



**А. С. Солодовников,  
М. А. Родина**

**ЗАДАЧНИК —  
ПРАКТИКУМ  
ПО АЛГЕБРЕ**



Московский государственный  
заочный педагогический институт

А. С. СОЛОДОВНИКОВ, М. А. РОДИНА

# ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ

Часть IV

Учебное пособие для студентов-заочников  
физико-математических факультетов  
педагогических институтов

*Рекомендовано  
Главным управлением высших и средних  
педагогических учебных заведений  
Министерства просвещения РСФСР*

МОСКВА  
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»  
1985

**Рецензенты:**

доктор физ.-мат. наук, профессор О. В. Мантуров (МОПИ им. Н. К. Крупской),

кандидат физ.-мат. наук, доцент Э. Б. Винберг (МГУ)

**Солодовников А. С., Родина М. А.**

**С60** Задачник-практикум по алгебре. Ч. IV. Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1985. — 127с. — В надзаг.: Моск. гос. заоч. пед. ин-т.

Настоящий задачник-практикум является учебным пособием для студентов-заочников педагогических вузов. Он снабжен подробными решениями типовых задач по теме «Алгебра многочленов» и дополнительными упражнениями для самостоятельного рассмотрения. Ко всем упражнениям в конце книги приводятся ответы и указания к решению.

С 4309020400—384  
103(03)—85 заказное



**ББК 22.142  
512**

© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ), 1985 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум составлен в соответствии с действующей программой курса алгебры и теории чисел в педагогических институтах для специальности № 2104 «Математика».

Главы 1, 3 написаны М. А. Родиной, главы 2, 4 — А. С. Солодовниковым.

Материал задачника относится в основном к VII семестру заочного обучения. Из числа ранее изученных включена тема «Комплексные числа и двучленные уравнения».

В начале каждого параграфа приводятся ссылки на соответствующие разделы учебного пособия Винберга Э. Б. «Алгебра многочленов» (М., Просвещение, 1980). (В дальнейшем ссылки на это пособие будут содержать только фамилию автора, номера глав, параграфов и пунктов из него.) Подробно рассматриваются решения нескольких типовых задач, которые сопровождаются необходимыми теоретическими пояснениями. В конце каждого параграфа дается подбор упражнений. Решение студентом хотя бы по одной задаче из каждого пункта упражнений необходимо для усвоения рассмотренных вопросов темы.

В «Ответах», помещенных в конце задачника, даются не только окончательные результаты решения упражнений, но в некоторых случаях и промежуточные результаты, облегчающие проверку студентом своего решения.

# Глава I

## МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### § 1. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ НАД ОБЛАСТЬЮ ЦЕЛОСТНОСТИ И НАД ПОЛЕМ. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

**Вопросы программы.** Кольцо многочленов над областью целостности и над полем. Деление многочлена на двучлен  $x - a$  и корни многочлена. Наибольшее возможное число корней многочлена. Равенство многочленов — алгебраическое и функциональное.

**Л и т е р а т у р а:** Винберг Э. Б. Гл. 1, § 1 (п. 1—7), § 2 (п. 1—6).

**Задача 1.** Найти сумму, разность и произведение многочленов:

а)  $f(x) = 2 - 4x + 2x^2$ ,  $g(x) = -4 + x + x^3$  из кольца  $Z[x]$ ;

б)  $f(x) = \bar{1} - \bar{3}x + \bar{4}x^2$ ,  $g(x) = \bar{3} + \bar{2}x + x^2$  из кольца  $Z_5[x]$ .

**Р е ш е н и е.** а) При сложении многочленов складываются их коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Если при этом в многочлене отсутствует член, содержащий  $x^i$ , то соответствующий коэффициент многочлена считается равным 0. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2 - 4) + (-4 + 1)x + 2x^2 + x^3 = \\ &= -2 - 3x + 2x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Коэффициенты разности  $f(x) - g(x)$  получаются, если из коэффициентов при  $x^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) многочлена  $f(x)$  вычесть соответствующие коэффициенты многочлена  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2 + 4) + (-4 - 1)x + 2x^2 - x^3 = \\ &= 6 - 5x + 2x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Произведением многочленов

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

называется многочлен

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots,$$

коэффициенты которого задаются формулой

$$c_l = \sum_{k+s=l} a_kb_s \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Это означает, что для нахождения многочлена  $f(x)g(x)$  нужно каждый член многочлена  $f(x)$  умножить на каждый член многочлена  $g(x)$  и затем привести подобные члены, т. е. сложить коэф-

фициенты при одинаковых степенях  $x$ . Для многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , указанных в задаче, имеем:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= 2(-4) + [2 \cdot 1 - 4(-4)]x + \\ &+ [-4 \cdot 1 + 2(-4)]x^2 + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^3 + \\ &+ (-4) \cdot 1x^4 + 2 \cdot 1x^5 = -8 + 18x - 12x^2 + \\ &+ 4x^3 - 4x^4 + 2x^5. \end{aligned}$$

б) Коэффициентами данных многочленов являются классы вычетов по модулю 5 — элементы конечного поля  $Z_5$ . Имеем:

$$f(x) + g(x) = (\bar{1} + \bar{3}) + (-\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{4} + \bar{1})x^2 = \bar{4} - x;$$

коэффициент при  $x^2$  в полученном многочлене равен 0, так как  $4 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{1} - \bar{3}) + (-\bar{3} - \bar{2})x + (\bar{4} - \bar{1})x^2 = \\ &= -\bar{2} + \bar{3}x^2; \end{aligned}$$

коэффициент при  $x$  равно 0, так как  $-3 - 2 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$ . Наконец,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \bar{1} \cdot \bar{3} + (\bar{1} \cdot \bar{2} - \bar{3} \cdot \bar{3})x + \\ &+ (\bar{1} \cdot \bar{1} - \bar{3} \cdot \bar{2} + \bar{4} \cdot \bar{3})x^2 + \\ &+ (-\bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{2})x^3 + \bar{4} \cdot \bar{1}x^4 = \\ &= \bar{3} - \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4, \end{aligned}$$

где коэффициент при  $x^3$  равен 0, так как  $-3 + 8 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$ .

$$\text{О т в е т. а) } f(x) + g(x) = -2 - 3x + 2x^2 + x^3,$$

$$f(x) - g(x) = 6 - 5x + 2x^2 - x^3,$$

$$f(x)g(x) = -8 + 18x - 12x^2 + 4x^3 - 4x^4 + 2x^5;$$

$$\left. \begin{aligned} \text{б) } f(x) + g(x) &= \bar{4} - x, \\ f(x) - g(x) &= -\bar{2} + \bar{3}x^2, \\ f(x)g(x) &= \bar{3} + \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4 \end{aligned} \right\} \in Z_5[x].$$

**З а м е ч а н и е.** Так как многочлены заданы над областью целостности, то степень произведения равна сумме степеней самих многочленов.

**Задача 2.** Проверить, что в кольце  $Z[x]$  многочлен  $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 13x + 2$  делится на многочлен  $g(x) = 2x^2 + 5x - 1$ , и найти частное.

**Р е ш е н и е.** Многочлен  $f(x)$  по определению делится на многочлен  $g(x)$ , отличный от 0, т. е.  $f(x) : g(x)$ , если существует многочлен  $q(x)$  такой, что  $f(x) = g(x)q(x)$ ; при этом  $f(x)$  называется *делимым*,  $g(x)$  — *делителем*, а  $q(x)$  — *частным* от деления  $f(x)$  на  $g(x)$ .

В данном примере  $f(x)$  имеет степень 3, а  $g(x)$  — степень 2, поэтому многочлен  $q(x)$ , если он существует, имеет степень 1, т. е.  $q(x) = ax + b$ , где  $a \in Z$ ,  $b \in Z$ .

Рассмотрев равенство

$$6x^3 + 11x^2 - 13x + 2 = (2x^2 + 5x - 1)(ax + b),$$

перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & 6x^3 + 11x^2 - 13x + 2 = \\ & = 2ax^3 + (2b + 5a)x^2 + (5b - a)x - b. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$6 = 2a, 11 = 2b + 5a, -13 = 5b - a, 2 = -b.$$

Полученная система имеет решение над  $Z$ :

$$a = 3, b = -2.$$

Значит, в кольце  $Z[x]$  имеем:  $f(x) = g(x)q(x)$ , где  $q(x) = 3x - 2$ .

**З а м е ч а н и е.** Задача может быть решена и более естественным путем. Кольцо  $Z$  является частью поля  $Q$ . Поэтому, рассмотрев многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  как элементы кольца  $Q[x]$ , можно разделить  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком (см. § 2). Убедившись, что остаток равен 0, а частное есть многочлен из  $Z[x]$ , придем к заключению, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$  в кольце  $Z[x]$ .

**Задача 3.** В кольце  $Z[x]$  разделить с остатком многочлен  $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$  на  $x + 2$ .

**Р е ш е н и е.** Напомним, что если  $K$  есть область целостности (но не поле), то деление с остатком в кольце  $K[x]$ , вообще говоря, не имеет смысла. Однако если многочлен  $g(x)$ , на который мы делим, имеет вид:  $x - a$  ( $a \in K$ ), то деление с остатком возможно, т. е. существует такой многочлен  $q(x) \in K[x]$  и такой элемент  $r \in K$ , что

$$f(x) = (x - a)q(x) + r.$$

Коэффициенты многочлена  $q(x)$  и остаток  $r$  могут быть найдены по схеме Горнера:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a & b_0 = a_0 & b_1 = ab_0 + a_1 & b_2 = ab_1 + a_2 & \dots & b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1} & r = ab_{n-1} + a_n \end{array},$$

в которой  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — коэффициенты многочлена  $f(x)$ ; записанного по убывающим степеням  $x$ :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

и аналогично

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}.$$

В данном случае  $x - a = x + 2$ , так что  $a = -2$ . Схема Горнера принимает вид:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -8 \end{array}$$

**О т в е т.**  $q(x) = 2x^2 - 4x + 5, r = -8$ .

**Задача 4.** Найти значение многочлена  $f(x)$  при  $x = a$ :

а)  $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x + 6 \in Z[x]$ ,  $a = 2$ ;

б)  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 2 \in Z_7[x]$ ,  $a = -\bar{3} \in Z_7$ .

**Решение.** а) Значение многочлена при  $x = a$  можно найти непосредственной подстановкой  $x = 2$  в многочлен:

$$f(2) = 2^4 + 5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 6 = 16 + 40 - 6 + 6 = 56.$$

Можно найти  $f(2)$  и другим способом. Воспользуемся теоремой Безу, согласно которой остаток  $r$  от деления многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - a$  равен значению многочлена  $f(x)$  при  $x = a$ :  $r = f(a)$ . Остаток найдем по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 & 14 & 25 & 56 \end{array}, r = 56.$$

б) Значение  $f(-\bar{3})$  найдем по схеме Горнера, деля  $f(x)$  на  $x + \bar{3}$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & -\bar{3} & \bar{2} \\ -\bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & -\bar{3} & \bar{4} \end{array}, r = \bar{4}.$$

**Ответ.** а)  $f(2) = 56$ ; б)  $f(-\bar{3}) = \bar{4} \in Z_7$ .

**Задача 5.** Пользуясь схемой Горнера, составить таблицу значений многочлена  $f(x)$  и найти его корни:

$$f(x) = x^5 - \bar{3}x^3 + \bar{4}x - \bar{1} \in Z_7[x].$$

**Решение.** Множество  $Z_7$  конечное:  $Z_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ . Придавая аргументу  $x$  значения  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}$  и вычисляя соответствующие значения многочлена  $f(x)$ , построим функцию  $f^*$ , определенную на  $Z_7$ . Корни многочлена — это элементы  $\alpha$  поля  $Z_7$  такие, что  $f(\alpha) = 0$ . Имеем:

$$f(\bar{0}) = -\bar{1} = \bar{6}.$$

Остальные значения находим по схеме Горнера:

	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$-\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$-\bar{1}$	
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$-\bar{2}$	$-\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1} = f(\bar{1})$	$f^* = \{(0; 6), (1; 1), (2; 1), (3; 5), (4; 0), (5; 4), (6; 4)\}.$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1} = f(\bar{2})$	
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{5} = f(\bar{3})$	
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0} = f(\bar{4})$	
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4} = f(\bar{5})$	
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4} = f(\bar{6})$	

**Ответ.**  $f(\bar{0}) = \bar{6}$ ,  $f(\bar{1}) = \bar{1}$ ,  $f(\bar{2}) = \bar{1}$ ,  $f(\bar{3}) = \bar{5}$ ,  $f(\bar{4}) = \bar{0}$ ,  $f(\bar{5}) = \bar{4}$ ,  $f(\bar{6}) = \bar{4}$ ;  $\bar{4}$  — корень  $f(x)$ .

**Задача 6.** В кольце  $R[x]$  определить кратности  $k_1$  и  $k_2$  корней  $\alpha = \sqrt[3]{3}$  и  $\beta = -\sqrt[3]{3}$  многочлена

$$f(x) = 3x^4 + (1 - 3\sqrt[3]{3})x^3 - (9 + \sqrt[3]{3})x^2 - (3 - 9\sqrt[3]{3})x + 3\sqrt[3]{3}$$



и записать соответствующее разложение многочлена на множители.

**Решение.** Элемент  $\alpha$  области целостности  $K$  тогда и только тогда является корнем многочлена  $f(x)$  из кольца  $K[x]$ , когда  $f(x)$  делится на линейный двучлен  $x - \alpha$ .

Элемент  $\alpha$  из  $K$  называется  $k$ -кратным ( $k \in N$ ) корнем многочлена  $f(x)$ , если  $f(x)$  делится на  $(x - \alpha)^k$ , но не делится на  $(x - \alpha)^{k+1}$ .

Для определения кратности  $k_1$  корня  $\alpha = \sqrt[3]{3}$  делим многочлен  $f(x)$  на  $x - \sqrt[3]{3}$ , получаем остаток, равный нулю; затем полученное частное  $q(x)$  делим снова на  $x - \sqrt[3]{3}$  и т. д., пока не получим остаток, не равный нулю. Корни полных частных одновременно являются и корнями многочлена  $f(x)$ . Все вычисления проводятся по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 1-3\sqrt[3]{3} & -9-\sqrt[3]{3} & -3+9\sqrt[3]{3} & 3\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{3} & 3 & 1 & -9 & -3 & 0 \Rightarrow f(x) : (x - \sqrt[3]{3}) \\ \sqrt[3]{3} & 3 & 1+3\sqrt[3]{3} & \sqrt[3]{3} & 0 \Rightarrow f(x) : (x - \sqrt[3]{3})^2 \\ \sqrt[3]{3} & 3 & 1+6\sqrt[3]{3} & 18+2\sqrt[3]{3} & \Rightarrow f(x) \cdot (x - \sqrt[3]{3})^3 \end{array}$$

Аналогичным образом находим кратность корня  $\beta = -\sqrt[3]{3}$ , причем в этом случае делим на  $x + \sqrt[3]{3}$  не сам многочлен  $f(x)$ , а частное  $3x^2 + (1 + 3\sqrt[3]{3})x + \sqrt[3]{3}$  от деления  $f(x)$  на  $(x - \sqrt[3]{3})^2$ . Вычисления снова проводим по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 1+3\sqrt[3]{3} & \sqrt[3]{3} \\ -\sqrt[3]{3} & 3 & 1 & 0 \Rightarrow f(x) : (x + \sqrt[3]{3}) \\ -\sqrt[3]{3} & 3 & 1-3\sqrt[3]{3} & \Rightarrow f(x) \cdot (x + \sqrt[3]{3})^2 \end{array}$$

**Ответ.**  $\alpha = \sqrt[3]{3}$  — двукратный корень  $f(x)$ ;  $\beta = -\sqrt[3]{3}$  — однократный (простой) корень  $f(x)$ ;  $f(x) = (x - \sqrt[3]{3})^2 (x + \sqrt[3]{3}) \times (3x + 1)$ .

**Задача 7.** Найдем такие значения  $a$  и  $b$ , при которых корень  $\alpha = -2$  многочлена

$$f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 1$$

имел бы кратность  $k$  не ниже, чем 2.

**Решение.** Чтобы число  $\alpha = -2$  было корнем многочлена  $f(x)$  кратности не ниже, чем 2, многочлен  $f(x)$  должен делиться по крайней мере на  $(x + 2)^2$ .

Поэтому делим по схеме Горнера  $f(x)$  на  $x + 2$  и остаток приравниваем нулю, затем частное делим на  $x + 2$  и второй остаток приравниваем нулю:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & a & b & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 & a-8 & -2a+b+16 & 4a-2b-31=0 \\ -2 & 1 & -4 & 12 & a-32 & -4a+b+80=0 \end{array}$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b = 31, \\ -4a + b = -80 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{129}{4}, \\ b = 49. \end{array}$$

Ответ. При  $a = \frac{129}{4}$ ,  $b = 49$   $f(x) : (x+2)^2 \Rightarrow k \geq 2$ .

Над бесконечной областью целостности  $K$  (над бесконечным полем  $P$ ) два многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$  равны как алгебраические выражения (т. е. равны их коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ ) тогда и только тогда, когда они равны как функции (т. е. когда равны их значения при любом значении аргумента из  $K$ , соответственно  $P$ ).

**Задача 8.** В кольце  $Q[x]$  найти многочлен  $f(x)$  не выше 3-й степени, если

$$f(-1) = 1, f(0) = 5, f(1) = 3, f(2) = 0.$$

**Решение.** Многочлен над бесконечным полем степени не выше, чем  $n$ , однозначно определяется своими значениями при  $n+1$  различных значениях аргумента (в  $n+1$  точках). Для нахождения многочлена  $f(x)$  используем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_i.$$

В данной задаче  $n = 3$ ; искомый многочлен найдем по формуле

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3,$$

где  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 1$ ;  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 5$ ;  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = 3$ ;  $x_3 = 2$ ,  $y_3 = 0$ .  
Итак,

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-2)(-3)} \cdot 1 + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} \cdot 5 + \\ + \frac{(x+1)x(x-2)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} \cdot 3 + \frac{(x+1)x(x-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим:

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 5 \in Q[x].$$

Для проверки результата достаточно найти значения:

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Ответ.  $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 5.$

Над конечным полем  $P$  два многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$  могут определять одну и ту же функцию (не обязательно будучи равными как алгебраические выражения). Такие многочлены называются эквивалентными:  $f \sim g$ . Эквивалентные многочлены имеют одни и те же корни, которые в принципе могут быть найдены путем испытания всех элементов поля  $P$ .

Частным случаем конечного поля является любое поле  $Z_p$ , где  $p$  — простое число.

**Задача 9.** Показать, что в кольце  $Z_3[x]$  многочлены  $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \bar{1}$ ,  $g(x) = 2x^2 + \bar{1}$  эквивалентны, и найти их корни.

**Решение.** Поле  $Z_3$  состоит из трех элементов:  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$  — классов вычетов по модулю 3. По многочленам  $f(x)$  и  $g(x)$  построим функции  $f^*$  и  $g^*$ . Непосредственно подстановкой находим:  $f(\bar{0}) = \bar{1}$ ,  $g(\bar{0}) = \bar{1}$ . Остальные значения многочленов найдем по схеме Горнера, деля многочлены на  $x - \bar{1}$  и на  $x - \bar{2}$ :

$$\begin{array}{c|cccccc} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} = f(\bar{1}) \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} = f(\bar{2}) \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} = g(\bar{1}) \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} = g(\bar{2}) \end{array}$$

Итак,

$$\begin{aligned} f(\bar{0}) &= \bar{1}, f(\bar{1}) = \bar{0}, f(\bar{2}) = \bar{0}; \\ g(\bar{0}) &= \bar{1}, g(\bar{1}) = \bar{0}, g(\bar{2}) = \bar{0}, \end{aligned}$$

т. е.  $f(x) = g(x)$  для всех  $x \in Z_3$ .

**О т в е т.**  $f \sim g$ . Корнями многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  являются  $\bar{1}$  и  $\bar{2}$ .

**Задача 10.** В кольце  $Z_5[x]$  многочлен

$$f(x) = 4x^9 - 3x^7 + 2x^6 + 3x^3 - 3x^2 - x - \bar{1}$$

заменить эквивалентным ему многочленом  $g(x)$  степени не выше 4 и найти корни обоих многочленов.

**Решение.** Многочлен  $f(x)$  степени  $n$  ( $n \geq p$ ) из кольца  $Z_p[x]$  можно при простом  $p$  заменить эквивалентным ему многочленом  $g(x)$  степени не выше  $p - 1$ . В самом деле, если  $(x, p) = 1$ , то по малой теореме Ферма  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Представляя любое натуральное  $n$  в виде  $n = (p - 1)q + r$ , где  $1 \leq r \leq p - 1$ , получим:  $x^n = (x^{p-1})^q x^r \equiv x^r \pmod{p}$ , т. е.  $x^n \equiv x^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, p - 1$ . Если же  $(x, p) = p$ , т. е.  $x : p$ , то и подавно  $(x^n - x^r) : p$ ,  $x^n \equiv x^r \pmod{p}$ .

Итак, при любом  $x \in Z$  имеем:  $x^n \sim x^r$ , где  $1 \leq r \leq p - 1$ . В частности, для  $p = 5$

$$\begin{aligned} x^9 &= x^{4 \cdot 2 + 1} \sim x, \quad x^7 = x^{4 \cdot 1 + 3} \sim x^3, \quad x^6 = x^{4 \cdot 1 + 2} \sim x^2, \\ f(x) &\sim g(x) = 4x - 3x^3 + 2x^2 + 3x^3 - 3x^2 - x - \bar{1} = \\ &= -x^2 + 3x - \bar{1}. \end{aligned}$$

Корни многочлена  $g(x)$  находим, испытывая все значения  $x$  из  $Z_5$ , т. е. полагая  $x = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$  (или  $x = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, -\bar{2}, -\bar{1}$ ). Вычисления проводим по схеме Горнера:

$\overline{1}$	$-\overline{1}$	$\overline{3}$	$-\overline{1}$	$\overline{g}(0) = -\overline{1}.$
$\overline{2}$	$-\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1} = g(\overline{1})$	
$-\overline{1}$	$-\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1} = g(\overline{2})$	
$-\overline{2}$	$-\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0} = g(-\overline{1})$	
	$-\overline{1}$	$\overline{0}$	$-\overline{1} = g(-\overline{2})$	

О т в е т.  $f(x) \sim g(x) = x^2 - \overline{3}x - \overline{1} \in Z_5[x]; \quad x = -\overline{1} = \overline{4}$  — корень  $f(x)$  и  $g(x)$ .

**Задача 11.** Решить алгебраическое уравнение

$$16x^7 + 11x^6 - 9x^5 - 11x^3 - x - 4 \equiv 0 \pmod{5}. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Перейдем от сравнения (1) к уравнению

$$x^7 + x^6 + x^5 - x^3 - x - \overline{4} = \overline{0}, \quad (2)$$

которое получается заменой всех коэффициентов в (1) (а также свободного члена) соответствующими классами вычетов по модулю 5. Если какое-либо число  $x$  удовлетворяет сравнению (1), то соответствующий класс вычетов удовлетворяет уравнению (2); наоборот, если какой-либо класс вычетов удовлетворяет (2), то все числа этого класса удовлетворяют (1). В этом смысле сравнение (1) (над кольцом  $Z$ ) равносильно уравнению (2) (над полем  $Z_5$ ).

Многочлен, стоящий в левой части уравнения (2), эквивалентен  $x^2 - \overline{4}$ . Следовательно, уравнение (2) равносильно  $x^2 - \overline{4} = \overline{0}$ . Последнее уравнение имеет два корня:  $x_1 = \overline{2}$ ,  $x_2 = -\overline{2} = \overline{3}$ . Значит, решениями исходного сравнения будут числа вида  $5q + 2$  и  $5q + 3$ , где  $q$  — любое целое число.

О т в е т.  $x_1 \equiv 2 \pmod{5}$ ,  $x_2 \equiv 3 \pmod{5}$ .

### Упражнения

1. Найти сумму, разность и произведение многочленов:

а)  $f(x) = 2 + (1+i)x - 3ix^2$ ,  $g(x) = -2ix + ix^3 + x^4 \in Z[i][x]$ ,  
где  $Z[i] = \{a + bi \mid a, b \in Z\}$  — кольцо целых гауссовских чисел;

б)  $f(x) = 1 + (2-i)x^2$ ,  $g(x) = 3i + ix + (1+i)x^2 \in Z[i][x]$ ;

в)  $f(x) = -\overline{2} - \overline{5}x^2 + \overline{3}x^3$ ,  $g(x) = \overline{3} - \overline{6}x + \overline{2}x^3 \in Z_7[x]$ ;

г)  $f(x) = \overline{2} + x - \overline{3}x^3 + \overline{4}x^4$ ,  $g(x) = \overline{1} + \overline{4}x - \overline{3}x^3 + \overline{3}x^4 \in Z_5[x]$ ;

д)  $f(x) = 2 + 1,5 - 2,33x^3$ ,  $g(x) = -3 - 2,5x + x^2 - x^3 + 2x^4 - x^5 \in Q[x]$ ;

е)  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - x^3$ ,  $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \in Q[x]$ .

2. Используя схему Горнера, разделить в кольце  $K[x]$  многочлен  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - a$ :

а)  $K = Z$ ,  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ ,  $a = 2$ ;

б)  $K = Z$ ,  $f(x) = 9x^3 + 8x^2 - 10x$ ,  $a = -3$ ;

- в)  $K = Z[i], = \{a + bi \mid a, b \in Z\}, f(x) = 4x^3 + x^2, a = -1 - i;$   
 г)  $K = Z[\sqrt[3]{3}] = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in Z\}, f(x) = 2x^6 - (2 + 40\sqrt[3]{3})x^3 + (15 - 70\sqrt[3]{3})x - 150, a = 2\sqrt[3]{3};$   
 д)  $K = Z_7, f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2, a = \bar{2};$   
 е)  $K = Z_{11}, f(x) = 7x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 10x - 6, a = -\bar{3}.$

3. Используя схему Горнера, найти  $g(a)$ :

- а)  $g(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x + 40, a = -3;$   
 б)  $g(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, a = 4;$   
 в)  $g(x) = 3x^4 - x + 300i, a = -3 + i;$   
 г)  $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x - 5, a = 5 + i;$   
 д)  $g(x) = \bar{2}x^3 + x^2 - \bar{3}x + \bar{2} \in Z_5[x], a = \bar{3} \in Z_5;$   
 е)  $g(x) = 3x^5 - \bar{2}x^3 + x^2 + 4x - \bar{3} \in Z_7[x], a = -\bar{2} \in Z_7.$

4. Используя схему Горнера, разделить многочлен  $f(x)$  на линейный двучлен  $g(x) = ax + b, a \neq 1$ :

- а)  $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, g(x) = -x - 3 \in Z[x];$   
 б)  $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, g(x) = 3x + 3 \in Q[x];$   
 в)  $f(x) = 2ix^3 + (1 - i)x^2 - x, g(x) = (1 + i)x - (2 - 2i) \in C[x];$   
 г)  $f(x) = 2x^6 - 3\sqrt{2}x^5 + 2x^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2},$   
 $g(x) = 2x - \sqrt{2} \in R[x].$

5. Используя схему Горнера, определить кратность  $k_i$  корня  $\alpha_i$  многочлена  $f(x)$  и разложить  $f(x)$  на соответствующие множители:

- а)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \alpha = 2;$   
 б)  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \alpha = -2;$   
 в)  $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125, \alpha = 5;$   
 г)  $f(x) = x^{10} - x^9 - 3x^8 + 4x^7 + 2x^6 - 6x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \alpha_1, \alpha_2 = \pm 1;$   
 д)  $f(x) = x^8 - 6x^7 + 13x^6 - 10x^5 - 9x^4 + 32x^3 - 37x^2 + 20x - 4, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1;$   
 е)  $f(x) = x^5 - \bar{2}x^3 + x^2 - \bar{2} \in Z_3[x], \alpha = \bar{2} \in Z_3;$   
 ж)  $f(x) = x^7 - 3x^6 + x^5 - x^3 + 4x^2 - 4x + \bar{2} \in Z_5[x], \alpha_1 = \bar{1}, \alpha_2 = \bar{2} \in Z_5.$

6. Найти такие значения  $a$  и  $b$ , при которых число  $\alpha$  было бы корнем многочлена  $f(x)$  кратности не ниже, чем  $k$ :

- а)  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + 1, \alpha = -1, k = 2;$   
 б)  $f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1, \alpha = 1, k = 3;$   
 в)  $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1, \alpha = 1, k = 2.$

7. Используя формулу Лагранжа, найти в кольце  $C[x]$  многочлен  $f(x)$  степени не ниже, чем  $n$ , если даны значения  $y_i = f(x_i),$

$l = 0, 1, \dots, n$ :

а)  $n = 3$ ;  $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3; y_0 = y_1 = y_2 = 0, y_3 = 5$ ;

б)  $n = 3$ ;  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4; y_0 = 2, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 3$ ;

в)  $n = 3$ ;  $x_0 = 1, x_1 = i, x_2 = -1, x_3 = -i; y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4$ ;

г)  $n = 4$ ;  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4; y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4, y_4 = 6$ ;

д)  $n = 4$ ;  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3; y_0 = 6, y_1 = 5, y_2 = 0, y_3 = 3, y_4 = 2$ .

8. В кольце  $Z_p[x]$  найти многочлен  $g(x)$  наименьшей степени, эквивалентный многочлену  $f(x)$ :

а)  $f(x) = 2x^{35} - 6x^{15} + 2x^8 - 3x^5 + x + 5, p = 11$ ;

б)  $f(x) = -2x^{29} + 5x^{28} + 7x^{18} + 2x^{17} - 4x^{16} + 4x^{15} + 6x^6 - 4x^3 - 3x^2 - 8x + 2, p = 13$ .

9. Решить алгебраические сравнения  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ , перейдя сначала к уравнению  $\bar{f}(x) = \bar{0}$ , где  $\bar{f}(x) \in Z_p[x]$ , затем к уравнению  $\bar{g}(x) = \bar{0}$ , где  $\bar{g}(x)$  — многочлен, эквивалентный многочлену  $\bar{f}(x)$ , имеющий степень не выше, чем  $p - 1$ :

а)  $x^{10} - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;

б)  $x^8 + 2x^7 + x^5 - x^4 - x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ ;

в)  $x^{16} + 3x^8 - 5x^7 - x^4 + 6x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ ;

г)  $x^{10} + x^8 + x^7 - x^4 - x^2 + 4x - 3 \equiv 0 \pmod{7}$ ;

д)  $x^{101} + 3x^{15} + x^{11} - 3x^5 + 9x^2 + 10x - 5 \equiv 0 \pmod{11}$ ;

е)  $x^{14} - x^{13} - x^2 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ .

10. Показать, что любые два эквивалентных многочлена  $f$  и  $g$  из кольца  $Z_p[x]$  ( $p$  — простое число), имеющие степень не выше, чем  $p - 1$ , равны как алгебраические выражения.

## § 2. ДЕЛЕНИЕ В КОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ. НОД И НОК МНОГОЧЛЕНОВ

**Вопросы программы.** Многочлены над полем. Деление с остатком. Наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное многочленов. Результат.

**Л и т е р а т у р а:** Винберг Э. Б. Гл. II, § 1 (п. 1—6).

**Задача 1.** Разделить с остатком многочлен  $f(x) = 6x^4 + 3x^2 + 1$  на многочлен  $g(x) = 3x^2 - x + 1$ .

**Р е ш е н и е.** В кольце многочленов над произвольным полем  $P$  справедлива теорема о делении с остатком.

Для любых многочленов  $f(x)$  и  $g(x) \neq 0$  из  $P[x]$  существует единственная пара многочленов  $q(x)$  и  $r(x)$  из  $P[x]$ , удовлетворяю-

щая условиям:

$$1) f(x) = g(x)q(x) + r(x);$$

$$2) \text{ст. } r(x) < \text{ст. } g(x).$$

Степень нуль-многочлена принимается равной  $-\infty$ , так что для  $r(x) = 0$  условие 2) тоже выполняется.

Многочлен  $q(x)$  называется неполным частным (или просто частным), а  $r(x)$  — остатком от деления  $f(x)$  на  $g(x)$ .

В данной задаче рассматриваем  $f(x)$  и  $g(x)$  как многочлены над  $Q$  — полем рациональных чисел.

Деление многочленов производится «углом», как деление многозначных чисел. Сначала делим старший член делимого  $6x^4$  на старший член делителя  $3x^2$ , получаем старший член  $2x^2$  частного, затем все члены делителя умножаем на  $2x^2$  и записываем их под «подобными» членами делимого, вычитаем из делимого полученное произведение. Затем старший член разности делим на старший член  $3x^2$  делителя и т. д., пока не получим при вычитании многочлен  $r(x)$  степени меньшей, чем 2. Проводя соответствующие вычисления, получаем:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 -6x^4 \quad + 3x^2 \quad + 1 \\
 \underline{6x^4 - 2x^3 + 2x^2} \phantom{+ 1} \\
 2x^3 + x^2 \phantom{+ 1} \\
 -2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \\
 \hline
 \frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \\
 -\frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{5}{9} \\
 \hline
 -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9} = r(x)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 + 1 \quad | \quad 3x^2 - x + 1 \\
 \hline
 2x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} = q(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{Ответ. } q(x) = 2x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}, \quad r(x) = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9} \in Q[x].$$

**Задача 2.** Разделить с остатком многочлен

$$f(x) = 54x^4 + 3x^2 + 1$$

$$g(x) = 3x^2 - x + 1.$$

**Решение.** Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  можно рассматривать над  $Z$  — кольцом целых чисел. Теорема о делении с остатком справедлива и в кольце  $Z[x]$ , если старший коэффициент делимого  $a_0$  делится на  $b^{n-m+1}$ , где  $b_0$  — старший коэффициент делителя,  $n$  — степень делимого,  $m$  — степень делителя. В данном случае  $a_0 = 54$ ,  $b_0 = 3$ ,  $n = 4$ ,  $m = 2$  и  $54 : 3^{4-2+1}$ , следовательно, частное  $q(x)$  и остаток  $r(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами. Имеем:

$$\begin{array}{r}
-54x^4 \phantom{+ 18x^3} + 3x^2 \phantom{+ 18x^2} + 1 \phantom{+ 18x^3} \mid 3x^2 - x + 1 \\
\hline
-54x^4 - 18x^3 + 18x^2 \phantom{+ 1} \\
\hline
\phantom{-54x^4 -} 18x^3 - 15x^2 + 1 \\
\phantom{-54x^4 -} - 18x^3 - 6x^2 + 6x \\
\hline
\phantom{-54x^4 - 18x^3 -} 9x^2 - 6x + 1 \\
\phantom{-54x^4 - 18x^3 -} - 9x^2 + 3x - 3 \\
\hline
\phantom{-54x^4 - 18x^3 - 9x^2 -} -9x + 4 = r(x)
\end{array}$$

О т в е т.  $q(x) = 18x^2 + 6x - 3$ ,  $r(x) = -9x + 4 \in Z[x]$ .

**Задача 3.** В кольце  $Q[x]$  найти делитель  $g(x)$ , если известны делимое  $f(x)$ , частное  $q(x)$  и остаток  $r(x)$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 - 9x^4 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \\
q(x) &= x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9}, \quad r(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

**Р е ш е н и е.** Для нахождения делителя  $g(x)$  используем равенство

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

из которого получаем:

$$f(x) - r(x) = g(x)q(x).$$

Итак, чтобы найти делитель  $g(x)$ , надо разность  $f(x) - r(x)$  разделить на частное  $q(x)$ :

$$\begin{array}{r}
f(x) - r(x) = 3x^5 - 9x^4 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x. \\
\begin{array}{r}
3x^5 - 9x^4 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x \mid x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9} \\
- 3x^5 - 8x^4 - \frac{1}{3}x^3 \\
\hline
- x^4 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{47}{9}x^2 - \frac{2}{9}x \\
- - x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 \\
\hline
2x^3 - \frac{16}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \\
- 2x^3 - \frac{16}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \\
\hline
0
\end{array}
\end{array}$$

О т в е т.  $g(x) = 3x^3 - x^2 + 2x \in Q[x]$ .

**Задача 4.** Найти, при каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ , где

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b, \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 2.$$

**Р е ш е н и е.** Многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x) \neq 0$  тогда и только тогда, когда остаток от деления  $f(x)$  на  $g(x)$  равен



нулю. Имеем:

$$\begin{array}{r}
 - \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b}{2x^4 - 3x^3 + 2x^2} \Bigg| \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} \\
 \hline
 - \frac{6x^3 - 4x^2 + ax + b}{6x^3 - 9x^2 + 6x} \\
 \hline
 \frac{5x^2 + (a-6)x + b}{-5x^2 - \frac{15}{2}x + 5} \\
 \hline
 \left(a + \frac{3}{2}\right)x + (b-5) = r(x)
 \end{array}$$

$$f(x) : g(x) \Rightarrow r(x) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a + \frac{3}{2} = 0, \\ b - 5 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = -\frac{3}{2}, \\ b = 5. \end{array} \right\}$$

Ответ.  $a = -\frac{3}{2}$ ,  $b = 5$ .

**Задача 5.** В кольце  $Q[x]$  найти наибольший общий делитель  $D(x)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3, g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$$

**Решение.** Наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  — это такой их общий делитель, который сам делится на любой общий делитель этих многочленов. Для нахождения НОД многочленов используем алгоритм Евклида — метод последовательного деления. Так как НОД многочленов определяется с точностью до ассоциированности (до множителя 0-й степени), то многочлены можно умножить на любые числа, отличные от нуля.

В данной задаче многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  целочисленные, т. е.  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Чтобы в частном  $q(x)$  и остатке  $r(x)$  не было дробных коэффициентов, надо  $f(x)$  умножить на  $b_0^{n-m+1}$ , где  $b_0$  — старший коэффициент  $g(x)$ , степень  $f(x)$  равна  $n$ , степень  $g(x)$  равна  $m$ .

В данном случае  $b_0 = 3$ ,  $n = 5$ ,  $m = 4$ . Имеем<sup>1</sup>:

1)  $9f(x) : g(x)$ :

$$\begin{array}{r}
 - \frac{18x^5 - 27x^4 - 45x^3 + 9x^2 + 54x + 27}{18x^5 + 12x^4 - 18x^3 - 30x^2 - 12x} \Bigg| \frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{6x - 13 = q(x)} \\
 \hline
 - \frac{39x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 66x + 27}{-39x^4 - 26x^3 + 39x^2 + 65x + 26} \\
 \hline
 \frac{-x^3}{+x} + 1 = r(x)
 \end{array}$$

<sup>1</sup> Здесь и далее запись  $f(x) : g(x)$  означает, что производится деление с остатком многочлена  $f(x)$  на  $g(x)$ .

2)  $g(x) : r(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} -3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & -x^3 + x + 1 \\ -3x^4 & -3x - 2 = q_1(x) \\ \hline & 2x^3 - 2x - 2 \\ -2x^3 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

Выпишем систему равенств алгоритма Евклида:

$$\begin{aligned} 9f(x) &= g(x)q(x) + r(x), \\ g(x) &= r(x)q_1(x). \end{aligned}$$

Последний не равный нулю остаток (в данном случае  $r(x)$ ) и является наибольшим общим делителем многочленов. Обычно НОД многочленов над полем  $Q$  берется с целыми, взаимно простыми в своей совокупности коэффициентами (примитивный многочлен) и с положительным старшим коэффициентом.

О т в е т.  $D(x) = (f(x), g(x)) = -r(x) = x^3 - x - 1$ .

З а м е ч а н и е. В процессе деления  $f(x)$  на  $g(x)$  можно не только сами многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , но и «промежуточные остатки» умножать на какие угодно числа (не равные нулю), чтобы в частном получались только целые коэффициенты. При этом, конечно, частное искажается, но остаток от деления остается (с точностью до ассоциированности) тем же. Результаты после умножения отделяем от предыдущих двойной чертой. Например, на первом шаге такое «деление» будет выглядеть следующим образом:

1)  $3f(x) : g(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} -6x^5 - 9x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 18x + 9 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ -6x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 4x & 2x - 13 \\ \hline & -13x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 22x + 9 \\ \hline & -39x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 66x + 27 \\ - & -39x^4 - 26x^3 + 39x^2 + 65x + 26 \\ \hline & -x^3 & + x + 1 = r(x) \end{array}$$

**Задача 6.** В кольце  $Z_5[x]$  найти наибольший общий делитель  $D(x)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$f(x) = x^2 + \bar{2}x + \bar{2}, \quad g(x) = \bar{3}x^3 - \bar{1}.$$

**Р е ш е н и е.** 1) Делим  $g(x)$  на  $f(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} -\bar{3}x^3 & -\bar{1} \\ -\bar{3}x^3 + x^2 + x & x^2 + \bar{2}x + \bar{2} \\ \hline & -x^2 - x - \bar{1} \\ & -x^2 - \bar{2}x - \bar{2} \\ \hline & x + \bar{1} = r(x) \end{array}$$

2) Делим  $f(x)$  на  $r(x)$ . Используем схему Горнера:

$$\begin{array}{r|rrr} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ -\bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array}, \quad q_1(x) = x + \bar{1}, \quad r_1 = \bar{1}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) q_1(x) + r(x), \\ f(x) &= r(x) q_1(x) + r_1. \end{aligned}$$

Так как любой элемент поля  $Z_5$ , отличный от нуля, является тривиальным делителем любого многочлена из кольца  $Z_5[x]$ , то  $r(x)$  делится на  $r_1$  без остатка:  $r(x) = r_1 \cdot r(x) = \bar{1} \cdot r(x)$ .

Таким образом,  $D(x) = r_1 = \bar{1} \in Z_5$  — многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты.

О т в е т.  $D(x) = (f(x), g(x)) = \bar{1} \in Z_5$ .

**Задача 7.** В кольце  $Z_7[x]$  найти наибольший общий делитель  $D(x)$  многочленов:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - \bar{2}x^2 + x + \bar{4}, \quad g(x) = x^4 + \bar{6}x^2 + \bar{2}, \\ h(x) &= x^4 - \bar{4}x^2 + \bar{4}x - \bar{1}. \end{aligned}$$

**Р е ш е н и е.** Сначала найдем НОД двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ :  $D_1(x) = (f(x), g(x))$ , затем НОД двух многочленов  $D_1(x)$  и  $h(x)$ :  $D(x) = (D_1(x), h(x))$ . НОД трех многочленов совпадает с  $D(x)$ :

$$D(x) = (f(x), g(x), h(x)) = ((f(x), g(x)), h(x)).$$

Проведем необходимые вычисления:

1)  $f(x) : g(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot 1 + r(x) \Rightarrow r(x) = f(x) - g(x) = \\ &= -x^2 + x + \bar{2}. \end{aligned}$$

2)  $g(x) : r(x)$ :

$$\begin{array}{r|rr} -x^4 & +\bar{6}x^2 & +\bar{2} \\ x^4 - x^3 - \bar{2}x^2 & & \end{array} \quad \begin{array}{r} -x^2 + x + \bar{2} \\ \hline -x^3 + x^2 + \bar{2} \\ \hline x^3 - x^2 - \bar{2}x \\ \hline -\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{2} \\ \hline \bar{2}x^2 - \bar{2}x - \bar{4} \\ \hline \bar{4}x + \bar{6} = r_1(x), \quad r_1(x) = \bar{4}x + \bar{6}. \end{array}$$

3)  $r(x) : \left[-\frac{1}{\bar{4}} r_1(x)\right]$ .

Учитывая, что  $(\bar{4})^{-1} = \bar{2}$ , будем иметь:  $(\bar{4})^{-1} r_1(x) = \bar{2} r_1(x) = x - \bar{2}$ . Деление  $r(x)$  на  $x - \bar{2}$  выполняем по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrr} & -\bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} = r_2 \Rightarrow r(x) : (x - \bar{2}) \Rightarrow D_1(x) = (f(x), g(x)) = x - \bar{2}. \end{array}$$

4)  $h(x) : D_1(x)$ :

$$\frac{\overline{2}}{2} \left| \begin{array}{ccccc} \overline{1} & \overline{0} & -\overline{4} & \overline{4} & -\overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} \end{array} \right| = r_3 \Rightarrow h(x) : D_1(x) \Rightarrow D(x) = (D_1(x), h(x)) = x - \overline{2}.$$

О т в е т.  $D(x) = (f(x), g(x), h(x)) = x - \overline{2} \in Z_7[x]$ .

**Задача 8.** В кольце  $C[x]$  с помощью алгоритма Евклида найти линейное представление НОД двух многочленов:

$$f(x) = x^4 + (2 - i)x^3 - x - (2 - i), \quad g(x) = x^5 + (2 - i)x^4 + ix + (1 + 2i).$$

**Р е ш е н и е.** Если  $D(x)$  — наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $C[x]$ , то в кольце  $C[x]$  существуют многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  такие, что

$$D(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x). \quad (1)$$

Для нахождения  $D(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  используем алгоритм Евклида.

1) Делим  $g(x)$  на  $f(x)$ :

$$\begin{array}{r} x^5 + (2 - i)x^4 + ix + (1 + 2i) \\ - x^5 + (2 - i)x^4 - x^2 + (-2 + i)x \\ \hline x^2 + 2x + (1 + 2i) = r(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} + ix + (1 + 2i) \\ \hline x = q(x) \end{array}$$

2) Делим  $f(x)$  на  $r(x)$ :

$$\begin{array}{r} x^4 + (2 - i)x^3 + 2x^3 + (1 + 2i)x^2 \\ - x^4 + (2 - i)x^3 - x^2 + (-2 + i)x \\ \hline -ix^3 + (-1 - 2i)x^2 - x + (-2 + i) \\ - -ix^3 - 2ix^2 + (2 - i)x \\ \hline -x^2 + (-3 + i)x + (-2 + i) \\ - -x^2 - 2x + (-1 - 2i) \\ \hline (-1 + i)x + (-1 + 3i) = r_1(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} -x + (-2 + i) \\ \hline x^2 + 2x + (1 + 2i) \\ \hline x^2 - ix - 1 = q_1(x) \end{array}$$

3) Делим  $r(x)$  на  $(-1 + i)^{-1}r_1(x) = x + 2 - i$ :

$$\frac{\quad}{-2 + i} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 + 2i \\ 1 & i & 0 \end{array} \right| = r_2$$

Выпишем систему равенств алгоритма Евклида:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \quad (2)$$

$$f(x) = r(x)q_1(x) + r_1(x), \quad (3)$$

$$r(x) = \frac{1}{-1 + i} r_1(x)(x + i).$$

НОД многочленов совпадает с точностью до множителя 0-й степени с  $r_1(x)$ :

$$D(x) = (f(x), g(x)) = \frac{1}{-1 + i} r_1(x) = x + 2 - i.$$

Чтобы найти линейное представление НОД, выразим сначала  $r_1(x)$

из равенства (3):

$$r_1(x) = f(x) - r(x)q_1(x).$$

Затем в правую часть подставим выражение  $r(x)$  из равенства (2) и приведем «подобные члены» относительно  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - [g(x) - f(x)q(x)]q_1(x) = \\ &= f(x)[1 + q(x)q_1(x)] + g(x)[-q_1(x)]. \end{aligned}$$

Подставим в правую часть последнего равенства найденные многочлены  $q(x)$  и  $q_1(x)$  и обе части полученного равенства разделим на  $-1 + i$ . Получим:

$$\begin{aligned} D(x) = x + 2 - i &= f(x) \frac{x^3 - ix^2 - x + 1}{-1 + i} + g(x) \frac{-x^2 + ix + 1}{-1 + i} = \\ &= f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x). \end{aligned}$$

$$\text{О т в е т. } \varphi(x) = -\frac{1+i}{2}x^3 - \frac{1-i}{2}x^2 + \frac{1+i}{2}x - \frac{1+i}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{1+i}{2}x^2 + \frac{1-i}{2}x - \frac{1+i}{2} \in C[x].$$

**З а м е ч а н и е.** Пусть степень  $f(x) = n$ , степень  $g(x) = m$ , степень  $D(x) = k$ . Среди всех представлений НОД в виде (1) всегда существует такое, в котором степень  $\varphi(x) < m - k$ , степень  $\psi(x) < n - k$ . (4)

В предыдущей задаче мы получили многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , степени которых как раз удовлетворяют указанным неравенствам: степень  $\varphi(x) < 5 - 1 = 4$ , степень  $\psi(x) < 4 - 1 = 3$ .

**Задача 9.** Доказать, что если имеет место равенство (1), где  $D(x) = (f(x), g(x))$ , то справедливо и равенство

$$D(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x), \quad (5)$$

где  $u(x)$  есть остаток от деления  $\varphi(x)$  на  $g_1(x) = \frac{g(x)}{D(x)}$ , а  $v(x)$  — остаток от деления  $\psi(x)$  на  $f_1(x) = \frac{f(x)}{D(x)}$  (и тем самым степень  $u(x) \leq m - k - 1$ , степень  $v(x) < n - k - 1$ , где  $n$ ,  $m$  и  $k$  — степени  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $D(x)$ ).

**Р е ш е н и е.** Предположим сначала, что  $D(x) = 1$ , т. е.  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты. В этом случае  $f_1(x) = f(x)$ ,  $g_1(x) = g(x)$ ,

$$\varphi(x) = g(x)\varphi_1(x) + u(x), \quad \psi(x) = f(x)\psi_1(x) + v(x),$$

где степень  $u(x) \leq m - 1$ , степень  $v(x) \leq n - 1$ . Равенство (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} 1 &= f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = f(x)u(x) + \\ &+ g(x)v(x) + f(x)g(x)(\varphi_1(x) + \psi_1(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\varphi_1(x) + \psi_1(x) = 0$  (в противном случае мы имели бы степень  $fg(\varphi_1 + \psi_1) \geq n + m$ , степень  $fu + gv \leq n + m - 1$  и многочлен  $fu + gv + fg(\varphi_1 + \psi_1)$  имел бы сте-

пень  $\geq n + m$ ). Итак, для случая взаимно простых  $f(x)$  и  $g(x)$  имеем:

$$1 = f(x) u(x) + g(x) v(x),$$

что и требовалось получить.

Пусть теперь многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  какие угодно. Поскольку  $f_1(x)$  и  $g_1(x)$  взаимно просты, то

$$1 = f_1(x) u(x) + g_1(x) v(x),$$

где ст.  $u(x) < \text{ст. } f_1(x) = n - k$ , а ст.  $v(x) < \text{ст. } g_1(x) = m - k$ . Умножая обе части этого равенства на  $D(x)$ , получим:

$$D(x) = f(x) u(x) + g(x) v(x),$$

т. е. искомое представление для  $D(x)$ .

**Задача 10.** Убедиться, что многочлены

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x - 1$$

из кольца  $Q[x]$  взаимно просты, и найти методом неопределенных коэффициентов такие многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , чтобы выполнялось равенство

$$f(x) \varphi(x) + g(x) \psi(x) = 1. \quad (6)$$

**Решение.** По доказанному (см. задачу 9) можно считать ст.  $\varphi(x) < 2 - 0 = 2$ , ст.  $\psi(x) < 3 - 0 = 3$ , т. е.  $\varphi(x) = ax + b$ ,  $\psi(x) = cx^2 + dx + e$ , где  $a, b, c, d, e \in Q$ .

Используем равенство (6):

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 2)(ax + b) + (x^2 - x - 1)(cx^2 + dx + e) = 1. \quad (7)$$

Так как многочлены, стоящие в левой и правой частях (7), равны как алгебраические выражения, то равны их коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  (при  $x^4, x^3, x^2, x, x^0 = 1$ ). Приравнявая эти коэффициенты, получаем систему 5 линейных уравнений с 5 неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} 3a + c &= 0, \\ -2a + 3b - c + d &= 0, \\ a - 2b - c - d + e &= 0, \\ 2a + b - d - e &= 0, \\ 2b - e &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Чтобы решить эту систему, выразим сначала  $c$  из 1-го,  $e$  — из 5-го,  $d$  — из 2-го уравнений через  $a$  и  $b$ :

$$c = -3a, \quad e = -1 + 2b, \quad d = 2a - 3b + c = -a - 3b. \quad (9)$$

Подставив полученные выражения для  $c, e, d$  в 3-е и 4-е уравнения системы (8), получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a - 2b + 3a + a + 3b - 1 + 2b &= 0, \\ 2a + b + a + 3b + 1 - 2b &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 5a + 3b &= 1, \\ 3a + 2b &= -1, \end{aligned} \right\}$$

решение которой:  $a = 5, b = -8$ .

Наконец, используя равенства (9), найдем:

$$c = -15, d = 19, e = -17.$$

О т в е т.  $\varphi(x) = 5x - 8, \psi(x) = -15x^2 + 19x - 17$ .

**Задача 11.** В кольце  $Q[x]$  найти такие многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , чтобы выполнялось равенство

$$f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = D(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2, \\ g(x) &= x^4 - x^2 - 2x - 1, \\ D(x) &= (f(x), g(x)) = x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

**Р е ш е н и е.** Чтобы иметь дело с многочленами меньшей степени, делим обе части равенства (10) на  $D(x)$  и получаем равенство

$$f_1(x)\varphi(x) + g_1(x)\psi(x) = 1,$$

$$\text{где } f_1(x) = \frac{f(x)}{D(x)} = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{D(x)} = x^2 - x - 1.$$

Далее используем результаты решения задачи 10.

О т в е т.  $\varphi(x) = 5x - 8, \psi(x) = -15x^2 + 19x - 17$ .

**Задача 12.** В кольце  $Q[x]$  найти наименьшее общее кратное  $m(x)$  многочленов:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2, \\ g(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2, \\ h(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

**Р е ш е н и е.** НОК многочленов — это такое общее кратное, которое является делителем любого общего кратного. Другая характеристика НОК многочленов — общее кратное наименьшей степени. НОК трех многочленов находится следующим образом. Сначала находится НОК двух многочленов по формуле

$$m_1(x) = [f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{D_1(x)},$$

где  $D_1(x) = (f(x), g(x))$ . Затем находится НОК трех многочленов как НОК полученного многочлена  $m_1(x)$  и третьего многочлена  $h(x)$ :

$$m(x) = [f(x), g(x), h(x)] = [m_1(x), h(x)] = \frac{m_1(x)h(x)}{D_2(x)},$$

где  $D_2(x) = (m_1(x), h(x))$ .

Последовательность вычислений выглядит так:

I. 1)  $f(x) : g(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ \underline{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x} & x - 1 \\ - & x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \\ - & x^3 + 2x^2 + x - 2 \\ \hline & 2x^2 - 6x + 4 = r(x) \end{array}$$

$$2) g(x) : \left[ \frac{1}{2} r(x) \right]:$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 2x^2 - x + 2 \mid x^2 - 3x + 2 \\ -x^3 - 3x^2 + 2x \\ \hline x^2 - 3x + 2 \\ -x^2 - 3x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D_1(x) = (f(x), g(x)) = \frac{1}{2} r(x) = x^2 - 3x + 2,$$

$$m_1(x) = [f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{D_1(x)} = f(x) \frac{g(x)}{D_1(x)} =$$

$$= (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)(x + 1) = x^5 - 2x^4 - x + 2.$$

$$\text{II. 1) } m_1(x) : h(x):$$

$$\begin{array}{r} -x^5 - 2x^4 \phantom{+ 3x^3} - x + 2 \mid x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ -x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 \\ \hline -4x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ -4x^4 - 8x^3 - 4x^2 - 8x \\ \hline 7x^3 + 2x^2 + 7x + 2 \\ -7x^3 + 14x^2 + 7x + 14 \\ \hline -12x^2 \phantom{+ 7x + 14} - 12 = r_1(x) \end{array}$$

$$2) h(x) : \left[ -\frac{1}{12} r_1(x) \right]:$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + x + 2 \mid x^2 + 1 \\ -x^3 \phantom{+ 2x^2} + x \\ \hline 2x^2 + 2 \\ -2x^2 + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D_2(x) = (m_1(x), h(x)) = x^2 + 1; m(x) = [m_1(x), h(x)] =$$

$$= \frac{m_1(x)h(x)}{D_2(x)} = m_1(x) \frac{h(x)}{D_2(x)} = (x^5 - 2x^4 - x + 2)(x + 2) =$$

$$= x^6 - 4x^4 - x^2 + 4.$$

$$\text{О т в е т. } m(x) = [f(x), g(x), h(x)] = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4.$$

**Задача 13.** С помощью результата двух многочленов установить, являются ли взаимно простыми многочлены:

$$f(x) = 3x^3 - 2x + 4, \quad g(x) = 2x^2 - 2x + 3.$$

**Р е ш е н и е.** Результат  $R(f, g)$  двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  — это некоторый определитель  $(n + m)$ -го порядка, где  $n = \text{ст. } f(x)$ ,  $m = \text{ст. } g(x)$ . В данном случае  $n = 3$ ,  $m = 2$ . Имеем:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \left. \begin{array}{l} \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \end{array} \right\} m \quad \uparrow \quad \left. \begin{array}{l} \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \\ \phantom{=} \end{array} \right\} n - \frac{3}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -\frac{13}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -\frac{13}{2} & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 - \frac{2}{3} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ = 2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -\frac{13}{2} & 4 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -6 & 4 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 2 \cdot 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} \frac{13}{2} & -6 & 4 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{13}{2} & -6 & 4 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\
&\quad \leftarrow -7 \\
&= 2 \begin{vmatrix} \frac{99}{2} & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \frac{99}{2} & 4 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 2 \left( \frac{297}{2} - 64 \right) = 169 \neq 0.
\end{aligned}$$

Определители 5-го и 4-го порядка мы разложили по 1-му столбцу, предварительно получив в нем нули (кроме одного элемента), а определитель 3-го — по 2-й строке, предварительно прибавив к 1-му столбцу 2-й, умноженный на  $-7$ . Результат  $R(f, g)$  не равен нулю, следовательно, многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты.

### Упражнения

1. Разделить с остатком многочлен  $f(x)$  на  $g(x)$ :

- а)  $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6$ ,  $g(x) = x^2 - 3x - 1 \in Z[x]$ ;
- б)  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + 1 \in Z[x]$ ;
- в)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ ,  $g(x) = 3x^2 - 2x - 1 \in Q[x]$ ;
- г)  $f(x) = (10 + 5i)x^4 - (15 + 5i)x^2 + (10 + 30i)x + (10 - 5i)$ ,  
 $g(x) = (2 + i)x^2 - 3x + i \in C[x]$ ;
- д)  $f(x) = \overline{6}x^4 + \overline{5}x^2 - \overline{2}$ ,  $g(x) = x^3 - \overline{2}x - \overline{1} \in Z_7[x]$ ;
- е)  $f(x) = \overline{2}x^5 - \overline{3}x^4 + \overline{2}x^3 - \overline{3}x + \overline{1}$ ,  $g(x) = \overline{2}x^2 - \overline{3}x + \overline{1} \in Z_5[x]$ .

2. Найти делитель  $g(x)$ , если известны делимое  $f(x)$ , частное  $q(x)$  и остаток  $r(x)$ :

- а)  $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$ ,  $q(x) = x^2 + 3x + 1$ ,  
 $r(x) = 63x + 25 \in Z[x]$ ;
- б)  $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 7x^2 - 5x + 3$ ,  
 $q(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ ,  $r(x) = -4x + 5 \in Z[x]$ ;
- в)  $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 7x^2 + \frac{1}{2}x - 4$ ,

$$q(x) = \frac{1}{2}x - 3, \quad r(x) = x^2 - x + 5 \in Q[x];$$

$$\text{г) } f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1, \quad q(x) = x^2 + (3 - i)x - (4 + 3i), \\ r(x) = (-2 + 5i)x + (9 + 6i) \in C[x].$$

3. Найти значения  $a$  и  $b$ , при которых многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ :

$$\text{а) } f(x) = x^3 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + 1;$$

$$\text{б) } f(x) = x^3 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1;$$

$$\text{в) } f(x) = x^4 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1;$$

$$\text{г) } f(x) = x^5 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1.$$

4. Найти наибольший общий делитель  $D(x)$  и наименьшее общее кратное  $m(x)$  многочленов:

$$\text{а) } f(x) = x^3 + \overline{4}x - \overline{3}, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - \overline{2} \in Z_5[x];$$

$$\text{б) } f(x) = \overline{3}x^2 + x - \overline{2}, \quad g(x) = \overline{2}x^4 - x^3 - \overline{4}x^2 + \overline{3}x - \overline{1} \in Z_7[x];$$

$$\text{в) } f(x) = x^4 + x + \overline{4}, \quad g(x) = \overline{2}x^4 + x^3 - \overline{3}x^2 - \overline{2}x - \overline{2} \in Z_{11}[x];$$

$$\text{г) } f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \in Q[x];$$

$$\text{д) } f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^3 + 3x^2 + 2 \in Q[x];$$

$$\text{е) } f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, \quad g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 \in R[x];$$

$$\text{ж) } f(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + x^3 - ix^2 - 1, \quad g(x) = x^4 - ix^3 - (1 - i)x^2 - x + 1 \in C[x].$$

5. С помощью алгоритма Евклида найти линейное представление наибольшего общего делителя  $D(x)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$D(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x),$$

где

$$\text{а) } f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$$

$$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4 \in Q[x];$$

$$\text{б) } f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$$

$$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 \in Q[x];$$

$$\text{в) } f(x) = x^5 - (2 + i)x^4 - x^2 + (2 + i)x,$$

$$g(x) = 2x^4 - (4 + 2i)x^3 - x^2 - x + 1 \in C[x];$$

$$\text{г) } f(x) = x^4 - ix^3 - (1 - i)x^2 - x + 1,$$

$$g(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + x^3 - ix^2 - 1 \in C[x].$$

6. Для многочленов  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $D(x) = (f(x), g(x))$  методом неопределенных коэффициентов найти многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  такие, чтобы выполнялось равенство:

$$D(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x).$$

$$\text{а) } f(x) = x^3 + 3x + 3, \quad g(x) = x^2 - x - 2, \quad D(x) = 1 \in Q[x];$$

$$\text{б) } f(x) = x^3, \quad g(x) = (1 - x)^2, \quad D(x) = 1 \in Q[x];$$

$$\text{в) } f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1,$$

$$D(x) = x + 1 \in Q[x];$$

$$\text{г) } f(x) = 2x^2 + (4 + 5i)x + (3 - 2i),$$

$g(x) = 3ix^2 - (8 - 7i)x - (1 - 5i), \quad D(x) = x + 2 + 3i \in C[x].$

7. С помощью результата установить, являются ли многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно простыми:

- а)  $f(x) = 3x^2 + x - 2, g(x) = x^2 - 2x - 2;$   
 б)  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1, g(x) = x^2 - x + 5;$   
 в)  $f(x) = x^3 - 3x + 6, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1;$   
 г)  $f(x) = x^3 + 2x - 3, g(x) = x^2 + 2x - 3.$

### § 3. РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ

**Вопросы программы.** Приводимые и неприводимые многочлены над данным полем. Разложение многочлена в произведение неприводимых многочленов и единственность такого разложения. Производная многочлена над полем нулевой характеристики. Схема вычисления значений многочлена и его производных. Теорема о неприводимом кратном множителе многочлена; кратные корни многочлена. Выделение кратных множителей. Дискриминант.

**Л и т е р а т у р а.** Винберг Э. Б. Гл. II, § 2, 3.

**Задача 1.** Над каким из полей  $Q, R$  или  $C$  приводимы многочлены:

- а)  $f(x) = x^2 - 4x - 2;$  б)  $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1;$   
 в)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 4;$  г)  $f(x) = 3x - 6?$

**Р е ш е н и е.** Многочлен  $f(x) \in P[x]$  степени  $n > 0$  называется приводимым над полем  $P$ , если он разлагается над этим полем в произведение двух многочленов меньшей степени, и неприводимым (простым) над полем  $P$  в противном случае.

Многочлен первой степени неприводим над любым полем. Многочлен 2-й или 3-й степени приводим над  $P$  тогда и только тогда, когда он имеет хотя бы один корень в  $P$ . Если  $f(x) \in P[x]$  приводим над  $P$ , то он приводим над любым расширением поля  $P$ , поэтому при исследовании  $f(x)$  на приводимость мы начинаем с возможно более узкого поля, над которым  $f(x)$  определен. Если многочлен неприводим над некоторым полем, то он неприводим над любым его подполем.

а)  $x^2 - 4x + 2 = 0, x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2} \in R \Rightarrow$

$f(x) = (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$  приводим над  $R$ ;

б)  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0, x^2(x - 1) + (x - 1) = 0, (x - 1) \times$   
 $\times (x^2 + 1) = 0,$

$x_1 = 1 \in Q \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$  приводим над  $Q$ ;

в)  $3x^2 - 2x + 4 = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{3} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{3} \in C \Rightarrow$

$$f(x) = 3 \left( x - \frac{1 + i\sqrt{11}}{3} \right) \left( x - \frac{1 - i\sqrt{11}}{3} \right) =$$

$$= (3x - 1 - i\sqrt{11}) \left( x - \frac{1 - i\sqrt{11}}{3} \right)$$

приводим над  $C$ .

О т в е т. а)  $f(x)$  приводим над полем  $R$ ; б)  $f(x)$  приводим над полем  $Q$ ; в)  $f(x)$  приводим над полем  $C$ ; г)  $f(x)$  неприводим над полем  $C(R, Q)$ .

**Задача 2.** В кольце  $Q[x]$  найти нормированные  $D(x)$  (НОД) и  $m(x)$  (НОК) многочленов  $f(x)$ ,  $g(x)$ , используя их канонические разложения:

$$f(x) = 3(x-1)^2(x^2+1)^3, \quad g(x) = 4(x+2)(x-1)^3(x^2+1).$$

Р е ш е н и е. Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  уже разложены на множители, неприводимые над полем  $Q$ . Наибольший общий делитель  $D(x)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  равен произведению общих различных между собой неприводимых множителей (делителей) многочленов; при этом множитель  $p(x)$  берется в степени, равной наименьшей из двух степеней, в которых он входит в разложение  $f(x)$  и  $g(x)$ . В данном случае

$$D(x) = (f(x), g(x)) = (x-1)^2(x^2+1) \in Q[x].$$

Наименьшее общее кратное  $m(x)$  многочленов  $f(x)$ ,  $g(x)$  должно в каноническом виде содержать все множители, которые входят в  $f(x)$  или в  $g(x)$ , в наибольшей степени:

$$m(x) = [f(x), g(x)] = (x-1)^3(x^2+1)^3(x+2).$$

Оба найденных многочлена  $D(x)$  и  $m(x)$  являются нормированными.

О т в е т.  $D(x) = (x-1)^2(x^2+1)$ ,  $m(x) = (x-1)^3(x^2+1) \times (x+2) \in Q[x]$ .

Напомним следующее определение.

Если

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

— некоторый многочлен над полем  $P$ , то многочлен

$$a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

называется производной многочлена  $f(x)$  и обозначается  $f'(x)$ . Если поле  $P$  нулевой характеристики (в частности, если  $P$  — числовое поле) и ст.  $f(x) = n \geq 1$ , то ст.  $f'(x) = n-1 \geq 0$ ; если  $f(x) = a \in P$ , то  $f'(x) = 0 \in P$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать многочлены только над числовыми полями.

**Задача 3.** Разложить по степеням  $x+2$  многочлен

$$f(x) = 2 - 3x^2 + 4x^3.$$

Р е ш е н и е. Используем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

В данном случае  $n = 3$ ,  $a = -2$ ,

$$f(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3.$$

Коэффициенты разложения можно найти двумя способами.

**С п о с о б I.** Находим производные многочлена:

$$f'(x) = -6x + 12x^2, \quad f''(x) = -6 + 24x, \quad f'''(x) = 24,$$

затем непосредственно подставляем  $x = -2$  в многочлен и его производные:

$$f(-2) = -42, \quad f'(-2) = 60, \quad f''(-2) = -54, \quad f'''(-2) = 24.$$

Итак, искомое разложение:

$$f(x) = -42 + 60(x+2) - 27(x+2)^2 + 4(x+2)^3.$$

**С п о с о б II.** Делим по схеме Горнера многочлен  $f(x)$  на  $x+2$ , затем полученное частное на  $x+2$ , затем следующее частное на  $x+2$  и т. д. (всего 4 раза). Тогда полученные остатки  $r_0, r_1, r_2, r_3$  равны соответственно свободному члену и коэффициентам при  $x+2, (x+2)^2, (x+2)^3$ . Вычисления:

	4	-3	0	-2	
-2	4	-11	22	-42	$= r_0 = f(-2)$
-2	4	-19	60	$= r_1 = f'(-2)$	
-2	4	-27	$= r_2 = \frac{f''(-2)}{2!}$		
-2	4	$= r_3 = \frac{f'''(-2)}{3!}$			

О т в е т.  $f(x) = -42 + 60(x+2) - 27(x+2)^2 + 4(x+2)^3$ .

Способ II, как видим, быстрее приводит к результату.

**Задача 4.** Используя схему Горнера, вычислить значения многочлена  $f(x)$  и его производных (до 3-го порядка включительно) при  $x = 3$ , где

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 7.$$

**Р е ш е н и е.** Значения многочлена и его производных при  $x = a$ , не находя сами производные, можно найти ( $n+1$  раз), используя многократно схему деления на  $x-a$  Горнера. Как и при решении предыдущей задачи, последовательно получаемые остатки равны коэффициентам разложения  $f(x)$  по степеням  $x-a$  (коэффициентам формулы Тейлора):

$$r_0 = f(a), \quad r_1 = f'(a), \quad r_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad r_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Отсюда находим:

$$f(a) = r_0, \quad f'(a) = r_1, \quad f''(a) = 2!r_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n!r_n.$$

В данном случае  $n = 3, a = 3$ , и вычисления дают

	2	-5	1	7
3	2	1	4	$19 = f(3)$
3	2	7	25	$= f'(3)$
3	2	13	$= \frac{f''(3)}{2!}$	$\Rightarrow f''(3) = 2! \cdot 13 = 26$
3	2	$= \frac{f'''(3)}{3!}$	$\Rightarrow f'''(3) = 3! \cdot 2 = 12$	

**О т в е т.**  $f(3) = 19$ ,  $f'(3) = 25$ ,  $f''(3) = 26$ ,  $f'''(3) = 12$ .

**Задача 5.** Вычислить значения многочлена  $f(x)$  при  $x = 3,01$  и  $x = 2,98$ , где

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 7.$$

**Р е ш е н и е.** Вычисление значений  $f(3,01)$  и  $f(2,98)$  непосредственной подстановкой  $x = 3,01$  и  $x = 2,98$  в многочлен затруднительно. Ближайшим целым числом к  $3,01$  и  $2,98$  является  $3$ . Поэтому сначала разложим многочлен  $f(x)$  по степеням  $x - 3$  по формуле Тейлора, используя 5 раз схему Горнера, а затем подставим значения  $x = 3,01$  и  $x = 2,98$ :

	1	5	9	0	7		
3	1	8	33	99	$304 = f(3)$		
3	1	11	66	$297 = f'(3)$			
3	1	14	$108 = \frac{f''(3)}{2!}$				
3	1	$17 = \frac{f'''(3)}{3!}$					
3	$1 = \frac{f^{(4)}(3)}{4!}$						

$$f(x) = 304 + 297(x-3) + 108(x-3)^2 + 17(x-3)^3 + (x-3)^4,$$

$$f(3,01) = 304 + 297 \cdot 0,01 + 108 \cdot 0,0001 + 17 \cdot 0,000001 + 0,00000001 = 304 + 2,97 + 0,0108 + 0,000017 + 0,00000001 = 306,98081701,$$

$$f(2,98) = 304 + 297(-0,02) + 108 \cdot 0,0004 + 17 \cdot (-0,000008) + 0,00000016 = 304 - 5,94 + 0,0432 - 0,000136 + 0,00000016 = 304,04320016 - 5,940136 = 298,10306416.$$

**О т в е т.**  $f(3,01) = 306,98081701$ ;  $f(2,98) = 298,10306416$ .

**Задача 6.** Разложить по степеням  $x$  многочлен  $f(x+3)$ , где

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2.$$

**Р е ш е н и е.** Задачу можно решить двумя способами.

**С п о с о б I.** Подставим  $x+3$  вместо  $x$  в многочлен

$$f(x+3) = (x+3)^5 - 5(x+3)^4 - 4(x+3)^3 + 2.$$

Используем формулу бинома Ньютона:

$$f(x+3) = \left( x^5 + 5 \cdot 3x^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3^2 x^3 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3^3 x^2 + 5 \cdot 3^4 x + 3^5 \right) - \\ - 5 \left( x^4 + 4 \cdot 3x^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 3^2 x^2 + 4 \cdot 3^3 x + 3^4 \right) - \\ - 4(x^3 + 3^2 x^2 + 3^3 x + 3^3) + 2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим ответ:  $f(x+3) = x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 36x^2 - 243x - 268$ .

С п о с о б II. Разложим многочлен  $f(x)$  по степеням  $x-3$  по формуле Тейлора, используя 6 раз схему Горнера:

	1	-5	-4	0	0	2
3	1	-2	-10	-30	-90	-268 = $f(3)$
3	1	1	-7	-51	-243 = $f'(3)$	
3	1	4	5	-36 = $f''(3)$	21	
3	1	7	26 = $f'''(3)$	31		
3	1	10 = $f^{(4)}(3)$	41			
3	1 = $f^{(5)}(3)$	51				

$$f(x) = (x-3)^5 + 10(x-3)^4 + 26(x-3)^3 - 36(x-3)^2 - 243(x-3) - 268.$$

Подставив  $x+3$  вместо  $x$ , получим тот же ответ:

$$f(x+3) = x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 36x^2 - 243x - 268.$$

Способ II быстрее приводит к результату.

**Задача 7.** Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{(x+3)^4}.$$

**Решение.** Разложим числитель  $\varphi(x) = x^3 + 2x - 3$  по степеням  $x+3$  по формуле Тейлора, используя 4 раза схему Горнера:

	1	0	2	-3
-3	1	-3	11	-36 = $\varphi(-3)$
-3	1	-7	29 = $\varphi'(-3)$	
-3	1	-9 = $\varphi''(-3)$	21	
-3	1 = $\varphi'''(-3)$	31		

$$\varphi(x) = (x+3)^3 - 9(x+3)^2 + 29(x+3) - 36.$$

Подписав знаменатель под каждым членом числителя, после сокращения дробей получим ответ:

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{(x+3)^4} = \frac{1}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^2} + \frac{29}{(x+3)^3} - \frac{36}{(x+3)^4}.$$

**Задача 8.** Найти наибольший общий делитель  $D(x)$  многочлена  $f(x)$  и его производной  $f'(x)$ , где

$$f(x) = (x-1)^3 (x^2+1)^2 (x+3) \in Q[x].$$

**Решение.** Многочлен  $f(x)$  разложен на множители (делители), неприводимые над полем  $Q$  рациональных чисел. Для нахождения  $D(x)$  используем теорему: если  $p(x)$  — неприводимый множитель (делитель) кратности  $k \geq 1$  многочлена  $f(x) \in P[x]$ , где  $P$  — поле нулевой характеристики, то  $p(x)$  является неприводимым множителем (делителем) кратности  $k-1$  производной  $f'(x)$  многочлена  $f(x)$ . (В частности, если  $k=1$ , то  $f'(x)$  не делится  $p(x)$ .)

В данном случае имеем:

$$f'(x) = (x-1)^2 (x^2+1) \varphi(x),$$

где через  $\varphi(x)$  мы обозначили произведение собственных неприводимых множителей  $f'(x)$ , т. е. таких, каких нет у многочлена  $f(x)$ .

Наибольший общий делитель  $f(x)$  и  $f'(x)$  легко найти, записав его в каноническом виде ( $D(x)$  нормированный):

$$D(x) = (x-1)^2 (x^2+1) \in Q[x].$$

О т в е т.  $D(x) = (f(x), f'(x)) = (x-1)^2 (x^2+1).$

**Задача 9.** Выделить кратные неприводимые множители многочлена

$$f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \in Q[x].$$

Найти его корни и каноническое разложение.

**Решение.** Пусть разложение многочлена  $f(x) \in P[x]$  на неприводимые неассоциированные множители (каноническое разложение) над полем  $P$  имеет вид:

$$f(x) = ap_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \dots p_s(x)^{k_s} \quad (a \in P, a \neq 0).$$

Так как в производную неприводимые множители  $p_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , входят с кратностью на 1 меньше, то

$$f'(x) = bp_1(x)^{k_1-1} p_2(x)^{k_2-1} \dots p_s(x)^{k_s-1} \varphi(x) \quad (b \in P, b \neq 0),$$

где  $\varphi(x)$  — произведение собственных неприводимых множителей  $f'(x)$ , т. е. таких, каких нет у многочлена  $f(x)$ . Следовательно, НОД многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$  имеет вид:

$$D(x) = (f(x), f'(x)) = cp_1(x)^{k_1-1} p_2(x)^{k_2-1} \dots p_s(x)^{k_s-1} \quad (c \in P, c \neq 0).$$

Если  $k_i = 1$  ( $p_i(x)$  — простой, однократный множитель  $f(x)$ ), то  $p_i(x)$  не входит в  $f'(x)$  и в  $D(x)$ . Таким образом, неприводимые множители многочлена  $D(x)$  — это в точности кратные неприводимые множители многочлена  $f(x)$ . Многочлен  $D(x)$  находят при помощи алгоритма Евклида, а разложить его на неприводимые множители легче, так как степень  $D(x) <$  степени  $f(x)$ .



Вычисление  $D(x)$  для данного случая:

$$1) f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15;$$

$$2) f(x) : \left[ \frac{1}{5} f'(x) \right]:$$

$$\begin{array}{r} x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \\ x^5 - 6x^3 - 8x^2 - 3x \\ \hline -4x^3 - 12x^2 - 12x - 4 = r(x) \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^4 - 6x^2 - 8x - 3 \\ x \end{array}$$

$$3) \frac{1}{5} f'(x) : \left[ -\frac{1}{4} r(x) \right]:$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - 6x^2 - 8x - 3 \\ x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x \\ \hline -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 \\ -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 \\ \hline 0 = r_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ x - 3 \end{array}$$

$$4) D(x) = (f(x), f'(x)) = -\frac{1}{4} r(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3.$$

Так как множитель  $x+1$  входит в  $f'(x)$  с кратностью 3, то в  $f(x)$  он войдет с кратностью 4, но степень  $f(x) = 5$ , следовательно, частное от деления  $f(x)$  на  $(x+1)^4$  является линейным многочленом, который неприводим над полем  $Q$ .

$$5) f(x) : (x+1)^4:$$

$$\begin{array}{r} -x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \\ x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x \\ \hline -4x^4 - 16x^3 - 24x^2 - 16x - 4 \\ -4x^4 - 16x^3 - 24x^2 - 16x - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ x - 4 \end{array}$$

О т в е т.  $f(x) = (x-4)(x+1)^4$  над  $Q$ ;  $x_1 = 4$ ,  $x_2, 3, 4, 5 = -1 \in Q$

(4 — однократный, простой корень  $f(x)$ , 1 — четырехкратный).

**Задача 10.** Выделить кратные неприводимые множители многочлена

$$f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27 \in Q[x].$$

Найти его корни и каноническое разложение.

Р е ш е н и е. Будем записывать только результаты.

$$1) f'(x) = 6x^5 - 60x^3 + 24x^2 + 102x - 72;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{6} f'(x) \cdot x + r(x),$$

$$\text{где } r(x) = -5x^4 + 4x^3 + 34x^2 - 60x + 27;$$

$$3) \frac{25}{6} f'(x) = r(x)(-5x-4) + r_1(x),$$

$$\text{где } r_1(x) = -64x^3 - 64x^2 + 320x - 192;$$

$$4) r(x) = \frac{1}{64} r_1(x) (5x - 9);$$

$$5) D(x) = (f(x), f'(x)) = -\frac{1}{64} r_1(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Разложение многочлена  $D(x)$  на неприводимые множители над полем  $Q$  трудно найти непосредственно (впоследствии мы познакомимся с методом нахождения рациональных корней многочлена, облегчающим решение этой задачи). Попытаемся найти это разложение, используя общую схему выделения кратных множителей.

I этап. Всякий многочлен  $f(x) \in P[x]$  ненулевой степени можно представить в виде

$$f(x) = aX_1X_2^3X_3^3 \dots X_m^m \quad (a \in P, a \neq 0),$$

где  $X_1$  — произведение однократных (простых) неприводимых над  $P$  множителей,  $X_2$  — произведение двукратных неприводимых над  $P$  множителей, взятых по одному разу, и т. д. (Если множители кратности  $i, i = 1, \dots, m$  отсутствуют, то  $X_i = 1$ .) Так как в производную  $f'(x)$  все множители войдут с кратностью на 1 меньше, то

$$D_1(x) = (f(x), f'(x)) = X_2X_3^2 \dots X_m^{m-1}.$$

Аналогично находим  $D_2(x)$  — НОД многочленов  $D_1(x), D_1'(x)$ , затем  $D_3(x)$  — НОД многочленов  $D_2(x), D_2'(x)$  и т. д., пока не получим  $D_m(x) = 1$ :

$$D_2(x) = (D_1(x), D_1'(x)) = X_3X_4^2 \dots X_m^{m-2},$$

.....

$$D_{m-1}(x) = (D_{m-2}(x), D_{m-2}'(x)) = X_m, D_m(x) = 1.$$

На этом кончается I-й этап решения задачи.

II этап. Находим отношения:

$$E_1(x) = \frac{f(x)}{D_1(x)} = aX_1X_2 \dots X_m,$$

$$E_2(x) = \frac{D_1(x)}{D_2(x)} = X_2 \dots X_m,$$

.....

$$E_{m-1}(x) = \frac{D_{m-2}(x)}{D_{m-1}(x)} = X_{m-1}X_m,$$

$$E_m(x) = \frac{D_{m-1}(x)}{D_m(x)} = X_m.$$

III этап. Выделяем произведения  $i$ -кратных ( $i = 1, \dots, m$ ) множителей, находя отношения предыдущих отношений  $\frac{E_i(x)}{E_{i+1}(x)}$ ,

$$\frac{E_1(x)}{E_2(x)} = aX_1 \text{ — произведение однократных множителей;}$$

$$\frac{E_2(x)}{E_3(x)} = X_2 \text{ — произведение двукратных множителей;}$$

.....

$$\frac{E_{m-1}(x)}{E_m(x)} = X_{m-1} - \text{произведение } (m-1)\text{-кратных множителей.}$$

Произведение  $m$ -кратных множителей мы уже получили на II этапе:

$$E_m(x) = X_m. \quad (\text{Не забывать!})$$

Разложив многочлены  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  на неприводимые множители, мы получим каноническое разложение многочлена  $f(x)$

Продолжим решение задачи 10 по предложенной схеме.

$$1. D_1'(x) = (f(x), f'(x)) = x^3 - x^2 - 5x + 3.$$

$$6) D_1'(x) = 3x^2 - 2x - 5;$$

$$7) \text{ делим с остатком } 9D_1(x) \text{ на } D_1'(x):$$

$$9D_1(x) = D_1'(x)(3x + 1) + r_2(x),$$

$$\text{где } r_2(x) = -32x + 32;$$

$$8) \text{ делим с остатком } D_1'(x) \text{ на } -\frac{1}{32}r_2(x) = (x - 1):$$

$$D_1'(x) = -\frac{1}{32}r_2(x)(3x + 5);$$

$$9) D_2(x) = (D_1(x), D_1'(x)) = -\frac{1}{32}r_2(x) = x - 1;$$

$$10) D_2'(x) = 1 \Rightarrow D_3(x) = (D_2(x), D_2'(x)) = 1.$$

$$\text{II. } E_1(x) = \frac{f(x)}{D_1(x)} = x^3 - x^2 - 9x + 9,$$

$$E_2(x) = \frac{D_1(x)}{D_2(x)} = x^2 + 2x - 3,$$

$$E_3(x) = \frac{D_2(x)}{D_3(x)} = x - 1.$$

$$\text{III. } \frac{E_1(x)}{E_2(x)} = x - 3 = X_1, \quad \frac{E_2(x)}{E_3(x)} = x + 3 = X_2,$$

$$E_3(x) = x - 1 = X_3.$$

О т в е т.

$$f(x) = (x - 3)(x + 3)^2(x - 1)^3 \in Q[x];$$

$$x_1 = 3, \quad x_{2,3} = -3, \quad x_{4,5,6} = 1 \in Q.$$

**Задача 11.** Выделить кратные множители многочлена

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1 \in Q[x].$$

**Р е ш е н и е.** Будем записывать только результаты.

$$1) f'(x) = 9x^2 - 4x + 1;$$

$$2) 27f(x) = f'(x)(9x - 2) + r(x),$$

$$\text{где } r(x) = 10x + 29;$$

$$3) f'(x) = \frac{1}{10} r(x) (9x - 30,1) + r_1,$$

где  $r_1 = 88,29$ ;

$$4) D_1(x) = (f(x), f'(x)) = \frac{1}{88,29} r_1 = 1.$$

О т в е т. Многочлен  $f(x)$  не имеет кратных множителей (т. е. имеет только простые, однократные множители), так как он взаимно прост со своей производной.

**Задача 12.** Проверить, что число 5 является корнем многочлена

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125,$$

и найти кратность этого корня.

Р е ш е н и е. Кратность корня  $\alpha$  многочлена  $f(x)$  есть наивысшая степень двучлена  $x - \alpha$ , на которую делится  $f(x)$ . В нашем случае следует делить  $f(x)$  на многочлены

$$x - 5, (x - 5)^2, (x - 5)^3, \dots$$

до тех пор, пока не получим отличного от нуля остатка. Практически, однако, проще разделить  $f(x)$  на  $x - 5$ , затем полученное частное снова разделить на  $x - 5$  и т. д., пока не получим частное, которое не делится на  $x - 5$ . С помощью схемы Горнера находим:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	0
5	1	-5	1	-5	0	
5	1	0	1	0		
5	1	5	26			

При 4-м делении появился остаток  $26 \neq 0$ . Следовательно, число 5 является трехкратным корнем  $f(x)$ , причем

$$f(x) = (x - 5)^3 (x^2 + 1).$$

**Задача 13.** Определить  $a$  и  $b$  так, чтобы многочлен

$$f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 1$$

имел число  $-2$  корнем не ниже 2-й кратности.

Р е ш е н и е. Число  $-2$  будет корнем многочлена  $f(x)$  не ниже 2-й кратности, если значения многочлена  $f(x)$  и его производной  $f'(x) = 5x^4 + 2ax + b$  при  $x = -2$  равны нулю. Приравнявая  $f(-2)$  и  $f'(-2)$  нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 31, \\ -4a + b = -80, \end{cases}$$

решая которую найдем:

$$a = \frac{129}{4}, b = 49.$$

**Задача 14.** При каких значениях  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x) = x^3 + px + q$  имеет кратный неприводимый множитель.

Заметим, что для многочлена 3-й степени кратный множитель

может иметь только степень 1, поэтому поставленная задача равнозначна следующей: при каких  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x)$  имеет кратный корень?

**Решение.** Многочлен  $f(x)$  имеет кратный множитель тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f, f')$$

( $n$  — степень  $f(x)$ ,  $a_0$  — старший коэффициент) равен нулю. Учитывая, что  $f'(x) = 3x^2 + p$ , получаем:

$$\begin{aligned} R(f, f') &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$D(f) = (-1)^3 R(f, f') = -4p^3 - 27q^2.$$

Следовательно, многочлен  $x^3 + px + q$  тогда и только тогда имеет кратный корень, когда его коэффициенты связаны соотношением

$$p^3 + 27q^2 = 0.$$

### Упражнения

1. Над каким из полей  $Q$ ,  $R$  или  $C$  приводимы многочлены:

- а)  $f(x) = x^2 - 10x + 21$ ;      б)  $g(x) = 2x^2 - 3x - 5$ ;  
в)  $h(x) = 3x^2 + x + 3$ ;      г)  $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$ ?

2. Приводимы ли над полем  $Q$  данные многочлены? В случае приводимости разложить их на множители, неприводимые над  $Q$ :

- а)  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ ;      б)  $g(x) = 2x + 6$ ;  
в)  $h(x) = x^3 + 8$ ;      г)  $\varphi(x) = x^3 - 1$ .

3. Найти наибольший общий делитель  $D(x)$  и наименьшее общее кратное  $m(x)$  многочленов:

- а)  $f(x) = (x^2 + 1)^3 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(2x + \frac{3}{4}\right) (x^2 - 2)$ ,  
 $g(x) = (x^2 + x + 1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 \in Q[x]$ ;  
б)  $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 (2x + \sqrt{3})^3$ ,  
 $g(x) = (3x + 1) (x^2 + 1) (x - \sqrt{2})^3 \in R[x]$ ;  
в)  $f(x) = (x - i\sqrt{2}) (x + 1) (x + i)^2$ ,

$$g(x) = (x-1)^3(x+i)^3 \in C[x];$$

$$r) f(x) = (2x^2 + x + 8)(x-2)^3,$$

$$g(x) = (3x-1)^2(2x+1) \in Q[x].$$

4. Разложить многочлен  $f(x)$  по степеням  $x-a$ :

$$a) f(x) = x^4 + 3x^2 + 1, a = -1;$$

$$б) f(x) = 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 6x + 10, a = 2;$$

$$в) f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, a = -i;$$

$$r) f(x) = x^6 + (2-i)x^4 - (1-i)x^3 + (1+i)x^2 - (1+i)x + 3-i, a = i.$$

5. Пользуясь схемой Горнера, найти значения многочлена и его производных при  $x=a$ :

$$a) f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1, a = 2;$$

$$б) f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 5, a = -3;$$

$$в) f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, a = 1 + 2i;$$

$$r) f(x) = x^4 - 3ix^3 + (1-i)x^2 + 2x + 1 + i, a = i.$$

6. Вычислить значение многочлена

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 6$$

при

$$x = 2,95; x = 3,2; x = 4,99; x = 5,02.$$

7. Разложить по степеням  $x$  многочлены:

$$a) f(x+3) = (x+3)^4 - 3(x+3)^3 + 5(x+3) - 2;$$

$$б) f(x-3) = 2(x-3)^6 + 7(x-3)^5 + (x-3)^3 - 5(x-3)^2 + 4;$$

$$в) f(x+1+2i) = (x+1+2i)^4 - 3i(x+1+2i)^3 - 4(x+1+2i)^2 + 5(x+1+2i) - 1.$$

8. Разложить на простейшие дроби:

$$a) \frac{2x^2 - 5x + 1}{(x-2)^5}; \quad б) \frac{x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 25x + 1}{(x+5)^6}.$$

9. Используя теорему о неприводимом кратном множителе многочлена, найти наибольший общий делитель  $D(x)$  многочлена  $f(x)$  и его производной:

$$a) f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3);$$

$$б) f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1);$$

$$в) f(x) = (x^3-1)(x^3-2x+1)(x^2-1);$$

$$r) f(x) = (x^3-1)(x^3+1)(x^3-3x^2+3x-1).$$

10. Проверить, будет ли число  $a$  корнем многочлена  $f(x)$  и его производных:

$$a) a = \frac{1}{2}, f(x) = 2x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8};$$

$$б) a = -\frac{3}{2}i, f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 18ix - 22\frac{1}{2} - 13\frac{1}{2}i;$$

в)  $a = 1, f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2;$

г)  $a = -i, f(x) = x^3 + ix^2 + x + i.$

11. Выделить кратные множители многочленов и найти их корни:

а)  $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72;$

б)  $f(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8;$

в)  $f(x) = 2x^6 + 6x^5 + 6x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 1;$

г)  $f(x) = x^4 - (1 - 3i)x^3 - (3 + 3i)x^2 + (3 - i)x + i;$

д)  $f(x) = x^5 + 6ix^4 - 14x^3 - 16ix^2 + 9x + 2i.$

12. Найти кратность  $k$  корня  $a$  многочлена  $f(x)$ :

а)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, a = 2;$

б)  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, a = -2;$

в)  $f(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2, a = -1;$

г)  $f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^2 + 16x^2 + 29x + 12, a = -1, a = 3.$

13. Определить значения буквенных коэффициентов многочлена  $f(x)$  так, чтобы число  $a$  было его корнем не ниже 2-й кратности:

а)  $f(x) = x^5 - \alpha x^2 - \alpha x + 1, a = -1;$

б)  $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + 1, a = 1;$

в)  $f(x) = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + 1, a = 1.$

14. При каких значениях  $\lambda$  многочлен  $f(x) \in R[x]$  имеет кратный множитель:

а)  $f(x) = x^3 - 3x + \lambda;$

б)  $f(x) = x^3 + (\lambda - 2)x - 2?$

## Глава II

# МНОГОЧЛЕННЫ НАД ОСНОВНЫМИ ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

### § 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

**Вопросы программы.** Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическое истолкование действий над комплексными числами. Корни из комплексных чисел и двучленные уравнения.

**Л и т е р а т у р а:** Винберг Э. Б. Гл. 4, § 1 (п. 1—7).

**Задача 1.** Решить уравнение

$$(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i,$$

считая неизвестные  $x$  и  $y$  действительными числами.

**Р е ш е н и е.** Левую часть уравнения можно рассматривать как некоторое неизвестное комплексное число. Приведя его к виду  $a + bi$ , получим уравнение, равносильное данному:

$$(2x + 5y) + (-x + 6y)i = 1 - 3i.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при  $i$ , то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ -x + 6y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:  $x = \frac{21}{17}$ ,  $y = -\frac{5}{17}$ .

**З а м е ч а н и е.** При решении задачи мы существенно использовали условие, что  $x$  и  $y$  — действительные числа. Если  $x$  и  $y$  — комплексные числа, то приведенное решение неверно, так как в этом случае  $2x + 5y$  нельзя считать действительной частью числа  $1 - 3i$  (аналогично и  $-x + 6y$  не будет коэффициентом при  $i$ ).

**Задача 2.** Вычислить  $i^{36}$ ,  $i^{46}$ ,  $i^{125}$ ,  $i^{239}$ .

**Р е ш е н и е.** Имеем:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

Поскольку любое целое число  $n$  можно представить как  $4q + r$ , где  $r = 0, 1, 2, 3$ , то

$$i^n = i^{4q} \cdot i^r = i^r,$$

и тем самым нахождение любой степени числа  $i$  сводится к нахождению одного из чисел  $i^0$ ,  $i^1$ ,  $i^2$ ,  $i^3$ . Но

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i.$$



В частности,  $i^{36} = i^{4 \cdot 9} = 1$ ,  $i^{46} = i^{4 \cdot 11 + 2} = i^2 = -1$ ,  $i^{125} = i^{4 \cdot 31 + 1} = i^1 = i$ ,  $i^{239} = i^{4 \cdot 59 + 3} = i^3 = -i$ .

О т в е т. 1, -1, i, -i.

Задача 3. Вычислить

$$(1 + 2i)^5.$$

Р е ш е н и е. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(1 + 2i)^5 = 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 2i + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 1^3 \cdot (2i)^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 1^2 (2i)^3 + 5 \cdot 1 \cdot (2i)^4 + (2i)^5 = 1 - 10i - 40 - 80i + 80 + 32i = 41 - 58i.$$

Задача 4. Решить в поле C систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2iy = 1 - i, \\ (1 - i)x + y = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используем правило Крамера. В данном случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2i \\ 1 - i & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2i \neq 0,$$

поэтому единственное решение системы будет:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - i & 2i \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1 - 2i} = \frac{1 - 5i}{1 - 2i},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 - i \\ 1 - i & 2 \end{vmatrix}}{1 - 2i} = \frac{6 + 2i}{1 - 2i}.$$

Нахождение частного двух комплексных чисел проще всего достигается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю. Имеем:

$$x = \frac{(1 - 5i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 - 5i + 2i - 10i^2}{5} = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}i,$$

$$y = \frac{(6 + 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{6 + 2i + 12i + 4i^2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{14}{5}i.$$

О т в е т.  $x = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}i$ ;  $y = \frac{2}{5} + \frac{14}{5}i$ .

Задача 5. Найти все значения корня квадратного из комплексного числа  $a + bi$ , не равного нулю.

Р е ш е н и е. Пусть

$$\sqrt{a + bi} = x + yi,$$

где  $x$  и  $y$  — неизвестные действительные числа. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Последнее уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим полученные уравнения. Будем иметь:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где в правой части следует иметь в виду арифметический корень, так как  $x^2 + y^2 \geq 0$ . Учитывая, кроме того, что  $x^2 - y^2 = a$ , получим:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Так как  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ , то оба полученных числа неотрицательны. Извлекая из них квадратные корни, получим действительные значения для  $x$  и  $y$ :

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Из соотношения  $2xy = b$  следует, что при  $b > 0$  числа  $x$  и  $y$  имеют одинаковые знаки, а при  $b < 0$  — противоположные. Отсюда имеем формулу:

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right),$$

где внутри скобок перед  $i$  берется знак «+», если  $b > 0$ , и знак «—», если  $b < 0$  (в случае  $b = 0$  знак перед  $i$  безразличен, так как в этом случае  $x$  или  $y$  равен нулю).

Мы видим, что корень квадратный из не равного нулю комплексного числа имеет два значения, отличающиеся друг от друга множителем  $-1$ .

**Задача 6.** Вычислить  $\sqrt{-3-4i}$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой, найденной в предыдущей задаче. Получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{-3-4i} = & \pm \left( \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}} - \right. \\ & \left. - i \sqrt{\frac{3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}} \right) = \pm (1 - 2i). \end{aligned}$$

**Задача 7.** Решить уравнение

$$(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0.$$

**Решение.** По формуле для корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{5 - i \pm \sqrt{(5 - i)^2 - 4(2 + i)(2 - i)}}{2(2 + i)} = \frac{5 - i \pm \sqrt{-2i}}{4 + 2i}.$$

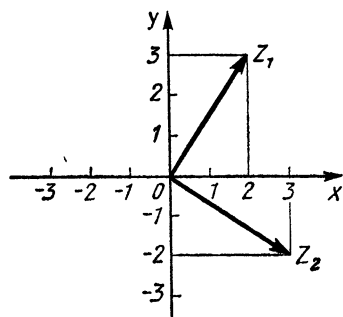


Рис. 1

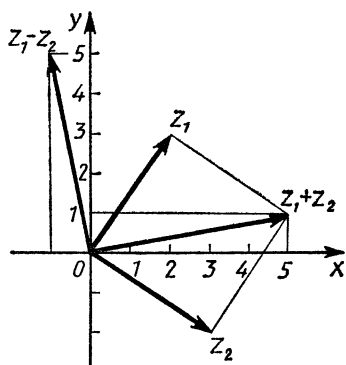


Рис. 2

Извлекая корень квадратный из числа  $-2i$ , получим:

$$\sqrt{-2i} = \pm (1 - i).$$

Следовательно,  $x_{1,2} = \frac{5-i \pm (1-i)}{4+2i}$ .

Отсюда

$$x_1 = \frac{5-i+1-i}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5-5i}{5} = 1-i,$$

$$x_2 = \frac{5-i-(1-i)}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{2(2-i)}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

**Задача 8.** Найти геометрически сумму и разность комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 3 - 2i.$$

**Решение.** Геометрическим изображением комплексного числа  $a + bi$  на координатной плоскости  $xOy$  является точка с координатами  $(a, b)$ . Поэтому зачастую комплексное число  $z = a + bi$  отождествляют с точкой  $(a, b)$ . Удобно также геометрическим образом числа  $a + bi$  считать

вектор, идущий из начала координат в точку  $(a, b)$ ; в этом случае число  $a + bi$  отождествляется с радиус-вектором точки  $(a, b)$ . Обе геометрические интерпретации комплексных чисел «равноправны».

На рисунке 1 изображены радиус-векторы, соответствующие числам:  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$ . Сложению чисел  $z_1$  и  $z_2$  отвечает сложение этих векторов, производимое по правилу параллелограмма. Для нахождения разности  $z_1 - z_2$  достаточно построить вектор с началом в точке  $z_2$  и концом в точке  $z_1$ , а затем перенести этот вектор параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Пользуясь этими правилами, найдем  $z_1 + z_2$  и  $z_1 - z_2$  (рис. 2). Из рисунка видно, что координатами точек  $z_1 + z_2$  и  $z_1 - z_2$  являются соответственно пары чисел  $(5; 1)$  и  $(-1; 5)$ .

Итак,

$$z_1 + z_2 = 5 + i, z_1 - z_2 = -1 + 5i.$$

**Задача 9.** Найти модуль и аргумент комплексного числа  $-1 + i\sqrt{3}$ . Записать это число в тригонометрической форме.

**Решение.** Модуль комплексного числа  $z = a + bi$  обозначается  $|z|$  и находится по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где в правой части берется арифметическое значение корня (т. е.  $|z| \geq 0$ ). Геометрически  $|z|$  есть длина радиус-вектора  $z$ .

Аргумент числа  $z \neq 0$  обозначается  $\arg z$ ; это есть величина  $\varphi$  угла от положительного направления оси  $Ox$  до направления радиус-вектора  $z$ . Аргумент числа  $z$  находится из соотношений:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

В нашей задаче  $z = -1 + i\sqrt{3}$  (т. е.  $a = -1$ ,  $b = \sqrt{3}$ ),

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда  $\arg z = \varphi = \frac{2\pi}{3}$ .

Теперь запишем число  $z$  в тригонометрической форме:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

**З а м е ч а н и я.** 1. Очевидно, что аргумент комплексного числа определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ . На практике в качестве аргумента обычно берут наименьший положительный или наименьший по абсолютной величине угол.

2. Во избежание ошибок при нахождении аргумента комплексного числа желательно это число изобразить геометрически или хотя бы мысленно представить его образ (точку или радиус-вектор).

3. Модуль и аргумент комплексного числа  $z$  являются известными из аналитической геометрии полярными координатами точки, соответствующей числу  $z$ . При этом полярной осью служит ось  $Ox$ .

**Задача 10.** Записать в тригонометрической форме числа:

$$а) z = -2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$$

$$б) z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

**Р е ш е н и е.**

а) Представление числа  $z$  в виде  $-2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  не является его тригонометрической записью, поскольку множитель  $-2$  не является положительным числом. Однако эту запись легко преобразовать в тригонометрическую форму, если учесть, что

$$-\cos \frac{\pi}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right), \quad -\sin \frac{\pi}{3} = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right).$$

Получим:

$$z = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right),$$

что и является тригонометрической формой  $z$ .

б) Поскольку

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right), \quad -\sin \frac{\pi}{3} = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right),$$

то искомой тригонометрической формой числа  $z$  будет

$$z = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

**Задача 11.** Описать геометрически множество всех точек  $z$ , для которых:

а)  $|z| = 2$ ;      б)  $\arg z = \frac{3}{4} \pi$ .

**Решение.** а) Всякое комплексное число, модуль которого равен 2, изображается точкой, находящейся на расстоянии двух единиц от начала координат, т. е. расположенной на окружности радиусом 2 с центром в начале координат. Обратно, всякая точка этой окружности изображает комплексное число, модуль которого равен 2. Следовательно, множеством точек  $z$ , для которых  $|z| = 2$ , является окружность радиусом 2 с центром в начале координат.

б) Если  $\arg z = \frac{3}{4} \pi$ , то точка  $z$  лежит на луче, выходящем из начала координат под углом  $\frac{3}{4} \pi$  к положительному направлению оси  $Ox$ . Обратно, всякая точка  $z$  этого луча, отличная от начала координат, имеет аргумент  $\frac{3}{4} \pi$ . Для точки  $z = 0$  (начала координат) аргумент не определен. Таким образом, искомое множество есть луч, выходящий из начала координат под углом  $\frac{3}{4} \pi$  к положительному направлению оси  $Ox$ .

**Задача 12.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — два произвольных комплексных числа и  $\rho(z_1, z_2)$  — расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$ . Показать, что  $|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2)$ .

**Решение.** Как было отмечено при решении задачи 8, радиус-вектор, соответствующий числу  $z_1 - z_2$ , получается параллельным переносом вектора, идущего от точки  $z_2$  к точке  $z_1$ . Но модуль числа  $z_1 - z_2$  есть длина радиус-вектора, соответствующего этому числу. Отсюда следует, что

$$|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2).$$

**Задача 13.** Описать геометрически множество  $M$  точек  $z$ , для которых:

а)  $|z - (2 + i)| < 3$ ;    б)  $|z - (2 + i)| \leq 3$ ;    в)  $|z + 2i| > 1$ .

**Решение.** а) В предыдущей задаче было показано, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками плоскости, изображающими эти числа. Следовательно,

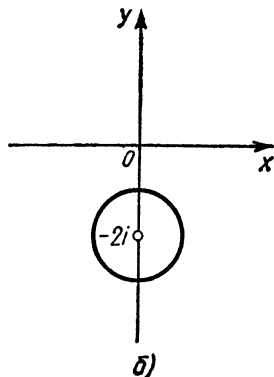
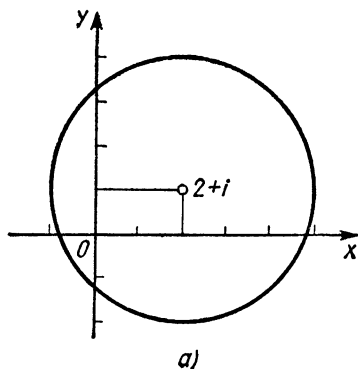


Рис. 3

неравенству  $|z - (2 + i)| < 3$  удовлетворяют те и только те точки  $z$ , которые находятся от точки  $2 + i$  на расстоянии, меньшем 3. Это означает, что множество  $M$  представляет собой открытый круг с центром в точке  $2 + i$  и радиусом 3 (рис. 3, а). (Открытым круг называется по той причине, что ему не принадлежат его граничные точки, т. е. точки окружности с центром  $2 + i$  и радиусом 3.)

б) В этом случае искомое множество  $M$  состоит из тех же точек, что и в случае а), и, кроме того, содержит точки граничной окружности. Следовательно,  $M$  есть замкнутый круг с центром в точке  $2 + i$  и радиусом 3.

в) Представим сумму  $z + 2i$  в виде разности двух комплексных чисел:

$$z + 2i = z - (-2i).$$

Тогда в) примет вид:

$$|z - (-2i)| > 1.$$

Отсюда видно, что множество  $M$  представляет собой часть плоскости, внешнюю к окружности с центром в точке  $-2i$  и радиусом 1 (рис. 3, б).

**Задача 14.** Описать геометрически множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих уравнению

$$|z - a| + |z - b| = 8.$$

**Решение.** Как было показано выше (задача 12), число  $|z - a|$  геометрически означает расстояние между точками  $z$  и  $a$ . Аналогично число  $|z - b|$  равно расстоянию между точками  $z$  и  $b$ . Следовательно, данному уравнению удовлетворяют те и только те точки  $z$ , сумма расстояний которых от точек  $a$  и  $b$  равна постоянному числу 8. Как известно, множество таких точек есть эллипс с фокусами в точках  $a$  и  $b$ , большая ось которого равна 8.

**Задача 15.** Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произвести указанные действия:

$$а) \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i}; \quad б) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

Р е ш е н и е. а) Представим сначала каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} 1 - i\sqrt{3} &= 2 \left( \cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi \right); \\ -\sqrt{3} + i &= 2 \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right), \\ 1 + i &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме производится по следующим формулам:

$$\begin{aligned} [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] &= \\ = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)], \\ \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i} &= \frac{2 \left( \cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)}{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{5}{3} \pi + \frac{5}{6} \pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{5}{3} \pi + \frac{5}{6} \pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{27}{12} \pi + i \sin \frac{27}{12} \pi \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2(1+i). \end{aligned}$$

б) В этом случае первый из двух сомножителей уже представлен в тригонометрической форме. Относительно второго сомножителя этого сказать нельзя, так как здесь в скобках стоит знак «—» вместо нужного знака «+». Поэтому представим сначала второй сомножитель в тригонометрической форме. Можем записать:

$$\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] &= \\ = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

**Задача 16.** Вычислить

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^6}{(i - 1)^{12}}.$$

**Решение.** Возведение комплексного числа в степень удобно производить по формуле Муавра:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

В данном случае

$$(1 - i\sqrt{3})^{12} = \left[ 2 \left( \cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi \right) \right]^{12} = 2^{12} \left( \cos \frac{60}{3} \pi + i \sin \frac{60}{3} \pi \right) = 2^{12} (\cos 20\pi + i \sin 20\pi) = 2^{12} (1 + 0 \cdot i) = 2^{12},$$

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = \left[ 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^6 = 2^6 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^6,$$

$$\begin{aligned} (i - 1)^{12} &= (-1 + i)^{12} = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) \right]^{12} = \\ &= (\sqrt{2})^{12} (\cos 9\pi + i \sin 9\pi) = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = \\ &= 2^6 (-1 + 0 \cdot i) = -2^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^6}{(i - 1)^{12}} &= \frac{2^{12} - 2^6}{-2^6} = \frac{2^6(2^6 - 1)}{-2^6} = \\ &= -(2^6 - 1) = -63. \end{aligned}$$

**Задача 17.** Пусть  $|z_1| = |z_2|$ . Доказать, что если произведение  $z_1 z_2$  — положительное действительное число, то числа  $z_1$  и  $z_2$  сопряжены друг другу.

**Решение.** Пусть

$$z_1 = r(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

— тригонометрические записи чисел  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда

$$z_1 z_2 = r^2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Из условия задачи следует, что число

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

модуль которого равен 1, само равно 1. Следовательно,  $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi k$ , или  $\varphi_1 = -\varphi_2 + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Таким образом, точки  $z_1$  и  $z_2$  на комплексной плоскости симметричны друг другу относительно оси  $Ox$ , т. е.  $z_1 = \bar{z}_2$ .

**Задача 18.** Выяснить геометрический смысл произведения двух комплексных чисел.

**Решение.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — произвольные комплексные числа. Запишем их в тригонометрической форме:

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$



При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются ( $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ), а аргументы складываются ( $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ). Следовательно, чтобы умножить число  $z_1$  на  $z_2$  ( $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ ), нужно длину вектора  $z_1$  увеличить в  $|z_2|$  раз (говорят: вектор  $z_1$  растянуть в  $|z_2|$  раз), а затем полученный вектор повернуть вокруг начала координат на угол  $\arg z_2$ . Если хотя бы одно из чисел  $z_1$  или  $z_2$  равно нулю, то их произведение также равно нулю.

**Задача 19.** Выразить  $\cos 3x$  и  $\sin 3x$  через  $\cos x$  и  $\sin x$ .

**Решение.** Положим

$$\alpha = \cos x + i \sin x$$

и возведем число  $\alpha$  в 3-ю степень, пользуясь двумя способами:

а) формулой Муавра и б) формулой бинома Ньютона.

Получим:

$$\text{а) } \alpha^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{б) } \alpha^3 &= (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - \\ &- 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + \\ &+ i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Так как комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при  $i$ , то можем записать:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x. \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е.** Точно таким же путем можно выразить через  $\sin x$  и  $\cos x$  функции  $\sin nx$  и  $\cos nx$  при любом натуральном  $n$ .

**Задача 20.** Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных  $x$ , следующие функции:

$$\text{а) } \cos^5 x; \quad \text{б) } \sin^4 x.$$

**Решение.** а) Пусть

$$\alpha = \cos x + i \sin x.$$

Тогда

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x.$$

Отсюда имеем:

$$\cos x = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}; \quad \sin x = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}.$$

Возведем первое из этих равенств в 5-ю степень:

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2} + 10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5}}{2^5} = \\ &= \frac{(\alpha^5 + \alpha^{-5}) + 5(\alpha^3 + \alpha^{-3}) + 10(\alpha + \alpha^{-1})}{2^5}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\alpha^n (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$  и  $\alpha^{-n} = \cos nx - i \sin nx$ , получим:

$$\cos^5 x = \frac{2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x}{2^5} = \frac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16}.$$

б) Аналогично

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \frac{(\alpha - \alpha^{-1})^4}{(2i)^4} = \frac{(\alpha^4 + \alpha^{-4}) - 4(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 6}{16} = \\ &= \frac{2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6}{16} = \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}. \end{aligned}$$

**Задача 21.** Вычислить все значения  $\sqrt[4]{-4}$  и изобразить их геометрически.

**Решение.** Как известно, корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  имеет  $n$  различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1)$$

где  $\sqrt[n]{r}$  — арифметическое значение корня, а число  $k$  пробегает значения  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Представим число  $-4$  в тригонометрической форме:

$$-4 = 4 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Тогда по формуле (1) будем иметь:

$$\sqrt[4]{4} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[4]{4} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right). \quad (2)$$

Придавая параметру  $k$  значения  $0, 1, 2, 3$ , получим четыре значения корня 4-й степени из числа  $-4$ :

$$\beta_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$$\beta_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i,$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i. \end{aligned}$$

Изображение найденных корней на комплексной плоскости дано на рисунке 4.

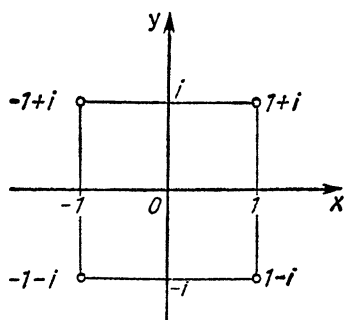


Рис. 4

**З а м е ч а н и е.** При нахождении всех значений  $\sqrt[n]{z}$  можно в формуле (1) придавать параметру  $k$  вместо  $0, 1, 2, \dots, n-1$  любые  $n$  последовательных целых значений. Например, в (2) можно было бы взять  $k = 3, 4, 5, 6$ ; при этом мы получили бы те же значения корня, что и выше, но в другой последовательности (при  $k = 4, 5, 6$  — те же значения, что и при  $k = 0, 1, 2$ ).

**Задача 22.** Вычислить

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

Представим числа  $1-i$  и  $\sqrt{3}+i$  в тригонометрической форме:

$$1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi \right),$$

$$\sqrt{3}+i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( \frac{7}{4} \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{7}{4} \pi - \frac{\pi}{6} \right) \right]} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{19}{12} \pi + i \sin \frac{19}{12} \pi \right)} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \cos \frac{19}{12} \pi + i \sin \frac{19}{12} \pi \right). \end{aligned}$$

Придавая  $k$  значения  $0, 1, \dots, 5$ , получим шесть значений искомого корня:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{19}{72} \pi + i \sin \frac{19}{72} \pi \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{43}{72} \pi + i \sin \frac{43}{72} \pi \right),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{67}{72} \pi + i \sin \frac{67}{72} \pi \right),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{91}{72} \pi + i \sin \frac{91}{72} \pi \right),$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{115}{72} \pi + i \sin \frac{115}{72} \pi \right),$$

$$\beta_5 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{139}{72} \pi + i \sin \frac{139}{72} \pi \right).$$

**Задача 23.** Пользуясь корнями 3-й степени из 1, вычислить  $\sqrt[3]{-8i}$ .

**Решение.** Известно, что все значения корня  $n$ -й степени из числа  $\alpha$  можно получить, умножая одно из них на все значения корня  $n$ -й степени из 1. Одно из значений  $\sqrt[n]{-8i}$  можно найти непосредственно. Оно равно  $2i$ , потому что  $(2i)^3 = -8i$ .

Найдем теперь все значения  $\sqrt[3]{-8i}$ . Так как

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2),$$

то имеем три значения  $\sqrt[3]{1}$ :

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, значения  $\sqrt[3]{-8i}$  будут:

$$\beta_0 = 2i\omega_0 = 2i,$$

$$\beta_1 = 2i\omega_1 = -\sqrt{3} - i,$$

$$\beta_2 = 2i\omega_2 = \sqrt{3} - i.$$

**Задача 24.** Записать в тригонометрической форме и найти приближенные значения корней двучленного уравнения

$$x^4 + (1 + 7i) = 0.$$

**Решение.** Представив уравнение в виде  $x^4 = -1 - 7i$ , будем иметь:

$$x = \sqrt[4]{-1 - 7i},$$

т. е. задача сводится к вычислению всех значений  $\sqrt[4]{-1 - 7i}$ .

Запишем, что

$$-1 - 7i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{50}}, \quad \sin \varphi = -\frac{7}{\sqrt{50}}.$$

Можно считать, что угол  $\varphi$  принадлежит 3-й четверти:  $\varphi = 270^\circ - \alpha$ , где  $\alpha$  — угол в 1-й четверти. Имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-7}{-1} = 7 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = 7 \Rightarrow \alpha \approx 8^\circ 8' \Rightarrow \varphi \approx 261^\circ 52'.$$

Итак,

$$-1 - 7i = \sqrt{50} (\cos 261^\circ 52' + i \sin 261^\circ 52'),$$

$$x \approx \sqrt[4]{\sqrt{50} (\cos 261^\circ 52' + i \sin 261^\circ 52')} \approx$$

$$\approx \sqrt[4]{7,0711} \left( \cos \frac{261^\circ 52' + 360^\circ \cdot k}{4} + i \sin \frac{261^\circ 52' + 360^\circ \cdot k}{4} \right) \approx$$

$$\approx \sqrt[4]{2,659} [\cos (65^\circ 28' + 90^\circ \cdot k) + i \sin (65^\circ 28' + 90^\circ \cdot k)].$$

Придавая  $k$  последовательно значения 0, 1, 2, 3, получим числа:

$$\begin{aligned}x_0 &\approx 1,631 (\cos 65^\circ 28' + i \sin 65^\circ 28') \approx 1,631 (0,4152 + \\&\quad + 0,9098i) \approx 0,677 + 1,484i; \\x_1 &\approx 1,631 [\cos (65^\circ 28' + 90^\circ) + i \sin (65^\circ 28' + 90^\circ)] = \\&= 1,631 (-\sin 65^\circ 28' + i \cos 65^\circ 28') \approx \\&\approx 1,631 (-0,9098 + 0,4152i) \approx -1,484 + 0,677i; \\x_2 &\approx 1,631 [\cos (65^\circ 28' + 180^\circ) + i \sin (65^\circ 28' + 180^\circ)] = \\&= 1,631 (-\cos 65^\circ 28' - i \sin 65^\circ 28') \approx 1,631 (-0,4152 - 0,9098i) \approx \\&\approx -0,677 - 1,484i; \\x_3 &\approx 1,631 [\cos (65^\circ 28' + 270^\circ) + i \sin (65^\circ 28' + 270^\circ)] = \\&= 1,631 (\sin 65^\circ 28' - i \cos 65^\circ 28') \approx 1,631 (0,9098 - 0,4152i) \approx \\&\approx 1,484 - 0,677i.\end{aligned}$$

Значения тригонометрических функций острых углов мы нашли, используя четырехзначные таблицы Брадиса.

О т в е т.  $\pm 0,677 \pm 1,484i$ ;  $\pm 1,484 \pm 0,677i$ .

### Упражнения

1. Найти  $x, y \in R$ , если:

- а)  $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$ ;  
б)  $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$ ;  
в)  $(2 - 3i)x + (3 + 2i)y = 2 - 5i$ ;  
г)  $\frac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y$ .

2. Вычислить (в алгебраической форме):

- а)  $(5 + 4i) + (3 - 7i) - (2 + 5i)$ ; ж)  $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^2}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^3}$ ;  
б)  $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1 + 2i}$ ; з)  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ;  
в)  $\frac{(2 - 3i)(4 - i)}{5 - i}$ ; и)  $(1 + 2i)^6$ ;  
г)  $\frac{5 + i}{(1 - 2i)(5 - i)}$ ; к)  $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$ ;  
д)  $\frac{(5 + 2i)(4 - 3i)}{(1 - 2i)(1 + 3i)}$ ; л)  $\frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$ ;  
е)  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - (1 - i)^2$ ; м)  $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$ .

У к а з а н и е к л): представить  $(1 + i)^n$  как  $(1 + i)^{n-2} \times (1 + i)^2$ .

3. Найти  $x, y \in R$  из уравнения:

- а)  $\frac{6x - iy}{5 + 2i} = \frac{15}{8x + 3yi}$ ; б)  $\frac{yi}{x - i} = i + x - 2$ .

4. Найти значения многочленов:

а)  $x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$  при  $x = i$ ;

б)  $3x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 3y^3$  при  $x = 1 + 2i$ ,  $y = 2 + i$ .

5. Вычислить (в алгебраической форме):

а)  $\sqrt{3 + 4i}$ ; б)  $\sqrt{-15 + 8i}$ ; в)  $\sqrt{8 + 6i}$ ; г)  $\sqrt{2 - 3i}$ .

6. Решить квадратные уравнения:

а)  $x^2 - (3 - 2i)x + (5 - 5i) = 0$ ;

б)  $x^2 + 3x - 10i = 0$ ;

в)  $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ ;

г)  $x^2 - (5 - 3i)x + (4 - 7i) = 0$ .

7. Найти все комплексные числа  $z$ , удовлетворяющие условию:

а)  $z = \bar{z}$ ; б)  $z = -\bar{z}$ ; в)  $z^2 = \bar{z}$ ; г)  $z^3 = \bar{z}$ .

8. Представить в тригонометрической форме числа:

а)  $-5$ ; б)  $3i$ ; в)  $1 - i$ ; г)  $-1 - i\sqrt{3}$ ; д)  $4 - i$ ; е)  $-2 + i$ ;

ж)  $-1 - 2i$ .

9. Описать геометрически множество точек, изображающих комплексные числа  $\bar{z}$ , если:

а)  $|z| \leq 3$ ; б)  $|z| > 3$ ; в)  $|z - 3i| < 1$ ; г)  $|z + 3 - 2i| > 2$ ;

д)  $\arg z = \frac{\pi}{2}$ ; е)  $\arg z = 310^\circ$ ; ж)  $|z - 3| + |z - 2i| = 7$ ;

з)  $|z + 2i| + |z - 4 + i| = 15$ ; и)  $||z - 4| - |z - 2i|| = 4$ .

10. Как связаны между собой аргументы чисел  $\bar{z}$  и  $z^{-1}$ ?

11. Вычислить, используя тригонометрическую форму; ответ дать в алгебраической форме:

а)  $(1 + i)^{25}$ ; б)  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ ; в)  $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}$ ;

г)  $\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{10}}{(-1 + i)^{16}}$ .

12. Найти все значения корня из комплексного числа:

а)  $\sqrt[3]{i}$ ; б)  $\sqrt[3]{2 - 2i}$ ; в)  $\sqrt[4]{-4}$ ; г)  $\sqrt[6]{1}$ ; д)  $\sqrt[6]{-2i}$ ;

е)  $\sqrt[6]{\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}}$ ; ж)  $\sqrt{\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}}$ ; з)  $\sqrt[4]{(2 + 2i)(-1 + i\sqrt{3})}$ .

13. Доказать, что значения  $\sqrt[n]{z}$  сопряжены в некотором порядке значениям  $\sqrt[n]{\bar{z}}$ .

14. Доказать, что сумма всех значений  $\sqrt[n]{z}$  равна нулю.

У к а з а н и е. Сначала докажите это утверждение для  $z = 1$ .

Воспользуйтесь тем, что все значения  $\sqrt[n]{1}$  суть  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ , где  $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ .

15. Доказать, что значения  $\sqrt[n]{1}$

$$\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

разбиваются на пары сопряженных:  $\omega_1, \omega_{n-1}$ ;  $\omega_2, \omega_{n-2}$  и т. д. (вообще,  $\omega_k$  и  $\omega_l$ , где  $k + l = n$ ). Верно ли такое же утверждение для значений  $\sqrt[n]{-1}$ ;  $\sqrt[n]{z}$ , где  $z \notin R$ ?

16. Вычислить суммы:

- а)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$ ;
- б)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$ ;
- в)  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n-1)x$ .

У к а з а н и е. Для решения а) воспользуйтесь тем, что написанное выражение есть действительная часть комплексного числа  $z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$ , где  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Аналогично для б) и в).

17. Выразить через  $\sin x$  и  $\cos x$ :

- а)  $\sin 4x$ ; б)  $\cos 5x$ ; в)  $\sin 5x$ .

## § 5. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ $C$

**Вопросы программы.** Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел; разложимость многочлена над полем  $C$  в произведение линейных множителей; зависимость между корнями многочлена и его коэффициентами (формулы Виета).

**Л и т е р а т у р а:** Винберг Э. Б. Гл. 4, § 2; гл. 1, § 2 (п. 5).

**Задача 1.** Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем  $C$ , имеющий простой корень — 1 и двукратный корень  $i$ .

**Р е ш е н и е.** Над полем  $C$  разложение любого многочлена на неприводимые множители имеет вид:

$$f(x) = a_0 (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни  $f(x)$ ; при этом в последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждый корень встречается столько раз, какова его кратность. В данном случае будем иметь (учитывая нормированность, т. е. полагая  $a_0 = 1$ ):

$$f(x) = (x - (-1)) (x - i) (x - i) = (x + 1) (x - i)^2 = (x + 1) (x^2 - 2ix - 1) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (1 + 2i)x - 1.$$

**О т в е т.**  $f(x) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (1 + 2i)x - 1$ .

Ту же задачу можно решить и другим способом, если воспользоваться формулами Виета. Искомый многочлен должен быть 3-й

степени:

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

По формулам Виета получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3) = -(-1 + i + i) = 1 - 2i; \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \cdot i + (-1) \cdot i + i \cdot i = \\ &= -1 - 2i; \\ a_3 &= -x_1x_2x_3 = -(-1) \cdot i \cdot i = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, как и выше,

$$f(x) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (1 + 2i)x - 1.$$

**Задача 2.** Коэффициенты уравнения

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

действительны и положительны. Пользуясь формулами Виета, найти для коэффициентов необходимое и достаточное условие, при котором два корня уравнения имеют вид  $bi$ ,  $-bi$ , где  $b \neq 0$ .

**Решение.** Пусть  $x_1 = bi$ ,  $x_2 = -bi$ ,  $b \neq 0$ .

По формулам Виета имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3) = -(bi - bi + x_3) = -x_3 \Rightarrow x_3 = -a_1; \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = bi(-bi) + bi(-a_1) + \\ &\quad + (-bi)(-a_1) = b^2; \\ a_3 &= -x_1x_2x_3 = -bi(-bi)(-a_1) = a_1b^2 = a_1a_2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a_1a_2 = a_3$  — необходимое условие того, чтобы два корня уравнения были мнимыми сопряженными.

Докажем, что это условие является и достаточным.

Пусть  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ;  $a_1a_2 = a_3$ .

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_1a_2 = \\ &= x^2(x + a_1) + a_2(x + a_1) = (x + a_1)(x^2 + a_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + a_1 = 0 \vee x^2 + a_2 = 0 \Leftrightarrow x = -a_1 \vee x = \pm \sqrt{-a_2}.$$

Так как  $a_2 > 0$ , то  $x_1 = \sqrt{-a_2} = bi$ , где  $b = \sqrt{a_2} \neq 0$ ,  $x_2 = -\sqrt{-a_2} = -bi = \bar{x}_1$ , что и требовалось получить.

Итак,  $a_1a_2 = a_3$  — необходимое и достаточное условие того, чтобы два корня данного уравнения были мнимыми сопряженными.

Например, при  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$  получаем уравнение

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0.$$

Корень  $x_1 = -2$ . Разделив по схеме Горнера  $f(x)$  на  $x + 2$ , получим в частном многочлен  $x^2 + 3$ , корни которого  $x_1 = i\sqrt{3}$ ,  $x_2 = -i\sqrt{3} = \bar{x}_1$  будут корнями и многочлена  $f(x)$ .

**Задача 3.** Разложить на множители, неприводимые над полем комплексных чисел, многочлен  $f(x) = x^4 + 4$ .



**Решение.** Данный многочлен 4-й степени, следовательно, он приводим над полем  $C$  и разлагается в произведение четырех линейных множителей:  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ , где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни  $f(x)$ .

**И способ.** Находим корни двучлена  $x^4 + 4$ , используя тригонометрическую форму комплексного числа:

$$x = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) = x_k, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$x_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i;$$

$$x_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -1 + i;$$

$$x_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -1 - i;$$

$$x_3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[ \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 - i.$$

**Отв.**  $f(x) = (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i)$ .

**И способ.** Разложим сначала многочлен  $f(x)$  на два квадратных множителя, представив  $f(x)$  в виде разности квадратов:

$$f(x) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x).$$

Далее разлагаем на множители каждый из многочленов  $x^2 + 2 - 2x$  и  $x^2 + 2 + 2x$ , для чего находим его корни:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm i; \\ x^2 + 2x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm i. \end{aligned}$$

Следовательно, как и выше,

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i).$$

### Упражнения

1. Составить нормированный многочлен наименьшей степени над полем  $C$ , имеющий корни:

а)  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_{3,4} = 2;$

б)  $x_1 = i, x_{2,3} = 1 - i;$

в)  $x_{1,2} = i, x_{3,4} = -i;$

г)  $x_{1,2} = 1, x_{3,4,5} = \sqrt{2};$

д)  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}, x_{3,4} = i;$

е)  $x_1 = 2, x_{2,3} = 1 - i, x_{4,5} = 1.$

2. Используя формулы Виета, построить многочлен по его корням:

- а)  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ; б)  $x_1 = 0, x_{2,3} = 1, x_4 = -1$ ;  
в)  $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 3, x_4 = -2$ ; г)  $x_{1,2} = i, x_{3,4} = 1 + i$ .

3. Разложить многочлен  $f(x)$  на неприводимые множители над  $\mathbb{C}$ :

- а)  $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ ; д)  $f(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ ;  
б)  $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ ; е)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ;  
в)  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ ; ж)  $f(x) = x^6 - 1$ .  
г)  $f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 8$ ;

4. Сумма двух корней многочлена

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$$

равна 1. Найти  $\lambda$ .

5. Найти многочлен 3-й степени со старшим коэффициентом  $a_0 = 2$ , если его корни  $x_1, x_2, x_3$  удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2, \quad \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = 4, \quad \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 8.$$

6. Показать, что уравнение  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$  является биквадратным (т. е.  $p = r = 0$ ), если сумма двух его корней равна сумме двух других корней и равна 0:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0.$$

7. Найти соотношение, связывающее коэффициенты уравнения  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ , если его корни связаны соотношением  $x_1 x_2 = x_3 x_4$ .

8. Известно, что числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  являются корнями многочлена  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ . Найти многочлен, имеющий корнями числа:

- а)  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ ; б)  $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ .

9. Показать, что если корни многочлена  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  образуют геометрическую прогрессию, то справедливо соотношение  $a^3 c = b^3$ . Проверить, что условие  $a^3 c = b^3$  не только необходимо, но и достаточно.

## § 6. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ $R$

**Вопросы программы.** Сопряженность корней многочлена с действительными коэффициентами. Разложение многочлена над полем действительных чисел в произведение неприводимых множителей.

**Л и т е р а т у р а.** Винберг Э. Б. Гл. 4, § 4 (п. 1, 2).

**Задача 1.** Составить нормированный многочлен наименьшей

степени с действительными коэффициентами, имеющий простой корень  $i$  и двукратный корень  $1 + i$ .

**Решение.** Напомним, что для многочленов над полем  $R$  справедлива теорема: если комплексное число  $a + bi$  является корнем многочлена  $f(x) \in R[x]$ , то число  $a - bi$  также есть корень этого многочлена. При этом сопряженные корни  $a + bi$ ,  $a - bi$  имеют одну и ту же кратность.

В данном случае корнями  $f(x)$  должны быть числа:  $i$  (простой корень),  $-i$  (простой корень),  $1 + i$  (двукратный корень) и  $1 - i$  (двукратный корень). Значит, разложение  $f(x)$  на линейные множители (над полем  $C$ ) должно содержать произведение

$$(x - i)(x + i)(x - 1 - i)^2(x - 1 + i)^2 = \\ = (x^2 - i^2)[(x - 1)^2 - i^2] = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2).$$

Так как это произведение  $\in R[x]$ , то оно и должно совпадать с  $f(x)$ .

**О т в е т.**  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) = x^6 - 4x^5 + 9x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 8x + 4$ .

Эту же задачу можно решить и другим способом. Так как искомым многочлен должен иметь всего 6 корней, то

$$f(x) = x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6.$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_6$  можно найти по формулам Виета.

Например,

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) = \\ = (i - i + 1 + i + 1 + i + 1 - i + 1 - i) = -4,$$

аналогично находим  $a_2, \dots, a_6$ . Заметим, что в данном примере второй способ решения оказывается более громоздким (например, при подсчете  $a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_5x_6$  приходится находить сумму  $C_6^2 = 15$  слагаемых).

**Задача 2.** Зная, что многочлен  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$  имеет корень  $-2 + i$ , найти остальные его корни.

**Решение.** Так как  $f(x)$  есть многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем  $-2 + i$  он обязан иметь корень  $-2 - i$ . Следовательно,  $f(x)$  делится на многочлен

$$(x + 2 - i)(x + 2 + i) = x^2 + 4x + 5.$$

Разделив  $f(x)$  на этот многочлен, получим:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - x + 1).$$

Отсюда видно, что остальные корни многочлена  $f(x)$  являются корнями уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

т. е. равны числам  $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

**О т в е т.**  $f(x)$  имеет 4 корня:

$$x_1 = -2 + i, \quad x_2 = -2 - i, \quad x_3 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

**Задача 3.** Приводимы ли над полем  $R$  следующие многочлены (в случае приводимости разложить их на множители):

- а)  $f(x) = 2x^2 - 1$ ;      б)  $f(x) = 2x^2 + 1$ ;  
 в)  $f(x) = x^4 + 1$ ;      г)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ?

**Решение.** Над полем  $R$  неприводимы лишь многочлены 1-й степени и некоторые многочлены 2-й степени, а именно те, которые не имеют действительных корней. Любой же многочлен степени выше 2 приводим над  $R$ .

В данном случае имеем:

а)  $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$ ;

б) Многочлен  $2x^2 + 1$  неприводим над  $R$ ;

в)  $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ , оба множителя правой части неприводимы над  $R$ ;

г)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 1)^3 + 1 = ((x + 1) + 1)((x + 1)^2 - (x + 1) + 1) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$ , оба множителя неприводимы над  $R$ .

**Замечание.** Для любого многочлена  $f(x) \in R[x]$  степени выше 2, как уже говорилось, существует разложение на неприводимые множители 1-й и 2-й степени. Однако найти это разложение далеко не всегда просто. В случаях в) и г) предыдущей задачи это оказалось несложно благодаря специфическому подбору коэффициентов многочлена  $f(x)$ .

**Задача 4.** Разложить на неприводимые множители над полем  $R$  многочлен  $x^8 + 1$ .

**Решение.** а) Корнями многочлена  $x^8 + 1$  в поле  $C$  являются значения  $\sqrt[8]{-1}$ . Поскольку

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

то корни  $x^8 + 1$  будут:

$$x_k = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{8} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{8} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 7).$$

Числа  $x_0, x_1, \dots, x_7$  разбиваются на пары сопряженных. Сопряженными, как нетрудно видеть, будут:  $x_0$  и  $x_7$ ,  $x_1$  и  $x_6$ ,  $x_2$  и  $x_5$ ,  $x_3$  и  $x_4$ . Действительно, если  $k + l = 7$ , то

$$x_k x_l = \cos \left( \frac{\pi + 2\pi k}{8} + \frac{\pi + 2\pi l}{8} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2\pi k}{8} + \frac{\pi + 2\pi l}{8} \right).$$

Но

$$\frac{\pi + 2\pi k}{8} + \frac{\pi + 2\pi l}{8} = \frac{2\pi + 2\pi \cdot 7}{8} = 2\pi$$

и, следовательно,  $x_k x_l = 1$ ; из этого равенства, если учесть  $|x_k| = |x_l|$ , следует:  $x_k = x_l$  (см. задачу 17 из § 4). Таким образом, неприводимыми множителями многочлена  $x^8 + 1$  над полем  $R$  будут

4 многочлена 2-й степени:

$$(x - x_0)(x - x_7); (x - x_1)(x - x_6); (x - x_2)(x - x_5); \\ (x - x_3)(x - x_4).$$

б) Найдем коэффициенты этих многочленов. Используя формулу

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = (x - a)^2 + b^2,$$

получим:

$$(x - x_0)(x - x_7) = \left(x - \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{8};$$

$$(x - x_1)(x - x_6) = \left(x - \cos \frac{\pi + 2\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi + 2\pi}{8};$$

$$(x - x_2)(x - x_5) = \left(x - \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{8};$$

$$(x - x_3)(x - x_4) = \left(x - \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{8}.$$

$$\text{О т в е т: } x^8 + 1 = \left[\left(x - \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right] \left[\left(x - \cos \frac{3\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right] \left[\left(x - \cos \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{5\pi}{8}\right] \left[\left(x - \cos \frac{7\pi}{8}\right)^2 + \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right].$$

Рассмотрим теперь весьма важную задачу, в которой устанавливается верхняя граница для всех действительных корней многочлена  $f(x)$  с действительными коэффициентами (если такие корни имеются).

**Задача 5.** Пусть дан многочлен с действительными коэффициентами:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

причем старший коэффициент равен 1. Пусть среди коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  имеются отрицательные числа и  $a_k$  — первое из них. Наконец, пусть  $A$  — наибольшая из абсолютных величин всех отрицательных коэффициентов. Доказать, что все действительные корни многочлена  $f(x)$  (если таковые имеются) не превосходят числа

$$1 + \sqrt[k]{A}. \quad (2)$$

**Р е ш е н и е.** Покажем, что при  $x > 1 + \sqrt[k]{A}$  будет  $f(x) > 0$  — отсюда, очевидно, будет следовать требуемое.

Имеем:

$$f(x) = x^n + (a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}) + (a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-1} x + a_n).$$

Так как  $x > 0$  и все коэффициенты  $a_1, \dots, a_{k-1}$  неотрицательны, то можем записать:

$$f(x) \geq x^n + (a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-1} x + a_n).$$

Далее, так как для всех  $a_i$ ,  $i \geq k$ , имеем:  $a_i \geq -A$ , то

$$a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-1} x + a_n \geq -A x^{n-k} - \dots - A x - A.$$

Следовательно,

$$f(x) \geq x^n - A(x^{n-k} + \dots + x + 1).$$

Правая часть равна

$$x^n - A \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}.$$

Ввиду того, что  $x > 1$ , это выражение строго больше, чем

$$x^n - A \frac{x^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1} [x^{k-1}(x-1) - A].$$

Таким образом, для всех  $x > 1 + \sqrt[k]{A}$  имеем:

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1} [x^{k-1}(x-1) - A].$$

Так как  $x > 1$ , имеем:  $x^{k-1} > (x-1)^{k-1}$  и, значит  $x^{k-1}(x-1) - A > (x-1)^k - A$ ; последнее же выражение в силу  $x > 1 + \sqrt[k]{A}$  строго положительно. Таким образом, при  $x > 1 + \sqrt[k]{A}$  имеем:  $f(x) > 0$ , что и завершает доказательство.

В дальнейшем выражение (2) будем иногда обозначать ВГ (верхняя граница действительных корней многочлена  $f(x)$ ). Заметим, что если среди коэффициентов многочлена  $f(x)$  нет ни одного отрицательного, то многочлен не имеет положительных корней — в этом случае в качестве ВГ можно взять число 0.

Располагая способом нахождения верхней границы действительных корней, нетрудно определить и нижнюю границу. Действительно, если число  $\alpha$  является корнем многочлена  $f(x)$ , то число  $-\alpha$  является корнем для  $f(-x)$ ; следовательно, если число  $M$  есть верхняя граница действительных корней многочлена  $f(-x)$  (т. е.  $-\alpha \leq M$ ), то число  $-M$  есть нижняя граница действительных корней многочлена  $f(x)$  (т. е.  $\alpha \geq -M$ ).

**Задача 6.** Найти верхнюю и нижнюю границы действительных корней многочлена

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 27.$$

**Решение.** Прежде всего необходимо привести многочлен к виду (1) (сделать старший коэффициент равным единице). Разделив все коэффициенты на 3, получим многочлен

$$f(x) = x^5 + \frac{7}{3}x^4 - x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - 9.$$

Здесь  $k = 2$ ,  $A = 9$ , следовательно, ВГ  $= 1 + \sqrt[2]{9} = 4$ .

Чтобы найти нижнюю границу действительных корней, рассмотрим многочлен  $f(-x)$ ; умножив все его коэффициенты на  $-1$  (чтобы старший коэффициент был снова равен единице), получим многочлен

$$\varphi(x) = x^5 - \frac{7}{3}x^4 - x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 9.$$

Для этого многочлена имеем:  $k = 1$ ,  $A = \frac{7}{3}$ , так что  $B\Gamma = 1 + \sqrt[1]{\frac{7}{3}} = \frac{10}{3}$ . Следовательно, число  $-\frac{10}{3}$  будет нижней границей действительных корней многочлена  $f(x)$ .

О т в е т. Все действительные корни многочлена заключены в промежутке  $\left[-\frac{10}{3}; 4\right]$ .

### Упражнения

1. Найти нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

- а) простой корень  $2 + i$  и двукратный корень  $1$ ;
- б) простой корень  $-3$  и двукратный корень  $1 - i$ ;
- в) простой корень  $1 - i$  и двукратный корень  $2 + i$ ;
- г) простой корень  $-1 - i$  и двукратные корни  $i$  и  $1 - i$ ;
- д) трехкратный корень  $2 - 3i$ .

2. Зная, что число  $a$  есть корень многочлена  $f(x)$ , найти остальные его корни:

- а)  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ ,  $a = 1 + i$ ;
- б)  $f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ ,  $a = i$ ;
- в)  $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 5$ ,  $a = 1 - 2i$ .

3. Разложить многочлен  $f(x)$  на множители, неприводимые над полем  $R$ :

- а)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ;
- б)  $f(x) = x^3 + x + 2$ ;
- в)  $f(x) = x^4 + 16$ ;
- г)  $f(x) = x^4 + 4$ ;
- д)  $f(x) = x^6 - 27$ ;
- е)  $f(x) = x^4 - 7$ ;
- ж)  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 8x - 1$ ;
- з)  $f(x) = x^6 - 8$ ;
- и)  $f(x) = x^5 - 1$ .

4. Разложить на линейные и квадратные множители, неприводимые над полем  $R$ , следующие многочлены:

- а)  $f(x) = x^{2n} - 1$ ,  $n > 1$ ;
- б)  $f(x) = x^{2n+1} - 1$ ,  $n > 1$ ;
- в)  $f(x) = x^{10} - 2x^5 + 2$ ;
- г)  $f(x) = x^4 - ax^2 + 1$ ,  $-2 < a < 2$ ;
- д)  $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ ,  $n > 1$ .

### § 7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ В РАДИКАЛАХ

Л и т е р а т у р а: Винберг Э. Б. Гл. IV, § 3, гл. II, § 2 (п. 8).

Задача 1. Решить уравнение

$$x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0.$$

Р е ш е н и е. Освободимся от квадрата неизвестного, чтобы использовать формулу Кардано. Для освобождения от  $(n - 1)$ -й степени неизвестного в уравнении

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

надо ввести новое неизвестное

$$x = y - \frac{a_1}{na_0}. \quad (2)$$

В нашем примере  $a_1 = 6$ ,  $n = 3$ ,  $a_0 = 1$ , поэтому следует взять

$$x = y - 2.$$

Получим «неполное» кубическое уравнение

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 30(y - 2) + 25 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^3 + 18y - 19 = 0. \quad (3)$$

Корни кубического уравнения

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4)$$

можно найти по формуле Кардано:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (5) \\ uv = -\frac{p}{3}.$$

Выражение  $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , стоящее под знаком квадратного корня, лишь множителем  $-\frac{1}{108}$  отличается от дискриминанта многочлена  $f(y) = y^3 + py + q$ . Действительно, мы имеем:

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f, f'), \text{ но в данном случае } f'(y) = 3y^2 + p, \\ a_0 = 1, n = 3,$$

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \downarrow -3 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & -2p & -3q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p & 3q & 0 \\ 0 & 2p & 3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \\ = 4p^3 + 27q^2.$$

Следовательно,

$$D(f) = (-1)^{\frac{3 \cdot 2}{2}} \cdot 1^{-1} (27q^2 + 4p^3) = -27q^2 - 4p^3.$$

Для уравнения (3)  $D(f) = -27 \cdot 19^2 - 4 \cdot 18^3 < 0$  ( $\Delta > 0$ ),



следовательно, уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 \in R, \\ y_2 &= u_1 \omega + v_1 \omega^2, \\ y_3 &= u_1 \omega^2 + v_1 \omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u_i$  — одно из значений  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ ,  $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ ,  
 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  — первообразный корень 3-й степени из 1,  
 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

Формулы (6) можно записать в более удобном виде, если мы подставим значения  $\omega$ ,  $\omega^2$ :

$$y_1 = u_1 + v_1 \in R, \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \quad (7)$$

Проводя вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{\frac{19}{2} + \sqrt{\frac{361}{4} + 216}} = \sqrt[3]{\frac{19}{2} + \sqrt{\frac{1225}{4}}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{19}{2} + \frac{35}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3, \quad v_1 = -\frac{18}{3 \cdot 3} = -2. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (7) находим:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = 3 + (-2) = 1, \\ y_{2,3} &= -\frac{1}{2}(3 - 2) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(3 + 2) = -\frac{1}{2} \pm \frac{5i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, используем подстановку  $x = y - 2$  и находим:

$$x_1 = y_1 - 2 = -1, \quad x_{2,3} = y_{2,3} - 2 = -\frac{5}{2} \pm \frac{5i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -1; \quad x_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm \frac{5i\sqrt{3}}{2}.$$

**Задача 2.** Решить уравнение

$$f(x) = x^3 - 12x + 16 = 0.$$

**Решение.** Уравнение уже «неполное», с действительными коэффициентами. Исследуем его с помощью дискриминанта  $D(f) = -27q^2 - 4p^3$ . Имеем:

$$D(f) = -27 \cdot 16^2 - 4(-12)^3 = -6912 + 6912 = 0.$$

Если дискриминант равен нулю, то все корни действительны, причем один корень простой, другой — двукратный:

$$D(f) = 0 (\Delta = 0) \Rightarrow x_1, x_2 = x_3 \in R.$$

Используя формулы (7) (и записывая  $x_i$  вместо  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), находим:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-8} = -2, \quad v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{-12}{3(-2)} = \\ &= -2 \Rightarrow x_1 = u_1 + v_1 = -2 - 2 = -4; \\ x_{2,3} &= -\frac{1}{2}(-2-2) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(-2+2) = 2. \end{aligned}$$

О т в е т.  $x_1 = -4$ ;  $x_{2,3} = 2$ .

З а м е ч а н и е. При  $D(f) = 0$  (или  $\Delta = 0$ ) корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0 \quad (8)$$

рационально выражаются через его коэффициенты, а именно:

$$x_1 = 2u_1 = \frac{3q}{p}; \quad x_{2,3} = -u_1 = -\frac{3q}{2p}. \quad (9)$$

Используя формулы (9), найдем:

$$x_1 = \frac{3 \cdot 16}{-12} = -4; \quad x_{2,3} = -\frac{3 \cdot 16}{2(-12)} = 2.$$

**Задача 3.** Решить уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$$

Р е ш е н и е. Освободимся от квадрата неизвестного, полагая  $x = y + 1$ :

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow f(y) = y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Дискриминант полученного уравнения

$$D(f) = -27q^2 - 4p^3 = -27 \cdot 1 - 4(-27) = -27(-5) > 0.$$

В случае положительного дискриминанта уравнение (8) имеет три действительных корня. При этом  $v_1 = \bar{u}_1$ . Для данного случая имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}} = \\ &= \cos \frac{2\pi}{9} + i\sin \frac{2\pi}{9}; \end{aligned}$$

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{-3}{3\left(\cos \frac{2\pi}{9} + i\sin \frac{2\pi}{9}\right)} = \cos \frac{2\pi}{9} - i\sin \frac{2\pi}{9} = \bar{u}_1;$$

$$y_1 = u_1 + \bar{u}_1 = 2\cos \frac{2\pi}{9} = 2\cos 40^\circ \approx 2 \cdot 0,7660 = 1,5320;$$

$$\begin{aligned} y_{2,3} &= -\frac{1}{2}(u_1 + \bar{u}_1) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - \bar{u}_1) = -\cos 40^\circ \mp \sqrt{3}\sin 40^\circ \approx \\ &\approx -0,7660 \mp 1,732 \cdot 0,6428 \approx -0,766 \mp 1,113; \\ y_2 &\approx -1,879; \quad y_3 \approx 0,347. \end{aligned}$$

Для нахождения  $y_2, y_3$  мы использовали формулы (7).

Возвращаясь от  $y$  к  $x$  (напомним, что  $x = y + 1$ ), получим:

$$x_1 = y_1 + 1 \approx 2,532; x_2 = y_2 + 1 \approx -0,879; x_3 = y_3 + 1 \approx 1,347.$$

О т в е т. Все три корня действительные:  $x_1 \approx 2,532$ ;  $x_2 \approx -0,879$ ;  $x_3 \approx 1,347$ .

З а м е ч а н и е. Корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) при  $D(f) > 0$  ( $\Delta < 0$ ) можно найти по формулам:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos \left( \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right),$$

$$\text{где } r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta}.$$

**Задача 4.** Решить уравнение

$$f(x) = x^3 - 6ix + 4 - 4i = 0.$$

Р е ш е н и е. Формулы Кардано применимы к «неполному» кубическому уравнению с любыми комплексными коэффициентами. В данном случае имеем:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (2 - 2i)^2 + (-2i)^3 = 4 - 8i - 4 + 8i = 0,$$

поэтому один из корней будет кратным. Для нахождения корней воспользуемся формулами (9):

$$x_1 = \frac{3q}{p} = \frac{3(4 - 4i)i}{-6i \cdot i} = 2 + 2i; x_{2,3} = -\frac{3q}{2p} = -1 - i.$$

О т в е т.  $x_1 = 2 + 2i$ ;  $x_{2,3} = -1 - i$ .

**Задача 5.** Решить методом Феррари уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Р е ш е н и е. Левую часть уравнения представим в виде разности квадратов некоторого трехчлена и двучлена. Для этого будем считать  $x^4$  квадратом 1-го члена трехчлена,  $-2x^3$  — удвоенным произведением 1-го члена на 2-й и введем новое неизвестное  $y$  в качестве 3-го члена:

$$(x^2 - x + y)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2y - 2xy + y^2.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} (x^2 - x + y)^2 + x^2 - 2x^2y + 4x + 2xy - y^2 - 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 - x + y)^2 - [(2y - 1)x^2 - 2(y + 2)x + (y^2 + 8)] &= 0. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках было квадратом

двуучлена. Для этого его дискриминант должен быть равен нулю:  $b^2 - 4ac = 0$ , где  $b = -2(y + 2)$ ,  $a = 2y - 1$ ,  $c = y^2 + 8$ .

Итак, потребуем:

$$4(y + 2)^2 - 4(2y - 1)(y^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 - 2y^3 + y^2 - 16y + 8 = 0 \Leftrightarrow y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0. \quad (10)$$

Полученное уравнение для  $y$  называется кубической резольвентой данного уравнения 4-й степени. Достаточно найти один корень резольвенты  $y_0$ , чтобы решить данное уравнение. После несложных преобразований найдем  $y_0$ :

$$y^2(y - 1) - 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 - 6) = 0 \Rightarrow y_0 = 1$$

(можно было бы взять и  $y_0 = \sqrt{6}$ ). Подставляем значение  $y_0 = 1$  в уравнение (10):

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - 6x + 9) &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + 1 - x + 3)(x^2 - x + 1 + x - 3) = \\ &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm i\sqrt{3} \vee x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

О т в е т.  $1 \pm i\sqrt{3}; \pm\sqrt{2}$ .

**Задача 6.** Решить методом Эйлера уравнение

$$f(x) = z^4 - 8z^3 + 21z^2 - 14z - 10 = 0. \quad (11)$$

**Р е ш е н и е.** Сначала освободимся от 3-й степени неизвестного  $z$  подстановкой:

$$z = x - \frac{-8}{4 \cdot 1} = x + 2,$$

или  $x = z - 2$ . Разложим многочлен  $f(z)$  по степеням  $z - 2$ , используя формулу Тейлора и схему Горнера:

	1	-8	21	-14	-10
2	1	-6	9	4	-2 = f(2)
2	1	-4	1	6 = f'(2)	
2	1	-2	-3 = $\frac{f''(2)}{2!}$		
2	1	0 = $\frac{f'''(2)}{3!}$			
2	1 = $\frac{f^{(4)}(2)}{4!}$				

$$f(z) = (z - 2)^4 - 3(z - 2)^3 + 6(z - 2) - 2.$$

Получим вместо (11) уравнение

$$x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0. \quad (12)$$

Формулы Эйлера применимы к любому неполному уравнению

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (13)$$

Кубическая резольвента для этого уравнения имеет вид:

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0.$$

В случае уравнения (12) имеем:  $p = -3$ ,  $q = 6$ ,  $r = -2$ , следовательно, кубическая резольвента:

$$\varphi(y) = y^3 - 6y^2 + 17y - 36 = 0.$$

Испытывая делители свободного члена — 36, найдем один корень  $y_1 = 4$  резольвенты.

Затем находим остальные корни, деля  $\varphi(y)$  на  $y - 4$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 17 & -36 \\ 4 & 1 & -2 & 9 & 0 = \varphi(4) \end{array}$$

$$y^2 - 2y + 9 = 0, y_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{8}.$$

Далее находим числа  $u_i = \sqrt{y_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$u_1 = \sqrt{4} = \pm 2, u_2 = \sqrt{1 + i\sqrt{8}} = \pm (\sqrt{2} + i),$$

$$u_3 = \sqrt{1 - i\sqrt{8}} = \pm (\sqrt{2} - i).$$

Выберем такие значения  $u_1, u_2, u_3$ , чтобы было

$$u_1 u_2 u_3 = -q = -6.$$

Можно взять, например,  $u_1 = -2$ ,  $u_2 = \sqrt{2} + i$ ,  $u_3 = \sqrt{2} - i$ , тогда

$$u_1 u_2 u_3 = -2 (\sqrt{2} + i) (\sqrt{2} - i) = -2 (2 - i^2) = -6.$$

Формулы Эйлера для уравнения (13) имеют вид:

$$x_1 = \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + u_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (u_1 - u_2 - u_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{2} (-u_1 + u_2 - u_3), u_1 u_2 u_3 = -q, \quad (14)$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (-u_1 - u_2 + u_3).$$

По этим формулам находим корни уравнения (12):

$$x_1 = \frac{1}{2} (-2 + 2\sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (-2 - 2\sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} (2 + 2i) = 1 + i,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (2 - 2i) = 1 - i.$$

Тогда исходное уравнение (11) имеет корни:

$$z_1 = x_1 + 2 = 1 + \sqrt{2}, \quad z_2 = x_2 + 2 = 1 - \sqrt{2}, \\ z_3 = x_3 + 2 = 3 + i, \quad z_4 = x_4 + 2 = 3 - i.$$

О т в е т.  $1 \pm \sqrt{2}; 3 \pm i$ .

### Упражнения

1. Привести кубические уравнения к виду:

$$y^3 + py + q = 0,$$

затем исследовать и решить полученные уравнения:

- а)  $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ ; б)  $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$ ;  
в)  $x^3 + 3ix^2 - (3 + 6i)x + 10 - 5i = 0$ ;  
г)  $x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$ .

2. Исследовать и решить «неполные» кубические уравнения:

- а)  $x^3 + 12x + 63 = 0$ ; б)  $x^3 + 9x - 26 = 0$ ;  
в)  $x^3 - 3x + 2 = 0$ ; г)  $3x^3 - 8x + 8 = 0$ ;  
д)  $4x^3 - 3x - 1 = 0$ ; е)  $x^3 - 9x + 6 = 0$ .

3. Не решая уравнения, определить число действительных корней:

- а)  $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$ ;  
б)  $x^3 - 6x^2 + 7x + 5 = 0$ ;  
в)  $x^3 - 12x^2 + 45x + 54 = 0$ .

4. Решить методом Феррари уравнения 4-й степени:

- а)  $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0$ ; б)  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$ ;  
в)  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$ ; г)  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$ ;  
д)  $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ ; е)  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ;  
ж)  $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ ; з)  $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ ;  
и)  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$ ; к)  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ ;  
л)  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$ .

5. Решить методом Эйлера уравнения 4-й степени, предварительно приведя их к виду  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ :

- а)  $z^4 - 4z^3 + 24z - 36 = 0$ ; б)  $z^4 + 8z^3 + 26z^2 + 41z + 28 = 0$ ;  
в)  $z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 4z + 4 = 0$ ; г)  $z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 27 = 0$ ;  
д)  $4z^4 + 16z^3 + 12z^2 + 8z + 5 = 0$ .

У к а з а н и е. В случае б) используйте формулу

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \right).$$

### § 8. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ $\mathbb{Q}$

**Вопросы программы.** Целые и рациональные корни многочленов. Сведение вопроса о приводимости многочлена над полем ра-

циональных чисел к вопросу о приводимости над кольцом целых чисел. Критерий неприводимости.

Л и т е р а т у р а: Винберг Э.: Б. Гл. V, § 1 (п. 1, 2).

При рассмотрении многочлена  $f(x) \in Q[x]$  (или уравнения  $f(x) = 0$ ) нас будут интересовать в основном два вопроса: 1) о нахождении рациональных корней этого многочлена и 2) приводимость  $f(x)$  над полем  $Q$ .

Для многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами справедлива теорема: если  $\frac{p}{q}$  — рациональный корень многочлена, причем  $(p, q) = 1$ , то числитель  $p$  дроби является делителем свободного члена, а знаменатель  $q$  является делителем старшего коэффициента многочлена. Из этой теоремы вытекают два полезных следствия:

1. Нормированный многочлен  $f(x) \in Z[x]$  не имеет дробных корней (т. е. таких, для которых  $q \neq \pm 1$ ).

2. Целый корень  $\alpha$  многочлена  $f(x) \in Z[x]$  является делителем свободного члена.

**Задача 1.** Найти все рациональные корни многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30.$$

**Решение.** Многочлен  $f(x)$  нормированный (старший коэффициент равен 1), поэтому его рациональные корни, если таковые существуют, должны быть целыми числами. Целые же корни находятся среди делителей свободного члена. В нашем случае делителями свободного члена (числа 30) являются следующие числа:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30.$$

Теперь можно было бы каждое из этих 16 чисел испытать непосредственной подстановкой в многочлен или по схеме Горнера. Однако многие из этих чисел можно «отсеять» более простым путем. Найдем границы действительных корней данного многочлена (см. задачи 5 и 6 § 6):  $ВГ = 1 + \sqrt{11} < 5$ ;  $НГ = -12$ . Следовательно, действительные, и в частности рациональные, корни данного многочлена содержатся в промежутке  $(-12; 5)$ .

Поэтому остается испытать следующие 9 чисел:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, -5, -6, -10.$$

Воспользуемся еще тем, что если  $\alpha \neq \pm 1$  — целый корень многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то числа  $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$  и  $\frac{f(-1)}{\alpha + 1}$  целые.

В нашем случае  $f(1) = 16$ ,  $f(-1) = 24$ . Отсюда видно, что 1 и  $-1$  не являются корнями  $f(x)$ . Теперь проверим, для каких из оставшихся семи чисел  $\alpha$  числа  $\frac{16}{\alpha - 1}$  и  $\frac{24}{\alpha + 1}$  являются целыми.

Результаты вычислений запишем в виде таблицы:

$\alpha$	2	-2	3	-3	-5	-6	-10
$\frac{16}{\alpha-1}$	ц	д	ц	ц	д	д	д
$\frac{24}{\alpha+1}$	ц		ц	ц			

(Здесь буквы ц и д означают соответственно «целое» или «дробное».) Из таблицы видно, что целые корни данного многочлена следует искать среди чисел 2, 3, -3.

Теперь, пользуясь схемой Горнера, выясним, какие из указанных трех чисел являются корнями многочлена. Начинаем с числа 2:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -11 & -5 & 30 \\ 2 & 1 & 3 & -5 & -15 & 0 \end{array}$$

Так как остаток от деления  $f(x)$  на  $x - 2$  оказался равным нулю, то 2 — корень  $f(x)$ . Проверим, не является ли 2 двукратным корнем, для чего полученное от деления частное

$$q(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15$$

снова разделим на  $x - 2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -5 & -15 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & -5 \end{array}$$

Здесь остаток равен  $-5 \neq 0$ ; следовательно, число 2 является простым корнем многочлена  $f(x)$ . Теперь проверим число 3. Здесь можно на  $x - 3$  делить не  $f(x)$ , а  $q(x)$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -5 & -15 \\ 3 & 1 & 6 & 13 & 24 \end{array}$$

Из таблицы видно, что  $q(3) = 24 \neq 0$ . Следовательно, число 3 не является корнем  $q(x)$ , а значит, и  $f(x)$ . Осталось проверить число -3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -5 & -15 \\ -3 & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

Число -3 — корень многочлена  $q(x)$ , а следовательно, и многочлена  $f(x)$ . При этом свободный член частного  $q_1(x) = x^2 - 5$  не делится на -3, и, значит, -3 его корнем не является, т. е. -3 есть простой корень данного многочлена.

Итак, многочлен  $f(x)$  имеет два рациональных корня:  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -3$ , причем

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 - 5).$$

Теперь можно найти и два остальных корня  $f(x)$ :  $x_{3,4} = \pm \sqrt{5}$ . Эти числа иррациональны.

**Задача 2.** Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 + 6x^2 + 10x + 3.$$



**Решение.** Здесь старший коэффициент  $f(x)$  отличен от 1. Следовательно, многочлен может иметь как целые, так и дробные рациональные корни (хотя с тем же успехом может и не иметь ни тех, ни других). Их отыскание можно свести к отысканию целых корней некоторого нового многочлена, который получается из  $f(x)$  следующим образом. Умножим многочлен  $f(x)$  на  $2^3 = 8$  и сделаем подстановку  $2x = y$ . Получим многочлен

$$\varphi(y) = y^5 + 6y^4 + y^3 + 12y^2 + 40y + 24,$$

который не имеет дробных корней. Найдя его целые корни (тем же способом, что и в предыдущей задаче) и разделив их на 2 (так как  $x = \frac{y}{2}$ ), получим все рациональные корни данного многочлена.

Однако такое сведение не обязательно. Можно находить рациональные корни данного многочлена, используя теорему, указанную в начале параграфа. По этой теореме корни нашего многочлена следует искать среди чисел:

$$\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{4}.$$

Для сокращения числа испытаний найдем границы корней многочлена  $f(x)$ . Замечаем, что все коэффициенты многочлена положительны, а потому положительных корней он не имеет, т. е.

$BГ = 0$ . Теперь найдем нижнюю границу  $НГ = -\left(1 + \frac{12}{4}\right) = -4$ .

Таким образом, корни данного многочлена находятся в промежутке  $[-4; 0]$ , и, следовательно, осталось испытать числа:

$$-1, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}. \quad (1)$$

Используем еще тот факт, что если дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена  $f(x)$ , то  $\frac{f(1)}{p-q}$  и  $\frac{f(-1)}{p+q}$  — целые числа. Проверим это условие для чисел (1), учитывая, что  $f(1) = 36$ ,  $f(-1) = 6$ . Результаты запишем в таблицу:

$\frac{p}{q}$	$-\frac{3}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$\frac{f(1)}{p-q}$	ц	ц	д	д	д
$\frac{f(-1)}{p+q}$	ц	ц			

Итак, корнями многочлена  $f(x)$  могут быть лишь числа  $-3$  и  $-\frac{1}{2}$ . Проверим каждое из них по схеме Горнера:

	4	12	1	6	10	3
$-3$	4	0	1	3	1	0
$-\frac{1}{2}$	4	-2	2	2	0	
$-\frac{1}{2}$	4	-4	4	0		
$-\frac{1}{2}$	4	-6	7	$\neq 0$		

Таким образом, многочлен  $f(x)$  имеет рациональные корни:  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}$  (корень  $-3$  является простым, так как частное от деления  $f(x)$  на  $x + 3$  имеет свободный член 1, не делящийся на  $-3$ ), причем

$$f(x) = (x + 3) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (4x^2 - 4x + 4) = (x + 3) (2x + 1)^2 \times \\ \times (x^2 - x + 1).$$

Обратимся к задачам на установление приводимости или неприводимости многочленов над полем  $Q$ . Прежде всего заметим, что любой многочлен, неприводимый над одним из полей  $C$  или  $R$ , будет неприводим и над  $Q$ . Обратное, однако, неверно — класс неприводимых над  $Q$  многочленов значительно шире класса многочленов, неприводимых над  $R$  или  $C$ . В то время как над полем  $C$  неприводимы только многочлены 1-й степени, а над  $R$  — многочлены 1-й степени и некоторые многочлены 2-й степени, над полем  $Q$  существуют неприводимые многочлены любой заданной степени  $n \geq 1$ .

Легко решается вопрос о приводимости или неприводимости над  $Q$  многочленов 2-й или 3-й степени. А именно многочлен 2-й или 3-й степени над  $Q$  тогда и только тогда приводим, когда он имеет хотя бы один рациональный корень. В случае, если многочлен 2-й степени приводим над  $Q$ , оба его корня рациональны; приводимый над  $Q$  многочлен 3-й степени имеет либо один, либо все три рациональных корня.

**Задача 3.** Выяснить, приводимы ли над полем  $Q$  многочлены:

- а)  $f(x) = 4x^2 - 12x + 5$ ;
- б)  $f(x) = x^2 - 3x - 5$ ;
- в)  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$ ;
- г)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ,

и в случае приводимости разложить их на неприводимые множители.

**Решение.** а) Корнями  $f(x)$  являются числа:  $x_1 = \frac{5}{2}$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Многочлен  $f(x)$  приводим над  $Q$ :

$$а) f(x) = 4 \left(x - \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) = (2x - 5)(2x - 1).$$

б) Корни  $f(x)$  — числа:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Так как  $x_1, x_2 \notin Q$ , многочлен  $f(x)$  неприводим над  $Q$ .

в) Ищем рациональные корни  $f(x)$ . Так как старший коэффициент  $f(x)$  равен 1, то все рациональные корни должны быть целыми и их следует искать среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел  $\pm 1, \pm 2$ . Но в данном случае  $f(1) = -6 \neq 0, f(-1) = 22 \neq 0, f(2) = 4 \neq 0, f(-2) = 48 \neq 0$ , целых корней нет. Итак,  $f(x)$  не имеет рациональных корней, следовательно, неприводим над  $Q$ .

г) Имеем  $f(1) = 0$ , следовательно,  $f(x)$  приводим над  $Q$ . Произведя деление на  $x - 1$ , получим:  $f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 1)$ . Многочлен  $x^2 + x - 1$  неприводим над  $Q$ , так как его корни  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  иррациональны.

О т в е т. а)  $f(x) = (2x - 5)(2x - 1)$ ;

б), в)  $f(x)$  неприводим над  $Q$ ;

г)  $f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 1)$ .

З а м е ч а н и е. Для многочленов степени 2 или 3 над полем  $Q$ , как уже отмечалось, наличие хотя бы одного рационального корня есть необходимое и достаточное условие приводимости. Для многочленов степени выше 3 наличие хотя бы одного рационального корня есть лишь достаточное условие приводимости. Что это условие не является необходимым, показывает следующий пример: многочлен  $(x^2 + 1)^2$  (степени 4) приводим над  $Q$ , между тем этот многочлен не имеет ни одного корня в поле  $Q$ . То же самое можно сказать и о многочлене  $x^4 - 4$ .

В некоторых случаях неприводимость многочлена  $f(x) \in Q[x]$  можно установить на основании следующего признака неприводимости Эйзенштейна.

Многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (n \geq 2, a_0 \neq 0)$$

неприводим над полем  $Q$ , если хотя бы одним способом можно подобрать простое число  $p$ , удовлетворяющее условиям:

- 1) старший коэффициент  $a_0$  не делится на  $p$ ;
- 2) все остальные коэффициенты делятся на  $p$  ( $a_i : p, i = 1, 2, \dots, n$ );
- 3) свободный член  $a_n$ , делясь на  $p$ , не делится на  $p^2$ .

Отметим также следующий факт: если многочлен с целыми коэффициентами приводим над полем  $Q$  рациональных чисел, то он приводим и над кольцом  $Z$  целых чисел.

**Задача 3.** Пользуясь признаком Эйзенштейна, доказать неприводимость многочленов:

а)  $f(x) = 4x^5 - 12x^3 + 6x^2 - 72x - 6$ ;

б)  $f(x) = x^n - 2, n > 1$ ;

в)  $f(x) = x^n + (x + 6)^n + 3, n > 1$ .

**Решение.** В случае а) применяем признак Эйзенштейна для  $p = 3$ , в случае б) — для  $p = 2$ . В случае в) раскрываем  $(x + 6)^n$  по формуле бинома Ньютона и получаем:

$$f(x) = 2x^n + \sum_{k=1}^n C_n^k x^{n-k} 6^k + 3.$$

В написанном многочлене все коэффициенты, кроме старшего (равного 2), делятся на 3, а свободный член (он равен  $6^n + 3$ ), делясь на 3, не делится на  $3^2$ . Следовательно,  $f(x)$  неприводим над  $Q$ .

**Задача 4.** Многочлен

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2,$$

не имеющий рациональных корней, разложить на множители или установить его неприводимость над полем  $Q$ .

**Решение.** Эту задачу мы решим, используя способ Кронекера, который в данном случае (для многочлена степени 4) будет сводиться к следующему.

Так как многочлен  $f(x)$  не имеет рациональных корней, то он не имеет линейных множителей и в случае приводимости над полем  $Q$  разлагается на два множителя 2-й степени:

$$f(x) = g(x)h(x) = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2),$$

где  $p_1, p_2, q_1, q_2$  — целые числа (старшие коэффициенты многочленов 2-й степени можно считать равными 1, поскольку их произведение должно равняться старшему коэффициенту многочлена  $f(x)$ , т. е. 1). При любом целом значении  $x = m$  имеем:

$$f(m) = g(m)h(m),$$

следовательно,  $g(m)$  есть делитель  $f(m)$ . Этим обстоятельством мы воспользуемся для нахождения многочлена  $g_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ . Так как  $f(1) = 1$  и  $f(-1) = 1$ , то для  $g(1)$  и  $g(-1)$  возможны только следующие комбинации значений:

$$\begin{array}{ll} \text{I} \quad \begin{cases} g(1) = 1, \\ g(-1) = 1; \end{cases} & \text{II} \quad \begin{cases} g(1) = -1, \\ g(-1) = 1; \end{cases} \\ \text{III} \quad \begin{cases} g(1) = 1, \\ g(-1) = -1; \end{cases} & \text{IV} \quad \begin{cases} g(1) = -1, \\ g(-1) = -1. \end{cases} \end{array}$$

Рассмотрим первую комбинацию:

$$\text{I} \quad \begin{cases} g(1) = 1 + p_1 + q_1 = 1 \\ g(-1) = 1 - p_1 + q_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 0 \\ p_1 = 0. \end{cases}$$

Это дает  $g(x) = x^2$ , но, очевидно,  $f(x)$  не делится (без остатка) на  $x^2$ .

Рассмотрим вторую комбинацию:

$$\text{II} \quad \begin{cases} g(1) = 1 + p_1 + q_1 = -1 \\ g(-1) = 1 - p_1 + q_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = -1 \\ p_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^2 - x - 1,$$

что приводит к  $g(x) = x^2 - x - 1$ . Деля  $f(x)$  на  $x^2 - x + 1$ , убе-

ждаемся, что остаток равен нулю:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2 & x^2 - x - 1 \\ \hline x^4 - x^3 - x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x + 2 & \\ -2x^2 + 2x + 2 & \\ \hline 0 = r(x) & \Rightarrow f(x) : g(x) \end{array}$$

О т в е т:  $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 - 2)$ .

З а м е ч а н и я. 1. Если при рассмотрении всех комбинаций окажется, что  $f(x)$  не делится ни на один из полученных многочленов  $g(x)$ , то  $f(x)$  неприводим над полем  $Q$ .

2. Если старший коэффициент  $a_0$  многочлена  $f(x)$  не равен  $\pm 1$ , то для нахождения  $g(x) = ax^2 + bx + c$  нужно брать значения  $f(x)$  и  $g(x)$  при трех различных значениях  $x \in Z$ . Многочлен  $g(x)$  можно было бы найти, используя интерполяционную формулу Лагранжа (см. § 1).

3. Если степень многочлена  $f(x)$  выше 4, то необходимо рассмотреть большее число вариантов разложения. Например, если ст.  $f(x) = 6$ , то надо рассмотреть два случая:  $f(x)$  имеет хотя бы один множитель 2-й степени и  $f(x)$  разлагается в произведение двух множителей 3-й степени.

Как видим, метод Кронекера громоздок в практическом отношении, хотя и позволяет в принципе решить вопрос о приводимости или неприводимости любого конкретного многочлена над  $Q$ .

Разумеется, при выяснении вопроса о приводимости или неприводимости того или иного многочлена над  $Q$  не обязательно пытаться использовать рассмотренные выше стандартные приемы. Особенности строения многочлена могут сами подсказать путь для доказательства его приводимости (или неприводимости).

**Задача 5.** Пусть  $\varphi(x)$  — многочлен степени  $n$  с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, имеющим  $n$  различных корней (вообще говоря, комплексных). Доказать, что многочлен  $\varphi(x) - 1$  неприводим над  $Z$  (а значит, и над  $Q$ ).

**Р е ш е н и е.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — корни  $\varphi(x)$ . Рассуждая от противного, допустим, что многочлен  $\varphi(x) - 1$  приводим над  $Z$ , т. е.

$$\varphi(x) - 1 = g(x)h(x), \quad (2)$$

где  $g(x)$  и  $h(x)$  — многочлены, степени которых меньше  $n$ , с целыми коэффициентами. Полагая в (2)  $x = a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), будем иметь:

$$g(a_i)h(a_i) = -1,$$

следовательно,  $g(a_i) = 1$ ,  $h(a_i) = -1$  или же  $g(a_i) = -1$ ,  $h(a_i) = 1$ . В обоих случаях

$$g(a_i) + h(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, многочлен  $g(x) + h(x)$ , степень которого меньше  $n$ , имеет по крайней мере  $n$  различных корней:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Отсюда следует, что этот многочлен нулевой, т. е.  $g(x) = -h(x)$ . Тем самым

$$\varphi(x) - 1 = -(g(x))^2,$$

что невозможно, так как старший коэффициент многочлена  $\varphi(x)$  по условию положителен.

**З а м е ч а н и е.** В качестве многочлена  $\varphi(x)$ , удовлетворяющего условиям задачи, можно взять любой многочлен вида  $(x - a_1) \times \dots \times (x - a_n)$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  —  $n$  различных между собой целых чисел.

**Задача 6.** Найти необходимые и достаточные условия разложимости биквадратного многочлена с целыми коэффициентами

$$ax^4 + bx^2 + c$$

в произведение двух множителей 2-й степени (также с целыми коэффициентами).

**Р е ш е н и е.** Разделив данный многочлен на  $a$ , получим многочлен

$$f(x) = x^4 + px^2 + q$$

с рациональными коэффициентами  $p$  и  $q$  ( $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$ ). Наша задача — найти условия, при которых имеет место разложение вида

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)(x^2 + \alpha_2 x + \beta_2), \quad (3)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — рациональные числа.

Из (3) следует:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 &= 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2 &= p, \\ \beta_1 \beta_2 &= q. \end{aligned}$$

Если  $\alpha_1 = 0$ , то  $\alpha_2 = 0$ . В этом случае для нахождения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  нужно решить систему:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = p, \\ \beta_1 \beta_2 = q, \end{cases}$$

или, что равнозначно, решить квадратное уравнение  $z^2 - pz + q = 0$ . Очевидно, корни этого уравнения (т. е.  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ) будут рациональными числами в том и только в том случае, когда дискриминант  $p^2 - 4q$  — квадрат рационального числа.

Пусть  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда  $\alpha_2 = -\alpha_1$ ,  $\beta_2 = \beta_1$ , и для нахождения  $\alpha_1, \beta_1$  имеем систему:

$$\begin{cases} \beta_1^2 = q, \\ 2\beta_1 - p = \alpha_1^2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что числа  $\alpha_1, \beta_1$  будут рациональными в том и толь-

ко в том случае, если  $\sqrt{q}$  и  $\sqrt{2\sqrt{q}-p}$  — рациональные числа.

О т в е т. Положим  $p = \frac{b}{a}$  и  $q = \frac{c}{a}$ , тогда для разложимости  $ax^4 + bx^2 + c$  в произведение двух множителей 2-й степени (над  $\mathbb{Z}$ ) необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

- 1) число  $\sqrt{p^2 - 4q}$  рациональное;
- 2) числа  $\sqrt{q}$  и  $\sqrt{2\sqrt{q}-p}$  рациональные.

### Упражнения

1. Найти рациональные корни многочленов:

- а)  $f(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$ ;
- б)  $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ ;
- в)  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ ;
- г)  $f(x) = 8x^5 - 14x^4 - 77x^3 + 128x^2 + 45x - 18$ ;
- д)  $f(x) = 5x^5 - 2\frac{2}{3}x^4 + 15\frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 7x + 1$ ;
- е)  $f(x) = 8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1$ ;
- ж)  $f(x) = 10x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 2x^2 - 5x - 1$ ;
- з)  $f(x) = 3x^5 + 17x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 19x + 5$ ;
- и)  $f(x) = 6x^6 - x^5 - 23x^4 - x^3 - 2x^2 + 20x - 8$ ;
- к)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 59x + 12$ ;
- л)  $f(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 23x^2 - 30x - 8$ ;
- м)  $f(x) = 3x^4 - 14x^3 + 16x^2 + x - 2$ ;
- н)  $f(x) = 4x^5 + 8x^4 - 59x^3 + 67x^2 - 28x + 4$ ;
- о)  $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ .

2. Выяснить, какие из указанных ниже многочленов 2-й и 3-й степени приводимы над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел, в случае приводимости разложить их на множители, неприводимые над полем  $\mathbb{Q}$ :

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| а) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ ;          | б) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ;        |
| в) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$ ;  | г) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 4$ ; |
| д) $f(x) = 30x^3 + 19x^2 - 1$ ;      | е) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ ; |
| ж) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 8x + 12$ ;   | з) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$ ; |
| и) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 17x - 2$ ; | к) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .    |

3. Найдя рациональные корни многочленов степени  $n \geq 4$ , разложить на множители, неприводимые над полем  $\mathbb{Q}$ :

- а)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ ;
- б)  $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ ;
- в)  $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ ;
- г)  $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ ;
- д)  $f(x) = x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$ ;
- е)  $f(x) = 5x^6 + 45x^5 + 137x^4 + 155x^3 + 72x^2 + 108x + 54$ .

4. Пользуясь критерием Эйзенштейна, доказать неприводимость над полем  $Q$  многочленов:

- а)  $f(x) = 2x^5 - 15x^3 + 21x - 24$ ;
- б)  $f(x) = 3x^6 - 20x^4 + 30x^2 - 20x + 20$ ;
- в)  $f(x) = 4x^7 - 21x^5 + 28x^4 - 14x^2 - 35$ ;
- г)  $f(x) = 2x^8 + 14x^3 - 35x^2 - 56x + 63$ ;
- д)  $f(x) = x^4 - 2x + 3$ ;
- е)  $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 15x + 32$ .

5. Способом Кронекера разложить на множители или установить неприводимость над полем  $Q$  следующих многочленов, не имеющих рациональных корней:

- а)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ ;
- б)  $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ ;
- в)  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 2$ ;
- г)  $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$ .

У к а з а н и е. В пунктах а), б), г) найти  $f(0)$  и  $f(1)$ ; в пункте в) найти  $f(1)$  и  $f(-1)$ .

6. Пусть  $\varphi(x)$  — многочлен степени  $n$  с целыми коэффициентами, имеющий  $n$  различных корней. Докажите, что многочлен

$$1 + \varphi^2(x)$$

неприводим над  $Z$  (следовательно, и над  $Q$ ).

У к а з а н и е. Предположив, что  $\varphi^2(x) + 1 = g(x)h(x)$ , где  $g(x), h(x) \in Z[x]$ , и подставив в это равенство (вместо  $x$ ) каждый из корней многочлена  $\varphi(x)$ , убедиться, что  $g(x) = \pm(1 + a\varphi(x))$ ,  $h(x) = \pm(1 + b\varphi(x))$ , где  $a, b \in Z$ . Вывести отсюда, что  $ab = 1$ , и получить противоречие.

7. Установить на основании решения задачи 6 приводимость следующих многочленов  $f(x) \in Z[x]$ :

- а)  $x^4 + 9x^2 + 25$ ;
- б)  $x^4 + 7x^2 + 16$ ;
- в)  $9x^4 + 11x^2 + 4$ ;
- г)  $16x^4 - x^2 + 1$

и найти их разложение на неприводимые множители над  $Z$ .



# ГЛАВА III

## МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### § 9. КОЛЬЦО $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ

**Вопросы программы.** Построение кольца многочленов от нескольких переменных над областью целостности или полем. Условие равенства многочленов. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и единственность такого разложения.

Лексикографическое упорядочение членов многочленов; лемма о высшем члене произведения многочленов.

Л и т е р а т у р а: Винберг Э. Б. Гл. III, § 1.

**Задача 1.** Найти сумму, разность и произведение многочленов

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2x_3 + 4x_2^2x_3^2 + x_3,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_2x_3 - 5x_2^2x_3^2 + 4x_3$$

из кольца  $Q[x_1, x_2, x_3]$  многочленов от трех переменных над полем рациональных чисел.

**Р е ш е н и е.** Члены многочленов  $f$  и  $g$ , отличающиеся только коэффициентами (или просто совпадающие), называются подобными. В данном примере подобные члены:  $-3x_2x_3$  и  $2x_2x_3$ ;  $4x_2^2x_3^2$  и  $-5x_2^2x_3^2$ ;  $x_3$  и  $4x_3$ . Привести подобные члены — значит найти их сумму, например:  $-3x_2x_3 + 2x_2x_3 = -x_2x_3$ . Чтобы сложить многочлены  $f$  и  $g$ , надо к членам многочлена  $f$  приписать члены многочлена  $g$  с теми же знаками и привести подобные члены:

$$f + g = 2x_1^2 - x_2x_3 - x_2^2x_3^2 + 5x_3.$$

При вычитании из многочлена  $f$  многочлена  $g$  к членам многочлена  $f$  приписываем члены многочлена  $g$  с противоположными знаками и приводим подобные члены:

$$f - g = 2x_1^2 - 5x_2x_3 + 9x_2^2x_3^2 - 3x_3.$$

При умножении многочленов каждый член многочлена  $f$  умножаем на каждый член многочлена  $g$  (сначала все члены  $f$  на 1-й член  $g$ , затем все члены  $f$  на 2-й член  $g$  и т. д.) и приводим подобные члены (ниже такие члены подчеркнуты одинаково):

$$\begin{aligned} fg &= 4x_1^2x_2x_3 - 6x_2^2x_3^2 + \underline{8x_2^3x_3^3} + \underline{2x_2x_3^2} - 10x_1^2x_2^2x_3^2 + \underline{15x_2^3x_3^3} - \\ &- 20x_2^4x_3^4 - \underline{5x_2^2x_3^3} + 8x_3^2x_3 - \underline{12x_2x_3^2} + \underline{16x_2^2x_3^3} + 4x_3^2 = 4x_1^2x_2x_3 - \\ &- 6x_2^2x_3^2 + 23x_2^3x_3^3 - 10x_2x_3^2 - 10x_1^2x_2^2x_3^2 - 20x_2^4x_3^4 + 11x_2^2x_3^3 + \\ &+ 8x_1^2x_3 + 4x_3^2. \end{aligned}$$

Ответ.  $f + g = 2x_1^2 - x_2x_3 - x_2^2x_3^2 + 5x_3$ ;  $f - g = 2x_1^2 - 5x_2x_3 + 9x_2^2x_3^2 - 3x_3$ ;  $fg = 4x_1^2x_2x_3 - 6x_2^2x_3^2 + 23x_2^2x_3^3 - 10x_2x_3^2 - 10x_1^2x_2^2x_3^2 - 20x_2^4x_3^4 + 11x_2^2x_3^3 + 8x_1^2x_3 + 4x_3^2$ .

**Задача 2.** Расположить лексикографически члены многочлена  $h = fg$ , полученного в задаче 1.

**Решение.** Одночлен  $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  считается старше (выше) одночлена  $v = bx_1^{l_1}x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$  (или одночлен  $v$  младше, ниже одночлена  $u$ ), если  $k_1 > l_1$ , либо  $k_1 = l_1$ , но  $k_2 > l_2$ , либо  $k_1 = l_1$ ,  $k_2 = l_2$ , но  $k_3 > l_3$  и т. д. Пишут:  $u > v$  (или  $v < u$ ).

Самую большую степень по  $x_1$  имеют 3 члена многочлена  $h$ :  $4x_1^2x_2x_3$ ,  $-10x_1^2x_2^2x_3^2$ ,  $8x_1^2x_3$ . Высшим членом будет  $-10x_1^2x_2^2x_3^2$ , так как в него  $x_2$  входит с самым большим показателем (равным 2) по сравнению с двумя другими членами. Для остальных двух членов имеем:  $x_1^2x_2x_3 > 8x_1^2x_3$ , так как показатель  $x_2$  в первом из них больше, чем показатель  $x_2$  во втором ( $1 > 0$ ). Кроме перечисленных трех членов, остальные не содержат  $x_1$ . Среди них членом, содержащим  $x_2$  в наибольшей степени, будет  $-20x_2^4x_3^4$ ; он ниже члена  $8x_1^2x_3$  ( $8x_1^2x_3 > -20x_2^4x_3^4$ ), но выше, чем  $23x_2^3x_3^3$  ( $-20x_2^4x_3^4 > 23x_2^3x_3^3$ ) и т. д.

Ответ.  $h = fg = -10x_1^2x_2^2x_3^2 + 4x_1^2x_2x_3 + 8x_1^2x_3 - 20x_2^4x_3^4 + 23x_2^3x_3^3 + 11x_2^2x_3^3 - 6x_2^2x_3^2 - 10x_2x_3^2 + 4x_3^2$ .

**Задача 3.** В кольце  $Q[x_1, x_2, x_3]$  найти высший член и степень  $n$  произведения многочленов:

$$f = x_1^3x_2 - 3x_1^2x_2^2 + 4x_1^3x_3^3 - 5x_2x_3^6, \quad g = 3x_1^2x_2^3 + x_1^3x_2 - 6x_2^3x_3^2, \\ h = 8x_1^4x_2^2 - 6x_1^2x_3^3,$$

не перемножая сами многочлены.

**Решение.** Высший член произведения ненулевых многочленов над областью целостности равен произведению высших членов сомножителей, а степень произведения равна сумме степеней сомножителей. Следовательно,

$$4x_1^3x_2^3 \cdot x_1^3x_2 \cdot 8x_1^4x_2^2 = 32x_1^{10}x_2^6$$

будет высшим членом произведения  $fgh$ .

Наибольшую степень среди членов многочлена  $f$  имеет член  $-5x_2x_3^6$ , поэтому степень  $f = 7$ ; аналогично находим, что степень  $g = 5$ , степень  $h = 6$ . Следовательно,

$$n = 7 + 5 + 6 = 18$$

— степень произведения  $fgh$ .

Ответ.  $32x_1^{10}x_2^6$ ;  $n = 18$ .

**Задача 4.** Найти однородные составляющие многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1x_2x_3^{10} + 5x_2^7x_3 - x_1^9x_2x_3^2 + x_3^8 - x_1x_2x_3 + x_2x_3^2 - 8.$$

**Решение.** Однородным называется многочлен, все члены которого имеют одинаковую степень. В данном случае степени отдельных членов многочлена  $f$  равны (последовательно)

$$12, 8, 12, 8, 3, 3, 0.$$

Следовательно, однородными составляющими многочлена  $f$  будут многочлены:

$$-3x_1x_2x_3^{10} - x_1^9x_2x_3^2 \quad (\text{однородная составляющая степени } 12),$$

$$5x_2^7x_3 + x_3^8 \quad (\text{однородная составляющая степени } 8),$$

$$-x_1x_2x_3 + x_2x_3^2 \quad (\text{однородная составляющая степени } 3),$$

$$-8 \quad (\text{однородная составляющая степени } 0).$$

**Задача 5.** Пусть  $f, g, h$  — многочлены из  $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$  (где  $P$  — некоторое поле). Доказать, что если  $f = gh$  и многочлен  $f$  однородный, то многочлены  $g$  и  $h$  тоже однородные.

**Решение.** Предположим противное, т. е. что хотя бы один из многочленов  $g$  или  $h$  не является однородным. Пусть  $g_1$  и  $h_1$  — однородные составляющие наименьшей степени многочленов  $g$  и  $h$  (соответственно). Имеем:

$$g = g_1 + g_2, \quad h = h_1 + h_2,$$

где все члены многочлена  $g_2$  имеют степени, большие степени  $g_1$ , а все члены многочлена  $h_2$  — степени, большие степени  $h_1$ . Из равенства

$$f = (g_1 + g_2) \cdot (h_1 + h_2)$$

следует:

$$g_1h_1 = f - (g_1h_2 + g_2h_1 + g_2h_2). \quad (1)$$

Поскольку все члены многочлена  $(g_1h_2 + g_2h_1 + g_2h_2)$  имеют степени, большие степени  $g_1h_1$ , то из (1) следует, что при приведении подобных членов в правой части этого равенства все члены многочлена  $(g_1h_2 + g_2h_1 + g_2h_2)$  должны уничтожиться подобными им членами многочлена  $f$ . Но многочлен  $f$  однородный; значит, его степень также больше степени  $g_1h_1$ . Мы приходим к противоречию (все члены правой части (1) имеют степени большие, чем степень однородного многочлена  $g_1h_1$ , стоящего в левой части).

Нижеследующей задаче 6 предположим такое замечание. Каждому многочлену от одной переменной  $x$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

над полем  $P$  можно сопоставить однородный многочлен той же степени от двух переменных  $x$  и  $y$ :

$$f^*(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$$

(очевидно,  $f(x) = f^*(x, 1)$ ). Нетрудно проверить, что это соответствие является изоморфизмом кольца  $P[x]$  на кольцо однородных многочленов от  $x$  и  $y$ , т. е. что это соответствие взаимно однозначно и

$$f(x) = g(x)h(x) \Leftrightarrow f^*(x, y) = g^*(x, y)h^*(x, y). \quad (2)$$

**Задача 6.** Разложить на неприводимые множители многочлен

$$F(x, y) = x^3 - x^2y - xy^2 - 2y^3 \in Q[x, y].$$

**Решение.** Многочлен  $F(x, y)$  соответствует в указанном выше смысле многочлену

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2,$$

который разлагается над полем  $Q$  на неприводимые множители следующим образом:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1).$$

Отсюда в силу сделанного выше замечания имеем:

$$F(x, y) = (x - 2y)(x^2 + xy + y^2). \quad (3)$$

Оба множителя правой части неприводимы: первый — так как он соответствует неприводимому (над  $Q$ ) многочлену  $x - 2$ , второй — так как он соответствует неприводимому (над  $Q$ ) многочлену  $x^2 + x + 1$ .

**Ответ.**  $F(x, y) = (x - 2y)(x^2 + xy + y^2)$ .

**Задача 7.** Для многочлена

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^{10}x_2^3 + 4x_1^2x_2^3 - 2x_1^7x_2$$

над полем  $Z_p$  ( $p = 5$ ) построить эквивалентный ему многочлен (т. е. многочлен, определяющий ту же функцию от  $x_1, x_2$ ), имеющий по каждой переменной степень не выше  $p - 1 = 4$ .

**Решение.** В кольце  $Z_p[x]$ , где  $p$  простое, для каждого одночлена  $x^n$  существует эквивалентный ему одночлен  $x^{n'}$ , где  $n' < p$  (см. задачу 10 на с. 10). В частности, при  $p = 5$  имеем:

$$x_1^{10} = x_1^{4 \cdot 2 + 2} \sim x_1^2, \quad x_1^7 = x_1^{4 \cdot 1 + 3} \sim x_1^3,$$

так что

$$f(x_1, x_2) \sim -3x_1^2x_2^3 + 4x_1^2x_2^3 - 2x_1^3x_2 = x_1^2x_2^3 - 2x_1^3x_2.$$

**Ответ.**  $f(x_1, x_2) \sim \varphi(x_1, x_2)$ , где  $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2x_2^3 - 2x_1^3x_2$ .

### Упражнения

1. Над кольцом  $Z$  найти сумму  $f + g$ , разность  $f - g$  и произведение  $fg$  многочленов от трех переменных:

$$f = -2x_1^3 + 4x_1x_2 - 6x_2^2, \quad g = 2x_1^3 - 8x_1x_2 + 2x_2^2.$$

2. Найти  $f + g + h$  и  $(f - g) - h$ , если

$$f = 3x_1x_2^2x_3 - 7x_1x_2 + 8x_3^2, \quad g = 8x_1x_2 - 10x_1 - 12x_1x_2^2x_3,$$

$$h = 2x_2^3 + 9x_1x_2^2x_3 - x_1x_2 \in Q[x_1, x_2, x_3].$$

3. Найти произведение многочленов:

$$f = \sqrt{2}x_1 - 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_2, \quad g = \sqrt{3}x_1 - \sqrt{2}x_2 \in R[x_1, x_2].$$

4. Расположить лексикографически члены многочленов:

$$a) f = \frac{1}{2}x_2x_3^2 - 3\frac{1}{4}x_1x_2x_3 + x_2x_3 + 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2 \in Q[x_1, x_2, x_3];$$

$$б) f = \sqrt{2}x_1x_2x_4 - 3x_2x_3x_4 + 4\sqrt{3}x_1x_3x_4 - 5\sqrt{2}x_2^2x_4 - x_2^2x_3 \in R[x_1, x_2, x_3, x_4];$$

$$в) f = (5 + i)x_2^3 + 3ix_1x_2^2 + (4 + 2i)x_1^2x_2 - 8x_1^2x_2^2 - ix_1x_2 + x_1^2 \in C[x_1, x_2].$$

5. Найти высший член и степень произведения многочленов, не перемножая сами многочлены:

$$a) f = 2x_1^2x_2x_3 - 3x_1^3x_2^2x_3 + 4x_1^3x_2^2, \quad g = \frac{1}{2}x_2x_3^2 - 4x_1x_2^2;$$

$$б) f = 7x_1x_2 - 8x_1^2 + 4x_2^3, \quad g = -3x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^3, \quad h = -2x_2 + 3x_1;$$

$$в) f = 2ix_1^4x_2 - 3x_1x_2^5 - 3ix_1^5x_2, \quad g = (4 + i)x_2^6 - (5 + i)x_1x_2;$$

$$г) f = -3x_1^2x_2x_3^3 + (2 + i)x_1^2x_2^2x_3, \quad g = -3x_1^3x_2^3 - x_1^4x_2x_3 + ix_2x_3.$$

6. Выделить однородные составляющие многочлена:

$$a) f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^3 - 2x_1^2x_3 + x_2x_3 - 5x_1x_2x_3 + 4x_1 - 2x_1^2 - 6;$$

$$б) f(x, y) = x^3 - x^3y + x^2y - 5xy^2 + y^2 - xy - 3x^2y^2 + 2;$$

$$в) f(x, y, z) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - 3xyz + x + y + z^3 - xy + 7.$$

7. Доказать, что рассмотренное в замечании на с. 82 отображение кольца  $P[x]$  на кольцо однородных многочленов из  $P[x, y]$  является изоморфным.

8. Разложить на неприводимые множители многочлен  $F(x, y) \in Q[x, y]$ :

$$a) F(x, y) = -x^3 + 2x^2y + xy^2 + 6y^3;$$

$$б) F(x, y) = x^4 + x^3y - 3x^2y^2 - 5xy^3 - 2y^4.$$

9. Для многочлена  $f(x, y)$  над  $Z_p$  построить эквивалентный ему многочлен, имеющий по каждой переменной степень не выше  $p - 1$ :

$$a) p = 7; f(x, y) = \bar{2}x^{10}y^{15} + \bar{5}x^4y^3 - \bar{4}x^{100} + \bar{3}x^{40};$$

$$б) p = 3; f(x, y) = -\bar{2}x^{15}y^{10} + \bar{2}xy^3 - x^3y - \bar{2}xy^3.$$

10. Доказать неприводимость многочленов:

$$a) f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \in Q[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad n > 1;$$

$$б) f = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \in Q[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad n > 2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 5.

**Вопросы программы.** Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах и следствия из нее.

Литература: Винберг Э. Б. Гл. III, § 2.

Напомним, что многочлен  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *симметрическим*, если он не изменяется при любой перестановке входящих в него переменных. Многочлены

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

.....

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

называются *основными симметрическими многочленами* от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Основная теорема теории симметрических многочленов заключается в том, что *всякий симметрический многочлен  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (над данным полем  $P$  или областью целостности  $K$ ) можно представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов (над  $P$  или  $K$ ):*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

### Задача 1. Выразить многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 5x_1x_2x_3 \in Q[x_1, x_2, x_3]$$

через основные симметрические многочлены.

**Р е ш е н и е.** Легко видеть, что данный многочлен симметрический. Высший член многочлена  $f(x_1, x_2, x_3)$  равен  $x_1^3$ . Ему соответствует система показателей  $3\ 0\ 0$  ( $x_1^3 x_2^0 x_3^0$ ). Такой же высший член имеет многочлен

$$\sigma_1^{3-0} \sigma_2^{0-0} \sigma_3^0 = \sigma_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3.$$

Найдем разность:

$$f - \sigma_1^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - x_1x_2x_3.$$

Высший член полученного многочлена равен  $-3x_1^2x_2$ . Ему соответствует система показателей  $\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_2^1 & x_3^0 \end{smallmatrix}$ . Такой же высший член будет и у многочлена

$$\begin{aligned}
 -3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 &= -3\sigma_1\sigma_2 = -3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+ \\
 +x_1x_3+x_2x_3) &= -3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+ \\
 &\quad +x_2x_3^2+3x_1x_2x_3).
 \end{aligned}$$

Вычитая из  $f - \sigma_1^3$  многочлен  $-3\sigma_1\sigma_2$ , получим:

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 8x_1x_2x_3 = 8\sigma_3.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3.$$

Задачу можно решить несколько проще, если предусмотреть произведения  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ , которые приходится вычитать из многочлена  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Это можно сделать, если учесть следующие факты:

а) произведение  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$  вполне определяется своим высшим членом: если его высший член равен  $x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ , то  $\alpha_1 = k_1 - k_2, \alpha_2 = k_2 - k_3, \dots, \alpha_n = k_n$ ;

б) высший член вычитаемого из  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  произведения  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$  «не выше» высшего члена  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

в) показатели при  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в высших членах образуют убывающую последовательность;

г) если многочлен  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  однородный, то сумма показателей у всех его членов, а следовательно, и у всех вычитаемых из него членов постоянна.

Исходя из этих фактов, укажем решение нашей задачи. Составляем таблицу:

Возможные высшие члены многочленов $\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ , вычитаемых из $f$	Соответствующие им системы показателей	Произведения $\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ , имеющие указанные высшие члены
$x_1^3 x_2^0 x_3^0$	3 0 0	$\sigma_1^3$
$Ax_1^2 x_2^1 x_3^0$	2 1 0	$A\sigma_1\sigma_2$
$Bx_1x_2x_3$	1 1 1	$B\sigma_3$

Теперь остается лишь найти значения коэффициентов  $A$  и  $B$ , при которых будет выполняться тождество

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3.$$

Для определения  $A$  и  $B$  будем подставлять в это тождество различные числовые значения переменных  $x_1, x_2, x_3$ . При этом удобнее подставлять такие значения, для которых некоторые из многочленов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  равны нулю. Так, при  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$  имеем:  $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0, f = 2$ . Следовательно,

$$2 = 2^3 + A \cdot 2 \cdot 1 + B \cdot 0.$$

Отсюда  $A = -3$  и  $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$ .

Положим теперь  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$ . Тогда  $f = -16, \sigma_1 = 0, \sigma_3 = -2$ . Имеем, следовательно,  $-16 = B \cdot (-2)$ ; отсюда  $B = 8$ .

О т в е т.  $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$ .

З а м е ч а н и е. Если симметрический многочлен  $f(x_1, x_2, \dots$

...,  $x_n$ ) неоднородный, то его предварительно следует представить в виде суммы симметрических однородных многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , а затем каждый из этих многочленов выразить через  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ .

**Задача 2.** Выразить многочлен

$$f = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2) \in Q[x_1, x_2, x_3]$$

через основные симметрические многочлены.

**Решение.** Во-первых, замечаем, что  $f$  является однородным симметрическим многочленом степени 6. Высший член данного многочлена равен  $x_1^4 x_2^2$ . Ему соответствует система показателей 4 2 0. Теперь нетрудно написать системы показателей, соответствующие высшим членам многочленов, которые, возможно, придется вычитать из  $f$ . Это будут (имеем в виду, что степени всех членов равны 6):

$$4\ 2\ 0; \ 4\ 1\ 1; \ 3\ 3\ 0; \ 3\ 2\ 1; \ 2\ 2\ 2.$$

Следовательно,

$$f = \sigma_1^2 \sigma_2 + A \sigma_1^3 \sigma_3 + B \sigma_2^3 + C \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + D \sigma_3^2,$$

где  $A, B, C, D$  — пока неопределенные коэффициенты. Определим их, подставляя в последнее тождество вместо  $x_1, x_2, x_3$  некоторые числовые значения (см. таблицу):

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$f$
1	1	0	2	1	0	2
1	1	-2	0	-3	-2	50
-1	2	2	3	0	-4	200
1	1	1	3	3	1	8

Получим систему уравнений относительно неизвестных  $A, B, C, D$ :

$$2 = 4 + B,$$

$$50 = -27B + 4D,$$

$$200 = -108A + 16D,$$

$$8 = 81 + 27A + 27B - 9C + D.$$

Решив ее, найдем:  $B = -2, D = -1, A = -2, C = 4$ .

Итак,

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_1^3 \sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3^2.$$

**Задача 3.** Найти сумму кубов корней многочлена

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3 \in C[x].$$

**Решение.** Над полем  $C$  многочлен  $f(x)$  имеет 4 корня:  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (каждый корень записан столько раз, какова его крат-



ность). Нам необходимо найти число  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ , не находя самих корней.

По формулам Виета найдем значения основных симметрических многочленов от корней нашего многочлена:  $\sigma_1 = -2$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = -5$ ,  $\sigma_4 = 3$ . Следовательно, для решения нашей задачи достаточно однородный симметрический многочлен  $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$  выразить через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Так же как и в предыдущей задаче, найдем

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Подставляя сюда найденные выше значения для  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , получим, что сумма кубов корней многочлена  $f(x)$  равна:

$$(-2)^3 - 3(-2) \cdot 1 + 3(-5) = -17.$$

**Задача 4.** Разложить на множители многочлен

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

**Решение.** Выразим многочлен  $f(x, y, z)$  через основные симметрические многочлены от переменных  $x, y, z$ :

$$f(x, y, z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Вынося  $\sigma_1$  за скобки и подставляя вместо  $\sigma_1, \sigma_2$  их выражения через  $x, y, z$ , получим:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

**Задача 5.** Составить многочлен, имеющий своими корнями кубы корней многочлена  $f(x) = x^2 + px + q$ .

**Решение.** Обозначим корни многочлена  $f(x)$  через  $x_1, x_2$ . Тогда корнями искомого многочлена

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b$$

будут числа  $x_1^3$  и  $x_2^3$ . По теореме Виета  $a = -(x_1^3 + x_2^3)$ ,  $b = x_1^3 x_2^3$ . Рассматривая выражения  $x_1^3 + x_2^3$  и  $x_1^3 x_2^3$  как многочлены от переменных  $x_1, x_2$ , представим их через основные симметрические многочлены:

$$x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2; \quad x_1^3 x_2^3 = \sigma_2^3.$$

Если теперь переменным  $x_1 x_2$  придать значения корней многочлена  $f(x)$ , то получим:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -p, \quad \sigma_2 = x_1 x_2 = q.$$

Отсюда имеем:

$$a = -(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = p^3 - 3pq, \quad b = q^3.$$

Итак,

$$\varphi(x) = x^2 + (p^3 - 3pq)x + q^3.$$

Остановимся на некоторых приложениях теории симметрических многочленов к вопросам, непосредственно примыкающим к

курсу алгебры средней школы (этот материал с успехом может быть изучен на кружке в IX — X классах). Мы ограничимся рассмотрением многочленов от двух переменных  $x, y$ . Для более детального и широкого изучения этого вопроса отсылаем читателя к книге Болтянского В. Г. и Виленкина Н. Я. «Симметрия в алгебре» (М., Наука, 1967, 283 с.)

В приложениях часто встречаются *степенные суммы*

$$S_k = x^k + y^k, k = 2, 1, \dots,$$

т. е. суммы  $k$ -х степеней переменных. Выражения этих сумм через основные симметрические многочлены  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$  легко находятся последовательно из рекуррентной формулы

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2}. \quad (1)$$

Убедимся в справедливости формулы (1). Умножив обе части равенства  $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$  на  $\sigma_1 = x + y$ , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 S_{k-1} &= (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + x^{k-1}y + xy^{k-1} + y^k = \\ &= (x^k + y^k) + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = S_k + \sigma_2 S_{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

откуда следует формула (1).

Выражения для  $S_1$  и  $S_2$  находятся непосредственно:  $S_1 = x + y = \sigma_1$ ,  $S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ . Зная  $S_1$  и  $S_2$ , находим  $S_3$  по формуле (1), затем  $S_4$  и т. д. Приведем таблицу выражений степенных сумм от переменных  $x, y$  через  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$ :

Выражение  $S_k = x^k + y^k$  через  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$

$S_1 = x + y = \sigma_1$
$S_2 = x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
$S_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$
$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$
$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$
$S_6 = x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
$S_7 = x^7 + y^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
$S_8 = x^8 + y^8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
...

**Задача 6.** Выразить симметрический многочлен

$$f(x, y) = x^5 + 2x^4y - x^3y^3 + 3x^3y^2 - 5x^3y + 3x^2y^3 - 7x^2y^2 + + 2xy^4 - 5xy^3 + y^5 \text{ через основные: } \sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy.$$

**Решение.** Разбиваем  $f(x, y)$  на симметрические двучлены и одночлены следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^5 + y^5) + (2x^4y + 2xy^4) - x^3y^3 + (3x^3y^2 + 3x^2y^3) - \\ &\quad - (5x^3y + 5xy^3) - 7x^2y^2. \end{aligned}$$

Вынося из двучленов общие множители за скобки, получим в скобках степенные суммы:

$$f(x, y) = (x^5 + y^5) + 2xy(x^3 + y^3) - x^3y^3 + 3x^2y^2(x + y) - 5xy(x^2 + y^2) - 7x^2y^2 = S_5 + 2xy \cdot S_3 - (xy)^3 + 3(xy)^2(x + y) - 5xy \cdot S_2 - 7(xy)^2.$$

Наконец, подставив из таблицы выражения для  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_5$  и заменив  $xy$  на  $\sigma_2$ , а  $x + y$  на  $\sigma_1$ , получим:

$$f(x, y) = (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + 2\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2^3 + 3\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 7\sigma_2^2 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1^3\sigma_2 - 6\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 10\sigma_2^2 - 7\sigma_2^2.$$

После раскрытия скобок, приведения подобных членов и лексикографического упорядочения членов (по  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ) получим ответ:

$$f(x, y) = \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2.$$

**Задача 7.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

**Решение.** Если обе части уравнений симметрично зависят от  $x$ ,  $y$ , то удобнее перейти к новым переменным:  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$ . Используя таблицу степенных сумм, получим новую систему:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35, \\ \sigma_1 = 5, \end{cases}$$

решение которой:  $\sigma_1 = 5$ ,  $\sigma_2 = 6$ .

Для переменных  $x$ ,  $y$  получим, таким образом, систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases}$$

имеющую два решения:  $x = 2$ ,  $y = 3$  и  $x = 3$ ,  $y = 2$ .

**Ответ.**  $\{(2; 3); (3; 2)\}$ .

**Замечание.** Используя формулы Виета, последнюю систему можно свести к квадратному уравнению

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$

корни которого  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 3$ . Так как  $x$ ,  $y$  симметрично входят в первоначальную систему, то получаем два решения системы:

$$x_1 = z_1 = 2, y_1 = z_2 = 3; x_2 = z_2 = 3, y_2 = z_1 = 2.$$

**Задача 8.** Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - y = 1, \\ x - y^3 = 7. \end{cases}$$

**Решение.** Введем вспомогательные переменные  $z = \sqrt[3]{x}$ ,  $u = -y$ . Далее поступаем, как при решении задачи 7:

$$\begin{cases} z + u = 1. \\ z^3 + u^3 = 7. \end{cases}$$

Пусть  $\sigma_1 = z + u$ ,  $\sigma_2 = zu$ . Тогда

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + u = 1 \\ zu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ u = -1 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} z = -1 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z^3 - 8 \\ y = -u = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = z^3 = -1 \\ y = -u = -2. \end{cases}$$

О т в е т.  $\{(8; 1); (-1; -2)\}$ .

**Задача 9.** Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

**Р е ш е н и е.** Введем вспомогательные переменные:

$$y = \sqrt[4]{97-x}, \quad z = \sqrt[4]{x},$$

после чего уравнение сведется к симметрической системе:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97. \end{cases}$$

Далее вводим  $\sigma_1 = y + z$ ,  $\sigma_2 = yz$  и находим  $S_4$  из таблицы степенных сумм. Система принимает вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ 625 - 100\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 25 \pm 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \text{I} \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \vee \text{II} \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44. \end{cases}$$

Система I имеет решения:  $y = 2$ ,  $z = 3$  и  $y = 3$ ,  $z = 2$ , а так как  $x = z^4$ , то  $x = 81$  и  $x = 16$ .

Система же II имеет только мнимые решения, а для иррациональных уравнений берутся лишь действительные значения переменных.

О т в е т.  $\{81; 16\}$ .

**Задача 10.** Разложить симметрический однородный многочлен  $f(x, y)$  4-й степени на множители, неприводимые над полем  $R$  действительных чисел:

а)  $f(x, y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4 \in R[x, y]$ ;

б)  $f(x, y) = 2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 \in R[x, y]$ .

**Р е ш е н и е.** а) Выразим сначала  $f(x, y)$  через основные многочлены  $\sigma_1 = x + y$ ,  $\sigma_2 = xy$  (см. задачу 6):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = 10S_4 - \\ &- 27xy \cdot S_2 - 110(xy)^2 = 10(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - 27\sigma_2(\sigma_1^2 - \\ &- 2\sigma_2) - 110\sigma_2^2 = 10\sigma_1^4 - 40\sigma_1^2\sigma_2 + 20\sigma_2^2 - 27\sigma_1^2\sigma_2 + 54\sigma_2^2 - \\ &- 110\sigma_2^2 = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2 \in R[\sigma_1, \sigma_2]. \end{aligned}$$

Относительно  $\sigma_2$  полученный многочлен квадратный. Решаем соответствующее квадратное уравнение

$$36\sigma_2^2 + 67\sigma_1^2\sigma_2 - 10\sigma_1^4 = 0.$$

$$\sigma_2 = \frac{-67\sigma_1^2 \pm \sqrt{4489\sigma_1^4 + 1440\sigma_1^4}}{72} = \frac{-67\sigma_1^2 + 77\sigma_1^2}{72},$$

$$\sigma_2 = -2\sigma_1^2 \vee \sigma_2 = \frac{5}{36}\sigma_1^2.$$

Разложим теперь многочлен  $f(x, y)$  как квадратный относительно  $\sigma_2$  на множители:

$$f(x, y) = -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2)\left(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2\right) = (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2) =$$

$$= [2(x+y)^2 + xy][5(x+y)^2 - 36xy] = (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2).$$

Каждый из множителей оказывается приводимым над полем  $R$ . Первый множитель, рассматриваемый как квадратный относительно  $x$ , имеет корни  $x_1 = -\frac{1}{2}y$ ,  $x_2 = -2y$  и разлагается на линейные множители:

$$2\left(x + \frac{1}{2}y\right)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y).$$

Второй множитель имеет корни  $x_1 = 5y$ ,  $x_2 = \frac{1}{5}y$  и также разлагается на линейные множители:

$$5(x - 5y)\left(x - \frac{1}{5}y\right) = (x - 5y)(5x - y).$$

О т в е т.  $f(x, y) = (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y) \in R[x, y]$ .

$$\text{б) } f(x, y) = 2(x^4 + y^4) + 3xy(x^2 + y^2) + 6(xy)^2 = 2S_4 +$$

$$+ 3xy \cdot S_2 + 6(xy)^2 = 2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + 3\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) +$$

$$+ 6\sigma_2^2 = 2\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 \in R[\sigma_1, \sigma_2].$$

Получившийся квадратный относительно  $\sigma_2$  многочлен имеет мнимые корни, поэтому разложить его на множители над  $R$  не удастся. Попытаемся представить его в виде

$$f(x, y) = (ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2), \quad (2)$$

т. е. в виде произведения двух несимметричных множителей, каждый из которых представляет собой отражение другого при перестановке  $x$  и  $y$ .

Положив в равенстве (2)  $x = y = 1$ , получим:

$$(a + b + c)^2 = 16 \Rightarrow a + b + c = \pm 4.$$

Коэффициенты в равенстве (2) определены с точностью до общего множителя  $\pm 1$ , так как при изменении у чисел  $a, b, c$  знаков на противоположные равенство (2) остается справедливым. Поэтому можно принять

$$a + b + c = 4.$$

При  $x = 1, y = -1$  из равенства (2) получим:

$$(a - b + c)^2 = 4 \Rightarrow a - b + c = \pm 2, \text{ а}$$

при  $x = 0, y = 1$  получим:

$$ac = 2.$$

Таким образом, для нахождения  $a, b, c$  имеем любую из двух систем:

$$\text{I} \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = 2 \\ ac = 2 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -2 \\ ac = 2 \end{cases}$$

Решение системы I:  $a = 1, b = 1, c = 2$  (или  $a = 2, b = 1, c = 1$ ).

Решение системы II мнимое.

О т в е т.  $f(x, y) = (x^2 + xy + 2y^2)(2x^2 + xy + y^2) \in R[x, y]$ .

### Упражнения

1. Данные симметрические многочлены от  $x_1, x_2, x_3$  выразить через основные симметрические многочлены  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

- $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$ ;
- $f = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$ ;
- $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$ ;
- $f = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$ ;
- $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 - x_2^2x_3^2$ ;
- $f = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$ ;
- $f = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$ .

У к а з а н и е к б) и г): раскрывать скобки не нужно, достаточно найти высший член многочлена  $f$  как произведение трех многочленов.

Введем следующее обозначение. Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — некоторый многочлен, то через  $S(f)$  будем обозначать сумму  $n!$  многочленов, получающихся из  $f$  всевозможными перестановками переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Разумеется, многочлен  $S(f)$  симметрический. Например, при  $n = 3$

$$S(x_1^2x_2x_3) = x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_3x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_3^2x_2 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^2,$$

где слагаемые правой части получаются из  $x_1^2x_2x_3$  с помощью  $3!$  перестановок:

$$x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1, x_3, x_2; x_2, x_1, x_3; x_2, x_3, x_1; x_3, x_1, x_2; x_3, x_2, x_1.$$

После приведения подобных членов находим:

$$S(x_1^2 x_2 x_3) = 2x_1^2 x_2 x_3 + 2x_1 x_2^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3^2.$$

Аналогично,

$$S(x_1 x_2 x_3) = 6x_1 x_2 x_3, \\ S((x_1 + x_2)^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_1)^2 + (x_1 + x_3)^2 + \\ + (x_3 + x_1)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_2)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + \\ + 4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$$

2. Выразить указанные ниже многочлены через основные симметрические:

- а)  $f(x_1, x_2, x_3) = S(x_1^3 x_2)$ ;  
 б)  $f(x_1, x_2, x_3) = S(x_1^3 x_2 x_3)$ ;  
 в)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = S(x_1^4)$ ;  
 г)  $f(x_1, x_2, x_3) = S((x_1 + x_2)^2)$ ;  
 д)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = S((x_1 + x_2 + x_3)^2)$ .

3. Вычислить значение симметрического многочлена  $f$  от корней многочлена  $\varphi(x) \in C[x]$ :

- а)  $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^2$ ,  $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2$ ;  
 б)  $f = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$ ,  
 $\varphi(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ ;  
 в)  $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ ;  
 г)  $f = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ ,  $\varphi(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ ;  
 д)  $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - x_2^2 x_3^2$ ,  $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 3$ .

У к а з а н и е. Выражение симметрических многочленов через основные  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  читатель найдет, решая упражнение 1.

4. Вычислить значение симметрического многочлена  $f$  от корней многочлена  $\varphi(x) \in C[x]$ :

- а)  $f = S(x_1^3 x_2)$ ,  $\varphi(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4$ ; б)  $f = S(x_1^3 x_2 x_3)$ ,  $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ ;  
 в)  $f = S(x_1^4)$ ,  $\varphi(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ ;  
 г)  $f = S(x_1 + x_2 + x_3)^3$ ,  $\varphi(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ .

5. Вычислить  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$ , если  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$ .

6. Найти, чему равно произведение

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4),$$

предполагая, что  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни уравнения

$$x^4 + px^3 + qx + z = 0.$$

7. Используя таблицу степенных сумм, выразить через основные симметрические многочлены следующие многочлены:

- а)  $f(x, y) = 10x^5y - 2x^4y^4 + 3x^4y^3 + 3x^3y^4 + 10xy^5 - xy$ ;  
 б)  $f(x, y) = x^7y^2 - x^5y^3 - x^3y^5 - 5x^3y^3 + x^2y^7 - 4x^2y^2$ ;  
 в)  $f(x, y) = x^8y + x^6y^6 - 6x^5y^2 - 6x^2y^5 + xy^8$ .

8. Решить симметрические системы уравнений:

- а)  $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y); \end{cases}$       г)  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$

9. Решить системы уравнений, сведя их с помощью вспомогательных переменных к симметрическим:

- а)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x^2 + y = 5; \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$

10. Решить иррациональные уравнения:

- а)  $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$ ;      б)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{35}{12}$ .

11. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней уравнения

$$x^2 + 6x + 10 = 0.$$

12. Составить квадратное уравнение с корнями  $x_1, x_2$ , если известно, что  $x_1^5 + x_2^5 = 31$ ,  $x_1 + x_2 = 1$ .

13. При каком действительном  $a$  сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$$

имеет наименьшее значение?

14. Разложить на множители, неприводимые над полем  $R$  действительных чисел, симметрические однородные многочлены 4-й степени:

- а)  $f(x, y) = 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$ ;  
 б)  $f(x, y) = 2x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$ ;  
 в)  $f(x, y) = 18x^4 - 21x^3y - 94x^2y^2 - 21xy^3 + 18y^4$ ;  
 г)  $f(x, y) = 3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4$ .

## § 11. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

**Вопросы программы.** Результат двух многочленов. Исключение неизвестных из системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными при помощи результата.

**Л и т е р а т у р а:** Винберг Э. Б. Гл. II, § 1 (п. 6), § 2 (п. 8); гл. 3, § 3.

**Задача.** Решить над полем  $C$  систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 6xy - 7x - y^2 - 11y + 12 = 0, \\ x^2 - 3x + y^2 - y = 0. \end{cases}$$



На примере этой задачи мы рассмотрим два способа решения систем алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

И способ — последовательное исключение одной переменной. Левые части уравнений системы — многочлены от двух переменных:  $f(x, y), g(x, y) \in C[x, y]$ . Расположим их по убывающим степеням переменной  $x$  и будем рассматривать их как многочлены от одной переменной  $x$  над кольцом  $C[y]$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= F(x) = x^2 + (6y - 7)x + (-y^2 - 11y + 12), \\ g(x, y) &= G(x) = x^2 - 3x + (y^2 - y). \end{aligned}$$

Будем «делить с остатком»  $F(x)$  на  $G(x)$ , не обращая внимания на то, что коэффициенты многочленов принадлежат к о л ь ц у  $C[y]$  (а не полю). Имеем:

$$F(x) = G(x) \cdot 1 + R(x),$$

где  $R(x) = (6y - 4)x + (-2y^2 - 10y + 12)$  — остаток от деления  $F(x)$  на  $G(x)$ . Очевидно,

$$\text{I } \begin{cases} F(x) = 0, \\ G(x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \text{II } \begin{cases} G(x) = 0, \\ R(x) = 0. \end{cases}$$

Система I содержит два квадратных уравнения, система II — одно квадратное, другое — линейное.

Старший коэффициент многочлена  $R(x)$  равен  $b_0(y) = 6y - 4$ . Рассмотрим два случая:

1)  $b_0(y) \neq 0$ . Тогда уравнение  $G(x) = 0$  в системе (II) можно заменить на  $(6y - 4)^2 G(x) = 0$ . Делим с остатком многочлен  $(6y - 4)^2 G(x)$  на  $R(x)$  (предварительно удобно разделить делимое на 4, а делитель на 2):

$$\begin{array}{r} (3y-2)^2 x^2 + (3y-2)(-9y+6)x + (9y^4-21y^3+16y^2-4y) \mid (3y-2)y + (-y^2-5y+6) \\ \underline{-(3y-2)^2 x^2 + (3y-2)(-y^2-5y+6)x} \qquad \qquad \qquad (3y-2)x + (y^2-4y) \\ \qquad \qquad \qquad \underline{-(3y-2)(y^2-4y)x + (9y^4-21y^3+16y^2-4y)} \\ \qquad \qquad \qquad \underline{-(3y-2)(y^2-4y)x + (-y^4-y^3+26y^2-24y)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 10y^4-20y^3-10y^2+20y = R_1 \end{array}$$

Уравнение  $R_1 = 0$  (или  $\frac{1}{10}R_1 = 0$ ) является следствием системы II (и I). Говорят, что переменную  $x$  исключили из данной системы и получили уравнение  $R_1 = 0$  относительно одной переменной  $y$ . Таким образом, в случае  $b_0(y) \neq 0$  система II равносильна системе из двух уравнений:  $R(x) = 0$  и  $R_1 = 0$ .

2)  $b_0(y) = 0$ . В этом случае уравнение  $R(x) = 0$  обращается в  $\tilde{R} = -2y^2 - 10y + 2 = 0$ .

Итак, можем записать, что исходная система равносильна дизъюнкции (совокупности) двух систем:

$$\text{II} \Leftrightarrow \text{III } \begin{cases} R(x) = 0 \\ R_1 = 0 \\ b_0(y) \neq 0 \end{cases} \vee \text{IV } \begin{cases} G(x) = 0 \\ b_0(y) = 0 \\ \tilde{R} = 0. \end{cases}$$

Множество решений данной системы есть объединение множеств решений систем III и IV.

Решим сначала систему III:

$$\begin{cases} (3y - 2)x + (-y^2 - 5y + 6) = 0, \\ y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y = 0, \\ 3y - 2 \neq 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет корни 0, 1, -1, 2; для каждого из них, очевидно,  $3y - 2 \neq 0$ . Подставляя указанные значения  $y$  в первое уравнение, получим четыре системы:

$$\begin{cases} y = 0, \\ 2x - 6 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 2, \\ -4x + 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 1, \\ -x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ 5x - 10 = 0, \end{cases}$$

что дает четыре решения исходной системы:

$$(3; 0), (2; 2), (0; 1), (2; -1).$$

Что касается системы IV, то второе и третье уравнения в этой системе

$$3y - 2 = 0, y^2 + 5y - 6 = 0$$

несовместны; значит, несовместна и система IV.

О т в е т.  $\{(3; 0); (2; 2); (0; 1); (2; -1)\}$ .

З а м е ч а н и е. Можно расположить многочлены  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  по убывающим степеням  $y$  (а не  $x$ ) и исключить из системы  $y$ . Рекомендуем читателю решить систему также и этим способом.

И с п о с о б решения системы высших степеней с двумя переменными — использование результата двух многочленов от одной переменной.

Рассмотрим ту же задачу: решить над полем  $C$  систему:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + y^2 - y = 0, \\ x^3 + 6xy - 7x - y^2 - 11y + 12 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Рассматриваем левые части уравнений как многочлены от одной переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 - 3x + (y^2 - y), \\ G(x) &= x^3 + (6y - 7)x + (-y^2 - 11y + 12). \end{aligned}$$

Исключим из системы переменную  $x$ .

Если  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$  — решение данной системы, то многочлены, получающиеся при  $y = \beta$ , имеют общий корень  $x = \alpha$ , тогда их результат равен нулю. Записав результат  $R(F, G)$  в виде определителя, приравняем его нулю. Раскрыв определитель, мы получим уравнение  $\varphi(y) = 0$ . Подставив корни  $y_i$  этого уравнения в данную систему, мы получим два квадратных уравнения с одной переменной  $x$ . Общий корень этих уравнений вместе с соответствующим значением  $y_i$  даст нам решение данной системы.

Последовательность вычислений:

$$R(F, G) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & y^2 - y & 0 \\ 0 & 1 & -3 & y^2 - y \\ 1 & 6y - 7 & -y^2 - 11y + 12 & 0 \\ 0 & 1 & 6y - 7 & -y^2 - 11y + 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & y^2 - y & 0 \\ 6y - 4 & -2y^2 - 10y + 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 4 & -2y^2 - 10y + 12 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(мы умножили 1-ю и соответственно 2-ю строки на  $-1$  и прибавили к 3-й, соответственно к 4-й строкам, затем разложили определитель по 1-му столбцу),

$$R(F, G) = (-2)^2 (y^2 + 5y - 6)^2 + 2^2 (3y - 2)^2 (y^2 - y) +$$

$$+ 3(-4)(y^2 + 5y - 6)(3y - 2) = 0 \Leftrightarrow (y^2 + 5y - 6)(y^2 + 5y -$$

$$- 6 - 9y + 6) + (9y^2 - 12y + 4)(y^2 - y) = 0 \Leftrightarrow (y^2 + 5y -$$

$$- 6)(y^2 - 4y) + (9y^2 - 12y + 4)(y^2 - y) = 0 \Leftrightarrow y^4 + 5y^3 - 6y^2 -$$

$$- 4y^3 - 20y^2 + 24y + 9y^4 - 12y^3 + 4y^2 - 9y^3 + 12y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10y^4 - 20y^3 - 10y^2 + 20y = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y =$$

$$= 0 \Leftrightarrow y^3(y - 2) - y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y(y - 2)(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(y - 2)(y - 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 2 \vee y = 1 \vee$$

$$\vee y = -1.$$

$$1) \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = 3 \\ x = 4 \vee x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 2 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 5x - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \vee x = 1 \\ x = 2 \vee x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \vee x = 3 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 13x + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \vee x = 2 \\ x = 11 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

О т в е т.  $\{(3; 0); (2; 2); (0; 1); (2; -1)\}$ .

Разумеется, можно решить систему, исключив переменную  $y$   
Приводим соответствующие вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x^2 - 3x & 0 \\ 0 & 1 & -1 & x^2 - 3x \\ 1 & 11 - 6x & -x^2 + 7x - 12 & 0 \\ 0 & 1 & 11 - 6x & -x^2 + 7x - 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & x^2 - 3x \\ 1 & 11 - 6x & -x^2 + 7x - 12 \\ 1 & 11 - 6x & -x^2 + 7x - 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & x(x - 3) \\ -6(x - 2) & -2(x - 2)(x - 3) & 0 \\ 1 & 11 - 6x & -(x - 3)(x - 4) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-3)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -6 & -2(x-3) & 0 \\ 1 & 11-6x & -x+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} = (x-3)(x-2) \times \\
 &\times 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2x & 6x \\ 12-6x & -2x+4 \end{vmatrix} = 40x(x-3)(x-2)^2 = \\
 &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 2.
 \end{aligned}$$

(Кратность корня  $x = 2$  не принимаем во внимание. Найденные значения  $x$  подставляем в данную систему и находим соответствующие значения  $y$ .)

$$\begin{aligned}
 1) \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \\ y^2 + 11y - 12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \vee y = 1 \\ y = 12 \vee y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} x = 3 \\ y^2 - y = 0 \\ y^2 - 7y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \vee y = 1 \\ y = 0 \vee y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x = 2 \\ y^2 - y - 2 = 0 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \vee y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \vee y = 1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

О т в е т.  $\{(0; 1); (3; 0); (2; 2); (2; -1)\}$ .

### Упражнения

1. Исключить  $x$  из системы уравнений (двумя способами):

$$\begin{aligned}
 а) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 2 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 1; \end{cases} & б) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases} \\
 в) \begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0 \\ x^2 + x - y^2 = 1; \end{cases} & г) \begin{cases} y = x^3 - 2x^2 - 6x + 8 \\ y = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Решить системы уравнений над полем  $R$ , последовательно исключая переменную  $x$ :

$$а) \begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 0 \\ 2x^2 - xy - x + y^2 - y - 4 = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 - 5y^3 + 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 7 = 0. \end{cases}$$

3. Решить систему над полем  $C$ , последовательно исключая переменную  $y$ :

$$\begin{cases} y^2 + (x-4)y + x^2 - 2x + 3 = 0 \\ y^3 - 5y^2 + (x+7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0. \end{cases}$$

4. Решить систему над полем  $C$  с помощью результата:

$$а) \begin{cases} 5x^2 - 6xy + (5y^2 - 16) = 0 \\ 2x^2 - (y+1)x + (y^2 - y - 4) = 0; \end{cases} \text{ (Исключить } x.)$$

$$б) \begin{cases} y^2 + (x-4)y + (x^2 - 2x + 3) = 0 \\ y^3 - 5y^2 + (x+7)y + (x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0. \end{cases} \text{ (Исключить } y.)$$

## Глава IV

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

#### § 12. МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА. СТРОЕНИЕ ПРОСТОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЛЯ. СОПРЯЖЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Л и т е р а т у р а: Винберг Э. Б. Гл. V, § 2 (п. 1, 3, 4), § 3 (п. 1, 3).

**Задача 1.** Доказать непосредственно (исходя из определения алгебраического числа), что каждое из чисел

а)  $\sqrt[3]{5}$ ; б)  $2 + \sqrt[3]{5}$ ; в)  $-1 + 2i$ ; г)  $-1 + i\sqrt[3]{5}$  является алгебраическим, и найти его степень (над  $Q$ ).

**Р е ш е н и е.** Число  $\alpha \in C$  называется алгебраическим над полем  $Q$  (или просто алгебраическим), если оно является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из  $Q$ .

Многочлен  $p(x) \in Q[x]$  наименьшей степени, корнем которого является данное алгебраическое число  $\alpha$ , называется минимальным многочленом числа  $\alpha$ , степень этого многочлена называется степенью числа  $\alpha$  (над  $Q$ ). Многочлен  $p(x)$  определен с точностью до численного множителя  $a \in Q$ . Минимальный многочлен всегда неприводим (над  $Q$ ); обратно, неприводимый многочлен, имеющий  $\alpha$  своим корнем, является минимальным многочленом числа  $\alpha$ .

а) Для числа  $\alpha = \sqrt[3]{5}$  имеем:  $\alpha^3 = 5$ , т. е.  $\alpha$  есть корень многочлена  $x^3 - 5$ . Следовательно,  $\alpha$  — алгебраическое число. Так как многочлен  $x^3 - 5$  неприводим над  $Q$ , то он является минимальным многочленом числа  $\alpha$ ; степень  $\alpha$  над  $Q$  равна 3.

б) Для  $\alpha = 2 + \sqrt[3]{5}$  имеем:  $\alpha - 2 = \sqrt[3]{5}$ , откуда следует:  $(\alpha - 2)^3 = 5$ . Таким образом, число  $\alpha$  является корнем многочлена

$$p(x) = (x - 2)^3 - 5 \in Q[x]$$

и, следовательно, алгебраическим числом. Многочлен  $p(x)$  неприводим над  $Q$ , поэтому степень  $\alpha$  равна 3.

в) Для  $\alpha = -1 + 2i$  имеем:  $\alpha + 1 = 2i$  и, следовательно,  $(\alpha + 1)^2 = -4$ . Отсюда видно, что  $\alpha$  является корнем многочлена  $p(x) = (x + 1)^2 + 4 = x^2 + 2x + 5 \in Q[x]$ , а значит, алгебраическим числом. Так как  $p(x)$  неприводим над  $Q$ , то степень  $\alpha$  равна 2.

г) Для  $\alpha = -1 + i\sqrt[3]{5}$  можем записать:

$$\alpha + 1 = i\sqrt[3]{5} \Rightarrow (\alpha + 1)^6 = -5.$$

Следовательно,  $\alpha$  — корень многочлена  $p(x) = (x + 1)^6 + 5 \in Q[x]$ . Это означает, что  $\alpha$  — алгебраическое число. Так как  $p(x)$

неприводим над  $Q$  (чтобы в этом убедиться, достаточно применить к многочлену  $y^6 + 5$  признак Эйзенштейна), то степень  $\alpha$  равна 6.

**З а м е ч а н и е.** Известно, что множество всех алгебраических чисел есть поле (подполе поля  $C$ ). Поэтому, например, алгебраичность числа  $-1 + i\sqrt[3]{5}$  можно было бы вывести из алгебраичности чисел  $-1$ ,  $\sqrt[3]{5}$  и  $i$  (число  $i$  является алгебраическим как корень уравнения  $x^2 + 1 = 0$ ). Однако в задаче требовалось установить алгебраичность числа  $-1 + i\sqrt[3]{5}$  непосредственным путем, не опираясь на теоремы об алгебраических числах.

**Задача 2.** Доказать непосредственно, что число  $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}}$  алгебраическое и что его степень не превосходит 12.

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим сначала число  $\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ .  
Имеем:

$$\begin{aligned} \beta - \sqrt{2} &= \sqrt[3]{5} \Rightarrow (\beta - \sqrt{2})^3 = 5 \Rightarrow \beta^3 - 3\beta^2\sqrt{2} + \\ + 3\beta \cdot 2 - 2\sqrt{2} &= 5 \Rightarrow -(3\beta^2 + 2)\sqrt{2} = 5 - \beta^3 - 6\beta \Rightarrow (1) \\ \Rightarrow (3\beta^2 + 2)^2 \cdot 2 &= (5 - \beta^3 - 6\beta)^2 \Rightarrow \beta^6 - 6\beta^4 - 10\beta^3 + 12\beta^2 - \\ &- 60\beta + 17 = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\beta = \alpha^2$ , то из полученного равенства следует:

$$\alpha^{12} - 6\alpha^8 - 10\alpha^6 + 12\alpha^4 - 60\alpha^2 + 17 = 0.$$

Таким образом, число  $\alpha$  является корнем многочлена

$$f(x) = x^{12} - 6x^8 - 10x^6 + 12x^4 - 60x^2 + 17$$

и, следовательно, является алгебраическим числом. Если  $p(x)$  — минимальный многочлен числа  $\alpha$ , то  $f(x)$  должен без остатка делиться на  $p(x)$  (в противном случае остаток  $r(x)$  был бы многочленом степени ниже, чем степень  $p(x)$ , и также имел бы корень  $\alpha$ ). Отсюда вытекает, что степень  $p(x)$ , а значит, степень числа  $\alpha$  не превосходит 12.

**Задача 3.** Доказать, что числа  $\cos \frac{\pi}{n}$  и  $\sin \frac{\pi}{n}$  ( $n \in N$ ) алгебраические. Найти степень числа  $\sin 10^\circ$ .

**Р е ш е н и е.** Воспользуемся следующим частным случаем формулы Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2n} = \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi.$$

Из этого равенства следует, что  $\cos 2n\varphi$  и  $\sin 2n\varphi$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \cos 2n\varphi &= F_1(\cos \varphi), \\ \sin 2n\varphi &= F_2(\sin \varphi \cos \varphi), \end{aligned}$$

где  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — два многочлена с целыми коэффициентами.

Полагая  $\varphi = \frac{2\pi}{2n}$ , будем иметь:  $\cos 2n\varphi = \cos 2\pi = 1$  и  $\sin 2n\varphi = \sin 2\pi = 0$ , следовательно,

$$F_1\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)=1, \quad F_2\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)=0.$$

Это означает, что число  $\cos \frac{\pi}{n}$  является корнем многочлена  $F_1(x) - 1$ , а число  $\sin \frac{\pi}{n}$  — корнем  $F_2(x)$ ; следовательно, оба указанных числа алгебраические.

Для числа  $\alpha = \sin 10^\circ$  можно воспользоваться более простым рассуждением. Нам известна формула

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.$$

Полагая в ней  $\varphi = 10^\circ$ , получим:

$$\frac{1}{2} = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ.$$

Отсюда видно, что число  $\sin 10^\circ$  является корнем многочлена

$$p(x) = 8x^3 - 6x + 1,$$

и так как  $p(x)$  неприводим над  $\mathbb{Q}$  (это вытекает из того, что  $p(x)$  не имеет рациональных корней), то степень числа  $\sin 10^\circ$  равна 3.

**Задача 4.** Указать какой-либо базис поля  $Q(\alpha)$ , где  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , как векторного пространства над  $\mathbb{Q}$ . Написать закон умножения чисел из  $Q(\alpha)$  в этом базисе.

**Решение.** Напомним некоторые сведения о простых алгебраических расширениях полей.

Пусть  $P$  — числовое поле и  $\alpha \in \mathbb{C}$  — число, алгебраическое над  $P$ . Пусть минимальный многочлен  $p(x)$  числа  $\alpha$  имеет степень  $n$ :

$$p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (c_0, c_1, \dots, c_n \in P, c_n \neq 0),$$

так что степень числа  $\alpha$  над  $P$  равна  $n$ . Тогда поле  $P(\alpha)$  (минимальное расширение поля  $P$ , содержащее число  $\alpha$ ) состоит из всевозможных чисел  $\gamma$  вида

$$\gamma = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}, \quad (2)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in P$ ; при этом представление числа  $\gamma$  в указанном виде единственно. Отсюда вытекает, что в качестве базиса векторного пространства  $P(\alpha)$  над  $P$  можно взять  $n$  чисел:

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}.$$

В этом базисе умножение чисел из  $P(\alpha)$  можно осуществлять следующим образом: перемножаем суммы вида (2) обычным образом, т. е. пишем:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1})(b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}) = \\ = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_ib_j\alpha^{i+j}, \end{aligned}$$

а затем последовательно понижаем степень многочлена (относительно  $\alpha$ ), стоящего в правой части, используя равенство

$$p(\alpha) = 0 \quad \left( \text{или } \alpha^n = -\frac{1}{c_n} (c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) \right).$$

Снижение степени производим до тех пор, пока степень полученного выражения не окажется меньше  $n$ .

Того же результата можно достичь и другим способом. Мы делим с остатком многочлен

$$f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})(b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1})$$

на  $p(x)$ :

$$f(x)g(x) = p(x)q(x) + r(x) \quad (\text{степень } r(x) < n)$$

и, полагая затем  $x = \alpha$ , находим:

$$f(\alpha)g(\alpha) = r(\alpha).$$

Для указанного в задаче случая, когда  $P$  есть поле  $Q$  рациональных чисел, а  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , имеем:

$$p(x) = x^3 - 2,$$

и в качестве базиса  $Q(\alpha)$  относительно  $Q$  можно взять тройку чисел:

$$1, \alpha, \alpha^2.$$

Любое число из  $Q(\alpha)$  однозначно представляется в виде

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \quad (a_0, a_1, a_2 \in Q).$$

Перемножая два числа из  $Q(\alpha)$ , находим:

$$(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\alpha^3 + a_2b_2\alpha^4,$$

учитывая, что  $\alpha^3 = 2$  и  $\alpha^4 = 2\alpha$ , получаем:

$$(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2) = (a_0b_0 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0 + 2a_2b_2)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2 \quad (3)$$

— искомый закон умножения чисел из  $Q(\alpha)$ .

**Задача 5.** В поле  $Q(\alpha)$ , где  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , найти выражение для числа  $(1 + 3\alpha + \alpha^2)^{-1}$  в виде  $b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2$  ( $b_0, b_1, b_2 \in Q$ ).

**Решение.** Фактически здесь ставится задача освободиться от корней в знаменателе дроби

$$\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}},$$

или, как еще говорят, «освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе». Задачу можно решить двумя способами.

**И с п о с о б.** Будем искать числа  $b_0, b_1, b_2 \in Q$  такие, чтобы

$$(1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(b_0 + b_1\sqrt[3]{2} + b_2\sqrt[3]{4}) = 1.$$



В силу формулы (2) неизвестные  $b_0, b_1, b_2$  должны удовлетворять уравнению

$$(1 \cdot b_0 + 2 \cdot 3 \cdot b_2 + 2 \cdot 1 \cdot b_1) + (1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_0 + 2 \cdot 1 \times \\ \times b_2) \sqrt[3]{2} + (1 \cdot b_2 + 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_0) \sqrt[3]{4} = 1$$

или, если учесть, что числа  $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$  линейно независимы над  $Q$ , системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} b_0 + 6b_2 + 2b_1 &= 1, \\ b_1 + 3b_0 + 2b_2 &= 0, \\ b_2 + 3b_1 - b_0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим:

$$b_0 = -\frac{5}{41}, \quad b_1 = -\frac{1}{41}, \quad b_2 = \frac{8}{41}.$$

Ответ.  $(1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{-1} = \frac{1}{41}(-5 - \sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{4}).$

И способ. Число  $1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  есть значение многочлена  $f(x) = 1 + 3x + x^2$  при  $x = \alpha = \sqrt[3]{2}$ . Этот многочлен взаимно прост с многочленом  $p(x) = x^3 - 2$  (минимальным многочленом числа  $\alpha$ ), так как  $p(x)$  неприводим, а  $f(x)$  не делится на  $p(x)$ . Следовательно, существуют многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$  такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)p(x) = 1.$$

Полагая в этом равенстве  $x = \alpha$ , будем иметь:

$$u(\alpha)f(\alpha) = 1,$$

или

$$f(\alpha)^{-1} = u(\alpha)$$

— искомое представление для числа  $f(\alpha)^{-1}$ . Итак, остается лишь найти многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ .

Применим к  $f(x)$  и  $p(x)$  алгоритм Евклида:

1)  $p(x) = f(x)(x - 3) + r(x)$ , где  $r(x) = 8x + 1$ ;

2)  $8f(x) = r(x)\left(x + \frac{23}{8}\right) + r_1$ , где  $r_1 = \frac{41}{8}$ .

Получим:

$$\begin{aligned} r_1 &= 8f(x) - [p(x) - f(x)(x - 3)]\left(x + \frac{23}{8}\right) = \\ &= \left(8 + (x - 3)\left(x + \frac{23}{8}\right)\right)f(x) - \left(x + \frac{23}{8}\right)p(x). \end{aligned}$$

Полагая в последнем равенстве  $x = \alpha$ , находим:

$$\frac{41}{8} = \left(8 + (\alpha - 3)\left(\alpha + \frac{23}{8}\right)\right)f(\alpha),$$

или

$$f(\alpha)^{-1} = \frac{8}{41} \left( 8 + \alpha^2 - \frac{1}{8}\alpha - \frac{69}{8} \right) = \frac{1}{41} (-5 - \alpha + 8\alpha^2).$$

Ответ, разумеется, получился тот же самый, что и при I способе решения.

**Задача 6.** Освободиться от  $\alpha$  в знаменателе дроби

$$\frac{\alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1},$$

если  $\alpha$  — корень уравнения

$$x^3 + x^2 + 3x + 4 = 0.$$

**Решение.** Положим

$$p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4.$$

С помощью известных нам приемов определяем, что многочлен  $p(x)$  не имеет рациональных корней; из этого, поскольку степень  $p(x)$  равна 3, следует, что  $p(x)$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ .

Знаменатель данной дроби  $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2$  не равен нулю, так как  $\alpha \neq -1$  (число  $-1$  не является корнем многочлена  $p(x)$ ). Это означает, что многочлен

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

взаимно прост с  $p(x)$  (в противном случае  $f(x)$  и  $p(x)$  имели бы общий корень  $-1$ , что, как мы видели, невозможно). Пользуясь этим, будем искать многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$  такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)p(x) = 1.$$

Применяем к  $p(x)$  и  $f(x)$  алгоритм Евклида. Деля  $p(x)$  на  $f(x)$  с остатком, получим:

$$p(x) = f(x)(x - 1) + r(x),$$

где  $r(x) = 4x + 5$ . Далее находим:

$$f(x) = \frac{1}{4}r(x)\left(x + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{16}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} &= f(x) - \frac{1}{4}[p(x) - f(x)(x - 1)]\left(x + \frac{3}{4}\right) = \\ &= f(x)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{13}{16}\right) + p(x)\left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\right). \end{aligned}$$

При  $x = \alpha$  из последнего равенства получаем:

$$\frac{1}{16} = f(\alpha) \left( \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{16}\alpha + \frac{13}{16} \right),$$

или

$$\frac{1}{f(\alpha)} = 4\alpha^2 - \alpha + 13.$$

Умножая обе части равенства на число  $\alpha^2 - 3\alpha - 1$ , т. е. на числитель данной в задаче дроби, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} &= (4\alpha^2 - \alpha + 13)(\alpha^2 - 3\alpha - 1) = \\ &= 4\alpha^4 - 13\alpha^3 + 12\alpha^2 - 38\alpha - 13.\end{aligned}$$

В принципе мы привели дробь к нужному виду. Однако можно еще упростить полученное выражение, воспользовавшись тем, что  $p(\alpha) = 0$ . Делим с остатком многочлен  $g(x) = 4x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 38x - 13$  на  $p(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$ . Получаем:

$$g(x) = p(x)(4x - 17) + S(x),$$

где  $S(x) = 17x^2 - 3x + 55$ . При  $x = \alpha$  имеем:

$$\begin{aligned}g(\alpha) &= S(\alpha) = 17\alpha^2 - 3\alpha + 55. \\ x^3 - 3x - 4,\end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 17\alpha^2 - 3\alpha + 55.$$

**Задача 7.** Пусть  $\alpha$  — один из корней многочлена  $x^3 - 3x - 4$ ,

неприводимого над полем  $Q$ . Корнем какого неприводимого над  $Q$  многочлена является число

$$\beta = 1 + \alpha + \alpha^2? \quad (4)$$

**З а м е ч а н и е.** Сформулированная задача является частным случаем следующей, более общей задачи. Пусть число  $\alpha$  является корнем уравнения  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  — данный многочлен, неприводимый над полем  $P$ . Рассмотрим число  $\beta = \varphi(\alpha)$ , где  $\varphi(x)$  — другой данный многочлен над  $P$ . Требуется найти уравнение  $F(y) = 0$  с неприводимой над  $P$  левой частью, корнем которого является число  $\beta$ . Нахождение такого уравнения называют «преобразованием уравнения  $f(x) = 0$  с помощью подстановки  $y = \varphi(x)$ » или «преобразованием Чирнгауза».

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим наряду с выражением (4) для числа  $\beta$  выражения для чисел  $\beta\alpha$  и  $\beta\alpha^2$ . Учитывая, что  $\alpha^3 = 3\alpha + 4$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= (1 + \alpha + \alpha^2)\alpha = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha + \alpha^2 + (3\alpha + 4) = \\ &= 4 + 4\alpha + \alpha^2,\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\beta\alpha^2 &= (1 + \alpha + \alpha^2)\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^2 + (3\alpha + 4) + \\ &+ \alpha(3\alpha + 4) = 4 + 7\alpha + 4\alpha^2.\end{aligned} \quad (6)$$

Перепишем равенства (4), (5), (6) в виде

$$\begin{aligned}(1 - \beta) \cdot 1 + 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha^2 &= 0, \\ 4 \cdot 1 + (4 - \beta)\alpha + 1 \cdot \alpha^2 &= 0, \\ 4 \cdot 1 + 7\alpha + (4 - \beta)\alpha^2 &= 0.\end{aligned}$$

Рассматривая эти три соотношения как систему трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными  $1, \alpha, \alpha^2$  и принимая во внимание, что решение  $(1, \alpha, \alpha^2)$  этой системы отлично от нулевого, получим, что определитель системы должен быть равен 0:

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta & 1 & 1 \\ 4 & 4 - \beta & 1 \\ 4 & 7 & 4 - \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть уравнение для  $\beta$ . Раскрывая определитель 3-го порядка, приведем это уравнение к виду;

$$\beta^3 - 9\beta^2 + 9\beta - 9 = 0.$$

Остается еще отметить, что многочлен третьей степени относительно  $\beta$ , стоящий в левой части, неприводим (так как он не имеет рациональных корней).

**О т в е т.** Уравнение для  $\beta$  есть  $y^3 - 9y^2 + 9y - 9 = 0$ .

**Задача 8.** Для данного числа  $\alpha$ , алгебраического над  $Q$ , найти алгебраически сопряженные ему (над  $Q$ ) числа:

а)  $\alpha = \sqrt{2}$ ; б)  $\alpha = \sqrt[3]{5}$ ; в)  $\alpha = a + bi$ , где  $a, b \in Q, b \neq 0$ .

**Р е ш е н и е.** Два алгебраических над  $Q$  числа  $\alpha$  и  $\beta$  называются алгебраически сопряженными (или просто сопряженными) относительно  $Q$ , если они являются корнями одного и того же неприводимого над  $Q$  многочлена  $p(x)$ .

Для числа  $\alpha = \sqrt{2}$  минимальный многочлен есть  $p(x) = x^2 - 2$ , его корнями являются  $\sqrt{2}$  и  $-\sqrt{2}$ . Значит, сопряженным для числа  $\sqrt{2}$  относительно  $Q$  является число  $-\sqrt{2}$ .

Для  $\alpha = \sqrt[3]{5}$  минимальный многочлен есть  $p(x) = x^3 - 5$ , его корни есть  $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2$ , где  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Значит, сопряженными для числа  $\sqrt[3]{5}$  относительно  $Q$  являются числа  $\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  и  $\sqrt[3]{5}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Для  $\alpha = a + bi, a \in Q, b \in Q, b \neq 0$  минимальный многочлен есть  $p(x) = (x - a)^2 + b^2$ , его корни есть  $a + bi$  и  $a - bi$ . Значит, сопряженным для числа  $a + bi$ , где  $a, b \in Q, b \neq 0$ , относительно  $Q$  является число  $a - bi$ .

**Задача 9.** Докажите, что если комплексное число  $\alpha = a + bi$ , где  $b \neq 0$ , является алгебраическим, то число  $\bar{\alpha} = a - bi$  тоже алгебраическое и числа  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$  алгебраически сопряжены относительно  $Q$ .

**Р е ш е н и е.** Пусть  $p(x)$  — минимальный многочлен числа  $\alpha$ . Так как  $p(x)$  есть многочлен с действительными коэффициентами и  $\alpha$  — его корень, то  $\bar{\alpha}$  тоже является его корнем. Значит, число  $\bar{\alpha}$  также является алгебраическим, а многочлен  $p(x)$  — минимальным многочленом числа  $\bar{\alpha}$ . Поскольку, таким образом, числа  $\alpha$  и

$\alpha$  имеют один и тот же минимальный многочлен, эти числа алгебраически сопряжены относительно  $Q$ .

**Задача 10.** Минимальные многочлены алгебраических чисел  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид (соответственно):

$$P_{\alpha}(x) = x^3 - 2, \quad P_{\beta}(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Найдите ненулевой многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является число  $\alpha + \beta$ .

**Решение.** Пусть  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2, \alpha_3$  — корни  $P_{\alpha}(x)$ , а  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2, \beta_3$  — корни  $P_{\beta}(x)$ . Составим многочлен

$$f(x) = \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^2 (x - \alpha_i - \beta_j) = x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6. \quad (7)$$

Коэффициенты  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) представляют собой многочлены от  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ , симметричные относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , а также относительно  $\beta_1, \beta_2$ . Отсюда следует, что эти коэффициенты рациональным образом выражаются через коэффициенты многочленов  $P_{\alpha}(x)$  и  $P_{\beta}(x)$  и тем самым что они являются рациональными числами. Одним из корней многочлена  $f(x)$  является число  $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$ . Значит,  $f(x)$  и является искомым многочленом.

Фактическое нахождение коэффициентов многочлена  $f(x)$  проще всего осуществить следующим путем. Так как  $\prod_{i=1}^3 (x - \alpha_i) = x^3 - 2$ , то  $\prod_{i=1}^3 (x - \beta_j - \alpha_i) = (x - \beta_j)^3 - 2$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{j=1}^2 ((x - \beta_j)^3 - 2) = ((x - \beta_1)^3 - 2)((x - \beta_2)^3 - 2) = \\ &= (x^3 - 3\beta_1 x^2 + 3\beta_1^2 x - \beta_1^3 - 2)(x^3 - 3\beta_2 x^2 + 3\beta_2^2 x - \beta_2^3 - 2) = \\ &= x^6 - 3(\beta_1 + \beta_2)x^5 + 3(\beta_1^2 + \beta_2^2 + 3\beta_1\beta_2)x^4 - (\beta_1^3 - \beta_2^3 - 4 - \\ &\quad - 9\beta_1\beta_2^2 - 9\beta_1^2\beta_2)x^3 + (3\beta_1(\beta_2^2 + 2) + 3\beta_2(\beta_1^2 + 2) + \\ &\quad + 9\beta_1^2\beta_2^2)x^2 - 3(\beta_1^2(\beta_2^2 + 2) + \beta_2^2(\beta_1^2 + 2))x + (\beta_1^3 - 2)(\beta_2^3 - 2). \end{aligned}$$

Численные значения коэффициентов при  $x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0$  находим, используя формулы Виета для многочлена  $P_{\beta}(x)$ :

$$\sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 = 3, \quad \sigma_2 = \beta_1\beta_2 = 1,$$

а также выражения для степенных сумм  $\beta_1^n + \beta_2^n$  через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (см. с. 89), а именно:

$$\begin{aligned} -3(\beta_1 + \beta_2) &= -3\sigma_1 = -9, \\ 3(\beta_1^2 + \beta_2^2 + 3\beta_1\beta_2) &= 3(\sigma_1^2 + \sigma_2) = 30, \\ -(\beta_1^3 + \beta_2^3 - 9\beta_1\beta_2^2 - 9\beta_1^2\beta_2 - 4) &= -(\sigma_1^3 - 12\sigma_1\sigma_2 - 4) = 13, \\ 3(\beta_1\beta_2^2 + \beta_2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_1^2\beta_2^2) &= 3(\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1 + 3\sigma_2^2) = 36, \\ -3(\beta_1^2\beta_2^3 + \beta_1^3\beta_2^2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_2^2) &= -3(\sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2) = -51, \\ \beta_1^3\beta_2^3 - 2(\beta_1^3 + \beta_2^3) + 4 &= \sigma_2^3 - 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + 4 = -31. \end{aligned}$$

Таким образом, искомым многочлен есть

$$f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 + 13x^3 + 36x^2 - 51x - 31. \quad (8)$$

**З а м е ч а н и е.** Можно показать, что полученный нами многочлен 6-й степени неприводим, и, следовательно, число  $\alpha + \beta$  имеет степень 6. В общем случае, т. е. когда  $\alpha$  и  $\beta$  — какие угодно алгебраические числа, многочлен  $f(x)$ , построенный по типу (7), может оказаться приводимым. Вот простейший пример: пусть  $\alpha = 1 + i$ ,  $\beta = 1 - i$ , тогда  $\alpha + \beta = 2$ , следовательно, число  $\alpha + \beta$  имеет степень 1 (над  $Q$ ), между тем многочлен  $f(x)$  будет в этом случае иметь степень 4.

**Задача 11.** Пусть  $\alpha$  — число, алгебраическое над полем  $P$ , и  $\beta$  — некоторое число из  $P(\alpha)$ . Очевидно  $P(\beta) \subset P(\alpha)$ . Докажите, что  $P(\beta) = P(\alpha)$  в том и только в том случае, когда степень числа  $\beta$  равна степени числа  $\alpha$  (относительно  $P$ ).

**Р е ш е н и е.** Пусть степень  $\alpha$  относительно  $P$  равна  $n$ . Тогда размерность векторного пространства  $P(\alpha)$  относительно  $P$  также равна  $n$ . Рассмотрим теперь число  $\beta$ . Степенью этого числа над  $P$  является наибольшее натуральное число  $m$ , такое, что числа

$$1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{m-1} \quad (9)$$

линейно независимы над  $P$ . Поскольку  $\dim_P P(\alpha) = n$ , то должно быть  $m \leq n$ .

Если  $P(\beta) = P(\alpha)$ , то наряду с неравенством  $m \leq n$  должно выполняться и  $n \leq m$ . Следовательно, в этом случае  $m = n$ . Обратное, если  $m = n$ , то числа (9), как линейно независимые над  $P$ , образуют базис  $P(\alpha)$  относительно  $P$ . Следовательно, любое число из  $P(\alpha)$  представим в виде  $c_0 + c_1\beta + \dots + c_{m-1}\beta^{m-1}$ , где  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in P$ . Это означает, что  $P(\alpha) = P(\beta)$ .

### Упражнения

1. Доказать непосредственно, что число  $\alpha$  является алгебраическим, и найти минимальный многочлен числа  $\alpha$ :

а)  $\alpha = 1$ ; б)  $\alpha = i$ ; в)  $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ ; г)  $\alpha = 1 - 2\sqrt[3]{4}$ ;

д)  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; е)  $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ ; ж)  $\alpha = \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}$ ;

з)  $\alpha = 1 + \sqrt[5]{11}$ ; и)  $\alpha = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ ; к)  $\alpha = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$ .

2. Доказать непосредственно, что число  $\alpha$  является алгебраическим, и найти многочлен над  $Q$  (не обязательно минимальной степени), корнем которого является  $\alpha$ :

а)  $\alpha = \sqrt[5]{2} - \sqrt{2}$ ; б)  $\alpha = \sqrt[5]{2} - \frac{1}{2}i$ ; в)  $\alpha = \sqrt[5]{2} - i\sqrt{2}$ .

3. Доказать непосредственно, что если число  $\alpha$  алгебраическое,

то число  $i\alpha$  тоже алгебраическое. Обязательно ли равны степени этих чисел?

4. Доказать непосредственно, что если число  $\alpha$  алгебраическое, то каждое из чисел  $a\alpha + b$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ),  $\frac{1}{\alpha}$  (если  $\alpha \neq 0$ ),  $\alpha^2$  снова алгебраическое.

5. Доказать, что любое алгебраическое число степени 2 представимо в виде  $a \pm \sqrt{b}$ , где  $a, b \in \mathbb{Q}$ , причем  $b$  не является квадратом рационального числа.

6. Являются ли алгебраически сопряженными числа: а)  $\sqrt{5}$  и  $-\sqrt{5}$ ; б)  $\sqrt[3]{5}$  и  $-\sqrt[3]{5}$ ; в)  $\sqrt[4]{5}$  и  $-\sqrt[4]{5}$ ; г)  $\sqrt{5} + i$  и  $\sqrt{5} - i$ ; д)  $\sqrt{5} + i$  и  $-\sqrt{5} + i$ ?

7. Найти все числа, алгебраически сопряженные данному алгебраическому числу  $\alpha$ :

а)  $\alpha = \sqrt{5}$ ; б)  $\alpha = \sqrt[3]{5}$ ; в)  $\alpha = \sqrt[4]{5}$ ; г)  $\alpha = \sqrt{5} + i$ ;  
д)  $\alpha = \sqrt{5} - i\sqrt{2}$ ; е)  $\alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ ; ж)  $\alpha = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$ .

8. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — два алгебраических числа, а  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  — некоторые алгебраически сопряженные им числа. Покажите на примере, что, вообще говоря, число  $\alpha^* + \beta^*$  не сопряжено  $\alpha + \beta$ .

У к а з а н и е. Возьмите в качестве  $\alpha$  и  $\beta$  два комплексно сопряженных значения корня  $n$ -й степени ( $n > 3$ ) из единицы.

9. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — алгебраические числа. Покажите, что всегда степень  $(\alpha + \beta) \leq$  степень  $\alpha \cdot$  степень  $\beta$ .

10. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — алгебраические числа. Покажите, что если степень  $(\alpha + \beta) =$  степень  $\alpha \cdot$  степень  $\beta$ , то справедливо следующее утверждение: каково бы ни было число  $\alpha^*$ , сопряженное  $\alpha$ , и число  $\beta^*$ , сопряженное  $\beta$ , сумма  $\alpha^* + \beta^*$  сопряжена сумме  $\alpha + \beta$ .

11. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — три различных значения  $\sqrt[3]{2}$  в поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, причем  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ . Содержит ли поле  $\mathbb{Q}(\alpha_1)$  числа  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ ; поле  $\mathbb{Q}(\alpha_2)$  — числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ ?

12. Содержится ли в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  число  $\sqrt[3]{7}$ ? в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$  число  $\sqrt[3]{2}$ ?

13. Докажите, что числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt[3]{12}$  линейно независимы над полем  $\mathbb{Q}$ .

14. Укажите какой-нибудь базис поля  $\mathbb{Q}(\alpha)$  относительно  $\mathbb{Q}$  и запишите закон умножения чисел из  $\mathbb{Q}(\alpha)$  в этом базисе:

а)  $\alpha = \sqrt[3]{5}$ ; б)  $\alpha = 2i$ ; в)  $\alpha = \sqrt{2}(1 + i)$ ; г)  $\alpha = -1 + i\sqrt[4]{3}$ .

15. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

а)  $\frac{7}{1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} + \sqrt[4]{7} - 1}$ .

16. Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби:

а)  $\frac{\alpha}{\alpha^3 + 5}$ , где  $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$ ;

б)  $\frac{\alpha^2}{\alpha^4 + 1}$ , где  $\alpha^4 + 2\alpha + 2 = 0$ ;

в)  $\frac{1}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2}$ , где  $\alpha^4 + \alpha^3 - 4\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ .

17. Пусть  $\alpha$  — корень данного многочлена  $f(x)$ , неприводимого над полем  $Q$ ; число  $\beta = \varphi(\alpha)$ , где  $\varphi(x)$  — другой данный многочлен над  $Q$ . Корнем какого неприводимого многочлена над  $Q$  является число  $\beta$ ?

а)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ ,  $\varphi(x) = x^2 + 1$ ;

б)  $f(x) = x^3 - x + 2$ ,  $\varphi(x) = x^2 + x$ ;

в)  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ ,  $\varphi(x) = -x^2 + 2$ .

18. Найти многочлен над  $Q$ , корнем которого является число  $\alpha + \beta$ , если известны минимальные многочлены для  $\alpha$  и  $\beta$ :

а)  $P_\alpha(x) = x^2 + x + 1$ ,  $P_\beta(x) = x^2 + 2x + 3$ ;

б)  $P_\alpha(x) = x^3 - 2$ ,  $P_\beta(x) = x^2 - 5$ ;

в)  $P_\alpha(x) = x^3 + x + 1$ ,  $P_\beta(x) = x^2 + 2x + 3$ .

### § 13. СОСТАВНОЕ (ПОВТОРНОЕ) АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ

Л и т е р а т у р а: Винберг Э. Б. Гл. V, § 3 (п. 1, 2, 4).

Задача 1. Поле  $Q$  последовательно расширяется — сначала с помощью числа  $\sqrt[3]{2}$ , затем с помощью числа  $\sqrt[3]{5}$ :

$$Q \subset Q_1 \subset Q_2, \text{ где } Q_1 = Q(\sqrt[3]{2}), Q_2 = Q_1(\sqrt[3]{5}).$$

Доказать, что такое расширение может быть достигнуто в один шаг — с помощью числа  $\Theta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ , т. е. что

$$Q(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5}) = Q(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}).$$

Р е ш е н и е. Согласно теореме о простоте составного расширения любые два последовательно произведенных простых алгебраических расширения поля  $P$

$$P_1 = P(\alpha_1), P_2 = P_1(\alpha_2)$$

( $\alpha_1$  алгебраично над  $P$ , а  $\alpha_2$  — над  $P_1$ ) могут быть заменены одним, т. е. существует такое число  $\Theta$ , алгебраическое над  $P$ , что

$$P_2 = P(\Theta).$$

Наша задача — показать, что в случае, когда  $P$  есть поле  $Q$  рациональных чисел, а  $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$  и  $\alpha_2 = \sqrt[3]{5}$ , в качестве  $\Theta$  можно взять  $\alpha_1 + \alpha_2$ .



Достаточно показать, что поле  $Q(\alpha_1 + \alpha_2)$  содержит каждое из чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , так как в этом случае оно будет содержать поле  $Q_1 = Q(\alpha_1)$  и число  $\alpha_2$ , а значит, и поле  $Q_2 = Q_1(\alpha_2)$ ; тогда из  $Q(\alpha_1 + \alpha_2) \supset Q_2$  и  $Q(\alpha_1 + \alpha_2) \subset Q_2$  (второе включение является очевидным) будет следовать:  $Q(\alpha_1 + \alpha_2) = Q_2$ .

На самом деле достаточно показать еще меньше — что поле  $Q(\alpha_1 + \alpha_2)$  содержит  $\alpha_1$ , так как  $\alpha_2$  тогда будет принадлежать полю  $Q(\alpha_1 + \alpha_2)$  как разность двух чисел из этого поля ( $\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1$ ).

Для сокращения записей обозначим поле  $Q(\alpha_1 + \alpha_2)$  через  $L$ . Допустим, рассуждая от противного, что число  $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$  не принадлежит  $L$ . Рассмотрим два многочлена над  $L$ :

$$\varphi(x) = (x - \theta)^3 + 5, \quad \psi(x) = x^2 - 2 \quad (1)$$

(напомним, что  $\theta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ ). Каждый из них имеет одним из своих корней число  $\sqrt[3]{2}$ :

$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}))^3 + 5 = 0; \quad \psi(\sqrt[3]{2}) = 2 - 2 = 0.$$

Проверим, что других общих корней многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  не имеют.

Действительно, корни  $\psi(x)$  — это числа

$$\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}.$$

Корнями же многочлена  $\varphi(x)$  являются корни уравнения  $(x - \theta)^3 = 5$ , т. е. числа

$$\theta - \sqrt[3]{5} (= \sqrt[3]{2}), \quad \theta - \sqrt[3]{5}\omega, \quad \theta - \sqrt[3]{5}\omega^2,$$

где  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  — корень кубический из 1. Следовательно, мы должны проверить, что ни одно из чисел  $\theta - \sqrt[3]{5}\omega$ ,  $\theta - \sqrt[3]{5}\omega^2$  не равно  $-\sqrt[3]{2}$ . Но это очевидно, так как числа  $\theta - \sqrt[3]{5}\omega$ ,  $\theta - \sqrt[3]{5}\omega^2$  не являются действительными (коэффициент при  $i$  отличен от нуля).

Поскольку, таким образом, единственный общий корень многочленов  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в поле  $C$  есть  $\sqrt[3]{2}$ , то (нормированный) наибольший общий делитель многочленов  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  в кольце  $C[x]$  есть

$$D(x) = x - \sqrt[3]{2}. \quad (2)$$

Этот же самый многочлен должен быть (нормированным) НОД многочленов  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  также и в кольце  $L[x]$ . Следовательно, все коэффициенты этого многочлена, в частности  $-\sqrt[3]{2}$ , принадлежат полю  $L$ . Тем самым и число  $\sqrt[3]{2}$  принадлежит  $L$ , что и требовалось показать.

**Задача 2.** Найти выражение числа  $\sqrt[3]{2}$  в виде  $\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ , а  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .

**Решение.** Сам факт принадлежности числа  $\sqrt{2}$  полю  $Q(\theta)$  был установлен в задаче 1. Наша цель теперь — найти «явное» выражение числа  $\sqrt{2}$  через  $\theta$ .

Рассмотрим снова многочлены  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  из (1). При решении задачи 1 мы показали, что нормированный НОД этих многочленов есть

$$D(x) = x - \sqrt{2}. \quad (2)$$

С другой стороны, НОД можно найти, применяя к  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  алгоритм Евклида. Для этого делим сначала  $\varphi(x)$  на  $\psi(x)$  (с остатком):

$$\begin{array}{r|l} -x^3 - 3\theta x^2 + 3\theta^2 x - \theta^3 + 5 & x^2 - 2 \\ x^3 & -2x \\ \hline -3\theta x^2 + (3\theta^2 + 2)x - \theta^3 + 5 & \\ -3\theta x^2 & +6\theta \\ \hline (3\theta^2 + 2)x - (\theta^3 + 6\theta - 5) & \end{array}$$

Мы получили в остатке многочлен

$$r(x) = (3\theta^2 + 2)x - (\theta^3 + 6\theta - 5) \quad (3)$$

1-й степени. Поскольку ранее уже было доказано, что НОД имеет степень 1 (см. (2)), то многочлен  $r(x)$  и должен быть как раз НОД многочленов  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ . Следовательно, многочлены  $D(x)$  и  $r(x)$  ассоциированы (отличаются лишь численным множителем):

$$D(x) = \frac{1}{3\theta^2 + 2} r(x),$$

или

$$x - \sqrt{2} = x - \frac{\theta^3 + 6\theta - 5}{3\theta^2 + 2}.$$

Отсюда имеем:

$$\sqrt{2} = \frac{\theta^3 + 6\theta - 5}{3\theta^2 + 2},$$

что и дает искомое выражение для числа  $\sqrt{2}$ .

**Задача 3.** Пусть, как и в задаче 1,

$$Q \subset Q_1 \subset Q_2, \text{ где } Q_1 = Q(\sqrt{2}), Q_2 = Q_1(\sqrt[3]{5}).$$

Найти степень поля  $Q_2$  относительно  $Q$  (т. е. размерность  $Q_2$  над  $Q$ ).

**Решение.** Справедлива теорема: если поле  $P_1$  — конечное расширение поля  $P$ , а поле  $P_2$  — конечное расширение  $P_1$ , то

$$\dim_P P_2 = \dim_{P_1} P_1 \cdot \dim_{P_1} P_2. \quad (4)$$

В нашем случае, очевидно,  $\dim_Q Q_1 = 2$ . Покажем, что

$$\dim_{Q_1} Q_2 = 3. \quad (5)$$

Чтобы доказать равенство (5), достаточно проверить, что многочлен  $p(x) = x^3 - 5$  3-й степени, имеющий число  $\sqrt[3]{5}$  своим корнем, неприводим над  $Q_1$ . Предположим, что это неверно, т. е. что  $p(x)$  приводим. Тогда один из неприводимых множителей многочлена  $p(x)$  должен быть первой степени, и, следовательно, один из корней многочлена  $p(x)$  должен принадлежать  $Q$ . Таким корнем является, конечно, действительное значение  $\sqrt[3]{5}$  (так как все числа из  $Q_1$  действительны). Но число  $\sqrt[3]{5}$  не может принадлежать  $Q_1$ , так как его степень над  $Q$  равна 3, в то время как степень любого числа из  $Q_1$  (над полем  $Q$ ) не выше 2. Полученное противоречие доказывает (5).

На основании формулы (4) можем теперь записать:

$$\dim_Q Q_2 = \dim_{Q_1} Q_1 \cdot \dim_{Q_1} Q_2 = 2 \cdot 3 = 6. \quad (6)$$

**З а м е ч а н и е.** Сопоставив (6) с тем фактом, что  $Q_2 = Q(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$  (см. задачу 1), мы можем вывести заключение, что степень числа  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$  над полем  $Q$  равна 6. Это означает, что многочлен 6-й степени (над полем  $Q$ ), имеющий своим корнем число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ , неприводим. Такой многочлен  $x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17$  был построен в задаче 2 предыдущего параграфа (см. равенство (1) на с. 102).

### Упражнения

1. Пусть  $p$  и  $q$  — натуральные числа, причем  $\sqrt{p}$  и  $\sqrt[3]{q}$  — не целые. Доказать, что

$$Q(\sqrt{p})(\sqrt[3]{q}) = Q(\sqrt{p} + \sqrt[3]{q}).$$

2. Найти выражение для каждого из чисел  $\sqrt{p}$  и  $\sqrt[3]{q}$  через  $\sqrt{p} + \sqrt[3]{q}$ :

а)  $p = 3, q = 6$ ; б)  $p = 7, q = 4$ ; в)  $p = 8, q = 3$ .

3. Пусть  $p$  и  $q$  — натуральные числа, причем отношение чисел  $\sqrt[3]{p}$  и  $\sqrt[3]{q}$  (действительных значений) не является рациональным числом. Доказать, что

$$Q(\sqrt[3]{p})(\sqrt[3]{q}) = Q(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}).$$

4. Используя условие задачи 3, найти выражение для каждого из чисел  $\sqrt[3]{p}$  и  $\sqrt[3]{q}$  через  $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ :

а)  $p = 3, q = 7$ ; б)  $p = 5, q = 12$ .

5. Пусть  $\alpha$  — алгебраическое число и  $n$  — его степень (над  $Q$ ). Доказать, что степень любого числа  $\gamma$  из  $Q(\alpha)$  является делителем  $n$ . Какие значения возможны для степени числа  $\gamma$ , если  $\alpha = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ ?

§ 1

1. а)  $2 + (1 - i)x - 3ix^2 + ix^3 + x^4$ ;  $2 + (1 + 3i)x - 3ix^2 - ix^3 - x^4$ ,  
 $-4ix + (2 - 2i)x^2 - (6 - 2i)x^3 + (1 + i)x^4 + (4 + i)x^5 - 3ix^6 \in Z[i][x]$ ;  
 б)  $(1 + 3i) + ix + 3x^2$ ;  $(1 - 3i) - ix + (1 - 2i)x^2$ ,  $3i + ix + (4 + 7i)x^2 + (1 + 2i)x^3 + (3 + i)x^4 \in Z[i][x]$ ; в)  $\bar{1} + x + 2x^2 - 2x^3$ ,  $\bar{2} - x + 2x^2 + x^3$ ,  $\bar{1} - 2x - x^2 + 3x^4 - 3x^5 - x^6 \in Z_7[x]$ ; г)  $\bar{3} - x^3 + 2x^4$ ,  $\bar{1} - 3x + x^4$ ,  $\bar{1} + 4x + 4x^2 - 4x^3 + 4x^5 + 4x^6 - x^7 + 2x^8 \in Z_5[x]$ ; д)  $-1 - x + x^2 - 3,33x^3 + 2x^4 - x^5$ ,  $5 + 4x - x^2 - 1,33x^3 - 2x^4 + x^5$ ,  $-6 - 9,5x - 1,75x^2 + 8,49x^3 + 8,325x^4 - 1,33x^5 + 0,83x^6 - 4,66x^7 + 2,33x^8 \in Q[x]$ ; е)  $3 + 1\frac{1}{4}x^2$ ,  $-3 +$

$+x + \frac{1}{4}x^2 - 2x^3$ ,  $1\frac{1}{2}x + 2x^2 - 3\frac{1}{8}x^3 + 1\frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^5 - x^6 \in Q[x]$ .

2. а)  $q(x) = x^3 - x^2 - 2x - 3$ ;  $r = -7$ ;

б)  $q(x) = 9x^2 - 19x + 47$ ,  $r = -141$ ;

в)  $q(x) = 4x^2 - (3 + 4i)x - (1 - 7i)$ ,  $r = 8 - 6i$ ; г)  $q(x) = 2x^5 + 4\sqrt{3}x^4 + 24x^3 - (2 - 8\sqrt{3})x^2 + (48 - 4\sqrt{3})x - (9 - 26\sqrt{3})$ ,  $r = 6 - 18\sqrt{3}$ ;

д)  $q(x) = 3x^2 + 5x + 3$ ;  $r = 4$ ;

е)  $q(x) = 7x^3 + 3x^2 - x + \bar{2}$ ;  $r = -\bar{1}$ .

3. а)  $g(-3) = 10$ ; б)  $g(4) = 136$ ; в)  $g(-3 + i) = 87 + 11i$ ; г)  $g(5 + i) = 19 + 62i$ ; д)  $g(\bar{3}) = \bar{1}$ ; е)  $g(-\bar{2}) = -\bar{3}$ .

4. а)  $q(x) = -2x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 39x - 109$ ;  $r = -327$ ;

б)  $q(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x - 3\frac{2}{3}$ ;  $r = 11$ ;

в)  $q(x) = (1 + i)x^2 + (2 - 3i)x - \frac{13 + 7i}{2}$ ;  $r = -20 + 6i$ ;

г)  $q(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 - x^3 + \frac{2 - \sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}x + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ ;

$r = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{2}$ .

5. а)  $k = 3$ ,  $f(x) = (x - 2)^3(x^2 + x + 1)$ ; б)  $k = 4$ ,  $f(x) = (x + 2)^4(x - 1)$ ,  
 в)  $k = 3$ ,  $f(x) = (x - 5)^3(x^2 + 1)$ ; г)  $k_1 = k_2 = 4$ ,  $f(x) = (x - 1)^4(x + 1)^4 \times$   
 $\times (x^2 - x + 1)$ ; д)  $k_1 = k_2 = 2$ ,  $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2(x^4 + 2x - 1)$ ;

е)  $k = 3$ ,  $f(x) = (x - \bar{2})^3(x^2 + \bar{1})$ ;

ж)  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $f(x) = (x - \bar{1})^2(x - \bar{2})(x^4 + x^3 - 3x - \bar{1})$ .

6. а)  $a = b = 1$ ; б)  $a = 8$ ,  $b = -5$ ; в)  $a = n$ ,  $b = -n - 1$ .

7. а)  $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{5}{4}$ ; б)  $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - 21\frac{2}{3}x + 15$ ;

в)  $f(x) = -\frac{1 + i}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1 - i}{2}x + 2\frac{1}{2}$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 18x + 24)$ ; д)  $f(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5$ .

8. a)  $g(x) = \overline{2}x^8 + \overline{4}x^5 + x + \overline{5} \in Z_{11}[x]$ ;  
 б)  $g(x) = x^4 - \overline{3}x^2 + \overline{5}x + \overline{2} \in Z_{13}[x]$ .  
 9. a)  $g(x) = x^2 - \overline{2}x + \overline{1} \in Z_5[x]$ ,  $x = \overline{1}$ ,  $x \equiv 1 \pmod{5}$ ;  
 б)  $g(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3} \in Z_3[x]$ ,  $x = \overline{1}$ ,  $x \equiv 1 \pmod{5}$ ;  
 в)  $g(x) = \overline{3}x^2 + x - \overline{2} \in Z_7[x]$ ,  $x_1 = -\overline{1}$ ,  $x_2 = \overline{3}$ ,  $x \equiv -1; 3 \pmod{7}$ ;  
 г)  $g(x) = \overline{5}x - \overline{3} \in Z_7[x]$ ,  $x = \overline{2}$ ,  $x \equiv 2 \pmod{7}$ ;  
 д)  $g(x) = \overline{2}x^2 - x + \overline{5} \in Z_{11}[x]$ ,  $x_1 = \overline{2}$ ,  $x_2 = \overline{4}$ ,  $x \equiv 2; 4 \pmod{11}$ ;  
 е)  $g(x) = x + \overline{1} \in Z_{13}[x]$ ,  $x = -\overline{1}$ ,  $x \equiv -1 \pmod{13}$ .

## § 2

1. a)  $q(x) = 2x^2 + 2x + 12$ ,  $r(x) = 38x + 6 \in Z[x]$ ;  
 б)  $q(x) = 2x^2 + 3x + 11$ ,  $r(x) = 25x - 5 \in Z[x]$ ;  
 в)  $q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$ ,  $r(x) = -2\frac{2}{9}x - 1\frac{7}{9} \in Q[x]$ ;  
 г)  $q(x) = 5x^2 + (6 - 3i)x - \frac{13 + 41i}{5}$ ,  $r(x) = -\frac{4 + 3i}{5}x + \frac{9 - 12i}{5} \in C[x]$ ;  
 д)  $q(x) = \overline{6}x$ ,  $r(x) = \overline{3}x^2 - x - \overline{2} \in Z_7[x]$ ;  
 е)  $q(x) = x^3 + \overline{3}x + 2$ ,  $r(x) = -\overline{1} \in Z_5[x]$ .  
 2. а)  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 24$ ; б)  $g(x) = x^2 + x + 2$ ; в)  $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$ ; г)  $g(x) = x^2 + ix + 2$ .  
 3. а)  $a = 1$ ,  $b = 0$ ; б)  $a = 1 - c^2$ ,  $b = -c$ ; в)  $a = c^3 - 2c$ ,  $b = c^2 - 1$ ; г)  $a = -c^4 + 3c^2 - 1$ ,  $b = -c^3 + 2c$ .  
 4. а)  $D(x) = \overline{1}$ ,  $m(x) = x^7 + x^6 + \overline{3}x^5 + \overline{2}x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 - x + \overline{1} \in Z_5[x]$ ;  
 б)  $D(x) = \overline{1}$ ,  $m(x) = -x^6 - x^5 - \overline{3}x^4 + x^2 + \overline{2} \in Z_7[x]$ ;  
 в)  $D(x) = \overline{2}x^2 + x + \overline{1}$ ,  $m(x) = x^6 - \overline{2}x^4 + x^3 + \overline{4}x^2 - \overline{2}x + \overline{3} \in Z_{11}[x]$ ;  
 г)  $D(x) = x^2 + 1$ ,  $m(x) = x^6 - x^4 - 3x^2 - x - 2 \in Q[x]$ ;  
 д)  $D(x) = 1$ ,  $m(x) = x^7 + 5x^6 + 8x^5 + 10x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 4 \in Q[x]$ ;  
 е)  $D(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$ ,  $m(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 - 11x^4 + 20\sqrt{2}x^3 + 11x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 \in R[x]$ ;  
 ж)  $D(x) = x^3 + (1 - i)x^2 - 1$ ,  $m(x) = x^6 - ix^5 + ix^4 - (1 + i)x^3 + ix^2 - x + 1 \in C[x]$ .  
 5. а)  $D(x) = x - 1$ ,  $\varphi(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ,  $\psi(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ ;  
 б)  $D(x) = x^3 + 1$ ,  $\varphi(x) = -1$ ,  $\psi(x) = x + 1$ ;  
 в)  $D(x) = x^2 - (2 + i)x$ ,  $\varphi(x) = -\frac{4}{7}x - 1\frac{1}{7}$ ,  $\psi(x) = \frac{2}{7}x^2 + \frac{4}{7}x + \frac{1}{7}$ ;  
 г)  $D(x) = x^3 + (1 - i)x^2 - 1$ ,  $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ,  $\psi(x) = \frac{1}{2}$ .  
 6. а)  $\varphi(x) = -\frac{6}{17}x + \frac{11}{17}$ ,  $\psi(x) = \frac{6}{17}x^2 - \frac{5}{17}x + \frac{25}{17}$ ;  
 б)  $\varphi(x) = -3x + 4$ ,  $\psi(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ;  
 в)  $\varphi(x) = \frac{11}{91}x + \frac{5}{91}$ ,  $\psi(x) = -\frac{11}{91}x + \frac{61}{91}$ ;  
 г)  $\varphi(x) = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$ ,  $\psi(x) = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ .  
 7. а)  $R(f, g) = -26$ ,  $(f(x), g(x)) = 1$ ;  
 б)  $R(f, g) = 252$ ,  $(f(x), g(x)) = 1$ ;  
 в)  $R(f, g) = -256$ ,  $(f(x), g(x)) = 1$ ;  
 г)  $R(f, g) = 0$ ,  $(f(x), g(x)) \neq 1$ .

1. а)  $f(x) = (x-3)(x-7) \in Q[x]$ ; б)  $g(x) = (2x-5)(x+1) \in Q[x]$ ;  
 в)  $h(x) = 3\left(x - \frac{-1+i\sqrt{35}}{6}\right)\left(x + \frac{1+i\sqrt{35}}{6}\right) \in C[x]$ ;  
 г)  $\varphi(x) = (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \in R[x]$ .  
 2. а)  $f(x) = (x^2-2)(x^2-3) \in Q[x]$ ; б)  $g(x)$  неприводим над  $Q$ ;  
 в)  $h(x) = (x+2)(x^2-2x+4) \in Q[x]$ ; г)  $\varphi(x) = (x-1)(x^2+x+1) \in Q[x]$ .  
 3. а)  $D(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(2x + \frac{3}{4}\right)$ ,  $m(x) = (x^2+1)^3 \left(x + \frac{1}{8}\right)^3 \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 (x^2-2) \times$   
 $\times (x^2+x+1)$ ;  
 б)  $D(x) = (x-\sqrt{2})^2$ ,  $m(x) = (x-\sqrt{2})^3 (2x+\sqrt{3})^3 (3x+1)(x^2+1)$ ;  
 в)  $D(x) = (x+1)(x+i)^2$ ,  $m(x) = (x-i\sqrt{2})(x+1)^2(x+i)^2$ ;  
 г)  $D(x) = 1$ ,  $m(x) = (2x^2+x+8)(x-2)^3(3x-1)^2(2x+1)$ .  
 4. а)  $f(x) = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 2(x+1) - 1$ ;  
 б)  $f(x) = 2(x-2)^5 + 20(x-2)^4 + 79(x-2)^3 + 152(x-2)^2 +$   
 $134(x-2) + 46$ ;  
 в)  $f(x) = (x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + (7+5i)$ ;  
 г)  $f(x) = (x-i)^6 + 6i(x-i)^5 - (13+i)(x-i)^4 + (3-11i)(x-i)^3 +$   
 $+ (1+4i)(x-i)^2 - (4+4i)(x-i) + (5-3i)$ .  
 5. а)  $f(2) = 33$ ,  $f'(2) = 45$ ,  $f''(2) = 44$ ,  $f'''(2) = 24$ ;  
 б)  $f(-3) = -14$ ,  $f'(-3) = -90$ ,  $f''(-3) = 176$ ,  $f'''(-3) = -168$ ,  $f^{IV}(-3) =$   
 $= 72$ ; в)  $f(1+2i) = -12 - 2i$ ,  $f'(1+2i) = -16 + 8i$ ,  $f''(1+2i) = -8 +$   
 $+ 30i$ ,  $f'''(1+2i) = 24 + 30i$ ,  $f^{IV}(1+2i) = 24$ ; г)  $f(i) = -2 + 4i$ ,  $f'(i) =$   
 $= 4 + 7i$ ,  $f''(i) = 8 - 2i$ ,  $f'''(i) = 6i$ ,  $f^{IV}(i) = 24$ .  
 6.  $f(2,95) = 162,80614375$ ,  $f(3,2) = 225,2128$ ,  $f(4,99) = 1414,09814503$ ,  
 $f(5,02) = 1450,03324048$ .  
 7. а)  $x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 32x + 13$ ; б)  $2x^6 - 29x^5 + 165x^4 - 449x^3 + 526x^2 -$   
 $- 24x - 311$ ;  
 в)  $x^4 + (4+5i)x^3 + (4+15i)x^2 + (5+35i)x - 21 + 35i$ .  
 8. а)  $\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{3}{(x-2)^4} - \frac{1}{(x-2)^5}$ ;  
 б)  $\frac{1}{(x+5)^2} - \frac{(x+5)^3}{13} + \frac{(x+5)^4}{49} - \frac{40}{(x+5)^5} - \frac{24}{(x+5)^6}$ .  
 9. а)  $D(x) = (x-1)^2(x+1)$ ; б)  $D(x) = (x-1)^2(x+1)$ ;  
 в)  $D(x) = (x-1)^3$ ; г)  $D(x) = (x-1)^3$ .  
 10. а)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ; б)  $f\left(-\frac{3}{2}i\right) = 0$ ;  
 в)  $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ ; г)  $f(-i) = f'(-i) = 0$ .  
 11. а)  $D(x) = (f(x), f'(x)) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ ,  $f(x) = (x-3)^2(x+2)^3$ .  
 $x_{1,2} = 3$ ,  $x_{3,4,5} = -2$ ;  
 б)  $D(x) = x^2 - x - 2$ ,  $f(x) = (x+2)(x^2 - x - 2)$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_{2,3} = -1$ ,  $x_{4,5} = 2$ ;  
 в)  $D(x) = (x+1)^2$ ,  $f(x) = (2x^3 - 1)(x+1)^3$ ,  $x_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ,  
 $x_{2,3} = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm i\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}}}{2\sqrt[3]{4}} = \frac{-\sqrt[3]{4} \pm i\sqrt[3]{432}}{4}$ ,  $x_{4,5,6} = -1$ ;  
 г)  $D(x) = (x+i)^2$ ,  $f(x) = (x-1)(x+i)^3$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_{2,3,4} = -i$ ;  
 д)  $D(x) = (x+i)^3$ ,  $f(x) = (x+2i)(x+i)^4$ ,  $x_1 = -2i$ ,  $x_{2,3,4,5} = -i$ .  
 12. а)  $k = 3$ ; б)  $k = 4$ ; в)  $k = 1$ ; г)  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 1$ .  
 13. а)  $\alpha = -5$ ; б)  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -4$ ; в)  $\alpha = n$ ,  $\beta = -n - 1$ .  
 14. а)  $\lambda = \pm 2$ ; б)  $\lambda = -1$ .

1. а)  $x = 4$ ,  $y = 2$ ; б)  $x = 1$ ,  $y = 2$ ; в)  $x = \frac{19}{13}$ ,  $y = -\frac{4}{13}$ ; г)  $x = 2$ ,  $y = 3$ .

$$2. \text{ а) } 6 - 8i; \text{ б) } 2 + i; \text{ в) } \frac{3 - 5i}{2}; \text{ г) } \frac{2}{65} + \frac{29}{65}i; \text{ д) } \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i;$$

$$\text{е) } 1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \right) i; \text{ ж) } \frac{16 + 3i}{106};$$

$$\text{з) } 1; \text{ и) } -76i; \text{ к) } -556; \text{ л) } 2i^{n-1}.$$

$$3. \text{ а) } x = \pm 1, y = \pm 3 \vee x = \pm \frac{3}{4}, y = \pm 4; \text{ б) } x = 1, y = 2.$$

$$4. \text{ а) } 1; \text{ б) } 6 + 6i.$$

$$5. \text{ а) } \pm (2 + i); \text{ б) } \pm (1 + 4i); \text{ г) } \pm \left( \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} - i \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{13}}{2}} \right).$$

$$6. \text{ а) } x_1 = 2 + i, x_2 = 1 - 3i; \text{ б) } x_1 = 1 + 2i, x_2 = -4 - 2i.$$

$$\text{в) } x_1 = 1 - i, x_2 = \frac{4 - 2i}{5}; \text{ г) } x_1 = 3 - 2i, x_2 = 2 - i.$$

$$7. \text{ а) } z = a \in R; \text{ б) } z = bi, b \in R; \text{ в) } \left\{ 0; 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\};$$

$$\text{г) } \{ 0; i; -i; 1; -1 \}.$$

$$8. \text{ а) } 5(\cos \pi + i \sin \pi); \text{ б) } 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\text{в) } \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right); \text{ г) } 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right);$$

$$\text{д) } \approx 4,12 (\cos 6,0383 + i \sin 6,0383) \approx \sqrt{17} (\cos 345^\circ 58' + i \sin 345^\circ 58');$$

$$\text{е) } \approx 2,23 (\cos 2,6779 + i \sin 2,6779) \approx \sqrt{5} (\cos 153^\circ 26' + i \sin 153^\circ 26');$$

$$\text{ж) } \approx 2,23 (\cos 4,2487 + i \sin 4,2487) \approx \sqrt{5} (\cos 243^\circ 26' + i \sin 243^\circ 26').$$

9. а) Круг радиусом  $r = 3$  и с центром в начале координат. б) Часть плоскости вне круга радиусом  $r = 3$  и с центром в начале координат. в) Открытый круг радиусом  $r = 1$  и с центром в точке  $3i$ . г) Часть плоскости вне круга радиусом  $r = 2$  и с центром в точке  $-3 + 2i$ . д) Луч, выходящий из начала координат под

углом  $\frac{\pi}{2}$  к положительному направлению оси  $OX$ , т. е. положительная полуось

$OY$ . е) Луч, выходящий из начала координат под углом  $310^\circ$  к положительному направлению оси  $OX$ . ж) Эллипс с фокусами в точках  $3$  и  $2i$ , с центром в точке

$\frac{3}{2} + i$ , большая полуось  $a = \frac{7}{2}$ , малая полуось  $b = 3$ . з) Эллипс с фокусами в

точках  $-2i$  и  $4 - i$ , с центром в точке  $2 - \frac{3}{2}i$ , большая полуось  $a = \frac{15}{2}$ , малая

полуось  $b = 2\sqrt{13}$ . и) Гипербола с фокусами в точках  $4$  и  $2i$ , с центром в точке  $2 + i$ , полуось  $a = 2$ , «мнимая» полуось  $b = 1$ .

$$10. \arg \bar{z} = \arg z^{-1}.$$

$$11. \text{ а) } 4096 (1 + i); \text{ б) } 512 (1 - i\sqrt{3}); \text{ в) } -32; \text{ г) } -2 - 2i\sqrt{3}.$$

$$12. \text{ а) } x_k = \cos \frac{\pi(1+4k)}{6} + i \sin \frac{\pi(1+4k)}{6}, k = 0; 1; 2;$$

$$x_{0,1} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, x_2 = -i;$$

$$\text{б) } x_k = \sqrt{2} [\cos (105^\circ + 120^\circ k) + i \sin (105^\circ + 120^\circ k)], k = 0, 1, 2; x_0 \approx -0,365 + 1,362i, x_1 = -1 - i, x_2 \approx 1,362 - 0,365i;$$

$$\text{в) } x_k = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right], k = 0, 1, 2, 3; x_{0,3} = 1 \pm i, x_{1,2} = -1 \pm i;$$

$$\text{г) } x_k = \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5; x_{0,3} = \pm 1,$$

$$x_{1,5} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad x_{2,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{д) } x_k = \sqrt[6]{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k\right) \right] \approx 1,348 [\cos(45^\circ + 60^\circ k) + i \sin(45^\circ + 60^\circ k)], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \quad x_{0,3} \approx \pm (0,954 + 0,954i), \quad x_{1,4} \approx \pm (-0,350 + 1,304i), \quad x_{2,5} \approx \pm (-0,304 + 0,350i); \text{ е) } x_k \approx 0,944 [\cos(47^\circ 30' + 60^\circ k) + i \sin(47^\circ 30' + 60^\circ k)], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \quad x_{0,3} \approx \pm (0,638 + 0,696i), \quad x_{1,4} \approx \pm (-0,284 + 0,901i), \quad x_{2,5} \approx \pm (-0,921 + 0,204i);$$

$$\text{ж) } x_k = \sqrt[4]{0,5} \left( \cos \frac{-285^\circ + 360^\circ k}{2} + i \sin \frac{-285^\circ + 360^\circ k}{2} \right) \approx 0,841 [\cos(37^\circ 30' + 180^\circ k) + i \sin(37^\circ 30' + 180^\circ k)], \quad k = 0; \quad x_{0,1} \approx \pm (0,667 + 0,512i); \quad \text{з) } \sqrt[8]{32} \approx 1,542; \quad x_k \approx 1,542 [\cos(41^\circ 15' + 90^\circ k) + i \sin(41^\circ 15' + 90^\circ k)], \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad x_{0,2} \approx \pm (0,116 + 0,101i), \quad x_{1,3} \approx \pm (-0,101 + 0,116i)$$

$$13. \quad x_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad x'_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{-\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{-\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad x'_{n-k} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{-\varphi + 2\pi(n-k)}{n} + i \sin \frac{-\varphi + 2\pi(n-k)}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} - i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \bar{x}_k.$$

$$14. \quad \omega^k = \omega_k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^n \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0; \quad z \neq 1,$$

$$\sqrt[n]{z} = x_k, \quad x_k = x_0 \omega^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_k = x_0 \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = x_0 \cdot 0 = 0.$$

$$15. \quad \text{Для } \sqrt[n]{z}, z \notin R \text{ неверно.}$$

$$16. \quad \text{а) } -\frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+3)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}; \quad \text{б) } -\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+3)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}; \quad \text{в) } \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$17. \quad \text{а) } 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x; \quad \text{б) } \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x; \quad \text{в) } \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x.$$

## § 5

$$1. \quad \text{а) } f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4; \quad \text{б) } f(x) = x^3 + (-2 + i)x^2 + 2x - 2; \quad \text{в) } f(x) = x^4 + 2x^2 + 1; \quad \text{г) } f(x) = x^5 - (2 + 3\sqrt{2})x^4 + (7 + 6\sqrt{2})x^3 - (12 + 5\sqrt{2})x^2 + (6 + 4\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}; \quad \text{д) } f(x) = 8x^4 - (10 + 16i)x^3 - (5 - 20i)x^2 + (10 - 6i)x - 3; \quad \text{е) } f(x) = x^5 + (-6 + 2i)x^4 + (13 - 10i)x^3 + (-12 + 18i)x^2 + (4 - 14i)x + 4i.$$

$$2. \quad \text{а) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; \quad \text{б) } f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x; \quad \text{в) } f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18; \quad \text{г) } f(x) = 3x^4 - (6 + 12i)x^3 - (15 - 18i)x^2 + (18 + 6i)x - 6i.$$

$$3. \quad \text{а) } f(x) = (x-1)(x+1-i)(x+1+i);$$

$$\text{б) } f(x) = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\text{в) } f(x) = \left(x + 1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right) \left(x + 1 + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right) \times \left(x + 1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right) \left(x + 1 + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right);$$



$$\text{г) } f(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) (x+8);$$

$$\text{д) } f(x) = (x-i)^3 (x+i)^3; \text{ е) } f(x) = (x-2)(x-3)(x-1);$$

$$\text{ж) } f(x) = (x-1)(x+1) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$4. \lambda = -3.$$

$$5. f(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

$$6. p = -(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) = -0 - 0 = 0, r = -[x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)] = -[x_1 x_2 \cdot 0 + x_3 x_4 \cdot 0] = 0.$$

$$7. r^2 = sp^2.$$

$$8. \text{ а) } b_0 = 1, \varphi_1(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \varphi(x) = a_0 \varphi_1(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n; \text{ б) } b_0 = 1, \varphi_1(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \varphi(x) = a_n \varphi_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

9. Если корни  $x_1, x_2, x_3$  образуют геометрическую прогрессию, то  $x_1 x_3 = x_2^2$  или  $x_1 x_2 x_3 = x_2^3$ , т. е.  $x_2^3 = -c$ . Это равнозначно тому, что число  $\sqrt[3]{-c}$  (одно из значений корня) является корнем  $f(x)$ .

## § 6

$$1. \text{ а) } f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5; \text{ б) } f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 20x + 12;$$

$$\text{в) } f(x) = x^5 - 10x^4 + 44x^3 - 108x^2 + 157x - 130; \text{ г) } f(x) = x^{10} - 2x^9 + 4x^8 - 4x^7 + 9x^6 - 10x^5 + 18x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 8x + 8;$$

$$\text{д) } f(x) = x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1129x^2 - 2028x + 2197.$$

$$2. \text{ а) } x_2 = 1 - i, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}; \text{ б) } x_{2,3} = -i, x_4 = i, x_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в) } x_2 = 1 + 2i, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{2}.$$

$$3. \text{ а) } f(x) \text{ неприводим над } R; \text{ б) } f(x) = (x+1)(x^2 - x + 2); \text{ в) } f(x) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4); \text{ г) } f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2);$$

$$\text{д) } f(x) = (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3)(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3);$$

$$\text{е) } f(x) = (x + \sqrt[4]{7})(x + \sqrt[4]{7})(x^2 + \sqrt{7}); \text{ ж) } f(x) = (x^2 + 1)(x + 4 - \sqrt{17})(x + 4 + \sqrt{17}); \text{ з) } f(x) = (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 2); \text{ и) } f(x) = x^5 - 1, x_k = \cos 72^\circ \cdot k + i \sin 72^\circ \cdot k; k = 0, 1, 2, 3, 4; x_0 = 1; x_{1,4} \approx 0,3090 \pm \pm 0,9511i; x_{2,3} \approx -0,8090 \pm 0,5878i; f(x) \approx (x-1)(x^2 - 0,618x + 1,000) \times \times (x^2 + 1,618x + 1,000).$$

$$4. \text{ а) } a_0 = 1, x_n = -1 \in R, x_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \in C, x_{2n-k} = \overline{x_k} =$$

$$= \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n}, k = 1, \dots, n-1; f(x) = (x-1)(x+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} x \pm 1\right) \in R[x];$$

$$\text{б) } x_0 = 1 \in R, x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \in C, x_{2n-k+1} = \overline{x_k} =$$

$$= \cos \frac{2k\pi}{2n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 1, \dots, n;$$

$$f(x) = (x-1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} x + 1\right) \in R[x];$$

$$\text{в) } x_k = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{1+8k}{20} \pi + i \sin \frac{1+8k}{20} \pi\right) \in C, k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$x_{5+k} = \bar{x}_k = \frac{10}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{1+8k}{20} \pi - i \sin \frac{1+8k}{20} \pi \right);$$

$$f(x) = \prod_{k=0}^4 \left( x^2 - 2 \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \frac{1+8k}{20} \pi + \sqrt[5]{2} \right) \in R[x];$$

$$r) x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2+a}}{2} \pm \frac{\sqrt{2-a}}{2} i \in C, x_{3,4} = \bar{x}_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2+a}}{2} \mp \frac{\sqrt{2-a}}{2} i \in C;$$

$$f(x) = (x^2 - \frac{\sqrt{2+a}}{2} x + 1)(x^2 + \frac{\sqrt{2+a}}{2} x + 1) \in R[x];$$

$$д) x_k = \sqrt[n]{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2+6k}{3n} \pi + i \sin \frac{2+6k}{3n} \pi, k=0, \dots, n-1;$$

$$x_{n+k} = \bar{x}_k = \cos \frac{2+6k}{3n} \pi - i \sin \frac{2+6k}{3n} \pi \in C;$$

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( x^2 - 2 \cos \frac{2+6k}{3n} \pi \cdot x + 1 \right) \in R[x].$$

## § 7

$$1. a) y^3 - 9y + 28 = 0; x_1 = -7 \in R; x_2 = -5 + i\sqrt{3}; x_3 = -1 - i\sqrt{3} \in C;$$

$$б) y^3 + 45y - 98 = 0; x_1 = 4 \in R, x_2 = 3 + 4i\sqrt{3}; x_3 = 1 - 4i\sqrt{3} \in C;$$

$$в) y^3 - 6iy + 4 - 4i = 0; x_1 = 2 + i, x_{2,3} = -1 - 2i \in C;$$

$$г) y^3 - 6y + 4 = 0; u_k = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3+8k}{12} \pi + i \sin \frac{3+8k}{12} \pi \right),$$

$$k=0, 1, 2; x_1 = 5, x_2 = 4 - \sqrt{3}, x_3 = 2 + \sqrt{3} \in R.$$

$$2. a) \Delta = \frac{4225}{4}, x_1 = -3 \in R, x_{2,3} = \mp \frac{3}{2} \pm \frac{5i\sqrt{3}}{2} \in C;$$

$$б) \Delta = 196, x_1 = 2 \in R, x_{2,3} = \pm 1 \pm 2i\sqrt{3} \in C;$$

$$в) \Delta = 0; x_1 = -2, x_{2,3} = 1 \in R; г) \Delta = \frac{784}{220}, x_1 = -2 \in R, x_{2,3} = \mp 1 \pm \frac{i\sqrt{3}}{3} \in C;$$

$$д) \Delta = 0; x_1 = 1, x_{2,3} = -\frac{1}{2} \in R; е) \Delta = -18; x_1 = 2\sqrt{3} \cos 41^\circ 46' \approx 2,584,$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} \cos 161^\circ 46' \approx -3,290, x_3 = 2\sqrt{3} \cos 281^\circ 46' \approx 0,706 \in R.$$

$$3. a) \text{Один; б) три; в) три.}$$

$$4. a) y_0 = 0, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$б) 8y^3 + 12y^2 + 70y + 105 = 0, y_0 = -\frac{3}{2}, x = \pm \sqrt{5} \vee x = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2};$$

$$в) y^3 - 2y^2 + 4y - 8 = 0, y_0 = 2, x = \pm 1 \vee x = 1 \pm 2i;$$

$$г) y^3 - 5y^2 + 6y - 2 = 0, y_0 = 1, x = 1 \pm \sqrt{2} \vee x = 1 \vee x = 3;$$

$$д) 2y^3 - y^2 - 1 = 0, y_0 = 1, x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}}{2} \vee x =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} \pm i\sqrt{1 + 2\sqrt{2}}}{2};$$

$$е) y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0, y_0 = 1, x = \pm \sqrt{2} \vee x = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

$$ж) 4y^3 + 2y^2 + 6y + 3 = 0, y_0 = -\frac{1}{2}, x = \pm \sqrt{2} \vee x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$з) 2y^3 - 3y^2 - 2y = 0, y_0 = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$и) y^3 + y^2 + 18y + 18 = 0, y_0 = -1, x = -1 \pm \sqrt{6} \vee x = \pm i\sqrt{3};$$

$$к) y^3 - 2y^2 - 2y + 4 = 0, y_0 = 2, x = \pm i \vee x = 1 \pm i\sqrt{2};$$

$$\text{н) } 2y^3 - 3y^2 + 6y - 5 = 0, y_0 = 1, x = \frac{1 \pm i\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{-3+4\sqrt{3}}}{2}.$$

$$5. \text{ а) } x^4 - 6x^2 + 16x - 15 = 0, y^3 - 12y^2 + 96y - 256 = 0, y_1 = 4, y_{2,3} = 4 \pm 4i \pm \sqrt{3}, x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}, x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6}; z_{1,2} = \pm \sqrt{6}; z_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{6};$$

$$\text{б) } x^4 + 2x^2 + x + 2 = 0; y^3 + 4y^2 - 41y - = 0; y_1 = 1, y_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{21}{4}}; x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7}), x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3});$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{7}), z_{3,4} = \frac{1}{2}(-5 \pm i\sqrt{3});$$

$$\text{в) } x^4 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{49}{16} = 0, y^3 + 7y^2 = 0, x_{1,2} = 0, y_3 = -7;$$

$$x_{1,2} = \frac{i\sqrt{7}}{2}, x_{3,4} = -\frac{i\sqrt{7}}{2}; z_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}, z_{3,4} = -\frac{1 + i\sqrt{7}}{2};$$

$$\text{г) } x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0, y^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0, y_{1,2,3} = 4, x_{1,2,3} = 1, x_4 = -3, z_{1,2,3} = 3; z_4 = -1;$$

$$\text{д) } x^4 - 3x^2 + 4x - \frac{3}{4} = 0, y^3 - 6y^2 + 12y - 16 = 0; y_1 = 4, y_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}, x_{1,2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{6}), x_{3,4} = \frac{1}{2}(2 \pm i\sqrt{2}), z_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, z_{3,4} = \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

## § 8

$$1. \text{ а) } 2, 4, 5; \text{ б) } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \text{ в) } \text{рациональных корней нет}; \text{ г) } 2, 3, 3, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2};$$

$$\text{д) } \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \text{ е) } 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \text{ ж) } -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}; \text{ з) } \text{рациональных корней нет};$$

$$\text{и) } 2, -2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \text{ к) } -3, 4; \text{ л) } -1, 2, -4; \text{ м) } 2, -\frac{1}{3}; \text{ н) } 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2};$$

$$\text{о) } -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ а) } f(x) = (3x + 1)(x - 1); \text{ б) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q; \text{ в) } f(x) = (x - \frac{1}{2})^2; \text{ г) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q; \text{ д) } f(x) = (2x + 1)(5x - 1)(3x + 1);$$

$$\text{е) } f(x) = (3x + 2)(x^2 + x + 1); \text{ ж) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q; \text{ з) } f(x) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 4); \text{ и) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q; \text{ к) } f(x) = (x - 1) \times (x + 1)^2.$$

$$3. \text{ а) } f(x) = (x - 1)^2(x + 3)^2; x_{1,2} = 1, x_{3,4} = -3;$$

$$\text{б) } f(x) = (x - 3)(x + 1)^4; x_1 = 3, x_{2,3,4,5} = -1;$$

$$\text{в) } f(x) = (2x - 1)(3x + 2)(4x - 3)(x^2 + x + 1); x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4};$$

$$\text{г) } f(x) = (x - 2)^3(x^3 - x + 1); x_{1,2,3} = 2.$$

$$4. \text{ а) } p = 3; \text{ б) } p = 5; \text{ в) } p = 7; \text{ г) } p = 7; \text{ д) } x = y + 1, p = 2; \text{ е) } x = y - 2, p = 7.$$

$$5. \text{ а) } f(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1); \text{ б) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q;$$

$$\text{в) } f(x) \text{ неприводим над полем } Q; \text{ г) } f(x) = (x^3 - x - 1)(x^2 + 1).$$

$$7. \text{ а) } f(x) = (x^4 + 9x^2 + 24) + 1 \neq 1 + \varphi^2(x), \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x];$$

$$f(x) = (x^2 + x + 5)(x^2 - x + 5);$$

$$\text{б) } f(x) = (x^2 - x + 4)(x^2 + x + 4);$$

$$\text{в) } f(x) = (3x^2 - x + 2)(3x^2 + x + 2);$$

$$\text{г) } f(x) = (4x^2 - 3x + 1)(4x^2 + 3x + 1).$$

# § 9

1.  $f + g = 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2^2$ ;  $f - g = -4x_1^3 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2^2$ ;  $fg = -4x_1^6 + 8x_1^4x_2 + 16x_1^4x_3 - 16x_1^3x_2^2 - 32x_1^2x_2x_3 + 8x_1x_2^3 + 48x_1x_2^2x_3 - 12x_2^4$ .
2.  $f + g + h = -10x_1 + 10x_2^3$ ;  $(f - g) - h = 6x_1x_2^2x_3 - 14x_1x_2 + 10x_1 + 6x_2^3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ .
3.  $fg = -2\sqrt{3}x_1^2x_2 + \sqrt{6}x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2^2 + x_1x_2 - \sqrt{6}x_2^2 \in R[x_1, x_2]$ .
4. а)  $2x_1^2x_2 - 3\frac{1}{4}x_1x_2x_3 + 3x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3^2 + x_2x_3$ ;  
 б)  $\sqrt{2}x_1x_2x_4 + 4\sqrt{3}x_1x_3x_4 - x_2^2x_3 - 5\sqrt{2}x_2^2x_4 - 3x_2x_3x_4$ ;  
 в)  $-8x_1^2x_2^2 + (4 + 2i)x_1^2x_2 + x_1^2 + 3ix_1x_2^2 - ix_1x_2 + (5 + i)x_2^3$ .
5. а)  $12x_1^4x_2^4x_3$ ;  $n = 9$ ; б)  $-24x_1^5x_2^3$ ;  $n = 9$ ; в)  $(-2 - i)x_1^6x_2^3x_3^2$ ;  $n = 12$ ; г)  $(-3 + 15i)x_1^6x_2^2$ ;  $n = 12$ .
6. а)  $-3x_1^3 - 2x_1^2x_2 - 5x_1x_2x_3$  ( $n = 3$ );  $x_2x_3 - 2x_1^2$  ( $n = 2$ );  $4x_1$  ( $n = 1$ );  $-6$  ( $n = 0$ );  
 б)  $-x^3y - 3x^2y^2$  ( $n = 4$ );  $x^2y - 5xy^2$  ( $n = 3$ );  $x^2 + y^2 - xy$  ( $n = 2$ );  $2$  ( $n = 0$ );  
 в)  $x^3 + y^3 - 3xyz + z^3$  ( $n = 3$ );  $-x^2 - y^2 - xy$  ( $n = 2$ );  $x + y$  ( $n = 1$ );  $7$  ( $n = 0$ );  
 8. а)  $F(x, y) = (3y - x)(x^2 + xy + 2y^2)$ ; б)  $F(x, y) = (x + y)^3(x - 2y)$ .
9. а)  $f(x, y) \sim -x^4$ ; б)  $f(x, y) \sim 0$ .
10. а) Из равенства  $f = (x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)(x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n)$  следовало бы  $a_2 + b_2 = 0$ ,  $a_2b_2 = 1$  — противоречие;  
 б) В случае приводимости  $f$  мы имели бы  $f = (x_1 + \varphi)(x_1^2 + \psi)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — однородные многочлены от  $x_2, \dots, x_n$  степени 1 и 2 соответственно. Отсюда следовало бы  $x_1\psi + x_1^2\varphi = 0$ , т. е.  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ , что невозможно.

# § 10

1. а)  $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 3\sigma_3$ ; б)  $f = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$ ; в)  $f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 2\sigma_3$ ; г)  $f = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2$ ; д)  $f = \sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2$ ; е)  $f = \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ ; ж)  $f = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$ .
2. а)  $f = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$ ; б)  $f = 2\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_2\sigma_3$ ; в)  $f = 6\sigma_1^4 - 24\sigma_1^2\sigma_2 + 24\sigma_1\sigma_3 + 12\sigma_2^2 - 24\sigma_4$ ; г)  $f = 4\sigma_1^2 - 4\sigma_2$ ; д)  $f = 18\sigma_1^2 - 12\sigma_3$ .
3. а)  $-24$ ; б)  $-8\frac{11}{27}$ ; в)  $-7$ ; г)  $-9\frac{1}{2}$ ; д)  $\frac{1}{4}$  (см. 1. а) — е)).
4. а)  $-2$ ; б)  $-24$ ; в)  $84\frac{3}{8}$  (см. 3 а) — в)); г)  $-6$  (см. 2. е)).
5.  $\frac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3} = -3$ . 6.  $f = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3 = -p^3 - 8q$ .
7. а)  $f(x, y) = 10\sigma_1^4\sigma_2 - 40\sigma_1^2\sigma_2^2 + 3\sigma_1\sigma_2^3 - 2\sigma_2^4 + 20\sigma_2^3 - \sigma_2$ ;  
 б)  $f(x, y) = \sigma_1^5\sigma_2^2 - 5\sigma_1^3\sigma_2^3 - \sigma_1^2\sigma_2^3 + 5\sigma_1\sigma_2^4 + 2\sigma_2^4 - 5\sigma_2^3 - 4\sigma_2^2$ ;  
 в)  $f(x, y) = \sigma_1^7\sigma_2 - 7\sigma_1^5\sigma_2^2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^3 - 6\sigma_1^2\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^4 + 18\sigma_1\sigma_2^3 + \sigma_2^6$ .
8. а)  $\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 7 \\ \sigma_1^3 - \sigma_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \{(2, 3); (3, 2)\}$ ;  
 б)  $\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2 = 7 \\ \sigma_1^3 - \sigma_2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12 \end{cases} \{(1, 3); (3, 1); (-5 + i\sqrt{23}, -5 - i\sqrt{23})\}$ ;  
 $\left(\frac{-5 + i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5 - i\sqrt{23}}{2}\right); \left(\frac{-5 - i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5 + i\sqrt{23}}{2}\right)$

- б) I  $x = y \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x^3 = 14x \Leftrightarrow x(x^2 - 7) = 0; \end{cases} M_1 = \{(0, 0); (\sqrt{7}, \sqrt{7}); (-\sqrt{7}, -\sqrt{7})\};$
- II  $x = -y \Rightarrow \begin{cases} 2x^3 = 38x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x^2 - 19) = 0; M_2 = \{(0, 0); (\sqrt{19}, -\sqrt{19}); (-\sqrt{19}, \sqrt{19})\};$
- III  $x \neq \pm y \Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 19 \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \vee$   
 $\vee \begin{cases} x + 5 = -5; \\ xy = 6 \end{cases} M_3 = \{(2, 3); (3, 2); (-2, -3); (-3, -2)\}.$   
 $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (0, 0), (\sqrt{7}, \sqrt{7}), (-\sqrt{7}, -\sqrt{7}), (\sqrt{19}, -\sqrt{19}), (-\sqrt{19}, \sqrt{19}), (2, 3), (3, 2), (-2, -3), (-3, -2);$
- г)  $\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 49 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 931 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 15 \end{cases} \{(3, 5), (5, 3), (-3, 5), (-5, -3)\}.$
9. а)  $z = -y \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 = 2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ xz = 0; \end{cases} \{(2, 0), (0, -2)\};$
- б)  $z = x^2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 = 5 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + y = 5 \\ zy = 4; \end{cases} \{(2, 1), (-2, 1), (1, 4), (-1, 4)\};$
- в)  $\begin{cases} z = \sqrt[3]{x}, \\ u = \sqrt[3]{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + u = 3 \\ z^3u^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + u = 3 \\ zu = 2 \end{cases} \{(8, 1), (1, 8)\}.$
10. а)  $y = \sqrt{17 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 + \sigma_2 = 9 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \{(4, 1);$   
 б)  $y = \sqrt{1 - x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{35}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{7}{5} \\ xy = \frac{12}{25} \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -\frac{5}{7} \\ xy = -\frac{12}{49}, \end{cases}$   
 $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{-5 - \sqrt{73}}{14} \right\}.$
11.  $x^2 + 36x + 1000 = 0, a = 1.$
12.  $\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 31, \\ \sigma_1 = 1. \end{cases} x^2 - x + 3 = 0, x^2 - x - 2 = 0, a = 1$
13.  $f = x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = (a - 1)^2 + 5, f_{\min} = 5, a = 1.$
14. а)  $f(x, y) = 2\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2)(2\sigma_1^2 + \sigma_2) = (2x + y)(x + 2y)(x^2 + xy + y^2);$   
 б)  $f(x, y) = 2\sigma_1^4 - 9\sigma_1^2\sigma_2 + 7\sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2)(2\sigma_1^2 - 7\sigma_2) = (x^2 + xy + y^2) \times$   
 $\times (2x^2 - 5xy + 2y^2);$   
 в)  $f(x, y) = 18\sigma_1^4 - 93\sigma_1^2\sigma_2 - 16\sigma_2^2 = (3\sigma_1^2 - 16\sigma_2)(6\sigma_1^2 + \sigma_2) = (x - 3y) \times$   
 $\times (3x - y)(3x + 2y)(2x + 3y);$   
 г)  $f(x, y) = (3x^2 - 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + 3y^2).$

## § 11

1. а)  $R(x) = 5yx + (y^2 + 3); 41y^4 + y^2 - 9 = 0;$   
 б)  $R(x) = 2y^2x + (-y^3 + 3y - 6); y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12 = 0;$   
 в)  $R(x) = (y^2 - y + 2)x + (-y^3 - y^2 + y - 1); 5y^5 - 7y^4 + 6y^3 - 2y^2 - y - 1 = 0;$   
 г)  $R(x) = -4x^2 + 17x + (-14 + y); R_1(x) = (1 + 4y)x + (2 - 7y); y^3 + 4y^2 - y - 4 = 0.$

2. а)  $R(x) = (-7y + 5)x + (5y^2 + 5y - 12)$ ;  $y^4 - y^3 - 3y^2 + y + 2 = 0$ ;  $\{(-1, 1), (1, -1), (2, 2)\}$ ; б)  $R = 10y^3 + y^2 - 11 = 0$ ;  $\{(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)\}$ .  
 3.  $\frac{1}{2}R = x^3 - x^2 - 2x = 0$ ;  $\{(0, 3), (0, 1), (2, 1 + i\sqrt{2}), (2, 1 - i\sqrt{2}), (-1, 2), (-1, 3)\}$ .  
 4. а)  $y^4 - y^3 - 3y^2 + y + 2 = 0$ ;  $\{(-1, 1), (1, -1), (2, 2)\}$ ; б)  $x^2(x+1)^2(x-2)^2 = 0$ ;  $\{(-1, 2), (-1, 3), (0, 3), (0, 1), (2, 1 + i\sqrt{2}), (2, 1 - i\sqrt{2})\}$ .

## § 12

1. а)  $p(x) = x - 1$ ; б)  $p(x) = x^2 + 1$ ; в)  $p(x) = x^2 + 2x + 4$ ; г)  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 31$ ; д)  $p(x) = x^4 - 2x^2 - 7$ , неприводимость  $p(x)$  над полем  $Q$  вытекает из того, что  $p(x)$  не имеет корней в  $Q$ , а также из результата задачи 6 на с. 77; е)  $p(x) = x^4 + 2x^2 + 25$  (см. снова задачу 6 на с. 77); ж)  $p(x) = x^8 - 2x^4 - 1$ , неприводимость  $p(x)$  устанавливается с помощью критерия Эйзенштейна, примененного к многочлену  $p(x+3)$  (в качестве простого  $p$  следует взять число 2); з)  $p(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 12$ ; и)  $p(x) = x^4 + 1$ ; к)  $p(x) = x^3 + 1$ .  
 2. а)  $(x) = x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 4x^5 - 80x^4 - 80x^3 + 80x^2 - 28$ ;  
 б)  $f(x) = 1024x^{10} + 1280x^8 + 640x^6 - 4096x^5 + 320x^4 + 10240x^3 + 20x^2 - 1280x + 4097$ ;  
 в)  $f(x) = x^{10} + 10x^8 + 40x^6 - 4x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 80x^2 - 80x + 36$ .

3 Пусть  $p(x)$  — минимальный многочлен числа  $\alpha$ . Тогда многочлен  $q(x) = p\left(\frac{x}{i}\right)$  будет иметь своим корнем число  $\beta = i\alpha$ . Пусть  $q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$ , где  $q_1(x), q_2(x) \in Q[x]$ . Имеем:  $q_1(\beta) + iq_2(\beta) = 0$ , или  $q_1^2(\beta) = -q_2^2(\beta)$ ; следовательно,  $\beta$  является корнем многочлена  $q_1^2(x) + q_2^2(x)$ .

6. а) Да; б) Нет,  $p_1(x) = x^3 - 5$ ,  $p_2(x) = x^3 + 5$ ; в), г), д) Да.

7. а)  $-\sqrt{5}$ ; б)  $\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{5}$ ; в)  $-\sqrt[4]{5}, \pm i\sqrt[4]{5}$ ;

г)  $-\sqrt{5} + i, \sqrt{5} \pm i$ ; д)  $\pm\sqrt{5} + i\sqrt{2}, -\sqrt{5} - i\sqrt{2}$ ,

е)  $-\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}{2} \pm i\frac{\sqrt[6]{81+54\sqrt{2}}}{2}$ ;

ж)  $\alpha_{k+1} = \cos \frac{5+2k}{8}\pi + i \sin \frac{5+2k}{8}\pi$ ;  $k = 1, \dots, 7$ .

8.  $\sqrt[4]{1} = \alpha_k, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = i, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -i$ ;  $\alpha = i$ ;  $\beta = -i$ ,  $p_{\alpha+\beta}(x) = x$ ;  $\alpha^* = -i$ ,  $\beta^* = -1$ ,  $p_{\alpha+\beta}(\alpha^* + \beta^*) = -i - 1 \neq 0$ , следовательно,  $\alpha^* + \beta^*$  не сопряжено  $\alpha + \beta$ .

9. См. для иллюстрации задачу 10 на с. 109.

10. Минимальным многочленом числа  $\alpha + \beta$  будет многочлен  $f(x)$ , составленный по образцу задачи 10 на с. 109; его корнями служат всевозможные суммы  $\alpha^* + \beta^*$ .

11.  $\alpha_1 \in R \Leftrightarrow Q(\alpha_1) \subset R \Leftrightarrow \alpha_2 \notin Q(\alpha_1)$ . В то же время  $\alpha_1, \alpha_3 \in Q(\alpha_2)$ .

12. Нет; нет.

13. Равенство  $\sqrt[3]{12} = p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ ,  $p \in Q, q \in Q$ , после возведения обеих частей в куб приводит к противоречию.

14. а)  $\alpha^0 = 1, \alpha = \sqrt[3]{5}, \alpha^2 = \sqrt[3]{25}$  — базис  $Q(\alpha)$ ;  $\beta_1 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2, \beta_2 = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 \Rightarrow \beta_1\beta_2 = (a_0b_0 + 5a_1b_2 + 5a_2b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0 + 5a_2b_2)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2$ ;  
 б) 1,  $i$  — базис  $Q(\alpha)$ ;  $\beta_1 = a_0 + a_1i, \beta_2 = b_0 + b_1i \Rightarrow \beta_1\beta_2 = (a_0b_0 - a_1b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0)i$ ;

в)  $\alpha^2 = 1$ ,  $\alpha = \sqrt{2}(1+i)$ ,  $\alpha^2 = 4i$ ,  $\alpha^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$  — базис  $Q(\alpha)$ ;  $\beta_1 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$ ,  $\beta_2 = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3 \Rightarrow \beta_1\beta_2 = (a_0b_0 - 16a_1b_3 - 16a_2b_2 - 16a_3b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0 - 16a_2b_3 - 16a_3b_2)\alpha + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 - 16a_3b_3)\alpha^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\alpha^3$ ;  
 г)  $\gamma^2 = 1$ ,  $\gamma = i\sqrt[4]{3}$ ,  $\gamma^2 = -\sqrt{3}$ ,  $\gamma^3 = i\sqrt[4]{27}$  — базис  $Q(\alpha)$ .

15. а)  $-\sqrt[4]{8} + 2\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} + 1$ ;

б)  $-11\sqrt[4]{343} + 18\sqrt[4]{7} - 29\sqrt[4]{7} + 48$ .

16. а)  $\frac{1}{13}(6\alpha^3 - 9\alpha + 8)$ ; б)  $\frac{1}{17}(2\alpha^3 - \alpha^2 - 8\alpha + 8)$ ;

в) Нельзя освободиться от  $\alpha$  в знаменателе, так как знаменатель обращается в нуль при одном из корней уравнения:  $\varphi(-2) = p(-2) = 0$ .

17. а)  $y^3 - 7y^2 + 3y - 1 = 0$ ; б)  $y^3 - 2y^2 + 6y - 4 = 0$ ; в)  $y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$ .

18. а)  $g(x) = x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 19$ ;

б)  $g(x) = x^6 - 15x^4 - 4x^3 + 75x^2 - 60x - 121$ ;

в)  $g(x) = x^6 + 6x^5 + 23x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 28x + 17$ .

### § 13

1. См. задачу 1 на с. 112. 2. См. задачу 2 на с. 113.

2. а)  $\sqrt[3]{3} = \frac{\theta^3 - 9\theta + 6}{3\theta^2 + 3}$ ,  $\sqrt[3]{6} = \theta - \sqrt[3]{3}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}$ ;

б)  $\sqrt[3]{7} = \frac{\theta^3 + 21\theta - 4}{3\theta^2 + 7}$ ,  $\sqrt[3]{4} = \theta - \sqrt[3]{3}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4}$ ;

в)  $\sqrt[3]{8} = \frac{\theta^3 + 24\theta - 3}{3\theta^2 + 8}$ ,  $\sqrt[3]{3} = \theta - \sqrt[3]{8}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}$ .

3. См. задачу 1 на с. 112.

4. а)  $\sqrt[3]{3} = \frac{\theta^4 - \theta}{2\theta^3 + 10}$ ,  $\sqrt[3]{7} = \theta - \sqrt[3]{3}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}$ ;

б)  $\sqrt[3]{5} = \frac{\theta^4 - 2\theta}{2\theta^3 + 17}$ ,  $\sqrt[3]{12} = \theta - \sqrt[3]{5}$ , где  $\theta = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{12}$ .

5. Воспользоваться формулой (4) на с. 114, приняв за  $P_1, P_2, P_3$  поля  $Q, Q(\gamma),$

$Q(\alpha)$ . В случае  $\alpha = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$  имеем степень  $\alpha = 10$ , поэтому для чисел  $\gamma \in Q(\alpha)$  возможны степени 1, 2, 5, 10.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава I. Многочлены от одной переменной . . . . .	4
§ 1. Кольцо многочленов над областью целостности и над полем. Корни многочлена . . . . .	—
§ 2. Деление в кольце многочленов. НОД и НОК многочленов . . . . .	13
§ 3. Разложение на неприводимые множители . . . . .	26
Глава II. Многочлены над основными числовыми полями . . . . .	39
§ 4. Комплексные числа . . . . .	—
§ 5. Многочлены над полем $C$ . . . . .	54
§ 6. Многочлены над полем $R$ . . . . .	57
§ 7. Решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах . . . . .	62
§ 8. Многочлены над полем $Q$ . . . . .	69
Глава III. Многочлены от нескольких переменных . . . . .	80
§ 9. Кольцо $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ многочленов от $n$ переменных . . . . .	—
§ 10. Симметрические многочлены . . . . .	85
§ 11. Решение системы двух уравнений высших степеней с двумя неизвестными . . . . .	95
Глава IV. Алгебраические числа и расширения полей . . . . .	100
§ 12. Минимальный многочлен алгебраического числа. Строение простого алгебраического расширения поля. Со- пряженные алгебраические числа . . . . .	—
§ 13. Составное (повторное) алгебраическое расширение поля . . . . .	111
Ответы . . . . .	115



МГЭПИ

**Александр Самуилович Солодовников  
Маргарита Александровна Родина**

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ**

**Часть IV**

**Н/К**

**Зав. редакцией Р. А. Хабиб**

**Редактор Т. В. Автономова**

**Младшие редакторы Н. Т. Протасова, Т. А. Феоктистова**

**Художественный редактор Е. Н. Карасик**

**Технический редактор С. Н. Терехова**

**Корректор Р. Б. Штутман**

Сдано в набор 05.10.84. Подписано к печати 19.02.85. Формат  $60 \times 90^{1/16}$ . Бум. типограф. № 2. Гарнит. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8. Усл. кр. отт. 8,25. Уч.-изд. л. 7,86. Тираж 27000 экз. Заказ 937. Цена 25 коп. Заказное.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавополиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.