство (1) дает лишь весьма грубую оценку для значения определенного интеграла. Например, на отрезке $[1; 5]$ значения функции $y = x^2$ заключены между 1 и 25, а потому имеют место неравенства

$$4 = 1 (5 - 1) \leq \int_1^5 x^2 dx \leq 25 (5 - 1) = 100.$$

Чтобы получить более точную оценку, разбивают отрезок $[a; b]$ на несколько частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и к каждой части $[x_k; x_{k+1}]$ применяют неравенство (1). Если на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ выполняется неравенство $m_k \leq f(x) \leq M_k$, то

$$m_k \Delta x_k \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq M_k \Delta x_k,$$

где через Δx_k обозначена разность $x_{k+1} - x_k$, т. е. длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$. Записывая эти неравенства для всех значений k от 0 до $n-1$ и складывая их, получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Но по аддитивному свойству определенного интеграла (см. § 1 гл. I) сумма интегралов по всем частям отрезка $[a; b]$ равна интегралу по этому отрезку, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k. \quad (2)$$

Например, если разбить отрезок $[1; 5]$ на 10 равных частей, каждая из которых имеет длину 0,4, то на частичном отрезке $[1 + 0,4k; 1 + 0,4(k+1)]$ выполняется неравенство

$$(1 + 0,4k)^2 \leq x^2 \leq (1 + 0,4(k+1))^2.$$

Поэтому имеем:

$$0,4 \sum_{k=0}^9 (1 + 0,4k)^2 \leq \int_1^5 x^2 dx \leq 0,4 \sum_{k=0}^9 (1 + 0,4(k+1))^2.$$

Вычисляя, получаем:

$$36,64 \leq \int_1^5 x^2 dx \leq 46,24.$$

Эта оценка гораздо точнее полученной ранее ($4 \leq \int_1^5 x^2 dx \leq 100$).

Чтобы получить еще более точную оценку интеграла, надо разбить отрезок $[1; 5]$ не на 10, а, скажем, на 100 или 1000 частей и сосчитать соответствующие суммы. Разумеется, данный интеграл проще вычислить с помощью первообразной:

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{1}{3} (125 - 1) = 41 \frac{1}{3}.$$

Но если выражение для первообразной нам неизвестно, то неравенства (2) дают возможность оценить значение интеграла снизу и сверху.

2. Определенный интеграл как разделяющее число. Числа m_k и M_k , входящие в неравенство (2), могли выбираться произвольно, лишь бы на каждом из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ выполнялось неравенство $m_k \leq f(x) \leq M_k$. Наиболее точная оценка интеграла при данном разбиении отрезка $[a; b]$ получится, если взять M_k наименьшим, а m_k наибольшим из всех возможных значений. Это значит, что в качестве m_k надо взять точную нижнюю границу значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, а в качестве M_k — точную верхнюю границу этих значений на том же отрезке:

$$m_k = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x). \quad (3)$$

Если $y = f(x)$ — ограниченная функция на отрезке $[a; b]$, то она ограничена и на каждом из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$, а потому для нее определены по равенствам (3) числа m_k и M_k , $0 \leq k \leq n-1$.

При таком выборе чисел m_k и M_k суммы $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ и $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ называют, соответственно, *нижней и верхней интегральными суммами Дарбу*¹ для функции $y = f(x)$ при данном разбиении P :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

отрезка $[a; b]$. Будем обозначать эти суммы соответственно s_P и S_P , а если функция $y = f(x)$ фиксирована, то просто s_P и S_P .

Неравенство (2) означает, что если ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ разделяет числовые множества $\{s_P\}$ и $\{S_P\}$, состоящие соответственно из всех нижних и верхних сумм Дарбу для всевозможных разбиений P отрезка $[a; b]$. Вообще говоря, может случиться, что число, разделяющее эти два множества, не единственно. Но ниже мы увидим, что для наиболее важных

¹ Д а р б у Жан Гастон (1842—1917) — французский математик.

классов функций (в частности, для непрерывных функций) оно единственно.

Это позволяет ввести новое определение для $\int_a^b f(x) dx$, не опирающееся на понятие первообразной, а использующее лишь суммы Дарбу.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a; b]$, называется *интегрируемой* на этом отрезке, если существует единственное число I , разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу, образованных для всевозможных разбиений отрезка $[a; b]$. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то единственное число, разделяющее эти множества, называют *определенным интегралом* этой функции по отрезку $[a; b]$ и означают $\int_a^b f(x) dx^1$.

Мы определили интеграл $\int_a^b f(x) dx$ для случая, когда $a < b$. Если $a > b$, то положим

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Это определение естественно, так как при изменении направления промежутка интегрирования все разности $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ меняют знак, а тогда меняют знаки и суммы Дарбу и, тем самым, разделяющее их число, т. е. интеграл.

Так как при $a = b$ все Δx_k обращаются в нуль, то положим

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Мы получили два определения понятия определенного интеграла: как разности значений первообразной и как разделяющего числа для сумм Дарбу. Эти определения в наиболее важных случаях приводят к одному и тому же результату:

Т е о р е м а 2. Если функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем первообразную $y = F(x)$, причем существует единственное число, разделяющее нижние и верхние суммы Дарбу, то это число равно $F(b) - F(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы доказали выше, что число $F(b) - F(a)$ разделяет множества $\{s_P\}$ и $\{S_P\}$. Так как по усло-

¹ Символ \int , введенный немецким математиком Лейбницем (1646—1716), является стилизованной буквой S (начальная буква слова *summa*) и напоминает о связи интегралов и сумм.

вию разделяющее число однозначно определено, то оно совпадает с $F(b) - F(a)$.

Начиная с этого момента мы будем применять обозначение $\int_a^b f(x) dx$ лишь для единственного числа, разделяющего множества $\{S_P\}$ и $\{S_P\}$. Из доказанной теоремы следует, что при этом не возникает противоречия с тем пониманием этого обозначения, которым мы пользовались выше.

3. Свойства нижних и верхних сумм Дарбу. Для того чтобы данное в п. 2 определение интеграла имело смысл, надо доказать, что множество верхних сумм Дарбу действительно расположено справа от множества нижних сумм Дарбу.

Л е м м а 1. Для каждого разбиения P соответствующая нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней суммы Дарбу, $s_P \leq S_P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторое разбиение P отрезка $[a; b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b.$$

Очевидно, что для любого k и для любого выбранного разбиения P выполняется неравенство $m_k \leq M_k$. Следовательно, $m_k \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$, и потому

$$s_P = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_P, \quad (4)$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (4) справедливо лишь для фиксированного разбиения P . Поэтому пока еще нельзя утверждать, что нижняя сумма Дарбу одного разбиения не может превзойти верхнюю сумму Дарбу другого разбиения. Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма:

Л е м м а 2. От добавления новой точки деления нижняя сумма Дарбу не может уменьшиться, а верхняя сумма не может увеличиться.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем некоторое разбиение P отрезка $[a; b]$ и добавим к нему новую точку деления x^* . Обозначим новое разбиение P^* . Разбиение P^* является *измельчением* разбиения P , т. е. каждая точка разбиения P является одновременно и точкой разбиения P^* .

Пусть точка x^* попала на отрезок $[x_k; x_{k+1}]$: $x_k < x^* < x_{k+1}$. Рассмотрим два образовавшихся отрезка $[x_k; x^*]$ и $[x^*; x_{k+1}]$ и обозначим соответствующие им точные нижние границы значений функции через m_k^* и m_k^{**} , а точные верхние границы через M_k^* и M_k^{**} .

Слагаемому $m_k(x_{k+1} - x_k)$ первоначальной нижней суммы Дарбу в новой нижней сумме Дарбу соответствуют два слагаемых:

$$m_k^*(x^* - x_k) + m_k^{**}(x_{k+1} - x^*).$$

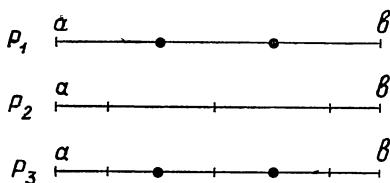


Рис. 7

При этом $m_k \leq m_k^*$ и $m_k \leq m_k^{**}$, так как m_k — точная нижняя граница значений функции $f(x)$ на всем отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, а m_k^* и m_k^{**} лишь на его частях $[x_k; x^*]$ и $[x^*; x_{k+1}]$ соответственно.

Оценим снизу сумму полученных слагаемых:

$$m_k^*(x^* - x_k) + m_k^{**}(x_{k+1} - x^*) \geq m_k(x^* - x_k) + m_k(x_{k+1} - x^*) = m_k(x^* - x_k + x_{k+1} - x^*) = m_k(x_{k+1} - x_k).$$

Так как остальные слагаемые и в старой и в новой нижних суммах Дарбу остались неизменными, то нижняя сумма Дарбу от добавления новой точки деления не уменьшилась, $s_P \leq s_{P^*}$.

Доказанное утверждение остается справедливым и при добавлении любого конечного числа точек к разбиению P .

Аналогично доказывается утверждение о верхней сумме Дарбу:

$$S_{P^*} \leq S_P.$$

Перейдем к сравнению сумм Дарбу для любых двух разбиений.

Л е м м а 3. Ни одна нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу (хотя бы отвечающей другому разбиению отрезка $[a; b]$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два произвольных разбиения P_1 и P_2 отрезка $[a; b]$ и образуем третье разбиение P_3 , состоящее из всех точек разбиений P_1 и P_2 . Таким образом, разбиение P_3 является измельчением как разбиения P_1 , так и разбиения P_2 (рис. 7).

Обозначим нижние и верхние суммы Дарбу для этих разбиений соответственно s_1, S_1, s_2, S_2 и докажем, что $s_1 \leq S_2$.

Так как P_3 — измельчение разбиения P_1 , то $s_1 \leq s_3$. Далее, $s_3 \leq S_3$, поскольку суммы s_3 и S_3 соответствуют одному и тому же разбиению. Наконец, $S_3 \leq S_2$, так как P_3 является измельчением разбиения P_2 .

Таким образом,

$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2,$$

т. е. $s_1 \leq S_2$, что и требовалось доказать.

Из леммы 3 следует, что числовое множество $X = \{s_P\}$ нижних сумм Дарбу лежит левее числового множества $Y = \{S_P\}$ верхних сумм Дарбу.

В силу теоремы о существовании разделяющего числа для двух числовых множеств¹, найдется хотя бы одно число I , разделяющее множества X и Y , т. е. такое, что для любого разбиения отрезка $[a; b]$ выполняется двойное неравенство:

$$s_P = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq I \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_P.$$

¹ См.: Введение в анализ, с. 24.

Если это число единственно, то $I = \int_a^b f(x) dx$.

Приведем пример, показывающий, что такое число I , вообще говоря, не является однозначно определенным. Напомним, что функцией Дирихле называю функцию $y = D(x)$ на отрезке $[0; 1]$, определяемую равенствами:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число.} \end{cases}$$

Какой бы отрезок $[x_k; x_{k+1}]$ мы ни взяли, на нем найдутся и рациональные, и иррациональные точки, т. е. и точки, где $D(x) = 0$, и точки, где $D(x) = 1$. Поэтому для любого разбиения отрезка $[0; 1]$ все значения m_k равны нулю, а

все значения M_k равны единице. Но тогда все нижние суммы Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ равны нулю, а все верхние суммы Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ равны единице, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k,$$

а $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k$ — длина отрезка $[0; 1]$. Итак, в рассматриваемом случае $X = \{0\}$,

$Y = \{1\}$ и любое число из промежутка $[0; 1]$ разделяет множества X и Y . Значит, функция Дирихле не является интегрируемой на отрезке $[0; 1]$.

4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции вытекает из общего необходимого и достаточного условия единственности разделяющего числа¹. Напомним, что если числовое множество Y расположено справа от числового множества X , то для единственности числа, разделяющего X и Y , необходимо и достаточно выполнение условия

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in X \wedge \exists y \in Y) (y - x < \varepsilon).$$

В нашем случае множество X состоит из нижних сумм Дарбу, а множество Y — из верхних сумм Дарбу. Поэтому необходимое и достаточное условие единственности числа, разделяющего эти множества, принимает вид: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся верхняя сумма Дарбу S_2 и нижняя сумма Дарбу s_1 такие, что $S_2 - s_1 < \varepsilon$. Эти суммы, вообще говоря, могут соответствовать различным разбиениям P_1 и P_2 отрезка $[a; b]$. Но в п. 3 было показано, что если P_3 — совместное измельчение разбиений P_1 и P_2 , то выполняются неравенства $s_1 \leq s_3$, $S_2 \geq S_3$. Поэтому из $S_2 - s_1 < \varepsilon$ следует $S_3 - s_3 < \varepsilon$.

Получаем следующее необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 3. Для того чтобы ограниченная функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение P этого отрезка такое, что $S_P - s_P < \varepsilon$, где S_P и s_P — соответствующие верхняя и нижняя суммы Дарбу.

Поскольку

$$S_P - s_P = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k,$$

¹ См.: Введение в анализ, с. 25,

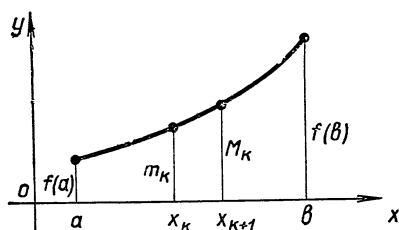


Рис. 8

условие $S_P - s_P < \varepsilon$ можно записать и так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon. \quad (5)$$

Разность $M_k - m_k$ будем обозначать через ω_k и называть ее *колебанием* функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$. Тогда неравенство (5) можно записать

так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon. \quad (6)$$

5. Интегрируемость монотонных функций.

Теорема 4. *Всякая монотонная функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Предположим для определенности, что функция возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого разбиения $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ этого отрезка наибольшее значение M_k функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ равно $f(x_{k+1})$, а наименьшее значение m_k равно $f(x_k)$ (рис. 8).

Поэтому

$$S_P - s_P = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k \Delta x_k.$$

Так как все $\Delta y_k \geq 0$, то имеем:

$$S_P - s_P \leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k,$$

где $\lambda = \max \Delta y_k$, $0 \leq k \leq n-1$. Число λ будем называть *мелкостью* разбиения P .

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k$ является не чем иным, как суммой приращений функции $y = f(x)$, т. е. полным приращением $f(b) - f(a)$ этой функции на отрезке $[a; b]$. Поэтому

$$S_P - s_P \leq \lambda (f(b) - f(a)).$$

Отсюда следует, что при

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

выполняется неравенство

$$S_P - s_P < \varepsilon,$$

а потому функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Пример 1. Функция $y = x^3$ возрастает на отрезке $[1; 4]$. Найдем, при какой мелкости λ разбиения этого отрезка будет выполняться неравенство $S_P - s_P < 0,01$.

Решение. В данном случае $f(a) = 1^3 = 1$, $f(b) = 4^3 = 64$, $\varepsilon = 0,01$, и потому

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \frac{0,01}{63} = \frac{1}{6300}.$$

Значит, при любом разбиении отрезка $[1; 4]$ на части, длина которых не превосходит $\frac{1}{6300}$, выполняется неравенство $S_P - s_P < 0,01$.

6. Интегрируемость непрерывных функций. Геометрически представляется очевидным, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то при достаточно мелком разбиении этого отрезка все колебания ω_k станут достаточно малыми, и потому сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$ тоже станет мала. Иными словами, естественно пред-

положить, что все непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции интегрируемы на нем. Для доказательства этого утверждения понадобится следующая лемма:

Лемма 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется хоть одно разбиение P этого отрезка такое, что все ω_k меньше ε :

$$(\forall k) \omega_k < \varepsilon.$$

Доказательство этого утверждения проведем методом от противного.

Предположим, что для какого-то $\varepsilon > 0$ такое разбиение невозможно. Это значит, что для любого разбиения P отрезка $[a; b]$ найдется такой номер k , что $M_k - m_k \geq \varepsilon$:

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall P) (\exists k) (M_k - m_k) \geq \varepsilon.$$

Разделим отрезок $[a; b]$ пополам. Тогда для выбранного $\varepsilon > 0$ хотя бы одну из половин отрезка $[a; b]$ нельзя разбить требуемым образом (так как если бы обе его половины можно было разбить требуемым образом, то и весь отрезок $[a; b]$ был бы разбит требуемым образом).

Выбрав ту из его половин, которую нельзя разбить требуемым образом, например $[a_1; b_1]$, разобьем ее снова пополам (рис. 9).

Одна из вновь полученных половин, например $[a_2; b_2]$, в соответствии с нашим предположением, не может быть разбита требуемым образом (для выбранного $\varepsilon > 0$).

Продолжая дальше указанный процесс разбиения отрезков, получим стягивающуюся после-

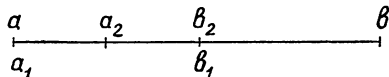


Рис. 9

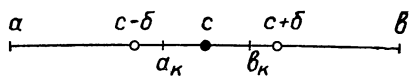


Рис. 10

довательность отрезков, такую, что ни один из отрезков этой системы не может быть для данного $\varepsilon > 0$ разбит требуемым образом. По принципу стягивающихся отрезков существует одна и только одна точка c , общая всем этим отрезкам. В точке c , принадлежащей отрезкам $[a_k; b_k] \subset [a; b]$, функция $f(x)$ по условию непрерывна. Значит, у этой точки есть окрестность $]c - \delta; c + \delta[$, в которой выполняется неравенство

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При достаточно большом значении k отрезок $[a_k; b_k]$ целиком лежит внутри δ -окрестности точки c (рис. 10).

Пусть M_k — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a_k; b_k]$, m_k — наименьшее значение функции $f(x)$ на этом отрезке. Так как точки, в которых функция $f(x)$ принимает значения M_k и m_k , принадлежат одновременно и промежутку $]c - \delta; c + \delta[$, то имеют место неравенства

$$|M_k - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |f(c) - m_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_k &= M_k - m_k = M_k - f(c) + f(c) - m_k = \\ &= (M_k - f(c)) + (f(c) - m_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, вопреки нашему предположению, мы получили отрезок $[a_k; b_k]$, на котором уже выполнено неравенство $\omega_k < \varepsilon$. Значит, наше предположение было неверным, и, следовательно, справедливо утверждение леммы.

Т е о р е м а 5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По доказанному выше существует такое разбиение P , что для всех k имеем:

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Но тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon.$$

Но выше, в п. 4 мы отметили, что неравенство $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$ означает по теореме 3 интегрируемость функции на $[a; b]$.

Вопросы для самопроверки

1. Как составляются суммы Дарбу? Какими свойствами они обладают?
2. В чем состоит геометрический смысл сумм Дарбу?
3. Дайте геометрическое истолкование свойств сумм Дарбу.
4. Что называется определенным интегралом от интегрируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
5. В чем состоит необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
6. Чему равны нижняя и верхняя суммы Дарбу, если подынтегральная функция постоянна?
7. Чему равна разность верхней и нижней сумм Дарбу, если подынтегральная функция монотонна и все отрезки разбиения равны?
8. Приведите примеры интегрируемых функций.
9. Опишите два подхода к определению определенного интеграла. Как они связаны?

Упражнения

132. Для следующих интегралов вычислите верхние и нижние суммы Дарбу, соответствующие разбиению отрезка $[a; b]$ на n равных частей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_1^2 \ln x \, dx, & n = 10; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}, \quad n = 5; \\ \text{в) } \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}, & n = 10; \quad \text{г) } \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n = 10. \end{array}$$

Напишите, соответствующие двойные неравенства для данных интегралов.

133. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

неинтегрируема на отрезке $[0; 1]$.

134. Приведите пример неинтегрируемой функции, квадрат которой интегрируем.

135. Приведите пример двух неинтегрируемых функций, сумма которых интегрируема.

Используя геометрические соображения, вычислите следующие интегралы:

$$136. \int_0^1 dx.$$

$$137. \int_2^3 x \, dx.$$

$$138. \int_{-1}^0 (x+1) dx. \quad 139. \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

Используя геометрические соображения, докажите следующие равенства:

$$140. \int_{-2}^2 x^3 dx = 0. \quad 141. \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = 0.$$

$$142. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{1+x^4} = 0. \quad 143. \int_0^{\pi} \cos x dx = 0.$$

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Вычисление определенных интегралов путем нахождения числа, разделяющего множества сумм Дарбу, весьма громоздко. Гораздо проще вычислять определенный интеграл как разность значений первообразной. Но для этого нужно выяснить, какие из интегрируемых функций имеют первообразные. Мы докажем, что их имеют все непрерывные функции.

1. Разбиение промежутка интегрирования.

Т е о р е м а 1. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, $a < c < b$, то она интегрируема и на отрезке $[a; b]$, причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое разбиение $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что точка c является одной из точек разбиения (в противном случае мы присоединим ее к ним). Но тогда, если, например, $c = x_r$, каждая сумма Дарбу для отрезка $[a; b]$ распадается на две суммы, соответствующие отрезкам $[a; c]$ и $[c; b]$:

$$s_{P_2} = s' + s'' \text{ и } S_P = S' + S'',$$

где

$$s' = \sum_{k=0}^{r-1} m_k \Delta x_k, \quad s'' = \sum_{k=r}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S' = \sum_{k=0}^{r-1} M_k \Delta x_k, \quad S'' = \sum_{k=r}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Так как функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения P' и P'' этих отрезков, что

$$S' - s' < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } S'' - s'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Эти разбиения в совокупности образуют разбиение P отрезка $[a; b]$. При этом имеем:

$$S_P - s_P = (S' + S'') - (s' + s'') = (S' - s') + (S'' - s'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда следует, что функция $y = f(x)$ интегрируема и на отрезке $[a; b]$.

Из неравенств

$$s' \leq \int_a^c f(x) dx \leq S' \quad \text{и} \quad s'' \leq \int_c^b f(x) dx \leq S''$$

следует, что

$$s_P = s' + s'' \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq S' + S'' = S_P.$$

Таким образом, как $\int_a^b f(x) dx$, так и $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ разделяют множества $\{s_P\}$ и $\{S_P\}$ сумм Дарбу для отрезка $[a; b]$. Поскольку эти множества разделяются лишь одним числом, то равенство (1) доказано.

Отметим, что если $b < c$, то

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$

Значит, и в этом случае

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2. Среднее значение функции. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке, и потому существуют числа m и M — точные нижняя и верхняя границы ее значений на отрезке $[a; b]$ (если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то m и M — ее наименьшее и наибольшее значения на нем). Выражения $m(b-a)$ и $M(b-a)$ являются нижней и верхней суммами Дарбу, соответствующими разбиению отрезка $[a; b]$, состоящему лишь из одной части — самого этого отрезка.

Но $\int_a^b f(x) dx$ разделяет суммы Дарбу, и потому

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (2)$$

Геометрический смысл неравенств (2) виден из рисунка 11: площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольни-

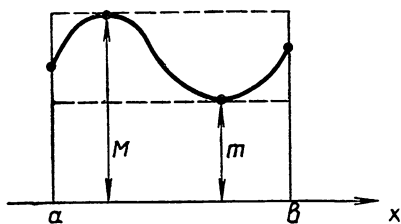


Рис. 11

ка с тем же основанием и высотой m , но меньше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой M .

В силу неравенств (2) число

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ заключено меж-}$$

ду значениями m и M . Это число называют *средним значением*

функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдется такое значение c , $a \leq c \leq b$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Но тогда

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b-a). \quad (3)$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2 (о среднем значении). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует такое c , $a \leq c \leq b$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x) dx = f(c) (b-a)$.

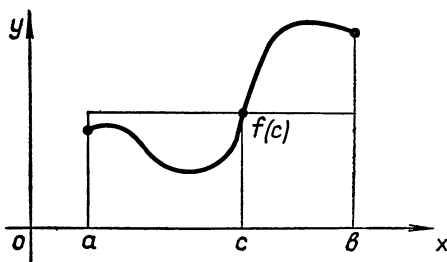


Рис. 12

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, имеющего то же основание, что и трапеция, причем высота прямоугольника равна ординате $f(c)$ в некоторой точке c , лежащей между a и b (рис. 12).

Отметим, что если функция $y = f(x)$ разрывна на отрезке $[a; b]$, то такой точки c может не быть (рис. 13).

3. Дифференцирование определенного интеграла по верхнему пределу. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любой части этого отрезка и потому при любом $x \in [a; b]$ существует интеграл $\int_a^x f(x) dx$. Чтобы не

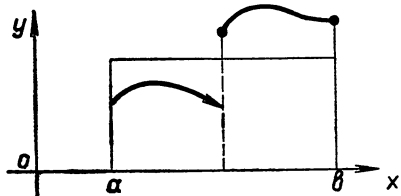


Рис. 13

смешивать обозначения верхнего предела и переменной интегрирования, будем записывать этот интеграл в виде $\int_a^x f(t) dt$.

Мы получили функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

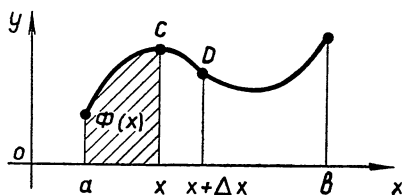


Рис. 14

Если $y = f(t) \geq 0$ на $[a; b]$, то $\Phi(x)$ есть площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 14).

Докажем, что при некоторых условиях полученная функция $y = \Phi(x)$ является одной из первообразных для функции $y = f(x)$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в некоторой точке x этого отрезка, то функция

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема в этой точке¹ и $\Phi'(x) = f(x)$.

Другими словами, определенный интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

Доказательство. Выберем Δx столь малым, чтобы точка $x + \Delta x$ лежала внутри отрезка $[a; b]$. Рассмотрим соответствующее приращение $\Delta\Phi(x)$ функции $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

(здесь было использовано аддитивное свойство определенного интеграла). С геометрической точки зрения полученное нами равенство означает (см. рис. 14), что приращение $\Delta\Phi(x)$ площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x + \Delta x]$ выражается

интегралом $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ (здесь Δx может быть не только положительным, но и отрицательным числом).

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении:

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \Delta x,$$

где $c \in [x; x + \Delta x]$.

¹ Если x — одна из точек a и b , то имеется в виду соответствующая односторонняя производная.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна, а при $\Delta x \rightarrow 0$ будет $c \rightarrow x$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Поэтому

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного утверждения вытекает, что *если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, а именно функцию*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Поэтому доказанная теорема носит название *теоремы о существовании первообразной для непрерывной функции*.

Пример 1. Найдем производную функции

$$\Phi(x) = \int_5^x \sin t dt.$$

Решение.

$$\Phi'(x) = \sin x.$$

Пример 2. Найдем производную функции

$$\Phi(x) = \int_2^{x^3} e^t dt.$$

Решение. В данном случае верхний предел является функцией от x , поэтому воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\Phi'(x) = e^{x^3} (x^3)'_x = 3x^2 e^{x^3}.$$

4. Формула Ньютона—Лейбница. В § 1 мы доказали, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке. В предыдущем пункте было доказано, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она имеет на нем первообразную функцию. Но в п. 2 § 1 мы доказали, что если функция на отрезке интегрируема и имеет первообразную, то значение определенного интеграла этой функции (понимаемого как разделяющее число) равно разности значений любой первообразной в точках b и a . Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — одна из первообразных этой функции, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Полученная формула называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Она показывает, что в классе непрерывных функций определения интеграла как разности значений первообразной и как разделяющего числа совпадают.

Следует отметить, что формула Ньютона — Лейбница доказана нами только для непрерывных функций. Об интегрировании разрывных функций будет сказано дальше.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит аддитивное свойство определенного интеграла? Каков геометрический смысл этого свойства?

2. Сформулируйте теорему о среднем. В чем состоит ее геометрический смысл?

3. Можно ли утверждать, что $\int_a^x f(t) dt$ есть первообразная для непрерывной функции $y = f(t)$? Поясните свой вывод.

4. В чем состоит смысл формулы Ньютона — Лейбница? Как и в каких случаях она применяется для вычисления определенных интегралов?

Упражнения

Найдите производные следующих функций:

144. $y = \int_5^{x^4} \cos t dt.$

145. $y = \int_3^{\ln x} e^t dt.$

146. $y = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2 \sin t}{t} dt.$

147. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} 2 \sin t^2 dt.$

148. Кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx, \\ y = \int_1^t \frac{\sin x}{x} dx. \end{cases}$$

Определите величину угла, образованного касательной к этой кривой в точке, где $t < \frac{\pi}{2}$, с положительным направлением оси Ox .

149. Найдите производную

$$\frac{dy}{dx}, \text{ если } x = \int_1^{t^2} t \ln t \, dt, \\ y = \int_{t^2}^1 t^2 \ln t \, dt \quad (t > 0).$$

150. Найдите точки экстремума функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{для } x \in]0; \infty[.$$

151. Найдите точки экстремума и точки перегиба функции

$$y = \int_0^x (t - 1)(t - 2)^2 dt.$$

Найдите среднее значение функции на указанном отрезке:

152. $f(x) = 2x^2 + 1$ на $[0; 1]$.

153. $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.

154. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $[1; 2]$.

§ 3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Свойства определенных интегралов от непрерывных функций.

Поскольку для непрерывных функций определенный интеграл равен разности значений первообразных, то все свойства, установленные в главе I, справедливы для интегралов от непрерывных функций. Сформулируем эти свойства.

а) Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то для любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

б) Если функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные, то

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

или

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

в) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет внутри отрезка $[\alpha; \beta]$ непрерывную производную, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi'[\alpha; \beta] = ([a; b])$, то справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-a; a]$ и четна на этом отрезке. Тогда ее график симметричен относительно оси Oy (рис. 15).

Площади криволинейных трапеций, заштрихованной и незаштрихованной на рисунке 15, равны, поскольку эти трапеции конгруэнтны. Значит,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx. \quad (1)$$

Эту формулу можно доказать и без использования геометрических соображений. В самом деле, произведем замену переменных под знаком определенного интеграла $\int_{-a}^0 f(x) dx$, положив $x = -u$.

Тогда

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du) = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du.$$

В силу четности функции $f(x)$ имеем: $f(-u) = f(u)$. Значит,

$$\int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du.$$

Поскольку определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то можно написать

$$\int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx.$$

Значит,

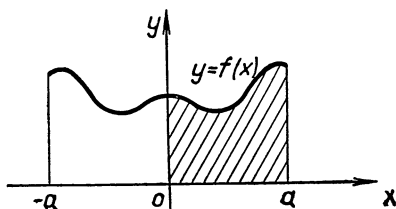


Рис. 15

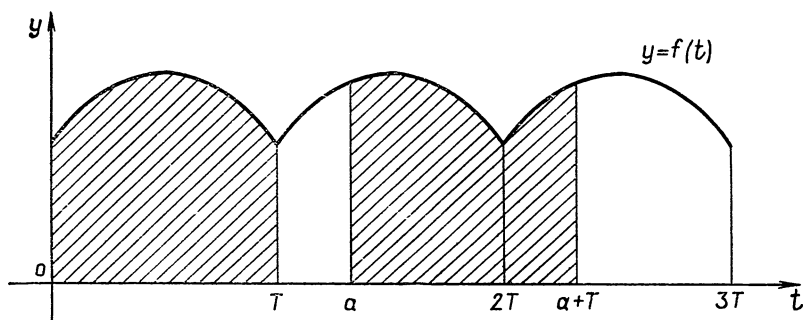


Рис. 16

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Из этого равенства следует утверждение: *если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$ и является четной, то*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (2)$$

В самом деле, из свойства аддитивности и равенства (1) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что для нечетных функций

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (3)$$

Если функция $f(t)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[0; T]$, то для любого a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt. \quad (4)$$

Геометрический смысл этого равенства виден из рисунка 16 (площади заштрихованных криволинейных трапеций равны).

Для доказательства равенства (4) заметим, что найдется такое целое число n , что $(n-1)T < a \leq nT$, и потому $a \leq nT < a+T$. Представим левую часть равенства (4) в виде

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{a+T} f(t) dt.$$

В первом слагаемом сделаем подстановку $x = t - (n-1)T$, а во втором — подстановку $y = t - nT$. Когда t изменяется от a до nT , $t - (n-1)T$ изменяется от $a - (n-1)T$ до T , а когда t изменяется от nT до $a + T$, $t - nT$ меняется от 0 до $a - (n-1)T$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_{a-(n-1)T}^T f(x) dx + \int_0^{a-(n-1)T} f(y) dy = \int_0^{a-(n-1)T} f(t) dt + \\ &+ \int_{a-(n-1)T}^T f(t) dt = \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

Равенство (4) доказано.

3. Интегрирование неравенств. В п. 2 § 2 было отмечено, что если $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad (5)$$

т. е.

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Таким образом, мы проинтегрировали неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Теперь рассмотрим интегрирование неравенств в общем случае. На рисунке 17 каждая точка кривой AB лежит выше точки кривой CD , имеющей ту же абсциссу. Поэтому площадь криволинейной трапеции $MABN$ больше, чем площадь криволинейной трапеции $MCDN$. Иными словами, справедливо следующее утверждение:

а) Если для любого x на отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (6)$$

Чтобы доказать это утверждение, не опираясь на понятие площади, рассмотрим сначала частный случай.

Пусть $f(x) \geq 0$. В этом случае $m \geq 0$, а потому

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a) \geq 0.$$

Для доказательства неравенства (6) в общем случае применим доказанный частный случай к функции $F(x) = g(x) - f(x)$. По условию эта функция неотрицательна, и потому

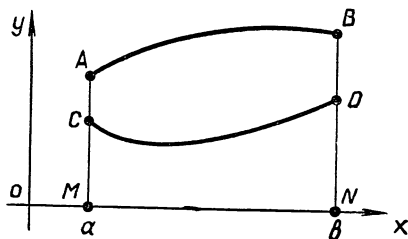


Рис. 17

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Но тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Таким образом, функциональные неравенства можно интегрировать (при $b \geq a$).

В дальнейшем нам часто придется, не вычисляя интегралов, оценивать их значения. Для этого оказывается полезным следующее утверждение:

б) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедливо неравенство (при $a < b$)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7)$$

В самом деле, из непрерывности функции $y = f(x)$ вытекает, что и функция $y = |f(x)|$ непрерывна, а потому интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ существует. При этом из неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ получаем, что

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

а это и значит, что справедливо неравенство (7).

Неравенство (7) является обобщением на интегралы свойства абсолютной величины суммы конечного числа слагаемых:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Условие непрерывности можно «ослабить»: неравенство (7) справедливо для любой интегрируемой функции $y = f(x)$.

Отметим, что из интегрируемости функции $y = |f(x)|$ не следует интегрируемость функции $y = f(x)$. В самом деле, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — рационально} \end{cases}$$

неинтегрируема, а функция $y = |f(x)| = 1$ интегрируема на отрезке $[0; 1]$.

Доказанные утверждения позволяют производить оценку определенных интегралов.

Пример 1. Оценим интеграл $\int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx$.

Решение. Так как $0 \leq x \leq 1$, то $9 \leq 9+x^2 \leq 10$, и потому $3 \leq \sqrt{9+x^2} \leq \sqrt{10}$.

С помощью неравенства (5) оценим данный интеграл:

$$3(1 - 0) \leq \int_0^1 \sqrt{9 + x^2} dx \leq \sqrt{10}(1 - 0)$$

или, окончательно,

$$3 \leq \int_0^1 \sqrt{9 + x^2} dx \leq \sqrt{10}.$$

Пример 2. Сравним значения определенных интегралов $\int_0^1 x dx$ и $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение. Так как на отрезке $[0; 1]$ выполняется неравенство $x^2 \leq x$, то

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляется определенный интеграл от суммы двух непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций?

2. Как можно вычислить интеграл от четной функции по отрезку $[-a; a]$? Дайте геометрическую иллюстрацию.

3. Чему равен интеграл от нечетной функции по отрезку $[-a; a]$?

4. Перечислите свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Дайте геометрическую иллюстрацию этих свойств.

5. Может ли интеграл от положительной функции по отрезку $[a; b]$, где $a < b$, быть отрицательным?

Упражнения

Оцените следующие интегралы.

$$155. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx. \quad 156. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$157. \int_{-1}^1 \frac{dx}{8 + x^3}. \quad 158. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3 \cos x}.$$

159. Не вычисляя интегралов, установите, величина какого из указанных ниже интегралов больше:

$$a) \int_1^2 x dx \quad \text{или} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \text{ или } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 e^x \, dx \text{ или } \int_0^1 x \, dx.$$

160. Докажите неравенства:

$$\text{а) } 2 < \int_{-2}^4 x^2 \, dx < 25;$$

$$\text{б) } 1 < \int_1^5 \frac{dx}{x} < 3;$$

$$\text{в) } \frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} \, dx < 2e^2.$$

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интегралы с бесконечным промежутком интегрирования.

Для существования определенного интеграла необходимо, чтобы промежуток интегрирования был конечен, а подынтегральная функция ограничена на нем — в противном случае множество сумм Дарбу не будет ограниченным. При решении задач встречаются случаи, когда одно или оба из этих условий не выполняются, т. е. когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция не ограничена. Такие интегралы называются *несобственными*. Различают *несобственные интегралы 1-го и 2-го рода* в зависимости от того, имеем ли мы дело с бесконечностью промежутка интегрирования или с неограниченностью подынтегральной функции.

Хотя несобственные интегралы и нельзя рассматривать как разделяющие числа для сумм Дарбу, иногда им можно придать определенный смысл с помощью дополнительного предельного перехода. Начнем со случая, когда промежутком интегрирования является луч $[a; \infty[$. Предположим, что функция $y = f(x)$ интегрируема на каждой конечной части луча, т. е. что для любого $c > a$ существует интеграл $I(c) = \int_a^c f(x) \, dx$. За значе-

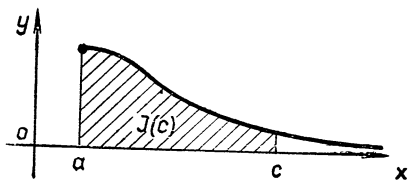


Рис. 18

ние интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ естественно принять предел функции $I(c)$, когда c стремится к $+\infty$, т. е. когда промежуток интегрирования стремится заполнить весь луч $[a; +\infty[$ (рис. 18).

Может, однако, случиться, что этот предел не существует. Поэтому будем различать два случая:

а) Если предел $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c)$ существует и конечен, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *сходящимся*, а значение этого предела — *значением несобственного интеграла*. В этом случае

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx. \quad (1)$$

б) Если предел в правой части равенства (1) не существует, говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *расходится*.

При аналогичных предположениях относительно функции $y = f(x)$ можно рассмотреть случай, когда верхний предел фиксирован, а нижний предел стремится к $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (2)$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (2), конечен, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ называют *сходящимся*, в противном случае его называют *расходящимся*.

Наконец, можно определить и несобственный интеграл вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Будем считать, что функция $y = f(x)$ интегрируема на всей числовой прямой. Выберем на прямой произвольную точку a . Эта точка разобьет прямую на два луча: $] -\infty; a]$ и $[a; +\infty[$. Если существуют несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ и } \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

то говорят, что существует и несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

В этом случае полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (3)$$

где несобственные интегралы, содержащиеся в правой части равенства (3), определены соответственно равенствами (1) и (2). Легко проверить, что значение интеграла не зависит от выбора точки a .

Пример 1. Вычислим $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ всюду непрерывна и, следовательно, интегрируема в любом конечном промежутке. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Вычислим $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\cos x) \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos a \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a$ не существует, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ расходится.

Запись вычислений несобственных интегралов можно упростить, предварительно найдя первообразную для подынтегральной функции $y = f(x)$. Именно, если $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)).$$

Предположим, что существует предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$. Введем обозначение: $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = F(+\infty)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(b) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^b,$$

где $F(-\infty) = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$. Наконец,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Пример 3. Вычислим $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a = \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Пример 4. Исследуем на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Если $\alpha = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty.$$

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}.$$

Сходимость или расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ зависит от того,

существует или нет предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1}$. Если $\alpha > 1$, то $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1} = 0$;

если $\alpha < 1$, то $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{-\alpha+1} = \infty$. Таким образом, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

При исследовании на сходимость несобственных интегралов оказываются полезными следующие утверждения:

а) Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то при $A > a$ сходится

и интеграл $\int_A^{+\infty} f(x) dx$. При этом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx.$$

б) Если сходятся интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, то и интеграл

$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx$ сходится, причем

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

2. Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода.

В дальнейшем мы будем обычно иметь дело с несобственными интегралами от неотрицательных функций. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на луче $[a; +\infty[$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

возрастает на этом луче. Поэтому она имеет предел при $x \rightarrow +\infty$ в том и только в том случае, когда ограничена. Отсюда получаем следующее утверждение:

а) Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$, $a \leq x < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ была ограничена, т. е. чтобы нашлось такое число M , что $\int_a^x f(x) dx \leq M$ для всех $x \in [a; +\infty[$.

Непосредственно найти такое число M бывает довольно сложно, поэтому во многих случаях оказывается полезным следующее утверждение:

б) Если на луче $[a; +\infty[$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

В самом деле, из $f(x) \leq g(x)$ следует, что для любого x имеем:

$$\int_a^x f(x) dx \leq \int_a^x g(x) dx.$$

Но функция $Y(x) = \int_a^x g(x) dx$ возрастает, и потому ее предел при $x \rightarrow +\infty$ не меньше любого из ее значений:

$$Y(x) \leq Y(+\infty).$$

Поэтому для всех $x \in [a; +\infty[$ имеем:

$$\int_a^x f(x) dx \leq M,$$

где $M = Y(+\infty)$. А тогда на основании предыдущего утверждения интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Из доказанного вытекает, что если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \in [0; +\infty[$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ — в противном случае в соответствии с утверждением б) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходил бы.

Пример 5. Исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Решение. Мы имеем $\frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3}$ при $x \geq 1$. Но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится (см. пример 4). Поэтому сходится и наш интеграл.

Пример 6. Исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Так как $\frac{1}{1+\sqrt{x}} > \frac{1}{3\sqrt{x}}$ при $x \geq 1$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3\sqrt{x}}$ расходится (см. пример 4 при $\alpha = \frac{1}{2}$), то расходится и заданный интеграл.

3. Несобственные интегралы 2-го рода. Рассмотрим теперь случай, когда промежуток интегрирования $[a; b]$ конечен, но подынтегральная функция $y = f(x)$ не ограничена на нем. Строение таких функций может быть очень сложным. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда можно указать конечное множество особых точек c_1, \dots, c_n , таких, что в сколь угодно малых окрестностях этих точек функция $f(x)$ не ограничена, но после удаления этих

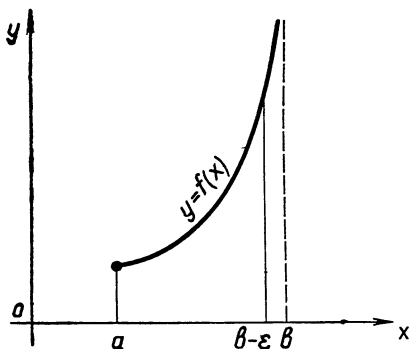


Рис. 19

окрестностей получаем промежутки, на которых функция интегрируема.

Сначала изучим случай, когда множество особых точек состоит лишь из точки b . В этом случае $f(x)$ не ограничена на всем отрезке $[a; b]$, но интегрируема на любом из отрезков $[a; b - \varepsilon]$ (рис. 19). За значение интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

естественно принять предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \text{ если этот предел существует.}$$

Введем следующее определение:

Пусть функция $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a; b]$, но интегрируема на любом из отрезков $[a; b - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называют *сходящимся*, если существует

предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. Значение этого предела и называют значением интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Если же этот предел не существует, то интеграл называют *расходящимся*.

Аналогично, если функция не ограничена на отрезке $[a; b]$, но интегрируема на любом отрезке $[a + \varepsilon; b]$, то полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Наконец, если единственная особая точка c лежит внутри отрезка $[a; b]$, то положим

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. Положим

$$F(a+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(a+\varepsilon), \quad F(b-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon)$$

(если эти пределы существуют). Тогда для сходящихся интегралов, у которых особыми являются лишь точки a и b , имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b - 0) - F(a + 0).$$

Если функция $F(x)$ непрерывна в точках a и b , то получаем:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Аналогично обстоит дело и в случае, когда подынтегральная функция не ограничена в любой окрестности некоторой внутренней точки отрезка $[a; b]$.

Пример 7. Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Этот интеграл является несобственным, так как функция $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 1$. Поскольку первообразная для функции $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ равна $\arcsin x$, то, пользуясь определением несобственного интеграла, получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(1 - \varepsilon) - \arcsin 0,$$

откуда, учитывая непрерывность функции $\arcsin x$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 8. Вычислим $\int_2^4 \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

Решение. Подынтегральная функция внутри данного промежутка интегрирования имеет одну особую точку $x = 3$. Найдем первообразную для подынтегральной функции:

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2-9)^2} + C.$$

Так как функция $F(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$ непрерывна в точке $x = 3$, то

$$\int_2^4 \frac{2x dx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2-9)^2} \Big|_2^4 = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{25}).$$

Пример 9. Вычислим $\int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция имеет две особые точки $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$. Пользуясь определением несобственного интеграла и учитывая непрерывность первообразной, получаем, что

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} \Big|_{-3}^3 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Пример 10. Исследуем на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. Имеем: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) =$
 $= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = +\infty.$

Значит, данный интеграл расходится.

Вопросы для самопроверки

1. Почему определение интеграла как разделяющего числа не годится для несобственных интегралов?

2. Опишите геометрический смысл понятия сходимости несобственного интеграла 1-го рода. Как найти значение сходящегося несобственного интеграла?

3. Укажите признаки сходимости несобственного интеграла 1-го рода.

4. Что такое несобственный интеграл 2-го рода?

5. Укажите геометрический смысл сходимости интеграла от неограниченной в $[a; b]$ функции. Как вычисляется значение сходящегося интеграла?

Упражнения

Установите, будут ли сходиться следующие несобственные интегралы; в случае сходимости найдите значение интеграла.

161. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$

162. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x^3}.$

163. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx.$

164. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

$$165. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$166. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$167. \int_1^{\infty} x \cos x \, dx.$$

$$168. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

$$169. \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$170. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$171. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$172. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$173. \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$174. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$175. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Исследуйте на сходимость:

$$176. \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 - x + 1}.$$

$$177. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

178. При каких значениях k интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^k x}$ сходится, а при каких расходится?

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Мы знаем, что при $x > 0$ выполняется равенство

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Оно позволяет дать новое определение логарифмической функции, не опирающееся на понятие показательной функции. Именно, положим по определению, что при $x > 0$

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Выведем, исходя из этого определения, свойства логарифмической функции.

а) Логарифмическая функция определена для всех положительных значений x .

В самом деле, функция $y = \frac{1}{t}$ непрерывна при $t > 0$, а потому в силу теоремы о существовании определенного интеграла интеграл $\int_1^x \frac{dt}{t}$ существует при всех $x > 0$.

б) Логарифмическая функция дифференцируема, и ее производная в любой точке $x > 0$ равна $\frac{1}{x}$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

В самом деле, функция $y = \frac{1}{t}$ непрерывна при $t > 0$, а потому в силу теоремы о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом имеем:

$$(\ln x)' = \left(\int_1^x \frac{dt}{t} \right)' = \frac{1}{x}.$$

Поскольку всякая дифференцируемая функция непрерывна, то логарифмическая функция непрерывна при $x > 0$.

в) Логарифмическая функция строго возрастает при $x > 0$.

В самом деле, если $x > 0$, то $\frac{1}{x} > 0$, т. е. производная функции $y = \ln x$ положительна. Следовательно, эта функция строго возрастает.

г) Так как $\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$ и логарифмическая функция строго возрастает, то $\ln x > 0$ при $x > 1$ и $\ln x < 0$ при $x < 1$.

д) Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то выполняется равенство

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2. \quad (1)$$

В самом деле, имеем:

$$\ln x_1 x_2 = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t}.$$

Сделаем во втором интеграле подстановку $t = x_1 z$. Когда t меняется от x_1 до $x_1 x_2$, переменная z изменяется от 1 до x_2 . Поэтому

$$\int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_2} \frac{dz}{z}.$$

Значит,

$$\ln x_1 x_2 = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_1^{x_2} \frac{dz}{z} = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Методом математической индукции можно доказать справедливость равенства (1) для любого конечного множества положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n. \quad (2)$$

е) Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то выполняется равенство

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2. \quad (3)$$

В самом деле, из равенства (1) следует, что

$$\ln \frac{x_1}{x_2} + \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2} x_2 = \ln x_1,$$

откуда без труда получается требуемое равенство (3).

ж) Если $x > 0$ и n — натуральное число, то

$$\ln x^n = n \ln x. \quad (4)$$

Это легко следует из равенства (2).

з) Логарифмическая функция стремится к $+\infty$, когда $x \rightarrow +\infty$, и к $-\infty$, когда $x \rightarrow +0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty. \quad (5)$$

В самом деле, возьмем любое число $q > 1$. Тогда $\ln q^n = n \ln q$. Поскольку $\ln q > 0$ при $q > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln q = +\infty.$$

Это показывает, что строго возрастающая функция $y = \ln x$ может принимать сколь угодно большие значения, и потому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \ln x &= -\lim_{x \rightarrow +0} \ln \frac{1}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow +0} \ln \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \text{ где } t = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty.$$

Из непрерывности логарифмической функции и равенств (5) следует, что множество ее значений совпадает с множеством \mathbb{R} всех действительных чисел. В частности, найдется значение аргумента,

при котором эта функция равна единице. Обозначим это значение буквой e . Таким образом, теперь число e определяется равенством

$$\ln e = 1.$$

и) *Справедливо равенство*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

В самом деле, в силу непрерывности функции $y = \ln x$ имеем:

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Но

$$\ln (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln (1 + x) = \frac{\ln (1 + x)}{x}.$$

Так как $\ln 1 = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + x) - \ln 1}{x} = (\ln (1 + x))'_{x=0} = \frac{1}{1 + x} \Big|_{x=0} = 1.$$

Значит, и

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) = 1,$$

т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

При описанном выше построении теории логарифмической функции мы определяем показательную функцию как обратную логарифмической (существование обратной функции следует из того, что функция $y = \ln x$ строго возрастает и непрерывна на промежутке $]0; +\infty[$). Свойства показательной функции при этом выводятся из соответствующих свойств логарифмической функции.

Наконец, определим степень с любым показателем α , положив при $x > 0$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Из свойств логарифмической и показательной функций следует, что при $x > 0$ и $\alpha = \frac{m}{n}$ имеем:

$$\left(x^{\frac{m}{n}} \right)^n = \left(e^{\frac{m}{n} \ln x} \right)^n = e^{m \ln x} = x^m.$$

Поэтому $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Это показывает, что данное определение степени совпадает с обычным.

Мы уже отмечали, что с помощью определенных интегралов можно вычислять площади фигур, объемы тел, длины дуг и т. д. В этой главе будут выведены формулы, позволяющие решать такие задачи. При этом будут даны определения каждого из изучаемых понятий.

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. Внешние, внутренние и граничные точки плоских множеств. Выше мы неоднократно использовали понятие площади плоской фигуры, опираясь на его интуитивное толкование. В этом параграфе мы дадим определение понятия площади плоской фигуры, установим свойства площадей и опишем класс фигур, имеющих площадь. Для этого введем несколько понятий, относящихся к плоским фигурам, т. е. к множествам, состоящим из точек плоскости.

Напомним, что *открытым кругом с центром a и радиусом r* называют множество $U(a, r)$ точек плоскости, расстояние которых от точки a меньше r . Любой открытый круг с центром a называют *окрестностью* точки a .

Пусть на плоскости задано некоторое множество X . Назовем точку a этого множества *внутренней*, если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в X . Точку плоскости называют *внешней* точкой для этого множества, если у нее есть окрестность, не содержащая ни одной точки множества X . Наконец, точки плоскости, не являющиеся ни внутренними, ни внешними для множества X , называют *граничными точками* этого множества. Граничные точки могут как принадлежать множеству X , так и не принадлежать ему. Совокупность граничных точек множества X образует *границу* этого множества. Если все граничные точки множества X принадлежат этому множеству, то его называют *замкнутым*, а если ни одна граничная точка не принадлежит множеству X , то его называют *открытым*.

На рисунке 20 изображен квадрат. Точка e является внутренней для этого квадрата, точка f — внешней, а точка g — граничной. Граница квадрата состоит из отрезков ab , bc , cd и da .

В дальнейшем будем говорить, что фигуры F и G *налегают друг на друга*, если у них есть хоть одна общая внутренняя точка (рис. 21).

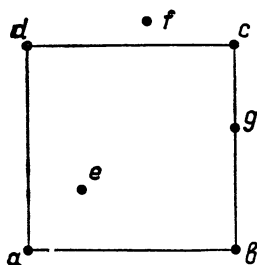


Рис. 20

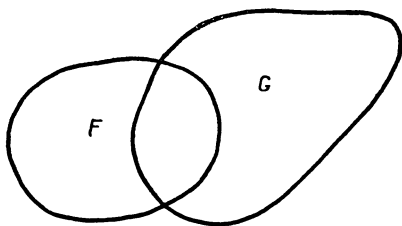


Рис. 21

Если фигура F является объединением попарно не налегающих друг на друга фигур F_1, F_2, \dots, F_n , то говорят, что F *разбита на фигуры* F_1, F_2, \dots, F_n ; при этом не исключается, что некоторые из них имеют общие граничные точки (рис. 22).

2. Квадрируемые области. Перейдем к определению понятия площади. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy . Назовем прямоугольник *допустимым*, если его стороны параллельны осям координат, причем не будем исключать и *вырожденные прямоугольники*, т. е. прямоугольники, у которых длина одной или обеих сторон равна нулю. Подмножество F плоскости, которое можно разбить на конечное число допустимых прямоугольников, назовем *ступенчатой фигурой* (рис. 23). Очевидно, что объединение и пересечение двух ступенчатых фигур являются ступенчатыми фигурами.

Назовем *площадью допустимого прямоугольника* F произведение длин его сторон:

$$S(F) = ab.$$

При этом площадь вырожденного прямоугольника равна нулю. Очевидно, что если прямоугольник разбит на два прямоугольника (рис. 24), $F = F_1 \cup F_2$, то площадь всего прямоугольника равна сумме площадей его частей:

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2).$$

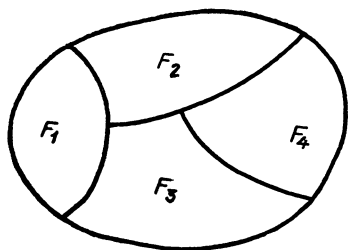


Рис. 22

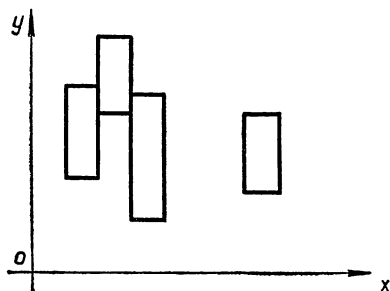


Рис. 23

Вообще, если прямоугольник F разбит на конечное число прямоугольников F_1, F_2, \dots, F_n , то

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) + \dots + S(F_n).$$

Кроме того, если прямоугольник F_1 получается из прямоугольника F параллельным переносом, то $S(F_1) = S(F)$.

Отметим, что квадрат со стороной, равной 1, имеет площадь, равную 1.

Определим далее площадь ступенчатой фигуры. Пусть ступенчатая фигура F разбита на прямоугольники F_1, F_2, \dots, F_n .

Положим тогда

$$S(F) = \sum_{j=1}^n S(F_j).$$

Одна и та же ступенчатая фигура может разбиваться на прямоугольники различными способами. Легко доказать, что ее площадь не зависит от способа разбиения.

Мы определили функцию $S(F)$ на множестве ступенчатых фигур. Она обладает следующими свойствами:

а) Если ступенчатые фигуры F_1 и F_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2).$$

б) Если ступенчатая фигура F_1 получается из ступенчатой фигуры F_2 параллельным переносом, то

$$S(F_1) = S(F_2).$$

Предоставляем читателю доказать эти утверждения.

Из свойства а), в частности, следует, что если F_1 и F_2 — ступенчатые фигуры и $F_1 \subset F_2$, то $S(F_1) \leq S(F_2)$. В самом деле, если присоединить к $F_2 \setminus F_1$ граничные точки, то получится ступенчатая фигура G , не налегающая на F_1 и такая, что $F_2 = F_1 \cup G$. Значит,

$$S(F_2) = S(F_1) + S(G) \geq S(F_1).$$

Совокупность ступенчатых фигур не охватывает таких фигур, как, например, треугольник, параллелограмм общего вида, круг, эллипс. Даже повернутый прямоугольник уже не является ступенчатой фигурой (стороны ступенчатой фигуры параллельны осям координат). Поэтому надо распространить понятие площади на более широкий класс фигур.

Возьмем на плоскости фигуру A и поставим ей в соответствие два числовых множества. Множество X_A состоит из площадей ступенчатых фигур, все точки которых принадлежат фигуре A , а множество Y_A — из площадей ступенчатых фигур, содержащих фигуру A . Очевидно, что множество X_A расположено слева от множеств

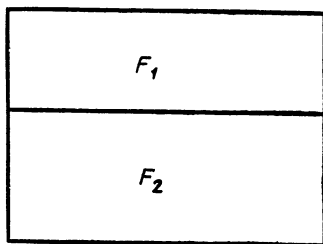


Рис. 24

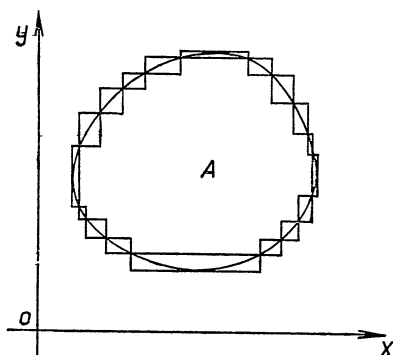


Рис. 25

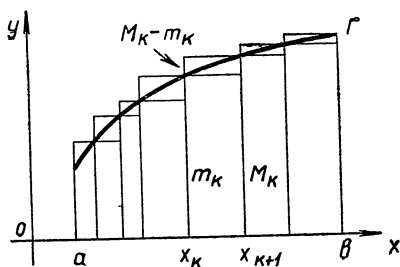


Рис. 26

ва Y_A . Поэтому существует хотя бы одно число, разделяющее эти множества.

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Фигура A называется *квадрируемой* (имеющей площадь), если соответствующие ей числовые множества разделяются единственным числом. Это единственное число $S(A)$, разделяющее X_A и Y_A , назовем *площадью* фигуры A .

Применяя критерий единственности разделяющего числа¹, получаем *необходимое и достаточное условие квадрируемости фигуры A* :

Для того чтобы фигура A была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашли такие ступенчатые фигуры F_1 и F_2 , что $F_1 \subset A \subset F_2$, причем

$$S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon.$$

Отметим, что граница фигуры A лежит в области, заключенной между границами ступенчатых фигур F_1 и F_2 . Эта область сама является ступенчатой фигурой (рис. 25). Поэтому указанное условие можно сформулировать и так:

Для того чтобы фигура A была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ границу фигуры A можно было заключить в ступенчатую фигуру, площадь которой меньше ε .

Отметим следующее достаточное условие квадрируемости.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы фигура A была квадрируемой, достаточно, чтобы ее граница состояла из конечного числа дуг Γ_k , являющихся графиками непрерывных функций $y = \varphi_k(x)$ или $x = \psi_k(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что дугу $\Gamma: y = f(x), a \leq x \leq b$, можно заключить в ступенчатую фигуру, имеющую сколь угодно малую площадь. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, найдется разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ этого отрезка такое, что для любого k выполняется неравенство

¹ См.: Введение в анализ, с. 25.

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

где m_k, M_k — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ (см. выше, с. 61). Но тогда дуга целиком содержится в объединении прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $M_k - m_k$ (рис. 26). Общая площадь этих прямоугольников не превосходит числа

$$\begin{aligned} \sum_k (M_k - m_k) \Delta x_k &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_k \Delta x_k = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Объединение этих прямоугольников образует ступенчатую фигуру, содержащую дугу Γ и имеющую площадь, меньшую, чем ε .

Поскольку граница фигуры A состоит из конечного числа таких дуг, ее тоже можно накрыть ступенчатой фигурой сколь угодно малой площади, и потому область квадратуема.

Например, круг квадратуем, так как его граница состоит из двух дуг, задаваемых уравнениями $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, а эти функции непрерывны.

Иногда оказывается полезным следующее достаточное условие квадратуемости фигур.

Теорема 2. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие квадратуемые фигуры A_1 и A_2 , что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $S(A_2) - S(A_1) < \varepsilon$, то фигура A тоже квадратуема.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем такие квадратуемые фигуры A_1 и A_2 , что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $S(A_2) - S(A_1) < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как A_1 и A_2 квадратуемы, то найдутся такие ступенчатые

фигуры F_1 и F_2 , что $F_1 \subset A_1, A_2 \subset F_2$, причем

$$S(A_1) - S(F_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad S(F_2) - S(A_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда $F_1 \subset A \subset F_2$ и

$$\begin{aligned} S(F_2) - S(F_1) &= (S(F_2) - S(A_2)) + (S(A_2) - S(A_1)) + \\ &+ (S(A_1) - S(F_1)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и доказывает квадратуемость A .

3. Свойства площадей квадратуемых фигур*. Покажем, что площади квадратуемых фигур обладают свойствами, похожими на свойства площадей ступенчатых фигур. Сначала докажем следующее утверждение:

а) Пусть квадратуемые фигуры A и B не имеют общих внутренних точек и $C = A \cup B$. Тогда фигура C тоже квадратуема, причем ее площадь равна сумме площадей фигур A и B :

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B). \quad (1)$$

В самом деле, из квадратуемости фигур A и B вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие ступенчатые фигуры F_1, F_2, G_1, G_2 , что $F_1 \subset A \subset F_2, G_1 \subset B \subset G_2$, причем

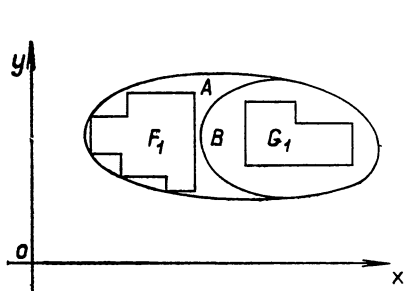


Рис. 27

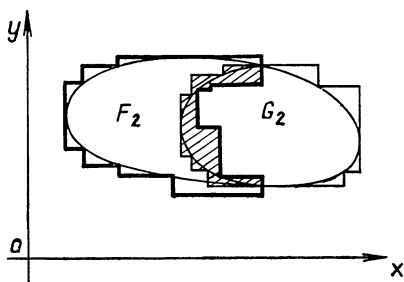


Рис. 28

$$S(F_2) - S(F_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(G_2) - S(G_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $H_1 = F_1 \cup G_1$ и $H_2 = F_2 \cup G_2$. Тогда H_1 — ступенчатая фигура, содержащаяся в $A \cup B$, а H_2 — ступенчатая фигура, содержащая $A \cup B$: $H_1 \subset A \cup B \subset H_2$. При этом фигуры F_1 и G_1 не имеют общих внутренних точек (рис. 27), и потому

$$S(H_1) = S(F_1) + S(G_1). \quad (2)$$

Фигуры F_2 и G_2 могут иметь общие внутренние точки (рис. 28), а потому можно утверждать лишь, что

$$S(H_2) \leq S(F_2) + S(G_2). \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S(H_2) - S(H_1) &\leq (S(F_2) + S(G_2)) - (S(F_1) + S(G_1)) = \\ &= (S(F_2) - S(F_1)) + (S(G_2) - S(G_1)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашли ступенчатые фигуры H_1 и H_2 такие, что $H_1 \subset A \cup B \subset H_2$, причем $S(H_2) - S(H_1) < \varepsilon$. Поэтому фигура $C = A \cup B$ квадрируема.

Из неравенств $S(F_1) \leq S(A) \leq S(F_2)$ и $S(G_1) \leq S(B) \leq S(G_2)$ вытекает, что

$$S(F_1) + S(G_1) \leq S(A) + S(B) \leq S(F_2) + S(G_2).$$

С другой стороны,

$$S(H_1) \leq S(A \cup B) \leq S(H_2),$$

а потому в силу соотношений (2) и (3)

$$S(F_1) + S(G_1) \leq S(A \cup B) \leq S(F_2) + S(G_2).$$

Мы видим, что числа $S(A) + S(B)$ и $S(A \cup B)$ разделяют одни и те же множества $\{S(F_1) + S(G_1)\}$, $\{S(F_2) + S(G_2)\}$. При этом, как было показано, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие F_1, F_2, G_1, G_2 , что

$$(S(F_2) + S(G_2)) - (S(F_1) + S(G_1)) < \varepsilon.$$

Поэтому указанные множества могут разделяться лишь одним числом. Это и доказывает соотношение (1).

Доказанное свойство называют *аддитивностью площади*.

Второе свойство площадей состоит в том, что площадь квадратируемой фигуры не изменяется при параллельном переносе. Это следует из того, что при этом переносе каждая внутренняя ступенчатая фигура для A переходит во внутреннюю ступенчатую фигуру для образа фигуры A , и то же самое верно для внешних ступенчатых фигур. Но это значит, что при параллельном переносе не изменяются ни множество X_A , ни множество Y_A , а потому неизменным остается и разделяющее их число, т. е. площадь фигуры.

Недостатком данного выше определения площади является то, что оно связано с выбором системы координат на плоскости. Мы доказали лишь, что площадь не изменяется (инвариантна) при параллельных переносах, но не доказали такого же утверждения относительно других перемещений (симметрий, поворотов и т. д.). Справедливо более общее утверждение:

б) Если фигура A квадратируема и A_1 — конгруэнтная ей фигура, то A_1 тоже квадратируема, причем

$$S(A_1) = S(A).$$

В курсе геометрии доказывают, что любое перемещение является композицией осевых симметрий. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для случая, когда A_1 получается из A с помощью осевой симметрии.

Рассмотрим сначала случай, когда A — прямоугольник, одна из сторон которого параллельна оси симметрии l (рис. 29). В этом случае образ A_1 этого прямоугольника может быть получен из A не только с помощью осевой симметрии, но и с помощью параллельного переноса. Поэтому $S(A) = S(A_1)$. Но любую квадратируемую фигуру можно с любой степенью точности заменить фигурой, состоящей из прямоугольников, одна из сторон которых параллельна оси симметрии. Применяя доказанное утверждение для каждого из этих прямоугольников и складывая полученные равенства, убеждаемся, что равенство $S(A) = S(A_1)$ верно для любых квадратируемых фигур.

Мы доказали, что в классе квадратируемых фигур площадь обладает следующими свойствами:

1°. Для любой фигуры F ее площадь $S(F)$ — неотрицательное число (неотрицательность площади).

2°. Площади конгруэнтных фигур равны (инвариантность площади относительно перемещений).

3°. Если фигуры F и G не имеют общих внутренних точек, то

$$S(F \cup G) = S(F) + S(G)$$

(аддитивность площади).

4°. Площадь единичного квадрата равна единице (условие нормировки).

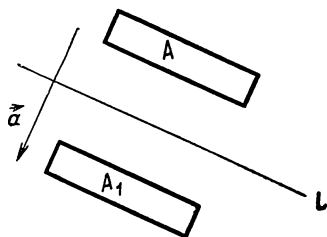


Рис. 29

Можно доказать, что условия $1^\circ - 4^\circ$ однозначно определяют площадь в классе квадрируемых фигур. Это позволяет понятию площади дать аксиоматическое определение, сказав, что на совокупности фигур M определено понятие площади, если на M задана числовая функция $S(F)$, удовлетворяющая условиям $1^\circ - 4^\circ$ (при этом, разумеется, требуется, чтобы совокупность M вместе с двумя не налегающими друг на друга фигурами содержала их объединение).

4. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах. Напомним, что мы называли *криволинейной трапецией* фигуру, ограниченную осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$. В этом пункте выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

Т е о р е м а 3. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на нем, то соответствующая ей криволинейная трапеция квадрируема, причем ее площадь S выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Криволинейная трапеция ограничена тремя отрезками и графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Как было показано в п. 2 такая фигура квадрируема. Чтобы вычислить площадь этой трапеции, построим для нее внешние и внутренние ступенчатые фигуры (см. рис. 26).

Тогда, с одной стороны, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq S \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

где $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ — площадь внутренней ступенчатой фигуры,

$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ — площадь внешней ступенчатой фигуры. С другой стороны, по определению интеграла можно записать:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Таким образом, числа S и $\int_a^b f(x) dx$ разделяют одни и те же числовые множества:

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \right\} \text{ и } \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \right\}.$$

Но, как было показано при изучении определенного интеграла, эти множества разделяются лишь одним числом, и потому $S = \int_a^b f(x) dx$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается, что если фигура ограничена снизу графиком функции $y = f_1(x)$, сверху графиком функции $y =$

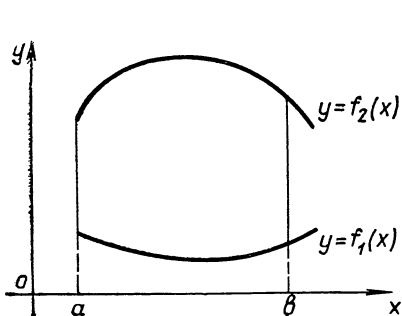


Рис. 30

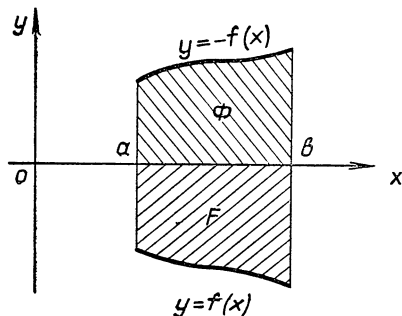


Рис. 31

$= f_2(x)$, а слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 30), то ее площадь выражается формулой

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Наглядный смысл формулы (4) состоит в том, что криволинейную трапецию можно рассматривать как объединение «бесконечно тонких полосок» с основаниями dx и высотами $f(x)$.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на нем только неположительные значения. Выразим с помощью определенного интеграла площадь соответствующей криволинейной трапеции F .

Рассмотрим фигуру Φ , симметричную фигуре F относительно оси Ox . Эта фигура (рис. 31) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = -f(x)$, которая на $[a; b]$ принимает только неотрицательные значения. По доказанному выше

$$S(\Phi) = \int_a^b (-f(x)) dx.$$

Но $S(\Phi) = S(F)$. Значит,

$$S(F) = \int_a^b (-f(x)) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

Как мы видим, в рассматриваемом случае интеграл $\int_a^b f(x) dx$ дает

значение площади криволинейной трапеции F с точностью до знака. Если же функция f меняет знак на отрезке $[a; b]$ в конечном числе точек, то значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ дает алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапе-

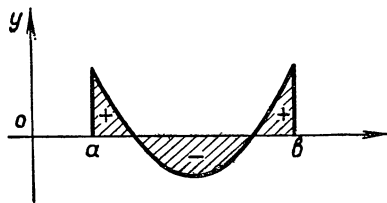


Рис. 32

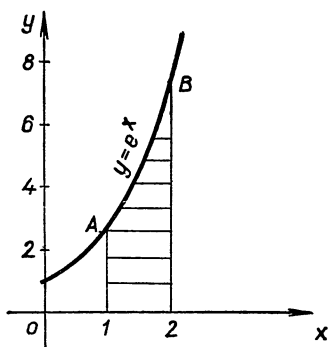


Рис. 33

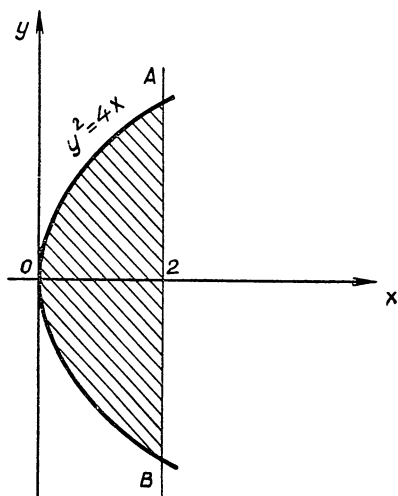


Рис. 34

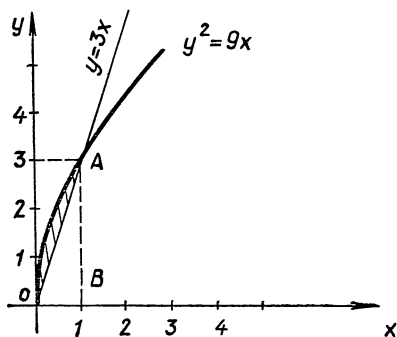


Рис. 35

ций, ограниченных частями графика функции $y = f(x)$, отрезками оси Ox и, быть может, отрезками, параллельными оси Oy (рис. 32).

Пример 1. Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой $y = e^x$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 2$ (рис. 33).

Решение. Имеем:

$$S = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e - 1).$$

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y^2 = 4x$ и отрезком прямой $x = 2$ (рис. 34).

Решение. Из рисунка видно, что трапеция, площадь которой нужно найти, расположена симметрично относительно оси абсцисс и, следовательно, искомая площадь равна

$$S = 2 \int_0^2 \sqrt{x} dx = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \sqrt{2}.$$

Пример 3. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = 9x$, $y = 3x$ (рис. 35).

Решение. Искомая площадь равна разности площадей криволинейного треугольника OAB и прямоугольного треугольника OAB :

$$S = \int_0^1 \sqrt{9x} dx - \int_0^1 3x dx = 3x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Вычислим площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$.

Решение. Из уравнения кривой видно, что она расположена симметрично относительно оси Ox . Следовательно, можно сначала вычислить половину искомой площади (рис. 36). Рекомендуем читателю подробно исследовать и построить данную кривую.

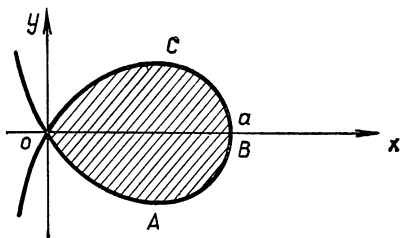


Рис. 36

Записав уравнение кривой в виде $y^2 = \frac{1}{a} x^2 (a - x)$, найдем точки пересечения ее с осью Ox , положив $y = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = a$.

Учитывая сказанное, найдем площадь половины петли:

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a x \sqrt{a-x} dx.$$

Воспользовавшись формулой № 40 таблицы (см. Приложение 1) при $a = -1$, $b = a$, получим:

$$\int x \sqrt{a-x} dx = \frac{2(-3x-2a)\sqrt{(a-x)^3}}{15} + C.$$

Тогда

$$\int_0^a x \sqrt{a-x} dx = \left. \frac{2(-3x-2a)\sqrt{(a-x)^3}}{15} \right|_0^a = \frac{4a\sqrt{a^3}}{15}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{4a\sqrt{a^3}}{15} = \frac{4a^2}{15}; \quad S = \frac{8}{15}a^2.$$

5. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями. Пусть кривая $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где функция $x = \varphi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, и имеет на этом отрезке непрерывную производную. Так как $y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t)$, то по формуле замены переменной под знаком определенного интеграла получаем:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

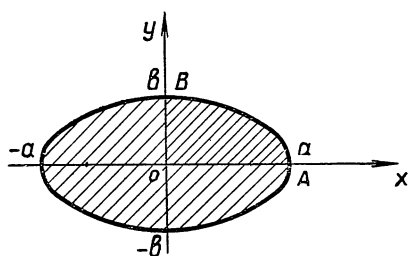


Рис. 37

Итак,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (5)$$

Пример 5. Вычислим площадь эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Выберем ту часть эллипса (рис. 37), которая расположена в первом квадранте. Точке A (a; 0) соответствует значение $t = 0$, а точке B (0; b) — значение $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a y dx = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \end{aligned}$$

Итак, $S = \pi ab$.

6. Площадь в полярных координатах. Вычислим площадь сектора, ограниченного лучами l и m , выходящими из точки O , и непрерывной кривой Γ (рис. 38). Выберем полярную систему координат, полюсом которой является точка O . Пусть $\rho = \rho(\varphi)$ — полярное уравнение кривой Γ , а φ_0 и Φ — углы между полярной осью и лучами l и m соответственно. При этом пусть функция $\rho(\varphi)$ непрерывна на $[\varphi_0; \Phi]$.

Разобьем данный сектор на n частей лучами

$$\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_k < \varphi_{k+1} < \dots < \varphi_n = \Phi$$

и рассмотрим k -й частичный сектор $[\varphi_k; \varphi_{k+1}]$ (рис. 39). Пусть r_k —

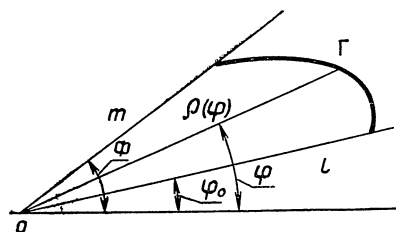


Рис. 38

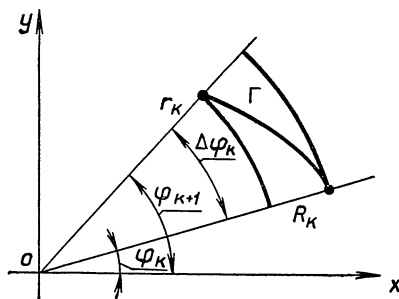


Рис. 39

наименьшее значение функции $\rho(\varphi)$ в $[\varphi_k; \varphi_{k+1}]$ а R_k — наибольшее значение функции в этом отрезке.

Построим два круговых сектора с радиусами r_k и R_k . Обозначим через $\Delta\varphi_k$ величину угла рассматриваемого частичного сектора. Тогда площадь частичного криволинейного сектора будет заключена между площадями вписанного и описанного частичных круговых секторов

$$\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k \leq S_k \leq \frac{1}{2} R_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Построим аналогичным образом внутренние и внешние круговые секторы для всех частичных криволинейных секторов. Объединяя их, получим внутреннюю и внешнюю фигуры.

Площадь внутренней фигуры, состоящей из круговых секторов, равна $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} r_k^2 \Delta\varphi_k$, а площадь внешней фигуры равна $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} R_k^2 \Delta\varphi_k$.

Эти выражения являются нижней и верхней суммами Дарбу s_p и

S_p для интеграла $\frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\Phi} \rho^2(\varphi) d\varphi$. Так как функция $\rho(\varphi)$ непрерывна,

то непрерывна, а потому и интегрируема функция $\rho^2(\varphi)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение P отрезка $[\varphi_0; \Phi]$, что $S_p - s_p < \varepsilon$. Из теоремы 2 п. 2 следует, что заданный криволинейный сектор квадратуем. При этом для его площади S выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} r_k^2 \Delta\varphi_k \leq S \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} R_k^2 \Delta\varphi_k. \quad (6)$$

В то же время по определению определенного интеграла

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} r_k^2 \Delta\varphi_k \leq \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\Phi} \rho^2(\varphi) d\varphi \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} R_k^2 \Delta\varphi_k. \quad (7)$$

В силу единственности разделяющего числа из неравенств (6) и (7) следует, что

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\Phi} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Пример 6. Вычислим площадь, ограниченную одним лепестком кривой $\rho = a \sin 2\varphi$ (рис. 40).

Решение. Значениям $\varphi=0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствует $\rho = 0$.

Поэтому

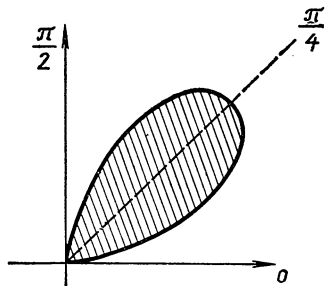


Рис. 40

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \pi a^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение внутренней, внешней и граничной точек фигуры.

2. Какие из точек, отмеченных на рисунке 41, являются внутренними, какие — внешними, а какие — граничными?

3. Дайте определение ступенчатой фигуры.

4. Какая фигура называется квадратуемой?

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие квадратуемости фигуры. Сформулируйте достаточные условия квадратуемости фигуры.

6. Перечислите свойства квадратуемых фигур.

7. Напишите формулу для вычисления площади плоской криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и непрерывной кривой $y = f(x)$ ($f(x) > 0$) на $[a; b]$.

8. Как вычисляется площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и непрерывной кривой $y = \varphi(x)$ ($\varphi(x) < 0$) на $[a; b]$?

9. Как вычисляется площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами?

10. Как вычисляется площадь в случае параметрического задания кривой?

Упражнения

179. Найдите всю площадь фигуры, ограниченной кривой $y = -x^4 - 13x^2 + 36$ и осью абсцисс.

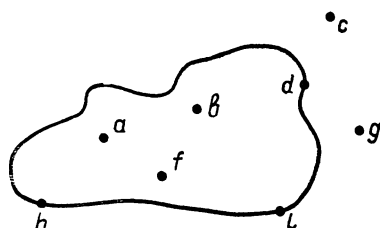


Рис. 41

180. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3 - 12x$ и осью абсцисс.

181. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = 16x, \quad y = 4x.$$

182. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой

$$x = y^2, \quad x = \frac{3}{4} y^2 + 1.$$

183. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^3 = x, y = 1, x = 8.$$

184. Вычислите площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.

185. Вычислите площадь петли кривой $y^2 = x(x - 1)^2$.

186. Найдите площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

187. Найдите площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

188. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 8$ и прямой $x + y - 9 = 0$.

189. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x\sqrt{1 - x^2}$ и осью Ox .

190. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и осью Ox .

191. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x\sqrt{3 - x}$ и осью Ox .

192. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) и осью Oy .

193. Найдите площадь фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной кривой $y = \cos^3 x + \sin^3 x$ и осями координат.

194. Вычислите площадь четверти круга $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

195. Найдите площадь области, ограниченной одной петлей кривой $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$.

196. Найдите площадь фигуры, ограниченной эволютой эллипса

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t.$$

(Эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны. Эволютой эллипса является деформированная астроида.)

197. Найдите площадь фигуры, содержащейся внутри петли

$$x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

198. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиондой

$$\begin{aligned} x &= a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t). \end{aligned}$$

199. Найдите площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, построив предварительно данную кривую.

200. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой
 $\rho = a \cos 4\varphi$.
201. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой
 $\rho = a(1 - \cos \varphi)$.
202. Найдите площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля
 $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$.
203. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2a \cos 3\varphi$ и лежащей вне круга $\rho = a$.
204. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми
 $\rho = 2 - \cos \varphi$ и $\rho = \cos \varphi$.
205. Вычислите площадь фигуры, заключенной между кривой
 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, осью Ox и прямыми $x=1$, $x=-1$. Постройте фигуру.
206. Вычислите площадь фигуры, заключенной между кривой
 $y = x^{\frac{2}{3}}$, осью Ox и прямой $x=1$.
207. Вычислите площадь фигуры, заключенной между кривой
 $y = \frac{1}{x^2}$, осью Ox и прямыми $x=1$, $x=-1$.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

1. Кубируемые тела. В этом параграфе рассмотрим вопрос о вычислении объемов тел. Начнем с простейших тел — прямоугольных параллелепипедов.

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxuz$. Пусть A — допустимый прямоугольный параллелепипед (параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат), длины ребер которого равны a , b , c . Назовем число abc объемом этого параллелепипеда и обозначим его $V(A)$, $V(A) = abc$. Очевидно, что если параллелепипед A разделен плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, на параллелепипеды B и C , то выполняется равенство

$$V(A) = V(B) + V(C).$$

Далее, если параллелепипед A' получается из параллелепипеда A параллельным переносом, то $V(A') = V(A)$. Наконец, объем куба с длиной ребра 1 равен 1.

Мы хотим распространить понятие объема на более широкий класс тел, чем класс допустимых параллелепипедов. Назовем *ступенчатым* любое тело L , которое можно представить в виде объединения конечного числа таких параллелепипедов, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек.

Пусть $L = \bigcup_{j=1}^n F_j$ — разложение ступенчатого тела на такие параллелепипеды. Положим по определению, что

$$V(L) = \sum_{j=1}^n V(F_j).$$

Это определение не зависит от того, каким способом тело L разложено на параллелепипеды.

Возьмем теперь любое тело T . Обозначим через X_T числовое множество, состоящее из объемов ступенчатых тел, целиком содержащихся в T , а через Y_T — множество объемов ступенчатых тел, содержащих T :

$$X_T = \{V \text{ внутренних ступенчатых тел}\},$$

$$Y_T = \{V \text{ внешних ступенчатых тел}\}.$$

Тогда числовое множество X_T лежит левее числового множества Y_T . В самом деле, если $x \in X_T$ и $y \in Y_T$, то $x = V(L_1)$, $y = V(L_2)$, где $L_1 \subset T \subset L_2$. Так как ступенчатое тело L_1 — часть ступенчатого тела L_2 , то $V(L_1) \leq V(L_2)$, а это и значит, что $x \leq y$.

Поскольку X_T лежит левее Y_T , то найдется хотя бы одно число, разделяющее эти множества. Если X_T и Y_T разделяются лишь одним числом, то тело T называют *кубируемым*, а число, разделяющее множества X_T и Y_T , — объемом этого тела. Его обозначают $V(T)$.

Итак, *объемом кубируемого тела* называют единственное число, разделяющее множество объемов ступенчатых тел, содержащихся в T , и множество объемов ступенчатых тел, содержащих T .

Применяя необходимое и достаточное условие единственности разделяющего числа, получаем следующее *необходимое и достаточное условие кубируемости тела*:

Для того чтобы тело T было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись ступенчатые тела L_1 и L_2 такие, что $L_1 \subset T \subset L_2$ и $V(L_2) - V(L_1) < \varepsilon$.

Объем тел обладает свойством аддитивности:

Если T_1 и T_2 — кубируемые тела, не имеющие общих внутренних точек, то их объединение $T = T_1 \cup T_2$ также кубируемо, причем выполняется равенство

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2).$$

Мы опускаем доказательство этого утверждения, поскольку оно проводится так же, как и для площадей. Отметим только, что внутренней точкой тела T называется всякая точка, которая принадлежит телу T вместе с некоторой своей окрестностью (т. е. открытым шаром с центром в данной точке).

Далее очевидно, что *если тело T кубируемо, а тело T_1 получается из T параллельным переносом, то тело T_1 также кубируемо, причем $V(T_1) = V(T)$. Можно доказать, что справедливо более общее утверждение: если тело T_1 конгруэнтно кубируемому телу T , то T_1 кубируемо и $V(T_1) = V(T)$.*

Понятие объема можно определить и аксиоматически теми же требованиями 1°—4°, что и площадь (см. с. 95). Разница состоит лишь в том, что иначе понимается условие отсутствия общих внутренних точек (окрестности берутся не на плоскости, а в пространстве) и иначе выглядит условие нормировки.

Мы будем использовать в дальнейшем следующее *достаточное условие кубирруемости* тела.

Если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие кубируемые тела T_1 и T_2 , что $T_1 \subset T \subset T_2$, причем $V(T_2) - V(T_1) < \varepsilon$, то тело T кубируемо.

2. Объем прямого цилиндрического тела. Пусть F — плоская фигура. Восставим в каждой точке этой фигуры перпендикуляр к содержащей ее плоскости и отложим на каждом перпендикуляре отрезок длины h (все отрезки располагаются по одну сторону от плоскости). Множество точек этих отрезков образует тело L , которое называется *прямым цилиндрическим телом с основанием F и высотой h* . Вторые концы построенных отрезков образуют фигуру F' , конгруэнтную основанию F и параллельную ему.

В случае, когда F — прямоугольник, прямое цилиндрическое тело является прямоугольным параллелепипедом. Если же F — ступенчатая фигура, то L — ступенчатое тело, причем оно разлагается на прямоугольные параллелепипеды, имеющие одинаковые высоты. Объем этого ступенчатого тела равен произведению площади фигуры F на высоту тела:

$$V(L) = S(F)h. \quad (1)$$

Докажем, что формула (1) остается справедливой и в более общем случае. Именно, справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 1. Если плоская фигура A квадратуема, то прямое цилиндрическое тело L с основанием A кубируемо, причем его объем равен произведению площади фигуры A на высоту тела:

$$V(L) = S(A)h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, мы можем считать, что плоскость фигуры A является координатной плоскостью Oxy . Так как по условию фигура A квадратуема, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся ступенчатые фигуры F_1 и F_2 такие, что $F_1 \subset A \subset F_2$, причем $S(F_2) - S(F_1) < \frac{\varepsilon}{h}$.

Построим ступенчатые тела L_1 и L_2 с высотой h и основаниями F_1 и F_2 . Тогда имеем:

$$L_1 \subset L \subset L_2.$$

При этом

$$\begin{aligned} V(L_2) - V(L_1) &= S(F_2)h - \\ &- S(F_1)h = h(S(F_2) - S(F_1)) < h \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся ступенчатые тела L_1 и L_2 такие, что

$$L_1 \subset L \subset L_2 \text{ и } V(L_2) - V(L_1) < \varepsilon.$$

Поэтому тело L кубируемо. При этом, как мы видели,

$$S(F_1)h < V(L) < S(F_2)h.$$

С другой стороны, из неравенств $S(F_1) < S(A) < S(F_2)$ вытекает, что

$$S(F_1)h < S(A)h < S(F_2)h.$$

Мы видим, что числа $V(L)$ и $S(A)h$ разделяют одни и те же множества, а именно $\{S(F_1)h\}$ и $\{S(F_2)h\}$, где, напомним, F_1 — ступенчатые фигуры, содержащиеся в A , а F_2 — ступенчатые фигуры, содержащие A . Но эти два множества, в силу квадратуемости A , разделяются лишь одним числом. Поэтому

$$V(L) = S(A)h.$$

Формула (1) доказана для любых квадратуемых фигур A .

3. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений.

В этом пункте мы выведем основную формулу, позволяющую выразить объем тела через площади сечений этого тела, параллельных некоторой плоскости.

О п р е д е л е н и е. Тело T назовем *регулярным*, если существует такая плоскость Π , что:

а) тело T лежит по одну сторону от этой плоскости;

б) все сечения тела T плоскостями, параллельными плоскости Π , квадратуемы;

в) площадь $S(x)$ сечения $Q(x)$, параллельного плоскости Π и отстоящего от нее на расстояние x , является непрерывной функцией от x ;

г) если $S(x_1) \leq S(x_2)$, то проекция сечения $Q(x_2)$ на плоскость Π содержит проекцию сечения $Q(x_1)$ на ту же плоскость.

Т е о р е м а 2. Если тело T регулярно, то оно кубируемо, причем его объем выражается формулой

$$V(T) = \int_a^b S(x) dx. \quad (2)$$

Здесь $S(x)$ — площадь сечения тела T плоскостью, параллельной плоскости Π и отстоящей от нее на расстояние x , a — наименьшее из расстояний точек тела T от плоскости Π , b — наибольшее из этих расстояний (см. рис. 42, где $a = 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a; b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

и на расстояниях $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ проведем плоскости, параллельные плоскости Π . Данное тело T этими плоскостями разобьется на частичные «ломтики» T_0, T_1, \dots, T_{n-1} .

Рассмотрим k -й частичный «ломтик». Его высота равна $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Так как функция $y = S(x)$ непрерывна на $[x_k; x_{k+1}]$, то она принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Наименьшее значение площади се-

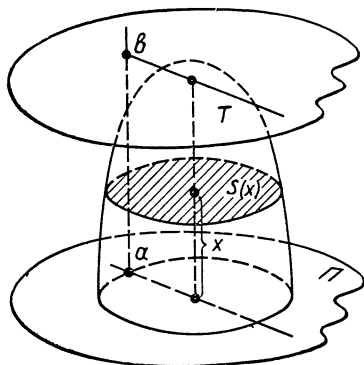


Рис. 42

чения для этого «ломтика» обозначим s_k , а наибольшее S_k . Построим два прямых цилиндрических тела с основаниями s_k и S_k . В силу условия г) регулярности тела T цилиндрическое тело с основанием s_k лежит внутри частичного «ломтика», а цилиндрическое тело с основанием S_k целиком его содержит. Объем V_k внутреннего цилиндрического тела будет

$$V_k = s_k \Delta x_k.$$

Объем V_k внешнего цилиндрического тела будет

$$V_k = S_k \Delta x_k.$$

Объединяя все внутренние и все внешние цилиндрические тела, получим два тела L_1 и L_2 такие, что $L_1 \subset T \subset L_2$. Объем тела L_1 равен

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k,$$

а объем тела L_2 равен

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k.$$

Но $\sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k$ и $\sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k$ являются нижней и верхней суммами

Дарбу для интеграла $\int_a^b S(x) dx$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[a; b]$, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k < \varepsilon,$$

т. е.

$$V(L_2) - V(L_1) < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что тело T кубируемо (см. с. 106). При этом объем тела $V(T)$ удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k \leq V(T) \leq \sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k.$$

Но, с другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k \leq \int_a^b S(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k.$$

Значит, числа $V(T)$ и $\int_a^b S(x) dx$ разделяют одни и те же числовые множества

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta x_k \right\} \text{ и } \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} S_k \Delta x_k \right\}.$$

Поскольку эти множества разделяются лишь одним числом, то

$$V(T) = \int_a^b S(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислим объем пирамиды, площадь основания которой равна S , а высота H (рис. 43).

Решение. Так как $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}$, то $S(x) = \frac{S}{H^2} x^2$.

Следовательно,

$$V = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} SH.$$

Пример 2. Вычислим объем шарового слоя, отсеченного от шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к оси абсцисс в точке x , пересекает шар по кругу радиуса $r = \sqrt{9 - x^2}$. Площадь сечения

$$S(x) = \pi r^2 = \pi (9 - x^2)$$

и, следовательно,

$$V = \pi \int_1^2 (9 - x^2) dx = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 6 \frac{2}{3} \pi.$$

4. Принцип Кавальери. Из формулы (2) п. 3 вытекает следующее утверждение, называемое *принципом Кавальери*¹.

¹ Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, ученик Галилея.

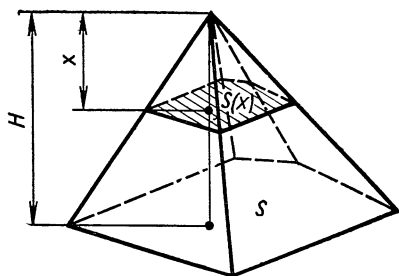


Рис. 43

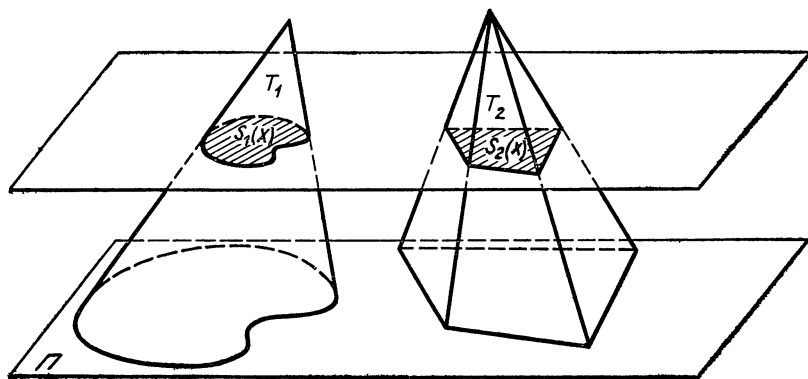


Рис. 44

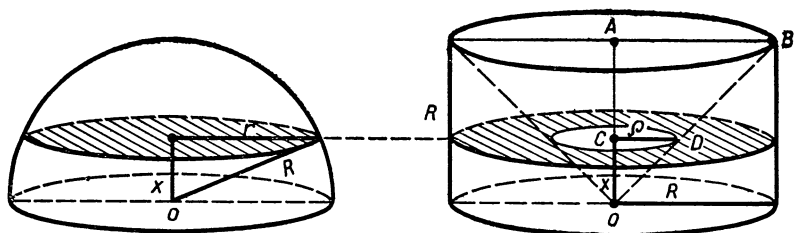


Рис. 45

Два кубируемых тела T_1 и T_2 (рис. 44), ограниченные параллельными плоскостями, имеют равные объемы, если плоские сечения, параллельные указанным плоскостям и проведенные на одинаковых расстояниях от оснований, имеют равные площади.

Доказательство. Обозначим через V_1 объем тела T_1 , а через V_2 — объем тела T_2 . Так как тела T_1 и T_2 кубируемы, то

$$V_1 = \int_a^b S_1(x) dx, \quad V_2 = \int_a^b S_2(x) dx.$$

По условию $S_1(x) = S_2(x)$, значит, и $V_1 = V_2$.

Пример 3. Покажем, что объем полушара радиуса R равен разности объемов цилиндра, радиус основания и высота которого равны R , и конуса с радиусом основания R (рис. 45).

Рассмотрим полушар. Обозначим через $S_1(x)$ площадь сечения, параллельного плоскости основания полушара, отстоящего от него на расстоянии x . Учитывая, что $r^2 = R^2 - x^2$, найдем

$$S_1(x) = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Обозначим через $S_2(x)$ площадь сечения тела (цилиндр без конуса) плоскостью, параллельной основанию цилиндра и отстоящей от него на расстоянии x : $S_2(x) = \pi R^2 - \pi \rho^2 = \pi (R^2 - \rho^2)$.

Из подобия треугольников OAB и OCD имеем: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AO|}{|CO|}$ или $\frac{R}{\rho} = \frac{R}{x}$, откуда $\rho = x$. Следовательно, $S_2(x) = \pi (R^2 - x^2)$, а потому $S_1(x) = S_2(x)$ и согласно принципу Кавальери объемы рассматриваемых тел равны.

5. Объем тела вращения. Пусть T — тело вращения, образованное вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, расположенной в верхней полуплоскости и ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$.

Докажем, что это тело вращения кубируемо и его объем выражается формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Сначала докажем, что это тело вращения регулярно, если в качестве Π выберем плоскость Oyz , перпендикулярную оси вращения. Отметим, что сечение, находящееся на расстоянии x от плоскости Oyz , является кругом радиуса $f(x)$ и его площадь $S(x)$ равна $\pi f^2(x)$ (рис. 46). Поэтому функция $S(x)$ непрерывна в силу непрерывности $f(x)$. Далее, если $S(x_1) \leq S(x_2)$, то это значит, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Но проекциями сечений на плоскость Oyz являются круги радиусов $f(x_1)$ и $f(x_2)$ с центром O , и из $f(x_1) \leq f(x_2)$ вытекает, что круг радиуса $f(x_1)$ содержится в круге радиуса $f(x_2)$.

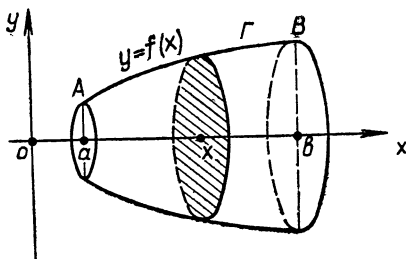


Рис. 46

Итак, тело вращения регулярно. Следовательно, оно кубируемо и его объем вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если бы криволинейная трапеция была ограничена и снизу и сверху кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, то

$$V = \pi \int_a^b y_2^2 dx - \pi \int_a^b y_1^2 dx = \pi \int_a^b (f_2(x)^2 - f_1(x)^2) dx.$$

Формулой (3) можно воспользоваться и для вычисления объема тела вращения в случае, когда граница вращающейся фигуры задана параметрическими уравнениями. В этом случае приходится пользоваться заменой переменной под знаком определенного интеграла.

В некоторых случаях оказывается удобным разлагать тела вращения не на прямые круговые цилиндры, а на фигуры иного вида.

Например, найдем объем тела, получаемого при вращении криволинейной трапеции вокруг оси ординат. Сначала найдем объем, получаемый при вращении прямоугольника с высотой y_k , в основании которого лежит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$. Этот объем равен разности объемов двух прямых круговых цилиндров

$$\Delta V_k = \pi y_k x_{k+1}^2 - \pi y_k x_k^2 = \pi y_k (x_{k+1} + x_k) (x_{k+1} - x_k).$$

Но теперь ясно, что искомый объем оценивается сверху и снизу следующим образом:

$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k \Delta x_k \leq V \leq 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} M_k x_{k+1} \Delta x_k.$$

Отсюда легко следует, что

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx. \quad (4)$$

Пример 4. Найдем объем шара радиуса R .

Решение. Не теряя общности, будем рассматривать круг радиуса R с центром в начале координат. Этот круг, вращаясь во-

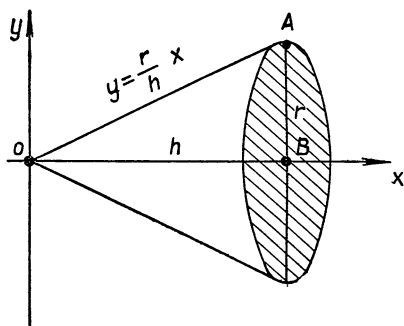


Рис. 47

круг оси Ox , образует шар. Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, поэтому $y^2 = R^2 - x^2$. Учитывая симметрию круга относительно оси ординат, найдем сначала половину искомого объема

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_{\text{ш}} &= \pi \int_0^R y^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Следовательно, объем всего шара равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Пример 5. Вычислим объем конуса, высота которого h и радиус основания r .

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с высотой h (рис. 47), а вершину конуса примем за начало координат. Тогда уравнение прямой OA запишется в виде $y = \frac{r}{h} x$.

Пользуясь формулой (3), получим:

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Пример 6. Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (рис. 48).

Решение. Построим астроида. Рассмотрим половину верхней части астроида, расположенной симметрично относительно оси ординат. Используя формулу (3) и меняя переменную под знаком определенного интеграла, найдем для новой переменной t пределы интегрирования.

Если $x = a \cos^3 t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2}$, а если $x = a \cos^3 t = a$, то $t = 0$.

Учитывая, что $y^2 = a^2 \sin^6 t$, $dx = -3a \cos^2 t \sin t dt$, получаем:

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6 t \times$$

$$\times (-3a \cos^2 t \sin t) dt =$$

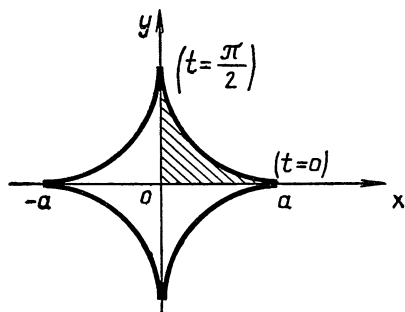


Рис. 48

$$= 3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt = 3\pi a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt \right).$$

Применяя рекуррентную формулу (см. с. 22), получаем, что

$$\begin{aligned} V &= 3\pi a^3 \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \right) = \\ &= 3\pi a^3 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} (9 - 8) = 3\pi a^3 \frac{16}{315} = \frac{16}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

Объем всего тела вращения будет $\frac{32}{105} \pi a^3$.

Пример 7. Найдем объем тела, получаемого при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4):

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx$$

и заменим переменную под знаком интеграла, учитывая, что первая арка циклоиды образуется при изменении переменной t от 0 до 2π . Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t - 2t \cos t + \\ &\quad + 2 \sin t \cos t + t \cos^2 t - \sin t \cos^2 t) dt = 2\pi a^3 \left(\frac{t^2}{2} + \cos t - \right. \\ &\quad \left. - 2t \sin t - 2 \cos t + \sin^2 t + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} \sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi a^3 \left(2\pi^2 + 1 - 2 + \pi^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - 1 + 2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Какое тело называется ступенчатым?
2. Какое тело называется кубирваемым?
3. Что называется объемом тела?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие кубирваемости тела.
5. Какими свойствами обладает объем тела?

6. Как определяется прямое цилиндрическое тело?
7. Как вычисляется объем прямого цилиндрического тела?
8. Какое тело называется регулярным?
9. Чему равен объем регулярного тела?
10. В чем состоит принцип Кавальери?
11. Какое тело называется телом вращения?
12. Как находится объем тела, полученного от вращения фигуры вокруг одной из координатных осей? Рассмотрите различные случаи задания границы данной фигуры.

Упражнения

208. Вычислите объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

209. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой H .

210. Определите объем тела, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания. Радиус основания равен R , высота тела равна H .

211. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

212. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной цепной линией

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \text{ прямыми } x = -a, x = a \text{ и осью } Ox.$$

213. Прямой параболический сегмент, длина основания которого a , а высота R , вращается вокруг основания. Определите объем полученного тела вращения.

214. Вычислите объем тела, полученного вращением астроида $\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{a^3} = \frac{z^2}{a^3}$ вокруг оси ординат.

215. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xu = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

216. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$, вокруг оси ординат.

217. Найдите объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $(y - 3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$, вокруг оси абсцисс.

218. Вычислите объем тела, полученного от вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

219. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

220. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , и дугой параболы $y = x(4 - x)$.

221. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ и прямыми $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

222. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

223. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = \frac{ax(x-3a)}{x-4a}$.

224. Круг радиуса 2 с центром в точке $(7; 0)$ вращается вокруг оси Oy . Определите объем полученного тела вращения.

225. Найдите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной дугой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox , вокруг ее основания.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ

1. Понятие спрямляемой кривой. В школьном курсе математики рассматривался вопрос о вычислении длин отрезков прямой, длины окружности, а также различных ее частей. В приложениях математики возникает потребность в вычислении длин дуг произвольных кривых. Но, чтобы вычислить длину произвольной кривой, надо быть уверенным в том, что рассматриваемая кривая имеет конечную длину.

В средней школе длиной окружности называют предел последовательности периметров вписанных в окружность правильных многоугольников (при неограниченном удвоении числа сторон). Однако это определение неприменимо к произвольным кривым.

Дадим общее определение понятия длины кривой. Пусть задана жорданова кривая Γ^1 :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b. \quad (1)$$

Напомним, что функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывны на отрезке. Разобьем отрезок $[a; b]$ на части числами

$$t_0, t_1, \dots, t_n: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Каждому числу t соответствует точка $M_h(\varphi(t_h), \psi(t_h))$ кривой Γ . Проводя отрезки $M_0M_1, \dots, M_{n-1}M_n$, получим ломаную линию γ , вписанную в кривую Γ . Обозначим ее длину через $l(\gamma)$.

¹ См.: Дифференциальное исчисление, с. 143.

О п р е д е л е н и е. Жорданова кривая (1) называется *спрямляемой* (имеющей длину), если множество $\{l(\gamma)\}$ длин вписанных в эту кривую ломаных γ ограничено сверху. Точная верхняя граница множества $\{l(\gamma)\}$ называется *длиной кривой* Γ и обозначается $l(\Gamma)$:

$$l(\Gamma) = \sup \{l(\gamma)\}. \quad (2)$$

Докажем, что длина спрямляемой кривой обладает свойством аддитивности.

Пусть жорданова кривая Γ разбита на кривые Γ_1 и Γ_2 . Если эти кривые спрямляемы, то кривая Γ спрямляема, причем $l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$.

В самом деле, пусть γ — любая ломаная, вписанная в кривую Γ , и пусть M — точка, разбивающая Γ на Γ_1 и Γ_2 . Добавляя эту точку к вершинам ломаной γ , получим ломаную γ' , длина которой не меньше длины ломаной γ , $l(\gamma') \geq l(\gamma)$. Но ломаная γ' состоит из двух частей γ_1' и γ_2' , вписанных соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2 , причем $l(\gamma_1') \leq l(\Gamma_1)$ и $l(\gamma_2') \leq l(\Gamma_2)$. Поэтому

$$l(\gamma) \leq l(\gamma') = l(\gamma_1') + l(\gamma_2') \leq l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2).$$

Это неравенство показывает, что число $l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$ является одной из верхних границ для множества $\{l(\gamma)\}$ длин ломаных, вписанных в кривую Γ . Но для любого $\varepsilon > 0$ найдутся ломаные γ_1 и γ_2 , вписанные в Γ_1 и Γ_2 , такие, что

$$l(\gamma_1) > l(\Gamma_1) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } l(\gamma_2) > l(\Gamma_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Объединяя γ_1 и γ_2 , получаем ломаную γ , вписанную в Γ и такую, что

$$l(\gamma) > l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2) - \varepsilon.$$

А это и значит, что $l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$ — точная верхняя граница множества $\{l(\gamma)\}$, т. е.

$$l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2).$$

2. Достаточное условие спрямляемости кривой. Назовем жорданову кривую Γ :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} a \leq t \leq b,$$

регулярной, если функции φ и ψ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Всякая регулярная жорданова кривая Γ спрямляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и впишем в кривую Γ ломаную, соответствующую этому разбиению. Рассмотрим одно звено $M_k M_{k+1}$ этой ломаной, $M_{k+1}(\varphi(t_{k+1}); \psi(t_{k+1}))$, $M_k(\varphi(t_k); \psi(t_k))$ (рис. 49). Длина этого звена равна

$$l_k = |M_k M_{k+1}| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \\ = \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}.$$

Но по теореме Лагранжа найдутся такие c_k и c_k^* , что

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(c_k)(t_{k+1} - t_k) = \\ = \varphi'(c_k) \Delta t_k,$$

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(c_k^*)(t_{k+1} - t_k) = \\ = \psi'(c_k^*) \Delta t_k,$$

и поэтому

$$l_k = \sqrt{(\varphi'(c_k))^2 + (\psi'(c_k^*))^2} \Delta t_k.$$

Значит, длина всей ломаной выражается формулой

$$l_{\text{лом}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(c_k))^2 + (\psi'(c_k^*))^2} \Delta t_k. \quad (3)$$

По условию производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$. Поэтому для $|\varphi'(t)|$ и $|\psi'(t)|$ на отрезке $[a; b]$ есть наибольшие значения. Обозначим их A и B :

$$\max_{a \leq t \leq b} |\varphi'(t)| = A, \quad \max_{a \leq t \leq b} |\psi'(t)| = B.$$

Но тогда

$$|\varphi'(c_k)| \leq A, \quad |\psi'(c_k^*)| \leq B,$$

а потому в силу (3)

$$l_{\text{лом}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{A^2 + B^2} \Delta t_k = \sqrt{A^2 + B^2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k.$$

Поскольку $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = b - a$, то для всех ломаных, вписанных в кривую Γ ,

$$l_{\text{лом}} \leq \sqrt{A^2 + B^2} (b - a). \quad (4)$$

Поэтому кривая Γ спрямляема.

Отметим, что из равенства (3) вытекает также оценка длины ломаной снизу:

$$l_{\text{лом}} \geq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (b - a), \quad (5)$$

где α и β — наименьшие значения для $|\varphi'(t)|$ и $|\psi'(t)|$ на отрезке $[a; b]$.

Из неравенств (4) и (5) вытекают аналогичные неравенства для длины кривой:

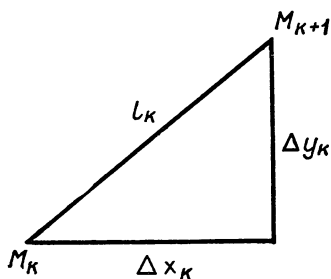


Рис. 49

$$l_{кр} \leq \sqrt{A^2 + B^2} (b - a), \quad (6)$$

$$l_{кр} \geq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (b - a). \quad (7)$$

Неравенство (7) следует из неравенства (5) и из того, что $l_{кр} \geq l_{лом}$. Чтобы доказать неравенство (6), заметим, что в силу неравенства (4) $\sqrt{A^2 + B^2} (b - a)$ является одной из верхних границ для длин вписанных в Γ ломаных, число же $l_{кр}$ — точная верхняя граница для этих длин, т. е. наименьшая из верхних границ. Отсюда и следует неравенство (6).

3. Вывод формулы длины дуги регулярной кривой.

Л е м м а. Пусть жорданова кривая регулярна и $l(t)$ — длина дуги этой кривой, ограниченной точками $M(a)$ и $M(b)$. Тогда функция $l(t)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем для всех t имеем:

$$l'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $t \in [a; b]$ и дадим t приращение Δt такое, что $t + \Delta t \in [a; b]$. Положим для определенности $\Delta t > 0$. Соответствующее приращение функции $l(t)$, т. е. $l(t + \Delta t) - l(t)$, равно длине дуги кривой, ограниченной точками $M(t)$ и $M(t + \Delta t)$. В силу неравенств (6) и (7) п. 2 имеем:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Delta t \leq \Delta l \leq \sqrt{A^2 + B^2} \Delta t,$$

где α и β — наименьшие значения функций $|\varphi'(t)|$ и $|\psi'(t)|$ на отрезке $[t; t + \Delta t]$, а A и B — наибольшие значения этих функций на том же отрезке. Но тогда

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \frac{\Delta l}{\Delta t} \leq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В силу непрерывности функций $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в точке t получаем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} A = \varphi'(t)$$

$$\text{и} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} B = \psi'(t),$$

а потому

$$l'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что

$$dl = l'(t) dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (9)$$

Так как $dx = \varphi'(t) dt$ и $dy = \psi'(t) dt$, то формулу (9) можно переписать в виде

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Геометрический смысл этой формулы ясен из рисунка 50, где Δl — участок дуги, а dl — соответствующий отрезок касательной. Мы будем называть dl дифференциалом длины дуги кривой.

Т е о р е м а 2. Если жорданова кривая Γ :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b, \end{cases}$$

регулярна, то ее длина выражается формулой

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $l'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, то $l(t)$ — первообразная для $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, а тогда $l(\Gamma)$ равна разности значений первообразной, т. е.

$$l = l(b) - l(a) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Теорема доказана.

Полученную формулу можно переписать в следующих видах:

$$l = \int_a^b dl, \quad (10')$$

$$l = \int_a^b \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \quad (10'')$$

или

$$l = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (10''')$$

П р и м е р 1. Найдем длину дуги астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данная кривая симметрична относительно обеих координатных осей (см. рис. 48), поэтому достаточно найти длину четверти дуги, расположенной в первом квадранте ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

Найдем производные:

$$x_t' = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y_t' = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Вычислим сумму:

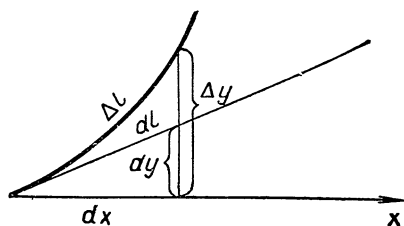


Рис. 50

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t.$$

Учитывая сказанное выше, найдем четверть длины астроида:

$$\frac{1}{4}l = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a.$$

Длина всей кривой $l = 4 \cdot \frac{3}{2}a = 6a$. Она мало отличается от $2\pi a$, т. е. от длины окружности, описанной вокруг астроида.

4. Частные случаи формулы длины кривой. Рассмотрим некоторые частные случаи общей формулы (10) п. 3. Если кривая Γ задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то ее можно представить параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

В этом случае

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11)$$

Полученную формулу записывают короче в виде

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx. \quad (11')$$

Значит,

$$dl = \sqrt{1 + y_x'^2} dx. \quad (12)$$

Пример 2. Вычислим длину дуги цепной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, взятой от точки $x = 0$ до точки $x = 1$ (рис. 51).

Решение. Найдем производную

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Вычислим подкоренное выражение

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Длина l указанного отрезка цепной линии будет

$$l = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$$

Рассмотрим теперь случай, когда кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi_0 \leq \varphi \leq \Phi$, причем функция $f(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_0; \Phi]$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$.

Так как декартовы координаты связаны с полярными координатами точек плоскости соотношениями $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, полярное уравнение данной кривой можно записать в виде параметрических уравнений:

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi;$$

отсюда находим:

$$x'_\varphi = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi; \quad y'_\varphi = f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x'^2_\varphi + y'^2_\varphi &= (f'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi - 2f'(\varphi) \cos \varphi f(\varphi) \sin \varphi + \\ &+ (f(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + (f'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + 2f'(\varphi) \sin \varphi f(\varphi) \cos \varphi + \\ &+ (f(\varphi))^2 \cos^2 \varphi = (f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2 = \rho'^2_\varphi + \rho^2. \end{aligned}$$

В силу формулы (10) п. 3 имеем:

$$l = \int_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2} d\varphi. \quad (13)$$

Пример 3. Вычислим длину кардиониды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. Данная функция ρ четная, следовательно, кривая расположена симметрично относительно полярной оси (рис. 52). Поэтому сначала найдем половину длины дуги данной кривой, для которой полярный угол φ изменяется от 0 до π , после чего удвоим полученный результат:

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho'^2_\varphi + \rho^2} d\varphi = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 8a. \end{aligned}$$

Из формулы (13) получаем выражение для дифференциала дуги, заданной полярным уравнением

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}. \quad (14)$$

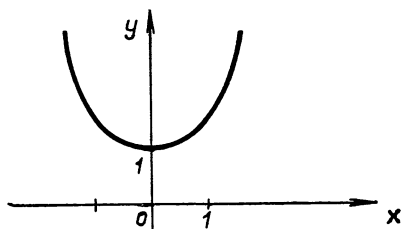


Рис. 51

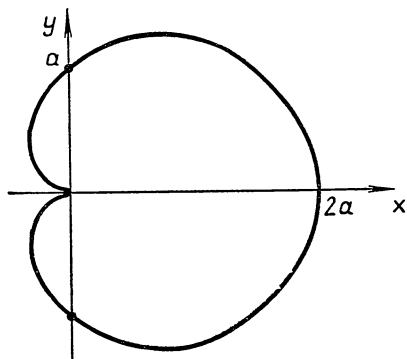


Рис. 52

(например, любая ломаная спрямляема, но не регулярна, так как имеет точки излома). Чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие спрямляемости кривой, нам понадобится понятие: функция с ограниченным изменением.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$, и произвольное разбиение P этого отрезка:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Для каждого частичного промежутка $[x_k; x_{k+1}]$ разбиения P образуем разность $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ — приращение функции на этом промежутке. Эта разность может быть как положительной, так и отрицательной. Заменяем все эти разности их модулями и сложим их. Получим сумму

$$V_{a,P}^b(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Полученная сумма называется *изменением функции* $y = f(x)$, соответствующим разбиению P отрезка $[a; b]$.

Рассмотрим множество $\{V_{a,P}^b(f)\}$ изменений функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, соответствующих всевозможным разбиениям отрезка $[a; b]$. Если это множество ограничено сверху, то говорят, что *функция* $y = f(x)$ *имеет ограниченное изменение на отрезке* $[a; b]$, а точную верхнюю границу этого множества называют *изменением функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$ и обозначают $V_a^b(f)$. Таким образом,

$$V_a^b(f) = \sup_P \{V_{a,P}^b(f)\}.$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие спрямляемости жордановой кривой.

Теорема 3. Для того что-

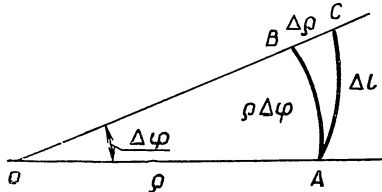


Рис. 53

Геометрическую иллюстрацию этой формулы дает рисунок 53. На этом рисунке AC — дуга рассматриваемой кривой, AB — дуга окружности с центром в точке O и радиусом ρ , $\rho \Delta \varphi$ — длина дуги AB . Заменяя $\rho \Delta \varphi$, $\Delta \rho$ и Δl соответственно на $\rho d\varphi$, $d\rho$ и dl ; рассматриваем криволинейный треугольник ABC как прямоугольный с катетами $\rho d\varphi$ и $d\rho$ и гипотенузой dl . Тогда

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}.$$

5. Необходимое и достаточное условие спрямляемости кривой. Данное в п. 2 условие спрямляемости кривой является достаточным, но не необходимым

бы жорданова кривая Γ :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b,$$

была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы непрерывные функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имели ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Покажем сначала, что ограниченность изменения функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ на отрезке $[a; b]$ является необходимым условием спрямляемости кривой Γ . В самом деле, если кривая Γ спрямляема, то множество $\{l(\gamma)\}$ длин вписанных в нее ломаных ограничено сверху некоторым числом M . Это означает, что для любой вписанной в Γ ломаной имеем:

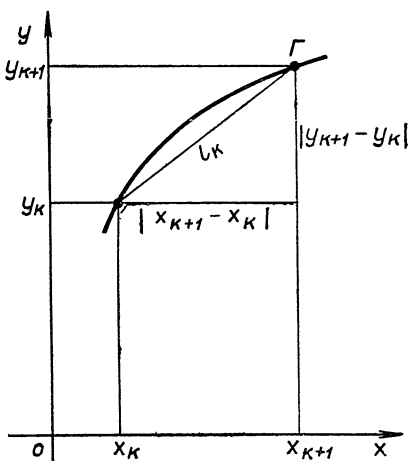


Рис. 54

$$l(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k \leq M.$$

Но из рисунка 54 видно, что $l_k \geq |x_{k+1} - x_k|$ и $l_k \geq |y_{k+1} - y_k|$, а потому $l(\gamma) \geq \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k|$ и $l(\gamma) \geq \sum_{k=0}^{n-1} |y_{k+1} - y_k|$.

Эти неравенства можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq l(\gamma) \leq M$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)| \leq l(\gamma) \leq M.$$

Они показывают, что для любого разбиения P отрезка $[a; b]$ имеем $V_{a, P}^b(\varphi) \leq M$ и $V_{a, P}^b(\psi) \leq M$, т. е. функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$.

Теперь докажем, что если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[a; b]$, то кривая Γ спрямляема на этом отрезке. В самом деле, в этом случае существует такое число M , что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| \leq M$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)| \leq M.$$

Иными словами,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \leq M$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} |y_{k+1} - y_k| \leq M.$$

Но из рисунка 54 видно, что

$$l_k \leq |x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k|.$$

Поэтому для любой ломаной γ , вписанной в кривую Γ , имеем:

$$l(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k|) \leq 2M.$$

Значит, множество $\{l(\gamma)\}$ ограничено сверху числом $2M$, и потому кривая Γ спрямляема.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется спрямляемой кривой?
2. Что называется длиной дуги?
3. Всякая ли кривая имеет конечную длину?
4. Сформулируйте достаточное условие спрямляемости жордановой кривой.
5. Докажите, что окружность — спрямляемая кривая.
6. Можно ли утверждать, что график функции

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

спрямляем на отрезке $[-1; 1]$?

7. В чем состоит критерий спрямляемости жордановой кривой?
8. Как вычисляется длина дуги регулярной жордановой кривой?
9. Напишите формулу для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной явным уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ имеет непрерывную на $[a; b]$ производную $f'(x)$.
10. Напишите аналогичную формулу для кривой, уравнение которой $x = \varphi(y)$. Каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi(y)$?
11. На чем основан вывод формулы дифференциала дуги?

12. Напишите формулу для вычисления длины дуги кривой в полярных координатах.

13. Что такое дифференциал дуги? Напишите соответствующие формулы и укажите их геометрический смысл.

14. Какую из функций $f(x)$, определяемую на $[a; b]$, называют функцией с ограниченным изменением на этом отрезке?

15. Приведите пример функции с ограниченным изменением на $[a; b]$.

16. Будет ли алгебраическая сумма конечного числа монотонных на $[a; b]$ функций являться функцией с ограниченным изменением на этом отрезке? Поясните свое утверждение.

17. Докажите, что функция, имеющая на промежутке $]a; b[$ ограниченную производную, обладает на отрезке $[a; b]$ ограниченным изменением.

Упражнения

226. Вычислите длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ от точки $M(0; 1)$ до точки $N\left(\frac{\pi}{4}; \ln e\sqrt{2}\right)$.

227. Найдите длину дуги OA параболы $y^2 = 8x$, где $O(0; 0)$, $A(2; 4)$.

228. Вычислите длину дуги кривой $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

229. Найдите длину дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

230. Найдите длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, заключенной между прямыми $y = 1$ и $y = 2$.

231. Найдите длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$.

232. Найдите длину дуги кривой $9y^2 = x(x - 3)^2$, заключенной между точками пересечения с осью Ox .

233. Найдите периметр фигуры, ограниченной линиями $x^2 = (y + 1)^3$ и $y = 4$.

234. Найдите длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$, заключенной между прямыми $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$.

235. Найдите длину кривой, заданной уравнением

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos x} dx.$$

236. Вычислите длину дуги эволюты круга $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

237. Найдите длину дуги кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

238. Найдите длину кривой $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

239. Вычислите длину окружности $\rho = 2a \cos \varphi$.

240. Вычислите длину кривой $\rho = a \cos^4 \frac{\varphi}{4}$.

241. Найдите длину дуги кривой $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

§ 4. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Под кривизной линии понимают степень ее отклонения от прямой. Не давая пока точных определений, заметим, что чем больше радиус окружности, тем менее она искривлена, тем больше ее участок заданной длины l напоминает отрезок прямой той же длины. При этом окружность одинаково искривлена во всех точках. В то же время парабола наиболее искривлена в ее вершине, а по мере удаления от вершины кривизна становится меньше.

Чтобы дать точное определение кривизны, рассмотрим гладкую дугу Γ . Если бы эта дуга не была искривлена, т. е. если бы она была отрезком прямой линии, то касательные в начале и конце дуги имели бы одинаковое направление (совпадающее с направлением отрезка). Таким образом, за меру искривленности данной дуги в целом следует принять угол поворота касательной к этой дуге при движении от начала дуги к ее концу. Например, для полуокружности этот угол равен π (рис. 55), для всей окружности он равен 2π , а для дуги синусоиды, изображенной на рисунке 56, этот угол равен нулю, так как при обходе дуги касательная возвращается в исходное положение, не сделав при этом полного оборота.

Угол поворота касательной считают положительным, если вращение происходит против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае.

Однако угол поворота касательной показывает лишь полную искривленность линии. Поэтому полуокружности малого и боль-

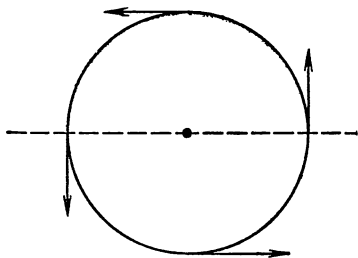


Рис. 55

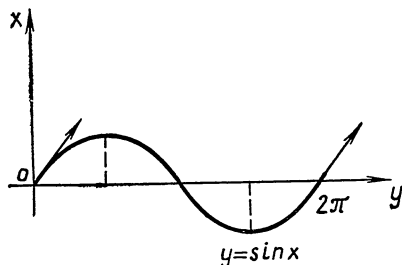


Рис. 56

шого радиусов дают один и тот же угол поворота π , в то время как искривленность большой окружности в каждой точке меньше, чем малой. Это показывает, что нам надо учитывать не только угол поворота φ , но и длину дуги, на протяжении которой получился этот поворот касательной. Иными словами, следует рассчитывать угол поворота на единицу длины дуги, или, иначе, отношение величины этого угла φ к длине l дуги. Назовем это отношение *средней кривизной* данной дуги:

$$k_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{l}.$$

Например, длина полуокружности радиуса R равна πR , а соответствующий ей угол поворота равен π . Значит, *средняя кривизна полуокружности равна*

$$k_{\text{ср}} = \frac{\pi}{\pi R} = \frac{1}{R},$$

т. е. *обратно пропорциональна радиусу*. Очевидно, что тот же результат получился бы, если бы мы взяли любую другую дугу окружности радиуса R .

Мы уже говорили, что, вообще говоря, кривизна данной линии различна в разных точках. Поэтому надо перейти от средней кривизны дуги к ее кривизне в данной точке. Введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е. *Кривизной k дуги кривой Γ в данной точке M называется предел средней кривизны дуги MM' , когда длина Δl этой дуги стремится к нулю:*

$$k = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta l}$$

(разумеется, если этот предел не существует, то кривизна линии в данной точке не определена).

Перейдем к выводу расчетной формулы для кривизны. Выберем декартову систему координат (рис. 57). Из рисунка видно, что угол между касательными в точках A и B равен разности углов BQx и ATx , т. е. углов наклона касательных в этих точках к оси абсцисс. Это можно записать следующим образом:

$$\varphi = \Delta \alpha,$$

где α — угол наклона касательной (AT) к оси абсцисс. Поэтому формулу для кривизны можно переписать так:

$$k = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta l} = \frac{d\alpha}{dl} \quad (1)$$

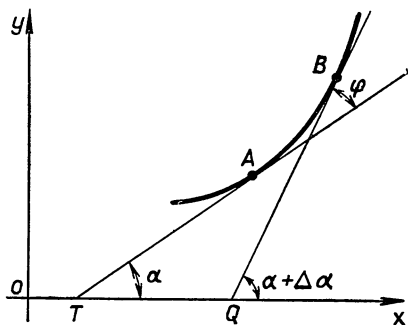


Рис. 57

Мы доказали, что кривизна k дуги кривой является производной угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс по длине дуги.

Пусть кривая Γ задана уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, где функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Тогда эта кривая спрямляема и имеет касательную в любой точке. При этом

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

а так как $\operatorname{tg} \alpha = y'$, то $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, и потому

$$d\alpha = \frac{d(y')}{1 + (y')^2} = \frac{y'' dx}{1 + (y')^2}.$$

Следовательно,

$$k = \frac{d\alpha}{dl} = \frac{y'' dx}{1 + (y')^2} : \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Итак,

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Пример 1. Найдём кривизну гиперболы $y = \frac{5}{x}$ в точке $A(1; 5)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2) кривизны кривой:

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имеем:

$$y' = -\frac{5}{x^2}, \quad y'' = \frac{10}{x^3}.$$

Вычислим значения производных в данной точке $A: y'(1) = -5$, $y''(1) = 10$. Таким образом,

$$k = \frac{10}{(1 + 25)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{13\sqrt{26}}.$$

Пример 2. Найдём наибольшую кривизну линии

$$y = ax^3, \quad x \in [0; \infty[.$$

Решение. Мы имеем:

$$y' = 3ax^2, \quad y'' = 6ax, \quad k = \frac{6ax}{(1 + 9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Чтобы найти наибольшее значение кривизны, вычислим $k' = \frac{dk}{dx}$:

$$k' = \frac{6a(1 - 45a^2x^4)}{(1 + 9a^2x^4)^{\frac{5}{2}}}.$$

Приравнивая производную нулю, получаем:

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{45a^2}}.$$

В этой точке $k = \frac{5}{3} \sqrt[4]{\frac{5a^2}{4}}$. Отметим, что при $x = 0$ имеем $k = 0$, а при $x \rightarrow \infty$ будет $k \rightarrow 0$. Поэтому вдоль кривой $y = ax^3$ кривизна плавно возрастает от нуля до $\frac{5}{3} \sqrt[4]{\frac{5a^2}{4}}$, а потом плавно убывает. Это используется при строительстве железных дорог для построения переходных кривых, вдоль которых кривизна плавно возрастает от нуля до требуемого значения.

Вопросы для самопроверки

1. Как находится средняя кривизна кривой?
2. Что называется кривизной кривой в данной на ней точке?
3. Чему равна кривизна прямой?
4. Чему равна кривизна окружности радиуса R ?
5. Напишите формулу для вычисления кривизны кривой, заданной явным уравнением $y = f(x)$.

Упражнения

Найдите кривизну следующих кривых в указанных точках:

242. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в начале координат.

243. $y = \ln x$ в точке пересечения кривой с осью Ox .

244. $y = x^3$ в начале координат. Можно ли было предвидеть полученный результат?

§ 5. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть даны прямая m и кривая Γ , лежащая в одной плоскости с m и расположенная по одну сторону от этой прямой. При вращении кривой Γ вокруг оси m получается поверхность λ , площадь которой мы и хотим сначала определить, а потом вычислить¹ (см. рис. 46).

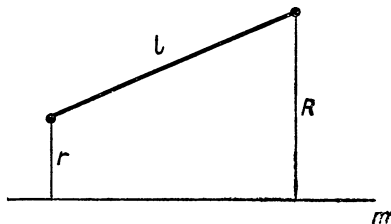


Рис. 58

¹ Общее же определение понятия площади «кривой» (т. е. неплоской) поверхности довольно сложно. В окончательном виде оно было дано лишь в начале XX в. французским математиком А. Лебегом (1875—1941).

Начнем со случая, когда Γ — отрезок, один конец которого отстоит от m на r , а другой — на R (рис. 58). Тогда, как доказывалось в школьном курсе геометрии, площадь поверхности вращения (боковой поверхности усеченного конуса) выражается формулой

$$P(\lambda) = \pi(r + R)l.$$

В этом случае при $r \leq R$ имеем:

$$2\pi rl \leq P(\lambda) \leq 2\pi Rl. \quad (1)$$

Таким образом, боковая поверхность конуса заключена между произведением длины образующей на длину наименьшей окружности и произведением длины образующей на длину наибольшей окружности.

То же самое неравенство будет иметь место и при вращении любой ломаной линии, расположенной по одну сторону от оси вращения:

$$2\pi rl \leq P(\lambda) \leq 2\pi Rl, \quad (2)$$

где r и R — наименьшее и наибольшее расстояния точек ломаной от оси m , l — длина ломаной.

Для доказательства достаточно применить неравенство (1) к каждому звену ломаной, сложить полученные результаты и учесть что $\sum l_k = l$ и для любого звена имеем $r \leq r_k$ и $R_k \leq R$ (здесь r_k и R_k — наименьшее и наибольшее расстояния точек k -го звена от оси вращения).

Естественно потребовать, чтобы неравенства (2) выполнялись для любой спрямляемой кривой. Кроме того, потребуем, чтобы площадь поверхности вращения обладала свойством аддитивности: при разбиении дуги Γ на части $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ должно выполняться равенство

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega_k), \quad (3)$$

где λ — поверхность, полученная при вращении всей дуги Γ , а ω_k — при вращении части γ_k .

Если применить к каждой части ω_k неравенства (2), то получим, что

$$2\pi r_k l_k \leq P(\omega_k) \leq 2\pi R_k l_k,$$

где $l_k = l(\gamma_k)$ — длина дуги γ_k , а r_k и R_k — наименьшее и наибольшее расстояния точек этой дуги γ_k от оси вращения. Складывая эти неравенства и учитывая требование аддитивности, получаем, что

$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} r_k l_k \leq P(\lambda) \leq 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} R_k l_k. \quad (4)$$

Иными словами, площадь поверхности вращения должна разделять множества

$$\left\{ 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} r_k l_k \right\} \text{ и } \left\{ 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} R_k l_k \right\}.$$

Именно это требование мы и примем за определение площади поверхности вращения.

Если Γ — плоская спрямляемая кривая, лежащая по одну сторону от оси t , то *площадью поверхности λ* , получаемой при вращении этой кривой вокруг оси t , называется число $P(\lambda)$, разделяющее множества

$$\left\{ 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} r_k l_k \right\} \text{ и } \left\{ 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} R_k l_k \right\},$$

соответствующие всевозможным разбиениям дуги Γ . Здесь r_k , R_k и l_k имеют указанный выше смысл.

Докажем сейчас, что это число существует и единственно, а затем выведем для него выражение в виде интеграла. Выберем на плоскости систему координат, такую, что ось абсцисс совпадает с осью вращения. Зададим параметризацию кривой Γ , выбрав в качестве параметра длину l дуги AM , соединяющей в заданном направлении фиксированную точку A кривой Γ с произвольной точкой M этой кривой (рис. 59). Тогда r_k и R_k будут наименьшими и наибольшими значениями ординаты для точек части γ_k .

Поэтому суммы, стоящие в неравенствах (4) слева и справа, являются не чем иным, как суммами Дарбу для интеграла $2\pi \int_0^L y(l) dl$,

где через L обозначена длина всей кривой Γ . Поскольку функция $y(l)$ непрерывна в силу непрерывности кривой Γ , то существование и единственность числа, разделяющего эти суммы Дарбу, вытекают из теоремы существования интеграла от непрерывной функции. При этом мы доказали, что *площадь поверхности вращения, т. е. число $P(\lambda)$, разделяющее эти суммы, равняется интегралу:*

$$P(\lambda) = 2\pi \int_0^L y(l) dl. \quad (5)$$

Из формулы (5) получаются различные частные случаи в зависимости от того, как задана кривая Γ . Если она задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T,$$

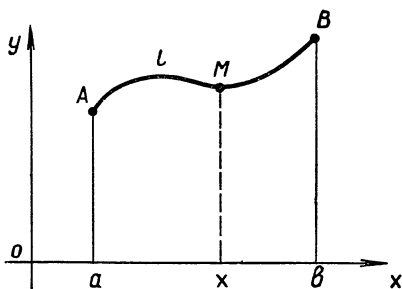


Рис. 59

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

и формула (5) принимает вид:

$$P(\lambda) = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (6)$$

(когда l меняется от 0 до L , переменная t меняется от t_0 до T).

В частности, если кривая Γ задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$P(\lambda) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (7)$$

Если кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi_0 \leq \varphi \leq \Phi$, а функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на $[\varphi_0; \Phi]$, то, учитывая, что $y = \rho \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi$, а $dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$, получим:

$$P = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\Phi} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi. \quad (8)$$

Пример 1. Найдем площадь поверхности шара радиуса R .

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Будем рассматривать поверхность шара как поверхность, полученную в результате вращения полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox . Тогда площадь поверхности шара найдется по формуле

$$P = 2\pi \int_{-R}^R y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Так как $y = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ — функция четная, то

$$P = 4\pi \int_0^R y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Найдя $y' = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и вычислив сумму

$$1 + (y')^2 = 1 + x^2(R^2 - x^2)^{-1} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

получим:

$$P = 4\pi \int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} R (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R x \Big|_0^R = 4\pi R^2.$$

Пример 2. Вычислим площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг Ox .

Решение. Найдем $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$.
Тогда

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Искомая площадь поверхности равна

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \left(-2\cos \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

Пример 3. Найдем площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение. Имеем:

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \rho'_{\varphi} = \frac{-a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Поэтому

$$\rho^2 + \rho'^2_{\varphi} = a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = a^2 \left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} \right) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Пользуясь формулой (8) для вычисления площади поверхности в полярных координатах, найдем сначала половину искомой площади поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \pi a^2 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Вся площадь P данной поверхности будет равна

$$P = 2(2 - \sqrt{2}) \pi a^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение площади поверхности тела вращения.
2. Напишите формулу для вычисления площади поверхности тела, образованного вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox .
3. Напишите формулу для вычисления площади поверхности тела, образованного вращением кривой $x = \varphi(y)$ вокруг оси Oy .

4. Как вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y = \varphi(x)$, сверху кривой $y = \psi(x)$, а с боков прямыми $x = a$, $x = b$ вокруг оси Ox ?

5. Как вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями, вокруг оси Ox ? Каким условиям должны удовлетворять функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$?

6. Как вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением кривой, заданной полярным уравнением $\rho = f(\varphi)$, вокруг полярной оси? Какому условию должна удовлетворять функция $\rho = f(\varphi)$?

Упражнения

245. Вычислите площадь поверхности конуса с высотой h и радиусом r .

246. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

247. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox .

248. Найдите площадь поверхности тора, образованного вращением круга $x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$ вокруг оси Ox .

249. Найдите площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

250. Найдите площадь поверхности шаровой чаши, полученной при вращении круга $x^2 + y^2 - 2rx \leq 0$ вокруг оси Ox в пределах от 0 до h .

251. Найдите площадь поверхности катеноида, образованного вращением вокруг оси абсцисс цепной линии $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, взятой в пределах от точки $x = -a$ до точки $x = a$ ($a > 0$).

252. Найдите площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Oy .

253. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

254. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ вокруг оси Ox .

255. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = 9t^2$, $y = 3t - 9t^3$ вокруг оси Ox .

256. Найдите площадь поверхности, полученной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

257. Найдите площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho = 2a \sin \varphi$ вокруг полярной оси.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести материальной кривой.

а) Пусть материальная точка A массы m отстоит от оси l на расстоянии d . Статическим моментом этой точки относительно оси l называют число md . Статическим моментом системы материальных точек A_1, \dots, A_n , расположенных по одну сторону от оси l , массы которых равны m_1, \dots, m_n , а расстояния от оси l равны d_1, \dots, d_n , называют число

$$S_l = \sum_{k=1}^n m_k d_k.$$

Если же эти точки расположены по разные стороны от оси, то для точек, находящихся по одну сторону от оси, расстояния берутся положительными, а для точек по другую сторону от оси — отрицательными.

Поэтому если точки A_1, \dots, A_n расположены на координатной плоскости, $A_k = A_k(x_k; y_k)$, то $S_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k$ и $S_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k$ (S_x — статический момент относительно оси Ox ; S_y — относительно оси Oy).

б) Рассмотрим теперь случай, когда масса равномерно распределена по некоторой кривой Γ или по некоторой области λ . Будем считать, что плотность распределения равна единице. Тогда масса дуги численно равна ее длине, а масса области — ее площади.

Начнем со случая кривой линии Γ , задаваемой уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем предположим, что функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна.

Как обычно, разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и обозначим через m_k и M_k наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ ¹. Этому разбиению соответствует разбиение дуги Γ на части $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ (рис. 60). Из физических соображений ясно, что статический момент S_k части γ_k относительно оси абсцисс заключен между $m_k l_k$ и $M_k l_k$, где l_k — длина этой части, $l_k = l(\gamma_k)$ (напомним, что мы положили линейную плотность дуги равной единице). Таким образом,

$$m_k l_k \leq S_k \leq M_k l_k.$$

Поэтому

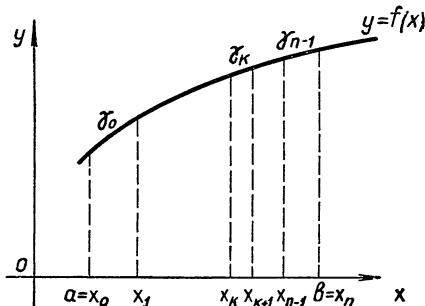


Рис. 60

¹ Не следует смешивать значения m_k и M_k с массой.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k l_k \leq S_x \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k l_k,$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+(y')^2} dx \leq S_x \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+(y')^2} dx.$$

Так как на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$m_k \sqrt{1+(y')^2} \leq y \sqrt{1+(y')^2} \leq M_k \sqrt{1+(y')^2},$$

то в тех же границах, что и S_x , заключен интеграл $\int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx$.

Значит,

$$S_x = \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx. \quad (1)$$

Этот интеграл обозначают также следующим образом:

$$\int_{\Gamma} y \, dl \quad \text{или} \quad \int_0^l y \, dl.$$

Физики обычно заменяют проведенное рассуждение более коротким. Они берут «бесконечно малый участок дуги» dl . Его статический момент равен ydl . А статический момент всей дуги равен сумме элементарных статических моментов, т. е. $\int_a^b y \, dl$. Преимуществом этого вывода является его наглядность. Однако в нем не определено, что такое «бесконечно малый участок дуги», или как еще говорят, «элемент дуги». При уточнении этого понятия мы вновь приходим к более длинному выводу, изложенному ранее. В дальнейшем для краткости изложения мы будем использовать принятый в физике метод рассуждений. С его помощью сразу выводим, что

$$S_y = \int_a^b x \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^l x \, dl. \quad (2)$$

Как формула (1), так и формула (2) верны и в случае, когда кривая Γ пересекает оси координат.

в) Введем понятие центра тяжести.

О п р е д е л е н и е. *Центром тяжести* тела называется такая точка C , что если в ней сосредоточить всю его массу, то статический момент этой точки относительно любой оси будет равен статическому моменту всего тела относительно той же оси.

Обозначим через ξ и η расстояния центра тяжести кривой от осей ординат и абсцисс.

Тогда, пользуясь определением центра тяжести кривой, получим:

$$S_x = l\eta = \int_0^l y \, dl; \quad S_y = l\xi = \int_0^l x \, dl.$$

Разрешая полученные равенства относительно ξ и η , найдем координаты центра тяжести плоской кривой Γ :

$$\xi = \frac{1}{l} \int_0^l x \, dl; \quad \eta = \frac{1}{l} \int_0^l y \, dl.$$

З а м е ч а н и е. Если кривая расположена симметрично относительно некоторой прямой, то центр тяжести такой кривой находится на этой прямой.

Это замечание позволяет в некоторых случаях упростить нахождение координат центра тяжести плоской кривой.

П р и м е р 1. Найдем статический момент полуокружности относительно диаметра.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а диаметр, относительно которого мы ищем статический момент, совпал с осью Ox . Тогда статический момент полуокружности относительно диаметра выразится формулой

$$S_x = \int_0^l y \, dl,$$

где $dl = \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$ — дифференциал дуги кривой $y = f(x)$.

В выбранной системе координат уравнение полуокружности запишется так:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Тогда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

и потому $dl = \frac{R \, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Следовательно,

$$S_x = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx = 2R \int_0^R dx = 2Rx \Big|_0^R = 2R^2.$$

П р и м е р 2. Найдем центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположенной в первом квадранте.

Р е ш е н и е. Данная кривая расположена симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла, следовательно,

центр тяжести этой кривой лежит на биссектрисе, а потому $\xi = \eta$. Достаточно найти только ξ , пользуясь формулой

$$\xi = \frac{1}{l} \int_0^l x \, dl.$$

Вычисление проще провести, перейдя к параметрическим уравнениям окружности. Так как ее радиус равен двум, то для четверти окружности имеем:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$x'_t = -2 \sin t, \quad y'_t = 2 \cos t,$$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \, dt = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \, dt = 2 \, dt.$$

Поскольку длина l четверти данной окружности равна $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$, то

$$\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \, 2 \, dt = \frac{4}{\pi} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Вычисление статических моментов и координат центров тяжести плоских фигур. Найдем статический момент прямоугольника со сторонами k и l относительно стороны k . Разобьем этот прямоугольник на элементарные прямоугольники, имеющие стороны k и dy (рис. 61). Масса элементарного прямоугольника равна его площади kdy (напомним, что по предположению плотность распределения массы равна единице). Поэтому элементарный статический момент равен $ky \, dy$, а статический момент всего прямоугольника равен

$$\int_0^l ky \, dy = \frac{ky^2}{2} \Big|_0^l = \frac{kl^3}{2}. \quad (1)$$

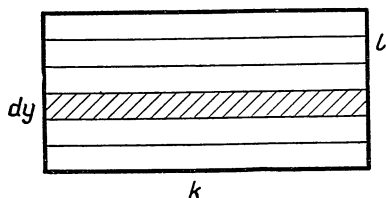


Рис. 61

Теперь уже легко найти статический момент криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная функция на отрезке $[a; b]$, снизу осью абсцисс, а с боков прямыми $x = a$, $x = b$.

Разобьем криволинейную трапецию на элементарные прямоугольники, основание каждого из которых равно dx и высота y . Статический момент такого прямоугольника относительно оси абсцисс по формуле (1) равен $\frac{y^2 dx}{2}$, а потому статический момент

всей криволинейной трапеции равен $\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$. В случае когда не выполняется предположение о неотрицательности функции $y = f(x)$, эту формулу надо заменить такой:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b y |y| dx$$

(части фигуры, расположенные ниже оси абсцисс, дают отрицательный вклад в S_x).

Поскольку по предположению плотность равна единице, то масса криволинейной трапеции равна ее площади, т. е. интегралу $\int_a^b |y| dx$, а потому ордината центра тяжести этой трапеции выражается формулой

$$\eta = \frac{\int_a^b y |y| dx}{2 \int_a^b |y| dx}.$$

Нетрудно найти и статический момент криволинейной трапеции относительно оси ординат. Для этого достаточно заметить, что расстояние элементарного прямоугольника от этой оси равно x . Поэтому его статический момент равен $x |y| dx$, а статический момент всей трапеции выражается формулой

$$S_y = \int_a^b x |y| dx.$$

Следовательно, абсцисса центра тяжести выражается так:

$$\xi = \frac{\int_a^b x |y| dx}{\int_a^b |y| dx}.$$

Пример 3. Найдем статический момент (относительно оси Ox) фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Так как параметр t одной арки циклоиды изменяется от 0 до 2π , то

$$S_x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t) dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \frac{a^3}{2} \left(t - 3 \sin t + \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \left(\sin t - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2} \left(2\pi + \frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) = \frac{5}{2} \pi a^3.$$

Пример 4. Найдем центр тяжести фигуры, ограниченной осью Ox и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Так как фигура под полуволной синусоиды расположена симметрично относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то центр тяжести лежит на этой прямой и, следовательно, $\xi = \frac{\pi}{2}$. Ордината η центра тяжести находится по формуле

$$\eta = \frac{1}{2S} \int_0^{\pi} y^2 dx.$$

Так как

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2,$$

то

$$\eta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{8}.$$

Итак, центр тяжести данной фигуры находится в точке $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} \right)$.

Пример 5. Найдем центр тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Данная фигура расположена симметрично относительно прямой $x = \pi a$, следовательно, центр тяжести ее находится на этой прямой, и потому $\xi = \pi a$. Найдем η по формуле

$$\eta = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx.$$

Площадь S данной фигуры была вычислена раньше, она равна $3\pi a^2$. Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{6\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{6} a.$$

Центр тяжести данной фигуры находится в точке $(\pi a; \frac{5}{6}a)$.

3. Теоремы Гульдина—Паппа. Выведем теоремы, связывающие площадь поверхности (соответственно, объем тела) вращения с центром тяжести вращающейся дуги (соответственно, криволинейной трапеции).

Пусть поверхность λ образована вращением дуги Γ , имеющей длину l . Мы знаем, что ордината центра тяжести этой дуги выражается формулой

$$\eta = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{l}.$$

Так как площадь поверхности вращения выражается интегралом

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

то из этого равенства следует, что

$$P = 2\pi \eta l.$$

Мы доказали следующее утверждение, называемое *первой теоремой Гульдина — Паппа*¹.

Площадь поверхности, полученной от вращения кривой вокруг непересекающей ее оси, равна произведению длины l дуги этой кривой на длину окружности, описанной центром тяжести S этой кривой.

Аналогично, из формулы, выражающей ординату центра тяжести криволинейной трапеции

$$\eta = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2S}$$

и формулы объема тела вращения

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

получаем $V = S \cdot 2\pi \eta$, т. е. следующее утверждение, называемое *второй теоремой Гульдина — Паппа*:

Объем тела, полученного от вращения плоской фигуры вокруг непересекающей ее оси, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.

¹ Впервые эта теорема упоминается в работе древнегреческого математика Паппа, жившего в III в. н. э. В XVII в. она была вновь открыта швейцарским математиком Гульдином.

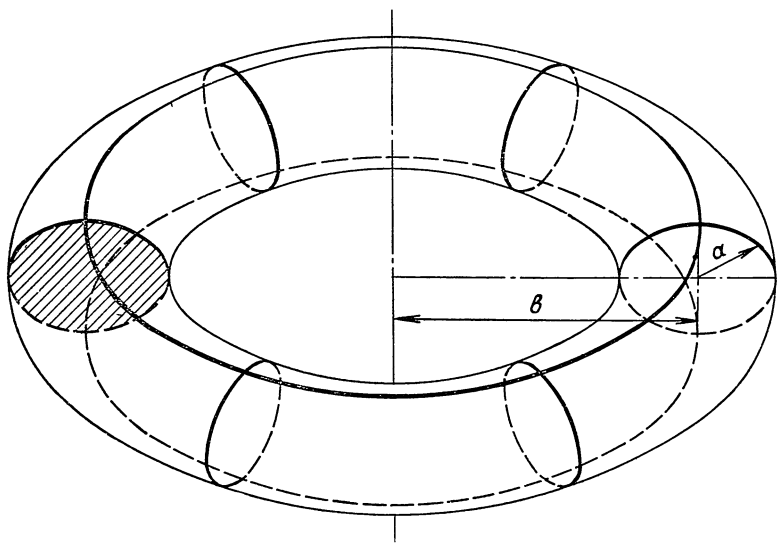


Рис. 62

Пользуясь этими двумя теоремами, можно в ряде случаев упростить процесс вычисления поверхности или объема тела вращения.

Пример 6. Пользуясь теоремой Гульдина — Паппа, вычислим площадь поверхности и объем тора (рис. 62), образованного вращением круга радиуса a вокруг оси, расположенной в его плоскости и отстоящей от центра его на расстоянии b ($a < b$).

Решение. Так как длина данной окружности равна $2\pi a$, а длина окружности, описанной центром тяжести ее, равна $2\pi b$, то поверхность тора по первой теореме Гульдина — Паппа равна:

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

Объем тора равен:

$$V = \pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

Пример 7. Длина одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ равна $8a$, а площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox , равна $\frac{64}{3}\pi a^2$. Вычислим пло-

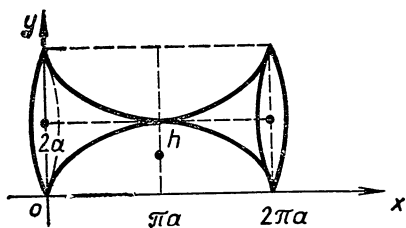


Рис. 63

щадь поверхности, образованной вращением той же арки циклоиды вокруг касательной в верхней ее точке (рис. 63).

Решение. Пусть η — расстояние центра тяжести дуги от оси Ox , тогда по первой теореме Гульдина — Паппа

$$\frac{64}{3} \pi a^2 = 8a \cdot 2\pi\eta,$$

откуда

$$\eta = \frac{4}{3} a.$$

Наибольшая ордината кривой соответствует $t = \pi$ и равна $2a$, причем касательная в этой точке параллельна оси Ox ; следовательно, расстояние h центра тяжести от этой касательной равно

$$2a - \frac{4}{3} a = \frac{2}{3} a.$$

Таким образом, площадь поверхности, образованной вращением той же арки циклоиды вокруг касательной в верхней ее точке, равна

$$S = 8a \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} a = \frac{32}{3} \pi a^2.$$

Пример 8. Найдём объём тела, полученного от вращения квадрата со стороной a вокруг оси Ox , если он расположен так, как показано на рисунке 64.

Решение. Центр тяжести C квадрата находится на пересечении его диагоналей. Обозначим через b расстояние центра тяжести от оси Ox . Тогда по второй теореме Гульдина — Паппа искомый объём

$$V = a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi a^2 b.$$

4. Вычисление моментов инерции. Моментом инерции материальной точки A относительно оси l называется число md^2 , где m — масса точки, а d — ее расстояние от оси. Аналогично определяется момент инерции относительно точки.

Пусть Γ — материальная линия, линейная плотность которой во всех точках равна единице. Тогда масса элементарного участка этой линии равна его длине dl , а момент инерции dI_x такого участка относительно оси абсцисс равен $y^2 dl$. Интегрируя, получаем момент инерции относительно оси абсцисс всей линии:

$$I_x = \int_0^l y^2 dl.$$

Так же доказывается, что

$$I_y = \int_0^l x^2 dl$$

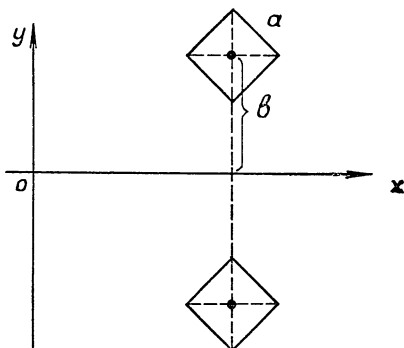


Рис. 64

и

$$I_0 = \int_0^l (x^2 + y^2) dl,$$

где I_0 — момент инерции относительно начала координат.

Отсюда следует, в частности, что $I_0 = I_x + I_y$.

Если линия Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq l,$$

то

$$I_x = \int_0^l \psi^2(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Аналогичные формулы справедливы для I_y и I_0 .

Перейдем к вычислению моментов инерции криволинейной трапеции. Будем считать, что ее поверхностная плотность равна единице. Сначала найдем момент инерции прямоугольника со сторонами k и l относительно стороны k . Разобьем его на элементарные прямоугольники со сторонами k и dy (см. рис. 61). Площадь (а потому и масса) каждого такого прямоугольника равна kdy . Значит, момент инерции элементарного прямоугольника относительно стороны k равен $ky^2 dy$, а момент инерции всего прямоугольника относительно этой стороны выражается формулой

$$\int_0^l ky^2 dy = \frac{ky^3}{3} \Big|_0^l = \frac{kl^3}{3}.$$

Криволинейную трапецию разобьем на элементарные прямоугольники со сторонами $|y|$ и dx . Момент инерции каждого из этих прямоугольников относительно оси абсцисс выражается формулой

$$\frac{|y|^3 dx}{3} = \frac{|y| y^2}{3} dx.$$

Интегрируя, получаем момент инерции всей криволинейной трапеции относительно оси абсцисс:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b |y| y^2 dx.$$

Аналогично доказывается, что момент инерции криволинейной трапеции относительно оси ординат выражается формулой

$$I_y = \int_a^b |y| x^2 dx$$

(момент инерции элементарного прямоугольника относительно оси ординат равен $x^2 |y| dx$).

Полярный момент инерции (т. е. момент относительно начала координат) в этом случае выражается формулой

$$I_0 = \int_a^b |y| \left(x^2 + \frac{1}{3} y^2 \right) dx.$$

Пример 9. Вычислим момент инерции равнобедренного треугольника относительно его основания.

Решение. Расположим оси координат так, как показано на рисунке 65.

Пусть основание треугольника $|AC| = b$, высота $|BO| = h$. Прямая (BC) проходит через точки $B(0; h)$ и $C(\frac{b}{2}; 0)$.

Ее уравнение $\frac{x-0}{\frac{b}{2}-0} = \frac{y-h}{0-h}$,

т. е.

$$y = \frac{h}{b}(b - 2x).$$

Ясно, что момент инерции I_x треугольника ABC относительно оси Ox равен удвоенному моменту инерции треугольника BOC относительно той же оси. Значит,

$$I_x = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{b}{2}} y^3 dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{h^3}{b^3} (b - 2x)^3 dx = \frac{2h^3 (b - 2x)^4}{3b^3 \cdot 4(-2)} \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

5. Другие приложения интегрального исчисления к физике. При решении физических задач изучаемый процесс разбивают на элементарные части, в пределах каждой из которых изменением соответствующих величин можно пренебречь. Теперь задача решается по формулам для постоянных величин, после чего окончательный ответ находится с помощью интегрирования.

а) Найдем работу силы при переходе материальной точки из $A(a)$ в $B(b)$, если материальная точка движется по прямой линии под действием силы F , направленной вдоль этой прямой, причем величина силы зависит от координаты x этой точки: $F = F(x)$.

Известно, что в случае, если сила постоянна, работа равна $F \Delta x$, где Δx — изменение координаты точки. Поэтому разобьем отрезок $[a; b]$ на элементарные части, в пределах каждой из которых считаем силу постоянной. Тогда работа силы на участке $[x; x + dx]$ равна $F(x) dx$. Общая работа выражается интегралом

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (2)$$

Пример 10. Найдем работу, выполняемую при переносе материальной точки, имеющей массу m , из $A(a)$ в $B(b)$, если притягивающая ее по закону

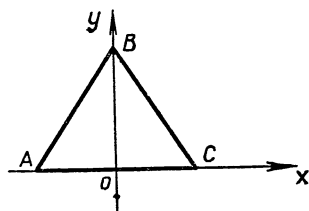


Рис. 65

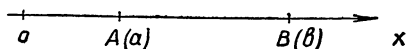


Рис. 66

Ньютона точка имеет массу μ и находится в начале координат (рис. 66).

Решение. По закону Ньютона сила тяготения равна $\gamma \frac{\mu m}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а r — расстояние между точками. По формуле (2) получаем:

$$A = \gamma \mu m \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \gamma \mu m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

б) Найдем работу, выполненную двигателем за промежуток времени $[a; b]$, если мощность двигателя в момент времени t равна $W(t)$.

За элементарный промежуток времени $[t; t + dt]$ двигатель, имеющий мощность $W(t)$, выполняет работу $dA = W(t) dt$. Поэтому вся работа двигателя равна

$$A = \int_a^b W(t) dt. \quad (3)$$

Пример 11. Найдем работу переменного тока, изменяющегося по формуле $I = I_0 \sin \omega t$ за промежуток времени $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$, если сопротивление цепи равно R .

Решение. Как известно из физики, в случае постоянного тока мощность выражается формулой $W = I^2 R$. Поэтому по формуле (3) имеем:

$$A = I_0^2 R \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}.$$

Заметим, что средняя мощность переменного тока равна

$$\frac{A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

в) Вычислим количество электричества, протекающее через цепь за промежуток времени $[a; b]$, если ток изменяется по формуле $I = I(t)$.

За элементарный промежуток времени протекает количество электричества

$$dq = I(t) dt.$$

Значит, общее количество электричества равно

$$q = \int_a^b I(t) dt.$$

В заключение рассмотрим еще один физический пример.

Пример 12. Найдем давление воды на плотину, если вода доходит до ее верхнего края и если известно, что плотина имеет вид трапеции с высотой h , верхним основанием a и нижним основанием b .

Решение. Рассмотрим элементарный слой, находящийся на глубине x и имеющий высоту dx (рис. 67). Легко доказать, что длина этого слоя равна

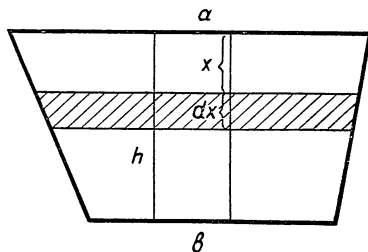


Рис. 67

$$a - \frac{(a-b)}{h} x.$$

Поэтому его площадь dS равна

$$\left(a - \frac{a-b}{h} x\right) dx,$$

а давление dP на него равно

$$x \left(a - \frac{a-b}{h} x\right) dx.$$

Все давление воды на плотину выражается интегралом

$$\begin{aligned} P &= \int_0^h \left(a - \frac{a-b}{h} x\right) x dx = a \int_0^h x dx - \frac{a-b}{h} \int_0^h x^2 dx = \\ &= \frac{ah^2}{2} - \frac{(a-b)}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6} (a + 2b). \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется статическим моментом материальной точки относительно прямой?
2. Как определяется статический момент конечного множества точек относительно прямой?
3. Как определяется и как вычисляется статический момент материальной кривой относительно оси Ox ? относительно оси Oy ?
4. Как определяется и как вычисляется статический момент плоской фигуры относительно оси Ox ? относительно оси Oy ?
5. Что такое центр тяжести? Как находятся координаты центра тяжести материальной кривой? плоской фигуры?
6. Сформулируйте теоремы Гульдина — Паппа. В каких случаях они используются?
7. Что такое момент инерции точки относительно прямой?
8. Как вычисляются моменты инерции материальной кривой и плоской фигуры относительно осей координат?
9. Приведите примеры физических задач, в решении которых используется определенный интеграл.

Упражнения

258. Найдите статические моменты дуги параболы $y^2 = 2x$ ($y > 0$), заключенной между прямыми $x = 0$, $x = 2$, относительно осей Ox и Oy .

259. Найдите статический момент дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первом квадранте, относительно оси Oy .

260. Найдите центр тяжести дуги астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

261. Найдите центр тяжести полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

262. Найдите центр тяжести половины фигуры, ограниченной половиной эллипса и его большей осью.

263. Найдите центр тяжести фигуры, заключенной между кривой $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ и осями координат.

264. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = ax^3 - x^4$.

265. Найдите центр тяжести полукруга, ограниченного полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox .

266. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной дугой астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте, и осями координат.

267. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

268. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$.

269. Вычислите момент инерции квадрата со стороной a относительно диагонали.

270. Найдите момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

271. Найдите момент инерции дуги окружности радиуса a , соответствующей центральному углу φ .

272. Определите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.

273. Вычислите силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно 70 м, нижнее 50 м, а высота 20 м.

274. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса H , радиус R .

275. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли (радиус которой принять равным R) на высоту h .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1) Интегралы вида $\int x^n (ax + b)^m dx$, где m, n — целые числа (№ 1—16).

2) Интегралы вида $\int x^n (a + x)^m (b + x)^k dx$, где $m = 1, -1, -2$; $n = 0, 1, 2$; $k = -1, -2$ (№ 17—25).

3) Интегралы вида $\int x^m (a^2 \pm x^2)^n dx$, где m, n — целые числа (№ 26—38).

II. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

4) Интегралы вида $\int x^m \sqrt{(ax + b)^k} dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2$; $k = \pm 1$ (№ 39—48).

5) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{a^2 - x^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3$; $k = \pm 1$ (№ 49—62).

6) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{a^2 + x^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $k = \pm 1$ (№ 63—76).

7) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{x^2 - a^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $k = \pm 1$ (№ 77—90).

III. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

8) Интегралы вида $\int R(x, \sin ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция (№ 91—116).

9) Интегралы вида $\int R(x, \cos ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция (№ 117—144).

10) Интегралы вида $\int \sin^k ax \cos^m ax dx$, где m, k — целые числа (№ 145—166).

11) Интегралы вида $\int R(\sin ax, \cos ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция (№ 167—179).

IV. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

12) Интегралы от показательной функции (№ 180—184).

13) Интегралы вида

$\int x^k (\ln x)^m dx$, где k, m — целые числа (№ 185—194).

14) Интегралы от обратных тригонометрических функций (№ 195—202).

15) Интегралы от некоторых трансцендентных функций (№ 203—206).

У к а з а н и я.

1. Постоянная интегрирования C всюду опущена.

2. При записи логарифма в правой части знак модуля всюду опущен. Запись $\ln f(x)$ следует понимать как $\ln |f(x)|$.

3. Прежде чем пользоваться той или иной формулой данной таблицы следует познакомиться с принятыми для нее обозначениями.

I. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1) Интегралы вида $x^n (ax + b)^m dx$, где m, n — целые числа.

(Обозначение: $A = ax + b$.)

$$1. \int A^m dx = \frac{1}{a(m+1)} A^{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{A} = \frac{1}{a} \ln A.$$

$$3. \int x A^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} A^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} A^{n+1} \quad (n > 0).$$

$$4. \int \frac{x dx}{A} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln A.$$

$$5. \int \frac{x dx}{A^2} = \frac{b}{a^2 A} + \frac{1}{a^2} \ln A.$$

$$6. \int \frac{x dx}{A^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2) A^{n-2}} + \frac{b}{(n-1) A^{n-1}} \right) \quad (n = 3, 4, 5).$$

$$7. \int \frac{x^2 dx}{A} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} A^2 - 2bA + b^2 \ln A \right).$$

$$8. \int \frac{x^2 dx}{A^2} = \frac{1}{a^3} \left(A - 2b \ln A - \frac{b^2}{A} \right).$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{A^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln A + \frac{2b}{A} - \frac{b^2}{2A^2} \right).$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{A^n} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{-1}{(n-3) A^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2) A^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1) A^{n-1}} \right) (n = 4, 5, 6).$$

$$11. \int \frac{dx}{xA} = -\frac{1}{b} \ln \frac{A}{x}.$$

$$12. \int \frac{dx}{xA^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{A}{x} + \frac{ax}{A} \right).$$

$$13. \int \frac{dx}{xA^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \frac{A}{x} + \frac{2ax}{A} - \frac{a^2 x^2}{2A^2} \right).$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{A}{x}.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 A^2} = -a \left(\frac{1}{b^2 A} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2a^2}{b^3} \ln \frac{A}{x} \right).$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2 A^3} = -a \left(\frac{1}{2b^2 A^2} + \frac{2}{b^3 A} + \frac{1}{ab^3 x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{A}{x} \right).$$

2) Интегралы вида $\int x^n (a+x)^m (b+x)^k dx$, где $m = 1; -1; -2; n = 0; 1; 2; k = -1; -2; a \neq b$.

(Обозначения: $A = a+x, B = b+x$.)

$$17. \int \frac{A}{B} dx = x + (a-b) \ln B.$$

$$18. \int \frac{dx}{AB} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{B}{A}.$$

$$19. \int \frac{xdx}{AB} = \frac{1}{a-b} (a \ln A - b \ln B).$$

$$20. \int \frac{dx}{A^2 B} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{B}{A} \right).$$

$$21. \int \frac{xdx}{AB^2} = -\frac{b}{(b-a)B} - \frac{a}{(b-a)^2} \ln \frac{A}{B}.$$

$$22. \int \frac{x^2 dx}{AB^2} = \frac{b^2}{(b-a)B} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln A + \frac{b^2 - 2ab}{(b-a)^2} \ln B.$$

$$23. \int \frac{dx}{A^2 B^2} = -\frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) - \frac{2}{(b-a)^3} \ln \frac{A}{B}.$$

$$24. \int \frac{xdx}{A^2 B^2} = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} \right) - \frac{a+b}{(b-a)^3} \ln \frac{A}{B}.$$

$$25. \int \frac{x^2 dx}{A^2 B^2} = -\frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} \right) - \frac{2ab}{(b-a)^3} \ln \frac{A}{B}.$$

3) Интегралы вида $\int x^m (a^2 \pm x^2)^n dx$, где m, n — целые числа.

(Обозначения: $A = a^2 \pm x^2$.)

$Y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, если $A = a^2 + x^2$;

$Y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$, если $A = a^2 - x^2$.

У к а з а н и е: если в формуле встречается двойной знак: « \pm » или « \mp », то верхний знак относится к случаю, когда $A = a^2 + x^2$, а нижний — к случаю, когда $A = a^2 - x^2$.

$$26. \int \frac{dx}{A} = \frac{1}{a} Y.$$

$$27. \int \frac{dx}{A^{n+1}} = \frac{x}{2na^2A^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{A^n}.$$

$$28. \int \frac{xdx}{A} = \pm \frac{1}{2} \ln A.$$

$$29. \int \frac{xdx}{A^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nA^n}.$$

$$30. \int \frac{x^2dx}{A} = \pm x \mp a Y.$$

$$31. \int \frac{x^2dx}{A^{n+1}} = \mp \frac{x}{2nA^n} \pm \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{A^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$32. \int \frac{x^3dx}{A} = \pm \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln A.$$

$$33. \int \frac{x^3dx}{A^2} = \frac{a^2}{2A} + \frac{1}{2} \ln A.$$

$$34. \int \frac{x^3dx}{A^3} = -\frac{1}{2A} + \frac{a^2}{4A^2}.$$

$$35. \int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{A}.$$

$$36. \int \frac{dx}{xA^2} = \frac{1}{2a^2A} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{A}.$$

$$37. \int \frac{dx}{x^2A} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3} Y.$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2A^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4A} \mp \frac{3}{2a^5} Y.$$

II. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

4) Интегралы вида $\int x^m \sqrt{(ax+b)^k} dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2$, $k = \pm 1$.

(Обозначение: $A = ax + b$.)

$$39. \int \sqrt{A} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{A^3}.$$

$$40. \int x \sqrt{A} dx = \frac{2(3ax - 2b) \sqrt{A^3}}{15a^2}.$$

$$41. \int x^2 \sqrt{A} dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2) \sqrt{A^3}}{105a^3}.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt{A}} = \frac{2\sqrt{A}}{a}.$$

$$43. \int \frac{x dx}{\sqrt{A}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2} \sqrt{A}.$$

$$44. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{A}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2) \sqrt{A}}{15a^3}.$$

$$45. \int \frac{dx}{x \sqrt{A}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{A} - \sqrt{b}}{\sqrt{A} + \sqrt{b}}, & \text{если } b > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A}{-b}}, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

$$46. \int \frac{\sqrt{A}}{x} dx = 2\sqrt{A} + b \int \frac{dx}{x \sqrt{A}}.$$

$$47. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{A}} = -\frac{\sqrt{A}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x \sqrt{A}}.$$

$$48. \int \frac{\sqrt{A} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{A}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{A}}.$$

5) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{a^2 - x^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $k = \pm 1$.

(Обозначение: $A = \sqrt{a^2 - x^2}$.)

$$49. \int A dx = \frac{1}{2} \left(xA + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$50. \int x A dx = -\frac{1}{3} A^3.$$

$$51. \int x^2 A dx = -\frac{x}{4} A^3 + \frac{a^2}{8} \left(xA + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$52. \int x^3 A dx = \frac{A^5}{5} - \frac{a^2 A^3}{3}.$$

$$53. \int \frac{A}{x} dx = A - a \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$54. \int \frac{A}{x^2} dx = -\frac{A}{x} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$55. \int \frac{A}{x^3} dx = -\frac{A}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$56. \int \frac{dx}{A} = \arcsin \frac{x}{A}$$

$$57. \int \frac{x dx}{A} = -A.$$

$$58. \int \frac{x^2 dx}{A} = -\frac{x A}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$59. \int \frac{x^3 dx}{A} = \frac{A^3}{3} - a^2 A.$$

$$60. \int \frac{dx}{xA} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$61. \int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{A}{a^2 x}.$$

$$62. \int \frac{dx}{x^3 A} = -\frac{A}{2a^2 x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a+A}{x}.$$

6) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{a^2 + x^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $k = \pm 1$.

(Обозначение: $A = \sqrt{a^2 + x^2}$.)

$$63. \int A dx = \frac{1}{2} (xA + a^2 \ln(x + A)).$$

$$64. \int x A dx = \frac{1}{3} A^3.$$

$$65. \int x^2 A dx = \frac{x}{4} A^3 - \frac{a^2}{8} (xA + a^2 \ln(x + A)).$$

$$66. \int x^3 A dx = \frac{A^5}{5} - \frac{a^2 A^3}{3}.$$

$$67. \int \frac{A}{x} dx = A - a \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$68. \int \frac{A}{x^2} dx = -\frac{A}{x} + \ln(x + A).$$

$$69. \int \frac{A}{x^3} dx = -\frac{A}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$70. \int \frac{dx}{A} = \ln(x + A).$$

$$71. \int \frac{x dx}{A} = A.$$

$$72. \int \frac{x^2 dx}{A} = \frac{x A}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + A).$$

$$73. \int \frac{x^3 dx}{A} = \frac{A^3}{3} - a^2 A.$$

$$74. \int \frac{dx}{xA} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+A}{x}.$$

$$75. \int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{A}{a^2 x}.$$

$$76. \int \frac{dx}{x^3 A} = -\frac{A}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a+A}{x}.$$

7) Интегралы вида $\int x^m (\sqrt{x^2 - a^2})^k dx$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $k = \pm 1$.

(Обозначение: $A = (\sqrt{x^2 - a^2})$.)

$$77. \int A dx = \frac{1}{2} (xA - a^2 \ln (x + A)).$$

$$78. \int xA dx = \frac{1}{3} A^3.$$

$$79. \int x^2 A dx = \frac{x}{4} A^3 + \frac{a^2}{8} (xA - a^2 \ln (x + A)).$$

$$80. \int x^3 A dx = \frac{A^5}{5} + \frac{a^2 A^3}{3}.$$

$$81. \int \frac{A}{x} dx = A - a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$82. \int \frac{A}{x^2} dx = -\frac{A}{x} + \ln (x + A).$$

$$83. \int \frac{A}{x^3} dx = -\frac{A}{2x^2} + \frac{1}{2a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$84. \int \frac{dx}{A} = \ln (x + A).$$

$$85. \int \frac{x dx}{A} = A.$$

$$86. \int \frac{x^2 dx}{A} = \frac{xA}{2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + A)$$

$$87. \int \frac{x^3 dx}{A} = \frac{A^3}{3} + a^2 A.$$

$$88. \int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$89. \int \frac{dx}{x^2 A} = \frac{A}{a^2 x}.$$

$$90. \int \frac{dx}{x^3 A} = \frac{A}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

III. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

8) Интегралы вида $\int R(x, \sin ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция.

$$91. \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$$

$$92. \int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

$$93. \int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.$$

$$94. \int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx.$$

$$95. \int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$96. \int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

$$97. \int \frac{xdx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax.$$

$$98. \int \frac{xdx}{\sin^n ax} = -\frac{x \cos ax}{(n-1)a \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{xdx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 2).$$

$$99. \int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$100. \int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$101. \int \frac{xdx}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$102. \int \frac{xdx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$103. \int \frac{\sin ax \, dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right).$$

$$104. \int \frac{dx}{\sin ax (1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$105. \int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$106. \int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$107. \int \frac{\sin ax \, dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$108. \int \frac{\sin ax \, dx}{(1 - \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$109. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{3\sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1} \right).$$

$$110. \int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c}{\sqrt{b^2 - c^2}}, & \text{если } b^2 > c^2, \\ \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c + \sqrt{c^2 - b^2}}, & \text{если } b^2 < c^2. \end{cases}$$

$$111. \int \frac{\sin ax \, dx}{b + c \sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}.$$

$$112. \int \frac{dx}{\sin ax (b + c \sin ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}.$$

$$113. \int \frac{dx}{(b + c \sin ax)^2} = \frac{c \cos ax}{a(b^2 - c^2)(b + c \sin ax)} + \\ + \frac{b}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}.$$

$$114. \int \frac{\sin ax \, dx}{(b + c \sin ax)^2} = \frac{b \cos ax}{a(c^2 - b^2)(b + c \sin ax)} + \\ + \frac{c}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c \sin ax}.$$

$$115. \int \frac{dx}{b^2 + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 + c^2} \operatorname{tg} ax}{b} \quad (b > 0).$$

$$116. \int \frac{dx}{b^2 - c^2 \sin^2 ax} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{tg} ax}{b}, & \text{если } b^2 > c^2, \, b > 0, \\ \frac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax - b}, & \text{если } c^2 > b^2, \, b > 0. \end{cases}$$

9) Интегралы вида $\int R(x, \cos ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция.

$$117. \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

$$118. \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx.$$

- $$119. \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}.$$
- $$120. \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx.$$
- $$121. \int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$
- $$122. \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 1).$$
- $$123. \int \frac{xdx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax.$$
- $$124. \int \frac{xdx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{(n-1)a \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cos^{n-2} ax} + \\ + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{xdx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 2).$$
- $$125. \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$
- $$126. \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$
- $$127. \int \frac{xdx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}.$$
- $$128. \int \frac{xdx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}.$$
- $$129. \int \frac{\cos ax \, dx}{1 + \cos ax} = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$
- $$130. \int \frac{\cos ax \, dx}{1 - \cos ax} = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$
- $$131. \int \frac{dx}{\cos ax (1 + \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$
- $$132. \int \frac{dx}{\cos ax (1 - \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$
- $$133. \int \frac{dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}.$$
- $$134. \int \frac{dx}{(1 - \cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}.$$
- $$135. \int \frac{\cos ax \, dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}.$$
- $$136. \int \frac{\cos ax \, dx}{(1 - \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}.$$
- $$137. \int \frac{dx}{1 + \cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{1 - 3\cos^2 ax}{1 + \cos^2 ax} \right).$$

$$138. \int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \begin{cases} \frac{2}{a \sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b - c) \operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2 - c^2}}, & \text{если } b^2 > c^2, \\ \frac{1}{a \sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{(c - b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \sqrt{c^2 - b^2}}{(c - b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \sqrt{c^2 - b^2}}, & \text{если } b^2 < c^2. \end{cases}$$

$$139. \int \frac{\cos ax \, dx}{b + c \cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \cos ax}.$$

$$140. \int \frac{dx}{\cos ax (b + c \cos ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b + c \cos ax}.$$

$$141. \int \frac{dx}{(b + c \cos ax)^2} = \frac{c \sin ax}{a (c^2 - b^2) (b + c \cos ax)} - \frac{b}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c \cos ax}.$$

$$142. \int \frac{\cos ax \, dx}{(b + c \cos ax)^2} = \frac{b \sin ax}{a (b^2 - c^2) (b + c \cos ax)} - \frac{c}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c \cos ax}.$$

$$143. \int \frac{dx}{b^2 + c^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{ab \sqrt{b^2 + c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 + c^2}} (b > 0).$$

$$144. \int \frac{dx}{b^2 - c^2 \cos^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ab \sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 - c^2}}, & \text{если } b^2 > c^2, b > 0, \\ \frac{1}{2ab \sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2 - b^2}}, & \text{если } c^2 > b^2, b > 0. \end{cases}$$

10) Интегралы вида $\int \sin^k ax \cos^m ax \, dx$, где k, m — целые числа.

$$145. \int \sin^k ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a(k+1)} \sin^{k+1} ax (k \neq -1).$$

$$146. \int \sin ax \cos^k ax \, dx = -\frac{1}{a(k+1)} \cos^{k+1} ax (k \neq -1).$$

$$147. \int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx (m, n > 0).$$

$$148. \int \frac{\sin ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax.$$

- $$149. \int \frac{\cos ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \ln \sin ax.$$
- $$150. \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sin ax}{\cos ax}.$$
- $$151. \int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n > 1).$$
- $$152. \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} +$$
- $$+ \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax} \quad (m > 0, n > 1).$$
- $$153. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$
- $$154. \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^n ax} dx = \frac{\sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 1).$$
- $$155. \int \frac{\sin^3 ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a} \left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln \cos ax \right).$$
- $$156. \int \frac{\sin^3 ax}{\cos^3 ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2 \cos^2 ax} + \ln \cos ax \right).$$
- $$157. \int \frac{\sin^3 ax}{\cos^n ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3) \cos^{n-3} ax} \right) \quad (n \neq 1, n \neq 3).$$
- $$158. \int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} dx = \frac{-\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax}{\cos ax} dx \quad (n \neq 1).$$
- $$159. \int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} -$$
- $$- \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1).$$
- $$160. \int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \left(\cos ax + \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right).$$
- $$161. \int \frac{\cos^2 ax}{\sin^n ax} dx = -\frac{1}{(n-1)} \left(\frac{\cos ax}{a \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \right) \quad (n \neq 1).$$
- $$162. \int \frac{\cos^3 ax}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln \sin ax \right).$$
- $$163. \int \frac{\cos^3 ax}{\sin^3 ax} dx = -\frac{1}{2a \sin^2 ax} - \frac{1}{a} \ln \sin ax.$$
- $$164. \int \frac{\cos^3 ax}{\sin^n ax} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{(n-3) \sin^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} ax} \right) \quad (n \neq 1, n \neq 3).$$

$$165. \int \frac{\cos^n ax}{\sin ax} dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin ax} dx \quad (n \neq 1).$$

$$166. \int \frac{\cos^n ax}{\sin^m ax} dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\sin^{m-1} ax} - \\ - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\cos^n ax}{\sin^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1).$$

11) Интегралы вида $\int R(\sin ax, \cos ax) dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция.

$$167. \int \frac{dx}{\sin ax (1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$168. \int \frac{dx}{\cos ax (1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$169. \int \frac{\sin ax}{\cos ax (1 \pm \cos ax)} dx = \frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$$

$$170. \int \frac{\cos ax}{\sin ax (1 \pm \sin ax)} dx = -\frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \sin ax}{\sin ax}.$$

$$171. \int \frac{\sin ax}{\cos ax (1 \pm \sin ax)} dx = \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$172. \int \frac{\cos ax}{\sin ax (1 \pm \cos ax)} dx = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$173. \int \frac{\sin ax}{\sin ax \pm \cos ax} dx = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax).$$

$$174. \int \frac{\cos ax}{\sin ax \pm \cos ax} dx = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln (\sin ax \pm \cos ax).$$

$$175. \int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right).$$

$$176. \int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \sin ax} = \pm \frac{1}{a} \ln \left(1 \pm \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right).$$

$$177. \int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2 + c^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{ax + \theta}{2}, \quad \text{где} \quad \sin \theta = \\ = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}.$$

$$178. \int \frac{\sin ax}{b + c \cos ax} dx = -\frac{1}{ac} \ln (b + c \cos ax).$$

$$179. \int \frac{\cos ax}{b + c \sin ax} dx = \frac{1}{ac} \ln (b + c \sin ax).$$

IV. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

12) Интегралы от показательной функции.

$$180. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$181. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$182. \int \frac{dx}{b + ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln(b + ce^{ax}).$$

$$183. \int \frac{e^{ax} dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln(b + ce^{ax}).$$

$$184. \int \frac{e^{ax} dx}{be^{2ax} + c} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arctg} \left(e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}} \right), & \text{если } bc > 0, \\ \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c + e^{ax}\sqrt{-bc}}{c - e^{ax}\sqrt{-bc}}, & \text{если } bc < 0. \end{cases}$$

13) Интегралы вида $\int x^k (\ln x)^m dx$, где k, m — целые числа.

$$185. \int \ln x dx = x \ln x - x.$$

$$186. \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x.$$

$$187. \int \ln^3 x dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x.$$

$$188. \int x^m \ln x dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \quad (m \neq -1).$$

$$189. \int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1} \ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx \quad (m \neq -1).$$

$$190. \int \frac{\ln^n x}{x} dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}.$$

$$191. \int \frac{\ln x}{x^m} dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} \quad (m \neq 1).$$

$$192. \int \frac{\ln^n x}{x^m} dx = -\frac{\ln^n x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{\ln^{n-1} x}{x^m} dx \quad (m \neq 1).$$

$$193. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$$

$$194. \int \frac{dx}{x \ln^n x} = -\frac{1}{(n-1) \ln^{n-1} x} \quad (n \neq 1).$$

14) *Интегралы от обратных тригонометрических функций.*

$$195. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$196. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$197. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$198. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$199. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$200. \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$$

$$201. \int \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$202. \int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

15) *Интегралы от некоторых трансцендентных функций.*

$$203. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$204. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

$$205. \int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx.$$

$$206. \int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	28	21	22	23	24	25	26	30	31	32	33
2	52	70	61	71	63	67	60	62	72	75	78
3	100	90	101	91	105	93	108	95	103	99	98
4	119	125	118	117	116	115	114	113	112	111	110
5	166	161	162	163	164	165	161	162	163	164	165
6	183	192	183	201	190	184	179	185	188	191	202
7	219	211	213	223	220	212	213	220	223	211	212
8	246	226	251	227	253	234	253	228	251	222	249

Примечание. Номера заданий для каждого варианта соответствуют номерам заданий настоящего пособия.

Решение «нулевого» варианта контрольной работы

28. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{3^x}$.

Решение. Используем метод интегрирования по частям. Положим

$$\left. \begin{aligned} u &= x, \\ dv &= 3^{-x} dx. \end{aligned} \right| \begin{aligned} \text{Тогда, } du &= dx, \\ v &= -\frac{3^{-x}}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{3^x} &= uv - \int v du = -x \cdot \frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} \int 3^{-x} dx = \\ &= -\frac{x}{3^x \ln 3} + \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3^{-x}}{-\ln 3} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} \left(x + \frac{1}{\ln 3} \right) + C. \end{aligned}$$

52. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 7}$.

Решение. Используем метод замены переменной. Положим $u = x^4$, тогда $du = 4x^3 dx$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{x^3 + 7} &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 dx}{(x^4)^2 + 7} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{7}} + C = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{7}} + C.\end{aligned}$$

100. Вычислить интеграл $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$.

Решение. Выделим целую часть из неправильной дроби, содержащейся под знаком интеграла:

$$\begin{array}{r|l} -5x^3 + 0x^2 + 0x + 2 & x^3 - 5x^2 + 4x \\ 5x^3 - 25x^2 + 20x & 5 \\ \hline 25x^2 - 20x + 2 & \end{array}$$

Значит, $\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = 5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$.

Представим правильную дробь $\frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}$ в виде суммы простейших дробей.

Имеем: $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4) = x(x - 1)(x - 4)$.

Значит, $\frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x - 1)(x - 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 4}$.

Далее, $25x^2 - 20x + 2 = A(x - 1)(x - 4) + Bx(x - 4) + Cx(x - 1)$.

Находим коэффициенты:

$$\begin{array}{l|l} x = 1 & 7 = -3B \Rightarrow B = -\frac{7}{3}, \\ x = 0 & 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \\ x = 4 & 322 = 12C \Rightarrow C = \frac{161}{6}. \end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx &= \int \left(5 + \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{7}{3}}{x - 1} + \frac{\frac{161}{6}}{x - 4} \right) dx = \\ &= 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x - 1| + \frac{161}{6} \ln|x - 4| + C.\end{aligned}$$

119. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \times$
 $\times \left(-\frac{dx}{\sin^2 x} \right).$

Положим $u = \operatorname{ctg} x$, тогда $du = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Получаем: $-\int (1+u^2) du = -u - \frac{1}{3} u^3 + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$.

166. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Решение. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty$.

Значит, интеграл расходится.

183. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x$, $y = 1$, $x = 8$.

Решение. Имеем:

$$S = \int_1^8 (\sqrt[3]{x} - 1) dx = \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - x \right) \Big|_1^8 = \frac{3}{4} \cdot 16 - 8 - \frac{3}{4} + 1 = 4\frac{1}{4}.$$

219. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Получаем: $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

Для вычисления интеграла применим формулу № 181 из Таблицы неопределенных интегралов:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \pi \left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx \right) = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left(\frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right) = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi e^2}{2} + \frac{\pi}{4} (e^2 - 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$

246. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

Решение. Воспользуемся формулой $P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Получим: $P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$.

Положим $u = \cos x$, тогда $du = -\sin x dx$.

Если $x = 0$, то $u = 1$; если $x = \pi$, то $u = -1$.

$$\begin{aligned}\text{Значит, } P &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} du = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du.\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int \sqrt{1 + u^2} du$ воспользуемся формулой № 63 из Таблицы неопределенных интегралов:

$$\int \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{2} (u \sqrt{u^2 + 1} + \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})) + C.$$

$$\begin{aligned}\text{Значит, } P &= 4\pi \cdot \frac{1}{2} (u \sqrt{u^2 + 1} + \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})) \Big|_0^1 = \\ &= 2\pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).\end{aligned}$$

ОТВЕТЫ

1. $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} + C$. 2. $\frac{24}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{96}{1} - \frac{4}{5} + C$. 3. $\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{5}{2}x^2 - 2x^{\frac{7}{2}} +$
 $+ \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$. 4. $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{18}{5}x^{\frac{5}{3}} + 18x^{\frac{2}{3}} - 24x^{-\frac{1}{3}} + C$. 5. $5 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + C$.
6. $\operatorname{tg} x - x + C$. 7. $\sin x - \cos x + C$. 8. $-\frac{1}{3^x \ln 3} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$.
9. $e^x \left(\frac{2^x}{\ln 2 + 1} + \frac{3^x}{\ln 3 + 1} \right) + C$. 10. $\frac{1}{9\sqrt[5]{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt[5]{5}} + C$.
11. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$. 12. $\frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{2}{9}} \right| + C$. 13. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt[7]{7}} +$
 $+ C$. 14. $x - 2\sqrt[2]{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt[2]{2}} + C$. 15. $x + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt[3]{3}}{x + 3} \right| + C$. 16. $\frac{101}{4} -$
 $- 3 \ln 2$. 17. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{3}$. 18. $1 - 2 \ln 3$. 19. $\frac{1}{12} (2\pi + 3\sqrt[3]{3})$. 20. $1 - \frac{\pi}{4}$.
21. $(2-x) \cos x + \sin x + C$. 22. $x (\ln x - 1) + C$. 23. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x -$
 $-\frac{1}{2}x + C$. 24. $\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$. 25. $(x^2 - 2x + 3)e^x + C$. 26. $(x^3 -$
 $- 8x^2 + 16x - 15)e^x + C$. 27. $\frac{x^2 + 2x}{2} \ln^2 x - \frac{x^2 + 4x}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + 2x + C$.
28. $-\frac{x}{3^x \ln 3} - \frac{1}{3^x \ln^2 3} + C$. 29. $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$. 30. $\frac{1}{2 \ln^2 2} (5 \ln 2 - 3)$.
31. $\frac{1}{6}$. 32. $-4\pi^2$. 33. $2 (\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1)$. 34. $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{x}{4 + x^2} \right) + C$.
35. $\frac{3}{8} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + C$. 36. $\frac{5\pi}{32}$. 37. $\frac{256}{693}$. 38. $I_n =$
 $= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$. 39. $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$. 40. $-\frac{1}{12} (1 - 8x)^{\frac{3}{2}} + C$.
41. $\frac{1}{5} \ln |5x - 7| + C$. 42. $-\frac{1}{3} e^{5-3x} + C$. 43. $-e^{\cos x} + C$. 44. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$.
45. $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 6| + C$. 46. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$. 47. $\frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 10) + C$.

$$\begin{aligned}
48. & \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + C. & 49. & \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2 + 3) + C. & 50. & -2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C. \\
51. & \frac{1}{3} \arcsin^3 x + C. & 52. & \frac{1}{4 \sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{7}} + C. & 53. & \frac{1}{8} \ln(x^8 + 7) + C. \\
54. & -\frac{1}{\ln x} + C. & 55. & -\ln |\cos x| + C. & 56. & -\arcsin \frac{\cos x}{2} + C. & 57. & -\cos x + \\
& + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. & 58. & \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. & 59. & \frac{2}{5} \cos^{\frac{5}{2}} x - \\
& - 2 \cos^{\frac{1}{2}} x + C. & 60. & \arcsin \frac{x}{3} - 5 \sqrt{9 - x^2} + C. & 61. & 3 \sqrt{2 + x^2} + 2 \ln |x + \\
& + \sqrt{2 + x^2}| + C. & 62. & \frac{11}{2} \ln |x + 4| - \frac{7}{2} \ln |x + 2| + C. & 63. & \frac{1}{2} \arccos^2 x - \\
& - 2 \sqrt{1 - x^2} + C. & 64. & \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C. & 65. & 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + C. \\
66. & \frac{x}{9 \sqrt{9 - x^2}} + C. & 67. & \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C. & 68. & \sqrt{3} - 1. & 69. & \frac{8}{15}. \\
70. & \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. & 71. & \ln 2. & 72. & 1 - \cos 1. & 73. & \frac{242}{45 \sqrt{3}}. & 74. & \frac{\pi}{2}. \\
75. & \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 3}{\sin 2} \right|. & 76. & \frac{1}{2} \ln \frac{2(e + 2)}{3e}. & 77. & \frac{\pi}{3}. & 78. & 1 - 2 \ln \frac{3}{2}. \\
79. & \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. & 80. & \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C. & 81. & (-5x^2 - 2x - \\
& - 4) e^{-x} + C. & 82. & (3 \sin 3x - \cos 3x) \frac{e^{-x}}{10} + C. & 83. & \frac{1}{4} \sin 2x - \left(\frac{1}{2} x + \right. \\
& + 4) \cos 2x + C. & 84. & -\frac{1}{3(x - 3)^3} + C. & 85. & -\frac{1}{4(2x + 3)^2} + C. \\
86. & \frac{2}{\sqrt{47}} \operatorname{arctg} \frac{12x + 1}{\sqrt{47}} + C. & 87. & \frac{3}{2} \ln(x^2 - 3x + 8) + \frac{13}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{23}} + C. \\
88. & -\frac{5}{2(x^2 + 2)} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2} + x^2 + 2} + \frac{x}{\sqrt{2} + x^2 + 2} \right) + C. & 89. & C - \frac{4 + x}{2(x^2 + 4x + 15)} - \\
& - \frac{1}{2 \sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{11}}. & 90. & \ln \left| \frac{(x - 1)(x + 2)}{x} \right| + C. & 91. & \frac{5}{8} \ln |x + 1| + \\
& + \frac{7}{24} \ln |x - 3| - \frac{11}{12} \ln |x + 3| + C. & 92. & \frac{1}{4} \ln |(x + 1)(x + 3)^3| + \frac{9}{2(x + 3)} + \\
& + C. & 93. & \frac{1}{4} \left(\ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} - \frac{2}{x + 1} \right) + C. & 94. & \frac{1}{6} \ln \frac{x^2 - x + 1}{(x + 1)^2} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. & 95. & \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4} - \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \\
& + C. & 96. & \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right) + C. & 97. & \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} + \\
& + 4x^2 + 17x + 33 \ln |x - 2| + C. & 98. & \frac{x^2}{2} + \ln \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}{x^2} + C. & 99. & \frac{x^2}{2} + \\
& + 6x - 6 \ln |x - 2| + 34 \ln |x - 4| + C. & 100. & 5x + \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{7}{3} \ln |x - 1| + \\
& + \frac{161}{6} \ln |x - 4| + C. & 101. & 2 \sqrt{x + 4} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{2 + \sqrt{x + 4}} \right| + C. & 102. & \frac{2}{5} \left(1 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C. \quad 103. \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \quad 104. -x + 2\sqrt{x} - \\
& - \ln(1 + 2\sqrt{x}) + C. \quad 105. \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{(2+x)^2}{(2-x)}} + C. \quad 106. 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{2x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-1}} \right| + \\
& + C. \quad 107. \frac{199}{70} + \ln 8 - \frac{3\pi}{2}. \quad 108. \ln \frac{3}{2} + \frac{7}{12}. \quad 109. \frac{3}{2} (\sqrt[3]{3} - \\
& - \sqrt[3]{2}). \quad 110. \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + C. \quad 111. -\frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \\
& - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \quad 112. \frac{1}{4 \sin^4 x} - \frac{1}{6 \sin^6 x} + C. \quad 113. \frac{3}{8} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + \\
& + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + C. \quad 114. 3 \sqrt[3]{\sin x} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{\sin^7 x} + C. \quad 115. \sin x - \\
& - \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \quad 116. \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \quad 117. \operatorname{tg} x - \frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \\
& 118. -\ln \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + C. \quad 119. -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \\
& 120. \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x) + C. \quad 121. \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{8} \left(\frac{5}{6} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \right. \\
& \left. - \frac{1}{48} \sin^3 2x \right) + C. \quad 122. \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C. \\
& 123. \frac{\pi}{32}. \quad 124. \frac{\pi}{4}. \quad 125. \ln \sqrt[3]{3}. \quad 126. \ln \sqrt[3]{3}. \\
& 127. \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C. \quad 128. \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} + C. \\
& 129. \ln \left| \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| + C. \\
& 132. а) $0,152 < I < 0,182$; б) $0,945 < I < 1,265$; в) $1,026 < I < 1,187$; г) $0,715 < I < 0,778$. \\
& 136. 1. 137. $\frac{5}{2}$. 138. $\frac{1}{2}$. 139. $\frac{9}{2} \pi$. 144. $4x^3 \cos x^4$. 145. 1. 146. $\frac{\sin \sqrt{x}}{x}$. \\
& 147. $\frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{2} \sin 2x - \sin x)$. 148. $\alpha = t$. 149. $-t^2$. 150. $x = n\pi$, $n = 1$, $2, 3, \dots$. 151. \min при $x = 1$, точки перегиба: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$. 152. $\frac{5}{3}$. \\
& 153. $\frac{2}{\pi}$. 154. $\ln 2$. 155. $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \leq \frac{\pi^2}{4}$. 156. $0 \leq \int_1^e x^2 \ln x \, dx \leq e^2 (e -$$$

- 1). 157. $\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7}$. 158. $\frac{2\pi}{13} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leq \frac{2\pi}{7}$. 161. $\frac{1}{2}$.
 162. $1 - \ln 2$. 163. $1 - \frac{1}{e}$. 164. $\frac{3\pi^2}{32}$. 165. $\frac{\pi}{2}$. 166. Расходится. 167. Расходится.
 168. Расходится. 169. $14 \frac{4}{7}$. 170. π . 171. 6. 172. $-\ln |\sqrt{3}-2|$. 173. $2\sqrt{\ln 2}$.
 174. $\frac{1}{\ln 2}$. 175. $\frac{\pi}{2}$. 176. Расходится. 177. Сходится. 178. Сходится при $k > 1$,
 расходится при $k \leq 1$. 179. $8 \frac{4}{15}$. 180. 72. 181. $\frac{2}{3}$. 182. $\frac{8}{3}$. 183. $\frac{17}{4}$. 184. $\frac{9}{2}$. 185. $\frac{8}{15}$.
 186. πab . 187. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 188. $31,5 - 24 \ln 2$. 189. $\frac{2}{3}$. 190. $\pi - 2$. 191. $\frac{12\sqrt{3}}{5}$.
 192. $5\sqrt{2} - \frac{2}{3}$. 193. $\frac{4+3\sqrt{2}}{6}$. 194. π . 195. $\frac{4}{3} a^2$. 196. $\frac{3\pi c^4}{8ab}$. 197. $\frac{7}{50} -$
 $-\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 198. $6\pi a^2$. 199. $\frac{a^2}{2}$. 200. $\frac{\pi a^2}{4}$. 201. $\frac{3}{2} \pi a^2$. 202. $18\pi a^2$.
 203. $a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. 204. $\frac{17}{4} \pi$. 205. π . 206. 3. 207. ∞ . 208. $\pi ab \left(1 + \frac{1}{3c^2} \right)$.
 209. $\frac{1}{3} a^2 H$. 210. $\frac{2}{3} R^2 H$. 211. $\frac{\pi^2}{2}$. 212. $\frac{\pi a^3}{8} (e^2 + 4 - e^{-2})$. 213. $\frac{\pi a^5}{30}$.
 214. $\frac{32}{105} \pi a^3$. 215. 12π . 216. $\frac{2048}{35} \pi$. 217. 72π . 218. $\frac{4}{5} \pi$. 219. $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$.
 220. $\frac{128}{3} \pi$. 221. $\frac{32\sqrt{2}}{3} \pi$. 222. $4\sqrt{2} \pi$. 223. $\frac{\pi a^3}{2} (15 - 16 \ln 2)$. 224. $56 \pi^2$.
 225. $5\pi^2 a^3$. 226. $\operatorname{Intg} \frac{3\pi}{8}$. 227. $2(\sqrt{2} + \ln(3 + \sqrt{2}))$. 228. $\frac{2\sqrt{2}}{9} (5\sqrt{5} -$
 $- 2\sqrt{2})$. 229. $6a$. 230. $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \ln 2 \right)$. 231. $\frac{112}{27}$. 232. $4\sqrt{3}$. 233. $10 \left(\frac{67}{27} + \right.$
 $\left. + \sqrt{5} \right)$. 234. $2 \left(2 \ln 2 - \frac{1}{3} \right)$. 235. 4. 236. $2\pi^2 a$. 237. $\sqrt{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.
 238. $\frac{3}{2} \pi a$. 239. $2\pi a$. 240. $\frac{8}{3} a$. 241. $P(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$. 242. 36.
 243. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 244. 0. 245. $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$. 246. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$. 247. $\frac{12}{5} \pi a^2$.
 248. $24 \pi^2$. 249. $\frac{62}{3} \pi$. 250. $2\pi rh$. 251. $\frac{\pi a^2}{2} (e^2 + 4 - e^{-2})$. 252. $2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$.
 253. $\frac{12}{5} \pi a^2$. 254. $4\pi a^2$. 255. 3π . 256. $\frac{32}{5} \pi a^2$. 257. $4\pi^2 a^2$. 258. $S_x = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} -$

$$\begin{aligned}
& -1), S_y = \frac{9}{8} \sqrt{5} + \frac{1}{16} \ln(2 + \sqrt{5}). \quad 259. S_y = \frac{3}{5} a^2. \quad 260. \quad \xi = \eta = \frac{2a}{5}. \\
& 261. \quad \xi = 0, \eta = \frac{2r}{\pi}. \quad 262. \quad \xi = 0, \eta = \frac{4b}{3\pi}. \quad 263. \quad \xi = \eta = \frac{a}{5}. \quad 264. \quad \xi = \frac{5a}{8}, \eta = \\
& = 0. \quad 265. \quad \xi = 0, \eta = \frac{4r}{3\pi}. \quad 266. \quad \xi = \frac{256a}{315\pi}, \eta = \frac{256a}{315\pi}. \quad 267. \quad \xi = \frac{5a}{6}, \eta = 0. \\
& 268. \quad \xi = \frac{\sqrt{2}\pi a}{8}, \eta = 0. \quad 269. \quad I = \frac{a^4}{12}. \quad 270. \quad I = \frac{1}{12} b h^3. \quad 271. \quad I = \frac{1}{2} a^3 \left(\varphi - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right). \quad 272. \quad 324 \rho g, \text{ где } \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad 273. \quad 11333 \frac{1}{3} \rho g. \\
& 274. \quad \pi R^2 H^3. \quad 275. \quad mg \frac{Rh}{R+h}.
\end{aligned}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
глава I. Неопределенный и определенный интегралы	5
§ 1. Основные понятия	—
1. Задача восстановления функции по ее производной	—
2. Первообразная функция	—
3. Определения неопределенного и определенного интегралов	6
4. Таблица основных интегралов	10
5. Свойства неопределенного интеграла	12
6. Свойства определенного интеграла	13
Вопросы для самопроверки	16
Упражнения	—
§ 2. Интегрирование по частям	17
1. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	—
2. Интегрирование по частям в определенном интеграле	20
3. Рекуррентные формулы	—
Вопросы для самопроверки	22
Упражнения	23
§ 3. Интегрирование методом замены переменной	24
1. Замена переменной в неопределенном интеграле	—
2. Замена переменной в определенном интеграле	26
Вопросы для самопроверки	28
Упражнения	—
§ 4. Метод неопределенных коэффициентов	30
Вопросы для самопроверки	32
Упражнения	—
§ 5. Интегрирование рациональных функций	—
1. Интегрирование простейших рациональных функций	—
2. Интегрирование правильных дробей	35
3. Интегрирование неправильных дробей	38
Вопросы для самопроверки	39
Упражнения	40
§ 6. Интегрирование иррациональных функций	—
Упражнения	43
§ 7. Интегрирование тригонометрических функций	44
Вопросы для самопроверки	47
Упражнения	48
§ 8. Вычисление интегралов с помощью таблиц	49
глава II. Определенный интеграл и его свойства	52
§ 1. Определенный интеграл как число, разделяющее два числовых множества	53
1. Оценки определенных интегралов	—
2. Определенный интеграл как разделяющее число	55
3. Свойства нижних и верхних сумм Дарбу	57
4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции	59

5. Интегрируемость монотонных функций	60
6. Интегрируемость непрерывных функций	61
Вопросы для самопроверки	63
Упражнения	—
§ 2. Существование первообразной для непрерывной функции	64
1. Разбиение промежутка интегрирования	—
2. Среднее значение функции	65
3. Дифференцирование определенного интеграла по верхнему пределу	66
4. Формула Ньютона — Лейбница	68
Вопросы для самопроверки	69
Упражнения	—
§ 3. Свойства определенных интегралов	70
1. Свойства определенных интегралов от непрерывных функций	—
2. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций	71
3. Интегрирование неравенств	73
Вопросы для самопроверки	75
Упражнения	—
§ 4. Несобственные интегралы	76
1. Интегралы с бесконечным промежутком интегрирования	—
2. Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода	80
3. Несобственные интегралы 2-го рода	81
Вопросы для самопроверки	84
Упражнения	—
§ 5. Интегральное определение логарифмической функции	85
Глава III. Приложения определенного интеграла	89
§ 1. Вычисление площадей плоских фигур	—
1. Внешние, внутренние и граничные точки плоских множеств	—
2. Квадрируемые области	90
3. Свойства площадей квадрируемых фигур	93
4. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах	96
5. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями	99
6. Площадь в полярных координатах	100
Вопросы для самопроверки	102
Упражнения	—
§ 2. Вычисление объемов тел	104
1. Кубируемые тела	—
2. Объем прямого цилиндрического тела	106
3. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений	107
4. Принцип Кавальери	109
5. Объем тела вращения	110
Вопросы для самопроверки	113
Упражнения	114
§ 3. Вычисление длин дуг	115
1. Понятие спрямляемой кривой	—
2. Достаточное условие спрямляемости кривой	116
3. Вывод формулы длины дуги регулярной кривой	118
4. Частные случаи формулы длины кривой	120
5. Необходимое и достаточное условие спрямляемости кривой	122
Вопросы для самопроверки	124
Упражнения	125
§ 4. Кривизна плоской кривой	126
Вопросы для самопроверки	129
Упражнения	—
§ 5. Площадь поверхности вращения	—
Вопросы для самопроверки	133
Упражнения	134

§ 6. Приложения интегрального исчисления к решению физических задач	135
1. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести материальной кривой	134
2. Вычисление статических моментов и координат центров тяжести плоских фигур	138
3. Теоремы Гульдина — Паппа	141
4. Вычисление моментов инерции	143
5. Другие приложения интегрального исчисления к физике	145
Вопросы для самопроверки	147
Упражнения	148
Приложение 1 (таблица неопределенных интегралов)	149
Приложение 2 (примерные варианты контрольной работы) . . .	164
Ответы	168

ИБ №3978

Редактор Л. В. Привезенцева
Художественный редактор К. К. Федоров
Технический редактор Н. А. Биркина
Корректор Т. Ф. Алексина

Сдано в набор 05.05.78. Подписано к печати 21.11.78. 60×90¹/₁₆. Бум. типогр. № 3. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 10,54. Тираж 35000 экз. Заказ № 753. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.