



**В. А. ПЕТРОВ,  
Н. Я. ВИЛЕНКИН,  
М. И. ГРАЕВ**

**ЭЛЕМЕНТЫ  
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ**



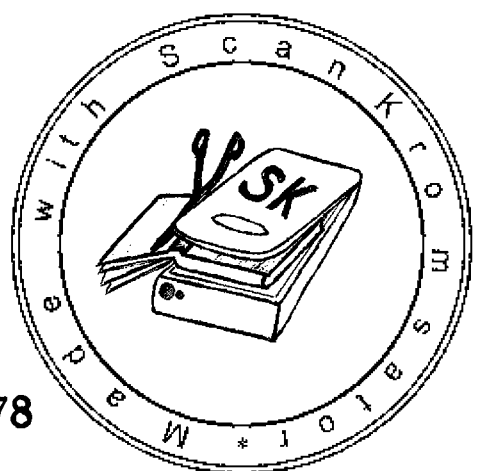
МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный  
педагогический институт

В. А. ПЕТРОВ,  
Н. Я. ВИЛЕНКИН,  
М. И. ГРАЕВ

# ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ

*Задачник-практикум для студентов-заочников  
IV курса физико-математических факультетов  
педагогических институтов*



МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

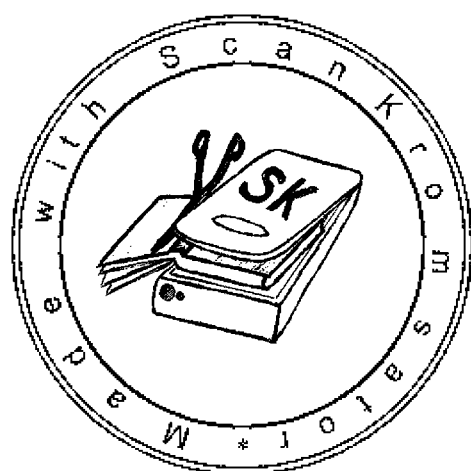


Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ — *О. А. Павлович.*

Рецензенты: *А. Г. Мордкович, А. С. Симонов,  
Л. М. Лихтарников*

П  $\frac{60602-548}{103(03)-78}$  заказное



© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ), 1978 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном задачнике рассматриваются разделы курса математического анализа «Мощность множества» и «Элементы функционального анализа», которые не освещены в существующей учебной литературе для студентов-заочников.

Пособие существенно отличается от традиционного задачника-практикума. Авторы стремились дать студенту-заочнику единую компактную книгу, в которой он мог бы найти и краткое изложение (петит и ряд задач-теорем с решениями) предусмотренного программой теоретического материала, и образцы решения различных упражнений, и большое число задач для самостоятельного решения.

При решении задач студент может использовать утверждение любой предыдущей (но не последующей) задачи.

Иногда материал задачника выходит за рамки программы. Этим преследовалась цель — дать материал для курсовых работ или спецсеминаров. Более сложные задачи отмечены звездочкой.

В пособии отражен опыт работы авторов со студентами-заочниками в Московском заочном и Смоленском педагогических институтах. Первоначальный вариант книги был написан В. А. Петровым, а последующая доработка осуществлялась им совместно с Н. Я. Виленкиным и М. И. Граевым, которым принадлежат часть задач пояснительного текста и ряд предложений, касающихся порядка изложения материала.

При рассмотрении топологических понятий авторы использовали некоторые методические идеи (в частности, использование понятия граничной точки для определения открытых и замкнутых множеств) М. Б. Балка, которому выражают глубокую благодарность за разрешение воспользоваться этими идеями.

## § 1 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Отображением множества  $A$  в множество  $B$  называется соответствие  $f$ , относящее каждому элементу из  $A$  единственный элемент из  $B$ . Запись  $f: A \rightarrow B$  означает, что  $f$  является отображением  $A$  в  $B$ .

Элемент из  $B$ , соответствующий заданному элементу  $x \in A$ , называется *образом*  $x$  при отображении  $f$ . Множество всех элементов из  $A$ , имеющих образом один и тот же элемент  $y \in B$ , называется *прообразом*  $y$  при отображении  $f$  и обозначается через  $f^{-1}(y)$ .

1.1. Задаёт ли функция  $x \rightarrow \operatorname{tg} x$  отображение множества действительных чисел в себя?

1.2. Пусть  $A$  — множество оценок  $\{2, 3, 4, 5\}$ ,  $B$  — множество студентов, сдававших экзамен по математическому анализу. Поставим в соответствие каждому студенту полученную им оценку, и обратно: каждой оценке получивших её студентов. Задано ли отображение а)  $f: A \rightarrow B$ ; б)  $\varphi: B \rightarrow A$ ?

1.3. Задайте какое-нибудь отображение множества  $A$  в  $B$  и какое-нибудь отображение  $B$  в  $A$ :

а)  $A$  — множество жителей города  $C$ ;  $B$  — множество действительных чисел;

б)  $A$  — множество функций, непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$ ;  $B$  — множество действительных чисел;

в)  $A$  — множество точек интервала  $] -1, 1[$ ;  $B$  — множество точек прямой;

г)  $A$  — множество точек окружности;  $B$  — множество точек прямой;

д)  $A$  — множество точек прямой,  $B$  — множество точек плоскости.

1.4. Докажите, что существует более миллиона различных отображений множества  $A$  первых двадцати натуральных чисел во множество  $B$ , состоящее из двух чисел 0 и 1.

Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *инъективным* (или *инъекцией*), если для любого  $y \in B$  его прообраз  $f^{-1}(y)$  есть либо пустое множество, либо состоит из одного элемента.

Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *сюръективным* (или *сюръекцией*, *отображением на*), если для любого  $y \in B$  его прообраз  $f^{-1}(y)$  есть непустое множество.

Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *биективным* (или *биекцией*, *взаимно-однозначным отображением*), если оно инъективно и сюръективно.

1.5. Докажите, что сформулированные выше определения эквивалентны следующим:

а) отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *инъективным*, если для любых двух элементов  $x \in A$  и  $x' \in A$  из  $x \neq x'$  следует, что  $f(x) \neq f(x')$ ;

б) отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *биективным*, если для любого  $y \in B$  его прообраз  $f^{-1}(y)$  состоит в точности из одного элемента.

В задачах 1.6—1.20 покажите, что  $f$  является отображе-

нием  $A$  в  $B$ . Для каждого из отображений установите, является ли оно сюръекцией, инъекцией или биекцией.

1.6.  $A$  — множество русских слов,  $B$  — множество букв русского алфавита; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому слову букву, с которой оно начинается.

1.7.  $A = B$  — множество действительных чисел; отображение  $f: A \rightarrow B$  определяется формулой а)  $f(x) = \sin x$ ; б)  $f(x) = 2^x$ ; в)  $f(x) = x^3 - 3x$ ; г)  $f(x) = x^3$ .

1.8. Отображение  $f: A \rightarrow B$  определяется формулой  $f(x) = x^2$ , где а)  $A$  — отрезок  $[-2, 4]$ ,  $B$  — отрезок  $[0, 16]$ ; б)  $A$  — отрезок  $[2, 4]$ ,  $B$  — отрезок  $[4, 16]$ .

1.9.  $A$  — множество функций, непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$ ;  $B$  — множество действительных чисел; отображение  $f: A \rightarrow B$  каждой функции  $y(x)$  сопоставляет число  $\int_{-1}^1 y(x) dx$ .

1.10.  $A = B$  — множество функций, бесконечно дифференцируемых на  $[-1, 1]$ ;  $f: A \rightarrow A$  каждой функции  $y(x)$  сопоставляет ее производную  $y'(x)$ .

1.11.  $A$  — множество всех окружностей, а  $B$  — множество всех точек плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждой окружности ее центр.

1.12.  $A$  — множество всех окружностей радиуса 1, а  $B$  — множество всех точек плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждой окружности ее центр.

1.13.  $A$  — множество всех окружностей на плоскости, а  $B$  — множество всех действительных чисел; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждой окружности длину ее радиуса.

1.14.  $A$  — множество всех окружностей на плоскости с центром в фиксированной точке  $O$ ,  $B$  — множество всех действительных чисел; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждой окружности длину ее радиуса.

1.15.  $A$  — множество всех квадратов,  $B$  — множество всех окружностей на плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому квадрату вписанную в него окружность.

1.16.  $A$  — множество всех правильных треугольников,  $B$  — множество всех окружностей на плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому треугольнику вписанную в него окружность.

1.17.  $A$  — множество всех квадратов, одна из сторон каждого из которых параллельна некоторой фиксированной прямой, а  $B$  — множество всех окружностей на плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому квадрату из  $A$  описанную вокруг него окружность.

1.18.  $A$  — множество всех правильных треугольников, стороны каждого из которых параллельны сторонам фиксированного правильного треугольника;  $B$  — множество всех окружностей на плоскости; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому треугольнику из  $A$  описанную вокруг него окружность.

1.19.  $A$  — множество квадратных уравнений вида  $x^2 + ax - b = 0$

( $a > 0, b > 0$ );  $B$  — множество положительных чисел; отображение  $f: A \rightarrow B$  сопоставляет каждому уравнению из  $A$  его положительный корень.

1.20.  $A$  — множество точек квадрата  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ ,  $B$  — множество точек интервала  $]0, 1[$ ; отображение  $f: A \rightarrow B$  определяется так: координаты каждой точки  $M \in A$  записываются в виде существенно бесконечной<sup>1</sup> десятичной дроби:  $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ ,  $y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ . Точке  $M \in A$  сопоставляется точка  $z = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots \in B$ .

1.21. Задайте какое-нибудь инъективное отображение  $f$  и какое-нибудь сюръективное отображение  $\varphi$  множества  $A$  в  $B$ , где

- а)  $A$  — прямая,  $B$  — луч  $[0, \infty[$ ;
- б)  $A$  — луч  $] -\infty, 0]$ ;  $B$  — прямая;
- в)  $A$  — отрезок  $[0, 1]$ ;  $B$  — интервал  $]1, 2[$ ;
- г)  $A$  — окружность;  $B$  — прямая.

1.22. Задайте какое-нибудь инъективное, но не сюръективное отображение  $f: A \rightarrow B$ , где  $A$  и  $B$  такие же множества, как в случаях а), б), в), г) предыдущей задачи.

1.23. Задайте какое-нибудь сюръективное, но не инъективное отображение  $f: A \rightarrow B$ , где  $A$  и  $B$  такие же множества, как в случаях а), б), в), г) задачи 1.21.

1.24. Множество  $A$  состоит из трех элементов, а множество  $B$  — из двух элементов. Сколько существует а) инъекций  $A$  в  $B$ ; б) сюръекций  $A$  в  $B$ ; в) инъекций  $B$  в  $A$ ; г) сюръекций  $B$  в  $A$ ?

1.25. Множество  $A$  состоит из 6 элементов. Покажите, что существует ровно 720 различных сюръекций  $A$  в  $A$ .

1.26. (Задача-шутка.) а) Как-то в гости к математику  $X$  пришли его друзья  $N$ . В передней они сняли шляпы и повесили на вешалку. Когда гости собрались уходить и стали надевать шляпы, то оказалось, что одной шляпы не хватает. В переднюю за это время никто не заходил.

б) В свой следующий приход к  $X$  гости снова повесили шляпы на вешалке в передней. Когда они, уходя, надели шляпы, одна оказалась лишней. Хозяин и гости твердо помнили, что до их прихода на вешалке не было ни одной шляпы.

в) После еще одного очередного посещения  $X$  гости надели шляпы и ушли, а хозяин, проводив гостей, обнаружил, что шляп на вешалке оказалось столько же, сколько было до ухода гостей.

г) Наконец, в четвертый раз гости пришли без шляп, а уходя, воспользовались шляпами, оставшимися от прошлого посещения. Проводив гостей, хозяин опять увидел шляпы на вешалке, — столько же, сколько было до прихода гостей.

Как объяснить все эти парадоксальные события?

Пусть  $A, B, C$  — три множества,  $f$  отображение  $A$  в  $B$ , а  $g$  — отображение  $B$  в  $C$ . Отображение  $h: A \rightarrow C$ , определяемое формулой  $h(x) = g(f(x))$ , называется *композицией* отображений  $g$  и  $f$  и обозначается  $g \circ f$ .

<sup>1</sup> Дробь называется существенно бесконечной, если для нее нуль не является периодом.

1.27. Докажите, что если отображение  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  инъективны, то и композиция  $g \circ f: A \rightarrow C$  инъективна.

1.28. Докажите, что если отображения  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  сюръективны, то и композиция  $g \circ f: A \rightarrow C$  сюръективна.

1.29. Докажите, что если отображение  $f: B \rightarrow C$  инъективно, то для любого множества  $A$  и любых двух отображений  $\varphi: A \rightarrow B$  и  $\psi: A \rightarrow B$  из того, что  $f \circ \psi = f \circ \varphi$ , следует, что  $\varphi = \psi$ .

1.30. Пусть  $f: B \rightarrow C$  такое отображение, что для любого множества  $A$  и любых двух отображений  $\varphi: A \rightarrow B$  и  $\psi: A \rightarrow B$  из того, что  $f \circ \varphi = f \circ \psi$ , следует, что  $\varphi = \psi$ . Докажите, что  $f$  — инъективное отображение.

1.31. Докажите, что если отображение  $f: A \rightarrow B$  сюръективно, то для любого множества  $C$  и любых двух отображений  $\varphi: B \rightarrow C$  и  $\psi: B \rightarrow C$  из того, что  $\varphi \circ f = \psi \circ f$ , следует, что  $\varphi = \psi$ .

1.32. Пусть  $f: A \rightarrow B$  такое отображение, что для любого множества  $C$  и любых двух отображений  $\varphi: B \rightarrow C$  и  $\psi: B \rightarrow C$  из того, что  $\varphi \circ f = \psi \circ f$ , следует, что  $\varphi = \psi$ . Докажите, что  $f$  — сюръективное отображение.

1.33. Постройте биективное отображение множества чисел из интервала  $]0, 1[$  на множество чисел из интервала  $]0, a[$ .

*Решение 1.* Пусть  $A$  — множество чисел из интервала  $]0, 1[$ ,  $B$  — множество чисел из интервала  $]0, a[$ . Рассмотрим отображение  $f$ , полагая  $f(x) = ax$ .

Если  $x$  принадлежит интервалу  $]0, 1[$ , то  $f(x)$  принадлежит интервалу  $]0, a[$ ; следовательно,  $f$  отображает  $A$  в  $B$ .

Отображение  $f$  инъективно, так как из  $x \neq x'$  следует  $ax \neq ax'$ , т. е.  $f(x) \neq f(x')$ .

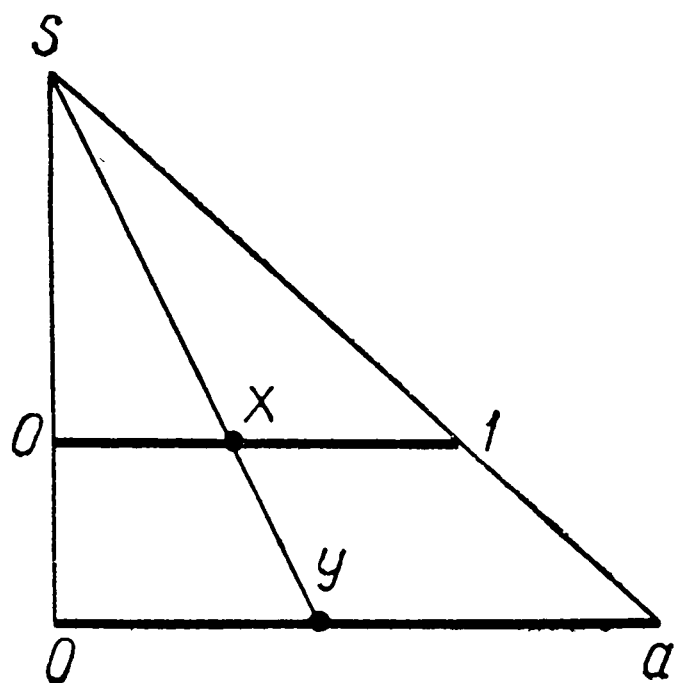
Отображение  $f$  сюръективно, так как любой элемент  $y \in B$  является образом элемента  $x = \frac{y}{a}$  из  $A$ .

Следовательно, отображение  $f$  биективно.

*Решение 2 (геометрическое).* Расположим интервалы  $]0, 1[$  и  $]0, a[$  на двух параллельных прямых в плоскости. Проведем прямые через начальные и конечные точки этих интервалов (см. рис. 1). Так как интервалы имеют различную длину, то эти прямые пересекаются в некоторой точке  $S$ . Отнесем каждой точке  $x$  первого интервала точку  $y$  пересечения второго интервала с прямой  $Sx$ . Полученное отображение биективно (почему?).

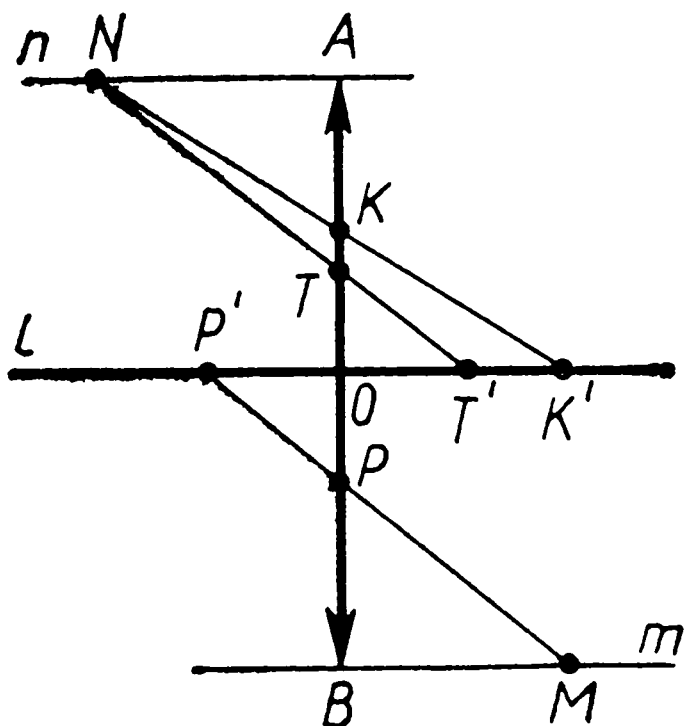
1.34. Постройте биективное отображение интервала  $I = ]0, 1[$  на множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

*Решение 1.* Зададим отображение  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , полагая  $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$ . Это отображение сюръективно, так

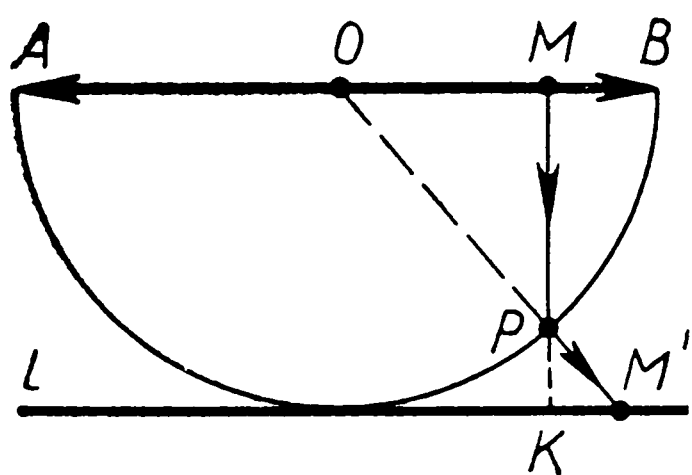


Р и с. 1





Р и с. 2



Р и с. 3

как уравнение  $\operatorname{ctg} \pi x = y$  имеет решение  $x \in ]0, 1[$  при любом  $y$ . Инъективность данного отображения вытекает из монотонности котангенса. Таким образом, построенное отображение биективно.

**Решение 2.** С геометрической точки зрения нам требуется построить биективное отображение интервала  $]AB[$  длины 1 в прямую.

Расположим интервал  $]AB[$  и прямую ( $l$ ) так, как показано на рисунке 2. Через точки  $A$  и  $B$  проведем вспомогательные прямые  $m$  и  $n \parallel l$ . На прямой  $n$  выберем произвольную точку  $N$  левее  $A$ , а на прямой  $m$  точку  $M$  правее  $B$ . Любой точке  $K \in ]OA[$  сопоставим точку  $K' = [NK) \cap l$ , любой точке  $P \in ]OB[$  сопоставим точку  $P' = [MP) \cap l$ , а точке  $O \in ]AB[$  сопоставим ту же точку  $O \in l$ .

Таким образом, построено отображение интервала  $]AB[$  в прямую  $l$ . Ясно, что это биективное отображение. Чтобы найти прообраз точки  $T' \in l$ , лежащей правее точки  $O$  (ле-

вее точки  $O$ ), надо соединить ее с точкой  $N$  ( $M$ ) и взять  $T = [T'N[ \cap ]AB[$  ( $T = [T'M[ \cap ]AB[$ ).

**Решение 3.** Проведем окружность радиусом, равным половине длины данного интервала, касающуюся данной прямой  $l$  (см. рис. 3). Расположим наш интервал так, чтобы он был диаметром построенной окружности, параллельным прямой  $l$ .

Пусть  $M \in ]AB[$ . Проведем  $[MK) \perp l$  и отметим точку  $P$  пересечения  $[MK)$  с окружностью. Через точку  $P$  и центр окружности  $O$  проведем прямую. Точку  $M' = (OP) \cap l$  и назовем образом  $M$ .

Построено отображение интервала  $]AB[$  в прямую  $l$ . Оно, очевидно, биективное. Для отыскания прообраза любой точки прямой следует указанные построения провести в обратном порядке.

**1.35.** Постройте биективное отображение круга радиуса  $r$  на круг радиуса  $R$  ( $R > r$ ).

**Решение 1.** Расположим данные круги на плоскости так, чтобы они стали концентрическими. Тогда искомой биекцией является гомотетия  $H_O^k$ , где  $k = \frac{R}{r}$ , а  $O$  — общий центр кругов.

**Решение 2.** Рассмотрим прямой конус, основание которого — больший из данных кругов, и разрежем его плоскостью так, чтобы в сечении получился другой из наших кругов. Проецирование из

вершины конуса сечения на основание и задает искомое отображение (см. рис. 4).

В задачах 1.36—1.46 требуется построить биективное отображение одного из данных множеств на другое.

1.36. Интервал  $]0, 1[$  и луч  $]0, \infty[$ .

1.37. Луч  $]0, \infty[$  и прямая.

1.38. Произвольная окружность и контур произвольного треугольника.

1.39. Хорда окружности и большая из дуг, стягиваемых этой хордой.

1.40. Отрезок  $[CD]$  и интервал  $]AB[$ .

*Решение.* Расположим данные интервал  $]AB[$  и отрезок  $[CD]$  (см. рис. 5) так, чтобы некоторая прямая  $l$  была их осью симметрии. Построим на  $]AB[$  последовательность точек  $P_1, P_2, P_3 \dots$  так, что  $|AP_1| = |P_1B|$ ,  $|P_1P_2| = |P_2B|$ ,  $|P_2P_3| = |P_3B|$ , и т. д.

Допустим, что  $|AB| \neq |CD|$ . Тогда существует точка  $S = (AC) \cap (BD)$ . Построим теперь последовательность точек на  $[CD]$ :  $T_1 = [CD] \cap [SP_1]$ ,  $T_2 = [CD] \cap [SP_2]$ ,  $T_3 = [CD] \cap [SP_3]$  и т. д.

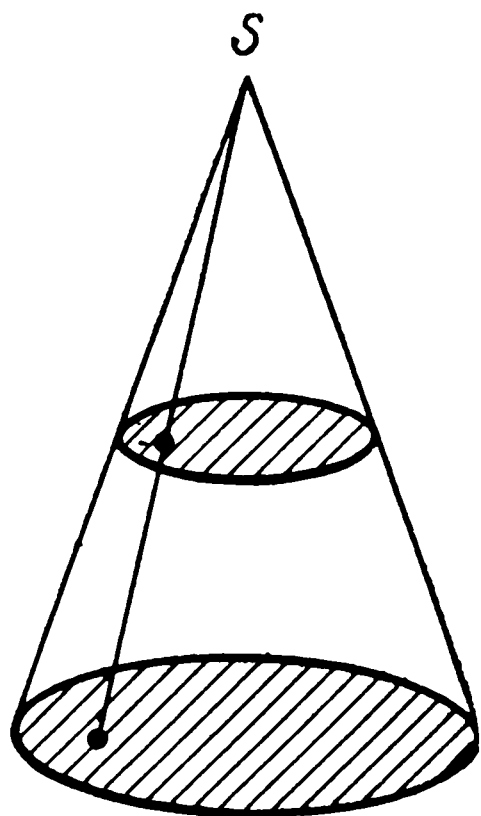
Сопоставим точке  $P_1$  точку  $C$ ,  $P_2 — D$ ,  $P_3 — T_1$ ,  $P_4 — T_2$  и т. д. Любой же точке  $X \neq P_i$  интервала сопоставим точку  $Y = [CD] \cap [SX]$  отрезка. Ясно, что построенное отображение<sup>1</sup> интервала в отрезок является биективным.

Если  $|AB| = |CD|$ , то аналогичные построения проводятся с помощью ортогонального проектирования.

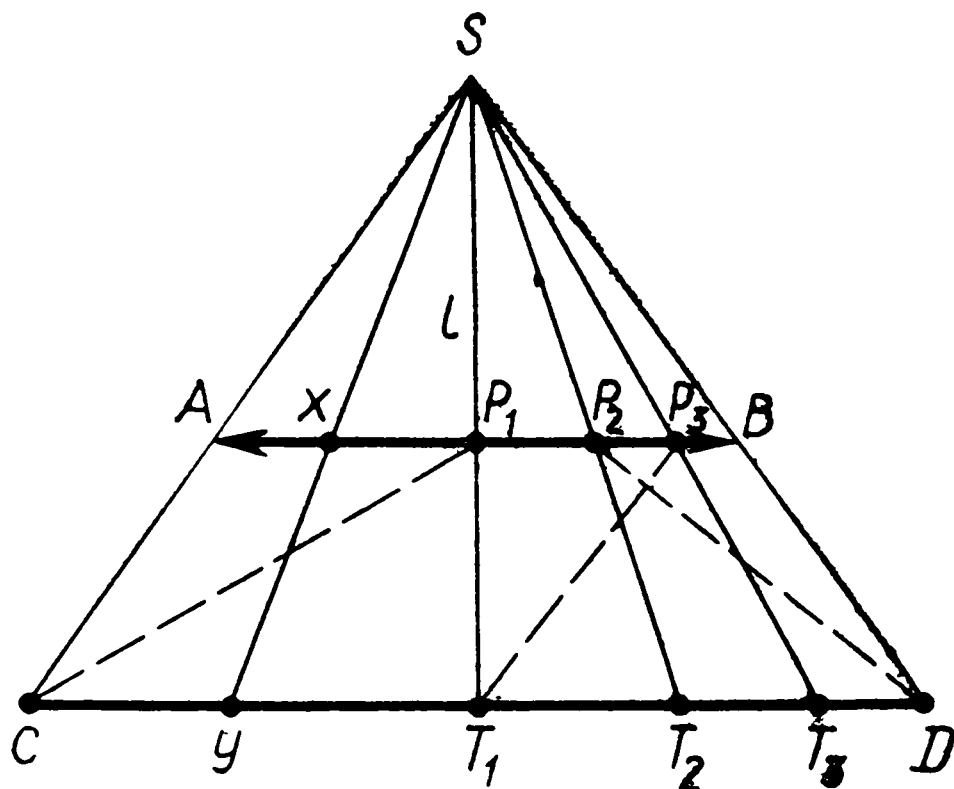
1.41. Отрезок  $[0, 1]$  и луч  $[0, \infty[$ .

1.42. Прямая и окружность.

1.43. Окружность и ее диаметр.



Р и с. 4



Р и с. 5

<sup>1</sup> Вспомогательные последовательности  $(P_n)$  и  $(T_n)$  позволяют нам «избавиться» от «лишних» точек  $C$  и  $D$ .

1.44. Круг  $x^2 + y^2 < 1$  и его внешняя область  $x^2 + y^2 > 1$ .

1.45. Открытый круг  $x^2 + y^2 < 1$  и замкнутый круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

1.46. Сфера и плоскость.

1.47. Отобразите биективно множество уравнений вида  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  — натуральные числа) на множество натуральных чисел, кратных 30.

1.48. Отобразите биективно множество всех последовательностей натуральных чисел на множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел.

1.49.  $A$  — множество всех последовательностей натуральных чисел,  $B$  — множество чисел полуинтервала  $]0, 1]$ . Постройте биекцию  $f: A \rightarrow B$ .

*Решение.* Рассмотрим множество  $M$  всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Вспомним, что каждое число  $\alpha$  из полуинтервала  $]0, 1]$  можно разложить единственным способом в существенно бесконечную двоичную дробь  $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  и обратно: каждая существенно бесконечная двоичная дробь определяет единственное число из полуинтервала  $]0, 1]$ .

Сопоставим теперь последовательности  $x = (n_1, n_2, n_3, \dots)$  ( $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ) двоичную дробь, у которой на местах с номерами  $n_1, n_2, n_3, \dots$  после запятой стоят единицы, а на остальных местах нули. Например, последовательности  $x_1 = (1, 3, 5, 7, \dots)$  ставится в соответствие дробь  $\alpha_1 = 0,10101010\dots$ . Так как наши последовательности строго возрастающие, то у них имеются сколь угодно большие члены, а потому у соответствующих дробей на сколь угодно далеком месте будут встречаться единицы. Такие дроби существенно бесконечные.

Итак, мы построили отображение  $f$  множества  $M$  в полуинтервал  $]0, 1]$ . При этом у любой точки  $y \in ]0, 1]$  прообраз  $f^{-1}(y)$  не пуст и состоит, очевидно, только из одной последовательности. Чтобы ее найти, достаточно представить  $y$  в виде существенно бесконечной двоичной дроби и записать последовательность, представляющую собой последовательные номера тех разрядов дроби, которые содержат 1. Ясно, что полученная последовательность будет возрастающей. Итак, построенное отображение  $f: M \rightarrow B$  биективно.

Если теперь рассмотреть биективное отображение  $\varphi: A \rightarrow M$ , построенное в предыдущей задаче, то композиция  $f \circ \varphi$  в силу 1.27 и 1.28 может служить искомой биекцией.

Множество  $X$  упорядоченных конечных последовательностей  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_k \in X_k$ , называется *декартовым произведением множеств*  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и обозначается так:

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n.$$

В частности, если  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = M$ , то применяется обозначение  $X = M^n$ .

Пусть  $f$  — отображение множества  $A$  в  $C$ ,  $g$  — отображение  $B$  в  $D$ . Отображение  $h: A \times B \rightarrow C \times D$ , определяемое формулой  $h(a, b) = (f(a), g(b))$ , называется *декартовым произведением отображений*  $f$  и  $g$  и обозначается  $h = f \times g$ .

1.50. Докажите, что если отображения  $f: A \rightarrow C$  и  $g: B \rightarrow D$  инъективны, то отображение  $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$  инъективно.

1.51. Докажите, что если отображения  $f: A \rightarrow C$  и  $g: B \rightarrow D$  сюръективны, то отображение  $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$  сюръективно.

1.52. Задайте биективное отображение а) прямоугольника  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < y < 1$  на нижнюю полуплоскость  $y < 0$ ;

б) плоскости на полуполосу  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$ .

Множество  $A$  называется *эквивалентным* или *равномощным* множеству  $B$  (пишут  $A \sim B$ ), если существует биективное отображение  $f: A \rightarrow B$ .

1.53. Докажите, что отношение эквивалентности множеств рефлексивно (т. е.  $A \sim A$ ), симметрично (т. е. из  $A \sim B$  следует  $B \sim A$ ) и транзитивно (т. е. из  $A \sim B$  и  $B \sim C$  следует  $A \sim C$ ).

Из симметричности отношения эквивалентности (см. 1.53) вытекает, что наряду с утверждением «множество  $A$  эквивалентно множеству  $B$ » можно говорить, что « $A$  и  $B$  эквивалентны (друг другу)».

1.54. Студент, решая вопрос о том, эквивалентны ли множества чисел отрезков  $[-1, 1]$  и  $[0, 1]$ , ввел в рассмотрение функцию  $f(x) = x^2$ . Затем, заметив, что полученное отображение  $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  не является биективным, он сделал вывод, что эти отрезки не эквивалентны. Верно ли это рассуждение?

1.55. Приведите примеры эквивалентных множеств, опираясь на условия предыдущих задач данного параграфа.

1.56. Докажите, что если  $A \setminus B \sim B \setminus A$ , то  $A \sim B$ .

1.57. Докажите, что если  $A \subset B$  и  $A \sim A \cup C$ , то  $B \sim B \cup C$ .

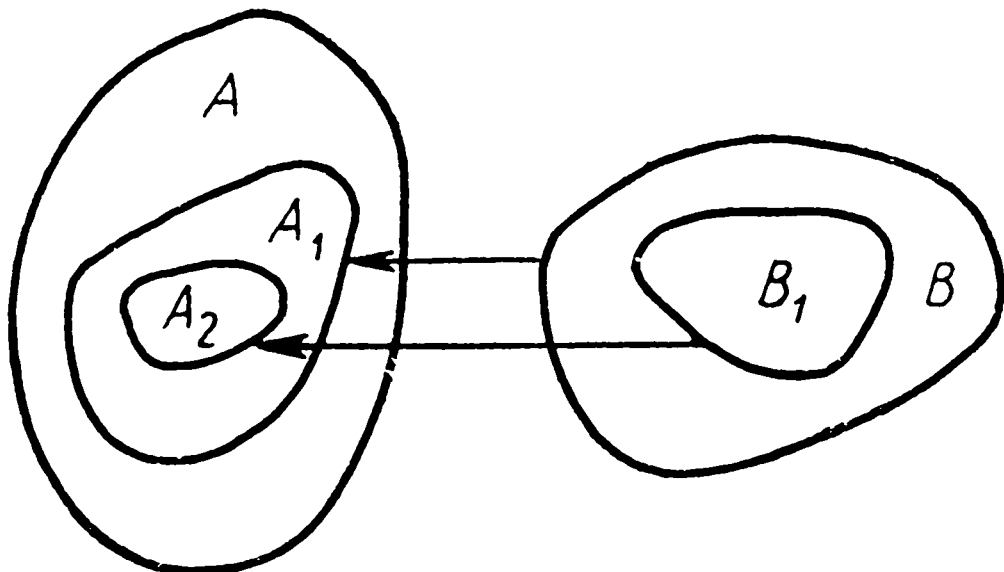
1.58. Верно ли утверждение: «Если  $A \supset B$ ,  $C \supset D$  и  $A \sim C$ , а  $B \sim D$ , то  $A \setminus B \sim C \setminus D$ »?

1.59. Верно ли утверждение: «Если  $A \sim B$ ,  $A \subset C$ ,  $B \subset C$ , то  $C \setminus A \sim C \setminus B$ »?

1.60\*. Докажите теорему «о промежуточном множестве». Если  $A \subset B \subset C$  и  $A \sim C$ , то  $A \sim B$  (и  $B \sim C$ ).

1.61. Докажите *теорему Кантора — Бернштейна*: если множество  $A$  эквивалентно некоторому подмножеству  $B_1 \subset B$ , а множество  $B$  эквивалентно некоторому подмножеству  $A_1 \subset A$ , то  $A \sim B$ .

*Доказательство.* Так как  $B \sim A_1$ , то существует биекция (см. рис. 6)  $f: B \rightarrow A_1$ . Обозначим через  $A_2$  образ множества  $B_1$  при



Р и с. 6



этом отображении. Ясно, что  $f$  является одновременно и биекцией  $B_1$  в  $A_2$ . Поэтому  $A_2 \sim B_1$ , а это в силу транзитивности отношения эквивалентности означает, что  $A_2 \sim A$ . Но поскольку  $A_2 \subset A_1 \subset A$ , то по теореме о промежуточном множестве  $A \sim A_1$ , а так как по условию  $B \subset A_1$ , то отсюда и вытекает, что  $A \sim B$ .

**1.62.** Докажите, что множество  $A$  точек произвольного интервала эквивалентно множеству  $B$  точек произвольного отрезка.

*Доказательство 1* дает решение задачи 1.40, но оно сложное.

*Доказательство 2.* Рассмотрим некоторый отрезок  $A_1 \subset A$  и некоторый интервал  $B_1 \subset B$ . Рассуждая так же, как в решении 2 задачи 1.33, легко построить биективные отображения  $f: A \rightarrow B_1$  и  $\varphi: B \rightarrow A_1$ . Отсюда следует, что  $A \sim B_1$  и  $B \sim A_1$ , а тогда по теореме Кантора — Бернштейна и  $A \sim B$ .

**1.63.** Докажите, что множество  $A$  точек произвольного круга и множество  $B$  точек произвольного квадрата эквивалентны.

Если дан некоторый класс эквивалентных между собой множеств, то про любые два множества  $A$  и  $B$  из этого класса говорят, что они имеют одинаковую *мощность*, и пишут:  $|A| = |B|$ .

Множества, эквивалентные множеству  $\mathbb{N}$  всех натуральных чисел, называют *счетными* или множествами *счетной мощности*. Другими словами, *счетные множества* — это такие множества, все элементы которых можно перенумеровать, используя все номера и присвоив каждому элементу ровно один номер.

**1.64.** Докажите, что множество  $\mathbb{Z}$  целых чисел счетно.

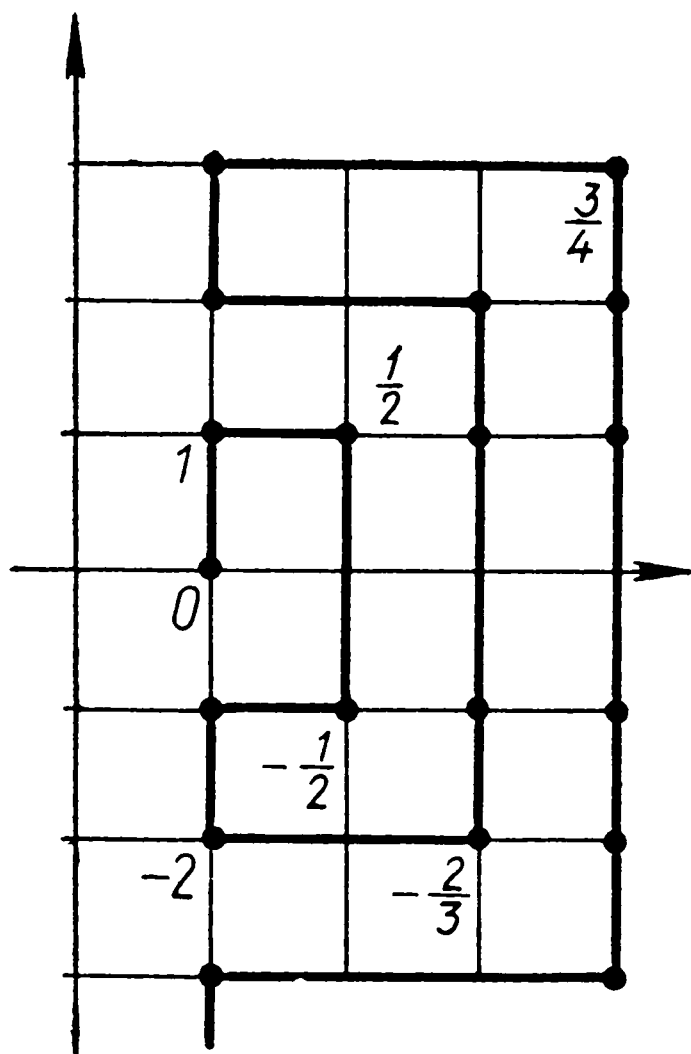
*Доказательство.* Сопоставим числу 0 номер 1, числу 1 — номер 2, числу  $-1$  — номер 3, числу 2 — номер 4, числу  $-2$  — номер 5 и так далее. Множество  $\mathbb{Z}$  занумеровано.

**1.65.** Докажите, что множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел счетное.

*Доказательство.* Множество  $\mathbb{Q}$  состоит из всех несократимых дробей со знаменателем 1, 2, 3 и т. д.

Рассмотрим координатную плоскость. Изобразим дроби со знаменателем 1 на прямой  $x = 1$ , со знаменателем 2 — на прямой  $x = 2$  и т. д., как показано на рисунке 7. Сопоставим числу 0 номер 1, 1 — номер 2,  $\frac{1}{2}$  — номер 3 и так далее по маршруту, указанному на рисунке. Множество  $\mathbb{Q}$  перенумеровано! (Какой номер у чисел  $\frac{4}{5}$  и  $-\frac{3}{5}$ ?).

**1.66.** Докажите, что объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество.



Р и с. 7

1.67. Докажите, что объединение счетного множества конечных множеств есть множество счетное или конечное.

1.68. Докажите, что объединение счетного семейства счетных множеств есть счетное множество.

1.69. Докажите, что прибавление к счетному множеству  $S$  конечного множества  $P$  не изменяет мощности множества  $S$ .

1.70. Докажите, что любое бесконечное подмножество  $B$  счетного множества  $S$  счетно.

*Доказательство.* Так как множество  $S$  счетно, то его элементы можно пронумеровать. В числе всех элементов множества  $S$  оказались занумерованными и элементы подмножества  $B$ . Выпишем эти элементы в порядке возрастания полученных номеров, а потом занумеруем подряд числами  $1, 2, \dots$ . В результате множество  $B$  окажется занумерованным. Значит, оно счетно.

1.71. Докажите, что во всяком бесконечном множестве  $B$  имеется счетное подмножество  $S$ .

*Доказательство.* Выберем один элемент  $x_1 \in B$  — это можно сделать, так как  $B$  бесконечно и, следовательно, не пусто. Ясно, что, кроме  $x_1$ , во множестве  $B$  имеются и другие элементы. Выберем из них какой-нибудь  $x_2$ . После этого выберем  $x_3$  и т. д. В результате мы находим во множестве  $B$  счетное подмножество занумерованных элементов  $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .

1.72. Докажите, что прибавление к бесконечному множеству  $B$  счетного или конечного множества  $S$  не изменяет мощности  $B$ .

*Доказательство.* Не теряя общности, можно предполагать, что  $B \cap S = \emptyset$ . Согласно 1.71 множество  $B$  можно представить в виде  $B = D \cup C$ , где  $C$  — счетно. Тогда по свойству ассоциативности операции объединения множеств  $B \cup S = (C \cup S) \cup D$ . В силу 1.66 и 1.69  $C \cup S$  — счетно. Поэтому существует биекция  $\varphi: C \cup S \rightarrow C$ . Но тогда отображение, определяемое формулой

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in C \cup S, \\ x, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

является биекцией  $B \cup S$  в  $B$ , откуда и следует, что  $|B \cup S| = |B|$ .

1.73. Докажите, что вычитание из бесконечного несчетного множества  $B$  счетного или конечного множества  $S$  не изменяет мощности  $B$ .

*Доказательство.* Запишем  $B$  в виде  $B = (B \setminus S) \cup S$ . Так как  $B$  несчетно, то  $B \setminus S$  бесконечно и по 1.72

$$|B \setminus S| = |(B \setminus S) \cup S| = |B|.$$

1.74. Докажите, что если множество  $B$  бесконечно и существует инъективное отображение  $f: B \rightarrow \mathbb{N}$ , то  $B$  счетно.

*Доказательство.* Обозначим через  $N'$  множество образов всех элементов из  $B$  при отображении  $f$  и рассмотрим отображение  $f: B \rightarrow N'$ . Оно инъективно по условию и сюръективно, так как по построению  $N'$  всякий  $y \in N'$  является образом некоторого  $x \in B$ . Значит, построенное отображение  $f: B \rightarrow N'$  биективно, а отсюда вытекает, что  $B \sim N'$ .

С другой стороны, из инъективности  $f$  вытекает, что  $N'$  — бесконечное множество. Действительно, если бы  $N'$  состояло из  $n$  элементов, то по крайней мере два из  $n + 1$  произвольно выбранных из  $B$  элементов имели бы один образ, что противоречит условию инъективности  $f$ .

Но всякое бесконечное подмножество счетного множества имеет счетную мощность. Поэтому  $N' \approx \mathbb{N}$ , а тогда в силу транзитивности отношения эквивалентности и  $B \approx \mathbb{N}$ , т. е.  $B$  — счетно.

1.75. Докажите, что если  $B$  бесконечно и существует сюръективное отображение  $f: \mathbb{N} \rightarrow B$ , то  $B$  счетно.

*Доказательство.* Каждому  $y \in B$  сопоставим наименьшее число  $x \in \mathbb{N}$  из прообраза  $f^{-1}(y)$ , который не пуст в силу сюръективности  $f$ . Тем самым определяется отображение  $\varphi: B \rightarrow \mathbb{N}$ . Из конструкции  $\varphi$  ясно, что это биективное отображение. Отсюда следует, что  $B \approx \mathbb{N}$  и  $N'$  — бесконечное подмножество  $\mathbb{N}$ . Но в таком случае  $N' \approx \mathbb{N}$ , а значит, и  $B \approx \mathbb{N}$ .

1.76. Пусть  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — счетные множества. Докажите, что при любом натуральном  $n$  множество  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  счетно.

*Доказательство.* Не теряя общности, можно предположить, что  $S_i = \mathbb{N}$ . Тогда множество  $S$  состоит из всех « $n$ -ок» натуральных чисел, т. е. конечных последовательностей  $(k_1, \dots, k_n)$ . Занумеруем простые числа:  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$  и поставим в соответствие последовательности  $(k_1, \dots, k_n)$  число  $m = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ . В силу теоремы о единственности разложения натуральных чисел на простые множители различным « $n$ -кам» соответствуют различные числа  $m$ . Таким образом построено инъективное отображение  $f$  прямого произведения  $S$  в  $\mathbb{N}$ . Так как  $S$ , очевидно, бесконечно, то (см. 1.74) оно счетно.

1.77. Докажите счетность множества  $P^{(n)}$  всех многочленов  $n$ -й степени с целыми коэффициентами.

*Доказательство.* Многочлену  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) сопоставим набор из  $(n + 1)$ -го целого числа  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ . Это элемент прямого произведения  $\mathbb{Z}^{n+1}$ , где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. Таким образом мы определили инъективное отображение (будет ли оно и сюръективным?) множества  $P^{(n)}$  в  $\mathbb{Z}^{n+1}$ . Отсюда в силу 1.64 и 1.76 следует, что  $P^{(n)}$  счетно.

1.78. Докажите счетность множества  $P$  всех многочленов с целыми коэффициентами.

*Доказательство* вытекает из соотношения  $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$  и результатов 1.77 и 1.68.

1.79. Докажите счетность множества  $A$  всех алгебраических чисел.

*Доказательство.* Алгебраические числа — это корни многочленов с целыми коэффициентами. Так как таких многочленов счетное множество, а каждый многочлен имеет конечное число корней, то в силу 1.67 (с учетом того, что  $A$ , очевидно, бесконечно)  $A$  счетно.

1.80. Докажите счетность множества алгебраических чисел любого числового промежутка.

1.81. Докажите счетность множества а) всех простых чисел; б) всех точных квадратов.

1.82. Докажите счетность множества  $M$  всех конечных подмножеств натурального ряда чисел.

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательное множество  $B$ , состоящее из чисел отрезка  $[0, 1]$ , представимых в виде конечных двоичных дробей. Ясно, что такие числа рациональны и их бесконечное множество. Поэтому множество  $B$  как бесконечная часть счетного множества счетно. Сопоставим каждому подмножеству  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  ( $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ) натурального ряда двоичную дробь, у которой на местах с номерами  $n_1, \dots, n_k$  после запятой стоят единицы, а на остальных местах нули. Так как построенное отображение  $M \rightarrow B$ , очевидно, биекция, то этим и доказано, что  $M$  счетно.

1.83. Докажите счетность следующих множеств: а) окружностей на плоскости с рациональными длинами радиусов и координатами центра; б) треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты; в) параллелограммов на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты.

Пусть даны два множества. Можно доказать, что существует инъективное отображение хотя бы одного из этих множеств в другое, т. е. хотя бы одно из двух множеств эквивалентно части другого. Если эти множества не эквивалентны, то из теоремы Кантора—Бернштейна вытекает, что лишь одно из них эквивалентно части другого.

Если множества  $A$  и  $B$  не эквивалентны и  $A$  эквивалентно части  $B$  (т. е. существует инъективное отображение  $f: A \rightarrow B$ ), то говорят, что *мощность множества  $A$  меньше мощности множества  $B$* :  $|A| < |B|$ . Итак, любые два множества сравнимы: либо  $|A| = |B|$ , либо  $|A| < |B|$ , либо  $|A| > |B|$ .

1.84. Докажите, что а) из  $|A| < |B|$  и  $|B| < |C|$  следует, что  $|A| < |C|$ ; б) ни для каких двух множеств  $A$  и  $B$  не выполняется одновременно  $|A| < |B|$  и  $|B| < |A|$ .

1.85. Покажите, что счетная мощность самая маленькая из бесконечных мощностей.

*Решение.* Пусть  $A$  — произвольное бесконечное множество. Логически мыслимы два случая.

1).  $A \sim \mathbb{N}$ . Тогда  $A$  счетно.

2).  $A$  — не эквивалентно  $\mathbb{N}$ . В силу 1.71 существует  $A_1 \subset A$  и счетное. Отсюда следует, что существует биекция  $f: \mathbb{N} \rightarrow A_1$ . Но  $f$  одновременно является и инъекцией  $\mathbb{N} \rightarrow A$ . В таком случае мощность  $A$  больше счетной.

Итак, во всех логически возможных случаях  $|A|$  не меньше счетной.

1.86. Докажите, что множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  имеет мощность большую, чем счетная.

*Доказательство.* Нам нужно доказать, что  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ .

Так как  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ , то тем самым существует естественное инъектив-



ное отображение  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ . Отстаеся убедиться, что  $\mathbf{N}$  не эквивалентно  $\mathbf{R}$ . Для этого достаточно показать, что не может быть биекцией ни одно отображение  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ . Дальнейшие рассуждения проведем двумя способами.

1. Запишем каждое действительное число  $f(n)$  в виде бесконечной десятичной дроби

$$f(n) = a_n + 0, b_{n1} b_{n2} \dots b_{nk} \dots,$$

где  $a_n$  — целое число, а  $b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}, \dots$ , могут принимать значения от 0 до 9.

Зададим число

$$c = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots,$$

где  $c_n = 1$ , если  $b_{nn} \neq 1$ , и  $c_n = 2$ , если  $b_{nn} = 1$ . Определенное так число  $c$  отлично от любого из чисел  $f(n)$ ; следовательно, отображение  $f$  не сюръективно, а значит, и не биективно.

2. Возьмем в  $\mathbf{R}$  какой-нибудь отрезок  $\Delta_1$  длины 1, не содержащий образа  $f(1)$  числа 1. Разобьем  $\Delta_1$  на три конгруэнтных отрезка. По крайней мере один из полученных отрезков не содержит точку  $f(2)$ . Обозначим его через  $\Delta_2$ . Разобьем  $\Delta_2$  на три конгруэнтные части и выберем отрезок  $\Delta_3 \not\ni f(3)$ . Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность отрезков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots; f(n) \notin \Delta_n.$$

Так как длина отрезка  $\Delta_n$ , равная  $\frac{1}{3^{n-1}}$ , стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то это — последовательность стягивающихся отрезков.

По принципу стягивающихся отрезков существует точка  $c \in \Delta_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Так как  $f(n) \notin \Delta_n$ , то  $c \neq f(n)$  ни при каком  $n$ , т. е. точка  $c \in \mathbf{R}$  не является образом никакого числа  $n$ ; следовательно, отображение  $f$  не является биективным.

Множества, эквивалентные множеству  $\mathbf{R}$  действительных чисел, называются множествами *мощности континуума*. Эту мощность обозначают через  $\mathbf{C}$ .

1.87. Приведите примеры множеств мощности континуума, используя задачи 1.33—1.49. Покажите, в частности, что множество точек любого числового промежутка имеет мощность континуума.

1.88. Докажите, что объединение конечного числа множеств мощности континуума есть множество мощности континуума.

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , где  $|A_k| = \mathbf{C}$ , и множества  $A_k$  не имеют общих элементов. Так как мощность промежутка  $I_k = ]k-1, k]$  ( $k = 1, \dots, n$ ) равна континууму, то существует биекция  $f_k: I_k \rightarrow A_k$ . Тогда отображение  $f$ , определяемое формулой  $f(x) = f_k(x)$ , где  $k$  — номер того промежутка  $I_k$ , которому принадлежит  $x$ , является, очевидно, биективным отображением  $]0, n]$  в  $A$ . Следовательно, в этом случае  $|A| = \mathbf{C}$ .

Рассмотрим теперь общий случай, когда множества  $A_k$  могут



тивное отображение  $f: K \rightarrow ]0, 1[$ . Отсюда следует, что  $|K| \leq C$ . А так как, с другой стороны, существует естественная инъекция отрезка в квадрат, то  $|K| \geq C$ . Итак,  $|K| = C$ .

**1.94.** Множество всех подмножеств натурального ряда чисел.

*Доказательство.* Данное множество  $M$  состоит из множества  $M_1$  всех конечных подмножеств и множества  $M_2$  всех бесконечных подмножеств (возрастающих последовательностей) натурального ряда. Из 1.49 и 1.87 следует, что  $|M_2| = C$ , а в 1.82 показано, что  $M_1$  счетно. Отсюда в силу 1.72 следует, что  $|M| = C$ .

**1.95.** Докажите, что множество  $M$  всех подмножеств данного множества  $A$  имеет мощность большую, чем  $A$ .

*Доказательство.* Сопоставив каждому  $a \in A$  одноэлементное подмножество  $\{a\} \in M$ , получаем инъективное отображение  $A$  в  $M$ . Остается показать, что  $A$  и  $M$  не эквивалентны. Предположим противное: существует биекция  $f: A \rightarrow M$ .

Для любого  $x \in A$  возможны две ситуации:  $x \in f(x)$  или  $x \notin f(x)$ . Элемент  $x$ , входящий в подмножество, являющееся его образом, назовем «хорошим», не входящий — «плохим». Ясно, что всякий  $x \in A$  либо «хороший», либо «плохой».

Рассмотрим подмножество  $P \subset A$ , состоящее из всех «плохих» элементов.  $P$  — элемент множества  $M$ . В силу биективности  $f$  прообраз  $P$  не пуст и состоит из одного элемента  $\xi$ . Какой это элемент — «хороший» или «плохой»?

Предположим, что  $\xi$  — «хороший». Тогда, по определению «хорошего» элемента,  $\xi \in f(\xi) = P$ , т. е.  $\xi$  и «плохой».

Предположим, что  $\xi$  «плохой». Тогда  $\xi \notin f(\xi) = P$ , и потому он «хороший».

Итак,  $\xi$  и «хороший», и «плохой» одновременно. Противоречие!

**1.96.** Докажите, что не существует множества самой большой мощности.

**1.97.** Пусть  $A$  — произвольное множество,  $M$  — множество всех функций на  $A$ , принимающих значения 0 и 1, т. е. множество всех отображений  $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ . Докажите, что  $|A| < |M|$ .

*Доказательство.* Существует инъективное отображение  $A \rightarrow M$ , относящее каждому  $a \in A$  следующую функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = a, \\ 0, & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Остается убедиться, что множества  $A$  и  $M$  не эквивалентны. Предположим противное:  $A \sim M$ , т. е. существует биективное отображение  $A \rightarrow M$ . Для каждого  $a \in A$  обозначим через  $f_a$  его образ при этом отображении. Напомним, что  $f_a$  есть функция на  $A$ , принимающая значения 0 и 1.

Зададим функцию  $\psi$  на  $A$  по формуле  $\psi(x) = 1 - f_x(x)$  для любого  $x \in A$ . Эта функция может принимать только значения 0 и 1 и, значит, принадлежит  $M$ . Следовательно, в силу предположения, она является образом некоторого элемента  $a \in A$  при биективном отображении  $A \rightarrow M$ . Таким образом,  $\psi(x) = 1 - f_x(x) =$

$= f_a(x)$ . Из этого равенства при  $x = a$  следует, что  $1 - f_a(a) = f_a(a)$ , откуда  $f_a(a) = \frac{1}{2}$  — противоречие!

В задачах 1.98—1.118 требуется определить мощность указанных множеств.

1.98. Множество точек непрерывной кривой  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

1.99. Множество точек гиперболы.

1.100. Множество точек окружности.

1.101. Множество точек круга.

1.102. Множество точек квадранта плоскости.

1.103. Множество точек шара.

1.104. Множество комплексных чисел.

1.105. Некоторое множество попарно неперекрывающихся отрезков на прямой,

1.106. Множество точек плоскости

а) с рациональными координатами;

б) с иррациональными координатами;

в) у которых одна координата рациональная, а другая иррациональная;

г) у которых хотя бы одна координата рациональная.

1.107. Множество всех рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и знаменателе.

1.108. Множество всех многочленов третьей степени с действительными коэффициентами.

1.109. Множество  $M$  всех окружностей на плоскости.

*Решение.* Рассмотрим произвольную окружность и запишем ее уравнение  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Сопоставим окружности точку  $(a, b, r)$  пространства  $\mathbf{R}^3$ . Тем самым мы определили биективное отображение множества  $M$  на верхнее полупространство  $\mathbf{R}_+^3$ . Поэтому  $|M| = |\mathbf{R}_+^3|$ . Но, так как  $\mathbf{R}_+^3 \subset \mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}_+^3$  содержит некоторую прямую, а мощность  $\mathbf{R}^3$  и прямой равна  $\mathbf{C}$ , то по теореме о промежуточном множестве и  $|\mathbf{R}_+^3| = \mathbf{C}$ . Итак,  $|M| = \mathbf{C}$ .

1.110. Множество окружностей на плоскости:

а) с рациональными координатами центра; б) с рациональным радиусом; в) с иррациональным радиусом; г) с рациональным радиусом и рациональными координатами центра; д) иррациональным радиусом и иррациональными координатами центра.

1.111. Множество эллипсов на плоскости, оси которых совпадают с осями координат.

1.112. Множество парабол на плоскости, оси которых параллельны оси ординат.

1.113. Множество всех треугольников на плоскости.

1.114. Множество всех четырехугольников на плоскости.

1.115. Множество всех многоугольников на плоскости.

1.116. Множество действительных чисел, в десятичном разложении которых встречается цифра 7.



1.117. Множество действительных чисел, в десятичном разложении которых не встречается цифра 7.

1.118. Множество действительных чисел интервала  $]0, 1[$ , в десятичном разложении которых на втором месте стоит цифра 6, и больше эта цифра не встречается.

1.119. Представим себе, что где-то имеется гостиница со счетным числом номеров и все ее номера заняты. Нельзя ли все-таки в эту гостиницу поселить еще одного гостя? А счетное множество гостей?

1.120. Представим себе, что в некотором городе построено счетное множество гостиниц, со счетным числом номеров каждая. Есть ли необходимость работать всем этим гостиницам? Не сможет ли их все заменить одна из построенных гостиниц?

1.121. Можно ли на плоскости построить континуум попарно непересекающихся окружностей?

1.122\*. Можно ли написать на доске континуум попарно непересекающихся букв (размеры букв могут быть произвольными)  $G$ ;  $N$ ;  $A$ ;  $B$ ;  $T$ ?

1.123\*. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся восьмерок?

## § 2 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество  $M$  называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов  $x, y$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$  (*аксиома тождества*);
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (*аксиома симметрии*);
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z$  из  $M$  (*аксиома треугольника*).

Число  $\rho(x, y)$  называется *расстоянием* между элементами  $x$  и  $y$ , а перечисленные условия — *аксиомами метрики*. Элементы метрического пространства называются *точками*. Функцию  $\rho(x, y)$  называют также *метрикой* на  $M$ .

2.1. Докажите, что аксиомы метрики эквивалентны следующим двум аксиомам:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  для любых  $x, y, z \in M$ .

2.2. Докажите, что

а) для любых точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  метрического пространства справедливо «неравенство многоугольника»:

$$\rho(x_1, x_n) \leq \sum_{k=2}^n \rho(x_{k-1}, x_k);$$

б) для любых четырех точек  $x, y, z, v$  метрического пространства справедливо «неравенство четырехугольника»:

$$|\rho(x, y) - \rho(z, v)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, v).$$

2.3. Пусть  $M$  — любое множество. Положим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Докажите, что  $\rho(x, y)$  — метрика на  $M$ .

2.4. Являются ли метриками на прямой следующие функции:

- а)  $\rho(x, y) = |x - y|$ ;      д)  $\rho_1(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ ;  
 б)  $\rho(x, y) = x^3 - y^3$ ;      е)  $\rho_2(x, y) = |\sin(x - y)|$ ;  
 в)  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ ;      ж)  $\rho(x, y) = (x^2 + 2y^2) |x - y|$ ?  
 г)  $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ ;

*Решение.* д)  $\rho_1(x, y) \geq 0$ . Проверим выполнение аксиом метрики.

Если  $x = y$ , то  $\rho_1(x, y) = 0$ . Пусть  $\rho_1(x, y) = 0$ , т. е.  $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} y$ . Но так как функция  $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$  возрастающая, то отсюда следует, что  $x = y$ . Аксиома тождества выполняется.

Аксиома симметрии, очевидно, выполняется. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Пусть  $z$  — любая точка. Тогда  $\rho_1(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} z| + |\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} y| = \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y)$ . Итак,  $\rho_1(x, y)$  — метрика.

е) Рассмотрим  $x = 0$ ,  $y = \pi$ . Имеем:  $\rho_2(0, \pi) = |\sin(-\pi)| = 0$ . Это означает, что аксиома тождества не выполняется — функция  $\rho_2(x, y)$  не является метрикой.

2.5. Пусть  $E$  — множество всех точек окружности. Зафиксируем на окружности точку  $M_0$  и определим расстояние  $\rho(M, N)$  между двумя точками этой окружности следующим образом: если  $M \neq M_0$  и  $N \neq M_0$ , то  $\rho(M, N)$  равно длине той дуги окружности, которая соединяет точки  $M$  и  $N$ , и не проходит через точку  $M_0$ ; если  $M = M_0$  или  $N = M_0$ , то  $\rho(M, N)$  равно длине кратчайшей дуги, соединяющей точки  $M$  и  $N$ ; если  $M = N$ , то  $\rho(M, N) = 0$ . Является ли множество  $E$  метрическим пространством?

*Решение.* Рассмотрим точки  $M$  и  $N$ , близкие к  $M_0$  (рис. 8). Тогда  $\rho(M, N) = \text{дл. } \smile MmN$ ,  $\rho(M, M_0) = \text{дл. } \smile MM_0$ ,  $\rho(M_0, N) = \text{дл. } \smile MN$ , и мы имеем:

$$\rho(M, N) > \rho(M, M_0) + \rho(N, M_0),$$

что противоречит аксиоме треугольника.  $E$  метрическим пространством не является.

2.6. Является ли метрикой на  $M = \{a, b, c\}$  функция  $\rho$ , если  $\rho(a, c) = \rho(c, a) = \rho(a, b) = \rho(c, b) = 2$ ,  $\rho(b, a) = \rho(b, c) = 1$ ?

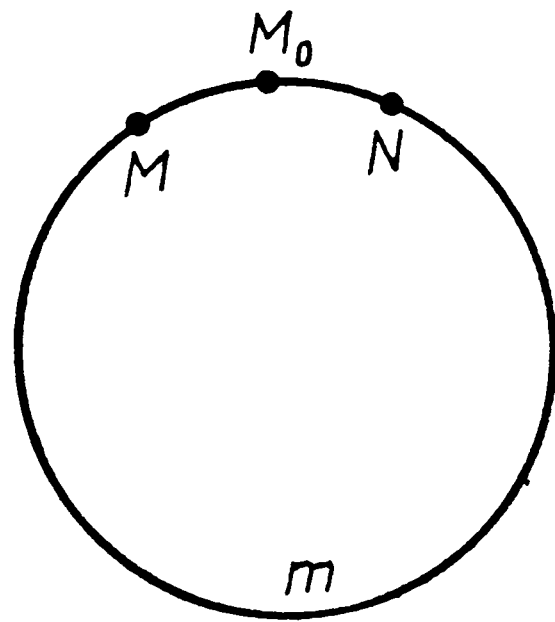
Удовлетворяет ли  $\rho$  аксиоме треугольника?

2.7. Докажите, что система аксиом метрического пространства непротиворечива и независима.

2.8. На множестве  $M = \{a, b, c\}$  задана метрика  $\rho$  такая, что  $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$ . Какие значения может принимать  $\rho(a, c)$ ?

2.9. Дано множество  $M = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Зададим  $\rho$  так: 1)  $\rho(x_i, x_i) = 0$ ; 2)  $\rho(x_0, x_i) = \rho(x_i, x_0) = 1$  при  $i > 0$ ; 3)  $\rho(x_i, x_j) = d$  при  $i \neq j$ ,  $i > 0$ ,  $j > 0$ .

а) Докажите, что при  $d = \sqrt{2}$  функция  $\rho$  удовлетворяет аксиомам метрики. б) Найдите все значения  $d$ , при которых  $\rho$  — метрика.



Р и с. 8

2.10. На окружности можно (проверьте это!) ввести две метрики — расстояние  $r(A, B)$  по хорде и расстояние  $\rho(A, B)$  по дуге. Как выражается одна метрика через другую?

2.11. Пусть  $M_n$  — множество всевозможных  $n$  — буквенных слов, составленных из русского алфавита. Назовем расстоянием между словами  $x$  и  $y$  количество позиций, на которых у слов  $x$  и  $y$  стоят разные буквы. Докажите, что  $M_n$  — метрическое пространство (оно называется *пространством сообщений* и рассматривается в теории информации).

2.12. Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если определить расстояние между точками  $M(x_1, y_1)$  и  $N(x_2, y_2)$  формулой:

а)  $\rho(M, N) = (\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|})^2$ ,

б)  $\rho(M, N) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4}$ ?

2.13. Пусть  $M$  — множество всех населенных пунктов на левом берегу Волги. Расстояние  $\rho(x, y)$  от пункта  $x$  до пункта  $y$  будем измерять временем движения от  $x$  до  $y$  теплохода, имеющего собственную скорость 20 км/ч. Образует ли  $M$  метрическое пространство?

2.14. Задаёт ли метрику на пространстве многочленов формула

$$\rho(P_1, P_2) = |P_1(0) - P_2(0)|?$$

2.15. Проверьте, что множество полей шахматной доски образует метрическое пространство, если за расстояние от поля  $x$  до поля  $y$  принять наименьшее число ходов, которое потребуется королю, чтобы перейти с поля  $x$  на поле  $y$ . Докажите это же утверждение, заменив короля а) ладьей, б) конем.

2.16. Проверьте, что множество лучей трехмерного евклидова пространства, выходящих из начала координат, образует метрическое пространство, если за расстояние между лучами принять радианную меру наименьшего угла, образованного этими лучами.

2.17. Пусть  $M$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $A$  — некоторое множество,  $f$  — отображение  $A \rightarrow M$ . Для любых  $x, y \in A$  положим:

$$\rho_1(x, y) = \rho(f(x), f(y)).$$

Докажите, что  $\rho_1$  является метрикой на  $A$  тогда и только тогда, когда отображение  $f$  инъективно.

2.18. Докажите, что множество целых чисел становится метрическим пространством (обозначим его через  $\tilde{\mathbb{Z}}$ ), если положить  $\rho(a, b) = 0$  при  $a = b$  и  $\rho(a, b) = \frac{1}{3^k}$  при  $a \neq b$ , где  $k$  — наивысшая степень 3, на которую делится нацело разность  $a - b$ .

Найдите  $\rho(7, 5)$ ,  $\rho(7, -2)$ ,  $\rho(7, 25)$ .

2.19. Метрическое пространство называется *ультраметрическим*, если вместо аксиомы треугольника в нем для любых  $x, y, z$  выполняется более сильное условие

$$\rho(x, y) \leq \max \{ \rho(x, z), \rho(z, y) \}. \quad (*)$$

Докажите, что пространство  $\tilde{Z}$ , определенное в предыдущей задаче, является ультраметрическим.

*Доказательство.* Выполнение аксиом 1 и 2 уже проверено при решении задачи 2.18. Покажем, что выполняется неравенство (\*). Пусть

$$\rho(x, z) = \frac{1}{3^k}, \quad \rho(z, y) = \frac{1}{3^p}.$$

Это означает, что

$$x - z = m3^k, \quad z - y = n3^p,$$

где  $m, n$  — целые числа,  $k, p$  — натуральные или нуль. Пусть для определенности  $\rho(z, y) \leq \rho(x, z)$ . Тогда  $k \leq p$  и  $x - y = (x - z) + (z - y) = m3^k + n3^p = 3^k(m + n3^{p-k})$ . Из этого соотношения видно, что  $x - y$  делится на  $3^k$ , или на  $3^l$  ( $l > k$ ) в зависимости от того, делится ли на 3 число  $m + n3^{p-k}$ . Поэтому

$$\rho(x, y) \leq \frac{1}{3^k} = \rho(x, z) = \max \{ \rho(x, z), \rho(z, y) \},$$

что и требовалось доказать.

**2.20.** Является ли метрикой на множестве натуральных чисел функция:

$$a) \quad \rho(x, y) = \frac{|x - y|}{xy};$$

$$b) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y? \end{cases}$$

**2.21.** Пусть  $M_1, \dots, M_n$  — метрические пространства с метриками  $\rho_1, \dots, \rho_n$  соответственно. Рассмотрим декартово произведение этих множеств  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ . Для любых двух элементов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  из  $M$  положим:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i).$$

Докажите, что  $\rho$  является метрикой на  $M$ .

**2.22.** Докажите, что если  $\rho$  — метрика на  $M$ , то функция

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

также является метрикой на  $M$ .

*Доказательство.* Выполнение первых двух аксиом метрики для  $\rho_1$  очевидно. Проверим аксиому треугольника. Пусть  $\rho(x, y) = a$ ,

$$\rho(x, z) = b \text{ и } \rho(y, z) = c. \text{ Тогда } \rho_1(x, y) = \frac{a}{1+a}, \quad \rho_1(x, z) = \frac{b}{1+b}, \quad \rho_1(y, z) = \frac{c}{1+c}.$$

Так как  $\rho$  — метрика, то  $a \leq b + c$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ , поэтому



$$\begin{aligned}\rho_1(x, y) &= \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \leq 1 - \frac{1}{1+b+c} = \frac{b+c}{1+b+c} = \\ &= \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y).\end{aligned}$$

2.23. Докажите, что если  $\rho$  — метрика на  $M$ , то функция

а)  $\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$ ,

б)  $\rho_1(x, y) = \rho^\alpha(x, y)$  ( $0 < \alpha < 1$ )

также является метрикой на  $M$ .

2.24. Пусть функция  $f$  определена на  $[0, \infty[$  и обладает следующими свойствами: 1)  $f(0) = 0$ ; 2)  $f$  возрастает на  $[0, \infty[$ ; 3)  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  для любых  $x$  и  $y$  из  $[0, \infty[$ .

Докажите, что если  $\rho$  — метрика на некотором множестве  $A$ , то

$$\rho_1(x, y) = f(\rho(x, y))$$

также является метрикой на  $A$ .

2.25. Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на  $[0, \infty[$  и обладает следующими свойствами: 1)  $f(0) = 0$ ; 2)  $f$  возрастает на  $[0, \infty[$ ; 3)  $f$  имеет на промежутке  $]0, \infty[$  производную второго порядка и  $f''(x) < 0$  на  $]0, \infty[$ .

Докажите, что функция  $\rho_1$ , определенная, как и в предыдущей задаче, является метрикой.

*Доказательство.* Докажем, что  $f$  удовлетворяет условию 3 предыдущей задачи. Для этого рассмотрим на  $[0, \infty[$  функцию

$$g(x) = f(x) + f(y) - f(x+y),$$

где  $y$  — произвольное число из  $[0, \infty[$ .

Из существования у  $f$  производной второго порядка вытекает, что  $g$  дифференцируема на  $]0, \infty[$ , а из непрерывности  $f$  на  $[0, \infty[$  следует, что и  $g$  на  $[0, \infty[$  непрерывна. Так как далее  $f''(x) < 0$ , то  $f'$  убывает на  $]0, \infty[$  и поэтому

$$g'(x) = f'(x) - f'(x+y) > 0.$$

Это, в силу известного достаточного условия, означает, что  $g$  возрастает на  $[0, \infty[$ . Отсюда, в частности, следует, что  $g(x) > g(0)$  при любом  $x$  из  $]0, \infty[$ . Поскольку  $g(0) = 0$ , то мы имеем:  $g(x) > 0$  или  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$  — и наша задача свелась к предыдущей.

2.26. Докажите, что если  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — метрики на множестве  $M$ , то для любых положительных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  функция

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(x, y)$$

также является метрикой на  $M$ .

2.27. Пусть на множестве  $M$  задана последовательность метрик  $(\rho_n)$  и пусть  $(\lambda_n)$  последовательность положительных чисел. Докажите, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \rho_n(x, y)$$

сходится для любой пары  $x, y$  элементов из  $M$ , то его сумма  $\rho(x, y)$  является метрикой на  $M$ .

2.28. Пусть на множестве  $M$  задана последовательность метрик  $(\rho_n)$ . Докажите, что функция

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)}$$

тоже является метрикой на  $M$ .

2.29. Пусть  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — последовательность метрических пространств с метриками  $\rho_1, \dots, \rho_n, \dots$ . Рассмотрим декартово произведение  $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \dots$ . Для любых  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$  из  $A$  положим

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}. \quad (*)$$

Докажите, что  $\rho$  является метрикой на  $A$ .

*Доказательство.* Так как

$$\frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)} < \frac{1}{2^n}$$

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  (геометрическая прогрессия) сходится, то по признаку

сравнения знакоположительных рядов ряд  $(*)$  сходится при любых  $x$  и  $y$ . Очевидно, далее, что  $\rho(x, y) \geq 0$  и удовлетворяет первым двум аксиомам метрики. Проверим аксиому треугольника.

Пусть  $x, y, z$  — любые точки из  $A$ . Положим

$$\rho_n(x_n, y_n) = a_n, \quad \rho_n(x_n, z_n) = b_n, \quad \rho_n(y_n, z_n) = c_n.$$

Поскольку  $\rho_n$  — метрика на  $A_n$  и  $x_n, y_n, z_n \in A_n$ , то

$$a_n \leq b_n + c_n.$$

Отсюда следует (см. 2.22), что

$$\frac{a_n}{1 + a_n} \leq \frac{b_n}{1 + b_n} + \frac{c_n}{1 + c_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{a_n}{1 + a_n} \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{b_n}{1 + b_n} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{c_n}{1 + c_n}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

2.30. Докажите, что множество  $S$  всех числовых последовательностей  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  становится метрическим пространством, если положить

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

2.31. Пусть  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — последовательность метрических пространств с метриками  $\rho_1, \dots, \rho_n, \dots$  соответственно и  $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \dots$ . Для любых двух точек  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$  из  $A$  положим:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x_n, y_n).$$

Зафиксируем точку  $a \in A$  и обозначим через  $A_a$  подмножество всех  $x \in A$ , для которых  $\rho(a, x) < \infty$ .

Докажите, что 1)  $\rho(x, y) < \infty$  для любых  $x, y \in A_a$ ; 2) функция  $\rho$  является метрикой на  $A_a$ .

Пусть  $M$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ . *Открытым (замкнутым) шаром* в  $M$  радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x_0 \in M$  называется множество всех точек  $x \in M$ , для которых  $\rho(x_0, x) < r$  ( $\rho(x_0, x) \leq r$ ). *Сферой* радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x_0 \in M$  называется множество всех точек  $x \in M$ , таких, что  $\rho(x_0, x) = r$ .

2.32. Пусть  $U_R(x_0)$  — открытый шар произвольного метрического пространства радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$  и пусть  $x_1 \in U_R(x_0)$ . Докажите, что существует открытый шар с центром в  $x_1$ , лежащий целиком внутри  $U_R(x_0)$ .

2.33. Пусть  $U_1$  и  $U_2$  — два открытых шара в метрическом пространстве, пересечение которых не пусто. Докажите, что существует открытый шар, принадлежащий их пересечению.

2.34. Могут ли в некотором метрическом пространстве два открытых шара различных радиусов совпадать между собой?

2.35. Может ли в некотором метрическом пространстве шар радиуса 3 содержаться в шаре радиуса 2, не заполняя его целиком?

2.36. Может ли в некотором пространстве сфера радиуса  $r > 0$  быть пустым множеством?

2.37. Докажите, что если два шара в ультраметрическом пространстве (см. задачу 2.17) пересекаются, то один из них целиком содержится в другом.

*Доказательство.* Пусть  $U_R(A)$  и  $U_r(a)$  такие шары и  $R \geq r$ . Покажем, что  $U_r(a) \subset U_R(A)$ .

Пусть  $b$  — некоторая общая точка этих шаров, а  $x$  — произвольная точка шара  $U_r(a)$ . В силу условия

$$\rho(b, x) \leq \max\{\rho(a, x), \rho(a, b)\} \leq r,$$

а тогда

$$\rho(A, x) \leq \max\{\rho(b, x), \rho(A, b)\} \leq \max\{r, R\} = R,$$

а это и означает, что  $x \in U_R(A)$ .

2.38. Что представляют собой замкнутые шары, открытые шары и сферы в метрических пространствах задач 2.3, 2.4 а), в), д), 2.9 а), 2.11, 2.12 б), 2.15, 2.16, 2.18, 2.20?

2.39. По аналогии с плоскостью скажем, что точка  $c$  метрического пространства  $M$  лежит между точками  $a$  и  $b$  этого пространства, если она отлична от  $a$  и  $b$ , причем  $\rho(a, b) = \rho(a, c) + \rho(c, b)$ .

а) Докажите, что если точка  $c$  лежит между точками  $a$  и  $b$ ,

а точка  $d$  лежит между точками  $a$  и  $c$ , то  $d$  лежит между точками  $a$  и  $b$ .

б) Докажите, что если  $c$  лежит между точками  $a$  и  $b$ , то  $a$  не лежит между точками  $c$  и  $b$ .

в) Докажите, что если точка  $c$  лежит между точками  $a$  и  $b$ , а точка  $d$  лежит между  $a$  и  $c$ , то  $c$  лежит между точками  $d$  и  $b$ .

г) Всегда ли между точками метрического пространства  $M$  лежит хотя одна точка этого пространства?

2.40. Назовем отрезком  $[a, b]$  в метрическом пространстве  $M$  множество, состоящее из точек  $a$  и  $b$  этого пространства и всех точек, лежащих между ними. Что представляют собой отрезки в пространствах из задач 2.3, 2.4 а), в), д), 2.9 а), 2.11, 2.12 б), 2.15, 2.16, 2.18, 2.20? Ограничены ли эти отрезки?

2.41. Покажите, что в метрическом пространстве два разных отрезка могут иметь ровно две общие точки.

2.42. Докажите, что если  $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ , то  $[a, b] \neq [c, d]$ .

2.43. Пусть точка  $c$  лежит между точками  $a$  и  $b$ . Всегда ли  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ ?

### § 3 ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $E$  — линейное пространство над полем действительных чисел. *Нормой* на  $E$  называется числовая функция  $\| \cdot \|$ , определенная на всем  $E$  и обладающая следующими свойствами (*аксиомы нормы*):

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$  ( $\Theta$  — нуль пространства  $E$ );
- 2) для любого элемента  $x$  из  $E$  и любого действительного числа  $\lambda$ :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

- 3) для любых  $x$  и  $y$  из  $E$ :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Линейное пространство с введенной на нем нормой называется *линейным нормированным пространством*.

Всюду в дальнейшем во избежание несущественных оговорок мы предполагаем, что  $E$  отлично от нуль-пространства.

3.1. Как видно из определения, норма задает отображение линейного нормированного пространства во множество неотрицательных чисел  $\mathbf{R}^+$ . Докажите, что это отображение сюръективно.

3.2. Задаёт ли функция  $x \rightarrow |\operatorname{arctg} x|$  норму на числовой прямой?

*Решение.* Если бы эта функция определяла норму на прямой, то в силу второй аксиомы нормы для любых действительных чисел  $\lambda$  и  $x$  выполнялось бы соотношение:

$$|\operatorname{arctg} \lambda x| = |\lambda| \cdot |\operatorname{arctg} x|.$$

Положив в нем  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,  $x = \sqrt{3}$ , получаем:  $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ,

что неверно. Указанная функция нормы не задает.

3.3. Проверьте, задают ли норму на числовой прямой следующие функции: а)  $\sqrt{x}$ ; б)  $\sqrt{|x|}$ ; в)  $|x - 1|$ ; г)  $\sqrt{x^2}$ ; д)  $5|x|$ ; е)  $x^2$ .

3.4. Пусть  $L$  — множество векторов на плоскости;  $x, y$  — декартовы координаты вектора  $\vec{a}$ . Проверьте, задают ли норму на  $L$  следующие функции:

- а)  $f(\vec{a}) = \sqrt{|xy|}$ ; б)  $f(\vec{a}) = |x| + |y|$ ; в)  $f(\vec{a}) = \max\{|x|, |y|\}$ ;  
 г)  $f(\vec{a}) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{|xy|}$ .

3.5. Пусть  $P$  — линейное пространство многочленов с действительными коэффициентами. Можно ли принять за норму на  $P$

- а) модуль значения многочлена в точке 0;  
 б) сумму модулей коэффициентов многочлена?

3.6. Докажите, что система аксиом нормы непротиворечива и независима.

3.7. Докажите, что линейное нормированное пространство является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

*Доказательство.* По определению нормы  $\rho(x, y) \geq 0$ . Проверим выполнение аксиом метрики для функции  $\rho$ .

Если  $x = y$ , то по свойствам линейных пространств  $x - y = \Theta$ , а потому  $\rho(x, y) = \|\Theta\| = 0$  в силу первой аксиомы нормы. Пусть наоборот,  $\rho(x, y) = 0$ . Это означает, что  $\|x - y\| = 0$ . Но тогда по первой аксиоме нормы  $x - y = \Theta$  или  $x = y$ . Аксиома тождества выполняется.

В линейном пространстве справедливо равенство:  $x - y = (-1)(y - x)$ . Поэтому в силу второй аксиомы нормы имеем:  
 $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \rho(y, x)$ .  
 Аксиома симметрии выполняется.

Пусть  $x, y, z \in E$ . В силу третьей аксиомы нормы

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

т. е. аксиома треугольника также выполняется.

В таблице на странице 29 приведены наиболее часто встречающиеся нормированные пространства. Операции сложения элементов и умножения элементов на число в соответствующих линейных пространствах понимаются обычным образом.

3.8. Проверьте, что  $R_1^n$  — нормированное пространство.

*Решение.* Выполнение первых двух аксиом нормы очевидно. Проверим третью аксиому:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

3.9. Проверьте, что  $R_\infty^n$  — нормированное пространство.

3.10. Проверьте, что  $R_1^\infty$  — нормированное пространство.

3.11. Проверьте, что  $R_\infty^\infty$  — нормированное пространство.

Таблица основных нормированных пространств

Обозначение пространства	Элементы пространства	Формула для нормы
$R_2^n$	Упорядоченные конечные последовательности из действительных чисел: $x = (x_1, ..., x_n)$	$  x   = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$
$R_1^n$	Те же	$  x   = \sum_{k=1}^n  x_k $
$R_\infty^n$	Те же	$  x   = \max_k  x_k $
$R_2^\infty$	Бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ такие, что $\sum_{k=1}^\infty x_k^2 < \infty.$	$  x   = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty x_k^2}$
$R_1^\infty$	Бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ такие, что $\sum_{k=1}^\infty  x_k  < \infty.$	$  x   = \sum_{k=1}^\infty  x_k $
$R_\infty^\infty$	Бесконечные ограниченные числовые последовательности.	$  x   = \sup_k  x_k $
$C_2[a, b]$	Функции $f$ , непрерывные на отрезке $[a, b]$ .	$  f   = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$
$C_1[a, b]$	Те же	$  f   = \int_a^b  f(x)  dx$
$C[a, b]$	Те же	$  f   = \max_{a \leq x \leq b}  f(x) $
$D^n[a, b]$	Функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными до $n$ -го порядка включительно.	$  f   = \max_{a \leq x \leq b}  f^k(x) $ $k = 1, ..., n$



3.12. Проверьте, что  $C[a, b]$  — нормированное пространство.

*Решение.* Выполнимость первых двух аксиом нормы очевидна.

Для проверки третьей аксиомы заметим, что в силу непрерывности рассматриваемых функций наибольшее значение функции  $|f_1 + f_2|$  на отрезке  $[a, b]$  достигается в некоторой точке  $x_0$  этого отрезка. Поэтому

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\| &= \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(x_0) + f_2(x_0)| \leq \\ &\leq |f_1(x_0)| + |f_2(x_0)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f_2(x)| = \|f_1\| + \|f_2\|. \end{aligned}$$

Аксиома треугольника также выполняется.

3.13. Проверьте, что  $C_1[a, b]$  — нормированное пространство.

3.14. Проверьте, что  $D^n[a, b]$  — нормированное пространство.

3.15. Пусть  $\tilde{D}$  — множество функций, определенных на отрезке  $[-1, 1]$  и обладающих следующими свойствами:

1) функции бесконечно дифференцируемы на  $[-1, 1]$ ;

2) каждая функция  $f$  ограничена на  $[-1, 1]$  в совокупности со всеми своими производными, т. е. существует такая константа  $M$  (вообще говоря, зависящая от выбора функции), что<sup>1</sup>

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

при всех  $x \in [-1, 1]$ ;

3)  $f(-1) = f(1) = 0$ .

Покажите, что  $\tilde{D}$  — линейное пространство (с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число) и

$$\|f\| = \sup_n \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n)}(x)|$$

норма на  $\tilde{D}$ .

Пусть каждой паре элементов  $x, y$  линейного пространства  $E$  поставлено в соответствие действительное число  $(x, y)$  так, что выполняются следующие свойства:

1)  $(x, y) = (y, x)$ ;

2)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ;

3)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  для любого действительного  $\lambda$ ;

4)  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = \Theta$ .

Тогда говорят, что в пространстве  $E$  определено скалярное произведение  $(x, y)$ , а  $E$  называют предгильбертовым пространством.

3.16. Задают ли скалярное произведение на числовой прямой следующие формулы: а)  $(x, y) = xy$ ; б)  $(x, y) = xy^3$ ; в)  $(x, y) = 5xy$ ?

3.17. Пусть  $V$  — множество векторов на плоскости;  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ . Проверьте, задают ли скалярное произведение на  $V$  следующие формулы:

а)  $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1$ ;

б)  $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 - a_2 b_2$ ;

<sup>1</sup> Здесь, как обычно, полагаем для удобства  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

$$\text{в) } (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2;$$

$$\text{г) } (\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

$$\text{д) } (\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}.$$

3.18. Докажите, что вторая аксиома скалярного произведения не зависит от остальных аксиом.

*Доказательство.* Требуется найти функцию от  $x$  и  $y$ , которая на некотором линейном пространстве  $E$  обладает свойствами 1, 3 и 4 скалярного произведения, но не обладает свойством 2.

Рассмотрим в качестве  $E$  множество векторов на плоскости, а в качестве функции

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos^3 \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Ясно, что  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ , т. е.  $(\vec{a}, \vec{b})$  обладает первым свойством скалярного произведения.

Проверим выполнение для  $(\vec{a}, \vec{b})$  третьей аксиомы:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}). \quad (*)$$

Это соотношение, очевидно, выполняется при  $\lambda = 0$ . Если  $\lambda > 0$ , то угол между векторами  $\lambda \vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$ , а потому соотношение  $(*)$  также выполняется. Пусть  $\lambda < 0$ . Тогда угол между векторами  $\lambda \vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\pi - \alpha$ , а потому

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}, \vec{b}) &= |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos^3 (\pi - \alpha) = -|\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos^3 \alpha = \\ &= \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos^3 \alpha = \lambda (\vec{a}, \vec{b}), \end{aligned}$$

т. е.  $(*)$  снова справедливо. Таким образом, соотношение  $(*)$  справедливо для любого действительного  $\lambda$ .

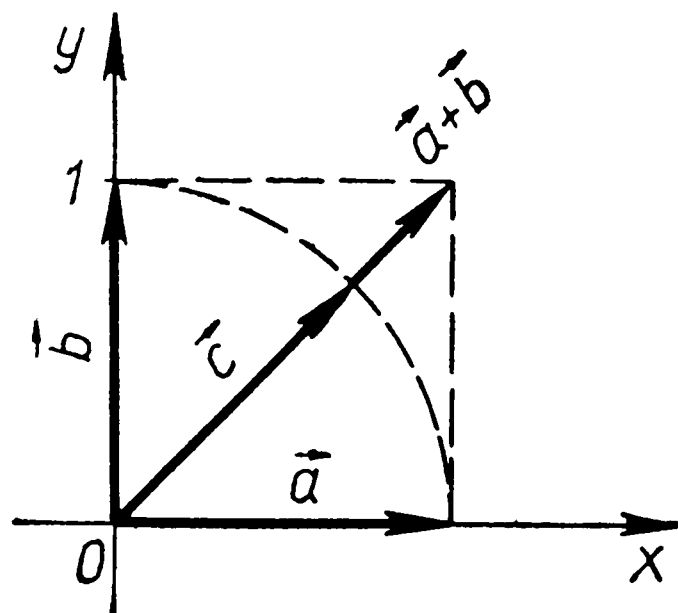
Проверяем 4-ю аксиому. По определению  $(\vec{a}, \vec{b})$  имеем:  $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$ . Поэтому  $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$  и  $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .

Итак,  $(\vec{a}, \vec{b})$  обладает свойствами 1, 3 и 4 скалярного произведения. Рассмотрим теперь векторы, изображенные на рисунке 9. В этом случае

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= \sqrt{2}, \quad (\vec{a}, \vec{c}) = \cos^3 \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) \neq (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$



Р и с. 9

— вторая аксиома скалярного произведения для  $(\vec{a}, \vec{b})$  не выполняется.

3.19. Докажите, что первая аксиома скалярного произведения не зависит от остальных аксиом.

3.20. Докажите, что четвертая аксиома скалярного произведения не зависит от остальных аксиом.

3.21. Покажите, что для скалярного произведения справедливо *неравенство Коши — Буняковского*:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

*Доказательство.* Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные, но фиксированные элементы пространства  $E$ , а  $\lambda$  — любое действительное число. Рассмотрим функцию  $\varphi(\lambda) = (\lambda x - y, \lambda x - y)$ .

Согласно 4-й аксиоме  $\varphi(\lambda) \geq 0$  при любом  $\lambda$ . С помощью аксиом 2 и 3 далее находим:

$$\varphi(\lambda) = (x, x)\lambda^2 - 2(x, y)\lambda + (y, y),$$

т. е.  $\varphi(\lambda)$  — квадратный трехчлен. Этот трехчлен не может иметь различных вещественных корней, так как тогда он не мог бы сохранять знак для всех значений  $\lambda$ . Поэтому его дискриминант  $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$  не может быть положительным. Следовательно,  $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ . Извлекая квадратный корень, получаем требуемое неравенство.

3.22. Докажите, что предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

*Доказательство.* Выполнение первых двух аксиом нормы для  $\sqrt{(x, x)}$  очевидно, а третья следует из неравенства Коши — Буняковского. Действительно

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq (x, x) + 2\|x\| \cdot \|y\| + (y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Извлекая из обеих частей полученного неравенства квадратный корень, получаем требуемое неравенство.

3.23. Проверьте, что  $\mathbf{R}_2^n$  — линейное нормированное пространство.

*Решение.* Легко проверить, что формула

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

задает на  $n$ -мерном арифметическом пространстве  $\mathbf{R}^n$  скалярное произведение. А так как  $\sqrt{(x, x)}$  совпадает (см. таблицу) с нормой, определяющей  $\mathbf{R}_2^n$ , то справедливость утверждения задачи вытекает из 3.22.

3.24. Проверьте, что  $\mathbf{R}_2^\infty$  — нормированное пространство.

3.25. Проверьте, что  $\mathbf{C}_2[a, b]$  — нормированное пространство.

3.26. Докажите неравенство Коши:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2},$$

где  $a_k, b_k$  — любые действительные числа.

3.27. Докажите обобщенное неравенство Коши:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2},$$

где  $a_k, b_k$  — любые действительные числа такие, что ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$  сходятся.

3.28. Докажите а) неравенство Буняковского:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx};$$

б) неравенство Минковского:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx},$$

где  $f$  и  $g$  — любые непрерывные на  $[a, b]$  функции.

3.29. Найдите норму элемента  $(3, -5, -2)$  в пространствах  $\mathbf{R}_2^3, \mathbf{R}_1^3, \mathbf{R}_{\infty}^3$ .

3.30. Укажите какой-нибудь элемент нормы 2 из пространств а)  $\mathbf{R}_2^2$ ; б)  $\mathbf{R}_1^2$ ; в)  $\mathbf{R}_{\infty}^2$ .

3.31. Найдите расстояние между точками  $A = (-2, 4)$  и  $B = (-4, -2)$  в метриках пространств  $\mathbf{R}_2^2, \mathbf{R}_1^2, \mathbf{R}_{\infty}^2$ .

3.32. Найдите множество точек пространства  $\mathbf{R}_{\infty}^2$ , равноудаленных от точек  $A = (-1, 0)$  и  $B = (1, 0)$ .

3.33. Найдите множество  $\Gamma$  точек пространства  $\mathbf{R}_1^2$ , расстояние от каждой из которых до точки  $A = (0, 0)$  в 2 раза больше, чем расстояние до точки  $B = (3, 0)$ .

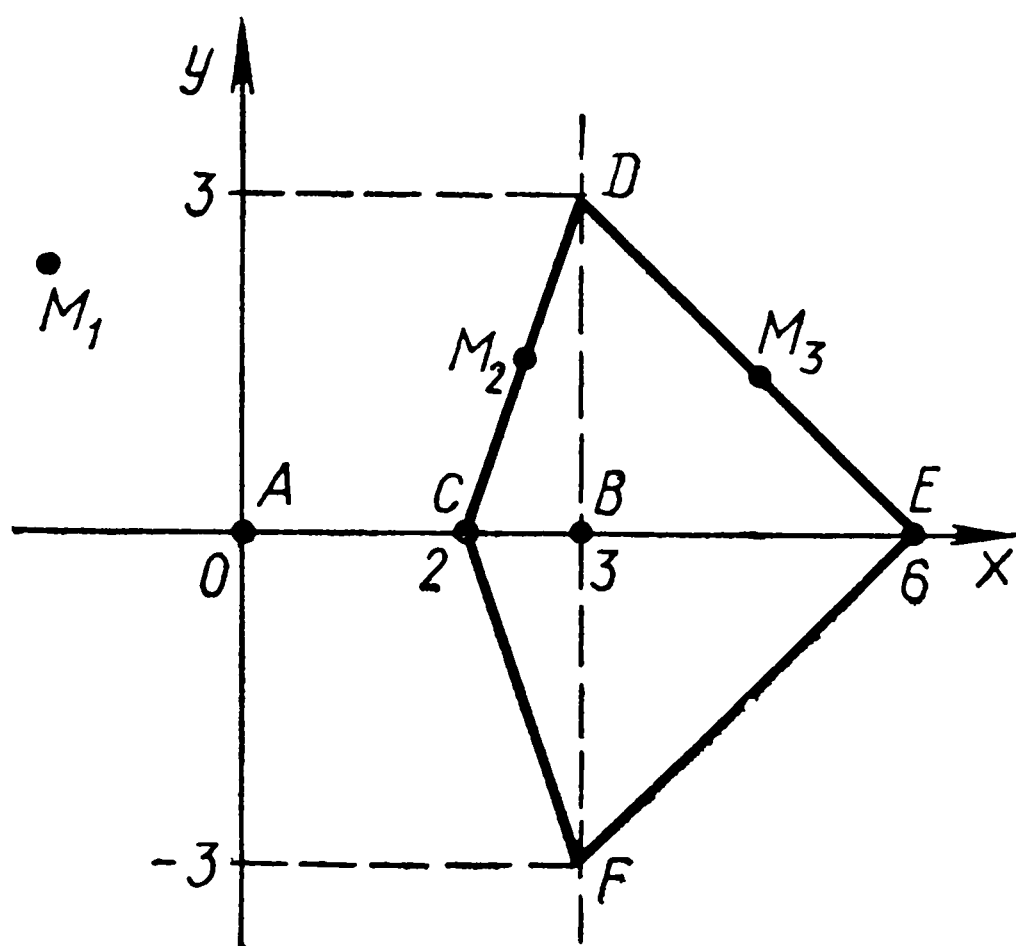
*Решение.* Пусть  $M = (x, y)$  — произвольная точка из  $\mathbf{R}_1^2$ . Тогда

$$\rho(M, A) = |x| + |y|, \quad \rho(M, B) = |x - 3| + |y|.$$

Из этих формул видно, что для точки  $M' = (x, -y)$ , симметричной  $M$  относительно оси  $Ox$ ,

$$\rho(M', A) = \rho(M, A); \quad \rho(M', B) = \rho(M, B).$$

Поэтому если точка  $M \in \Gamma$ , то и  $M' \in \Gamma$ , т. е. искомое множество  $\Gamma$  симметрично относительно оси  $Ox$ . Следовательно, нам достаточно найти лишь часть  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , находящуюся в верхней полуплоскости.



Р и с. 10

нию  $3x - y = 6$ . Отсюда видно, что в рассматриваемой полосе искомого множеству принадлежат лишь точки отрезка  $CD$ .

Так как, далее, для точки  $M_3$ , лежащей правее прямой  $x = 3$ ,

$$\rho(M_3, A) = y + x, \quad \rho(M_3, B) = x - 3 + y,$$

то  $y = 6 - x$  — уравнение оставшейся части  $\Gamma'$ , которая представляет собой отрезок  $DE$ . Дополняя ломаную  $CDE$  симметричной ей относительно оси абсцисс ломаной  $CFE$ , получаем, что множество  $\Gamma$  представляет собой замкнутую ломаную  $CDEF$ .

3.34. Что представляет собой множество, охарактеризованное в предыдущей задаче, в пространстве  $\mathbf{R}_\infty^2$ ?

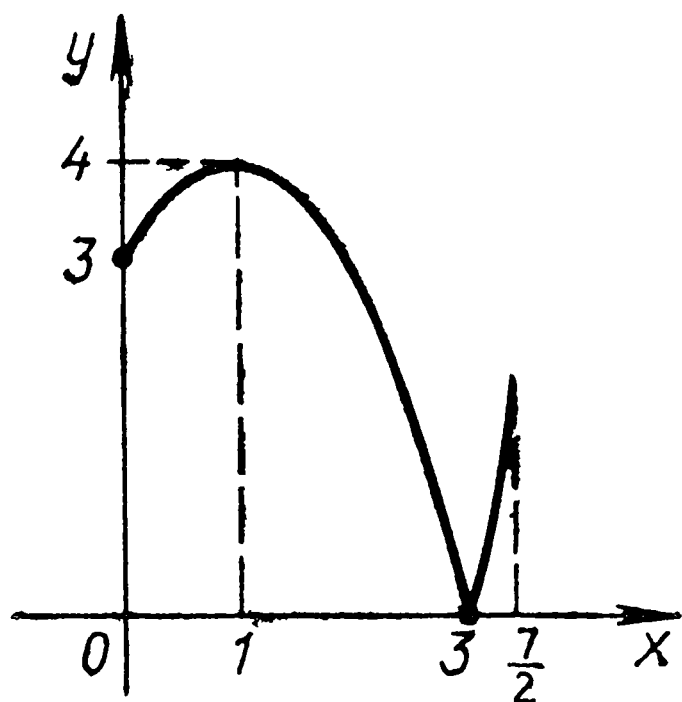
3.35. Найдите норму функции  $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$  в пространствах а)  $\mathbf{C}[-1, 5]$ ; б)  $\mathbf{C}_1[-1, 5]$ ; в)  $\mathbf{D}^1[-1, 5]$ .

3.36. Найдите расстояние между функциями  $f_1(x) = x^2$  и  $f_2(x) = x$  в метриках пространств  $\mathbf{C}_1[0, 1]$  и  $\mathbf{C}[1, 2]$ .

3.37. Найдите расстояние между функциями  $f_1(x) = x^2$  и  $f_2(x) = 2x + 3$  в метриках пространств  $\mathbf{C}[0, \frac{7}{2}]$ ,  $\mathbf{C}_1[0, \frac{7}{2}]$  и  $\mathbf{D}^1[0, \frac{7}{2}]$ .

Решение. В метрике  $\mathbf{C}[0, \frac{7}{2}]$

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) &= \max_{0 \leq x \leq \frac{7}{2}} |f_1(x) - f_2(x)| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{7}{2}} |x^2 - 2x - 3|. \end{aligned}$$



Р и с. 11

Наибольшее значение функции  $|x^2 - 2x - 3|$  на отрезке  $\left[0, \frac{7}{2}\right]$  легко найти, если построить ее график (рис. 11). График показывает, что искомое расстояние равно 4.

В метрике  $C_1 \left[0, \frac{7}{2}\right]$

$$\rho(f_1, f_2) = \int_0^{\frac{7}{2}} |x^2 - 2x - 3| dx.$$

Для вычисления интеграла необходимо «раскрыть» знак абсолютной величины. Функция  $x^2 - 2x - 3$  при  $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$  принимает неотрицательные значения, а на остальной части отрезка — отрицательные. Поэтому

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} 2x + 3 - x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{при } 3 \leq x \leq \frac{7}{2}, \end{cases}$$

и

$$\rho(f_1, f_2) = \int_0^3 (2x + 3 - x^2) dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (x^2 - 2x - 3) dx$$

(доведите вычисления до конца самостоятельно).

В метрике  $D^1 \left[0, \frac{7}{2}\right]$

$$\rho(f_1, f_2) = \max \left\{ \max_{0 \leq x \leq \frac{7}{2}} |x^2 - 2x - 3|, \max_{0 \leq x \leq \frac{7}{2}} |2x - 2| \right\}.$$

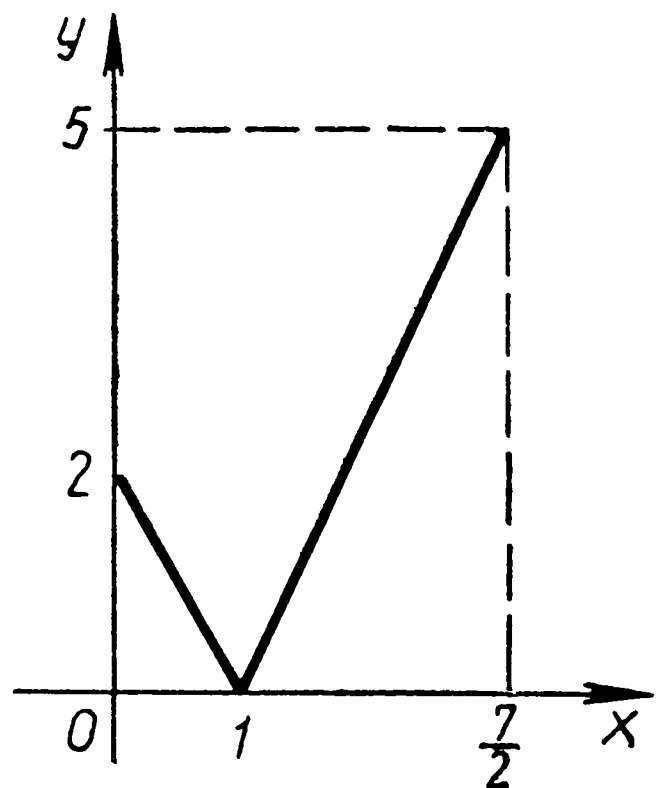
Мы уже нашли наибольшее значение первой функции. Оно равно 4. Так как  $\max_{0 \leq x \leq \frac{7}{2}} |2x - 2| = 5$  (рис. 12), то  $\rho(f_1, f_2) = \max \{4, 5\} = 5$ .

3.38. Найдите расстояние между функциями  $f_1(x) = x^3$  и  $f_2(x) = 3x + 4$  в метриках пространств:  
а)  $C_1[0, 2]$ ; б)  $C_2[0, 2]$ ; в)  $C[0, 2]$ ;  
г)  $D^1[0, 2]$ ; д)  $D^2[0, 2]$ .

3.39. Что означает геометрически расстояние между функциями  $f_1$  и  $f_2$  в метрике пространства  $C_1[a, b]$ ?

3.40. Заштрихуйте часть плоскости, в которой могут находиться графики функций, принадлежащих шару радиуса  $r$  с центром в «точке»  $f_0$  пространства  $C[a, b]$ .

3.41. Укажите какой-нибудь (отлич-



Р и с. 12



ный от константы) элемент нормы 2 из пространства а)  $C[-1, 2]$ ; б)  $C_1[-1, 2]$ .

3.42. Укажите какие-нибудь два элемента, расстояние между которыми равно 3, из пространства а)  $C[-2, 1]$ ; б)  $C_1[-2, 1]$ .

3.43. Укажите какой-нибудь элемент пространства  $C_1[-1, 1]$ , принадлежащий открытому шару радиуса  $\frac{1}{4}$  с центром  $f_0(x) = x^3$ .

3.44. Проверьте, принадлежит ли открытому шару радиуса 1 с центром в точке  $O = (0, 0, 0, \dots)$  точка

$$x = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots \right)$$

в пространстве а)  $R_1^\infty$ ; б)  $R_2^\infty$ .

3.45. Найдите норму элемента  $x = (-1, \dots, \frac{(-1)^n}{n^2}, \dots)$  в пространствах  $R_2^\infty$ ,  $R_1^\infty$ ,  $R_\infty^\infty$ .

3.46. Найдите расстояние между последовательностями

$$x = \left( 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \right) \text{ и } y = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$$

в метриках пространств: а)  $R_2^\infty$ ; б)  $R_1^\infty$ ; в)  $R_\infty^\infty$ .

3.47. Докажите, что в нормированном пространстве никакая сфера  $\|x - a\| = r$  не может быть пустым множеством (ср. с 2.36).

3.48. Пусть  $U_1 \{ \|x - a_1\| \leq r_1 \}$  и  $U_2 \{ \|x - a_2\| \leq r_2 \}$  — два замкнутых шара в линейном нормированном пространстве  $E$ . Докажите, что если  $U_1 \subset U_2$ , то (ср. с 2.35)  $r_1 \leq r_2$ .

*Доказательство.* Для любых точек  $x$  и  $y$  из  $U_2$  имеем  $\|x - y\| \leq \|x - a_2\| + \|y - a_2\| \leq 2r_2$ . В шаре же  $U_1$  есть точка  $z$ , такая, что  $\|z - a_1\| = r_1$ , и диаметрально противоположная ей точка  $u = 2a_1 - z$ . Ясно, что

$$\|z - u\| = \|z - 2a_1 + z\| = 2\|z - a_1\| = 2r_1.$$

Если бы мы имели  $U_1 \subset U_2$  и  $r_1 > r_2$ , то, с одной стороны,  $\|z - u\| = 2r_1 > 2r_2$ , а с другой стороны  $\|z - u\| \leq 2r_2$ , поскольку  $z \in U_1 \subset U_2$  и  $u \in U_1 \subset U_2$ . Получили противоречие.

3.49. Пусть  $S_1 \supset S_2$  — два замкнутых шара в нормированном пространстве. Докажите, что расстояние между их центрами не превосходит разности длин радиусов.

Пусть  $E$  — линейное пространство и  $x, y$  — две его точки. Замкнутым *линейным отрезком* в  $E$ , соединяющим точки  $x$  и  $y$ , называется множество всех точек  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Множество  $T \subset E$  называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками  $x$  и  $y$  содержит и соединяющий их линейный отрезок.

3.50. Докажите, что все точки линейного отрезка, соединяющего точки  $x$  и  $y$  и отличные от этих точек, лежат между  $x$  и  $y$  (см. задачу 2.39).

3.51. Найдите в пространстве  $R_\infty^2$  линейный отрезок и отрезок, соединяющие точки  $A(-1, 0)$  и  $B(1, 0)$ .

3.52. Найдите в пространстве  $R_1^2$  линейный отрезок и отрезок, соединяющие точки  $A(-1, -1)$  и  $B(1, 1)$ .

3.53. Докажите, что в произвольном линейном нормированном пространстве пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

3.54. Докажите, что единичный шар  $\|x\| \leq 1$  в произвольном линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.

3.55. Докажите, что третью аксиому в определении линейного нормированного пространства можно заменить условием выпуклости единичного замкнутого шара.

3.56. Что представляет собой шар  $\|x\| \leq 1$  на плоскости с нормой а)  $R_\infty^2$ ; б)  $R_1^2$ ?

3.57. Что представляет собой шар  $\|x\| \leq 1$  на плоскости с нормой, порождаемой скалярным произведением, определенным в задаче а) 3.17 в); б) 3.17 г)?

3.58\*. На плоскости дана замкнутая ограниченная выпуклая центрально-симметричная фигура  $T$ , центр симметрии которой  $\Theta$  является для  $T$  внутренней точкой. Докажите, что на плоскости можно так ввести норму, что фигура  $T$  будет относительно этой нормы замкнутым единичным шаром.

3.59\*. Предположим, что плоскость — это анизотропная пластина, в которой звук распространяется с разной скоростью в разных направлениях. Отложим из начала координат по каждому направлению отрезок, равный по величине скорости звука вдоль этого направления. Допустим, что эти отрезки «замостили» фигуру  $T$ , описанную в предыдущей задаче. Покажите, что  $\rho(m, t) = \|m - t\|_T$ , где  $\|\cdot\|_T$  — норма, введенная в 3.58, равна времени, за которое звуковой сигнал проходит из точки  $m$  до точки  $t$  по прямой.

3.60. Проверьте, что множество положительных чисел с операциями  $x + y = xy$  и  $\lambda \cdot x = x^\lambda$  образует линейное пространство. Задайте какую-нибудь норму на этом пространстве.

3.61. Пусть  $E$  — предгильбертово пространство. Докажите, что для любых  $x$  и  $y$  из  $E$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Какую геометрическую теорему обобщает это соотношение?

3.62. Элементы  $x$  и  $y$  предгильбертова пространства  $E$  называются *ортгональными*, если  $(x, y) = 0$ . Докажите, что для ортгональных элементов справедливо соотношение

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Какую теорему элементарной геометрии обобщает это соотношение?

Метрические пространства  $M$  и  $N$  с метриками  $r$  и  $\rho$  соответственно называются *изометрическими*, если существует такая биекция  $f: M \rightarrow N$ , что для любых  $x$  и  $y$  из  $M$

$$r(x, y) = \rho(f(x), f(y)).$$

3.63. Изометричны ли следующие метрические пространства:  
а) отрезки  $[0, 1]$  и  $[5, 6]$ ; б) отрезки  $[0, 1]$  и  $[2, 4]$  с обычной метрикой?

3.64. Докажите, что метрические пространства  $[a, b]$  и  $C[a, b]$  не изометричны.

3.65. Докажите, что метрические пространства  $C[0, 1]$  и  $C[0, 2]$  изометричны.

3.66. Отрезок  $[0, 1]$  и промежуток  $]0, 1[$  эквивалентны. Изометричны ли они?

3.67. Установите изометрию  $R_2^2$  и координатной плоскости.

## § 4 ТОПОЛОГИЯ МНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Окрестностью точки  $a$  метрического пространства называется любой открытый шар с центром в этой точке. Шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $a$  называют иногда  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$ .

Пусть  $E$  — некоторое множество метрического пространства  $M$  и  $a$  — произвольная точка из  $M$  (см. рис. 13 для случая  $E = R_2^2$ ). Точка  $a$  называется *внутренней* для множества  $E$ , если у нее имеется окрестность, целиком состоящая из точек  $E$ . Из определения видно, что внутренняя для множества  $E$  точка принадлежит множеству  $E$ .

Точка  $b$  называется *внешней* для множества  $E$ , если у нее имеется окрестность, состоящая из точек дополнения  $CE$  к  $E$ . Внешняя для  $E$  точка множеству  $E$  не принадлежит.

Точка  $c$  метрического пространства  $M$  называется *границной* для множества  $E$ , если любая окрестность точки  $c$  содержит как точки из  $E$ , так и точки из дополнения к  $E$ .

4.1. Покажите, что граничная для множества  $E$  точка может как принадлежать множеству  $E$ , так и не принадлежать ему.

4.2. Покажите, что любая точка  $a$  метрического пространства  $M$  является для данного множества  $E \subset M$  либо внешней, либо внутренней, либо граничной, причем каждая из этих возможностей исключает остальные.

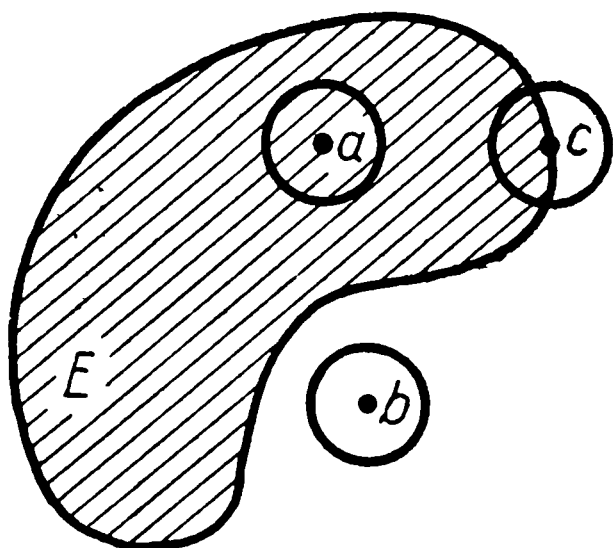
Точка  $a \in E$  называется *изолированной* точкой  $E$ , если у нее существует окрестность, не содержащая точек из  $E$ , отличных от  $a$ .

4.3. Покажите, что изолированная точка подмножества  $E$  линейного нормированного пространства является граничной для  $E$ .

Множество всех граничных точек для  $E$  называется *границей*  $E$  и обозначается  $\partial E$ .

Множество  $E \cup \partial E$  называется *замыканием* множества  $E$  и обозначается через  $\overline{E}$ . Множество  $E \setminus \partial E$  называется *открытым ядром*  $E$  и обозначается через  $O(E)$ .

В задачах 4.4—4.6 указано множество  $E \subset R_2^2$ . Требуется найти  $\partial E$ ,  $\overline{E}$ ,  $O(E)$ ,  $\overline{CE}$ ,  $O(CE)$ .



Р и с. 13

4.4.  $E$  — множество точек  $(x, y)$  таких, что  $-1 < x \leq 1$ ,  $-1 < y \leq 1$ .

4.5.  $E$  — открытый круг с выколотым центром.

4.6.  $E$  — множество точек с рациональными координатами.

В задачах 4.7—4.14 найдите множество  $\partial E \setminus E$  для указанного в условии множества  $E$ .

4.7. Множество точек прямой вида

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

4.8. Множество точек плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ , которые соответствуют комплексным числам

$$z_n = i^n + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

4.9. Множество корней уравнения

$$\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = 0.$$

4.10. Множество рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$ .

4.11. Множество точек окружностей  $x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) на плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ .

4.12. Множество точек окружностей  $x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) на плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ .

4.13. Множество точек прямых  $x = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) на плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ .

4.14. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

$$\text{а) } x = \frac{1}{n}, |y| \leq \frac{1}{n}; \text{ б) } x = \frac{1}{n}, |y| \geq \frac{1}{n}; \text{ в) } x = \frac{1}{n}, |y| \leq n; \text{ г) } x = \frac{1}{n}, |y| \geq n, \text{ где } n \in \mathbf{N}.$$

4.15. Множество  $E \subset \mathbf{R}_2^2$  состоит из точек круга  $x^2 + y^2 < 4$ , имеющих рациональную абсциссу. Найдите границу этого множества. Имеет ли это множество внутренние точки?

4.16. Найдите замыкание множества  $E$  всех точек из  $\mathbf{R}$  вида  $x = 2^{\frac{m}{n}}$ , где  $m$  и  $n$  — всевозможные натуральные числа.

4.17. На плоскости  $\mathbf{R}_2^2$  постройте множество  $E$ , для которого  $\partial E \setminus E$  состоит из двух точек  $A = (3, 4)$  и  $B = (-1, 2)$ .

4.18. На прямой  $\mathbf{R}$  постройте множество  $E$ , для которого  $\partial E \setminus E$  состоит из всех целочисленных точек.

4.19. Пусть  $E$  — множество точек  $x = (x_1, x_2, \dots)$  пространства  $\mathbf{R}_2^\infty$ , у которых все координаты  $x_k$  положительны. Докажите,

что точка  $a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}}, \dots \right)$  является граничной для множества  $E$ .

4.20. Пусть  $E$  — множество функций пространства  $C[-1, 1]$  таких, что  $f(x) \leq 1$  при  $x \in [-1, 1]$ . Внутренней, граничной или внешней «точкой» для  $E$  является функция а)  $g(x) = 1 - x^2$ ; б)  $g(x) = \sin x$ ; в)  $g(x) = 2x$ ?

4.21. а) Докажите, что  $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$ . Верно ли обратное включение?

б) Докажите, что  $\partial\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^n \partial A_k$ . Верно ли это соотношение для счетной совокупности множеств?

4.22. Верны ли следующие соотношения: а)  $\partial(A_1 \cap A_2) \subset \partial A_1 \cap \partial A_2$ ; б)  $\partial(A_1 \cap A_2) \supset \partial A_1 \cap \partial A_2$ ; в)  $\partial A \subset \partial B$ , если  $A \subset B$ ?

4.23. Докажите, что если  $A \subset B$ , то  $\overline{A} \subset \overline{B}$ . Верно ли обратное включение?

*Доказательство.* Пусть  $x \in \overline{A} = A \cup \partial A$ . Если  $x \in B$ , то  $x \in \overline{B}$ . Если же  $x \notin B$ , то в любой окрестности точки  $x$  есть точки из  $A$  (поскольку  $x \in \overline{A} = A \cup \partial A$ ), принадлежащие  $B$  в силу включения  $A \subset B$ . Так как  $x \notin B$ , то  $x \in \partial B$  и потому  $x \in \overline{B}$ .

Итак, любая точка из  $\overline{A}$  принадлежит  $\overline{B}$ , и потому  $\overline{A} \subset \overline{B}$ . Утверждение доказано.

Обратное, вообще говоря, неверно. Это видно на примере множеств  $A = [0, 1[$  и  $B = ]0, 1]$  из  $\mathbb{R}$ .

4.24. Докажите, что  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ . Верно ли это соотношение для любого конечного числа слагаемых? А если слагаемых бесконечное множество?

4.25. Докажите, что  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . Имеет ли место обратное включение?

4.26. Докажите, что у множеств  $E$  и  $CE$  границы совпадают.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки. Множество называется *открытым*, если оно не содержит ни одной своей граничной точки.

4.27. а) Можно ли утверждать, что всякое множество является либо открытым, либо замкнутым?

б) Может ли некоторое множество  $E$  из метрического пространства  $M$  быть и замкнутым и открытым одновременно?

4.28. а) Является ли открытым множеством интервал  $]A, B[$ , если его рассматривать как подмножество 1) прямой; 2) плоскости?

б) Является ли замкнутым множеством отрезок  $[A, B]$ , если его рассматривать как подмножество 1) прямой; 2) плоскости?

4.29. Пусть множество  $E$  состоит из четырех точек  $a_1, a_2, a_3, a_4$  метрического пространства задачи 2.9. Является ли  $E$  открытым множеством? Является ли оно замкнутым?

4.30. Докажите, что для того, чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы все его точки были внутренними.

4.31. Пусть  $A$  и  $B$  — два множества в линейном нормированном пространстве  $E$ . Обозначим через  $A + B$  множество всевозможных сумм  $a + b$ , где  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Докажите, что если хотя бы одно из множеств  $A$  и  $B$  открыто, то и  $A + B$  открыто.

4.32. Покажите на примере, что множество  $A + B$  (см. 4.31) может и не быть замкнутым, когда и  $A$  и  $B$  замкнуты.

4.33. Докажите, что открытый шар  $U$  в любом метрическом пространстве — открытое множество.

*Доказательство.* В силу 4.30 достаточно убедиться, что любая точка шара принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

Пусть  $a$  — центр шара,  $R$  — его радиус. Рассмотрим произвольную точку  $x \in U$ . Это означает, что  $\rho(a, x) = r < R$ . Покажем, что  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon$  точки  $x$  при  $\varepsilon = R - r$  состоит только из точек  $U$ . Действительно, для любого  $y \in U_\varepsilon$  по аксиоме треугольника

$$\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < r + (R - r) = R.$$

4.34. Докажите, что замкнутый шар  $W$  в любом метрическом пространстве — замкнутое множество.

*Доказательство.* Достаточно показать, что любая точка  $x \notin W$  является внешней для  $W$ . Имеем  $\rho(a, x) = r > R$ , где  $a$  — центр,  $R$  — радиус шара  $W$ . Рассмотрим  $(r - R)$ -окрестность  $V$  точки  $x$ . Так как для любой точки  $y$  из  $V$

$$\rho(a, y) \geq \rho(a, x) - \rho(x, y) > r - (r - R) = R,$$

то  $y \in CW$ , а это и означает, что  $V \subset CW$  или что  $x$  внешняя для  $W$  точка.

4.35. Докажите, что замыкание  $\bar{E}$  любого множества  $E$  замкнуто.

4.36. Докажите, что открытое ядро  $O(E)$  любого множества  $E$  открыто.

4.37. Докажите, что граница  $\partial E$  любого множества  $E$  замкнута.

4.38. Пусть  $U$  открытый, а  $\tilde{U}$  замкнутый шар с одним и тем же центром и одного и того же радиуса. Докажите, что  $\bar{U} \subset \tilde{U}$ . Имеет ли место обратное включение?

4.39. Докажите, что в линейном нормированном пространстве граница открытого шара  $\|x - a\| < r$  есть сфера  $\|x - a\| = r$ .

4.40. Докажите, что в линейном нормированном пространстве замкнутый шар  $\|x - a\| \leq r$  является замыканием (ср. с 4.38) открытого шара  $\|x - a\| < r$ .

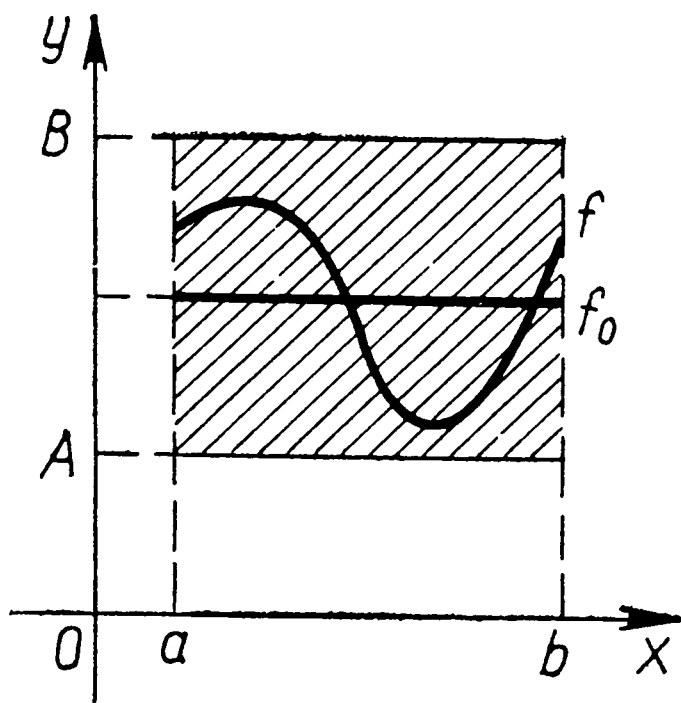
4.41. Докажите, что множество  $E$  функций из  $C[a, b]$ , удовлетворяющих на  $[a, b]$  неравенству

$$A < f(x) < B, \quad (*)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые фиксированные числа, открыто.

*Решение.* Прибавив ко всем частям неравенства (\*) число  $-(A + \frac{B-A}{2})$ , получим:





Р и с. 14

$$-\frac{B-A}{2} < f(x) - \left(A + \frac{B-A}{2}\right) < \frac{B-A}{2}.$$

Отсюда следует, что в метрике пространства  $\mathbf{C}[a, b]$  выполняется соотношение

$$\rho(f_0, f) < \frac{B-A}{2},$$

где  $f_0(x) = A + \frac{B-A}{2}$  для всех  $x \in [a, b]$ . А это означает, что  $E$  — открытый шар с центром в точке  $f_0$  и ради-

усом  $\frac{B-A}{2}$  и поэтому является открытым множеством.

Заметим, что задача совершенно очевидна с геометрической точки зрения, если вспомнить (см. ответ к 3.40), что шар  $S_r(f_0)$  в пространстве  $\mathbf{C}[a, b]$  образуют функции, графики которых принадлежат криволинейной полосе  $f_0(x) - r < y < f_0(x) + r$ . Множество  $E$  образуют функции  $f$ , графики которых лежат в полосе  $A < y < B$ , т. е. образуют шар (на рисунке 14 показан центр этого шара и его радиус).

4.42. Пусть  $E \subset \mathbf{C}[a, b]$  состоит из таких функций, для которых на  $[a, b]$  выполняется неравенство  $A \leq f(x) \leq B$ . Докажите, что  $E$  — замкнутое множество.

4.43. Пусть  $E \subset \mathbf{C}[0, 1]$  состоит из таких функций, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq 1$ . Докажите, что  $E$  — замкнутое множество.

4.44. Пусть  $E$  — множество точек  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbf{R}_2^\infty$ , у которых все координаты положительны. Открыто ли это множество?

4.45. Пусть на множестве  $M$  заданы две метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$  такие, что для некоторого  $k > 0$ .

$$\rho_2(x, y) \leq k\rho_1(x, y).$$

Докажите, что а) всякое множество, открытое относительно метрики  $\rho_2$ , открыто и относительно метрики  $\rho_1$ ; б) всякое множество, замкнутое относительно метрики  $\rho_2$ , замкнуто и относительно метрики  $\rho_1$ .

4.46. Пусть на множестве  $E$  заданы две метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$  такие, что для некоторых  $k_1, k_2 > 0$

$$k_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq k_2\rho_1(x, y).$$

Докажите, что всякое множество а) замкнутое относительно одной метрики, замкнуто и относительно другой; б) открытое относительно одной метрики, открыто и относительно другой.

4.47. Докажите, что дополнение замкнутого множества открыто, а открытого замкнуто.

*Доказательство* очевидно, если воспользоваться результатом задачи 4.26.

4.48. Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств открыто.

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$  и  $A_{\alpha}$  открыты. Пусть  $x$  — произвольная точка множества  $A$ . Тогда  $x$  принадлежит некоторому  $A_{\alpha}$ . Так как  $A_{\alpha}$  открыто, то в силу 4.30 существует окрестность  $U$  точки  $x$ , принадлежащая  $A_{\alpha}$ . Но если  $U \subset A_{\alpha}$ , то  $U \subset A$ , а это по 4.30 и означает, что  $A$  — открытое множество.

4.49. Докажите, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$  и  $A_i$  открыты. Пусть  $x \in A$ . Тогда  $x \in A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Так как каждое  $A_i$  открыто, то для каждого  $A_i$  существует открытый шар  $U(x, r_i) \subset A_i$ . Среди этих  $n$  концентрических шаров выберем шар с наименьшим радиусом  $r = \min \{r_i\}$ . Так как  $U(x, r) \subset U(x, r_i) \subset A_i$  при любом  $i$ , то  $U(x, r) \subset A$ , а это в силу 4.30 и означает, что  $A$  открыто.

4.50. Всегда ли открыто пересечение счетного семейства открытых множеств?

4.51. Верно ли, что пересечение счетного семейства открытых множеств никогда не является открытым множеством?

4.52. Докажите, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$  и  $A_{\alpha}$  — замкнуты. Рассмотрим дополнение  $A$ . По принципу двойственности  $CA = \bigcup CA_{\alpha}$ . В силу 4.47 множества  $CA_{\alpha}$  открыты, а тогда по 4.48 и  $CA$  открыто. Но так как  $A = C(CA)$ , то из 4.47 и вытекает, что  $A$  замкнуто.

4.53. Докажите, что объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

4.54. Всегда ли замкнуто объединение счетного семейства замкнутых множеств?

4.55. Можно ли утверждать, что объединение счетного семейства замкнутых множеств всегда незамкнуто?

Множество  $E$  метрического пространства  $M$  (в частности, само  $M$ ) называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре этого пространства.

4.56. *Гильбертовым кирпичом* называют множество  $K$  точек  $x = (x_1, x_2, \dots)$  пространства  $\mathbf{R}_2^{\infty}$ , у которых  $|x_k| \leq \frac{1}{2^k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Докажите, что гильбертов кирпич — ограниченное множество.

4.57. Используя задачи § 2, приведите примеры ограниченных метрических пространств.

4.58. На плоскости  $\mathbf{R}_2^2$  дана последовательность замкнутых концентрических кругов радиусов  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ . Является ли их объединение ограниченным множеством, открытым, замкнутым?

4.59. Докажите, что объединение двух ограниченных множеств является ограниченным множеством. Верно ли это утверждение для любого конечного числа множеств? А если множеств бесконечно много?

4.60. Является ли пересечение ограниченных множеств ограниченным множеством?

4.61. Докажите, что множество  $P$  из нормированного линейного пространства тогда и только тогда ограничено, когда существует такое число  $K > 0$ , что  $\|x\| < K$  для всех  $x \in P$ .

4.62. Докажите, что никакое линейное нормированное пространство, отличное от нуль-пространства, не ограничено.

Подмножество  $E$  метрического пространства  $M$  называется *всюду плотным* в  $M$ , если  $M = E \cup \partial E$ .

4.63. Докажите, что если  $E$  всюду плотно в  $M$ , то для любых  $a \in M$  и  $r > 0$  в  $U(a, r)$  есть хоть одна точка из  $E$ .

4.64. Докажите, что если  $E$  всюду плотно в  $M$  и  $F$  всюду плотно в  $E$ , то  $F$  всюду плотно в  $M$ .

4.65. Докажите, что множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел всюду плотно в  $\mathbb{R}$ .

4.66. Докажите, что множество  $\mathbb{I}$  иррациональных чисел всюду плотно в  $\mathbb{R}$ .

4.67. Является ли отрезок  $[0, 1]$  всюду плотным подмножеством в  $\mathbb{R}$ ?

4.68. Является ли всюду плотным в  $\mathbb{R}$  множество чисел, десятичная запись которых содержит лишь цифры 1 и 2?

4.69. Установите, какие из следующих множеств всюду плотны на координатной плоскости:

- а) множество точек, обе координаты которых рациональны;
- б) множество точек, обе координаты которых иррациональны;
- в) множество точек, обе координаты которых целые;
- г) множество точек, хоть одна координата которых целая;
- д) множество точек, одна из координат которых рациональна;
- е) множество точек окружности  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- ж) множество точек круга  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

4.70. Обозначим через  $L$  подпространство в  $\mathbb{C}[a, b]$ , состоящее из кусочно-линейных функций (т. е. функций, графиком которых служит некоторая ломаная). Докажите, что  $L$  всюду плотно в  $\mathbb{C}[a, b]$ .

Подмножество  $E$  метрического пространства  $M$  называется *нигде не плотным* в  $M$ , если для любой окрестности  $U(a, r)$ ,  $a \in M$ ,  $r > 0$ , найдется такая окрестность  $V(b, r_1)$ , что  $V(b, r_1) \subset U(a, r)$  и  $V(b, r_1) \cap M = \emptyset$ .

4.71. Какие из следующих подмножеств нигде не плотны в  $\mathbb{R}$ :

- а) множество целых чисел;
- б) множество рациональных чисел;

в)  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$ ;

г) множество чисел, десятичная запись которых содержит лишь числа 1 и 2;

д) отрезок  $[0, 4]$ ;

е) множество рациональных чисел  $r$ , таких, что  $0 \leq r \leq 4$ .

4.72. Докажите, что объединение двух множеств, нигде не плотных в  $M$ , нигде не плотно в  $M$ .

4.73. Можно ли утверждать, что любое подмножество  $E$  метрического пространства  $M$  либо всюду плотно в  $M$ , либо нигде не плотно в  $M$ ?

4.74. Какие из множеств задачи 4.69 нигде не плотны на координатной плоскости?

Возьмем отрезок  $[0, 1]$  и разделим его на три конгруэнтные части, после чего удалим средний интервал  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ . Аналогичный процесс произведем с оставшимися отрезками  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  и  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , потом — с оставшимися отрезками  $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ ,  $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$  и т. д.

Множество, оставшееся на  $n$ -м шаге, обозначим  $F_n$ , а  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  обозначим  $F_0$ . Множество  $F_0$  называют канторовым троичным множеством.

Интервалы, выброшенные на  $n$ -м шаге процесса, называются смежными интервалами к  $F_0$  ранга  $n$ .

4.75. Докажите, что

а) канторово троичное множество  $F_0$  состоит из точек отрезка  $[0, 1]$ , допускающих троичную запись, содержащую лишь цифры 0 и 2,

б) множество  $F_0$  замкнуто, в) множество  $F_0$  нигде не плотно на  $[0, 1]$ ,

г) в произвольной окрестности любой точки  $a$  из  $F_0$  есть отличные от  $a$  точки из  $F_0$ .

4.76. Возьмем квадрат со стороной 1, разделим его на 9 конгруэнтных квадратов и выбросим внутренние точки центрального квадрата. Потом сделаем то же самое с каждым из восьми оставшихся квадратов и т. д. Множество, остающееся после  $n$ -го шага, обозначим  $S_n$ , а  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$  — через  $S_0$ . Это множество называют ковром Серпинского.

Докажите, что

а) множество  $S_0$  замкнуто;

б) множество  $S_0$  нигде не плотно в квадрате;

в) в произвольной окрестности точки  $a$  из  $S_0$  есть отличные от  $a$  точки из  $S_0$ .

## § 5 СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Последовательность  $x_1, \dots, x_n, \dots$  точек метрического пространства  $M$  называется *сходящейся*, если существует такая точка  $x$  этого пространства, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ . В этом случае пишут  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  или  $x_n \rightarrow x$  и говорят, что  $x$  — *предел* последовательности точек  $(x_n)$  или  $(x_n)$  *сходится* к  $x$ .

5.1. Докажите, что никакая последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела.

*Доказательство.* Пусть  $x_n \rightarrow a$  и  $x_n \rightarrow b$ . В силу аксиом метрики

$$0 \leq \rho(a, b) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, b).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем  $\rho(a, b) = 0$  или  $a = b$ .

5.2. Докажите, что если последовательность  $(x_n)$  сходится к точке  $x$ , то и любая ее подпоследовательность сходится к той же точке  $x$ .

5.3. Докажите, что а) если  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(a, b)$ ; б) если  $x_n \rightarrow a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ , то  $y_n \rightarrow a$ .

5.4. Докажите, что в любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность — ограниченное множество.

5.5. Докажите, что если в линейном нормированном пространстве  $E$  последовательность  $(x_n)$  сходится к  $x$ , а числовая последовательность  $(\lambda_n)$  сходится к числу  $\lambda$ , то последовательность  $(\lambda_n x_n)$  элементов  $E$  сходится к элементу  $\lambda x \in E$ .

*Доказательство.* Условие  $x_n \rightarrow x$  означает, что  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ , а условие  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  что  $|\lambda - \lambda_n| \rightarrow 0$ . В силу свойств нормы и линейного пространства имеем:

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x - x_n\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|.$$

Обозначив  $|\lambda_n| \cdot \|x - x_n\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|$  через  $t_n$ , полученное соотношение можно записать в виде:

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq t_n.$$

Так как  $t_n \rightarrow 0$ , то по теореме о промежуточной последовательности и  $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \rightarrow 0$ . Это и означает, что  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$ .

5.6. Докажите, что если в нормированном пространстве  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , то  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ .

5.7. Проверьте, сходится ли последовательность функций  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$  к функции  $f(x) \equiv 0$  в пространстве: а)  $C[0, 1]$ ; б)  $C_1[0, 1]$ .

*Решение.* а) С помощью производной находим, что

$$\rho(f_n, f) = \max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Так как  $\rho(f_n, f)$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то ответ на вопрос задачи отрицательный.

б) В пространстве  $C_1[0, 1]$  имеем:

$$\rho(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^1 \frac{nx dx}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{d(1 + n^2 x^2)}{1 + n^2 x^2} = \frac{\ln(1 + n^2)}{2n}.$$

По правилу Лопиталю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + n^2)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2} = 0,$$

а это означает, что  $f_n \rightarrow f$  по метрике пространства  $C_1[0, 1]$ .

5.8. Покажите, что последовательность функций  $f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n^2}$  сходится в пространстве  $D^1[0, 1]$  к функции  $f(x) \equiv 0$ .

*Решение.* С помощью производной находим:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{\ln(1 + n^2)}{2n^2},$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f'_n(x) - f'(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} f'_n(x) = f'_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{x}{1 + n^2 x^2}\right)_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}.$$

Для нахождения  $\rho(f_n, f)$  нужно выбрать наибольшее из двух полученных выражений. Однако поскольку сделать это не совсем просто, можно поступить и иначе. Заметим, что и первое (это легко проверить с помощью правила Лопиталю) и второе выражения стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Теперь ясно, что  $\rho(f_n, f)$  стремится к нулю.

В з а д а ч а х 5.9—5.12 проверьте, сходится ли данная последовательность функций к функции  $f(x) \equiv 0$  по метрикам указанных пространств.

5.9.  $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$ ;  $C[0, 1]$  и  $C_1[0, 1]$ .

5.10.  $f_n(x) = x e^{-nx}$ ;  $C[0, 10]$  и  $C_1[0, 10]$ .

5.11.  $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}} \sqrt{2nx} e^{-\frac{1}{2}nx^2}$ ;  $C[0, 1]$  и  $C_2[0, 1]$ .

5.12.  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ;  $C[-\pi, \pi]$ ,  $C_1[-\pi, \pi]$  и  $D^1[-\pi, \pi]$ .

5.13. Покажите, что последовательность функций  $f_n$ , задаваемых формулой  $f_n(x) = x^n$ , сходится к функции  $f(x) \equiv 0$  по метрике пространства  $C_1[0, 1]$ . Сходится ли  $f_n(a)$  к  $f(a)$  в каждой точке  $a$  отрезка  $[0, 1]$ ?

5.14. Покажите, что последовательность функций  $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$  в каждой точке отрезка  $[0, 1]$  сходится к функции  $f(x) \equiv 0$ . Сходится ли  $f_n$  к  $f$  по метрике пространства  $C_1[0, 1]$ ?

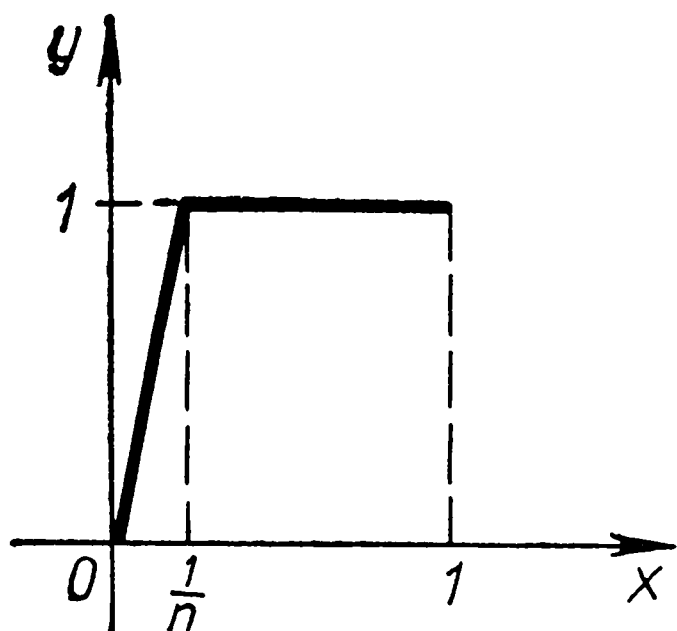
5.15. Докажите, что сходимость последовательности функций по метрике пространства  $C[a, b]$  равносильна равномерной сходимости.

Пусть на одном и том же линейном пространстве  $E$  заданы две нормы.

Если любая последовательность из  $E$ , сходящаяся по первой норме, сходится (к тому же пределу) и по второй норме, то говорят, что первая норма не слабее второй.

Если каждая из двух норм на  $E$  не слабее другой, то такие нормы называются эквивалентными. Про ту из двух неэквивалентных норм, которая не слабее другой, говорят также, что она сильнее.





Р и с. 15

5.16. Пусть на линейном пространстве заданы две нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  и пусть существует такое  $k > 0$ , что  $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$  для всех  $x \in E$ . Докажите, что  $\|\cdot\|_1$  не слабее  $\|\cdot\|_2$ .

5.17. Докажите, что если существуют такие числа  $k_1 > 0$  и  $k_2 > 0$ , что  $k_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2\|x\|_1$  при всех  $x \in E$ , то нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  эквивалентны.

5.18. Докажите, что норма  $\|\cdot\|_1$  пространства  $C_1[a, b]$  слабее нормы  $\|\cdot\|$  пространства  $C[a, b]$ .

*Доказательство.* Так как

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = (b-a) \|f\|,$$

то в силу 5.16  $\|\cdot\|_1$  не сильнее  $\|\cdot\|$ .

Для завершения доказательства достаточно построить пример, показывающий, что обратное утверждение не верно. Положим для простоты  $a = 0$ ,  $b = 1$  и рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

непрерывных на отрезке  $[0, 1]$ , и функцию  $f(x) \equiv 1$ . Так как

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

то  $f_n \rightarrow f$  по норме  $\|\cdot\|_1$ . С другой стороны (см. рис. 15),

$$\|f_n - f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} (1 - f_n(x)) = 1,$$

так как  $f_n(0) = 0$ . Значит,  $(f_n)$  не сходится к  $f$  по норме  $\|\cdot\|$ .

5.19. Докажите, что норма пространства  $C_2[a, b]$  слабее нормы пространства  $C[a, b]$ .

5.20. Докажите, что норма пространства  $C_1[a, b]$  слабее нормы пространства  $C_2[a, b]$ .

5.21. Пусть  $E$  — линейное пространство функций, имеющих на отрезке  $[a, b]$  непрерывные производные до порядка  $n$  включительно. На  $E$  можно рассматривать нормы  $\|\cdot\|_k$  каждого из пространств  $D^k[a, b]$  ( $k \leq n$ ) и  $\|\cdot\|_0$  пространства  $C[a, b]$ . Покажите, что при  $0 \leq k < m \leq n$  норма  $\|\cdot\|_k$  слабее нормы  $\|\cdot\|_m$ .

В пространствах  $R_2^n$ ,  $R_1^n$ ,  $R_\infty^n$  наряду со сходимостью последовательности точек по соответствующей норме рассматривают еще так называемую *покоординатную сходимость*. Говорят, что *последовательность* точек  $(x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}))$  *сходится* к точке  $x = (x_1, \dots, x_n)$  *покоординатно*, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_m^{(k)} = x_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ).

Аналогично вводится понятие покоординатной сходимости и в пространствах  $R_2^\infty$ ,  $R_1^\infty$ ,  $R_\infty^\infty$ .

**5.22.** Дана последовательность числовых последовательностей:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right), \\ x^{(2)} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right), \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots\right) \end{aligned}$$

К какой последовательности сходится она по координатам? Сходится ли данная последовательность к тому же пределу в метриках пространств  $R_2^\infty, R_1^\infty, R_\infty^\infty$ ?

*Решение.* Данная последовательность, как легко заметить, по координатно сходится к точке  $x = (0, \dots, 0, \dots)$ . Покажем, что к этой же точке последовательность сходится и в метриках указанных пространств.

$$1) \quad R^{\infty}_2 : \rho^2(x^{(n)}, x) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \dots = \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} + \dots =$$

$$= \frac{1}{4^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \rightarrow 0.$$

$$2) \quad R_1^\infty : \rho(x^{(n)}, x) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{2}{2^{n-1}} \rightarrow 0.$$

$$3) \quad \mathbf{R}_{\infty}^{\infty} : \rho(x^{(n)}, x) = \sup_n \left\{ \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \dots \right\} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0.$$

5.23. К какой точке сходится последовательность точек  $M_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n}{n+1})$  по координатам? Сходится ли эта последовательность к указанной точке в пространствах  $\mathbf{R}_2^2$ ,  $\mathbf{R}_1^2$  и  $\mathbf{R}_\infty^2$ ?

5.24. Дана последовательность точек пространства  $\mathbf{R}_1^\infty$ :

$$x_n = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots \right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Найдите предел этой последовательности.

5.25. Докажите, что сходимость по метрике пространства  $R_2^n$  эквивалентна покоординатной сходимости.

*Доказательство.* Пусть  $(x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}))$  сходится к точке  $x = (x_1, \dots, x_n)$  по метрике  $R_2^n$ . Так как

$$\rho^2(x^{(k)}, x) = \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2, \quad (1)$$

то

$$0 \leq |x_i^{(k)} - x_i| \leq \rho(x^{(k)}, x). \quad (2)$$

Но по условию  $\rho(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$ , а тогда из (2) следует, что  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) при  $k \rightarrow \infty$ , а это и означает покоординатную сходимость  $(x^{(k)})$  к  $x$ .

Пусть, наоборот,  $(x^{(k)})$  сходится к  $x$  покоординатно. Это означает, что  $|x_i^{(k)} - x_i| \rightarrow 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) при  $k \rightarrow \infty$ . Но тогда, как видно из (1), и  $\rho(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$ , т. е.  $x^{(k)} \rightarrow x$  и по метрике  $R_2^n$ .

5.26. Докажите, что сходимость по метрике пространства  $R_1^n$  эквивалентна покоординатной сходимости.

5.27. Докажите, что сходимость по метрике пространства  $R_\infty^n$  эквивалентна покоординатной сходимости.

5.28. Докажите, что нормы пространств  $R_2^n$ ,  $R_1^n$  и  $R_\infty^n$  эквивалентны.

5.29. Докажите, что из сходимости последовательности точек  $x^{(k)}$  к точке  $x$  пространства  $R_2^\infty$  вытекает покоординатная сходимость  $x^{(k)}$  к  $x$ .

5.30. В пространстве  $R_2^\infty$  задана последовательность так называемых *координатных ортов*:

$$e_n = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

К какой «точке» сходится эта последовательность покоординатно? Является ли эта точка пределом данной последовательности пространства в метрике  $R_2^\infty$ ? Является ли вообще заданная последовательность сходящейся в  $R_2^\infty$ ?

5.31. Справедливо ли утверждение, обратное утверждению задачи 5.29?

5.32. Докажите, что из сходимости по метрике пространства  $R_1^\infty$  вытекает покоординатная сходимость. Верно ли обратное утверждение?

5.33. Докажите, что из сходимости по метрике пространства  $R_\infty^\infty$  вытекает покоординатная сходимость. Верно ли обратное утверждение?

5.34\*. Докажите, что сходимость в пространстве  $S$  (см. задачу 2.30) равносильна покоординатной сходимости.

5.35. Докажите, что а) если  $a$  — граничная точка для множества  $E$ , то из  $E$  можно извлечь последовательность точек, сходя-

щуюся к  $a$ ; б) если  $E$  всюду плотно в  $M$ , то для любой точки  $a \in M$  найдется последовательность  $(x_n)$  точек из  $E$  сходящаяся к  $a$ .

*Доказательство.* а) Пусть  $a \in \partial E$ . Тогда в  $\frac{1}{n}$ -окрестности точки  $a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) можно найти точку  $x_n \in E$ . Последовательность точек  $(x_n)$  сходится к  $a$ , так как  $\rho(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

Заметим, что рассматриваемая последовательность может содержать и одинаковые точки и даже вообще быть постоянной с некоторого номера. Так будет в случае, когда  $a$  является изолированной точкой множества.

**5.36.** Докажите, что предел  $a$  сходящейся последовательности точек  $(x_n)$  из множества  $E$  является для  $E$  граничной или внутренней точкой.

*Доказательство.* Так как  $x_n \rightarrow a$ , то  $\lim \rho(x_n, a) = 0$ . Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$  для всех  $n > N$ . Это означает, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  имеются точки  $(x_n$  при  $n > N)$  из множества  $E$ . Если при этом в некоторой окрестности нет ни одной точки из  $CE$ , то  $a$  — внутренняя точка для  $E$ . Если же в любой окрестности есть точки из  $CE$ , то  $a$  — граничная точка.

**5.37.** Докажите, что для того чтобы множество  $E$  было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы предел всякой сходящейся последовательности точек из  $E$  принадлежал  $E$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $(x_n)$  — произвольная последовательность точек из  $E$ , сходящаяся к некоторой точке  $a$ . Из 5.36. следует, что  $a \in E \cup \partial E$ . Но, в силу замкнутости  $E$ ,  $E \cup \partial E = E$ . Поэтому  $a \in E$ .

*Достаточность.* Пусть  $a$  — произвольная граничная точка множества  $E$ . В силу 5.35 существует последовательность точек  $(x_n)$  из  $E$ , сходящаяся к  $a$ . Но тогда из условия следует, что  $a \in E$ , и, следовательно,  $E$  замкнуто.

**5.38.** Докажите, что гильбертов кирпич  $K$  (см. 4.56) — замкнутое множество.

*Доказательство.* Пусть  $(x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots))$  — произвольная сходящаяся последовательность точек из  $K$ . Пусть  $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$  — предел  $(x^{(n)})$ . Это означает, что  $\rho^2(x^{(n)}, x) \rightarrow 0$ . А так как

$$\rho^2(x^{(n)}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(n)})^2 = S^{(n)},$$

то это означает, что последовательность  $S^{(n)}$  сумм знакоположительных числовых рядов стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Но каждый член знакоположительного ряда не больше суммы ряда, т. е.

$$(x_k - x_k^{(n)})^2 \leq S^{(n)} \quad \text{или} \quad |x_k - x_k^{(n)}| \leq \sqrt{S^{(n)}},$$

$$x_k^{(n)} - \sqrt{S^{(n)}} \leq x_k \leq x_k^{(n)} + \sqrt{S^{(n)}} \quad (*)$$

для любых натуральных  $k$  и  $n$ . А так как по условию

$$\frac{1}{2^k} \leq x_k^{(n)} \leq \frac{1}{2^k},$$

то из (\*) получаем:

$$-\frac{1}{2^k} + \sqrt{S^{(n)}} \leq x_k \leq \frac{1}{2^k} + \sqrt{S^{(n)}}.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , находим, что

$$|x_k| \leq \frac{1}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

а это означает, что  $x \in K$  и, следовательно  $K$ , в силу 5.37, — замкнутое множество.

5.39. Докажите, что множество  $A \subset \mathbb{R}_2^2$ , задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x + y > 5; \\ x^2 + y^2 < 100, \end{cases}$$

открыто.

*Доказательство.* Множество  $A$  является пересечением двух множеств  $A_1 \{x + y > 5\}$  и  $A_2 \{x^2 + y^2 < 100\}$ , а так как пересечение двух открытых множеств открыто, то нам достаточно показать, что  $A_1$  и  $A_2$  открыты. Для этого же, в силу 4.47, достаточно показать, что дополнения этих множеств замкнуты.

Покажем замкнутость  $CA_1$ .

Рассмотрим произвольную сходящуюся в  $\mathbb{R}_2^2$  к некоторой точке  $M = (a, b)$  последовательность точек  $M_n = (x_n, y_n)$  из  $CA_1$ . Так как  $(M_n)$  сходится к  $M$  и по координатам, то  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ . Отсюда вытекает, что  $x_n + y_n \leq 5$ . Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем  $a + b \leq 5$ , т. е.  $M \in CA_1$ . Это и означает, что  $CA_1$  замкнуто.

Замкнутость  $CA_2$  доказывается аналогично.

5.40. Докажите, что множество  $A \subset \mathbb{R}_2^3$ , задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 25; \\ x + 3y - 2z \leq 6, \end{cases}$$

замкнуто.

5.41. Покажите, что множество  $A \subset \mathbb{R}_2^2$ , задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 1; \\ x^2 + y^2 < 49, \end{cases}$$

не является ни открытым, ни замкнутым.

5.42. Покажите, что множество  $A \subset \mathbb{R}_2^3$ , задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 25, \\ x + 3y - 2z < 6, \end{cases}$$

не является ни открытым, ни замкнутым.

5.43. Докажите, что множество многочленов из пространства  $C[a, b]$  не является ни замкнутым, ни открытым.

5.44. Является ли открытым или замкнутым множество многочленов из  $C[a, b]$ , все коэффициенты которых по модулю не превосходят 1?

Пусть  $(x_n)$  — последовательность точек линейного нормированного пространства  $E$ . Ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad (1)$$

называется *сходящимся* к  $x \in E$ , если последовательность точек  $s_k = \sum_{n=1}^k x_n \in E$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), называемых *частичными суммами* ряда, сходится к  $x$ . Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд, составленный из норм его членов:

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| + \dots \quad (1')$$

Пусть  $E$  — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Если в  $E$  существует такая последовательность элементов  $(x_n)$ , что каждый  $x \in E$  допускает единственное представление вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \quad (2)$$

то последовательность  $(x_n)$  называют *базисом* пространства.

5.45. Докажите, что последовательность координатных ортов  $(e_n)$  (см. 5.30) является базисом пространства  $R_1^{\infty}$ .

*Доказательство.* Пусть  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in R_1^{\infty}$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ . Найдем в  $R_1^{\infty}$  точку, являющуюся частичной суммой этого ряда:

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^k \xi_n e_n = \xi_1 (1, 0, \dots) + \xi_2 (0, 1, 0, \dots) + \\ &+ \xi_k (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как

$$\|s_k - x\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |\xi_n| \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$  (остаток сходящегося по определению  $R_1^{\infty}$  ряда), то последовательность частичных сумм сходится к  $x$ . Другими словами, рассматриваемый ряд сходится, и сумма его равна  $x$ .

Для произвольного элемента  $x \in R_1^{\infty}$  получено искомое представление (2) при  $x_n = e_n$ . Остается показать его единственность.

Допустим, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \text{ и } x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \quad (4)$$

Обозначим частичную сумму первого ряда через  $s_k$ , а второго — через  $t_k$ . Представления (4) означают, что  $s_k \rightarrow x$  и  $t_k \rightarrow x$ . Но тогда, в силу 5.6,  $s_k - t_k \rightarrow \Theta$  или  $\|s_k - t_k\| \rightarrow 0$ . А отсюда в силу того, что (см. выражение (3))

$$\|s_k - t_k\| = \sum_{n=1}^k |\xi_n - \lambda_n|,$$

следует, что знакоположительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \lambda_n|$  сходится к нулю.

Это же, как известно, возможно лишь тогда, когда все члены этого ряда нули, т. е.  $\xi_n = \lambda_n$  при любом  $n$ .

Задача решена полностью.

**5.46.** Докажите, что последовательность координатных ортов образует базис в пространстве  $\mathbf{R}_2^{\infty}$ .

**5.47\*.** Покажите, что последовательность координатных ортов в пространстве  $\mathbf{R}_{\infty}^{\infty}$  не образует базиса.

**5.48.** Используя теорию рядов Фурье, укажите базис в пространстве  $\mathbf{C}_2[-\pi, \pi]$ .

## § 6 КОМПАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Метрическое пространство  $M$  называется *компактным* (или *компактом*), если из любой последовательности точек  $x_n \in M$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке  $x \in M$ .

**6.1.** Докажите, что любое конечное множество компактно.

**6.2.** Докажите, что отрезок  $[a, b]$  числовой прямой  $\mathbf{R}$  является компактом.

*Доказательство.* Пусть  $(x_n)$  — произвольная последовательность точек из  $[a, b]$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам. По крайней мере один из полученных отрезков содержит бесконечно много членов данной последовательности. Обозначим его через  $\Delta_1$ . Отрезок  $\Delta_1$  снова разобьем пополам и выберем отрезок  $\Delta_2$ , содержащий бесконечно много членов данной последовательности. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных стягивающихся отрезков  $(\Delta_n)$ .

Пусть  $x_{n_1}$  — некоторый член последовательности, принадлежащий отрезку  $\Delta_1$ . На отрезке  $\Delta_2$  можно найти член последовательности с номером  $n_2 > n_1$ . На отрезке  $\Delta_3$  — член последовательности с номером  $n_3 > n_2$  и так далее.

Покажем, что подпоследовательность  $(x_{n_k})$  последовательности  $(x_n)$  сходится. Согласно известному принципу стягивающихся отрезков на  $[a, b]$  существует точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам  $\Delta_k$ . Эта точка и является пределом  $(x_{n_k})$ . Действительно, так как

$x_{n_k}$  и  $c$  принадлежат  $\Delta_k$ , а длина  $\Delta_k$  равна  $\frac{b-a}{2^k}$ , то

$$\rho(x_{n_k}, c) = |x_{n_k} - c| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

и, следовательно,  $\rho(x_{n_k}, c) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .



Итак, из произвольной последовательности точек отрезка  $[a, b]$  нам удалось выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке отрезка  $[a, b]$ . Значит,  $[a, b]$  действительно компакт.

6.3. Покажите, что а) интервал  $]a, b[$ ; б) луч  $[a, \infty[$  не являются компактными.

6.4. Докажите, что любой компакт  $M$  ограничен.

*Доказательство.* Допустим противное и возьмем произвольную точку  $x_0 \in M$ . Тогда для любого натурального  $n$  найдется такая точка  $x_n \in M$ , что  $\rho(x_0, x_n) > n$ .

В силу компактности  $M$  из полученной последовательности  $(x_n)$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})$ . Пусть  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  и  $\rho(x_0, a) = r$ . Так как  $x_{n_k} \rightarrow a$ , то для любого  $\delta > 0$ , в частности  $\delta = 1$ , можно указать такой номер  $K$ , что  $\rho(x_{n_k}, a) < 1$  для всех  $k > K$ .

Рассмотрим некоторый индекс  $n_k$  такой, что  $k > K$  и  $n_k > r + 1$ . Тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(a, x_0) \leq 1 + r < n_k,$$

что противоречит указанному выше неравенству  $\rho(x_{n_k}, x_0) > n_k$ . Полученное противоречие и доказывает ограниченность  $M$ .

6.5. Докажите, что замкнутое подмножество  $M$  компакта  $K$  есть компакт.

6.6. Докажите, что любой компакт  $K$  замкнут в любом метрическом пространстве  $M$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_n$  — произвольная последовательность точек из  $K$ , сходящаяся к некоторой точке  $a \in M$ . Покажем, что  $a \in K$ .

В силу компактности  $K$  из  $x_n$  можно выделить подпоследовательность  $(x_{n_k})$ , сходящуюся в  $K$ , т. е. сходящуюся к некоторому  $b \in K \subset M$ . В силу единственности предела в метрическом пространстве  $M$  заключаем, что  $a = b$  и потому  $a \in K$ , что и доказывает (см. 5.37) замкнутость  $K$ .

6.7. Докажите, что для компактности множества  $K$  пространства  $\mathbb{R}_2^n$  необходимо и достаточно, чтобы  $K$  было замкнутым и ограниченным.

*Доказательство. Достаточность.* Так как  $K$  ограничено, то существует некоторый шар  $S_r(a) \supset K$ . Это означает, что  $\rho^2(x, a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2$  для всех  $x \in K$ . Отсюда следует, что

$$|x_i - a_i| \leq r \quad (i = 1, \dots, n). \quad (*)$$

Пусть теперь  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  — любая последовательность точек из  $K$ . Рассмотрим числовую последовательность первых координат  $x_1^{(k)}$  этих точек. Из неравенства (\*) вытекает, что эта числовая последовательность принадлежит отрезку  $[a_1 - r, a_1 + r]$ .

Тогда, в силу компактности отрезка числовой прямой (см. 6.2), из  $x_1^{(k)}$  можно выделить подпоследовательность  $(x_1^{(k_v)})$ , сходящуюся к некоторому числу  $y_1$ .

Теперь в данной последовательности точек  $(x^{(k)})$  сохраним только точки  $(x^{(k_v)})$  с выделенными выше номерами  $(k_v)$ . Эта подпоследовательность обладает тем свойством, что последовательность ее первых координат сходится. Рассматривая далее последовательность вторых координат  $(x_2^{(k_v)})$  точек этой подпоследовательности, мы можем таким же образом из  $(x^{(k_v)})$  выделить новую подпоследовательность, у которой будет сходиться (к некоторому числу  $y_2$ ) и последовательность вторых координат.

Повторяя такой процесс выделения подпоследовательности  $n$  раз, мы получим подпоследовательность  $(x^{(k_m)})$ , которая сходится по координатам к точке  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , а значит (см. 5.25), сходится к этой точке и по метрике  $R_2^n$ . В силу замкнутости  $K$  точка  $y \in K$ . Это и доказывает компактность множества  $K$ . *Необходимость* вытекает из 6.6 и 6.4.

**6.8.** Выясните, какие из указанных ниже подмножеств пространства  $R_2^n$  компактны (ответ обосновать): а)  $n$ -мерный шар; б)  $n$ -мерная сфера; в)  $n$ -мерный куб; г) поверхность  $n$ -мерного куба; д) плоскость  $x_n = c$ ; е) прямая линия; ж) множество точек, все координаты которых рациональны.

В 6.9—6.16 требуется определить, являются ли компактными данные множества пространства  $C[0, 1]$ .

**6.9.** Само пространство  $C[0, 1]$ .

**6.10.** Множество всех многочленов.

**6.11.** Множество многочленов, все коэффициенты которых по модулю не превосходят 1.

*Решение* вытекает из 6.6 и 5.44. Ответ отрицательный.

**6.12.** Множество всех многочленов степени не выше  $n$ .

**6.13.** Множество многочленов степени не выше  $n$ , все коэффициенты которых по модулю не превосходят 1.

**6.14.** Замкнутый единичный шар  $U = \{f \mid |f(x)| \leq 1\}$ .

*Решение.* Рассмотрим в  $U$  последовательность  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  и докажем, что из нее нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности. Действительно, допустим, что подпоследовательность  $x^{n_1}, \dots, x^{n_k}, \dots$  сходится по метрике к некоторой функции  $f$ .

В силу 5.15. последовательность  $x^{n_k}$  равномерно сходится к  $f(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ , а значит, и в любой точке  $x$  отрезка  $[0, 1]$  она сходится к  $f(x)$ .

Поэтому

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{n_k} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Но такая функция  $f$  разрывна в точке  $x = 1$  и потому не принадлежит  $C[0, 1]$ , а тем более  $U$ .

6.15. Единичная сфера.

6.16. Множество  $E$ , определенное в 4.43.

6.17. Компактно ли множество  $E \subset C[0, \frac{1}{2}]$  многочленов, коэффициенты которых по модулю не превосходят 1?

6.18. Компактно ли пространство  $R_2^\infty$ ? Компактен ли замкнутый единичный шар этого пространства?

*Решение.* Само пространство  $R_2^\infty$  не компактно, так как оно не ограничено (покажите это!).

Обозначим рассматриваемый шар через  $U$  и рассмотрим в  $U$  последовательность координатных ортов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots), \\ a_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots), \\ a_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

Предположим, что нам удалось выделить подпоследовательность  $(a_{n_k})$ , сходящуюся к  $a \in R_2^\infty$ . Так как (см. 5.29)  $(a_{n_k})$  сходится к  $a$  и по координатам, то отсюда находим, что  $a = (0, 0, \dots)$ . Но  $(a_{n_k})$  к такой точке  $a$  в метрике  $R_2^\infty$  сходящейся не может, поскольку  $\rho(a_{n_k}, a) = 1$  (не стремится к нулю!). Таким образом, из данной последовательности нельзя выделить сходящейся подпоследовательности, а значит,  $U$  не компактно.

6.19. Докажите, что пересечение компактов есть компакт.

6.20. Докажите, что объединение двух компактов — компакт.

6.21. Докажите, что в компакте  $K$  любая последовательность непустых вложенных друг в друга замкнутых множеств  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$  имеет непустое пересечение  $F \subset K$ .

*Доказательство.* В каждом из множеств  $F_n$  возьмем некоторую точку  $x_n$ . В силу компактности  $K$  из последовательности  $(x_n)$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})$ . Пусть  $a = \lim x_{n_k}$ . Покажем, что  $a$  принадлежит  $F$ .

Так как мы рассматриваем последовательность вложенных множеств, то при любом  $n$  подпоследовательность  $(x_{n_k})$  ( $n_k \geq n$ ) последовательности  $(x_{n_k})$  принадлежит множеству  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Поэтому  $a$  является пределом и некоторой последовательности точек из множества  $F_n$  а, значит, в силу замкнутости  $F_n$  (см. 5.37)  $a \in F_n$ . В силу произвольности  $n$  отсюда следует, что  $a \in F$ .

6.22\*. Докажите, что если любая последовательность непустых вложенных друг в друга замкнутых подмножеств множества  $M$  имеет непустое пересечение, то  $M$  — компакт.

6.23\*. Пусть  $M$  — компакт;  $G_1, \dots, G_n, \dots$  — система открытых множеств, покрывающая  $M$  (т. е. такая, что  $M \subset \bigcup_n G_n$ ). Докажите,

что из множеств  $G_1, \dots, G_n, \dots$  можно выбрать конечную подсистему, покрывающую  $M$ .

**6.24\*.** Пусть  $M$  — множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что  $M$  компактно.

**6.25.** Из задач данного параграфа вытекают еще два других определения компакта, равносильных исходному. Сформулируйте их.

**6.26.** Обозначим через  $F$  множество  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ , где  $a_1 = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$  при  $n > 1$ . Система интервалов  $G_n: ]a_n - \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}}, a_n + \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}}[$   $[n \in \mathbb{N}]$  покрывает  $F$ . Докажите, что  $F$  компактно, и выделите из данной системы интервалов конечное покрытие.

**6.27.** Семейство интервалов  $G: \left] \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right[$   $[n \in \mathbb{N}]$  образует открытое покрытие интервала  $]0, 1[$ . Можно ли из этого покрытия выбрать конечное подпокрытие?

**6.28.** Занумеруем рациональные числа, принадлежащие отрезку  $[0, 1]: X = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ . Каждое число  $r_n$  покроем интервалом  $\left] r_n - \frac{1}{10 \cdot 2^n}, r_n + \frac{1}{10 \cdot 2^n} \right[$ . Можно ли из этой системы интервала выбрать конечное покрытие множества  $X$ ? Компактно ли это множество?

**6.29.** Семейство отрезков  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right], \dots, \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \dots$  и  $[-1, 0]$  покрывает отрезок  $[0, 1]$ . Можно ли из этого покрытия выбрать конечное подпокрытие отрезка  $[0, 1]$ ? Поясните, почему ответ не противоречит компактности отрезка.

**6.30.** Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  из покрытия задачи 6.29. можно выбрать конечное число отрезков, покрывающее часть отрезка  $[0, 1]$  длины  $1 - \varepsilon$ .

**6.31.** Пусть из некоторого открытого покрытия множества  $F$  можно выбрать конечное подпокрытие. Следует ли отсюда, что  $F$  компактно?

## § 7 НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

**7.1.** Задано отображение  $(x, y) \rightarrow (2x - 3y + 4, -x + 4y)$  пространства  $\mathbb{R}^2$  в себя. Найдите а) образ точки  $(2, 3)$ ; б) образ точки  $(-4, 4)$ ; в) образ биссектрисы первого и третьего координатных углов; г) прообраз оси абсцисс.

**7.2.** Задано отображение

$$F: y \rightarrow \int_0^1 [x^2 - y^3(x)] dx$$

пространства  $\mathbf{C} [0, 1]$  в  $\mathbf{R}$ . Найдите  $F (\sin \pi x)$ . Укажите два элемента из прообраза  $F^{-1} \left( \frac{1}{3} \right)$ .

7.3. Задано отображение  $F : (x, y) \rightarrow \varphi (t) = xt^2 - 2yt$  пространства  $\mathbf{R}_2^2$  в  $\mathbf{C} [0, 1]$ . Найдите образ точки  $(-1, 1)$  и прообраз функции а)  $f (t) = 3t^2 + 4t$ ; б)  $f (t) = 5t^2 - 2$ ; в)  $f (t) = \sin t$ .

В з а д а ч а х 7.4—7.11 задайте какое-нибудь (отличное от константы и от тождественного) отображение  $F : A \rightarrow B$ ; найдите образ элемента  $x \in A$ ; укажите хотя бы один элемент из прообраза  $F^{-1} (y)$  или покажите, что  $F^{-1} (y)$  пусто.

7.4.  $A = \mathbf{R}_2^2$ ,  $B = \mathbf{R}_2^3$ ,  $x = (2, -1)$ ,  $y = (-1, 0, 1)$ .

7.5.  $A = \mathbf{R}_2^3$ ,  $B = \mathbf{R}_2^2$ ,  $x = (-1, 0, 1)$ ,  $y = (2, -1)$ .

7.6.  $A = \mathbf{C} [0, 1]$ ,  $B = \mathbf{R}_2^3$ ,  $x = 2t^2 - 3$ ,  $y = (-1, 0, 1)$ .

7.7.  $A = \mathbf{R}_2^2$ ,  $B = \mathbf{C} [-1, 1]$ ,  $x = (-2, 1)$ ,  $y = 2t^2 + 3t - 1$ .

7.8.  $A = \mathbf{R}_2^3$ ,  $B = \mathbf{C} [-1, 1]$ ,  $x = (-1, 1, 0)$ ,  $y = \sin t$ .

7.9.  $A = \mathbf{D}^1 [-1, 1]$ ,  $B = \mathbf{C} [-1, 1]$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \cos t$ .

7.10.  $A = \mathbf{C} [0, 1]$ ,  $B = \mathbf{C} [0, 1]$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $y = \sqrt{t}$ .

7.11.  $A = \mathbf{R}_2^3$ ,  $B = \mathbf{R}_2^\infty$ ,  $x = (1, 2, 3)$ ,  $y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots$ .

Пусть  $F$  — отображение метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$ . Отображение  $F$  называется *непрерывным в точке*  $x_0 \in X$ , если для всякой последовательности точек  $x_n \in X$ , сходящейся к  $x_0$  (по метрике  $X$ ), соответствующая последовательность образов  $F (x_n)$  сходится (по метрике  $Y$ ) к образу  $F (x_0)$ .

7.12. Докажите, что данное определение непрерывности отображения  $F : X \rightarrow Y$  равносильно следующему: Отображение  $F$  называется непрерывным в точке  $x_0$ , если при любом выборе  $\varepsilon$ -окрестности  $S_\varepsilon \subset Y$  точки  $F (x_0)$  существует такая  $\delta$ -окрестность  $S_\delta \subset X$  точки  $x_0$ , что ее образ принадлежит  $S_\varepsilon$ .

*Доказательство.* Пусть  $F$  непрерывно в точке  $x_0$  по первому определению и  $S_\varepsilon$  — произвольная  $\varepsilon$ -окрестность точки  $F (x_0)$ .

Допустим, что указанную  $\delta$ -окрестность подобрать невозможно. Это означает, что для любого  $\delta$ , в частности  $\delta = \frac{1}{n}$ , существует такая точка  $x_n \in X$ , что, хотя и выполняется неравенство  $\rho (x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$ , тем не менее  $\rho (F (x_n), F (x_0)) \geq \varepsilon$ . Давая  $n$  значения 1, 2, 3, ..., мы получаем последовательность  $x_n \in X$  такую, что  $x_n \rightarrow x_0$ , но  $F (x_n)$  не сходится к  $F (x_0)$ , вопреки предположению о непрерывности  $F$  в точке  $x_0$ .

Пусть теперь, наоборот, выполняется условие задачи. Докажем, что  $F$  непрерывно и по первому определению.

Пусть  $x_n \rightarrow x_0$ . Требуется доказать, что  $F (x_n) \rightarrow F (x_0)$ . Рассмотрим произвольное  $\varepsilon > 0$ . По условию, существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $\rho (x, x_0) < \delta$ , выполняется неравенство  $\rho (F (x), F (x_0)) < \varepsilon$ . Так как  $x_n \rightarrow x_0$ , то начиная с некоторого номера  $N$   $\rho (x_n, x_0) < \delta$ , а следовательно,

по только что сказанному  $\rho(F(x_n), F(x_0)) < \varepsilon$  для  $n > N$ . Но это и означает, что  $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ .

Отображение  $F: X \rightarrow Y$  называется *непрерывным* (на  $X$ ), если оно непрерывно в любой точке  $x \in X$ .

**7.13.** Задано отображение  $F(y) = y(1)$  пространства  $C[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$ . Является ли это отображение непрерывным?

*Решение.* Пусть  $y(x)$  — произвольный элемент пространства  $C[0, 1]$  и  $y_n(x)$  — произвольная сходящаяся к нему последовательность. Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n(x) - y(x)| = 0.$$

Рассмотрим последовательность образов:  $F(y_n) = y_n(1)$ . Так как в метрике  $\mathbb{R}$

$$\rho(F(y_n), F(y)) = |F(y_n) - F(y)| = |y_n(1) - y(1)|$$

и

$$|y_n(1) - y(1)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n(x) - y(x)| = \rho(y_n, y),$$

то ясно, что  $\rho(F(y_n), F(y)) \rightarrow 0$  или  $F(y_n) \rightarrow F(y)$ .

Таким образом,  $F$  непрерывно в любой точке пространства  $C[a, b]$ , т. е. непрерывно на всем пространстве.

**7.14.** Задано отображение  $F(y) = y(1)$  пространства  $C_1[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$ . Является ли это отображение непрерывным?

*Решение.* Рассмотрим  $y_0(x) \equiv 0$  и последовательность функций  $y_n(x) = x^n$ . Так как в  $C_1[0, 1]$

$$\rho(y_n, y_0) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

то  $y_n(x) \rightarrow y_0(x)$ . С другой стороны, в  $\mathbb{R}$

$$\rho(F(y_n), F(y_0)) = |F(y_n)| = |y_n(1)| = 1$$

не стремится к нулю, т. е.  $F(y_n)$  не сходится к  $F(y_0)$ . Это означает, что отображение  $F$  не является непрерывным на  $C_1[0, 1]$ , так как оно терпит разрыв по крайней мере в «точке»  $y_0(x) \equiv 0 \in C_1[0, 1]$ .

**7.15.** Задано отображение

$$F(y) = \int_0^1 |y'(x)| dx$$

подпространства  $E$  непрерывно-дифференцируемых функций пространства  $C[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$ . Является ли это отображение непрерывным на  $E$ ?

*Решение.* Рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \sin 2\pi n x$$

и функцию  $y_0(x) \equiv 0$ . Имеем:

$$\rho(y_n, y_0) = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{|\sin 2\pi n x|}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

т. е.  $y_n \rightarrow y_0$ . С другой стороны (см. рис. 16, где  $n = 2$ ),

$$\begin{aligned} F(y_n) &= \\ &= \int_0^1 2\pi |\cos 2\pi n x| dx = \\ &= 2\pi 4n \int_0^{\frac{1}{4n}} \cos 2\pi n x dx = 2, \end{aligned}$$

в то время как  $F(y_0) = 0$ .

Отображение  $F$  в точке  $y_0$  терпит разрыв и потому не является непрерывным на  $E$ .

В задачах 7.16—7.19 заданы отображения пространства  $C[a, b]$  в  $\mathbb{R}$ . Проверьте, являются ли эти отображения непрерывными.

7.16.  $F(y) = \max_{a \leq x \leq b} y(x).$

7.17.  $F(y) = \min_{a \leq x \leq b} y(x).$

7.18.  $F(y) = \int_a^b y(x) dx.$

7.19. 
$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y(x) \text{ принимает хотя бы одно отрицательное значение;} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } y(x) \equiv 0; \\ 1, & \text{если } y(x) \geq 0, \text{ но } y(x) \not\equiv 0. \end{cases}$$

7.20. Является ли непрерывным отображение  $F(y) = y(0)$  функционального пространства  $M$  в  $\mathbb{R}$ , если а)  $M = D^1[0, 1]$ ; б)  $M = C[0, 1]$ ; в)  $M = C_1[0, 1]$ ?

7.21. Является ли непрерывным отображение  $F(y) = y'(0)$  функционального пространства  $M$  в  $\mathbb{R}$ , если: а)  $M = D^1[0, 1]$ ; б)  $M \subset C[0, 1]$  и состоит из дифференцируемых в  $x = 0$  функций?

7.22. Докажите, что отображение

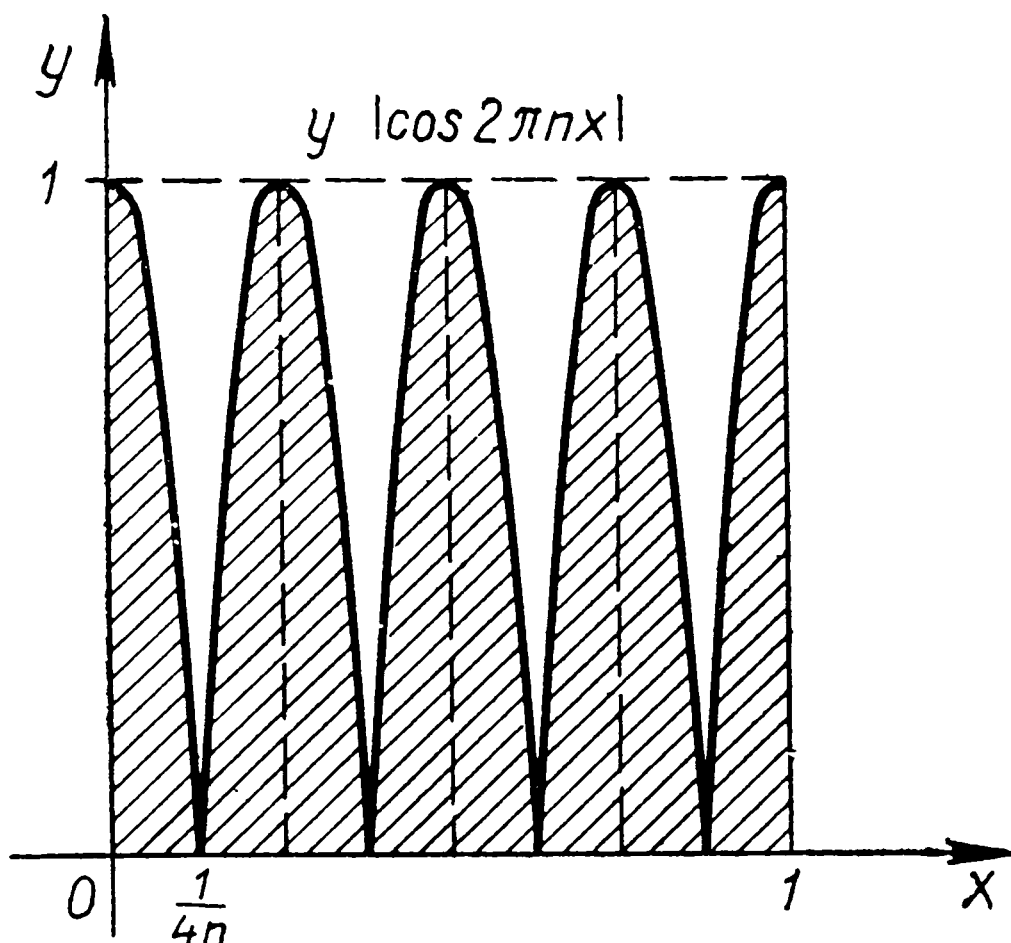
$$F(y) = \int_0^1 (2hy + xy') dx,$$

где  $h(x) \in D^1[0, 1]$ , пространства  $D^1[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$  непрерывно.

7.23. Докажите, что отображение

$$F(y) = \int_0^1 |y'(x)| dx$$

пространства  $D^1[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$  является непрерывным.



Р и с. 16



7.24\*. Может ли оказаться, что последовательность гладких кривых  $y = f_n(x)$  сходится равномерно на  $[0, 1]$  к кривой  $y = f(x)$ , и в то же время последовательность их длин не сходится к длине предельной кривой?

7.25. Задано отображение  $D(y) = y'(x)$  подпространства  $E \subset C[0, 2\pi]$ , состоящего из непрерывно дифференцируемых функций, в пространство  $C[0, 2\pi]$ . Является ли это отображение непрерывным?

**Решение.** Рассмотрим  $y_0(x) \equiv 0 \in C[0, 2\pi]$  и последовательность функций  $y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ .

Так, в метрике  $E \subset \mathbb{C} [0, 2\pi]$

$$\rho(y_0, y_n) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

то  $y_n \rightarrow y_0$ . Рассмотрим последовательность образов

$$D(y_n) = \cos nx.$$

Имеем:

$$\rho(D(y_n), D(y_0)) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\cos nx| \geq \cos\left(n \frac{2\pi}{n}\right) = 1.$$

Это означает, что  $D(y_n)$  не может сходиться к  $D(y_0)$ , т. е. отображение  $D$  в  $y_0$  терпит разрыв.

7.26. Докажите, что отображение  $F: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ , где

$$\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{array}$$

метрического пространства  $\mathbf{R}_2^n$  в  $\mathbf{R}_2^m$  тогда и только тогда непрерывно в точке  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , когда в этой точке непрерывны все  $m$  числовых функций  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ .

7.27. Пусть  $a$  — фиксированная точка метрического пространства  $M$ . Докажите, что функция  $f(x) = \rho(a, x)$  непрерывна на  $M$ .

7.28. Докажите, что:

а)  $x \rightarrow \|x\|$  — непрерывная числовая функция на линейном нормированном пространстве;

б) при фиксированном  $a$   $x \rightarrow (a, x)$  — непрерывная числовая функция на предгильбертовом пространстве.

7.29. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества является открытым множеством.

*Доказательство.* Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение,  $E \subset Y$  — открытое множество, а  $H \subset X$  — его прообраз. Возьмем произвольную точку  $x_0 \in H$  и рассмотрим точку  $f(x_0) \in E$ . Так как  $E$  открыто, то существует  $\varepsilon$ -окрестность  $V_\varepsilon$  точки  $f(x_0)$ , принадлежащая  $E$ . В силу непрерывности  $f$  в точке  $x_0$  (см. 7.12)

можно найти  $\delta$ -окрестность  $U_\delta$  точки  $x_0$  такую, что  $f(x) \subset V_\varepsilon$  при всех  $x \in U_\delta$ . Поскольку  $V_\varepsilon \subset E$ , то  $f(x) \in E$ , а это означает, что  $U_\delta \in H$ .

Итак, любая точка множества  $H$  принадлежит  $H$  вместе с некоторой своей окрестностью. Это и означает, что  $H$  — открытое множество.

7.30. Верно ли, что при непрерывном отображении образ открытого множества является открытым множеством?

7.31. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз замкнутого множества является замкнутым множеством.

7.32. Верно ли, что при непрерывном отображении образ замкнутого множества является замкнутым множеством?

7.33. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: X \rightarrow Y$  непрерывные отображения. Докажите, что множество  $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  замкнуто.

7.34. Докажите, что при непрерывном отображении образ компакта есть компакт.

*Доказательство.* Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение и  $X$  — компакт. Обозначим образ  $X$  при отображении  $f$  через  $H$ . Докажем, что  $H$  — компакт.

Рассмотрим произвольную последовательность  $y_n \in H$ . В прообразе  $f^{-1}(y_n)$  возьмем некоторую точку  $x_n$ . В силу компактности  $X$  из  $(x_n)$  можно выбрать подпоследовательность  $(x_{n_k})$ , сходящуюся к некоторой точке  $a \in X$ . Так как  $f$  непрерывно в  $a$ , то  $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow f(a) = y \in H$ .

Таким образом, из последовательности  $(y_n)$  выделена сходящаяся в  $H$  последовательность, что и доказывает компактность  $H$ .

7.35. Докажите, что числовая функция  $f$  (со значениями в  $\mathbb{R}$ ), определенная и непрерывная на компакте  $K$ , ограничена и среди ее значений есть наибольшее и наименьшее (*теорема Вейерштрасса*).

*Доказательство.* В силу 7.34 множество значений  $T$  функции  $f$  есть компакт, а отсюда, в силу 6.4, следует, что  $T$  — ограниченное множество. Первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы доказывается дословно так же, как и для функций на отрезке<sup>1</sup>.

7.36. Пусть числовая функция  $f$  определена и непрерывна на множестве  $H$ . Может ли а)  $f$  иметь на  $H$  наибольшее значение, если  $H$  не является компактом; б) быть ограниченной на  $H$ , но не иметь наибольшего значения?

7.37. На множестве  $E$ , определенном в задаче 4.43, рассматривается числовая функция

$$F(y) = \int_0^1 y^2(x) dx.$$

Непрерывна ли функция  $F$  на  $E$ ? Имеет ли она на множестве  $E$

---

<sup>1</sup> См.: В и л е н к и н Н. Я., К у н и ц к а я Е. С. Введение в анализ. М., 1973.

наименьшее значение? Не противоречит ли полученный вывод теореме Вейерштрасса?

*Решение.* Покажем, что  $F$  непрерывна в любой «точке»  $y$  множества  $E$ . Действительно, пусть  $y \in E$  и  $y_n \rightarrow y$  по метрике  $E$ . Это означает, что

$$\rho(y_n, y) = \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n(x) - y(x)| \rightarrow 0. \quad (1)$$

Рассмотрим соответствующую последовательность значений функции

$$F(y_n) = \int_0^1 y_n^2(x) dx,$$

а также значение функции в предельной «точке»

$$F(y) = \int_0^1 y^2(x) dx$$

и оценим абсолютную величину их разности (метрика в  $\mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} |F(y_n) - F(y)| &= \left| \int_0^1 (y_n^2 - y^2) dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n^2 - y^2| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} |(y_n - y)(y_n + y)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n - y| \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n + y|. \end{aligned}$$

Из того, что  $|y| \leq 1$  и  $|y_n| \leq 1$ , ясно, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y_n + y| \leq 2$$

и, следовательно:

$$|F(y_n) - F(y)| \leq 2 \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n - y|,$$

откуда, в силу (1), и вытекает, что  $F(y_n) \rightarrow F(y)$ .

Из того что любая функция  $y \in E$  непрерывна на  $[0, 1]$  и  $y^2(x) \geq 0$ , но  $y^2(x) \not\equiv 0$  (это следует из того, что  $y(1) = 1$ ), в силу известного свойства определенного интеграла, имеем:

$$F(y) = \int_0^1 y^2(x) dx > 0. \quad (2)$$

Если теперь предположить, что рассматриваемая функция  $F$  при некотором  $y_0$  принимает наименьшее значение  $m = F(y_0)$ , то из (2) следует, что  $m > 0$ . С другой стороны, взяв  $y_n = x^n$ , получаем:

$$F(y_n) = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1},$$

а поэтому  $m \leq \frac{1}{2n+1}$  при любом сколь угодно большом  $n$ . Переходя в этом неравенстве к пределу, находим  $m \leq 0$ , что противоречит полученному выше неравенству  $m > 0$ .

Полученное противоречие показывает, что функция  $F$  на  $E$  не имеет наименьшего значения. Это не противоречит теореме Вейерштрасса, так как  $E$  не является (см. 6.16) компактом.

7.38. Имеет ли функция предыдущей задачи на множестве  $E$  наибольшее значение? Не противоречит ли полученный вывод теореме Вейерштрасса?

7.39. Проверьте, что числовая функция

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x) dx - \int_{1/2}^1 y(x) dx$$

непрерывна на  $C[0, 1]$ . Имеет ли она наибольшее значение на замкнутом единичном шаре из  $C[0, 1]$ ? Не противоречит ли полученный вывод теореме Вейерштрасса?

7.40. Пусть  $a$  — точка метрического пространства  $M$  и  $A \subset M$ . Расстоянием от  $a$  до  $A$  называют число  $\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(a, x)$ . Докажите, что если  $A$  компактно, то существует такая точка  $b \in A$ , что  $\rho(a, A) = \rho(a, b)$ .

7.41. Расстоянием между двумя подмножествами  $A$  и  $B$  метрического пространства  $M$  называют число  $\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$ .

Докажите, что если  $A$  и  $B$  компактны, то найдутся такие точки  $a \in A$  и  $b \in B$ , что  $\rho(a, b) = \rho(A, B)$ .

7.42. Найдите расстояние между кругами  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  и  $(x - c)^2 + (y - d)^2 = R^2$ .

7.43. Докажите, что расстояние между гиперболой  $xy = 1$  и осью абсцисс равно нулю. Следует ли отсюда, что гипербола и ось абсцисс пересекаются?

7.44. Докажите, что расстояние между двумя компактными подмножествами метрического пространства  $M$  равно нулю в том и только том случае, когда эти подмножества имеют непустое пересечение.

Метрическое пространство  $M$  называют *несвязным*, если существует непрерывное отображение  $M$  на пространство  $\{a, b\}$  с метрикой  $\rho(a, b) = 1$ . Если такого отображения не существует (т. е. если  $f(M)$  всегда состоит из одной точки), то  $M$  называют *связным*.

7.45. Докажите, что метрическое пространство  $M$  несвязно в том и только том случае, когда его можно разбить на два непересекающихся непустых открытых подмножества.

7.46. Докажите, что пространство  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел несвязно.

*Доказательство.* Возьмем любое иррациональное число, например  $\sqrt{2}$ . Подмножества  $A = \{r \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < \sqrt{2}\}$  и  $B = \{r \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r > \sqrt{2}\}$  открыты в  $\mathbb{Q}$  и имеют пустое пересечение. Поэтому  $\mathbb{Q}$  несвязно.

7.47. Докажите, что любой числовой промежуток связан.

7.48. Докажите, что образ связного пространства  $M$  при непрерывном отображении связан.

**7.49.** Какие из следующих подмножеств координатной плоскости связны:

- а) множество точек, обе координаты которых целые;
- б) множество точек, хоть одна координата которых целая;
- в) множество точек, у которых ровно одна координата целая;
- г) множество точек, у которых обе координаты рациональны;
- е) множество точек, у которых хоть одна координата рациональна;
- ж) множество точек, у которых ровно одна координата рациональна;
- з) круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ;
- и) гипербола  $xy = a^2$ ,  $a > 0$ ;
- к) множество точек, для которых  $xy = 0$ ;
- л) верхняя полуплоскость;
- м) две касающиеся окружности;
- и) две касающиеся окружности с выколотой точкой касания;
- о) множество точек  $M(x, y)$ , для которых  $9 < x^2 + y^2 < 25$ ;
- п) Ковер Серпинского (см. задачу 4.76);
- р) множество точек, обе координаты которых принадлежат канторову троичному множеству (см. задачу 4.75);

**7.50.** Докажите, что числовая функция, непрерывная на связном метрическом пространстве  $M$  и принимающая на нем значения  $a$  и  $b$ , где  $a < b$ , принимает и любое значение  $c$ , такое, что  $a < c < b$ .

**7.51.** Докажите, что каждое непрерывное отображение  $f$  отрезка в себя имеет неподвижную точку (т. е. такую точку  $c$ , что  $f(c) = c$ ).

**7.52.** На плоскости заданы круг и треугольник, не имеющие общих точек. Докажите, что существует прямая, разбивающая как круг, так и треугольник на равновеликие части.

**7.53.** На плоскости задан произвольный выпуклый многоугольник. Докажите, что существует прямая, делящая пополам как площадь, так и периметр многоугольника.

**7.54.** Докажите, что для любой непрерывной числовой функции на окружности найдется пара диаметрально противоположных точек этой окружности, в которых значения функции одинаковы.

**7.55.** Докажите, что если два связных подмножества метрического пространства имеют общую точку, то их объединение связно.

Объединение всех связных множеств в  $M$ , содержащих точку  $a$ , называется *связной компонентой* в  $M$ , соответствующей этой точке.

**7.56.** Докажите, что любое метрическое пространство  $M$  является объединением связных компонент, причем никакие две различные компоненты не пересекаются.

## § 8 ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $M$  называется *фундаментальной*, если для любого  $\delta > 0$  можно указать такой номер  $N$ , что для всех  $n$  и  $m$ , больших  $N$ , выполняется неравенство  $\rho(x_n, x_m) < \delta$ .

8.1. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

*Доказательство.* Пусть  $(x_n)$  — сходящаяся последовательность точек произвольного метрического пространства,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , и пусть  $\delta > 0$ . Найдется такое  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\rho(x_n, a) < \frac{\delta}{2}$ . А тогда по аксиоме треугольника для любых  $n > N$  и  $m > N$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

что и требовалось доказать.

8.2. Докажите, что любая фундаментальная последовательность ограничена.

8.3. Докажите, что следующие последовательности числовой прямой  $\mathbf{R}$  фундаментальны:

а)  $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n};$

б)  $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$

в)  $x_n = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in P}} \frac{1}{2^p},$  где  $P$  — множество простых чисел.

8.4. Является ли фундаментальной последовательность  $y_n(x) = x^n$  пространства а)  $\mathbf{C}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ; б)  $\mathbf{C}[0, 1]$ ?

*Решение.* а) Эта последовательность в  $\mathbf{C}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  сходится к  $y = 0$ . Действительно,

$$\rho(y_n, y) = \max_{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}} |x^n| = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Но всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

б) Рассмотрим члены данной последовательности  $y_n$  и  $y_{2n}$ . Имеем:

$$\rho(y_n, y_{2n}) = \max_{0 \leq x \leq 1} (x^n - x^{2n}) \geq x_0^n - x_0^{2n},$$

где  $x_0 \in [0, 1]$ . Взяв  $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ , получаем отсюда, что

$$\rho(y_n, y_{2n}) \geq \frac{1}{4}.$$

Последовательность не является фундаментальной.

8.5. Докажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$  сходится, то  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность.

*Решение.* Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $M$ , что при  $M < m < n$  имеем  $\sum_{k=m}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ . Но тогда и  $\rho(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ , а значит,  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность.

8.6. Фундаментальна ли последовательность функций  $f_n(x) = \sin(2^n x)$  в пространстве  $C[0, 2\pi]$ ?

*Решение.* Пусть  $f_k$  и  $f_m$  — произвольные члены этой последовательности,  $k > m$ . Рассмотрим точку  $x_0 = \frac{\pi}{2^{m+1}}$ . Имеем:

$$f_k(x_0) = \sin\left(2^k \frac{\pi}{2^{m+1}}\right) = \sin(2^t \pi) = 0, \quad f_m(x_0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\rho(f_k, f_m) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f_k(x) - f_m(x)| \geq |f_k(x_0) - f_m(x_0)| = 1.$$

Это означает, что расстояние между любыми двумя членами данной последовательности не меньше 1, и мы не можем подобрать  $N$  так, чтобы при  $k > N, m > N$  выполнялось неравенство:

$$\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2}.$$

Последовательность не является фундаментальной.

8.7. Является ли фундаментальной последовательность функций:

$$\text{а) } f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

пространства  $C[0, 1]$ ;

$$\text{б) } f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \text{ пространства } D^1[0, 1]?$$

8.8. Является ли фундаментальной последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n}, & \text{если } |x| < n, \\ 0, & \text{если } |x| \geq n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

в пространстве ограниченных на числовой прямой функций с метрикой  $\rho(f, \varphi) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - \varphi(x)|$ .

8.9\*. Студент дал следующее определение фундаментальной последовательности: последовательность  $(x_n)$  называется фундаментальной, если при любом  $p \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$ . Верно ли это определение?

8.10. Студент, проверив, что некоторая последовательность пространства  $M$  не имеет предела, заключил, что в таком случае эта последовательность не является и фундаментальной. Верно ли такое заключение?



*Решение.* Сходимость последовательности — лишь достаточное, но не необходимое условие ее фундаментальности. Например, последовательность десятичных приближений по недостатку для  $\sqrt{2}$  фундаментальна в пространстве  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел, но не сходится в нем.

Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*. Полное нормированное линейное пространство называется *банаховым* пространством.

8.11. Докажите, что замкнутое подпространство полного метрического пространства полно.

8.12. Докажите, что всякое компактное метрическое пространство  $M$  полно.

*Доказательство.* Пусть  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность из  $M$ . Так как  $M$  компактно, то из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})$ .

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Покажем, что и  $x_n \rightarrow a$ . Пусть  $\delta$  — произвольное положительное число. Так как последовательность  $(x_n)$  фундаментальна, то найдется такое  $N$ , что  $\rho(x_n, x_m) < \frac{\delta}{2}$  при  $n > N$  и  $m > N$ . А так как  $x_{n_k} \rightarrow a$ , то найдется такое  $k$ , что  $n_k > N$  и  $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\delta}{2}$ . Тогда при  $n > N$  имеем:

$\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ . Значит, действительно  $x_n \rightarrow a$ .

Мы доказали, что любая фундаментальная последовательность из  $M$  сходится, а это и означает, что  $M$  полно.

8.13. Докажите полноту пространства  $\mathbb{R}_2^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $(x_k)$  фундаментальная последовательность в  $\mathbb{R}_2^n$ . Так как фундаментальная последовательность ограничена, то в  $\mathbb{R}_2^n$  существует замкнутый шар  $\bar{U}$ , содержащий все точки данной последовательности. Но  $\bar{U}$  — компактное пространство (см. 6.7), а потому и полное. Значит,  $(x_k)$  сходится в  $\bar{U}$ , а тогда  $(x_k)$  сходится и в  $\mathbb{R}_2^n$ .

8.14. Докажите полноту пространства а)  $\mathbb{R}_1^n$ , б)  $\mathbb{R}_\infty^n$ .

8.15. Докажите полноту пространства  $\mathbb{R}_\infty^\infty$ .

*Доказательство.* Пусть  $(a_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_i^{(n)}, \dots))$  — фундаментальная последовательность элементов из  $\mathbb{R}_\infty^\infty$ . Это означает, что для любого  $\delta > 0$  найдется такой номер  $N$ , что

$$\rho(a_k, a_n) = \sup_i |x_i^{(k)} - x_i^{(n)}| < \delta$$

при  $k, n > N$ .

Отсюда следует, что

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(n)}| < \delta \tag{1}$$

при любом  $i$  и  $k$ ,  $n > N$ . Это означает, что числовая последовательность  $i$ -тых координат  $(x_i^{(n)})$  заданной последовательности при любом фиксированном  $i$  является фундаментальной и поэтому сходится в силу полноты  $\mathbf{R}$  к некоторому числу  $x_i$ .

Рассмотрим последовательность  $a = (x_1, x_2, \dots)$ . Мы показали, что  $a_n \rightarrow a$  покоординатно. Докажем, что  $a \in \mathbf{R}_\infty^\infty$ . В неравенстве (1) зафиксируем  $i$  и  $k$ , а  $n$  пусть стремится к бесконечности. Так как  $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$  при  $n \rightarrow \infty$ , то, переходя к пределу, из этого неравенства получим:

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \delta \quad (2)$$

для всех  $i$  и  $k \geq N$ . Отсюда:

$$|x_i| = |(x_i - x_i^{(N)}) + x_i^{(N)}| \leq |x_i - x_i^{(N)}| + |x_i^{(N)}| \leq \delta + |x_i^{(N)}|.$$

Но  $a_N$  — ограниченная последовательность, т. е.

$$|x_i^{(N)}| \leq K_N \quad (3)$$

при всех  $i$ . Из (2) и (3) получаем, что

$$|x_i| \leq \delta + K_N$$

при всех  $i$ . Это означает, что последовательность  $a$  ограничена и поэтому принадлежит пространству  $\mathbf{R}_\infty^\infty$ .

Итак, фундаментальная последовательность  $(a_n)$  сходится покоординатно к элементу  $a \in \mathbf{R}_\infty^\infty$ . Покажем, что  $a_n \rightarrow a$  и в метрике  $\mathbf{R}_\infty^\infty$ . Из неравенства (2), справедливого для всех  $i$ , вытекает, что

$$\rho(a_n, a) = \sup_i |x_i^{(k)} - x_i| \leq \delta$$

при  $n \geq N$ .

А так как  $\delta$  произвольно, то отсюда и следует, что  $\rho(a_n, a) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  или  $a_n \rightarrow a$  в метрике  $\mathbf{R}_\infty^\infty$ .

**8.16.** Докажите полноту пространства а)  $\mathbf{R}_1^\infty$ ; б)  $\mathbf{R}_2^\infty$ .

**8.17.** Докажите полноту пространства  $\mathbf{C}[a, b]$ .

**8.18.** Докажите, что пространство  $\mathbf{C}_2[-1, 1]$  не полно.

*Доказательство.* Рассмотрим в  $\mathbf{C}_2[-1, 1]$  последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{при } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Так как при  $m < n$

$$\rho^2(f_n, f_m) = \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \leq \frac{2}{m},$$

то это, очевидно, фундаментальная последовательность. Покажем, что она не может сходиться (по метрике  $C_2$ ) ни к какой функции  $f \in C_2[-1, 1]$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Так как, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (f_n(x) - \psi(x))^2 dx = 0,$$

а

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \psi(x))^2 dx \neq 0$$

в силу непрерывности  $f$ , то из неравенства Минковского (см. 3.28(б) при  $f = f - f_n$ ,  $g = f_n - \psi$ ), справедливого и для кусочно-непрерывных функций, следует, что

$$\sqrt{\int_{-1}^1 (f(x) - \psi(x))^2 dx} \leq \rho(f_n, f) + \sqrt{\int_{-1}^1 (f_n(x) - \psi(x))^2 dx},$$

т. е.  $\rho(f_n, f)$  не может стремиться к нулю.

8.19. Докажите, что пространство  $D^n[a, b]$  полно при любом  $n$ .

8.20. Является ли полным пространство  $M$  натуральных чисел (см. 2.20) с метрикой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n, \\ 0, & \text{если } m = n? \end{cases}$$

*Решение.* Пусть  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  — последовательность (натуральных чисел) точек этого пространства. Если все члены ее, начиная с некоторого номера, совпадают ( $n_k \equiv n$  при  $k > K$ ), то

$$\rho(n_k, n_m) = \rho(n, n) = 0 \quad (k, m > K)$$

и эта последовательность является фундаментальной. А так как  $n_k \equiv n$  при  $k > K$ , то  $\rho(n_k, n) = 0$  при  $k > K$ , и это означает, что  $n_k \rightarrow n$ .

Если же в последовательности  $(n_k)$  при любом сколь угодно большом  $K$  имеются члены  $n_k \neq n_m$  ( $k, m > K$ ), то в силу того, что

$$\rho(n_k, n_m) = 1 + \frac{1}{n_k + n_m} > 1,$$

такая последовательность не является фундаментальной.

Итак, фундаментальными в данном пространстве могут быть лишь последовательности, постоянные с некоторого номера, и они сходятся. Это — полное пространство.

8.21. Является ли полным пространство натуральных чисел (см. 2.20) с метрикой

$$\rho(m, n) = \frac{|m - n|}{mn}?$$

8.22. Является ли полным подпространство целых чисел пространства  $\mathbb{R}$ ?

8.23. Является ли полным метрическое пространство, определенное в 2.3?

8.24. Докажите, что метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, полное.

8.25. Является ли полным пространством числовая прямая с метрикой, определенной в 2.4 (д)?

*Решение.* Рассмотрим последовательность  $x_n = n$ . Пусть  $\delta$  — любое положительное число. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2},$$

то существует такой номер  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство

$$\left| \operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2} \right| < \delta$$

или

$$\frac{\pi}{2} - \delta < \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Пусть  $k > n > N$ . Тогда

$$\rho(x_k, x_n) = \operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) < \delta.$$

А это означает, что последовательность  $(x_n)$  фундаментальная.

Допустим, что  $x_n \rightarrow x_0$ . Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{arctg} x_0 - \operatorname{arctg} n| = 0.$$

Положив  $\operatorname{arctg} x_0 - \operatorname{arctg} n = \alpha_n$ , получаем:

$$\operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arctg} n + \alpha_n,$$

где  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Переходя в этом соотношении к пределу, получим:

$$\operatorname{arctg} x_0 = \frac{\pi}{2},$$

что невозможно.

Полученное противоречие показывает, что рассматриваемая последовательность предела не имеет и пространство не является полным.

8.26. Является ли полным подпространство многочленов из пространства  $\mathbb{C}[a, b]$ ?

8.27\*. Докажите, что метрическое пространство, состоящее из всех функций, непрерывных на прямой и равных нулю вне некоторого интервала, с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g(x)|$$

не является полным.

8.28. Докажите, что если подмножество  $A$  метрического пространства  $M$ , рассматриваемое как самостоятельное метрическое пространство (с метрикой, заимствованной из  $M$ ), является полным пространством, то  $A$  — замкнутое множество.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную сходящуюся в  $M$  последовательность  $(x_n)$  точек из множества  $A$ . Чтобы убедиться, что  $A$  — замкнутое множество, достаточно (см. 5.37) показать, что ее предел  $x \in A$ .

Так как  $(x_n)$  сходится в пространстве  $M$ , то последовательность  $(x_n)$  является в метрике этого пространства фундаментальной. Но в  $M$  и  $A$  метрика одинаковая, поэтому  $(x_n)$  фундаментальна и в  $A$ . А так как  $A$  полное пространство, то  $x_n \rightarrow y \in A$ .

Итак,  $x_n \rightarrow x \in M$  и  $x_n \rightarrow y \in A \subset M$  по одной и той же метрике. В силу единственности предела в метрическом пространстве  $M$  отсюда следует, что  $x = y$  и, следовательно,  $x$  действительно принадлежит  $A$ .

8.29. Докажите, что в полном метрическом пространстве  $M$  всякая последовательность непустых замкнутых вложенных ( $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ ) стягивающихся (последовательность радиусов  $(r_n)$  стремится к нулю) шаров имеет непустое пересечение.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность центров  $(x_n)$  шаров  $(S_n)$ . Это фундаментальная последовательность, поскольку  $\rho(x_n, x_m) < r_n$  при  $m > n$ , а  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $M$  полно, то  $x_n \rightarrow x$ .

Подпоследовательность  $(x_k)$  ( $k = n, n+1, \dots$ ) рассматриваемой последовательности принадлежит шару  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), а значит, в силу замкнутости шара, и ее предел  $x \in S_n$ . Отсюда и следует, что  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ .

8.30. Нельзя ли в условии предыдущей задачи опустить требование, что последовательность шаров стягивающаяся?

*Решение.* Рассмотрим полное пространство задачи 8.20. В этом пространстве замкнутый шар  $S_n$  радиуса  $1 + \frac{1}{2n}$  с центром в  $n$  состоит из точек  $\{n, n+1, \dots\}$ , а потому, очевидно,  $S_1 \supset S_2 \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$ . Из условий задачи 8.29 не выполняется одно: радиусы  $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$  рассматриваемой последовательности шаров не стремятся к нулю. Так что это существенное условие, и его опустить, вообще говоря, нельзя.

8.31. Докажите, что пересечение шаров, указанных в 8.29, состоит только из одной точки.

8.32\*. Докажите, что если в некотором метрическом пространстве  $M$  всякая последовательность непустых замкнутых вложенных стягивающихся шаров имеет непустое пересечение, то  $M$  — полное пространство.

8.33. Докажите, что в банаховом пространстве любая (ср. с 8.29) последовательность вложенных замкнутых шаров  $S_1 \supset S_2 \supset \dots$  имеет непустое пересечение.

8.34\*. Приведите пример последовательности вложенных непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств (ср. с 8.33) в некотором банаховом пространстве, имеющих пустое пересечение.

8.35. Докажите, что в банаховом пространстве  $E$  абсолютно сходящийся ряд сходится и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \quad (*)$$

*Доказательство.* Пусть  $\sigma_k$  и  $S_k$  — частичные суммы (см. стр. 53) рядов (1) и (1') соответственно. По условию ряд (1') сходится, т. е. сходится последовательность его частичных сумм  $S_k$ , а значит, эта последовательность фундаментальна. А так как при  $m > p$

$$\begin{aligned} \|\sigma_m - \sigma_p\| &= \|x_{p+1} + x_{p+2} + \dots + x_m\| \leq \|x_{p+1}\| + \|x_{p+2}\| + \\ &+ \dots + \|x_m\| = S_m - S_p, \end{aligned}$$

то и последовательность  $\sigma_k \in E$  фундаментальна. Но  $E$  — полное пространство, и поэтому  $(\sigma_k)$  сходится. Первое утверждение доказано.

Обозначим сумму ряда (1) через  $\sigma$ , а ряда (1') через  $S$ . Имеем:

$$\|\sigma_k\| = \left\| \sum_{n=1}^k x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^k \|x_n\| = S_k,$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\sigma_k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S.$$

Так как в силу непрерывности нормы из условия  $\sigma_k \rightarrow \sigma$  следует  $\|\sigma_k\| \rightarrow \|\sigma\|$ , то полученное неравенство и есть неравенство (\*).

Пусть  $M$  — метрическое пространство. Всякое полное метрическое пространство  $\bar{M}$ , в котором имеется часть  $\tilde{M}$ , плотная<sup>1</sup> в  $\bar{M}$  и изометричная  $M$ , называется *пополнением* пространства  $M$ . Справедлива *теорема Хаусдорфа* о том, что у всякого метрического пространства  $M$  существует и с точностью до изометрии единственное пополнение  $\bar{M}$ .

8.36. Докажите, что если  $P$  — полное пространство и  $M \subset P$ , то замыкание  $M$  есть пополнение пространства  $M$ .

8.37. Найдите пополнения следующих метрических пространств:  
а) промежуток  $]a, b[$  числовой оси;

---

<sup>1</sup> Т. е.  $\tilde{M}$  всюду плотно в  $\bar{M}$ .

б) открытый круг плоскости  $\mathbb{R}_2^2$ ;

в) множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел с обычной метрикой.

8.38. Докажите, что  $\mathbf{C}[a, b]$  является пополнением подпространства  $X$ , состоящего из непрерывных кусочно-линейных функций.

8.39. Докажите, что подпространство  $X$  пространства  $\tilde{\mathbf{Z}}$  (см. 2.18), состоящее из натуральных чисел, не полно. Найдите его пополнение.

8.40. Введем в множество  $\mathbf{Z}$  целых чисел следующую метрику: выберем простое число  $p$  и положим  $\rho(a, b) = \frac{1}{p^k}$ , если  $a - b$  делится на  $p^k$ , но не делится на  $p^{k+1}$ . Докажите, что а) выполняются все аксиомы метрики; б) полученное метрическое пространство неполно.

Найдите пополнение этого пространства (элементы пополнения называются целыми  $p$ -адическими числами).

8.41. Докажите, что  $\mathbf{C}[a, b]$  является пополнением пространства многочленов, взятого с метрикой

$$\rho(P, Q) = \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - Q(x)|.$$

8.42. В пространстве ступенчатых функций на  $[0, 1]$  задана метрика

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_0^1 |\varphi(x) - \psi(x)| dx.$$

Докажите, что функция, равная нулю в точках канторова троичного множества  $F_0$  и  $\frac{1}{2^n}$  на смежных с  $F_0$  интервалах  $n$ -го ранга, принадлежит пополнению этого пространства.

8.43. Докажите, что любая ступенчатая функция на отрезке  $[a, b]$  принадлежит пополнению пространства  $\mathbf{C}_1[a, b]$ .

8.44. Докажите, что функция из задачи 8.42 принадлежит пополнению пространства  $\mathbf{C}_1[0, 1]$ .

## § 9 ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Пусть  $f$  — отображение метрического пространства  $M$  в себя. Точка  $x \in M$ , для которой  $f(x) = x$ , называется *неподвижной точкой* отображения  $f$ .

9.1. Найдите неподвижные точки отображения  $f(x) = x^2$  числовой прямой в себя.

9.2. Докажите, что отображение  $f(x) = 5x^2 + 2x + 3 - 2 \sin x$  числовой прямой в себя не имеет неподвижных точек.

9.3. Найдите неподвижные точки отображения  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ :

$$\begin{cases} u = x(y - 1) - 2y^2 + 5y + x - 3, \\ v = -x(y + 1) + 5 \end{cases}$$

пространства  $\mathbb{R}^2$  в себя.



9.4. Найдите неподвижные точки отображения  $f(y) = y^2(x) - y(x) - x^2$  пространства  $C[0, 1]$  в себя.

9.5. Найдите неподвижные точки отображения  $f(y) = y'(x)$ .

Отображение  $f$  метрического пространства  $M$  в себя называется *сжимающим*, если существует такое число  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), что для любых  $x_1, x_2 \in M$  выполняется неравенство

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2).$$

9.6. Покажите, что функция  $f(x) = x^2$  отображает промежуток  $[0, \frac{1}{3}]$  в себя. Является ли это отображение сжимающим?

*Решение.* Тот факт, что  $f$  отображает данный отрезок в себя, очевиден. Проверим, является ли это отображение сжимающим. Сделаем это двумя способами.

1. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки отрезка  $[0, \frac{1}{3}]$ . Имеем:

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{2}{3} \rho(x_1, x_2).$$

Следовательно, данное отображение сжимающее.

2. Для любых  $x_1$  и  $x_2$  по формуле Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} \rho(f(x_1), f(x_2)) &= |f(x_1) - f(x_2)| = \\ &= |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| = |f'(c)| \rho(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где  $c \in [x_1, x_2] \subset [0, \frac{1}{3}]$ . Так как для таких  $c$   $|f'(c)| = 2c \leq \frac{2}{3}$ , то

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \frac{2}{3} \rho(x_1, x_2).$$

9.7. Проверьте, что функция

$$f(x) = 4x - 4x^2$$

отображает промежуток  $[0, 1]$  в себя. Является ли это отображение сжимающим?

*Решение.* Так как  $f(x) = 4x(1 - x)$ , то ясно, что  $f(x) \geq 0$  при  $x \in [0, 1]$ , а из того, что  $f(x) - 1 = -(2x - 1)^2 \leq 0$ , получаем, что  $f(x) \leq 1$ . Таким образом,  $f$  действительно отображает отрезок  $[0, 1]$  в себя.

Рассмотрим  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Так как  $f(x_1) = 0$ ,  $f(x_2) = 1$ , то

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = 1 > \frac{1}{2} = \rho(x_1, x_2).$$

Отсюда следует, что  $f$  не является сжимающим отображением.

9.8. Является ли сжимающим отображение  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  полу-прямой  $[1, \infty[$  в себя?

*Решение.* Имеем:

$$\begin{aligned}\rho(f(x_1), f(x_2)) &= |f(x_1) - f(x_2)| = \left| (x_1 - x_2) + \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right| = \\ &= |x_1 - x_2| \left( 1 - \frac{1}{x_1 x_2} \right).\end{aligned}$$

Так как  $x_1 x_2 \geq 1$ , то получается неравенство

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho(x_1, x_2),$$

которое, однако, еще не означает, что отображение сжимающее. Для сжимающего отображения должно выполняться неравенство

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2),$$

где  $\alpha$  — некоторая правильная дробь. В нашем случае такого  $\alpha$  подобрать невозможно, поскольку выражение  $1 - \frac{1}{x_1 x_2}$  при достаточно большом  $x_1 x_2$  становится сколь угодно близким к единице.

9.9. Является ли сжимающим отображение  $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$  промежутка  $[3, \infty[$  в себя?

9.10. Является ли отображение  $f(x) = \sin x$  числовой прямой в себя сжимающим?

9.11. Покажите, что функция  $f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$  отображает отрезок  $[9, 10]$  в себя. Сжимающее ли это отображение?

9.12. Является ли сжимающим отображение  $f: (x, y) \rightarrow (u, v)$ , где

$$\begin{cases} u = 0,7x + 0,8y, \\ v = 0,2x - 0,05y \end{cases}$$

плоскости в себя, если плоскость рассматривается как пространство а)  $\mathbf{R}_2^2$  б)  $\mathbf{R}_1^2$ ?

*Решение.* а) Рассмотрим точки  $M_1 = (0, 0)$  и  $M_2 = (10, 10)$ . Найдем их образы:  $N_1 = (0, 0)$ ,  $N_2 = (15, 15)$ . Имеем:  $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{200}$ ,  $\rho(N_1, N_2) = \sqrt{225 + \frac{9}{4}}$ , т. е.  $\rho(f(M_1), f(M_2)) > \rho(M_1, M_2)$ . Значит, в  $\mathbf{R}_2^2$  отображение  $f$  не является сжимающим.

б) Пусть  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  — любые две точки пространства  $\mathbf{R}_1^2$ ,  $N_1(u_1, v_1)$  и  $N_2(u_2, v_2)$  — соответственно, их образы при отображении  $f$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\rho(f(M_1), f(M_2)) &= \rho(N_1, N_2) = |u_1 - u_2| + \\ &+ |v_1 - v_2| = |(0,7x_1 + 0,8y_1) - (0,7x_2 + 0,8y_2)| + \\ &+ |(0,2x_1 - 0,05y_1) - (0,2x_2 - 0,05y_2)| = \\ &= |0,7(x_1 - x_2) + 0,8(y_1 - y_2)| + \\ &+ |0,2(x_1 - x_2) - 0,05(y_1 - y_2)| \leq 0,9|x_1 - x_2| + \\ &+ 0,85|y_1 - y_2| \leq 0,9(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = \\ &= 0,9 \rho(M_1, M_2).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f$  — сжимающее отображение пространства  $\mathbf{R}_1^2$ .

**9.13.** Является ли отображение  $f: (x, y) \rightarrow (u, v)$ , где

$$\begin{aligned} u &= 0,2x + 0,4y + 7, \\ v &= -0,3x - 0,6y - 15, \end{aligned}$$

плоскости в себя сжимающим, если плоскость рассматривать как метрическое пространство а)  $R_2^2$ ; б)  $R_1^2$ ; в)  $R_\infty^2$ ?

**9.14.** Докажите, что отображение

$$Ay = q \int_0^x y(t) dt$$

пространства  $C[0, 1]$  в себя является сжимающим при  $0 < q < 1$ .

**9.15.** Пусть  $f(x, y)$  функция, непрерывная в квадрате  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  и удовлетворяющая в  $D$  условию Липшица:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|.$$

Докажите, что при  $q < \frac{1}{K}$  отображение

$$Ay = y_0(x) + q \int_0^x f[t, y(t)] dt$$

пространства  $C[-1, 1]$  в себя является сжимающим.

**9.16.** Докажите, что сжимающее отображение  $f : M \rightarrow M$  непрерывно на  $M$ .

Пусть  $f$  — отображение метрического пространства  $M$  в себя. Последовательность точек этого пространства  $x_n = f(x_{n-1})$  ( $n \in N$ ;  $x_0$  — произвольная точка  $M$ ) называется последовательностью *последовательных приближений* (или *итераций*) для отображения  $f$ .

**9.17.** Докажите, что если отображение  $f$  непрерывно, а последовательность итераций  $(x_n)$  для  $f$  сходится, то ее предел есть неподвижная точка отображения  $f$ .

**9.18.** Пусть  $f : M \rightarrow M$  — сжимающее отображение. Докажите, что последовательные приближения для  $f$  удовлетворяют неравенству

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

**Доказательство.** Так как по определению последовательных приближений  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ , а в силу условия сжимаемости

$$\rho(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha \rho(x_1, x_0),$$

TO

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha \rho(x_1, x_0).$$

## Аналогично

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha \rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2 \rho(x_1, x_0),$$

.....

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

**9.19.** Пусть  $f : M \rightarrow M$  — сжимающее отображение. Докажи-

те, что последовательные приближения для  $f$  образуют фундаментальную последовательность.

*Доказательство.* Так как  $0 < \alpha < 1$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \rho(x_1, x_0)$  сходится. Но по 9.18  $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0)$ , а потому ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_{n+1}, x_n)$  сходится. Следовательно,  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность (см. задачу 8.5).

**9.20.** Докажите (*принцип сжимающих отображений* или *теорема Банаха*), что всякое сжимающее отображение  $f$  полного метрического пространства  $M$  в себя имеет одну и только одну неподвижную точку  $\bar{x}$ , причем  $\bar{x}$  есть предел последовательных приближений для  $f$ , построенных при любом выборе начального приближения  $x_0$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольное  $x_0 \in M$  и рассмотрим последовательные приближения  $x_n = f(x_{n-1})$ . В предыдущей задаче было показано, что  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность. В силу полноты  $M$  эта последовательность сходится к некоторой точке  $\bar{x} \in M$ .

Для этой точки  $\bar{x}$  имеем:

$$\begin{aligned} \rho(f(\bar{x}), \bar{x}) &\leq \rho(f(\bar{x}), x_n) + \rho(x_n, \bar{x}) = \rho(f(\bar{x}), f(x_{n-1})) + \\ &+ \rho(x_n, \bar{x}) \leq \alpha \rho(\bar{x}, x_{n-1}) + \rho(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\rho(f(\bar{x}), \bar{x}) = 0$ , т. е.  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  и  $\bar{x}$  — действительно неподвижная точка.

Допустим, что  $x' \in M$  — другая неподвижная точка отображения  $f$ . Тогда

$$\rho(\bar{x}, x') = \rho(f(\bar{x}), f(x')) \leq \alpha \rho(\bar{x}, x').$$

Так как  $\rho(\bar{x}, x') > 0$  при  $\bar{x} \neq x'$ , то последнее неравенство можно сократить на  $\rho(\bar{x}, x')$ . Получаем  $1 \leq \alpha$ , что невозможно.

Теорема полностью доказана.

**9.21.** Если для любых  $x_1, x_2 \in M$  выполняется соотношение  $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho(x_1, x_2)$ , то — сказал студент — отображение  $f: M \rightarrow M$  называется сжимающим. Справедлива ли теорема Банаха для таких отображений?

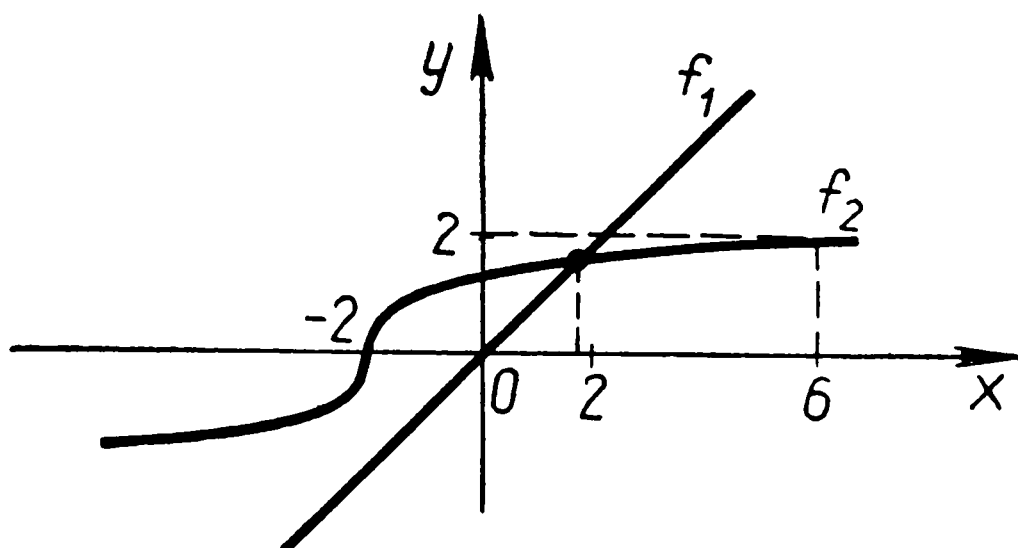
**9.22.** Является ли отображение

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$$

числовой прямой в себя сжимающим? Имеет ли оно неподвижные точки?

**9.23.** Докажите, что если функция  $f$  отображает отрезок  $[a, b]$  в себя, дифференцируема на этом отрезке и

$$|f'(x)| \leq \alpha < 1$$



Р и с. 17

на  $[a, b]$ , то уравнение  

$$x = f(x)$$

имеет на отрезке  $[a, b]$  одно и только одно решение  $\bar{x}$ , причем его можно вычислить с любой степенью точности по формуле последовательных приближений<sup>1</sup>:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

при любом выборе начального приближения  $x_0 \in [a, b]$ .

9.24. Покажите, что уравнение

$$x = \sqrt[3]{x+2}$$

можно решить методом последовательных приближений и вычислите его корни с точностью до 0,01.

*Решение.* Рассмотрим графики функций  $f_1(x) = x$  и  $f_2(x) = \sqrt[3]{x+2}$  (рис. 17). Они «подсказывают», что данное уравнение имеет единственное решение  $\bar{x}$  и оно принадлежит отрезку  $[0, 2]$ . Не останавливаясь на строгом доказательстве (оно несложно) того факта, что вне  $[0, 2]$  решений нет, покажем, что на  $[0, 2]$  действительно имеется и притом единственное решение.

Но это сразу вытекает из 9.23, поскольку  $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$  отображает отрезок  $[0, 2]$  в себя и

$$|f'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} < \frac{1}{3}$$

на этом промежутке. Одновременно из 9.23 следует, что искомое решение может быть найдено методом последовательных приближений<sup>2</sup>. Для этого возьмем, например,  $x_0 = 1$ . Тогда  $x_1 = \sqrt[3]{3} = 1,442$ ;  $x_2 = \sqrt[3]{x_1} = 1,510$ ;  $x_3 = 1,520$ ,  $x_4 = 1,521$ . Отсюда следует, что  $\bar{x} = 1,52$  с точностью до 0,01.

9.25. Для определения точки орбиты, в которой находится спутник в указанный момент времени, приходится решать уравнение Кеплера

$$x - \varepsilon \sin x = m.$$

Докажите, что при любом  $m$  и  $0 < \varepsilon < 1$  уравнение Кеплера имеет

<sup>1</sup> Т. е. требуется показать, что при любой наперед заданной степени точности  $\varepsilon$  на некотором шаге вычислений по указанной формуле получается такое число  $x_n$ , что  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ , и, следовательно, с точностью до  $\varepsilon$  можно положить  $\bar{x} \approx x_n$ . Это, очевидно, будет вытекать из условия:  $\bar{x} = \lim x_n$

<sup>2</sup> Более подробно с техникой решения таких задач вы познакомитесь в курсе вычислительной математики.

единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.

9.26. Докажите, что для вычисления квадратного корня из положительного числа  $a$  можно пользоваться следующей формулой последовательных приближений

$$x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \quad (*)$$

при любом выборе нулевого приближения  $x_0 \geq \sqrt{a}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отображение

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right).$$

Оно, очевидно, переводит полное метрическое пространство  $[\sqrt{a}, \infty[$  (его полнота вытекает из 8.11 и 8.13) в себя. Поскольку

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \frac{1}{2} \left| x_1 - x_2 \right| \cdot \left| 1 - \frac{a}{x_1 x_2} \right|,$$

а при  $x_1 \geq \sqrt{a}$  и  $x_2 \geq \sqrt{a}$

$$0 < 1 - \frac{a}{x_1 x_2} < 1,$$

то мы имеем, что

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{2} \rho(x_1, x_2)$$

и, следовательно, рассматриваемое отображение сжимающее. По теореме Банаха у него существует единственная неподвижная точка, являющаяся пределом последовательности последовательных приближений, которые и задает формула (\*). А так как неподвижная точка  $\bar{x}$  есть решение уравнения  $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ , то находим, что  $\bar{x} = \sqrt{a}$ .

Итак, мы показали, что последовательность (\*) сходится к числу  $\sqrt{a}$ , откуда и следует (см. сноску к 9.23), что формула (\*) действительно может быть использована для вычисления корней с любой наперед заданной степенью точности.

9.27. Докажите, что следующие последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, имеют пределы, и найдите их:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_n &= \frac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} \quad (x_0 = 1); & \text{б) } x_n &= \frac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}} \quad (x_0 = -5); & \text{в) } x_n &= \\ &= \frac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \quad (x_0 = 5). \end{aligned}$$

9.28. Докажите, что последовательность цепных дробей

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

имеет предел, и найдите его.

*Решение.* Данная последовательность, очевидно, удовлетворяет такому рекуррентному соотношению:

$$x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad x_0 = 2,$$

т. е. она представляет собой последовательность итераций для функции  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ .

Функция  $f$  отображает в себя полное метрическое пространство  $[2, \infty[$ . Это сжимающее отображение. Действительно,

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{1}{4} \rho(x_1, x_2).$$

Тогда по теореме Банаха отображение  $f$  имеет на  $[2, \infty[$  единственную неподвижную точку, и к ней сходятся последовательные приближения  $f$  при любом выборе начального приближения  $x_0 \in [2, \infty[$ . Это означает, что и рассматриваемая последовательность цепных дробей имеет предел, причем он равен неподвижной точке отображения  $f$ . Найдем эту точку:

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{x} \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

**9.29.** Докажите, что следующие последовательности имеют пределы, и найдите их:

а)  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots;$

б)  $\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots$

**9.30.** Пусть дана система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Докажите, что если для этой системы выполняется хотя бы одно из условий

(а)  $\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 < 1;$

(б)  $\beta = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| < 1;$

(в)  $\gamma = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| < 1,$

то данная система имеет единственное решение, и его можно с лю-



бой степенью точности найти методом последовательных приближений:

$$x_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{(m-1)} + b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

при любом выборе начального приближения  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $f$   $n$ -мерного пространства  $\mathbf{R}^n$  в себя, задаваемое формулами

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Возьмем две произвольные точки  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  и  $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$  из  $\mathbf{R}^n$  и обозначим их образы при отображении  $f$  через  $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$  и  $y'' = (y''_1, \dots, y''_n)$ . Вводя в  $\mathbf{R}^n$  метрику пространств  $\mathbf{R}_2^n$ ,  $\mathbf{R}_1^n$  и  $\mathbf{R}_\infty^n$ , покажем, что отображение  $f$  при выполнении условий (а), (б) и (в) соответственно будет сжимающим и, следовательно, справедливость задачи вытекает из теоремы Банаха.

а)  $f : \mathbf{R}_2^n \rightarrow \mathbf{R}_2^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho^2(f(x'), f(x'')) &= \rho^2(y', y'') = \\ &= \sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} (x'_k - x''_k) \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда на основании неравенства Коши и условия (а) имеем:

$$\rho^2(f(x'), f(x'')) \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n (x'_k - x''_k)^2 \right) \leq \alpha \rho^2(x', x''),$$

т. е.  $f$  — сжатие.

б)  $f : \mathbf{R}_1^n \rightarrow \mathbf{R}_1^n$ . Тогда в силу условия (б)

$$\begin{aligned} \rho(f(x'), f(x'')) &= \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (x'_k - x''_k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x'_k - x''_k| = \sum_{i=1}^n (|a_{i1}| \cdot |x'_1 - x''_1| + \dots + \\ &\quad + |a_{in}| \cdot |x'_n - x''_n|) = \\ &= |x'_1 - x''_1| \sum_{i=1}^n |a_{i1}| + \dots + |x'_n - x''_n| \sum_{i=1}^n |a_{in}| \leq \beta \rho(x', x''), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

в)  $f : \mathbf{R}_\infty^n \rightarrow \mathbf{R}_\infty^n$ . Тогда в силу условия (в)

$$\begin{aligned} \rho(f(x'), f(x'')) &= \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (x'_k - x''_k) \right| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x'_k - x''_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \max_k |x'_k - x''_k| \leq \\ &\leq \rho(x', x'') \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \gamma \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Значит, отображение  $f$  — сжимающее.

9.31. Покажите, что система

$$\begin{cases} 10x - 2y + z = 9, \\ x + 5y - z = 8, \\ 4x + 2y + 8z = 32 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдите его с точностью до 0,01 методом последовательных приближений, выбрав за начальное приближение точку  $(0, 0, 0)$ .

9.32\*. Пусть функции

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y), \\ v &= f_2(x, y) \end{aligned}$$

задают отображение плоскости  $\mathbf{R}^2$  в себя, непрерывны, имеют непрерывные частные производные и для них на всей плоскости выполняются соотношения

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f_i}{\partial y} \right| < q < 1 \quad (i = 1, 2).$$

Докажите, что тогда система уравнений

$$\begin{cases} x = f_1(x, y), \\ y = f_2(x, y) \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений при любом выборе начального приближения.

9.33. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  и удовлетворяет в  $D$  условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|.$$

Положим  $M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$  и  $h = \min\left(a, \frac{1}{K}, \frac{b}{M}\right)$ . Докажите, что  $F: y \rightarrow z$ , где

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt -$$

сжимающее отображение в себя подмножества  $A$  из  $C[x_0 - h, x_0 + h]$ , состоящего из функций  $y(x)$ , таких, что  $|y(x) - y_0| \leq b$ . Докажите, что неподвижная точка этого отображения удовлетворяет

дифференциальному уравнению  $y' = f(x, y)$  и начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

9.34. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в полосе  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$  и удовлетворяет в  $D$  условию

$$m |y_1 - y_2| \leq f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq M |y_1 - y_2|,$$

где  $0 < m < M$ . Докажите, что  $A : y \rightarrow z$ , где

$$z(x) = y(x) - \frac{1}{M} f(x, y(x)) -$$

сжимающее отображение  $C[a, b]$  в себя, причем неподвижная точка этого отображения является единственной непрерывной на  $[a, b]$  функцией, задаваемой неявно уравнением  $f(x, y) = 0$ .

9.35. Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ . Покажите, что уравнение

$$y(x) + \frac{1}{2} \sin y(x) + f(x) \equiv 0$$

имеет единственное решение  $y(x) \in C[a, b]$ .

9.36. Найдите непрерывную на отрезке  $[0, 1]$  функцию — решение интегрального уравнения

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x t u(t) dt + \frac{5}{6} x = u(x).$$

9.37. Решите следующие интегральные уравнения:

$$\text{а) } u(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 u(t) dt + e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } u(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x u(t) dt - \frac{3}{4} x.$$

## § 10 ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОПЕРАТОРЫ

Пусть задано некоторое отображение  $F$  нормированного пространства  $E$  в числовую прямую  $\mathbf{R}$ . Такое отображение  $F$  называют *функционалом*, определенным на  $E$  или действующим в  $E$ .

10.1. Приведите примеры функционалов, определенных на пространствах  $\mathbf{R}_2^n$ ,  $\mathbf{R}_2^\infty$ ,  $C[a, b]$ .

Функционал  $F$  называется *аддитивным*, если

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$$

для любых  $x_1, x_2 \in E$ .

10.2. Является ли аддитивным функционалом линейная числовая функция  $y = ax + b$ ?

10.3. Является ли аддитивным функционал  $z = ax + by$ , определенный на плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ ?

В 10.4 — 10.7 заданы функционалы на  $C[0, 1]$ . Определите, аддитивны ли они.

$$10.4. F(f) = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

$$10.5. F(f) = |f(1)|.$$

$$10.6. F(f) = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x).$$

$$10.7. F(f) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right).$$

10.8. Докажите, что для всякого аддитивного функционала  $F(\vartheta) = 0$ ,  $F(-x) = -F(x)$  при любом  $x \in E$ .

10.9. Докажите, что для всякого аддитивного функционала

$$F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad (1)$$

при любом  $x \in E$  и любом рациональном  $\lambda$ .

Если для функционала  $F$  соотношение (1) выполняется при всех действительных  $\lambda$ , то такой функционал называется *однородным*. Не всякий аддитивный функционал однороден.

10.10. Пусть функционал  $F$  определен в  $n$ -мерном нормированном пространстве  $E^n$ . Докажите, что формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad (2)$$

где  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — координаты элемента  $x$  относительно некоторого базиса,  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — произвольные действительные числа, задает общий вид аддитивного однородного функционала в  $E^n$ .

*Доказательство.* 1. Покажем вначале, что всякий функционал указанного вида аддитивен и однороден. Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные элементы из  $E^n$ . Обозначим через  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  координаты  $x$  и  $y$  относительно выбранного в  $E^n$  базиса. Из теории линейных пространств известно, что элементы  $x + y$  и  $\lambda x$  в таком случае имеют координаты  $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$  и  $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$  соответственно. Поэтому

$$F(\lambda x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \lambda F(x),$$

$$\begin{aligned} F(x + y) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = F(x) + F(y), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

2. Пусть теперь  $F$  — произвольный аддитивный и однородный функционал на  $E^n$ . Покажем, что его можно представить в виде (2).

Для этого выберем в  $E^n$  какой-нибудь базис  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда произвольный элемент  $x \in E^n$  можно представить в виде

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Отсюда в силу аддитивности и однородности  $F$

$$F(x) = x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n).$$

Обозначая числа  $F(e_1), \dots, F(e_n)$  через  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , мы и получаем представление (2).

**10.11.** Приведите пример аддитивного, но разрывного функционала.

Аддитивный, однородный и непрерывный на  $E$  функционал называется *линейным функционалом*.

**10.12.** Докажите, что всякий аддитивный и непрерывный функционал  $F$  однороден.

**10.13.** Докажите, что если аддитивный функционал  $F$  непрерывен в нуле  $\theta$  пространства  $E$ , то он непрерывен и на всем пространстве  $E$ , т. е. линейен.

*Доказательство.* Пусть  $x \in E$  и  $x_n \rightarrow x$ . В силу 5.6  $x_n - x \rightarrow \theta$ , а из непрерывности функционала в  $\theta$  отсюда следует, что  $F(x_n - x) \rightarrow F(\theta) = 0$ . Используя аддитивность функционала (с учетом 10.8), получаем  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x_n) - F(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - F(x)$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$ , что и доказывает непрерывность функционала в произвольной точке  $x \in E$ .

**10.14.** Пусть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$  ( $x_k \in E$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ) сходится. Докажите, что для линейного функционала  $F$  на  $E$  справедливо соотношение (*свойство счетной дистрибутивности*):

$$F\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F(x_k). \quad (3)$$

**10.15.** Докажите, что аддитивный и однородный функционал  $F$  тогда и только тогда линейен, когда существует такая (неотрицательная) константа  $K$ , что

$$|F(x)| \leq K \|x\| \quad (4)$$

для всех  $x$  из нормированного пространства  $E$ , в котором действует функционал.

*Доказательство.* 1. Пусть выполняется условие (4). Рассмотрим любую последовательность  $x_n \rightarrow \theta$ . Тогда  $\|x_n\| \rightarrow 0$  и из (4) сразу вытекает, что  $F(x_n) \rightarrow 0$ , т. е. функционал непрерывен в  $\theta$ , а значит (см. 10.13), и на всем пространстве.

2. Пусть  $F$  — линейный функционал. Покажем, что (4) выполняется. Допустим противное, что такую константу  $K$  подобрать

невозможно. Тогда для любого натурального  $n$  найдется такая точка  $x_n \in E$ , что

$$|F(x_n)| > n \|x_n\|. \quad (5)$$

Из этого неравенства видно, что  $x_n \neq \theta$ . Поэтому в линейном пространстве  $E$  можно рассмотреть последовательность точек  $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$ . Так как  $\|y_n\| = \frac{1}{n}$ , то  $y_n \rightarrow \theta$ . Однако, в силу (5),

$$|F(y_n)| = \frac{|F(x_n)|}{n \|x_n\|} > 1$$

и  $F(y_n)$  к  $F(\theta) = 0$  сходитья не может, что противоречит условию непрерывности линейного функционала в точке  $\theta$ . Значит, допущение неверно и соотношение (4) при некотором  $K$  выполняется.

**10.16.** Докажите, что среди всех чисел  $K$ , подходящих для (4), имеется наименьшее.

*Доказательство.* Множество  $T$  всех таких чисел  $K$ , будучи ограниченным снизу (числом 0), имеет нижнюю грань  $k$ . Нам достаточно показать, что  $k \in T$ .

По свойству нижней грани в  $T$  можно указать последовательность  $(K_n)$ , сходящуюся к  $k$ . Так как  $K_n \in T$ , то выполняется неравенство:  $|F(x)| \leq K_n \|x\|$  ( $x \in E$ ). Переходя в этом неравенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем:

$$|F(x)| \leq k \|x\| \quad (x \in E), \text{ т. е. } k \in T.$$

Наименьшая (см. 10.16) из констант  $K$ , при которых выполняется неравенство (4), называется *нормой функционала  $F$*  и обозначается так:  $\|F\|$ . Таким образом,

$$\|F\| \leq K \quad (6)$$

при любом  $K$ , подходящем для (4). С другой стороны,

$$|F(x)| \leq \|F\| \cdot \|x\| \quad (6')$$

при любом  $x$  из  $E$ . В частности,

$$\|F\| \geq |F(x_0)|, \quad (6'')$$

где  $x_0$  — произвольная точка единичного шара  $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ .

**10.17.** В пространстве  $C[a, b]$  задан функционал  $\delta(f) = f(x_0)$ , где  $x_0 \in [a, b]$ . Покажите, что это линейный функционал, и найдите его норму.

*Решение.* Аддитивность очевидна. Так как далее

$$|\delta(f)| = |f(x_0)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \|f\|,$$

то мы показали, что для данного функционала выполняется неравенство (4) при  $K = 1$ . В силу 10.15 это и означает, что  $\delta$  — линейный функционал (ср. с 7.13).

Для отыскания нормы  $\delta$  заметим, что из полученного соотношения в силу (6) вытекает:  $\|\delta\| \leq 1$ . Естественно возникает подозрение, что  $\|\delta\| = 1$ . Чтобы в этом убедиться, хорошо бы получить противоположную оценку для  $\|\delta\|$ . Соответствующую идею нам подсказывает

неравенство (6''). Надо попробовать подобрать в единичном шаре такую функцию  $f_0$ , что  $|F(f_0)| = 1$ . Но это легко осуществимо! Достаточно взять  $f_0(x) \equiv 1$ . Тогда по (6'')

$$\|\delta\| \geq |\delta(f_0)| = 1,$$

что вместе с ранее полученным противоположным неравенством и показывает:  $\|\delta\| = 1$ .

10.18. В пространстве  $C[a, b]$  задан функционал

$$F(f) = \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

где  $x_1, \dots, x_n$  фиксированные точки отрезка  $[a, b]$ . Покажите, что этот функционал линеен, и найдите его норму.

10.19. Докажите, что для любого конечного множества точек  $x_1, \dots, x_n$  из  $[a, b]$  и любых чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  функционал

$$F(y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y(x_k)$$

в  $C[a, b]$  линеен, и найдите его норму.

*Решение.* Аддитивность и однородность функционала  $F$  очевидна. Далее, для любой функции  $y(x)$  из  $C[a, b]$  имеем:

$$\begin{aligned} |F(y)| &= \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k y(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot |y(x_k)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = \|y\| \sum_{k=1}^n |\lambda_k|. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу 10.15, этот функционал линеен, причем его норма не превосходит числа  $\sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ .

Для доказательства того, что  $\|F\| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ , достаточно подо-

брать такую функцию  $y_0(x)$  из  $C[a, b]$ , что  $\|y_0\| = 1$  и  $|F(y_0)| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|$ .

В качестве  $y_0(x)$  можно взять любую непрерывную на  $[a, b]$  функцию, такую, что  $y(x_k) = \text{sign } \lambda_k$  ( $\text{sign } x = 1$ , если  $x > 0$ ,  $\text{sign } x = -1$ , если  $x < 0$  и  $\text{sign } 0 = 0$ ).

10.20. Покажите, что

$$F(y) = \int_a^b y(x) dx —$$

линейный функционал в  $C[a, b]$ , и найдите его норму.

10.21. Докажите, что

$$F(y) = \int_0^1 (1 - x^2) y(x) dx —$$



линейный функционал в  $C[a, b]$ , и найдите его норму.

10.22. Докажите, что если функция  $p(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$F(y) = \int_a^b p(x) f(x) dx —$$

линейный функционал в  $C[a, b]$ , норма которого не превосходит  $\int_a^b |p(x)| dx$ . Докажите, что если  $p(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то  $\|F\| = \int_a^b p(x) dx$ .

10.23. Найдите норму линейного функционала

$$F(y) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - x^2\right) y(x) dx$$

в пространстве  $C[-1, 1]$ .

При нахождении нормы линейного функционала в бесконечномерных банаховых пространствах далеко не всегда удастся найти такой элемент  $x_0$  в единичном шаре, на котором  $|F(x_0)| = \|F\|$ . Дело в том, что в бесконечномерных пространствах единичный шар некомпактен (см., например, задачу 6.14). В этих случаях приходится сначала доказывать, что  $|F(x)| \leq \|F\|$  для всех  $x$  из единичного шара, а потом для любого  $\varepsilon > 0$  отыскивать такую точку  $x_\varepsilon$  в единичном шаре, что  $\|F\| - \varepsilon < |F(x_\varepsilon)|$  (вместо этого можно построить последовательность  $(x_n)$  точек единичного шара, такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \|F\|).$$

10.24. Пусть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$  абсолютно сходится, а  $(x_k)$  — любая последовательность точек отрезка  $[a, b]$ . Докажите, что

$$F(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y(x_k) —$$

линейный функционал в  $C[a, b]$ , и найдите его норму.

*Решение.* Так как ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$  сходится, а любая функция из  $C[a, b]$  ограничена, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k y(x_k)|$  сходится по признаку срав-

нения рядов с неотрицательными числами, а потому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y(x_k)$  абсолютно сходится. Значит,  $F(y)$  определено для всех  $y(x) \in C[a, b]$ . Аддитивность и однородность  $F$  следует из теорем о рядах. Чтобы доказать непрерывность  $F$ , заметим, что

$$\begin{aligned}
|F(y)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \cdot |y(x_k)| \leq \\
&\leq \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| = \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|.
\end{aligned}$$

Значит,  $F$  непрерывно, причем  $\|F\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ .

Докажем, наконец, что  $\|F\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ . При любом  $\varepsilon > 0$  найдется

такое  $m$ , что  $\sum_{k=m+1}^{\infty} |\lambda_k| < \varepsilon$ . Обозначим через  $y_m(x)$  функцию из  $C[a, b]$ , такую, что  $|y(x)| \leq 1$  при  $x \in [a, b]$  и  $y(x_k) = \text{sign } \lambda_k$  при  $1 \leq k \leq m$ . Так как при  $1 \leq k \leq m$  имеем  $\lambda_k y(x_k) = \lambda_k \text{sign } \lambda_k = |\lambda_k|$ , то

$$\begin{aligned}
F(y_m) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_m(x_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k y(x_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k y(x_k) = \\
&= \sum_{k=1}^m |\lambda_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k y(x_k).
\end{aligned}$$

Поскольку  $|y(x_k)| \leq 1$  для всех  $k$ , то

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k y(x_k) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |\lambda_k| < \varepsilon.$$

Но тогда имеем:

$$F(y_m) \geq \sum_{k=1}^m |\lambda_k| - \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| - 2\varepsilon.$$

Итак,  $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| - 2\varepsilon \leq F(y_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ . В силу произвольности

$\varepsilon > 0$ , заключаем, что  $\|F\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ .

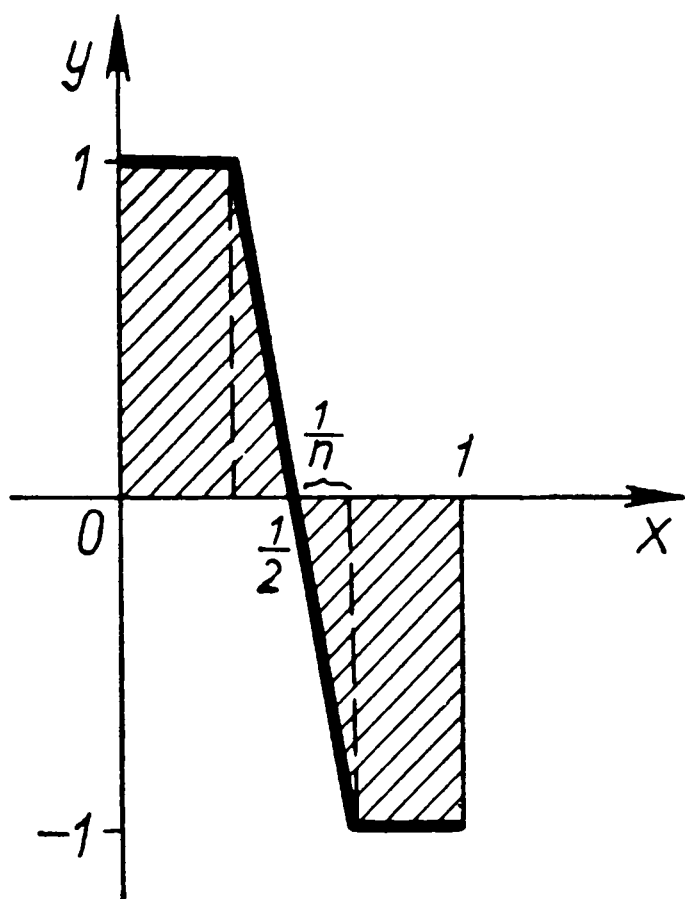
10.25. Покажите, что функционал

$$F(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} y(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 y(x) dx,$$

в пространстве  $C[0, 1]$  линейен, и найдите его норму.

*Решение.* Аддитивность функционала очевидна.

Для любой функции  $y(x) \in C[0, 1]$  имеем:



Р и с. 18

$$\begin{aligned}
 |F(y)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} y(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 y(x) dx \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} y(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 y(x) dx \right| \leq \\
 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |y(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |y(x)| dx \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} |y(x)| + \frac{1}{2} \max_{\frac{1}{2} \leq x \leq 1} |y(x)| \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| + \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| = \|y\|.$$

Это соотношение показывает, что функционал непрерывен, а следовательно, и линеен.

Мы получили также, что  $\|F\| \leq 1$ . Чтобы доказать равенство  $\|F\| = 1$ , построим последовательность функций  $(y_n)$ , такую, что  $\|y_n\| = 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$ . В качестве  $y_n(x)$  возьмем функцию, график которой изображен на рисунке 18. Из этого рисунка видно, что  $F(y_n) = 1 - \frac{1}{n}$  (площадь заштрихованной фигуры), причем  $\|y_n\| = 1$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1$ , то равенство  $\|F\| = 1$  доказано.

10.26. Покажите, что

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} y\left(\frac{1}{2^n}\right) -$$

линейный функционал на  $C[0, 1]$ , и найдите его норму.

10.27. Покажите, что

$$F(y) = \int_0^2 (x-1) y(x) dx -$$

линейный функционал на  $C[0, 2]$ , и найдите его норму.

10.28\*. Докажите, что норма функционала

$$F(y) = \int_a^b p(x) y(x) dx \quad (7)$$

в  $C[a, b]$ , где  $p(x)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция, равна  $\int_a^b |p(x)| dx$ .

**10.29.** Покажите, что не всякий линейный функционал в  $C[a, b]$  можно представить в виде (7).

*Решение.* Положим для простоты  $a = -1$ ,  $b = 1$  и рассмотрим линейный (см. 10.17) на  $C[-1, 1]$  функционал  $\delta(y) = y(0)$ . Допустим, что его удалось записать в виде (7), т. е. удалось подобрать такую непрерывную на  $[-1, 1]$  функцию  $f$ , что значения  $\delta$  вычисляются по формуле

$$\delta(y) = \int_{-1}^1 f(x) y(x) dx \quad (8)$$

при любом  $y(x) \in C[-1, 1]$ .

Рассмотрим функцию  $y_n(x)$ , график которой изображен на рисунке 19 ( $n$  — произвольное, но фиксированное натуральное число). Так как

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 y_n(x) f(x) dx \right| &= \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} y_n(x) f(x) dx \right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |y_n(x)| \cdot |f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x)| dx \leq \frac{2 \|f\|}{n}, \end{aligned}$$

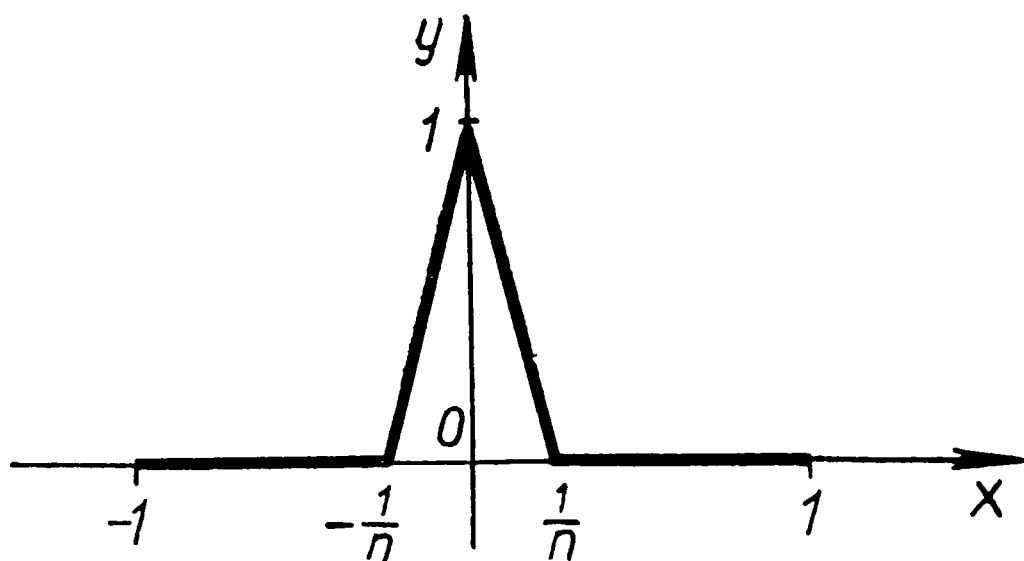
а  $\frac{2 \|f\|}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то при некотором  $n = N$

$$\frac{2 \|f\|}{N} < \frac{1}{2}.$$

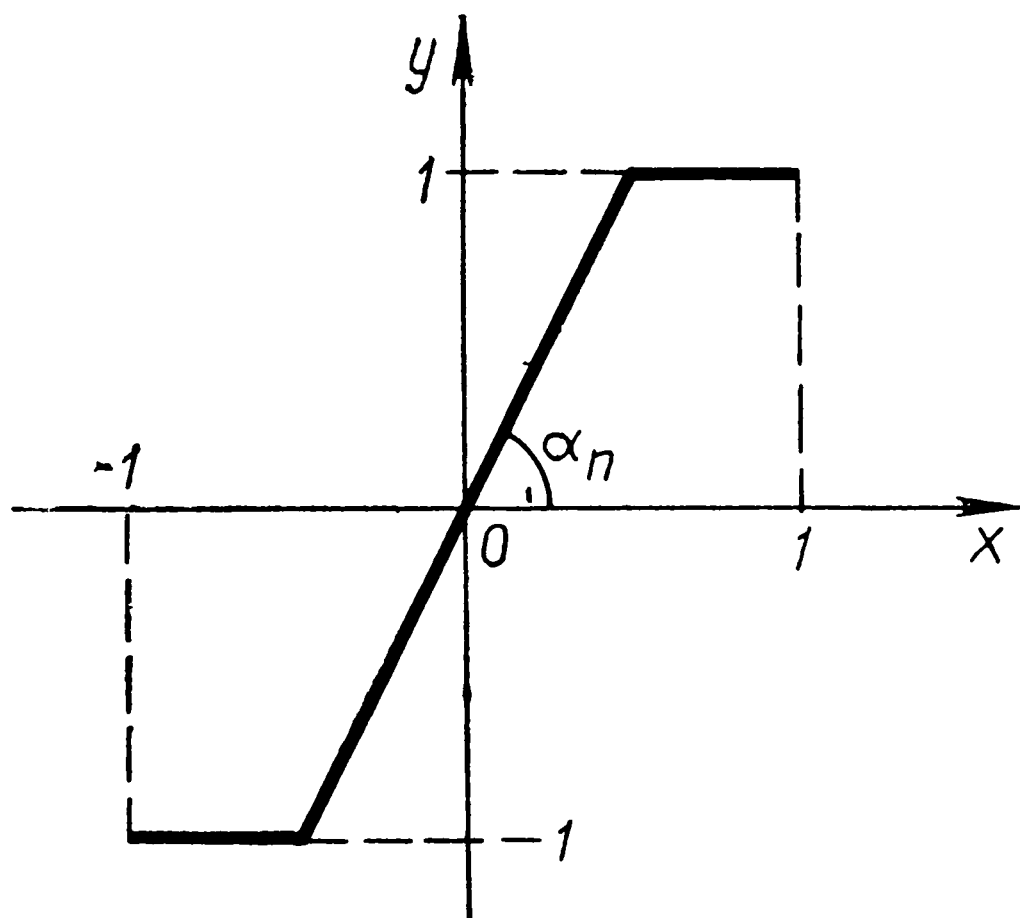
Следовательно, и

$$\left| \int_{-1}^1 y_N(x) f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2}.$$

В то же время  $\delta(y_N) = y_N(0) = 1$ , и потому при  $y = y_N$  из формулы (8) получаем:  $1 = a$ , где  $|a| \leq \frac{1}{2}$ . Это невозможно. Значит, допущение неверно, а верно утверждение задачи.



Р и с. 19



Р и с. 20

10.30\*. Покажите, что интеграл Стильеса

$$F(y) = \int_a^b y(x) dg(x),$$

где  $g(x)$  — произвольная функция ограниченной вариации на  $[a, b]$ , представляет собой<sup>1</sup> линейный функционал на  $C[a, b]$ , причем

$$\|F\| \leq \text{Var}_a^b g(x).$$

10.31. Проверьте, что

$$F(y) = \int_0^1 [h(x)y(x) + xy'(x)] dx —$$

линейный функционал в  $D^1[0, 1]$ , если  $h$  — произвольная функция этого пространства.

10.32. На подпространстве  $C'$  пространства  $C[-1, 1]$ , состоящем из дифференцируемых в точке 0 функций, задан функционал  $F(y) = y'(0)$ . Линеен ли этот функционал?

*Решение.* Аддитивность функционала очевидна.

Будет ли он непрерывным? Для ответа на этот вопрос рассмотрим функцию  $y_n(x)$ , график которой изображен на рисунке 20 (угол  $\alpha_n$  такой, что  $\text{tg } \alpha_n = n$ ;  $n$  — произвольное натуральное число). Для этой функции

$$F(y_n) = y_n'(0) = \text{tg } \alpha_n = n.$$

Так как  $\|y_n(x)\| = 1$ , то это равенство можно переписать так:

$$|F(y_n)| = n\|y_n\|.$$

Отсюда вытекает, что какое бы положительное  $K$  мы ни взяли, найдется такая функция  $y_n(x)$ ,  $n > K$ , что

$$|F(y_n)| = n\|y_n\| > K\|y_n\|.$$

Другими словами, нельзя подобрать такое  $K$ , чтобы неравенство (4) выполнялось для всех  $y$ . В силу 10.15 это означает, что функционал не может быть непрерывным, а следовательно, не является и линейным.

Заметим, что к этому же выводу можно прийти и иначе, до-

<sup>1</sup> Можно показать, что эта формула дает общий вид линейного функционала на  $C[a, b]$ , но это выходит за рамки нашей книги.

казав, что функционал разрывен в какой-либо «точке», например  $y(x) \equiv 0$ .

10.33. Назовем *обобщенной функцией* на  $[-1, 1]$  всякий линейный функционал  $F$ , действующий в пространстве  $\tilde{\mathbf{D}}$  (см. 3.15). Пусть  $f$  — произвольная интегрируемая на  $[-1, 1]$  функция. Покажите, что

$$F_f(\varphi) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx \quad (9)$$

обобщенная функция на  $[-1, 1]$

10.34. Назовем *производной обобщенной функции*  $F$  функционал  $F'$ , определяемый по формуле  $F'(\varphi) = -F(\varphi')$ . Покажите, что

1) производная обобщенной функции есть обобщенная функция;  
2) если обобщенную функцию удастся представить в виде (9), причем  $f$  оказывается непрерывно дифференцируемой на  $[-1, 1]$  функцией, то  $F'_f = F_{f'}$  (что и оправдывает введенное определение).

10.35. *Дельта-функцией* называют функционал  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ . Проверьте, что дельта-функция есть обобщенная функция. Найдите значение производной дельта-функции при  $\varphi(x) = 2x^2 - x$ .

10.36. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_2^n$ . Докажите, что формула

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad (10)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — произвольные действительные числа, задает общий вид линейного функционала в пространстве  $\mathbf{R}_2^n$ , причем

$$\|F\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}. \quad (10')$$

*Доказательство* состоит из двух частей: всякий функционал вида (10) линейный и, наоборот, всякий линейный функционал можно представить в таком виде.

1. Если в  $\mathbf{R}_2^n$  в качестве базиса взять систему элементов  $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_i$ , то числа  $x_1, \dots, x_n$  станут координатами

элемента  $x$  относительно выбранного базиса. Поэтому из 10.10 следует, что всякий функционал вида (10) аддитивен. Остается показать, что он непрерывен. В силу неравенства Коши

$$|F(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot |x_i| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = M \|x\|,$$

где  $M = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$ . Отсюда в силу 10.15 и следует, что функционал непрерывен, причем  $\|F\| \leq M$ .

Докажем, что  $\|F\| = M$ ; для этого рассмотрим два случая.

Если  $M = 0$ , то все  $\alpha_i = 0$  и из (10) следует, что  $F(x) \equiv 0$ . Поэтому неравенство (4) выполняется при  $K = 0$ . А так как меньше нуля  $K$  быть не может, то значит  $\|F\| = 0$  и формула (10') справедлива в этом случае.

Пусть теперь  $M \neq 0$ . Рассмотрим  $x_0 = \frac{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{M}$ .

Так как  $\|x_0\| = 1$ , то  $x_0$  принадлежит единичному шару. Имеем:

$$|F(x_0)| = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = M,$$

что, в силу (6''), дает оценку:  $\|F\| \geq M$ . А это с учетом ранее полученного противоположного неравенства и доказывает справедливость (10').

2. Пусть  $\Phi(x)$  — произвольный линейный функционал в  $\mathbf{R}_2^n$ . Так как  $\Phi$  аддитивный функционал, то из 10.10 вытекает, что его можно представить в виде (10).

**10.37.** Линейный функционал, определенный в пространстве  $\mathbf{R}_2^2$ , в точках (1, 1) и (1, 0) принимает значение 2 и 5 соответственно. Найдите его значение в точке (3, 4). Найдите его норму.

**10.38.** Норма линейного функционала, действующего на плоскости  $\mathbf{R}_2^2$ , равна  $\sqrt{13}$ , а его значение в точке (1, 1) равно  $-1$ . Найдите его значение в точке (0, 1).

**10.39.** Покажите, что функционал  $F(x) = x_1$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_2^n$ , является линейным. Найдите его норму.

**10.40.** Покажите, что формула (10) задает общий вид линейного функционала в пространстве  $\mathbf{R}_1^n$ , причем

$$\|F\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}.$$

**10.41.** Норма линейного функционала, действующего на плоскости  $\mathbf{R}_1^2$ , равна 6, а его значение в точке (1, 2) равно 2. Найдите значение функционала в точке  $(-1, 2)$ .

**10.42.** Покажите, что формула (10) задает общий вид линейного функционала в пространстве  $\mathbf{R}_\infty^n$ , причем

$$\|F\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

**10.43.** Норма линейного функционала, действующего на плоскости  $\mathbf{R}_\infty^2$ , равна 4, а его значение в точке (2, 1) равно 5. Найдите его значение в точке (1, 1).

**10.44.** Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{R}_1^\infty$ . Докажите, что формула

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad (11)$$



где  $(\alpha_n)$  — произвольная ограниченная последовательность чисел, задает общий вид линейного функционала в пространстве  $\mathbf{R}_1^\infty$ , причем

$$\|F\| = \sup \{|\alpha_n|\}. \quad (11')$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $(\alpha_n)$  — произвольная ограниченная последовательность, т. е.  $|\alpha_n| \leq M$  при всех  $n$ . Отметим вначале, что  $F$  определено на всем пространстве  $\mathbf{R}_1^\infty$ , потому что ряд (11) сходится при любом  $x \in \mathbf{R}_1^\infty$ . Действительно, так как  $x \in \mathbf{R}_1^\infty$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  сходится, а поскольку  $|\alpha_n| \leq M$ , то по признаку сравне-

ния и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$  (абсолютно) сходится.

В силу свойств абсолютно сходящихся рядов

$$|F(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot |x_n| \leq P \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = P \|x\| \quad (P = \sup \{|\alpha_n|\}),$$

а это означает, что  $F$  — непрерывный функционал. Аддитивность же функционала очевидна. Итак, формула (11) определяет линейный функционал.

Для доказательства формулы (11') заметим, что предыдущие рассуждения дают оценку:  $\|F\| \leq P$ . Чтобы показать, что эта оценка точная, рассмотрим  $x^{(n)} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_n \in \mathbf{R}_1^\infty$ . Так как  $x^{(n)}$  принадлежит единичному шару и  $F(x^{(n)}) = \alpha_n$ , то, в силу (6''),

$$\|F\| \geq |\alpha_n| \quad (n \in \mathbf{N}),$$

откуда следует, что  $\|F\| \geq P$ . Два противоположных неравенства, полученных для  $\|F\|$ , и доказывают справедливость (11').

2. Пусть  $\Phi$  — произвольный линейный функционал на  $\mathbf{R}_1^\infty$ . Так как координатные орты  $(e_n)$  образуют в  $\mathbf{R}_1^\infty$  базис (см. 5.45), то любой элемент  $x \in \mathbf{R}_1^\infty$  можно представить в виде

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Обозначим  $\Phi(e_n)$  через  $\alpha_n$ . Так как  $\|e_n\| = 1$ , то, в силу (6''),

$$|\alpha_n| = |\Phi(e_n)| \leq \|\Phi\|,$$

т. е. последовательность  $(\alpha_n)$  ограниченная.

По свойству счетной дистрибутивности функционалов (см. 10.14)

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Phi(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

и  $\Phi(x)$  представлен в виде (11).

10.45. Пусть  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  — последовательность всех рацио-

нальных чисел (см. 1.65) интервала  $] -2, -3[$ . Покажите, что  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n$  линейный функционал на  $R_1^{\infty}$ , и найдите его норму.

10.46. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in R_2^{\infty}$  и  $(\alpha_n)$  такая числовая последовательность, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  сходится. Докажите, что формула (11) задает общий вид линейного функционала в  $R_2^{\infty}$ , причем

$$\|F\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}.$$

*Доказательство* вполне аналогично 10.44. Поэтому ограничимся только замечаниями.

1. Сходимость (абсолютная) ряда (11) вытекает из элементарного неравенства

$$|a| \cdot |b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Непрерывность функционала (11) следует из неравенства

$$|F(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot |x_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2} \|x\|,$$

полученного с помощью обобщенного неравенства Коши (см. 3.27).

В качестве точки  $x^{(n)}$  можно взять  $x_0 = \frac{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}$ .

2. Последовательность  $(\alpha_n)$  получается так же. Здесь, однако, нужно показать не ограниченность ее, а то, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  сходится.

Для этого рассмотрим числовую последовательность  $(a_n)$  с  $a_n = \alpha_n$  при  $1 \leq n \leq k$  и  $a_n = 0$  при  $n > k$ , где  $k$  — произвольное, но фиксированное. Так как ряд, составленный из квадратов членов этой последовательности (это просто конечная сумма), сходится, то по

доказанному в первой части  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  — линейный функционал на  $R_2^{\infty}$ , причем

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

Поэтому, в силу (6'),

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

при любом  $x \in R_2^{\infty}$ . Отсюда при  $x = a = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots) \in R_2^{\infty}$

получаем:

$$|f(a)| = \sum_{n=1}^k \alpha_n^2 \leq \|f\| \sqrt{\sum_{n=1}^k \alpha_n^2} = \|f\|^2$$

или

$$\sum_{n=1}^k \alpha_n^2 \leq \|f\|^2.$$

Это означает, что последовательность частичных сумм рассматриваемого ряда ограничена. Такой ряд сходится.

10.47. Покажите, что функционал

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n},$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{R}_2^{\infty}$ , является линейным на  $\mathbf{R}_2^{\infty}$ . Найдите его норму.

10.48. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{R}_{\infty}^{\infty}$  и  $(\alpha_n)$  такая числовая последовательность, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  сходится. Докажите, что формула (11) задает линейный функционал на  $\mathbf{R}_{\infty}^{\infty}$ , причем

$$\|F\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Возможно ли в этом случае рассуждение, аналогичное второй части доказательства 10.44 и 10.46?

10.49. Обозначим через  $L$  множество всех линейных функционалов, действующих в нормированном пространстве  $E$ . Назовем суммой функционалов  $F$  и  $\Phi$  функционал  $\psi$ , определяемый по формуле  $\psi(x) = F(x) + \Phi(x)$ , а произведением функционала  $F$  на число  $\lambda$  такой функционал  $\Phi$ , что  $\Phi(x) = \lambda F(x)$ . Покажите, что после этого  $L$  становится линейным пространством.

10.50. Покажите, что норма функционала является<sup>1</sup> нормой на пространстве  $L$ , определенном в 10.49.

*Решение.* Проверим выполнение аксиом нормы для нормы функционала.

Нулем в пространстве  $L$  является функционал  $\Theta(x) \equiv 0$ . Для него неравенство (4) выполняется уже при  $K = 0$ . Поэтому  $\|\Theta\| = 0$ .

Пусть, наоборот,  $\|F\| = 0$ . Из (6') в таком случае вытекает, что  $F(x) \equiv 0$ , т. е.  $F = \Theta$ . Аксиома 1 нормы выполняется.

Рассмотрим  $\alpha \neq 0$  и функционал  $\Phi \in L$ . В силу (6'),

$$|\alpha \Phi(x)| = |\alpha| \cdot |\Phi(x)| \leq |\alpha| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x\|,$$

<sup>1</sup> Это и показывает целесообразность такого названия.

а отсюда по (6) для  $F = \alpha \Phi$  получаем:

$$\|\alpha \Phi\| \leq |\alpha| \cdot \|\Phi\|. \quad (12)$$

Пусть теперь  $F$  — произвольный линейный функционал из  $L$  и  $\lambda$  — произвольное действительное число. Если  $\lambda \neq 0$ , то, положив в неравенстве (12)  $\alpha = \lambda$ ,  $\Phi = F$ , получим:

$$\|\lambda F\| \leq |\lambda| \cdot \|F\|,$$

а положив  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\Phi = \lambda F$ , получим:

$$\|F\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda F\| \text{ или } \|\lambda F\| \geq |\lambda| \cdot \|F\|,$$

т. е.  $\|\lambda F\| = |\lambda| \cdot \|F\|$ . Так как при  $\lambda = 0$  это равенство также, очевидно, выполняется, то этим и показана выполнимость аксиомы 2 нормы.

Покажем выполнение аксиомы 3. Для функционала  $\psi = F + \Phi$  имеем:

$$|\psi(x)| = |F(x) + \Phi(x)| \leq |F(x)| + |\Phi(x)| \leq \|F\| \cdot \|x\| + \|\Phi\| \cdot \|x\| = (\|F\| + \|\Phi\|) \cdot \|x\|,$$

откуда, по определению  $\|\psi\|$ , и вытекает, что

$$\|\psi\| = \|F + \Phi\| \leq \|F\| + \|\Phi\|.$$

Нормированное пространство (см. 10.49 и 10.50) всех линейных функционалов, действующих в нормированном пространстве  $E$ , называется *пространством, сопряженным к  $E$* , и обозначается  $E^*$ .

**10.51.** Докажите, что при любом  $E$  сопряженное пространство  $E^*$  полно.

*Доказательство.* Пусть  $(F_n)$  — фундаментальная последовательность из  $E^*$  и  $x \neq \Theta$  — произвольная, но фиксированная точка из  $E$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N_1$ , что  $\|F_m - F_n\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$  для всех  $n, m > N_1$ . Так как, в силу (6'),

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\| \cdot \|x\|, \quad (13)$$

то  $|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$  при  $n, m > N_1$ . Это означает, что числовая последовательность  $(F_n(x))$  фундаментальна, а следовательно, и сходящаяся<sup>1</sup>.

Рассмотрим функционал  $F$ , определяемый по формуле

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x).$$

Покажем, что  $F \in E^*$  и  $F_n \rightarrow F$  по норме  $E^*$ .

Аддитивность и однородность  $F$  вытекает из свойств числовых последовательностей:

---

<sup>1</sup> Эта последовательность сходится и при  $x = \Theta$ , так как  $F_n(\Theta) = 0$ .

$$F(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(x) + F_n(y)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = F(x) + F(y).$$

$$F(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda F_n(x) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lambda F(x).$$

В силу фундаментальности  $(F_n)$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N_2$ , что  $\|F_m - F_n\| < \varepsilon$  для  $m, n > N_2$ . Тогда из (13) вытекает, что  $|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon \|x\|$  при  $m, n > N_2$ . Переходя в последнем числовом ( $x$  фиксировано!) неравенстве к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем:

$$|F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon \|x\|. \quad (14)$$

Отсюда вытекает, что функционал  $F - F_n$  ( $n > N_2$ ) непрерывен. А так как  $F - F_n$  аддитивен и однороден, то  $F - F_n \in E^*$ . Но тогда по свойствам линейных пространств и  $F = F_n + (F - F_n) \in E^*$ .

Из неравенства (14), в силу (6), вытекает, что  $\|F - F_n\| \leq \varepsilon$  при  $n > N_2$  т. е.  $\|F - F_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а это и означает, что  $F_n \rightarrow F$  по норме  $E^*$ .

Итак, всякая фундаментальная последовательность из  $E^*$  сходится. Это и доказывает полноту нормированного пространства  $E^*$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  некоторые нормированные пространства, а  $F$  отображение  $X$  в  $Y$ . Такое отображение называют *оператором*, определенным на  $X$ , со значениями в пространстве  $Y$  или действующим из  $X$  в  $Y$ .

Как и в случае функционалов, вводят понятия аддитивного, однородного, линейного оператора. Буквально дословным повторением соответствующих рассуждений на линейные операторы переносятся все свойства линейных функционалов (10.12, 10.13, 10.15, 10.16); при этом неравенства (4), (6), (6'), (6'') должны быть соответствующим образом изменены. Например, неравенство (6') для операторов имеет вид

$$\|F(x)\|_Y \leq \|F\| \cdot \|x\|_X,$$

где индекс внизу показывает, что имеется в виду норма соответствующего пространства.

10.52. Покажите, что оператор  $F: (x, y) \rightarrow (u, v)$ :

$$\begin{cases} u = ax + ay; \\ v = -bx - by, \end{cases}$$

действующий из  $\mathbf{R}_2^2$  в  $\mathbf{R}_2^2$ , линейен. Найдите его норму.

10.53. Является ли линейным оператор  $F: (x, y, z) \rightarrow (u, v)$ :

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z; \\ v = a_2x + b_2y + c_2z, \end{cases}$$

действующий из  $\mathbf{R}_2^3$  в  $\mathbf{R}_2^2$ ?

10.54. В пространстве  $\mathbf{C}[a, b]$  ( $a > 0$ ) задан оператор

$$F(y) = xy(x),$$

принимаящий значения в том же пространстве. Докажите, что этот оператор линейный, и найдите его норму.

*Решение.* Аддитивность и однородность данного оператора очевидна. Непрерывность следует из соотношения:

$$\|F(y)\| = \max_{a \leq x \leq b} |xy(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |x| \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| = b \|y\|.$$

Итак, оператор линеен.

Из полученного соотношения вытекает, что  $\|F\| \leq b$ . Для того чтобы, как обычно, получить противоположное неравенство, рассмотрим функцию  $y_0(x) \equiv 1$ . Так как  $\|y_0\| = 1$ , то из видоизмененного применительно к операторам неравенства (6'') и получаем:

$$\|F(y_0)\| = \max_{a \leq x \leq b} |xy_0(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |x| = b \leq \|F\|.$$

Значит,  $\|F\| = b$ .

**10.55.** Покажите, что оператор

$$F(y) = x^2 y(1),$$

отображающий пространство  $C[1, 2]$  в себя, линеен, и найдите его норму.

**10.56.** Покажите, что оператор

$$F(y) = \int_0^1 xty(t) dt,$$

отображающий пространство  $C[0, 1]$  в себя, линеен, и найдите его норму.

**10.57.** Покажите, что оператор

$$F(y) = \int_0^x y(t) dt,$$

действующий из  $C[0, 3]$  в себя, линеен, и найдите его норму.

**10.58.** Покажите, что оператор  $F$ , переводящий точку  $x = (x_1, x_2, \dots)$  пространства  $R_2^\infty$  в точку  $x' = (x_2, x_3, \dots)$  того же пространства, линеен, и найдите его норму.

**10.59.** Пусть функция  $K(x, y)$  непрерывна в квадрате  $D = \{x, y | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ . Докажите, что оператор

$$F(f) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

в пространстве  $C[a, b]$  линеен.

**10.60.** Пусть двойной ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2$  сходится. Докажите, что

оператор, переводящий последовательность  $(x_n)$  в последовательность  $(y_n)$ , где

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n,$$

линеен в  $R_2^\infty$ .

10.61. Докажите, что в задаче 10.60 условие сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2$  можно заменить более слабым условием ограниченности последовательности  $(\alpha_m)$ , где

$$\alpha_m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2.$$

## § 11 МЕРЫ ЖОРДАНА И ЛЕБЕГА

Назовем *параллелепипедом* в  $\mathbf{R}_2^n$  множество  $V$  точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$  таких, что  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) пробегает конечный числовой промежуток (с концами  $a_i$  и  $b_i$ ,  $a_i < b_i$ ). Число  $|V| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$  назовем *мерой* параллелепипеда  $V$ . Если  $a_i = b_i$  хотя бы при одном  $i$ , то параллелепипед  $V$  будем называть *вырожденным*; в этом случае  $|V| = 0$ . Пустое и одноточечное множество мы также считаем параллелепипедами.

11.1. Среди указанных ниже фигур пространства  $\mathbf{R}_2^3$  найдите параллелепипеды (в принятом у нас смысле) и определите их меры:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \mid x^2 < 1; |y + 1| \leq 2; 1 \leq z < 4\}; \\ B &= \{(x, y, z) \mid |x| + |y| < 1; 0 < z < 2\}; \\ C &= \{(x, y, z) \mid x^2 - 3x + 2 > 0; |y| \leq 1; |z| < 2\}; \\ D &= \{(x, y, z) \mid x^2 - 3x + 2 < 0; |y| \leq 1; |z| < 2\}; \\ E &= \{(x, y, z) \mid |x + 2| \leq 3; |y - 1| < 2, z = 4\}; \\ F &= \{(x, y, z) \mid x^2 < 4, y^2 + z^2 = 0\}. \end{aligned}$$

*Ступенчатой фигурой* в  $\mathbf{R}_2^n$  назовем множество, которое можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся параллелепипедов. *Мерой ступенчатой фигуры* назовем сумму мер составляющих ее параллелепипедов.

11.2. На плоскости  $\mathbf{R}_2^2$  заданы следующие фигуры:

$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 < 9; 4 < y^2 \leq 25\},$$

$$B = \{(x, y) \mid \sin x < \frac{1}{2}; y \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 < 4; |y| > 2\}, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Найдите среди этих фигур ступенчатые и определите их меры.

11.3. Покажите, что любое конечное множество из  $\mathbf{R}_2^n$  — ступенчатая фигура.

11.4. Докажите, что объединение и пересечение двух ступенчатых фигур — ступенчатая фигура.

11.5. Докажите, что мера ступенчатой фигуры не зависит от способа ее разбиения на параллелепипеды.

11.6. Докажите, что мера ступенчатых фигур аддитивна:  $|C| = |C_1| + |C_2|$ , если  $C = C_1 \cup C_2$  и  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .



11.7. Докажите, что мера ступенчатых фигур монотонна:  $|C_1| \leq |C_2|$ , если  $C_1 \subset C_2$ .

С каждой ограниченной фигурой  $F$  из  $\mathbf{R}_2^n$  связаны два непустых числовых множества  $X_F$  и  $Y_F$ , где  $X_F$  состоит из мер всевозможных ступенчатых фигур  $C$ , содержащихся в  $F$ , а  $Y_F$  — из мер всех ступенчатых фигур  $\tilde{C}$ , содержащих  $F$ .

11.8. Докажите, что множество  $X_F$  расположено на числовой оси левее множества  $Y_F$ , т. е. для любого  $x$  из  $X_F$  и любого  $y$  из  $Y_F$  выполняется неравенство:  $x \leq y$ .

*Доказательство.* Любое  $x$  из  $X_F$  есть мера некоторой ступенчатой фигуры  $C \subset F$ , а  $y$  — мера ступенчатой фигуры  $\tilde{C} \supset F$ . Так как  $C \subset \tilde{C}$ , то, в силу 11.7,  $|C| \leq |\tilde{C}|$ , а это и означает, что  $x \leq y$ .

Из 11.8 вытекает<sup>1</sup>, что множества  $X_F$  и  $Y_F$  разделяются по крайней мере одним числом, т. е. существует хотя бы одно такое число  $c$ , что  $x \leq c \leq y$  для любых  $x \in X_F$  и  $y \in Y_F$ .

Если множества  $X_F$  и  $Y_F$  разделяются лишь одним числом, то фигура  $F$  называется *измеримой по Жордану*; при этом разделяющее число множеств  $X_F$  и  $Y_F$  называется *мерой Жордана* фигуры  $F$ . Мера  $F$  обозначается так:  $|F|$ .

Мера Жордана инвариантна относительно перемещений и обладает свойством аддитивности.

11.9. Докажите, что криволинейная трапеция  $F$ , ограниченная прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) и графиком непрерывной на  $[a, b]$  неотрицательной функции  $f$ , измерима по Жордану в  $\mathbf{R}_2^2$ , причем

$$|F| = \int_a^b f(x) dx.$$

*Доказательство.* Возьмем произвольное разбиение  $\sigma$  отрезка  $[a, b]$  точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ) и построим прямоугольники («параллелепипеды» в  $\mathbf{R}_2^2$ ):

$$P_k = \{(x, y) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k; 0 \leq y < m_k\}$$

и

$$\tilde{P}_k = \{(x, y) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k; 0 \leq y \leq M_k\},$$

где  $m_k$  — наименьшее, а  $M_k$  — наибольшее значение<sup>2</sup> функции  $f$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ . У нас получились ступенчатые фигуры  $C(\sigma) = \bigcup_{k=1}^n P_k$

и  $\tilde{C}(\sigma) = \bigcup_{k=1}^n \tilde{P}_k$ , такие, что  $C \subset F \subset \tilde{C}$ .

Обозначим через  $X'_F$  и  $Y'_F$  соответственно множество мер (пло-

<sup>1</sup> См.: В и л е н к и н Н. Я., К у н и ц к а я Е. С. Введение в анализ. М., 1973 (гл. 1, § 2, п. п. 4, 5).

<sup>2</sup> Так как  $f$  непрерывна, то  $m_k$  можно также считать нижней, а  $M_k$  — верхней границами  $f$  на промежутке  $[x_{k-1}, x_k]$ .

щадей) ступенчатых фигур  $C(\sigma)$  и  $\tilde{C}(\sigma)$ , соответствующих всевозможным разбиениям  $\sigma$  отрезка  $[a, b]$ . Так как меры ступенчатых фигур  $C(\sigma)$  и  $\tilde{C}(\sigma)$  равны соответственно нижней  $s(\sigma)$  и верхней  $S(\sigma)$  интегральным суммам функции  $f$  (см. с. 111), то  $X'_F$  совпадает с множеством  $A_f$  всевозможных нижних, а  $Y'_F$  — с множеством  $B_f$  верхних интегральных сумм функции  $f$ .

Поскольку непрерывная функция интегрируема, то множества  $A_f$  и  $B_f$  (см. с. 111) разделяются единственным числом  $I = \int_a^b f(x)dx$ .

Значит, и множества  $X'_F$  и  $Y'_F$  также разделяются только одним числом  $I$ . А так как  $X_F \supset X'_F$  и  $Y_F \supset Y'_F$ , то<sup>1</sup>  $X_F$  и  $Y_F$  также разделяются лишь одним числом  $I$ . Это и доказывает измеримость  $F$ , а также указанную выше формулу для  $|F|$ .

11.10. Докажите, что круг измерим по Жордану и его мера равна  $\pi r^2$ , где  $r$  — радиус круга.

11.11. Докажите, что любой треугольник измерим по Жордану (в  $\mathbb{R}_2^2$ ) и его мера равна половине произведения основания на высоту.

11.12. Докажите, что множество  $F$ , которое можно включить в ступенчатую фигуру сколь угодно малой меры, измеримо по Жордану и его мера равна нулю.

*Доказательство.* Из условия следует, что множество  $Y_F$  неотрицательных чисел содержит сколь угодно малые положительные числа. В таком случае множество неотрицательных чисел  $X_F$ , поскольку оно расположено левее  $Y_F$ , состоит из одного числа 0. Отсюда следует, что  $X_F$  и  $Y_F$  разделяются лишь одним числом 0, что и требовалось доказать.

11.13. Докажите, что канторово множество  $F_0$  измеримо (в  $\mathbb{R}^1$ ) по Жордану, и найдите его меру.

11.14. Около каждой точки канторова множества описан интервал длины  $\frac{1}{10}$  с центром в этой точке. Покажите, что объединение  $M$  всех этих интервалов измеримо по Жордану, и найдите  $|M|$ .

11.15. Докажите, что ковер Серпинского измерим по Жордану (в  $\mathbb{R}_2^2$ ), и найдите его меру.

11.16. Докажите, что множество  $\mathbb{Q}'$  рациональных точек отрезка  $[0, 1]$  не измеримо (в  $\mathbb{R}^1$ ) по Жордану.

*Доказательство.* Так как множество  $\mathbb{Q}'$  не содержит ни одного промежутка, отличного от точки, то любая ступенчатая фигура, содержащаяся в  $\mathbb{Q}'$ , состоит из конечного числа точек. Поэтому  $X_{\mathbb{Q}'} = \{0\}$ .

<sup>1</sup> Здесь мы используем такое простое утверждение (докажите его): если множество  $A$  расположено левее множества  $B$ , а некоторые подмножества этих множеств разделяются единственным числом, то и сами  $A$  и  $B$  разделяются лишь одним этим числом.

С другой стороны, пусть  $C = \bigcup_{i=1}^n P_i$  — любая ступенчатая фигура, содержащая  $Q'$ . Присоединив к каждому промежутку  $P_i$  его концы (если они ему не принадлежат), получим конечное множество отрезков  $\{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n\}$ . Их объединение  $P$  замкнуто. Поэтому, если бы какая-нибудь точка  $x$  отрезка  $[0, 1]$  не принадлежала бы  $P$ , она была бы внешней для  $P$ . Тогда существовала бы окрестность  $V$  этой точки, ни одна точка которой не принадлежала бы  $P$ , а следовательно, и  $C$ . А так как в  $V$  имеются рациональные точки, то не все множество  $Q'$  принадлежит  $C$  вопреки условию. Итак,  $P \supset [0, 1]$ . Но тогда (см. 11.7)  $|C| = |P| \geq 1$ . Поэтому все числа из  $Y_{Q'}$  не меньше 1.

Мы показали, что  $X_{Q'} = \{0\}$ , а  $Y_{Q'} \subset [1, \infty[$ . Отсюда следует, что множества  $X_{Q'}$  и  $Y_{Q'}$  разделяются любым числом из отрезка  $[0, 1]$ . Это и означает, что  $Q'$  неизмеримо по Жордану.

11.17. Измеримо ли по Жордану множество  $I'$  иррациональных точек отрезка  $[0, 1]$ ?

11.18. Измеримо ли по Жордану множество точек единичного квадрата, обе координаты которых рациональны?

11.19. Измеримо ли (в  $R_2^3$ ) по Жордану прямое произведение (см. с. 10)  $F$  ковра Серпинского и отрезка  $[0, 1]$ ?

11.20. Докажите, что граница измеримого по Жордану множества  $F$  также измерима и ее мера равна нулю.

Множество  $F$  из  $R_2^n$  назовем  $\varepsilon$ -покрываемым, если можно указать такую конечную или счетную систему открытых параллелепипедов  $(V_k)$ , что  $F \subset \bigcup_k V_k$  и  $\sum_k |V_k| < \varepsilon$ .

11.21. Докажите, что любой параллелепипед  $V$  в  $R_2^n$   $\varepsilon$ -покрываем при любом  $\varepsilon > |V|$ .

11.22. Докажите, что конечное множество в  $R_2^n$   $\varepsilon$ -покрываемо при любом  $\varepsilon > 0$ .

11.23. Докажите, что счетное множество  $S$  из  $R_2^n$   $\varepsilon$ -покрываемо при любом  $\varepsilon > 0$ .

*Доказательство.* Так как  $S$  счетное множество, то все его точки можно перенумеровать:  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ . Пусть нам дано  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим счетную систему параллелепипедов

$$V_k = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - a_i^{(k)}| < \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}} \quad (i = 1, \dots, n) \right\},$$

где  $k \in \mathbb{N}$ , а  $a_i^{(k)}$   $i$ -я координата точки  $a_k$ . Так как  $a_k \in V_k$ , то  $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ , а поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |V_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то этим и доказана  $\varepsilon$ -покрываемость  $S$ .

11.24. Докажите, что ступенчатая фигура  $C$   $\varepsilon$ -покрываема при любом  $\varepsilon > |C|$ .

Назовем  $\varepsilon$ -аппроксимацией фигуры  $F$  такую ступенчатую фигуру  $C_\varepsilon$ , что симметрическая разность<sup>1</sup>  $F$  и  $C_\varepsilon$   $\varepsilon$ -покрываема.

11.25. Покажите, что в  $\mathbb{R}^1$  промежутки  $C = [2, 12[$  и  $D = [1, 13[$  являются  $\varepsilon$ -аппроксимациями множества  $F = ]0, 10]$  при  $\varepsilon = 4$ .

11.26. Около круга  $x^2 + y^2 \leq 9$  описали квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и из него вырезали четыре угловых единичных квадрата. Докажите, что получившаяся ступенчатая фигура  $C$  является в  $\mathbb{R}_2^2$   $\varepsilon$ -аппроксимацией для данного круга при  $\varepsilon = 9$ .

11.27. Докажите, что любая ограниченная фигура имеет  $\varepsilon$ -аппроксимацию по крайней мере при некоторых  $\varepsilon > 0$ .

11.28. Имеет ли  $\varepsilon$ -аппроксимацию полуплоскость в  $\mathbb{R}_2^2$  хотя бы при одном  $\varepsilon > 0$ ?

Фигуру  $F$  назовем *измеримой по Лебегу*, если она имеет  $\varepsilon$ -аппроксимации при любом  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $F$  — измеримая по Лебегу фигура. Обозначим через  $\tilde{X}_F$  множество всевозможных чисел вида  $|C_\varepsilon| - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — любое положительное число, а  $C_\varepsilon$  — любая  $\varepsilon$ -аппроксимация для  $F$ . Через  $\tilde{Y}_F$  обозначим аналогичное множество чисел вида  $|C_\varepsilon| + \varepsilon$ .

11.29. Используя задачу 11.25, найдите по два числа из множеств  $\tilde{X}_F$  и  $\tilde{Y}_F$ , где  $F = ]0, 10]$ .

Можно доказать, что при любом выборе измеримой по Лебегу фигуры  $F$  множество  $\tilde{X}_F$  расположено на числовой оси левее множества  $\tilde{Y}_F$ . Поэтому  $\tilde{X}_F$  и  $\tilde{Y}_F$  разделяются хотя бы одним числом.

11.30. Докажите, что множества  $\tilde{X}_F$  и  $\tilde{Y}_F$ , соответствующие измеримой по Лебегу фигуре  $F$ , разделяются единственным числом.

*Доказательство.* Имеется простой критерий единственности разделяющего числа: множества  $A$  и  $B$  такие, что  $A$  расположено левее  $B$ , тогда и только тогда разделяются единственным числом, когда для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такие  $a \in A$  и  $b \in B$ , что  $b - a < \varepsilon$ .

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим число  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ . В силу измеримости фигуры  $F$  у нее имеется  $\delta$ -аппроксимация  $C_\delta$ . Но в таком случае число  $x = |C_\delta| - \delta$  принадлежит  $\tilde{X}_F$ , а число  $y = |C_\delta| + \delta$  принадлежит  $\tilde{Y}_F$ . А поскольку  $y - x < 2\delta < \varepsilon$  и  $\tilde{X}_F$  лежит левее  $\tilde{Y}_F$ , то, в силу критерия единственности разделяющего числа, это и означает, что  $\tilde{X}_F$  и  $\tilde{Y}_F$  разделяются единственным числом.

<sup>1</sup> Симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \Delta B$ ) называется множество  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  или, что то же,  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Разделяющее число множеств  $\tilde{X}_F$  и  $\tilde{Y}_F$ , соответствующих измеримой по Лебегу фигуре  $F$ , называется *мерой Лебега* фигуры  $F$  и обозначается  $|F|_L$ . Таким образом, мера измеримой фигуры  $F$  — это единственное число  $|F|_L$ , которое удовлетворяет соотношению

$$|C_\varepsilon| - \varepsilon \leq |F|_L \leq |C_\delta| + \delta$$

при любых положительных  $\varepsilon$  и  $\delta$ , где  $C_\varepsilon$  — произвольная  $\varepsilon$ -аппроксимация, а  $C_\delta$  —  $\delta$ -аппроксимация фигуры  $F$ .

**11.31.** Докажите, что при любом выборе  $\varepsilon$ -аппроксимации  $C_\varepsilon$  для измеримой по Лебегу фигуры  $F$  и любом  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство:

$$||F|_L - |C_\varepsilon|| \leq \varepsilon.$$

**11.32.** Считая известным, что круг измерим по Лебегу (это вытекает из 11.10 и 11.40), проверьте справедливость неравенства из 11.31 для  $F$  и  $C_\varepsilon$  из задачи 11.26.

**11.33.** Докажите, что мера Лебега любого измеримого множества неотрицательна.

**11.34.** Докажите, что всякая ступенчатая фигура  $C$  измерима по Лебегу и ее мера Лебега  $|C|_L$  равна ее ранее определенной мере  $|C|$ .

*Доказательство.*  $C$  измерима, поскольку при любом  $\varepsilon > 0$  в качестве ее аппроксимации можно взять само  $C$ . Действительно,  $C \Delta C = \emptyset$ , а пустое множество  $\varepsilon$ -покрываемо при любом  $\varepsilon > 0$ .

С другой стороны, поскольку  $C$  является  $\varepsilon$ -аппроксимацией для  $C$ , то, в силу неравенства из 11.16,  $||C|_L - |C|| < \varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Отсюда следует, что  $|C|_L = |C|$ .

**11.35.** Докажите, что любое счетное множество  $S$  измеримо по Лебегу, и найдите  $|S|_L$ .

**11.36.** Докажите, что множество  $\mathbf{Q}'$  рациональных точек любого отрезка измеримо в  $\mathbf{R}^1$ , и найдите  $|\mathbf{Q}'|_L$ .

**11.37.** Докажите, что множество  $\mathbf{I}'$  иррациональных точек отрезка  $[a, b]$  измеримо по Лебегу (в  $\mathbf{R}^1$ ), и найдите его меру.

**11.38.** Докажите, что всякое подмножество множества лебеговой меры нуль измеримо и его мера равна нулю.

**11.39.** Докажите, что множество  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ 2n, 2n + \frac{1}{2^n} \right]$  измеримо по Лебегу (в  $\mathbf{R}^1$ ), и найдите его меру.

**11.40.** Докажите, что всякая фигура  $F$ , измеримая по Жордану, измерима и по Лебегу, причем  $|F|_L = |F|$ .

*Доказательство.* Зададим  $\varepsilon > 0$ . Так как  $F$  измерима по Жордану, то, в силу критерия единственности разделяющего числа (см. 11.30.), существуют такие ступенчатые фигуры  $C_\varepsilon$  и  $\tilde{C}_\varepsilon$ , что  $C_\varepsilon \subset F \subset \tilde{C}_\varepsilon$  и  $|\tilde{C}_\varepsilon| - |C_\varepsilon| < \varepsilon$ . Поскольку

$$|\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| = |\tilde{C}_\varepsilon| - |C_\varepsilon| < \varepsilon,$$

то (см. 11.24) ступенчатая фигура  $\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$   $\varepsilon$ -покрываема. Но

$$F \Delta C_\varepsilon = F \setminus C_\varepsilon \subset \tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon,$$

а потому и  $F \Delta C_\varepsilon$   $\varepsilon$ -покрываема, т. е.  $C_\varepsilon$  является  $\varepsilon$ -аппроксимацией для фигуры  $F$ . Значит,  $F$  измерима по Лебегу.

В силу определения меры Жордана

$$|C_\varepsilon| \leq |F| \leq |\tilde{C}_\varepsilon|.$$

А так как  $|\tilde{C}_\varepsilon| < |C_\varepsilon| + \varepsilon$ , то

$$|C_\varepsilon| - \varepsilon \leq |F| \leq |C_\varepsilon| + \varepsilon. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку  $C_\varepsilon$   $\varepsilon$ -аппроксимация фигуры  $F$ , то, в силу неравенства из 11.31,

$$|C_\varepsilon| - \varepsilon \leq |F|_L \leq |C_\varepsilon| + \varepsilon. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$||F|_L - |F|| \leq \varepsilon$$

при любом  $\varepsilon > 0$ . Это и означает, что  $|F|_L = |F|$ .

Из 11.40 вытекает, что нет необходимости использовать различные обозначения для мер Жордана и Лебега, и мы в дальнейшем будем обозначать меру Лебега фигуры  $F$  просто через  $|F|$ .

**11.41.** Докажите, что объединение двух измеримых по Лебегу множеств также измеримо.

**11.42.** Докажите, что дополнение измеримого по Лебегу ограниченного множества до любого содержащего его параллелепипеда также измеримо.

**11.43.** Докажите, что пересечение двух измеримых по Лебегу ограниченных множеств также измеримо.

**11.44.** Докажите, что разность двух измеримых по Лебегу ограниченных множеств также измерима.

Мера Лебега обладает свойством *аддитивности*: если две измеримые по Лебегу фигуры  $F_1$  и  $F_2$  не пересекаются, то  $|F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2|$ . Больше того, мера Лебега обладает свойством так называемой *счетной аддитивности*: если попарно непересекающиеся фигуры  $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$  измеримы по Лебегу, а их объединение  $F$  ограничено, то  $F$  также измеримо, причем

$$|F| = \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|.$$

**11.45.** Докажите, что мера Лебега обладает свойством монотонности: если  $F_1 \subset F_2$ , то  $|F_1| \leq |F_2|$ .

**11.46.** Может ли равняться нулю мера фигуры, имеющей внутренние точки?

11.47. Докажите, что для любых измеримых по Лебегу фигур  $F$  и  $G$  справедливо соотношение:

$$|F \cup G| = |F| + |G| - |F \cap G|.$$

11.48. Докажите, что множество  $F$  из задачи 11.18 измеримо, и найдите его меру.

11.49. Докажите, что множество  $A$  чисел отрезка  $S = [0, 1]$ , десятичное разложение которых невозможно без цифры 7, измеримо по Лебегу, и найдите его меру.

*Решение.* Выясним, как устроено множество  $A$ . Для этого отберем сначала множество  $A_1$  тех чисел из  $S$ , в десятичном разложении которых первой цифрой после запятой будет непременно цифра 7. Ясно, что  $A_1$  состоит из одного интервала<sup>1</sup>  $]0,7; 0,8[$  длины 0,1. Затем из  $S \setminus A_1$  отберем множество  $A_2$  тех чисел, в десятичном разложении которых второй цифрой после запятой будет непременно цифра 7. Ясно, что  $A_2$  состоит из девяти интервалов  $]0,07; 0,08[$ ,  $]0,17; 0,18[$ , ...,  $]0,67; 0,68[$ ,  $]0,87; 0,88[$ ,  $]0,97; 0,98[$  длины 0,01 каждый.

Аналогично обнаружим, что те числа из  $S \setminus (A_1 \cup A_2)$ , в десятичном разложении которых на третьем месте после запятой окажется непременно цифра 7, составляет множество  $A_3$ , являющееся объединением 81 интервала, длиной 0,001 каждый, и так далее. Ясно, что  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ . Так как множества  $A_i$  — как объединения конечного числа интервалов — измеримы и попарно не пересекаются, то множество  $A$  измеримо, причем

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots = \frac{1}{10} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^n} + \dots = 1.$$

11.50. Из отрезка  $[0, 1]$  удаляют интервал  $\left] \frac{3}{5}, \frac{5}{8} \right[$ ; из оставшихся двух отрезков — одинаковые интервалы с центром в серединах этих отрезков общей длины  $\frac{1}{8}$ , потом таким же образом 4 интервала общей длины  $\frac{1}{16}$  и т. д. Пусть  $F$  — множество, которое остается на отрезке после этой процедуры.

Докажите, что  $F$  измеримо по Лебегу, и найдите его меру. Измеримо ли это множество по Жордану?

В задачах 11.51—11.55 указаны некоторые подмножества отрезка  $[0, 1]$ . Докажите их измеримость по Лебегу и найдите их меры.

11.51. Числа, допускающие разложение в десятичную дробь без использования цифры 7.

11.52. Числа, допускающие разложение в десятичную дробь без использования хотя бы одной из цифр 4 или 5.

<sup>1</sup> Число 0,7 не попадает в  $A_1$ , так как его можно записать без использования цифры 7, а именно:  $0,7 = 0,6999\dots$ .



11.53. Числа, допускающие разложение в десятичную дробь без использования двух цифр 4 и 5.

11.54. Числа, в разложении которых в существенно бесконечную десятичную дробь фигурируют цифры 1 и 2.

11.55. Числа, в разложении которых в существенно бесконечную двоичную дробь на всех четных местах оказываются нули.

## § 12 ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА И ЛЕБЕГА

Приведем — для удобства сравнения — один из возможных вариантов определения (определенного) *интеграла по Риману*.

Пусть  $f$  — функция, определенная и ограниченная на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим какое-нибудь разбиение (обозначим его буквой  $\sigma$ ) отрезка на промежутки:

$$[a, b] = [x_0, x_1[ \cup [x_1, x_2[ \cup \dots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}[ \cup [x_{n-1}, x_n],$$

где  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Составим суммы

$$s(f; \sigma) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(f; \sigma) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}), \quad \text{где } m_k —$$

точная нижняя, а  $M_k$  — точная верхняя границы  $f$  на  $k$ -м промежутке разбиения;  $k = 1, \dots, n$ . Эти суммы называют, соответственно, *нижней* и *верхней интегральными суммами*<sup>1</sup> для функции  $f$ , соответствующими заданному разбиению  $\sigma$  (*разбиению Римана*).

Обозначим через  $A_f$  множество нижних, а через  $B_f$  — верхних интегральных сумм функции  $f$ , соответствующих всевозможным разбиениям отрезка  $[a, b]$  на указанные выше промежутки. Нетрудно доказать, что множество  $A_f$  расположено левее множества  $B_f$  — поэтому они разделяются хотя бы одним числом. Если  $A_f$  и  $B_f$  разделяются единственным числом, то говорят, что функция  $f$  *интегрируема* на отрезке  $[a, b]$ , а само разделяющее число  $I$  называют *интегралом* (в смысле Римана) функции  $f$  на  $[a, b]$  и обозначают

так:  $\int_a^b f dx$ .

12.1. Докажите, что функция  $f(x) = x$  интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ , и найдите  $\int_0^1 x dx$ .

*Решение.* Зададим  $\varepsilon > 0$ . Выберем натуральное число  $n$  так, что  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , и рассмотрим такое разбиение  $\sigma_n$  отрезка  $[0, 1]$ :

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{n}[ \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[ \cup \dots \cup \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}[ \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

В этом случае

$$m_k = \frac{k-1}{n}, \quad M_k = \frac{k}{n}, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

<sup>1</sup> Иногда эти суммы называют *суммами Дарбу*.

Поэтому

$$s(f; \sigma_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad S(f; \sigma_n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Так как

$$S(f; \sigma_n) - s(f; \sigma_n) = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

то, в силу критерия единственности разделяющего числа (см. 11.30), множества  $A_f$  и  $B_f$  разделяются единственным числом. Значит,  $f$  интегрируема на  $[0, 1]$ .

С другой стороны, поскольку  $A_f$  лежит левее  $B_f$ , то при любом разбиении  $\sigma$  отрезка  $[0, 1]$

$$s(f; \sigma) \leq S(f; \sigma_n); \quad S(f; \sigma) \geq s(f; \sigma_n),$$

т. е.  $A_f \subset ]-\infty, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]$ ,  $B_f \subset [\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \infty[$ . Последние соотношения справедливы для любого сколь угодно большого  $n$ . Поэтому из них вытекает, что  $A_f \subset ]-\infty, \frac{1}{2}]$ ,  $B_f \subset [\frac{1}{2}, \infty[$ . Отсюда видно, что единственное разделяющее число множеств  $A_f$  и  $B_f$  равно  $\frac{1}{2}$ , т. е.  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ .

**12.2.** Пользуясь только определением интеграла Римана, докажете существование интеграла  $\int_a^b c dx$  и найдите его.

**12.3.** Интегрируема ли по Риману на отрезке  $[0, 1]$  функция

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \text{ рациональном,} \\ -x & \text{при } x \text{ иррациональном?} \end{cases}$$

*Решение.* Так как любой промежуток содержит как рациональные, так и иррациональные точки, то при любом разбиении  $\sigma$  отрезка  $[0, 1]$  на промежутки для каждого  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) имеем:  $M_k = 2$ ,  $m_k = -x_k$ . Поэтому

$$S(f; \sigma) = 2 \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 2, \quad s(f; \sigma) = - \sum_{k=1}^n x_k (x_k - x_{k-1}) < 0.$$

Значит,  $A_f \subset ]-\infty, 0[$ , а  $B_f = \{2\}$ . Но такие множества разделяются любым числом из отрезка  $[0, 2]$  и, следовательно,  $f$  не интегрируема по Риману.

**12.4.** Покажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ рациональном,} \\ 0 & \text{при } x \text{ иррациональном} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке  $[0, 1]$ , пользуясь только определением интеграла Римана.

Исчерпывающий ответ на вопрос об интегрируемости функции по Риману даёт *критерий Лебега*: ограниченная на  $[a, b]$  функция тогда и только тогда интегрируема по Риману, когда множество ее точек разрыва на  $[a, b]$  имеет лебегову меру нуль.

**12.5.** Докажите, что функция Дирихле не интегрируема на отрезке  $[0, 1]$  по Риману, пользуясь критерием Лебега.

*Доказательство.* Воспользуемся определением непрерывности на языке последовательностей. Пусть  $a$  — произвольная точка из  $[0, 1]$ . Известно, что можно выбрать последовательность рациональных чисел  $(x_n)$ , сходящуюся к  $a$ , и такую же последовательность иррациональных чисел  $(y_n)$ . Так как  $D(x_n) = 1$ , а  $D(y_n) = 0$ , то соответствующие  $(x_n)$  и  $(y_n)$  последовательности значений функции имеют разные пределы. Это означает, что  $D$  разрывна в  $a$ .

Таким образом мы показали, что точки разрыва функции  $D$  заполняют весь отрезок  $[0, 1]$ . Так как мера множества точек разрыва отлична от нуля (равна 1), то, в силу критерия Лебега,  $D$  не интегрируема на  $[0, 1]$ .

**12.6.** Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq \frac{1}{n}, \\ -x^2, & \text{если } x = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ , и найдите  $\int_0^1 f dx$ .

**12.7.** Покажите, что функция  $f$ , равная 0 на канторовом множестве (см. 4.75) и 2 в остальных точках, интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ , и найдите  $\int_0^1 f dx$ .

**12.8.** Докажите, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x \text{ — рациональное число } \frac{p}{q} \left( \frac{p}{q} \neq 0 \text{ — несократимая дробь} \right), \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ , и найдите  $\int_0^1 f dx$ .

**12.9.** Функция  $f$  равна 0 в точках канторова множества  $K$ , а на смежных интервалах (так называют интервалы, удаляемые из отрезка при построении  $K$ , см. 4.75) ее графиком служат верхние полуокружности, опирающиеся на эти интервалы как на диаметры. Интегрируема ли эта функция по Риману на  $[0, 1]$ ?

**12.10.** Проверьте, интегрируема ли по Риману на  $[0, 1]$  функция  $g(x) = f(x) D(x)$ , где  $D$  — функция Дирихле (см. 12.4), а  $f$  — функция из задачи 12.9.

Пусть  $E$  — измеримое по Лебегу ограниченное множество на числовой прямой. Любую конечную систему  $\sigma$  попарно непересекающихся измеримых подмножеств  $E_1, \dots, E_n$  множества  $E$ , такую, что  $E_1 \cup \dots \cup E_n = E$ , будем называть *разбиением* (Лебега) множества  $E$ .

Для функции  $f$ , заданной и ограниченной на множестве  $E$ , и для произвольного разбиения  $\sigma = \{E_1, \dots, E_n\}$  составим суммы

$$s(f; \sigma) = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|, \quad S(f; \sigma) = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|,$$

где  $m_k = \inf_{E_k} f(x)$ ,  $M_k = \sup_{E_k} f(x)$ . Такие суммы будем называть соответственно нижней и верхней интегральными суммами функции  $f$ , соответствующими разбиению  $\sigma$  множества  $E$ .

**12.11.** Разбиение  $\sigma_1$ , получающееся из разбиения  $\sigma = \{E_1, \dots, E_n\}$  заменой одного или нескольких из множеств  $E_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) некоторым его разбиением, называется *подразбиением* разбиения  $\sigma$ . Докажите, что при переходе от любого разбиения  $\sigma$  к его подразбиению  $\sigma_1$  нижняя и верхняя интегральные суммы сближаются, т. е.  $s(f; \sigma) \leq s(f; \sigma_1)$ ,  $S(f; \sigma) \geq S(f; \sigma_1)$ .

**12.12.** Докажите, что любая нижняя интегральная сумма  $s(f; \sigma_1)$  не больше любой верхней интегральной суммы  $S(f; \sigma_2)$ .

Обозначим через  $\widehat{A}_f$  множество нижних, а через  $\widehat{B}_f$  — верхних интегральных сумм функции  $f$ , соответствующих в с е в о з м о ж н ы м разбиениям множества  $E$ . Из 12.12 вытекает, что  $\widehat{A}_f$  и  $\widehat{B}_f$  разделяются хотя бы одним числом. Если множества  $\widehat{A}_f$  и  $\widehat{B}_f$  разделяются единственным числом, то говорят, что функция  $f$  *интегрируема по Лебегу* на множестве  $E$ , а само разделяющее число  $I$  называют *интегралом Лебега* функции  $f$  на  $E$  и обозначают так:  $(L) \int_E f dx$ . Таким образом,

$$s(f; \sigma_1) \leq (L) \int_E f dx \leq S(f; \sigma_2),$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — произвольные разбиения множества  $E$ .

**12.13.** Докажите, что функция Дирихле интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$  и  $(L) \int_0^1 D(x) dx = 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение  $\sigma_0$  отрезка  $[0, 1]$  на два измеримых (см. 11.36 и 11.37) подмножества  $E_1$  и  $E_2$ , состоящие соответственно из рациональных и иррациональных точек отрезка  $[0, 1]$ . Так как  $D(x) = 1$  на  $E_1$  и  $D(x) = 0$  на  $E_2$ , то  $m_1 = M_1 = 1$ ,  $m_2 = M_2 = 0$ . Кроме того,  $|E_1| = 0$ ,  $|E_2| = 1$ . Поэтому

$$s(D; \sigma_0) = m_1 |E_1| + m_2 |E_2| = 0; \quad S(D; \sigma_0) = M_1 |E_1| + M_2 |E_2| = 0.$$

Отсюда вытекает, что множества  $\widehat{A}_D$  и  $\widehat{B}_D$  имеют общую точку 0. Но поскольку  $\widehat{A}_D$  лежит левее  $\widehat{B}_D$ , то это означает, что 0 — единст-

венное разделяющее число этих множеств, что и требовалось доказать.

12.14. Докажите, что функция  $f$  из задачи 12.6 интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$ , и найдите  $(L) \int_0^1 f dx$ .

12.15. Докажите, что функция  $f$  из задачи 12.7 интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$ , и найдите  $(L) \int_0^1 f dx$ .

12.16. Докажите, что функция  $f$ , определенная и ограниченная на множестве  $E$  нулевой меры, интегрируема по Лебегу на  $E$  и  $(L) \int_E f dx = 0$ .

12.17. Докажите, что функция, принимающая постоянное значение  $c$  на измеримом множестве  $E$ , интегрируема на  $E$ , и  $(L) \int_E c dx = c |E|$ .

12.18. Докажите, что если  $f$  интегрируема на  $E$ , то и функция  $f + c$  ( $c = \text{const}$ ) интегрируема на  $E$ . Выразите интеграл от  $f + c$  через интеграл от  $f$ .

12.19. Докажите, что если  $f$  интегрируема на  $E$ , то и функция  $-f$  интегрируема на  $E$ , причем  $(L) \int_E (-f) dx = - (L) \int_E f dx$ .

12.20. Докажите, что функция  $f$ , интегрируемая на отрезке по Риману, интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, причем оба интеграла равны.

*Доказательство.* Всякое разбиение отрезка по Риману является разбиением и по Лебегу. Поэтому  $A_f \subset \hat{A}_f$ ,  $B_f \subset \hat{B}_f$ . Так как  $\hat{A}_f$  лежит левее  $\hat{B}_f$ , а  $A_f$  и  $B_f$ , по условию, разделяются единственным числом  $\int_a^b f(x) dx$ , то (см. сноску на с. 105) это число является единственным разделяющим числом и для множеств  $\hat{A}_f$  и  $\hat{B}_f$ .

Из 12.20 вытекает, что интеграл Лебега есть распространение интеграла Римана на более широкий класс функций и более широкий класс «областей» интегрирования. Поэтому нет необходимости различать интегралы Римана и Лебега какими-то особенностями в обозначениях, и мы в дальнейшем будем опускать букву  $L$  перед знаком интеграла Лебега.

12.21. Пусть  $f$  интегрируема на  $E$  и  $m \leq f(x) \leq M$  при  $x \in E$ . Докажите, что

$$m |E| \leq \int_E f dx \leq M |E|.$$

12.22. Пусть  $f$  интегрируема на  $E$  и  $f(x) \geq 0$  при  $x \in E$ . Докажите, что  $\int_E f(x) dx \geq 0$ .

Отметим некоторые свойства интеграла Лебега.

1) Если  $f$  интегрируема на  $E$ , то при любом  $\lambda \in \mathbf{R}$  функция  $\lambda f$  также интегрируема на  $E$ , причем

$$\int_E \lambda f dx = \lambda \int_E f dx.$$

2) Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $E$ , то и функция  $f + g$  интегрируема на  $E$ , причем

$$\int_E (f + g) dx = \int_E f dx + \int_E g dx.$$

3) Пусть  $(E_n)$  — конечная или счетная совокупность попарно непересекающихся ограниченных множеств таких, что их объединение  $E$  ограничено. Тогда, если  $f$  интегрируема на каждом из  $E_n$ , то она интегрируема и на  $E$ , причем

$$\int_E f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f dx. \quad (1)$$

4) Если  $f$  интегрируема на  $E$ , а  $E$  разбито на конечное или счетное число попарно непересекающихся измеримых множеств  $(E_k)$ , то  $f$  интегрируема на каждом  $E_k$ , причем справедлива формула (1).

**12.23.** Функция  $f(x)$  равна  $x^2$  в точках канторова множества  $K$  (см. 11.13) и равна  $\frac{1}{2^n}$  на смежных интервалах  $n$ -го ранга (так называют интервалы, которые удаляются из отрезка на  $n$ -м шаге построения множества Кантора). Докажите, что  $f$  интегрируема на  $[0, 1]$ , и найдите интеграл.

*Решение.* Пусть  $A_n$  — объединение всех (их  $2^{n-1}$ ) интервалов  $n$ -го ранга. Так как  $f$  — константа на  $A_n$ , то  $f$  (см. 12.17) интегрируема на  $A_n$ , причем

$$\int_{A_n} f dx = \frac{1}{2^n} |A_n| = \frac{1}{2^n} 2^{n-1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Функция  $f$  интегрируема и на  $K$ , так как  $|K| = 0$  (см. 11.13), причем

$$\int_K f dx = 0.$$

Поскольку

$$[0, 1] = K \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

то  $f$  интегрируема на  $[0, 1]$ , в силу свойства 3 интеграла Лебега, причем

$$\int_0^1 f dx = \int_K f dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

**12.24.** Докажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{n+2}$  при  $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) интегрируема на  $[0, 1]$ , и найдите интеграл.

12.25. Вычислите  $\int_0^1 f dx$ , где  $f$  — функция из задачи 12.8.

12.26. Множество  $E$  получено из отрезка  $[0, 1]$  удалением интервалов  $\left\{ \left] \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right[ \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ . Покажите, что функция  $f(x) = 3x^2$  интегрируема по Лебегу на множестве  $E$ , и найдите интеграл (с точностью до 0,01).

Две функции  $f$  и  $g$ , определенные на множестве  $E$ , называются *эквивалентными* на  $E$ , если множество точек  $x$  из  $E$ , где  $f(x) \neq g(x)$ , имеет меру нуль.

12.27. Докажите, что функция  $g$ , эквивалентная функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  на  $]0, 1]$ , не может быть ограниченной.

12.28. Докажите, что если одна из двух ограниченных эквивалентных на  $E$  функций  $f$  и  $g$  интегрируема на  $E$ , то и другая интегрируема на  $E$ , причем

$$\int_E f dx = \int_E g dx.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $P$  ту часть  $E$ , на которой  $f(x) \neq g(x)$ , а через  $Q$  — дополнение  $P$  до  $E$ . Множества  $P$  и  $Q$  измеримы (см. 11.42).

Поскольку  $g$  интегрируема на  $E$ , то, в силу свойства 4 интеграла Лебега,  $g$  интегрируема как на  $P$ , так и на  $Q$ . Так как  $f(x) = g(x)$  на  $Q$ , а  $|P| = 0$ , то функция  $f$  также интегрируема на  $P$  и на  $Q$ . Значит (см. свойство 3 интеграла Лебега),  $f$  интегрируема и на  $E$ .

Приняв во внимание, что  $\int_P f dx = \int_P g dx$ , в силу аддитивности интеграла Лебега, имеем

$$\int_E f dx = \int_Q f dx + \int_P f dx = \int_Q f dx = \int_Q g dx = \int_Q g dx + \int_P g dx = \int_E g dx.$$

12.29. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in \mathbb{I} \cap [1, 2]; \\ 2x & \text{при } x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]; \\ \sin x & \text{при } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема на  $[0, 2]$ , и вычислите интеграл.

*Решение.* Функция  $f$  эквивалентна на  $[0, 2]$  функции

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 1, \\ 2x & \text{при } x < 1, \end{cases}$$

поскольку  $f(x) \neq g(x)$  лишь на множестве  $\mathbb{Q}'$  рациональных точек из  $[0, 2]$ , а  $|\mathbb{Q}'| = 0$ .

Функция  $g$  интегрируема на  $[0, 2]$  (даже по Риману, поскольку у нее только одна точка разрыва), причем

$$\int_0^2 f dx = \int_0^2 g dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_{[1, 2]} 2x dx.$$

Поскольку интеграл по одноточечному множеству (его мера — нуль) равен нулю, то

$$\int_{[1, 2]} 2x dx = \int_{[1, 2]} 2x dx + \int_{\{1\}} 2x dx = \int_1^2 2x dx.$$

Интегралы  $\int_0^1 x^2 dx$  и  $\int_1^2 2x dx$  — это интегралы по отрезку от непрерывных функций (их можно понимать в смысле Римана), поэтому их можно вычислить с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Итак,

$$\int_0^2 f dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x dx = \frac{10}{3}.$$

В задачах 12.30—12.34 требуется доказать, опираясь на свойства интеграла Лебега, что указанные интегралы существуют, и вычислить их.

12.30.  $\int_0^1 f dx$ , где  $f$  — функция из задачи 12.3.

12.31.  $\int_0^1 f dx$ , где  $f$  — функция из задачи 12.10.

12.32.  $\int_0^1 g dx$ , где  $g$  — функция из задачи 12.9.

12.33.  $\int_0^\pi D(x) \sin x dx$ , где  $D$  — функция Дирихле.

12.34.  $\int_0^2 f(x) dx$ , если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in A, \\ \sin \pi x & \text{при } x \in [0, 1] \cap CA, \\ \cos \pi x & \text{при } x \in [1, 2] \cap CA, \end{cases}$$

где  $A$  — множество алгебраических чисел.

До сих пор мы рассматривали интеграл Лебега применительно к ограниченным функциям, заданным на ограниченном измеримом множестве. Однако понятие интеграла Лебега можно распространить и на случай неограниченных функций.

Пусть функция  $f$  определена, но, возможно, не ограничена на ограниченном измеримом множестве  $E$  и  $f(x) \geq 0$  на  $E$ . Срезкой функции  $f$  назовем функцию



$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} n & \text{если } f(x) > n; \\ f(x), & \text{если } f(x) \leq n, \end{cases}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ . Если функция  $f$  такова, что любая ее срезка интегрируема по Лебегу на  $E$ , а числовая последовательность  $(\int_E f^n dx)$  сходится (к конечному пределу), то говорят, что  $f$  суммируема на  $E$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f^n dx$  называют интегралом от  $f$  по  $E$ .

Пусть теперь  $f$  принимает на  $E$  значения произвольных знаков. Такая функция  $f$  называется суммируемой на  $E$ , если суммируемы на  $E$  вспомогательные неотрицательные функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0 \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

В этом случае полагают

$$\int_E f dx = \int_E f_+ dx - \int_E f_- dx.$$

Каждая ограниченная и интегрируемая на  $E$  функция является суммируемой на  $E$ .

12.35. Докажите, что функция  $f$  такая, что  $f(0) = 0$  и  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  при  $x \neq 0$ , суммируема на  $E: [-1, 8]$ , и найдите ее интеграл.

Решение. В данном случае

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{при } 0 < x \leq 8, \\ 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 0; \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Рассмотрим срезку функции  $f_+$ :

$$f_+^{(n)}(x) = \begin{cases} n & \text{при } 0 < x < \frac{1}{n^3}, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{при } \frac{1}{n^3} \leq x \leq 8, \\ 0 & \text{при } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Ясно, что эта функция интегрируема на  $[-1, 8]$ , причем

$$\int_{-1}^8 f_+^{(n)} dx = \int_0^{1/n^3} n dx + \int_{1/n^3}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 6 - \frac{1}{2n^2}.$$

Поэтому

$$\int_E f_+ dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 6 - \frac{1}{2n^2} \right) = 6.$$

Аналогично имеем, что  $f_-^{(n)}$  также интегрируема на  $E$ , причем

$$\int_E f_-^{(n)} dx = - \int_{-1}^{-\frac{1}{n^3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + n \int_{-\frac{1}{n^3}}^0 dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

Поэтому

$$\int_E f_- dx = \frac{3}{2}.$$

Так как функции  $f_+$  и  $f_-$  суммируемы, то и  $f$  суммируема на  $E$ , а

$$\int_E f dx = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

12.36. Суммируема ли на промежутке  $]0, 1]$  функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ?

12.37. Докажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$  суммируема на  $]0, 1[$ , и найдите ее интеграл.

12.38. Суммируема ли на промежутке  $]0, 1]$  функция  $f(x) = (-1)^n n$  при  $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?

Множество всех функций, суммируемых на  $[a, b]$ , образует линейное пространство. Если договориться отождествлять эквивалентные друг другу функции (необходимость этого вытекает из 12.28), то на этом пространстве можно ввести норму

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Так возникает линейное нормированное пространство  $L^1[a, b]$ . Это полное (т. е. банахово) пространство. Оно является пополнением пространства  $C_1[a, b]$ .

Аналогичным образом на множестве функций  $f$ , таких, что  $f^2$  суммируема на  $[a, b]$ , строится линейное нормированное пространство  $L^2[a, b]$  со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Это также полное пространство, которое является пополнением пространства  $C_2[a, b]$ .

12.39. Покажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  (при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ) принадлежит пространству  $L^1[0, 1]$ , но не принадлежит  $L^2[0, 1]$ .

12.40. Покажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (при  $x \neq \pm 1$ ,  $f(\pm 1) = 0$ ) принадлежит  $L^1[-1, 1]$ , и найдите ее норму.

12.41. Пусть  $f_k(x) = 1$ , если на  $k$ -м месте ( $k = 1, 2$ ) в двоичном разложении числа  $x$  стоит 1 и  $f_k(x) = -1$  при остальных  $x$ . Покажите, что  $f_1$  и  $f_2$  входят в пространство  $L^2[0, 1]$  и ортогональны (см. 3.62) в нем.

12.42. Докажите, что подпространство  $\tilde{L}^1[a, b]$  пространства  $L^1[a, b]$ , состоящее из ограниченных функций, неполно.

## УКАЗАНИЯ

### § 1

4. Эти отображения представляют собой размещения с повторениями из 2 элементов по 20. 10. Вспомните, что дифференцируемая функция непрерывна, а непрерывная на отрезке функция имеет первообразную. 20. Воспользуйтесь тем фактом, что любая существенно бесконечная десятичная дробь представляет собой единственное действительное число и, наоборот, любое действительное число можно единственным образом разложить в существенно бесконечную дробь. 21, 22, 23. Воспользуйтесь графическим способом задания функций. 43. Используя радианную меру дуг, отобразите вначале окружность на полуинтервал  $[0, 2, \pi[$ . 44. Используйте инверсию и метод вспомогательных последовательностей для «избавления» от «лишней» точки. 45. Используйте вспомогательную последовательность окружностей  $x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$ . 47. Сопоставьте данному уравнению число  $2^a 3^b 5^c$  и воспользуйтесь теоремой о каноническом представлении натуральных чисел. 48. Последовательности  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  сопоставьте последовательность  $(n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \dots)$ . 58. Постройте конкретный пример, используя, например, тот факт, что  $[0, 1[ \sim ]0, 1[$ . 80. Воспользуйтесь свойством плотности рациональных чисел (на любом сколь угодно малом отрезке имеется хотя бы одно рациональное число) и тем, что любое рациональное число является алгебраическим (Почему?) 101. Возьмите в круге множество, эквивалентное всей плоскости, и воспользуйтесь теоремой о мощности промежуточного множества. 105. На каждом отрезке можно взять рациональное число. 110 а, б, в, д решаются с помощью 1.60 и 1.109. 113. Введите какой-нибудь способ упорядочения вершин треугольника и определите инъекцию  $M \rightarrow \mathbb{R}^6$ , затем отыщите в  $M$  подмножество мощности континуума. 114. См. указание к предыдущей задаче. 115. Покажите, что 1.88 справедливо и для счетного числа слагаемых, и воспользуйтесь этим результатом. 116. Покажите, что данное множество содержит некоторый отрезок, и воспользуйтесь 1.60. 117. Каждой такой десятичной дроби сопоставьте девятеричную дробь, заменив в первой все девятки семерками. 118. Сопоставьте дроби  $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$  дробь  $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ ; задача свелась к задаче, аналогичной предыдущей. 123. Поставьте в соответствие каждой восьмерке треугольник, вершины которого имеют рациональные координаты и лежат по одной в каждой из трех областей.

### § 2

7. Для доказательства независимости системы аксиом используйте 2.4 (г), 2.5 и 2.6. 32. Рассмотрите вначале частный случай — шары на плоскости  $\mathbb{R}_2^2$ . Это поможет выбрать радиус искомого шара. 33. См. предыдущее указание. 34. Рассмотрите отрезок  $[0, 4]$  как самостоятельное метрическое пространство с обычным расстоянием. 35. См. предыдущее указание. 36. Рассмотрите метрическое пространство 2.3.

### § 3

6. Для доказательства независимости системы аксиом воспользуйтесь 3.5 (а), 3.3 (б), 3.4 (г). 19. Воспользуйтесь 3.16 (б). 20. Воспользуйтесь 3.17 (а). 26. 27. 28. Запишите неравенство Коши—Буняковского для пространств  $\mathbf{R}_2^n$  (26),  $\mathbf{R}_2^\infty$  (27),  $C_2[a, b]$  (28). 47.  $x = a + t$ , где  $t$  — точка с нормой  $r$  (ее существование вытекает из 3.1) принадлежит сфере. 49. Рассмотрите вспомогательную точку  $x = a_2 + \frac{r_1}{\|a_2 - a_1\|} (a_2 - a_1)$ ; покажите, что  $x \in S_1$ , и найдите  $\|x - a_1\|$ . 55. См. предыдущую задачу, а для доказательства обратного утверждения рассмотрите вспомогательную точку  $z = \frac{a}{a+b} \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b}$ , где  $a = \|x\|$ ,  $b = \|y\|$ . 58. Поместите начало координат в  $\Theta$ . Для любой точки  $\xi$  плоскости положите  $\|\xi\| = \frac{1}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — такое число, что  $\lambda\xi \in \partial T$ . 65. Сопоставьте функции  $f(x) \in C[0, 1]$  функцию  $\varphi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \in C[0, 2]$ .

### § 4

19. Покажите, что точка  $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2^n}}, 0, 0, \dots\right)$  при подходящем выборе  $n$  принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ . 21. б) Рассмотрите  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , где  $A_k$  — отрезок  $x = \frac{1}{k}$ ,  $|y| \leq 1$ . 27. б) Множество, совпадающее со всем метрическим пространством  $M$ , является открытым и замкнутым одновременно, так как его дополнение пусто. 32. Возьмите в  $\mathbf{R}$  множества  $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$  и  $B = \{n \mid n \in \mathbf{N}\}$ . 38. Рассмотрите шары радиуса 1 в метрическом пространстве 2.3. 39. С помощью 4.33 и 4.38] покажите, что все граничные точки лежат на сфере. Затем покажите, что каждая точка сферы является граничной. Для этого рассмотрите точки

$$x_1 = t + \frac{\varepsilon}{2\|a - t\|} (a - t) \text{ и } x_2 = t + \frac{\varepsilon}{2\|a - t\|} (t - a).$$

50 Рассмотрите  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ . 54. Рассмотрите  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ . 58. Рассмотрите два случая:  $(r_n)$  — ограниченная последовательность и неограниченная. 62. Воспользуйтесь 3.1 и предыдущей задачей.

### § 5

3. а) Воспользуйтесь 2.2 (б). 19. Воспользуйтесь 5.11. 20. Рассмотрите последовательность функций:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ (1 - \sqrt{n})nx - 1 + 2\sqrt{n}, & \text{если } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

32,33. Рассмотрите последовательность координатных ортов. 41. Найдите в  $A$  последовательность, сходящуюся к точке из  $CA$ . 43. Для доказательства незамкнутости рассмотрите ряд Тейлора для  $e^x$ . 47. Рассмотрите  $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right)$ .

## § 6

10. Воспользуйтесь 4.61. 13. Рассуждая, как в 6.7, из произвольной последовательности многочленов выделите подпоследовательность, у которой все последовательности из одноименных коэффициентов сходятся. Покажите, что найденная подпоследовательность сходится и по метрике. 17. Покажите, что  $E$  незамкнуто.

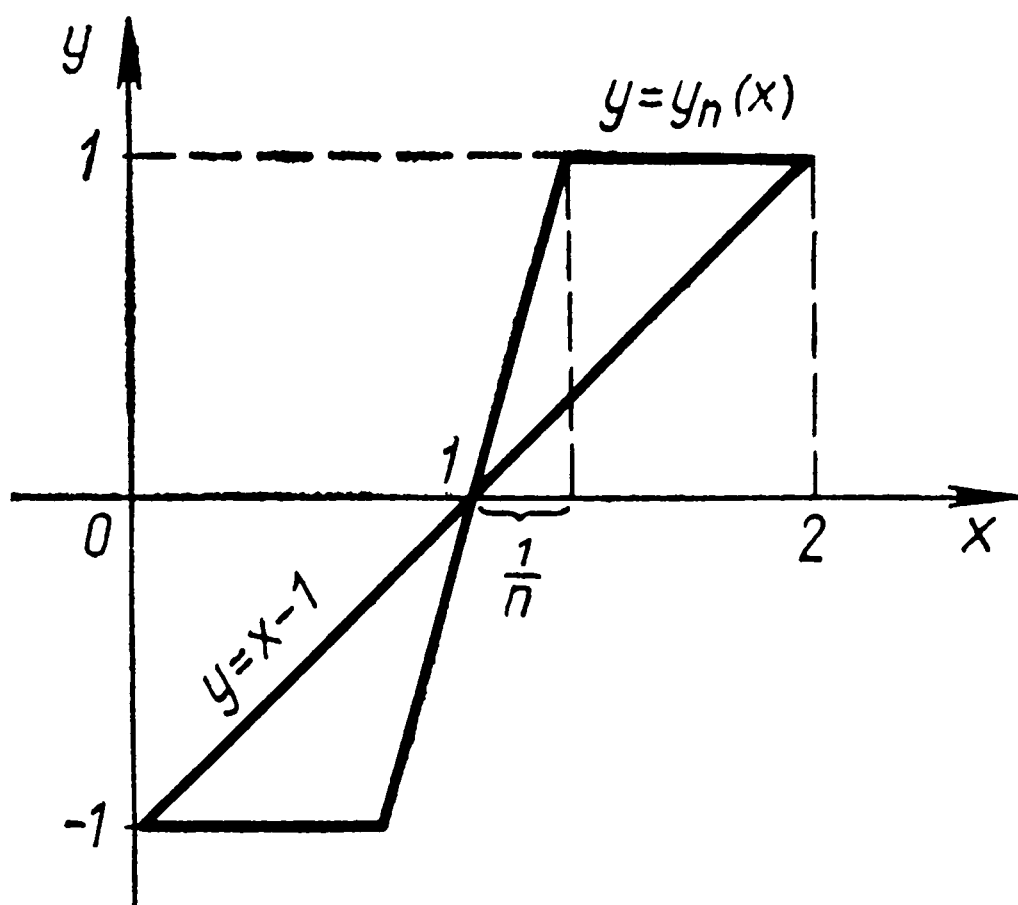
## § 7

3. а, б) Воспользуйтесь теоремой о тождественности многочленов. в) Воспользуйтесь трансцендентностью синуса. 16. Докажите неравенство  $|\max f - \max \varphi| \leq \max |f - \varphi|$  и воспользуйтесь им. 17. Воспользуйтесь легко проверяемым соотношением  $\min f - \min \varphi \leq \max (-\varphi) - \max (-f)$  и предыдущим указанием. 19. Отображение терпит разрыв при  $y(x) \equiv 0$ , рассмотрите последовательность  $y_n(x) = \frac{x}{n}$ . 20. в) Рассмотрите последовательность  $f_n(x) = (1-x)^n$ . 21. б) Рассмотрите последовательность  $f_n(x) = \frac{\sin 2n\pi x}{n}$ . 24. Задача сводится к исследованию на непрерывность отображения  $F(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}(x) dx$ ; для решения этого вопроса воспользуйтесь предыдущим указанием — получающийся интеграл не вычисляйте, а оцените снизу. 27. См. 5.3(a). 32. Рассмотрите функцию  $\operatorname{arctg}$ . 39. Рассуждая так же, как в 7.37, покажите, что  $F(y) < 1$ . В качестве  $y_n(x)$  возьмите функцию, графиком которой служит ломаная, проходящая через точки  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, 1\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, -1\right)$  и  $(1, -1)$  последовательно. 51. Рассмотрите функцию  $\varphi: x \rightarrow x - f(x)$ . 52—54. Примените задачу 7.50.

## § 8

3. а, б) Это частичные суммы сходящихся рядов. в) Рассмотрите ряд, для которого  $x_n$  является частичной суммой, и сравните его с рядом, составленным из геометрической прогрессии  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  путем подходящей группировки членов. 7. а) Покажите, что это сходящаяся последовательность. б) Найдите или оцените снизу  $\rho(f_n, f_{2n})$ . 8. Найдите  $\rho(f_n, f_{2n})$ . 9. Рассмотрите последовательность предыдущей задачи; найдите  $\rho(f_n, f_{n+p})$ . 17. Используйте 5.15 и признак равномерной сходимости последовательности функций. 19. Используйте теорему о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности функции. 21. Рассмотрите последовательность  $x_n = n$ . 22. Здесь фундаментальные последовательности — константы с некоторого номера. 26. См. 5.43 и 8.28. 27. Рассмотрите последовательность

$$y_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+n^2} & \text{при } |x| < n, \\ 0 & \text{при } |x| \geq n. \end{cases}$$



Р и с. 21

33. С помощью 3.48 и 3.49 покажите, что последовательность центров шаров фундаментальна; после этого см. доказательство 8.29.

## § 9

2. Изобразите графики функций  $y = 5x^2 + 2x + 3$  и  $y = 2 \sin x$ . 21. См. задачу 9.8. 22. Сначала решите вопрос о наличии неподвижной точки. 23. См. 9.6 (2-е решение).

## § 10

4. Рассмотрите  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = -x^2$ . 11. См. 7.14. 14. Докажите сначала эту формулу для конечного числа слагаемых, а затем

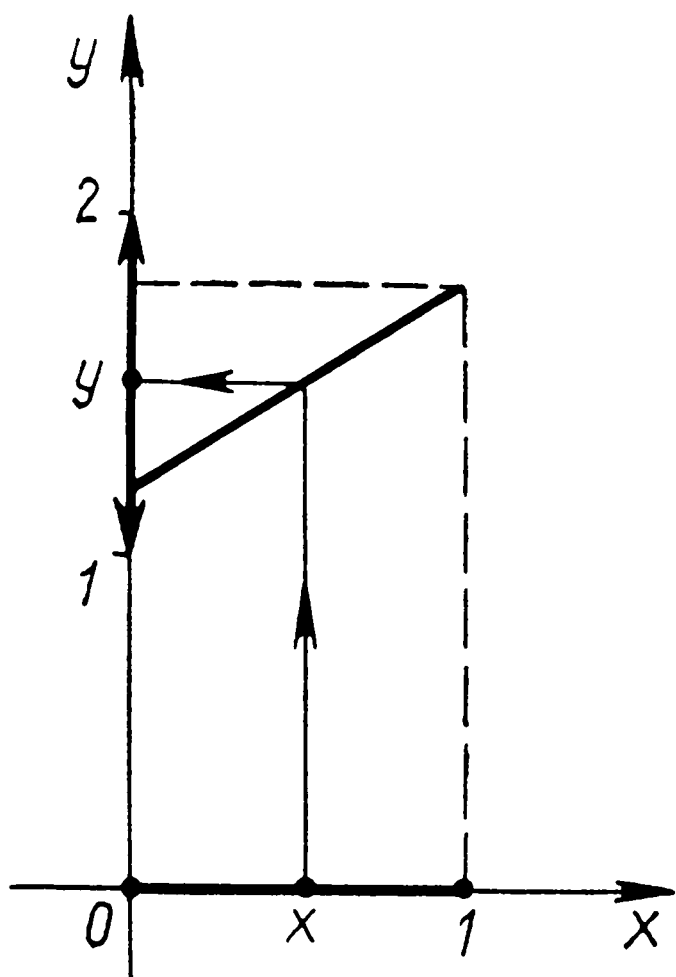
перейдите к пределу, воспользовавшись непрерывностью  $F$ . 27. Решая, как 10.25, воспользуйтесь неравенством  $|\int_a^b f(x) g(x) dx| \leq \max_{[a, b]} |g(x)| \cdot \int_a^b |f(x)| dx$ ; в качестве  $y_n(x)$  рассмотрите функцию, заданную графически на рисунке 21. 28. Воспользуйтесь неравенством из предыдущего указания. 30. Воспользуйтесь свойствами интеграла Стильеса. 41. Воспользуйтесь 10.40.

## § 11

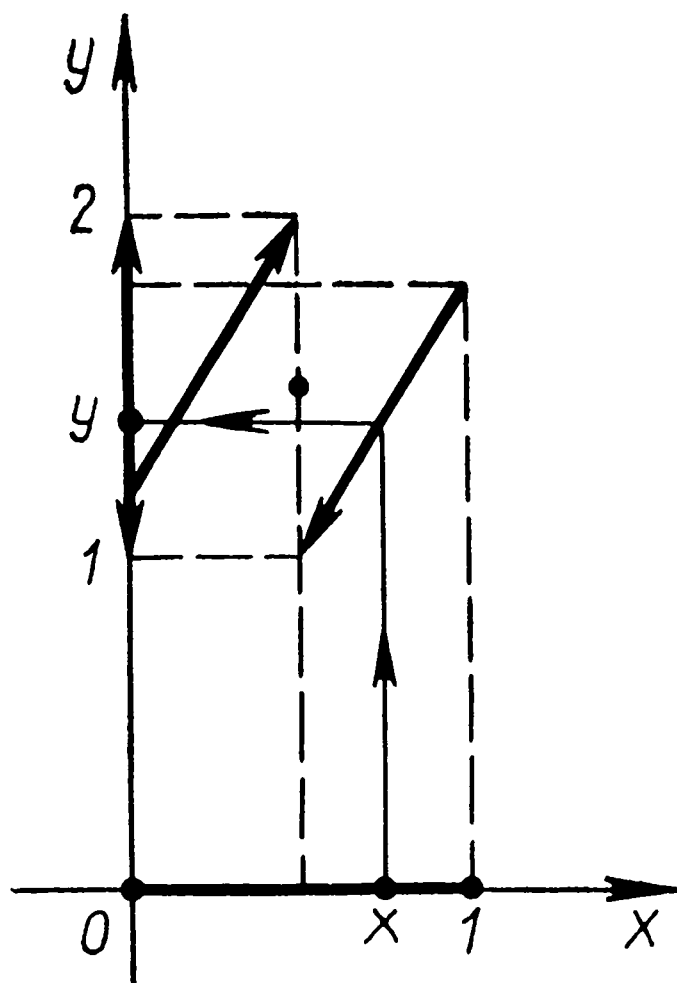
10. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. 11. Сначала с помощью 11.9 разберите случай прямоугольного треугольника, затем воспользуйтесь аддитивностью меры Жордана. 13. Воспользуйтесь утверждением 11.12. 14.  $M$  состоит из четырех интервалов. 15. Воспользуйтесь утверждением 11.12. 20. Так как  $F$  измеримо, то для любого  $\varepsilon > 0$ , в силу критерия единственности разделяющего числа (см., например, задачу 11.30), существуют ступенчатые фигуры  $\tilde{C}$  и  $C$ , такие, что  $C \subset F \subset \tilde{C}$  и  $|\tilde{C}| - |C| < \varepsilon$ . Покажите, что в качестве  $C$  можно взять открытое множество, а в качестве  $\tilde{C}$  — замкнутое, а поэтому  $\partial F \subset \tilde{C} \setminus C$ . Далее воспользуйтесь утверждением задачи 11.12. 33. Воспользуйтесь тем, что  $\tilde{Y}_F \subset [0, \infty]$ . 42. Воспользуйтесь соотношением:  $CA \Delta CB = A \Delta B$ . 43. Воспользуйтесь соотношением:  $A \cap B = C(CA \cup CB)$ . 44. Воспользуйтесь соотношением:  $A \setminus B = A \cap CB$ . 46. Воспользуйтесь свойством монотонности меры. 50. Предположив, что  $F$  измеримо по Жордану, убедитесь, что мера Жордана  $F$  равна нулю, так как  $X_F = \{0\}$ . Воспользуйтесь утверждением из 11.40.

## § 12

8. Покажите, что  $f$  непрерывна в иррациональных точках. 9. Функция непрерывна на  $[0, 1]$ . 10. Покажите, что  $g$  разрывна на  $CK$ . 24. Воспользуйтесь формулой  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ . 41.  $f_1(x) = 1$  при  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .



Р и с. 22



Р и с. 23

$f_2(x) = 1$  при  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ . 42. Покажите, что последовательность срезов  $f_n$  функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  (при  $x \neq 0, f(0)=1$ ) сходится в  $L^2[0, 1]$  к этой функции. Воспользуйтесь единственностью предела в метрическом пространстве (в случае  $L^2$  это означает, что пределом  $(f^n)$  может быть лишь функция, эквивалентная  $f$ ; поэтому еще придется использовать утверждение из 12.27).

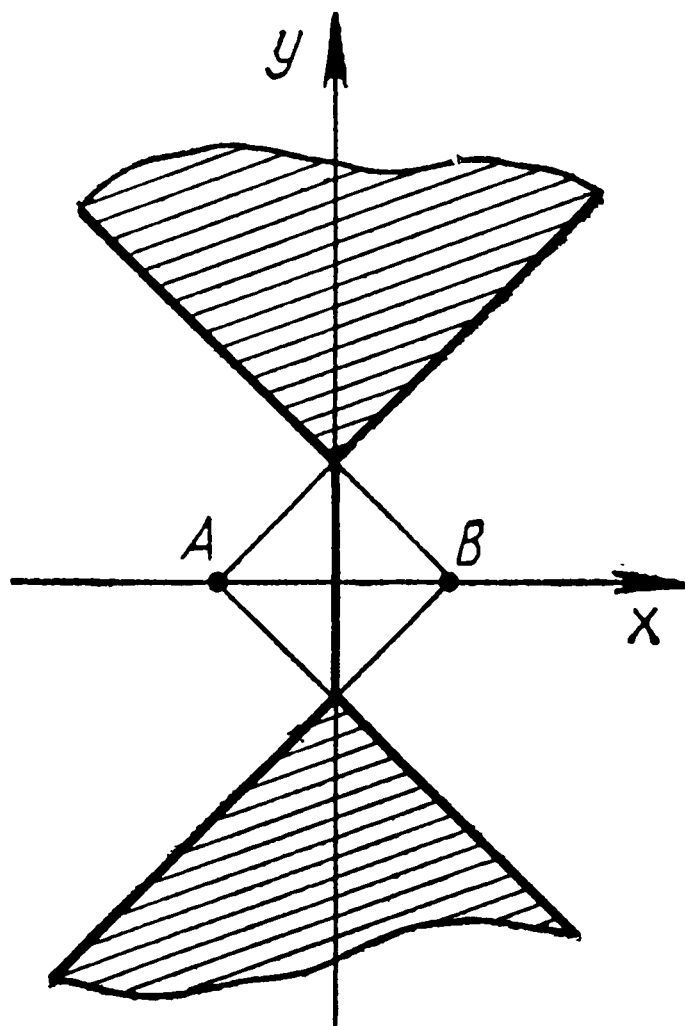
## О Т В Е Т Ы

### § 1

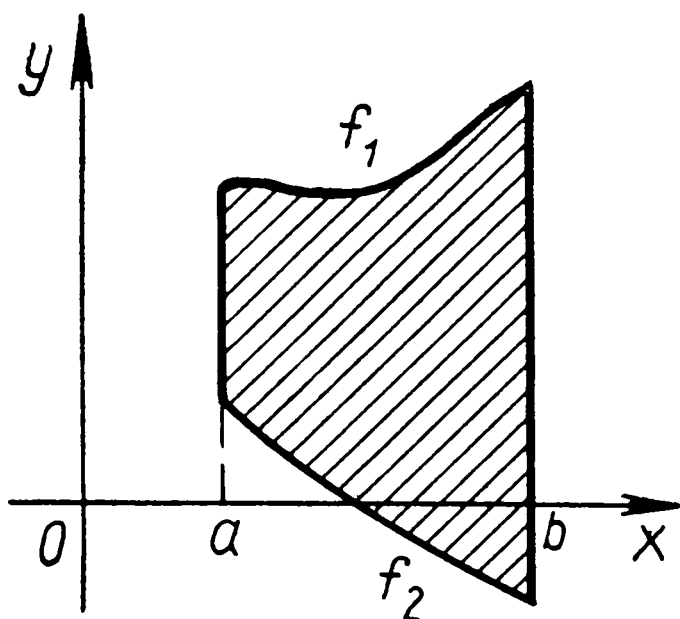
9. Сюръекция, но не инъекция. 10. Сюръекция, но не инъекция. 17. Биекция. 18. Сюръекция, но не инъекция. 19. Сюръекция, но не инъекция. 20. Инъекция, но не сюръекция. 22. в) См., например, рис. 22. 23. в) см., например, рис. 23. 24. а) 0; б) 6. 26. Множество гостей было бесконечным. 58. Нет. 59. Нет. 105. Конечное или счетное. 113. Континуум. 114. Континуум. 115. Континуум. 116. Континуум. 117. Континуум. 118. Континуум. 121. Да. 122. Можно  $\Gamma$  и  $N$ , нельзя  $A, B, T$ . 123. Нельзя.

### § 2

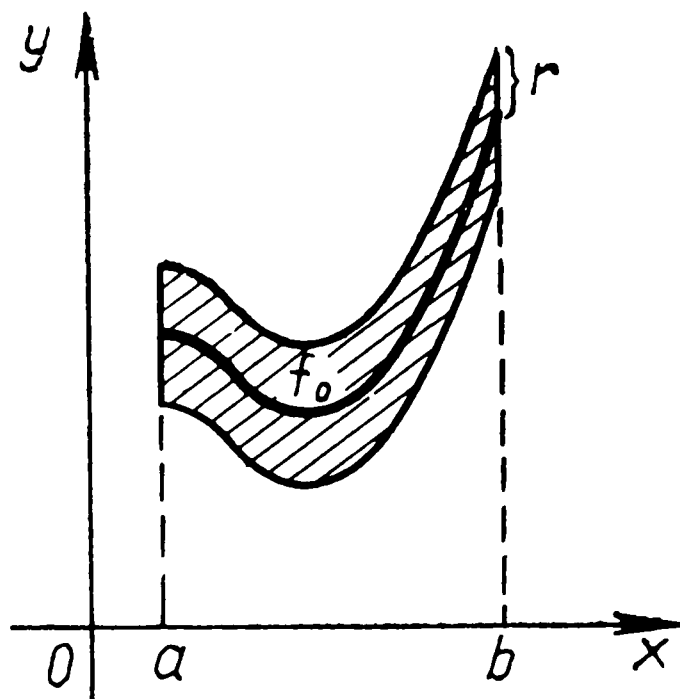
10.  $r(A, B) = d \sin \frac{\rho(A, B)}{d}$ , где  $d$  — диаметр окружности. 13. Нет. 14. Нет. 20. а) Да. б) Да. 34. Да. 35. Да. 36. Да. 43. Нет.



Р и с. 24



Р и с. 25.



Р и с. 26.

### § 3

5. а) Нет; б) да. 17. а), б), д) Нет; в) г) Да. 32. См. рис. 24. 34. Контур трапеции, с вершинами в точках  $(2, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(6, 3)$  и  $(6, -3)$ . 39. Площадь фигуры, изображенной на рис. 25. 40. См. рис. 26. 56. а) Квадрат со сторонами, параллельными координатным осям; б) квадрат с диагоналями, параллельными координатным осям. 57. а), б) Эллипс. 60. Например,  $\|x\| = |\ln x|$ .

### § 4

9. 0 и  $\frac{1}{n\pi}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 13. Прямая  $x = 0$ . 16.  $[1, \infty[$ . 20. а) граничная; б) внутренняя; в) внешняя. 27. а) Нельзя; б) Может. 38. Обратное неверно. 44. Нет. 50. Не всегда. 51. Нет. 54. Не всегда. 55. Нет. 69. Плотны а), б), д). 71. Нигде не плотны а), в), г). 73. Нет. 74. Нигде не плотны в), г), е).

### § 5

30.  $(e_n)$  в  $R_2^\infty$  не сходится. 31. Нет. 32. Обратное неверно. 33. Обратное неверно. 44. Нет.

### § 6

9. Нет. 10. Нет. 12. Нет. 13. Да. 15. Нет. 16. Нет. 17. Нет. 27. Нет. 28. Нет. 29. Нет. 31. Нет.

### § 7

3. а)  $F^{-1}(f) = (3, -2)$ ; 9) пуст. 16 Да. 17. Да. 18. Да. 19. Нет. 20. а) Да; б) да; в) нет. 21. а) Да; б) нет. 24. Да. 30. Нет. 32. Нет. 36. а, б) Да. 39. Наибольшего значения нет. 49. Связны б), е), з), к), л), м), о), п).

### § 8

7. а) Да.; б) нет. 8. Нет. 9. Нет. 21. Нет. 22. Да. 23. Да. 26. Нет.

### § 9

3.  $(2, 1)$ ;  $(1, 2)$  и  $(-7, -2)$ . 4.  $y = 1 \pm \sqrt{1 + x^2}$ . 5.  $y = ce^x$ . 9. Да.



10. Нет. 11. Да. 13. а), в) Да; б) нет. 21. Нет. 22. Не является сжимающим и не имеет неподвижной точки. 27. а) 3; б) 0; в)  $\sqrt{5}$ . 29. а) 2; б)  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ . 31.  $x = 1,00$ ;  $y = 2,00$ ;  $z = 3,00$ . 37. а)  $u = e^x$ ; б)  $u = -x$ .

### § 10

2. Только при  $b = 0$ . 4. Нет. 5. Нет. 6. Нет. 7. Да. 18.  $n$ . 20.  $b - a$ . 23.  $\frac{1}{2}$ . 26. 1. 27. 4. 41. 14 или  $-10$ . 43. 2 или  $-4$ . 47.  $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ . 52.  $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ . 53. Да. 55. 4. 56.  $\frac{1}{2}$ . 57. 3. 58. 1.

### § 11

1. Параллелепипедами являются фигуры  $A, D, E$ . 2.  $|A| = 24$ . 14.  $|M| = \frac{38}{45}$ . 17. Нет. 18. Нет. 19. Да ( $|F| = 0$ ). 46. Нет. 51. 0. 55. 0.

### § 12

6. 1. 7. 2. 9. Да. 10. Нет. 24.  $\frac{1}{4}$ . 25.  $\frac{\pi}{56}$ . 26. 0,10. 36. Нет. 38. Нет. 40. п.

## СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Мощность множества . . . . .	4
§ 2. Метрические пространства . . . . .	20
§ 3. Линейные нормированные пространства . . .	27
§ 4. Топология множеств метрического пространства	38
§ 5. Сходимость в метрических пространствах . . .	45
§ 6. Компактные метрические пространства . . . .	54
§ 7. Непрерывные отображения метрических пространств . . . . .	58
§ 8. Полные метрические пространства . . . . .	66
§ 9. Принцип сжимающих отображений и его применения . . . . .	66
§ 10. Линейные функционалы и операторы . . . . .	75
§ 11. Меры Жордана и Лебега . . . . .	85
§ 12. Интегралы Римана и Лебега . . . . .	103
Указания . . . . .	111
Ответы . . . . .	121
	125

ИБ № 1974

**Виктор Алексеевич Петров**

**Наум Яковлевич Виленкин**

**Марк Иосифович Граев**

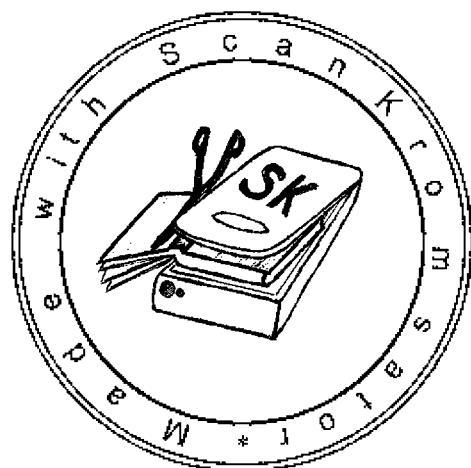
### ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ

Редактор *Т. П. Руженская*

Художественный редактор *К. К. Федоров*

Технический редактор *Т. В. Самсонова*

Корректор *Т. А. Кузнецова*



Сдано в набор 15. 11. 77. Подписано к печати 18. 04. 78. 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага № 3. Гарн. литерат. Печать высокая. Условн. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,56. Тираж 25 000 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 434.

Цена 25 коп.