

Н. М. МАТВЕЕВ

**МЕТОДЫ  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

Н. М. Матвеев

# Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Издание четвертое,  
исправленное и дополненное

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования  
СССР в качестве учебника для меха-  
нико-математических специальностей  
университетов*

Издательство «Вышэйшая школа»  
Минск 1974

517.2  
М33  
УДК 517.9(075.8)

М  $\frac{0223-176}{М304(05)-74}$  19—73

© Издательство «Высшая школа», 1974 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие . . . . .	13
Введение . . . . .	15
<b>Глава первая. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ                      ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.                      УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ</b>	
<b>§ 1. Основные понятия и определения . . . . .</b>	<b>23</b>
1. Понятие об уравнении первого порядка, разрешенном относительно про- изводной . . . . .	23
2. Решение уравнения . . . . .	24
3. Неявное и параметрическое задания решения . . . . .	25
4. Геометрическое истолкование . . . . .	26
5. Задача Коши . . . . .	31
6. Достаточное условие существования решения задачи Коши . . . . .	35
7. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши . . . . .	36
8. Общее решение . . . . .	39
9. Общий интеграл. Общее решение в параметрической форме . . . . .	42
10. Частное решение . . . . .	43
11. Особое решение . . . . .	44
12. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение по дифферен- циальному уравнению . . . . .	46
13. Отсутствие особых решений у уравнения первого порядка с правой частью, рациональной относительно $y$ . . . . .	47
14. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение . . . . .	49
15. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение, в процессе построения общего решения (общего интеграла) . . . . .	52
16. Понятие об интеграле дифференциального уравнения. Зависимость лю- бых двух интегралов одного и того же уравнения . . . . .	53
17. Связь между обыкновенным дифференциальным уравнением и уравне- нием с частными производными . . . . .	60
18. Замечание об интегрируемости в квадратурах . . . . .	61
<b>§ 2. Неполные уравнения . . . . .</b>	<b>63</b>
19. Уравнение, не содержащее искомой функции . . . . .	63
20. Уравнение, не содержащее независимой переменной . . . . .	65



<b>§ 3. Уравнение с разделяющимися переменными</b>	70
21. Построение общего интеграла . . . . .	70
22. Особые решения . . . . .	72
23. Примеры . . . . .	73
<b>§ 4. Однородное уравнение . . . . .</b>	75
24. Построение общего интеграла . . . . .	75
25. Особые решения . . . . .	77
26. Пример . . . . .	77
27. Геометрическое свойство интегральных кривых однородного уравнения	78
28. Простейшее уравнение, приводящееся к однородному . . . . .	81
<b>§ 5. Обобщенное однородное уравнение . . . . .</b>	82
29. Построение общего интеграла. Особые решения . . . . .	82
30. Пример . . . . .	84
<b>§ 6. Линейное уравнение . . . . .</b>	85
31. Понятие о линейном уравнении . . . . .	85
32. Существование и единственность решения задачи Коши. Общие свойства линейного уравнения . . . . .	85
33. Построение общего решения однородного линейного уравнения . . . . .	88
34. Свойства решений однородного линейного уравнения . . . . .	90
35. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения . . . . .	91
36. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) . . . . .	92
37. Примеры . . . . .	96
38. Геометрическое свойство интегральных кривых линейного уравнения	97
<b>§ 7. Уравнение Бернулли . . . . .</b>	100
39. Построение общего решения . . . . .	100
40. Особое решение . . . . .	101
<b>§ 8. Уравнение Дарбу . . . . .</b>	102
41. Построение общего интеграла. Особые решения . . . . .	102
42. Пример . . . . .	103
<b>§ 9. Уравнение Якоби . . . . .</b>	103
43. Построение общего интеграла . . . . .	103
44. Примеры . . . . .	106
<b>§ 10. Уравнение Риккати . . . . .</b>	108
45. Существование и единственность решения задачи Коши. Общие свойства уравнения Риккати . . . . .	108
46. Приведение уравнения Риккати к каноническому виду . . . . .	110
47. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах . . . . .	112
48. Построение общего решения в случае, когда известно одно частное решение . . . . .	113
49. Структура общего решения . . . . .	115
50. Построение общего решения в случае, когда известны два или три частных решения . . . . .	116
51. Специальное уравнение Риккати . . . . .	117

<b>§ 11. Уравнение в полных дифференциалах</b>	118
52. Понятие об уравнении в полных дифференциалах	118
53. Признак уравнения в полных дифференциалах. Построение общего интеграла	120
54. Решение задачи Коши	123
<b>§ 12. Интегрирующий множитель. Простейшие случаи нахождения интегрирующего множителя</b>	124
55. Понятие об интегрирующем множителе	124
56. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от $x$	125
57. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от $y$	127
58. Случай интегрирующего множителя вида $\mu = \mu[\omega(x, y)]$	127
59. Интегрирующий множитель и особые решения	128
60. Интегрирующий множитель уравнения с разделяющимися переменными	129
61. Интегрирующий множитель однородного уравнения	130
<b>§ 13. Интегрирующий множитель. Общая теория</b>	131
62. Теорема о существовании интегрирующего множителя	131
63. Теорема о неединственности интегрирующего множителя	133
64. Теорема об общем виде интегрирующего множителя и ее следствие	133
65. Один общий способ нахождения интегрирующего множителя	135

**Глава вторая. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ  
В КВАДРАТУРАХ**

<b>§ 14. Основные понятия и определения</b>	137
66. Общий случай уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной	137
67. Примеры	141
68. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение, по дифференциальному уравнению	146
69. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение	149
<b>§ 15. Неполные уравнения</b>	150
70. Уравнение, содержащее только производную	150
71. Уравнение, не содержащее искомой функции	151
72. Уравнение, не содержащее независимой переменной	155
73. Обобщенное однородное уравнение	157
<b>§ 16. Общий метод введения параметра</b>	158
74. Приведение уравнения, не разрешенного относительно производной, к уравнению, разрешенному относительно производной. Общий случай	158
75. Случай, когда уравнение разрешимо относительно искомой функции	159
76. Случай, когда уравнение разрешимо относительно независимой переменной	160
77. Уравнение Лагранжа	161
78. Уравнение Клеро	164
<b>§ 17. Задача о траекториях</b>	167
79. Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат	167
80. Примеры	169
81. Случай полярных координат	170

**Глава третья. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ.  
ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ  $n$ -го ПОРЯДКА**

<b>§ 18. Основные понятия и определения</b>	<b>174</b>
82. Предварительные замечания	174
83. Геометрическое истолкование	175
84. Механическое истолкование уравнения второго порядка	175
85. Задача Коши	177
86. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши	179
87. Понятие о краевой (граничной) задаче	181
88. Общее решение	184
89. Общий интеграл	185
90. Общее решение в параметрической форме	186
91. Частное решение	186
92. Особое решение	186
93. Промежуточные интегралы. Первые интегралы	187
94. Замечание об уравнении $n$ -го порядка, не разрешенном относительно старшей производной	188
<b>§ 19. Уравнения, интегрируемые в квадратурах, и уравнения, допускающие понижение порядка</b>	<b>189</b>
95. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка $n$	189
96. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных	197
97. Уравнение, не содержащее независимой переменной	200
98. Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных	203
99. Обобщенное однородное уравнение	204
100. Уравнение, левая часть которого есть точная производная	207

**Глава четвертая. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ**

<b>§ 20. Нормальные системы дифференциальных уравнений</b>	<b>210</b>
101. Предварительные замечания	210
102. Геометрическое истолкование нормальной системы	213
103. Механическое истолкование нормальной системы	213
104. Задача Коши	216
105. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши	218
106. Общее решение	219
107. Частное решение	221
108. Особое решение	222
109. Понятие об интеграле нормальной системы. Первые интегралы. Общий интеграл. Число независимых интегралов	222
110. Связь между нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнением с частными производными	234
111. Понижение порядка системы при помощи первых интегралов	235
112. Приведение уравнения $n$ -го порядка к системе $n$ уравнений первого порядка и обратная задача	237
113. Один общий способ интегрирования нормальной системы двух уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Коши — Римана	242

114. Понятие о системе уравнений высших порядков . . . . .	244
115. Построение всего множества нормальных систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную траекторию . . . . .	246
<b>§ 21. Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме . . . . .</b>	<b>249</b>
116. Понятие о системе обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме. Приведение нормальной системы к системе в симметрической форме . . . . .	249
117. Интегралы, первые интегралы и общий интеграл системы дифференциальных уравнений в симметрической форме . . . . .	251
<b>Глава пятая. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ</b>	
<b>§ 22. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (теорема Пикара) . . . . .</b>	<b>259</b>
118. Предварительные замечания . . . . .	259
119. Формулировка теоремы Пикара для нормальной системы $n$ уравнений	260
120. Доказательство теоремы Пикара для нормальной системы двух уравнений . . . . .	263
121. Замечание о выборе нулевого приближения . . . . .	277
122. Случай одностороннего интервала изменения независимой переменной	277
123. Случай области, не ограниченной по искомым функциям . . . . .	277
124. Случай области, не ограниченной по всем переменным . . . . .	278
125. О продолжении решения, определяемого теоремой Пикара . . . . .	283
126. Теорема Пикара для линейной системы дифференциальных уравнений	286
127. О решении однородной линейной системы с нулевыми начальными значениями искомым функций . . . . .	290
128. Теорема Пикара для уравнения $n$ -го порядка . . . . .	292
129. Теорема Пикара для линейного уравнения $n$ -го порядка . . . . .	294
130. О решении однородного линейного уравнения $n$ -го порядка с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных . . . . .	295
<b>§ 23. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости решения как функции от параметров и начальных данных. Понятие об устойчивости решения в смысле Ляпунова . . . . .</b>	<b>296</b>
131. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от параметров . . . . .	296
132. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от начальных данных . . . . .	305
133. Понятие об устойчивости решения (движения) в смысле Ляпунова	309
134. Теорема о дифференцируемости решения по начальным данным . . . . .	317
135. Обобщения . . . . .	331
<b>§ 24. Теорема существования общего решения . . . . .</b>	<b>332</b>
136. Теорема существования общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений . . . . .	332
137. Замечания . . . . .	337
138. Доказательство существования $n$ независимых интегралов нормальной системы $n$ уравнений . . . . .	337
<b>§ 25. Особые точки . . . . .</b>	<b>339</b>
139. Особые точки уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной . . . . .	339

140. Особые точки нормальной системы дифференциальных уравнений. Точки равновесия (покоя)	342
141. Поведение интегральных кривых уравнения с дробно-линейной однородной правой частью в окрестности особой точки	346
142. Один физический пример	363
143. Понятие о проблеме центра и фокуса	366
<b>§ 26. Теорема существования и единственности голоморфного решения задачи Коши (теорема Коши)</b>	<b>370</b>
144. Понятие о голоморфном решении	370
145. Понятие о мажоранте	371
146. Формулировка теоремы Коши для нормальной системы $n$ уравнений	374
147. Доказательство теоремы Коши для нормальной системы двух уравнений	375
148. Теорема Коши для линейной системы	385
149. Примеры существования голоморфных решений в случае невыполнения условия теоремы Коши	392
150. Теорема Коши для уравнения $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной	394
151. Теорема Коши для линейного уравнения $n$ -го порядка	396
152. Теорема о голоморфности решения относительно параметра	398
<b>§ 27. Теорема существования решения задачи Коши (теорема Пеано)</b>	<b>399</b>
153. Теорема Арцеля	399
154. Теорема существования решения дифференциального уравнения с непрерывной правой частью (теорема Пеано)	402
<b>§ 28. Теорема Каратеодори</b>	<b>410</b>
155. Предварительные замечания	410
156. Формулировка и доказательство теоремы Каратеодори	415
 <b>Глава шестая. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ <math>n</math>-го ПОРЯДКА</b>	
<b>§ 29. Общие свойства линейного уравнения</b>	<b>424</b>
157. Предварительные замечания	424
158. Инвариантность линейного уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно любого преобразования искомой функции	426
<b>§ 30. Однородное линейное уравнение <math>n</math>-го порядка</b>	<b>429</b>
159. Свойства решений	429
160. Понятие о линейной независимости функций	433
161. Необходимое условие линейной зависимости $n$ функций	436
162. Необходимое и достаточное условие линейной независимости $n$ решений однородного линейного уравнения $n$ -го порядка	438
163. Формула Остроградского — Лиувилля	440
164. Понятие о фундаментальной системе решений	441
165. Доказательство существования фундаментальной системы решений	442
166. Построение общего решения	443
167. Число линейно независимых решений однородного линейного уравнения $n$ -го порядка	447

168. Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений . . . . .	447
169. Понижение порядка однородного линейного уравнения при помощи линейно независимых частных решений . . . . .	450
<b>§ 31. Неоднородное линейное уравнение <math>n</math>-го порядка . . . . .</b>	<b>453</b>
170. Структура общего решения неоднородного уравнения . . . . .	453
171. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) . . . . .	455
172. Метод Коши . . . . .	459
<b>Глава седьмая. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ <math>n</math>-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ</b>	
<b>§ 32. Однородное уравнение . . . . .</b>	<b>463</b>
173. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородного линейного уравнения в случае различных корней характеристического уравнения . . . . .	463
174. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения . . . . .	468
175. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	472
<b>§ 33. Неоднородное уравнение . . . . .</b>	<b>481</b>
176. Предварительные замечания . . . . .	481
177. Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов . . . . .	481
<b>§ 34. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления . . . . .</b>	<b>489</b>
178. Свободные колебания . . . . .	489
179. Вынужденные колебания . . . . .	495
<b>§ 35. Операционный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .</b>	<b>497</b>
180. Некоторые сведения из операционного исчисления . . . . .	497
181. Операционный метод решения задачи Коши для линейного уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	509
<b>§ 36. Некоторые линейные уравнения <math>n</math>-го порядка, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами . . . . .</b>	<b>513</b>
182. Приведение однородного линейного уравнения $n$ -го порядка к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной . . . . .	513
183. Линейное уравнение Эйлера . . . . .	515
184. Уравнение Чебышева . . . . .	519
<b>Глава восьмая. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА</b>	
<b>§ 37. Приведение к простейшим формам . . . . .</b>	<b>521</b>
185. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной при помощи замены искомой функции . . . . .	521

186. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной, при помощи замены независимой переменной . . . . .	525
187. Приведение к самосопряженному виду . . . . .	527
<b>§ 38. Понижение порядка . . . . .</b>	<b>531</b>
188. Построение общего решения однородного линейного уравнения второго порядка в случае, когда известно одно частное решение . . . . .	531
189. Связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати . . . . .	535
<b>§ 39. Интегрирование при помощи степенных рядов и обобщенных степенных рядов</b>	<b>536</b>
190. Представление решений однородного линейного уравнения второго порядка в окрестности обыкновенной точки в виде степенных рядов . . . . .	536
191. Представление решений в окрестности особой точки в виде обобщенных степенных рядов . . . . .	545
192. Уравнение Бесселя . . . . .	555
193. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение . . . . .	572
<b>§ 40. Колебательный характер решений однородных линейных уравнений второго порядка . . . . .</b>	<b>581</b>
194. Колеблющиеся и неколеблющиеся решения . . . . .	581
195. Теорема Штурма . . . . .	586
196. Теорема сравнения . . . . .	587

### *Глава девятая. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

<b>§ 41. Однородные линейные системы . . . . .</b>	<b>603</b>
197. Предварительные замечания . . . . .	603
198. Свойства решений однородной системы . . . . .	606
199. Понятие о линейной независимости систем функций . . . . .	608
200. Необходимое условие линейной зависимости $n$ систем функций . . . . .	610
201. Необходимое и достаточное условие линейной независимости $n$ решений однородной линейной системы $n$ уравнений . . . . .	611
202. Формула Остроградского — Лиувилля — Якоби . . . . .	612
203. Понятие о фундаментальной системе решений . . . . .	613
204. Теорема о существовании фундаментальной системы решений . . . . .	614
205. Построение общего решения . . . . .	615
206. Число линейно независимых решений однородной линейной системы $n$ уравнений. Первые интегралы . . . . .	616
207. Понятие о сопряженной (присоединенной) системе . . . . .	617
208. Построение однородной линейной системы уравнений, имеющей заданную фундаментальную систему решений . . . . .	620
<b>§ 42. Неоднородные линейные системы . . . . .</b>	<b>621</b>
209. Структура общего решения неоднородной системы . . . . .	621
210. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) . . . . .	622

### *Глава десятая. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

<b>§ 43. Метод Эйлера . . . . .</b>	<b>624</b>
211. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы в случае различных корней характеристического уравнения . . . . .	624

212. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения . . .	632
213. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами . . .	641
214. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в случае автономной системы . . .	648
215. Приведение однородной линейной системы к системе с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной . . .	651
216. Интегрирование неоднородной линейной системы с постоянными коэф- фициентами методом вариации произвольных постоянных . . .	653
<b>§ 44. Другие методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффи- циентами . . .</b>	<b>653</b>
217. Интегрирование линейной системы с постоянными коэффициентами при помощи приведения ее к уравнению $n$ -го порядка (метод исключения) . . .	653
218. Метод Даламбера . . .	655
219. Операционный метод решения задачи Коши для линейной системы с по- стоянными коэффициентами . . .	657
<b>§ 45. Линейные системы с постоянными коэффициентами, содержащие производ- ные выше первого порядка . . .</b>	<b>660</b>
220. Метод исключения . . .	660
221. Метод Даламбера . . .	660
 <i>Глава одиннадцатая. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</i>	
<b>§ 46. Некоторые сведения из теории матриц . . .</b>	<b>662</b>
222. Предварительные замечания . . .	662
223. Понятие о матрице . . .	663
224. Алгебраические операции над матрицами . . .	666
225. Характеристические числа матрицы. Элементарные делители матрицы . . .	672
226. Преобразование подобия. Приведение матрицы к каноническому виду . . .	677
227. Дифференцирование и интегрирование матриц . . .	681
228. Понятие о матричном степенном ряде . . .	683
<b>§ 47. Запись и интегрирование однородной линейной системы дифференциальных уравнений в матричной форме . . .</b>	<b>688</b>
229. Построение матричного уравнения, равносильного однородной линейной системе . . .	688
230. Два общих свойства матричного уравнения, соответствующего однород- ной линейной системе . . .	691
231. Основные свойства интегральной матрицы . . .	692
232. Случай Лапко — Данилевского . . .	694
233. Сопряженное (присоединенное) матричное уравнение . . .	695
<b>§ 48. Интегрирование однородной линейной системы с постоянными коэффи- циентами . . .</b>	<b>697</b>
234. Структура фундаментальной системы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Группы решений . . .	697
235. Приведение однородной линейной системы с постоянными коэффи- циентами к каноническому виду . . .	702



236. Вид фундаментальной системы решений однородной линейной системы с периодическими коэффициентами . . . . .	710
237. Понятие о приводимых системах . . . . .	712
<b>§ 49. Интегрирование линейных систем матрично-векторным методом . . . . .</b>	<b>714</b>
238. Матрично-векторная запись линейной системы и ее решение. Задача Коши . . . . .	714
239. Два общих свойства матрично-векторного уравнения, соответствующего линейной системе . . . . .	715
240. Основные свойства решений однородного матрично-векторного уравнения . . . . .	716
241. Линейно независимые решения и построение общего решения однородного матрично-векторного уравнения . . . . .	717
242. Формула Коши для неоднородной линейной системы . . . . .	719
 <i>Глава двенадцатая. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА</i>	
<b>§ 50. Однородное линейное уравнение . . . . .</b>	<b>722</b>
243. Связь между однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка и соответствующей ему системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме . . . . .	722
244. Построение общего решения однородного линейного уравнения . . . . .	725
245. Решение задачи Коши для однородного линейного уравнения . . . . .	729
<b>§ 51. Неоднородное линейное уравнение . . . . .</b>	<b>733</b>
246. Построение общего решения неоднородного линейного уравнения . . . . .	733
247. Решение задачи Коши для неоднородного линейного уравнения . . . . .	736
<b>§ 52. Нелинейные уравнения . . . . .</b>	<b>740</b>
248. Система двух уравнений с частными производными. Условия совместности . . . . .	740
249. Уравнение Пфаффа . . . . .	742
250. Полный интеграл нелинейного уравнения. Метод Лагранжа — Шарпи . . . . .	744
Литература . . . . .	749
Предметный указатель . . . . .	758

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе общего курса лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, который последние десятилетия читался на математико-механическом факультете и читается в настоящее время на факультете прикладной математики — процессов управления Ленинградского государственного ордена Ленина университета имени А. А. Жданова.

При написании книги я ставил перед собой задачу изложить основные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и дать введение в общую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Книга состоит из введения и двенадцати глав.

Во введении дается понятие об основных задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В первой главе рассматриваются уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

Во второй главе изучаются уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

В третьей главе рассматриваются уравнения высших порядков.

Четвертая глава содержит общие вопросы теории систем дифференциальных уравнений.

Во всех главах даются основные понятия и определения и рассматриваются наиболее важные случаи интегрируемости в квадратурах. Вместе с тем при чтении этих глав читатель постепенно вводится в круг общих вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и подготавливается к чтению пятой главы книги.

В пятой — центральной — главе доказываются теорема существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения (теорема Пикара), теорема существования и единственности голоморфного решения (теорема Коши), теорема существования решения уравнения с непрерывной правой частью (теорема Пеано) и теорема существования решения уравнения с правой частью, измеримой по независимой переменной и непрерывной по искомой функции (теорема Каратеодори). Здесь же доказываются теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров и начальных данных, а также теорема о дифференцируемости

решения по начальным данным. В связи с вопросом о зависимости решения от начальных данных дается понятие об устойчивости решения (движения) в смысле А. М. Ляпунова. Доказывается также теорема существования общего решения, рассматривается вопрос об особых точках уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, и освещаются некоторые другие вопросы. На основе теорем существования и единственности снова рассматриваются и выясняются до конца теоретические вопросы, поставленные в предыдущих главах.

Изложение материала в последующих главах уже существенно опирается на теоремы существования и единственности, доказанные в пятой главе.

В шестой главе излагается общая теория линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка.

Седьмая глава посвящена линейным уравнениям  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и уравнениями, приводящимся к ним. Здесь же излагается операционный метод интегрирования линейных уравнений.

В восьмой главе освещаются некоторые дополнительные вопросы теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В том числе, на основе результатов аналитической теории дифференциальных уравнений, рассматривается вопрос об интегрировании при помощи обобщенных степенных рядов и в качестве примеров дается построение решений уравнения Бесселя и гипергеометрического дифференциального уравнения.

Девятая глава посвящена общей теории линейных систем дифференциальных уравнений.

В десятой главе изучаются линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В одиннадцатой главе излагается матричный метод решений однородных линейных систем дифференциальных уравнений. Здесь дается также матрично-векторная запись линейной системы и доказывается формула Коши.

В двенадцатой главе дается понятие об уравнениях с частными производными первого порядка, линейных и нелинейных.

Каждая глава разделена на параграфы, которые в свою очередь разбиты на пункты. Формулы нумеруются в пределах параграфа, а примеры и замечания — в пределах пункта. Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Для логического ударения используется разрядка.

Содержание настоящей книги органически связано с двумя другими нашими книгами [102, 103].

Пользуясь случаем, я обращаюсь с убедительной просьбой ко всем читателям сообщить в адрес издательства свои критические замечания и пожелания.

*Н. М. Матвеев*

## ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где  $F$  — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области;  $x$  — независимая переменная;  $y$  — функция переменной  $x$ , подлежащая определению;  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  — ее производные. При этом предполагается, что  $y^{(n)}$  действительно входит в соотношение (1). Любой же из остальных аргументов функции  $F$  может в этом соотношении явно и не участвовать. Иногда обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка записывают в виде соотношения между аргументом  $x$ , функцией  $y$  и их дифференциалами, но тогда это соотношение должно быть обязательно таким, чтобы оно приводилось к виду (1).

Аналогичное соотношение, связывающее независимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , функцию этих переменных  $u$  и ее частные производные по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$  до порядка  $n$  включительно, называется *уравнением с частными производными  $n$ -го порядка*.

Например, уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид:

$$\Phi \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области;  $u$  — искомая функция от независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$  — частные производные от функции  $u$  по независимым переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем хотя одна из этих частных производных обязательно входит в соотношение (2).

В настоящей книге всюду, где не оговорено противное, рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, причем как

независимая переменная, так и искомые функции предполагаются *вещественными*.

Всякая функция, определенная вместе с соответствующими производными в некоторой области, называется *решением* дифференциального уравнения в этой области, если она обращает его в тождество,\* справедливое для всех точек упомянутой области.

В частности,  $y=y(x)$  будет решением уравнения (1) в интервале  $(a, b)$ , если

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Например, дифференциальным уравнением первого порядка будет

$$y' - 2x = 0 \quad \text{или} \quad y' = 2x. \quad (3)$$

Из интегрального исчисления мы знаем, что все функции, удовлетворяющие уравнению (3) или, как мы теперь скажем, все решения уравнения (3) даются формулой

$$y = x^2 + C \quad (-\infty < x < \infty),$$

где  $C$  — *произвольная постоянная*. Из этой формулы, между прочим, следует, что уравнение (3) имеет не одно, а бесчисленное множество решений (при каждом числовом значении  $C$  получаем свое решение). В гл. 5 доказано, что *уравнение первого порядка при соблюдении некоторых условий вообще имеет семейство решений, зависящее от одного произвольного параметра, а уравнение  $n$ -го порядка имеет семейство решений, зависящее от  $n$  произвольных параметров*. Например, уравнение

$$y^{(n)} = 0$$

имеет семейство решений

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — *произвольные постоянные*.

Получение семейства решений, содержащего произвольные постоянные, представляется весьма важным потому, что мы, располагая значениями этих произвольных постоянных, можем получать решения, удовлетворяющие тем или иным дополнительным условиям.

---

\* Вообще выполнение некоторого тождества относительно переменной  $x$  (или совокупности переменных) мы всегда будем понимать в том смысле, что обе части этого тождества для всех допустимых значений  $x$  (или совокупности переменных) определены и совпадают.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи механики, физики, астрономии и других естественных наук, а также многие проблемы техники. Поясним на примерах, как возникают в исследованиях дифференциальные уравнения.

**Пример 1.** Материальная точка движется по некоторой прямой, причем так, что скорость движения представляет собою известную функцию времени  $f(t)$ . Требуется найти закон движения этой точки, т. е. формулу, определяющую положение точки в зависимости от времени.

Примем упомянутую прямую за ось  $Ox$ . Тогда положение точки определяется одной координатой  $x$  и задача состоит в том, чтобы выразить  $x$  как функцию от  $t$ .

Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \quad (4)$$

Предположим, что  $f(t)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ . Тогда, как известно из интегрального исчисления, все решения уравнения (4) содержатся в формуле

$$x = \int_{t_0}^t f(t) dt + C \quad (a < t < b), \quad (5)$$

где верхний предел интеграла — переменный, нижний предел  $t_0$  есть некоторое фиксированное число из интервала  $(a, b)$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

Так как в формулу (5) входит произвольная постоянная, то мы не получили определенного закона движения точки. Это соответствует известному факту, что задание одной только скорости не определяет полностью закон движения. Формула (5) содержит целое семейство движений, обладающих одним и тем же свойством, выраженным дифференциальным уравнением (4). Это свойство состоит в том, что все движения, определяемые уравнением (4), имеют одну и ту же скорость в любой (но в один и тот же) момент времени  $t$ .

Выделим из семейства движений (5) то движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение  $x_0$  в заданный момент времени  $t_0$ , т. е. найдем решение (движение)  $x = x(t)$ , удовлетворяющее условию

$$x = x_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad \text{или} \quad x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Число  $x_0$  называется *начальным значением искомой функции (начальным положением точки)*, а  $t_0$  — *начальным значением аргумента (начальным моментом времени)*. Числа  $t_0$  и  $x_0$  вместе взятые называются *начальными данными*, а условие (6) — *начальным условием* решения (движения). Подставим в (5) вместо  $t$  и  $x$  соответственно  $t_0$  и  $x_0$ .

Получим  $x_0 = C$ , так что значение произвольной постоянной  $C$  определяется из начального условия и представляет собою в нашем случае начальное значение искомой функции. Заменяя теперь в (5) постоянную  $C$  на  $x_0$ , получаем искомое движение:

$$x = \int_{t_0}^t f(t) dt + x_0 \quad (a < t < b). \quad (7)$$

Действительно, движение, определяемое формулой (7), таково, что  $x = x_0$  при  $t = t_0$ . Формула (7) выражает уже вполне определенный закон движения точки по оси  $Ox$ .

**Пример 2.** Материальная точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести, причем известны ее положение и скорость в некоторый момент времени  $t_0$ . Найти закон движения.

Примем нашу прямую за ось  $Oy$ , начало координат поместим у поверхности Земли, а ось  $Oy$  направим вверх. Обозначим положение точки и скорость в момент времени  $t_0$  соответственно через  $y_0$  и  $v_0$ .

Принимая во внимание механический смысл второй производной, мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \quad (8)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. Наша задача сводится к нахождению того решения  $y = y(t)$  уравнения (8), которое удовлетворяет условиям:

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (9)$$

Числа  $t_0$ ,  $y_0$  и  $v_0$  называются *начальными данными*, а условия (9) — *начальными условиями* решения (движения).

Интегрируя последовательно уравнение (8), получаем:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1; \quad (10)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (11)$$

Формула (11), где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, содержит все решения уравнения (8). Выделим из нее решение, удовлетворяющее начальным условиям (9), где для упрощения дальнейших выкладок будем считать  $t_0 = 0$ . Для этого подставим в (10) и (11) вместо величин  $t$ ,  $y$  и  $\frac{dy}{dt}$  их начальные значения 0,  $y_0$  и  $v_0$ . Получим  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = y_0$ , т. е. значения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  опреде-

ляются из начальных условий (9) и представляют собою в нашем случае начальные значения искомой функции и ее производной. Заменяя теперь в (11)  $C_1$  и  $C_2$  найденными их значениями, получаем

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

Эта формула и дает искомый закон движения.

**Пример 3.** Найти все кривые на плоскости  $(x, y)$ , имеющие кривизну, равную нулю.

Пусть  $y = y(x)$  есть искомая кривая. Тогда из формулы кривизны

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k$$

в силу условия задачи следует, что

$$y'' = 0. \quad (12)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y = C_1 x + C_2.$$

Это всевозможные прямые на плоскости  $(x, y)$ , не параллельные оси  $Oy$ . Прямые вида

$$x = a$$

тоже имеют кривизну, равную нулю. Но они не являются решениями дифференциального уравнения (12).

**Пример 4.** Найти дифференциальное уравнение семейства всех окружностей на плоскости  $(x, y)$ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (13)$$

Здесь три параметра:  $a$ ,  $b$  и  $R$ . Учитывая, что  $y$  есть функция от  $x$ , определяемая уравнением (13), и дифференцируя это уравнение полным образом по  $x$  три раза, находим:

$$\left. \begin{aligned} x-a+(y-b)y' &= 0, \\ 1+y'^2+(y-b)y'' &= 0, \\ 3y'y''+(y-b)y''' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Исключим из четырех уравнений (13), (14) все параметры. Фактически нужно исключить лишь параметр  $b$  из последних двух уравнений, после чего получим искомое дифференциальное уравнение

$$3y'y'' - (1+y'^2)y''' = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.



Подобно тому, как показано в рассмотренных примерах, вообще обыкновенное дифференциальное уравнение может быть получено часто из физических или геометрических соображений либо формально исключением параметров из уравнения  $n$ -параметрического семейства функций и  $n$  равенств, полученных из него последовательным дифференцированием.

Если мы сумеем проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, то тем самым дадим ответы на вопросы задачи, которая привела нас к нему.

Поэтому основной задачей теории интегрирования дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Исключительно большой интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее многочисленных приложений представляет задача нахождения или хотя бы доказательство существования решения, удовлетворяющего заданным условиям.

Заметим, что самую задачу интегрирования дифференциального уравнения можно понимать по-разному. В самой узкой постановке задачи ставится целью выражение искомых функций через элементарные. Эта задача, вообще говоря, не разрешима даже для самого простого уравнения  $y' = f(x)$ , ибо, как известно, не всегда первообразная для элементарной функции представляет собою тоже элементарную функцию. В качестве примера можно взять хотя бы уравнение

$$y' = \frac{\sin x}{x}. \quad (15)$$

Несколько шире постановка задачи, при которой уравнение считается решенным, если оно приведено к *квадратурам* (т. е. операциям взятия неопределенных интегралов). В этом смысле уравнение (15) очевидно разрешимо. Все решения этого уравнения содержатся в формуле

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C.$$

Здесь первый член справа есть какая-нибудь фиксированная первообразная функция для функции  $\frac{\sin x}{x}$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

Вообще под *символом*  $\int f(x) dx$  мы будем понимать какую-нибудь фиксированную первообразную, а постоянную интегрирования будем писать отдельно.

В дальнейшем будет показано, что большое количество уравнений удастся проинтегрировать в квадратурах [71, 185]. При этом под *интегрируемостью данного уравнения в квадратурах* надо понимать представление решения в виде квадратур от элементарных функций и функций, входящих в уравнение.

Однако следует отметить, что уравнения, интегрируемые в квадратурах, составляют лишь незначительную часть всех дифференциальных уравнений. Так, например, очень важное во многих вопросах *уравнение Бесселя*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (16)$$

в общем случае не интегрируется в квадратурах.

В более общей постановке задачи ищется правило вычисления значения искомой функции по заданному значению аргумента, например ищут выражение искомой функции в виде равномерно сходящегося ряда, удовлетворяющего уравнению. В этом смысле, как увидим далее, уравнение (16) разрешимо при любом  $n$ .

Задача *общей теории дифференциальных уравнений* состоит в изучении свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями, непосредственно по виду любого заданного дифференциального уравнения, независимо от интегрируемости последнего в элементарных функциях или в квадратурах.

Устанавливая существование решения, удовлетворяющего тем или иным дополнительным условиям либо обладающего теми или иными свойствами, общая теория обыкновенных дифференциальных уравнений дает во многих случаях и общие методы построения решений, причем в результате применения этих методов иногда удается выделить новые типы уравнений, интегрируемые в элементарных функциях или в квадратурах.

Несмотря на большое количество результатов, полученных в общей теории дифференциальных уравнений, элементарные методы интегрирования по-прежнему остаются важными методами интегрирования.

В настоящей книге излагаются основные методы интегрирования различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, доказаны основные теоремы существования решений (методы доказательства которых позволяют строить приближенные решения\*) и теоремы о зависимости решений от самого уравнения и от начальных данных, а также дается понятие об основных задачах общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

---

\* О приближенных методах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений см. в книгах [17, 36—38, 40, 46, 73, 76, 83, 104, 108, 110, 148, 161, 162].

При изложении различных методов интегрирования мы попытаемся везде, где это возможно, получить решение в виде элементарных функций или квадратур элементарных функций. В тех случаях, когда это невозможно, указываются методы интегрирования в смысле более широкой постановки задачи. При этом используются некоторые результаты общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим в заключение, что обыкновенные дифференциальные уравнения, представляющие сами по себе большой теоретический и практический интерес, являются фундаментом для многих других разделов высшей математики, например для уравнений с частными производными, уравнений математической физики, вариационного исчисления, а также — базой для глубокого изучения механики, физики и других естественных наук.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

#### § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**1. Понятие об уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной.** В соответствии со сказанным во введении, уравнение *первого порядка* имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

В этой главе мы будем рассматривать *уравнение, разрешенное относительно производной*, записывая его в *нормальной форме*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Наряду с этим уравнением мы всегда будем рассматривать *перевернутое уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (1')$$

используя последнее в окрестности тех точек, в которых  $f(x, y)$  обращается в бесконечность.

Во многих случаях оказывается целесообразным вместо уравнений (1) и (1') рассматривать одно равносильное им дифференциальное уравнение

$$dy - f(x, y) dx = 0. \quad (2)$$

Обе переменные  $x$  и  $y$  входят в это уравнение уже равноправно, и любую из них мы можем принять за независимую переменную. Такую форму записи уравнения, разрешенного относительно производной, будем называть *дифференциальной*.

В теории дифференциальных уравнений и ее приложениях встречаются уравнения в *дифференциальной форме* более общего вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (3)$$

Это уравнение равносильно двум уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \quad (4)$$

Иногда уравнение, разрешенное относительно производной, записывают в так называемой *симметрической форме*

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}. \quad (5)$$

Различные формы записи уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, используются как при построении общей теории, так и при интегрировании данного дифференциального уравнения (см. п. 18).

Основные понятия и определения даются, как правило, для уравнения в нормальной форме (1). Для этого же уравнения строится обычно и общая теория, которая легко переносится на уравнения в других формах с учетом возникающих при этом особенностей.

**2. Решение уравнения.** Предположим, что правая часть уравнения (1),  $f(x, y)$ , определена на некотором подмножестве  $A$  вещественной плоскости  $(x, y)$ . Функцию  $y=y(x)$ , определенную в интервале  $(a, b)$ , мы будем называть *решением* уравнения (1) в этом интервале, \* если:

1) существует производная  $y'(x)$  для всех значений  $x$  из интервала  $(a, b)$  \*\* (отсюда следует, что решение  $y=y(x)$  представляет собою функцию, не прерывную во всей области определения);

2) функция  $y=y(x)$  обращает уравнение (1) в тождество

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)), \quad (6)$$

справедливое для всех значений  $x$  из интервала  $(a, b)$ . Это означает, что при любом  $x$  из интервала  $(a, b)$  точка  $(x, y(x))$  принадлежит множеству  $A$  и  $y'(x) = f(x, y(x))$  (см. сноску на с. 16).

Так как наряду с уравнением (1) рассматривается перевернутое уравнение (1'), то и решения  $x=x(y)$  этого перевернутого уравнения естественно присоединять к решениям уравнения (1). В этом смысле в дальнейшем мы будем для краткости называть решения уравнения (1') решениями уравнения (1).

\* Решение  $y=y(x)$  может быть определено и в интервалах вида:  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, \infty)$ .

\*\* В случае, когда решение  $y=y(x)$  определено на интервале, замкнутом с одного или с обоих концов, под производной функции  $y(x)$  на конце интервала мы понимаем соответствующую одностороннюю производную [149, т. I, с. 16].

**Пример 1.** Функция

$$y = e^{2x} + e^x \quad (7)$$

является решением уравнения

$$y' = y + e^{2x} \quad (8)$$

в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо она определена и дифференцируема в этом интервале, и, подставляя (7) в уравнение (8), получаем тождество

$$2e^{2x} + e^x \equiv e^{2x} + e^x + e^{2x},$$

справедливое при всех значениях  $x$ .

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2.$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$y = \frac{1}{1-x}$$

является решением этого уравнения в интервалах  $(-\infty, 1)$  и  $(1, \infty)$ . В самом деле, в каждом из этих интервалов она непрерывна и обращает уравнение в тождество

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' \equiv \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

**З а м е ч а н и е.** Иногда функцию  $y = y(x)$ , обращающую уравнение (1) в тождество (6), т. е. решение уравнения (1), называют *интегралом* этого уравнения. Мы будем употреблять термин *интеграл* только в смысле п. 16.

**3. Неявное и параметрическое задания решения.** Далеко не всегда удастся получить решение дифференциального уравнения в явном виде. Кроме того, явное задание решения и не всегда удобно для его изучения и использования. Поэтому при интегрировании уравнения во многих случаях удовлетворяются получением решения в неявном виде. Мы будем говорить, что уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (9)$$

определяет *в неявной форме решение* уравнения (1), если оно определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ ,  $y = y(x)$ , и если эта последняя является решением уравнения (1).

В этом случае, полагая в (9)  $y = y(x)$ , дифференцируя полученное тождество по  $x$  и заменяя  $\frac{dy}{dx}$  на  $f(x, y)$ , приходим к равенству

$$\Phi_x' + \Phi_y' f(x, y) = 0, \quad (10)$$

которое должно выполняться тождественно в силу соотношения (9).

**Пример 1.** Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}.$$

Возьмем уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (11)$$

и составим равенство (10). Получим

$$2x + 2y \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)} = 0.$$

Это равенство удовлетворяется в силу уравнения (11). Следовательно, последнее определяет в неявной форме решение данного дифференциального уравнения.

Иногда решение уравнения (1) получается в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (12)$$

Мы будем говорить, что уравнения (12) определяют *решение* уравнения (1) *в параметрической форме* в интервале  $(t_0, t_1)$ , если в этом интервале имеет место тождество

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t), \psi(t)).$$

**Пример 2.** Уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

определяют решение уравнения

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

в интервале  $[0, 2\pi]$ , ибо в этом интервале имеет место тождество \*

$$\frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{a \cos t}{b \sin t}.$$

**4. Геометрическое истолкование.** Будем рассматривать  $x$  и  $y$  как прямоугольные координаты на плоскости. Тогда решению  $y = \varphi(x)$ ,  $\Phi(x, y) = 0$  или  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  уравнения (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

будет соответствовать некоторая кривая, которая называется *интегральной кривой* этого уравнения. Иногда сама интегральная кривая называется *решением*. Каков геометрический смысл интегральных кри-

---

\* Причем для  $t=0$ ,  $t=\pi$ ,  $t=2\pi$  нужно рассматривать перевернутое тождество, соответствующее перевернутому уравнению  $x y' = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}$ .

вых? Чем выделяются они среди всевозможных кривых, которые мы можем провести на плоскости?

Будем предполагать, что интегральные кривые, о которых идет речь, существуют. Вопрос об условиях существования интегральных кривых мы рассматриваем в пп. 6 и 7.

Предположим, что правая часть уравнения (1) определена и конечна в каждой точке некоторой области  $G^*$  изменения  $x$  и  $y$  (рис. 1).

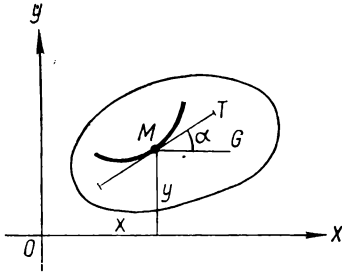


Рис. 1

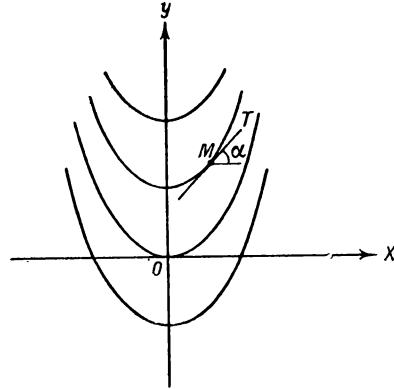


Рис. 2

Проведем через каждую точку  $M(x, y)$  этой области отрезок (для определенности будем считать, что этот отрезок *единичный*, т. е. длина его равна единице, и что середина его лежит в точке  $M(x, y)$ ), составляющий с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ , тангенс которого равен значению правой части уравнения (1) в этой точке,  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ , причем оба направления указанного отрезка для нас безразличны. Таким образом, можно считать, что уравнение (1) определяет некоторое *поле направлений*.

Тогда уравнение (1) выражает геометрически тот факт, что направление касательной в каждой точке интегральной кривой совпадает с направлением поля в этой точке. Это свойство и выделяет интегральные кривые среди всех прочих кривых.

\* Под областью  $G$  вообще мы будем понимать непустое множество  $G$  точек, обладающее двумя свойствами: 1) каждая точка множества  $G$  есть *внутренняя*, т. е. принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью; 2) множество  $G$  *связно*, т. е. каждые две точки этого множества можно соединить ломаной, состоящей из конечного числа звеньев, которая целиком лежит внутри  $G$ .

Совокупность точек, которые являются предельными для точек области  $G$ , но не принадлежат ей, называется *границей* области  $G$ .

Область  $G$  вместе с ее границей называется *замкнутой областью*  $G$  или *замыканием* области  $G$ .



Всякое дифференциальное уравнение первого порядка выражает некоторое общее свойство касательных всех его интегральных кривых. Задача интегрирования состоит в том, чтобы по этому свойству восстановить само семейство интегральных кривых.

**Пример 1.** Возьмем уравнение

$$y' = 2x. \quad (13)$$

Ему удовлетворяет функция  $y = x^2$ , которой соответствует парабола с вершиной в начале координат, но ему удовлетворяет и всякая функция вида  $y = x^2 + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, т. е. интегральные кривые составляют целое семейство парабол (рис. 2). Все они обладают одним общим свойством: в каждой точке  $M(x, y)$  любой интегральной кривой угловой коэффициент касательной  $MT$  равен удвоенной абсциссе этой точки:  $\operatorname{tg} \alpha = 2x$ .

Кривая, в каждой точке которой наклон поля, определяемого дифференциальным уравнением (1), один и тот же, называется *изоклиной* этого уравнения. Уравнение изоклины имеет вид

$$f(x, y) = k,$$

где  $k$  — постоянное число.

**Пример 2.** Рассмотрим вопрос об изоклинах уравнения (13). Приравняв правую часть постоянному числу  $k$ , видим, что изоклинами являются прямые, параллельные оси  $Oy$ . В частности, во всех точках прямой  $x = \frac{1}{2}$  наклон поля будет равен 1, так что касательные ко всем интегральным кривым, пересекающим эту прямую, образуют угол  $\frac{\pi}{4}$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Используя достаточно «густое» семейство

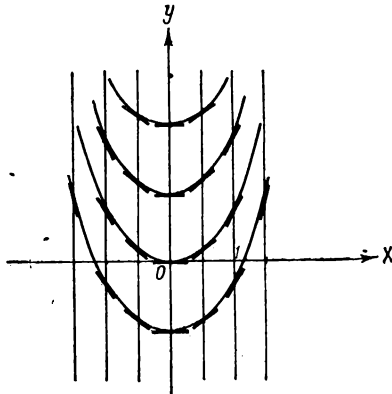


Рис. 3

изоклин, мы можем получить отчетливое представление об интегральных кривых уравнения (13) (рис. 3).

Если в уравнении (1) правая часть сохраняет положительный (отрицательный) знак, то всякое решение уравнения возрастает (убывает) в каждой своей точке, так что все интегральные кривые направлены вверх (вниз). Линия, обладающая тем свойством, что через каждую точку ее проходит интегральная кривая и последняя (если она не совпадает с этой линией) имеет в этой точке экстремум, называется *линией экстремумов*.

В примере 1 линией экстремумов, а именно линией минимумов является, очевидно, ось  $Oy$  ( $x = 0$ ), ибо на ней  $y' = 0$ , а слева и справа от нее  $y'$  имеет соответственно знаки минус и плюс.

Если вторая производная от  $y$  в силу уравнения (1), т. е. функция

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y),$$

сохраняет положительный (отрицательный) знак, то всякая интегральная кривая вогнута вверх (вниз). Линия, в точках которой интегральные кривые имеют перегиб, называется *линией точек перегиба*.

Мы предполагали выше, что  $f(x, y)$  конечна в каждой точке рассматриваемой области  $G$ . Тем самым мы исключали направления, параллельные оси  $Oy$ . Геометрически это исключение никак не может быть оправдано. Чтобы принять во внимание и эти направления, мы всегда будем, как уже сказано в п. 1, наряду с уравнением (1) рассматривать уравнение (1')

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)},$$

используя его в окрестности тех точек, в которых  $f(x, y)$  обращается в бесконечность.

Если правая часть уравнения (1) обращается в некоторой точке  $(x_0, y_0)$  в неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  (которая не раскрывается), то и правая часть уравнения (1') имеет в этой точке неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . В таком случае мы будем говорить, что в этой точке поле не определено и что через нее не проходит ни одна интегральная кривая. Это не исключает возможности существования интегральных кривых вида  $y = y(x)$  или  $x = x(y)$ , обладающих соответственно свойством

$$y(x) \rightarrow y_0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0$$

или

$$x(y) \rightarrow x_0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow y_0.$$

Относительно таких интегральных кривых мы будем говорить, что они *примыкают* к точке  $(x_0, y_0)$ .

В соответствии с этим мы считаем, что ни одна интегральная кривая уравнения (4) не проходит через такую точку  $(x_0, y_0)$ , в которой  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  одновременно обращаются в нуль. Речь может идти лишь об интегральных кривых, примыкающих к такой точке.

**Пример 3.** Построить поле направлений и найти интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \quad (14)$$

Здесь в точке  $x=0$ ,  $y=0$  поле не определено. Для точек  $x=0$ ,  $y \neq 0$  будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}. \quad (14')$$

Очевидно, что в каждой точке  $(x, y)$  [ $\neq (0, 0)$ ] направление поля совпадает с направлением прямой, проходящей через эту точку и начало координат (рис. 4, а).

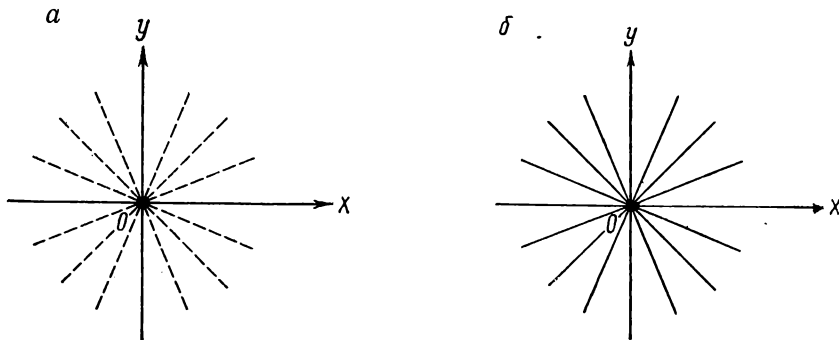


Рис. 4

Поэтому интегральными кривыми являются полупрямые

$$y = kx \quad (x \neq 0).$$

Верхняя и нижняя части оси  $Oy$

$$x = 0 \quad (y \neq 0)$$

тоже являются интегральными кривыми, что вытекает из рассмотрения уравнения (14').

Таким образом интегральными кривыми уравнения (14) являются все полупрямые, выходящие из начала координат (рис. 4, б).<sup>\*</sup> Эти же полупрямые будут очевидно изоклинами.

**Пример 4.** Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (15)$$

Здесь в точке  $x=0$ ,  $y=0$  поле также не определено, а для точек  $x \neq 0$ ,  $y=0$  следует рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \quad (15')$$

Изоклинами служат также полупрямые, выходящие из начала координат, как и в предыдущем примере. Но если там каждая изоклина была интегральной кривой, то здесь ни одна из них не является интегральной кривой.

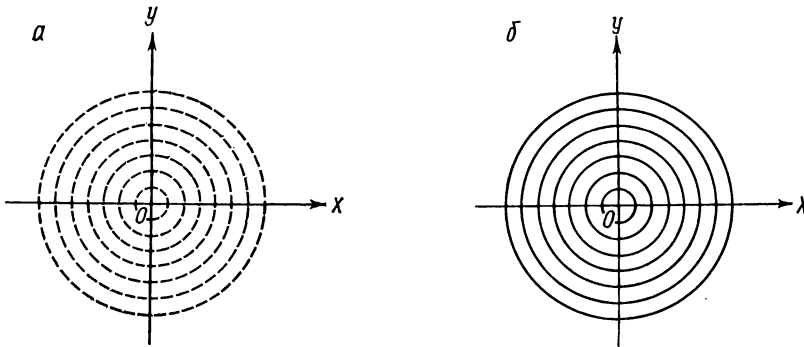
---

<sup>\*</sup> Интегральными кривыми уравнения  $ydx - xdy = 0$ , эквивалентного уравнениям (14) и (14'), являются те же полупрямые, выходящие из начала координат.

Сравнивая правые части уравнений (14) и (15), мы видим, что поле, определяемое уравнением (15) (рис. 5, а), ортогонально к полю, определяемому уравнением (14) (рис. 4, а), т. е. в каждой точке  $(x, y)$  направления, задаваемые этими уравнениями, взаимно перпендикулярны. Поэтому интегральными кривыми уравнения (15) являются окружности с центром в начале координат (рис. 5, б)

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Через точку  $(0, 0)$  не проходит и к ней не примыкает ни одна интегральная кривая, а в точках пересечения интегральных кривых с осью  $Ox$  касательные параллельны оси  $Oy$ , что согласуется с направлением поля в этих точках, если принять во внимание уравнение (15').



Р и с. 5

**5. Задача Коши.** Одной из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений является так называемая задача Коши. Для уравнения (2)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

*задача Коши*, или *начальная задача*, ставится следующим образом: среди всех решений уравнения (1) найти такое решение

$$y = y(x), \quad (16)$$

в котором функция  $y(x)$  принимает заданное числовое значение  $y_0$  при заданном числовом значении  $x_0$  независимой переменной  $x$ , т. е.

$$y(x_0) = y_0,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — заданные числа, так что решение (16) удовлетворяет условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (17)$$

При этом число  $y_0$  называется *начальным значением искомой функции*, а число  $x_0$  — *начальным значением независимой переменной*. В целом же числа  $x_0$  и  $y_0$  называются *начальными данными* решения (16), а условие (17) — *начальным условием* этого решения.

Задачу Коши геометрически можно сформулировать так: среди всех интегральных кривых уравнения (1) найти ту (рис. 6), которая проходит через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

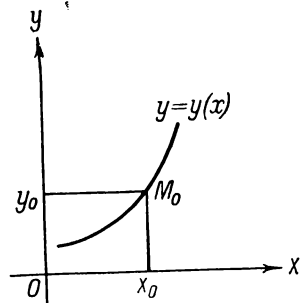


Рис. 6

Будем говорить, что *задача Коши с начальным условием (17) имеет единственное решение*, если существует такое число  $h > 0$ , что в интервале  $|x - x_0| \leq h$  определено решение  $y = y(x)$  такое, что  $y(x_0) = y_0$ , и не существует решения, определенного в этом же интервале и не совпадающего с решением  $y = y(x)$  хотя бы в одной точке интервала  $|x - x_0| \leq h$ , отличной от точки  $x = x_0$ . В противном случае, т. е. когда задача Коши с начальным условием (17) имеет не одно решение или же совсем не имеет решения, мы будем говорить, что в точке  $(x_0, y_0)$  *нарушается единственность решения задачи Коши*.

Вопрос о единственности решения задачи Коши представляет исключительный интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее многочисленных приложений, ибо, зная, что решение задачи Коши единственно, мы, найдя решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, уверены, что других решений, удовлетворяющих тем же начальным условиям, нет. В вопросах естествознания это приводит к тому, что мы получаем вполне определенный, единственный закон явления, определяемый только дифференциальным уравнением и начальным условием. Иллюстрацией сказанного может служить хотя бы пример 1, рассмотренный во введении.

Заметим, что в простейшем случае задача Коши встречается уже в интегральном исчислении, именно там, по существу, доказывается, что если функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ , то единственным решением *простейшего дифференциального уравнения*

$$y' = f(x), \quad (18)$$

принимаям значение  $y_0$  при  $x = x_0$ , где  $x_0$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ , а  $y_0$  — любое заданное число, является функция (ср. введение, пример 1, формула (7))

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0. \quad (19)$$

Это решение определено во всем интервале  $(a, b)$ .

Из формулы (19) легко усмотреть характер зависимости решения рассматриваемой задачи Коши как от независимой переменной, так и от начальных данных.

Прежде всего из курса анализа известно, что решение (19) является непрерывно дифференцируемой\* функцией от независимой переменной  $x$ . Геометрически это означает, что через точку  $(x_0, y_0)$  проходит одна и только одна интегральная кривая. Эта интегральная кривая гладкая.\*\* Она пересекается со всякой прямой, параллельной оси  $Oy$ , не более чем в одной точке.

Из формулы (19) видно также, что решение задачи Коши для уравнения (18) является непрерывной и даже непрерывно дифференцируемой функцией начальных данных  $x_0$  и  $y_0$ .

Особые случаи задачи Коши. При постановке задачи Коши с начальными данными  $x_0, y_0$  мы неявно предполагали, что числа  $x_0$  и  $y_0$  конечны и что правая часть уравнения (1) определена и конечна в точке  $(x_0, y_0)$ , т. е. уравнение (1) задает в точке  $(x_0, y_0)$  определенное направление поля, причем последнее не параллельно оси  $Oy$ . Если правая часть уравнения (1) обращается в точке  $(x_0, y_0)$  в бесконечность, то следует рассматривать перевернутое уравнение (1')

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

и искать решение  $x=x(y)$  (рис. 7), удовлетворяющее начальному условию  $x=x_0$  при  $y=y_0$ . Единственная «особенность» решения этой задачи Коши состоит только в том, что в точке  $M_0(x_0, y_0)$  касательная к интегральной кривой параллельна оси  $Oy$ .

Совсем другое положение мы будем иметь, если в точке  $(x_0, y_0)$  правая часть уравнения (1) не определена. Предположим, что  $f(x, y)$  обращается в точке  $(x_0, y_0)$  в неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Тогда обычная

постановка задачи Коши теряет смысл, так как через точку  $(x_0, y_0)$  не проходит ни одна интегральная кривая. В этом случае задача Коши ставится так: найти решение вида  $y=y(x)$  (или  $x=x(y)$ ), примыкающее к точке  $(x_0, y_0)$ .

Здесь, так же как и в основном случае задачи Коши, возникают вопросы существования и единственности решения.

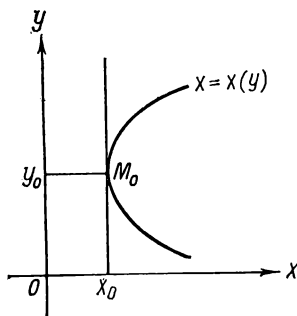
Кроме того, здесь возникают и дополнительные вопросы: 1) имеют ли решения, примыкающие к точке  $(x_0, y_0)$ , определенную касательную?

\* Функция называется *непрерывно дифференцируемой*, если она имеет непрерывную первую производную.

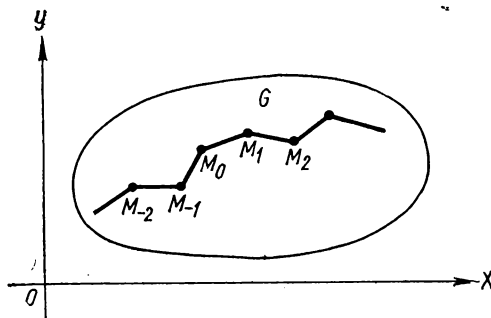
\*\* Кривая называется *гладкой*, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную.

тельную в этой точке? Дело в том, что само уравнение (1) в этом случае не предписывает никакого определенного направления касательной в такой точке  $(x_0, y_0)$ ; 2) если интегральные кривые примыкают к точке  $(x_0, y_0)$  с определенными направлениями касательной, то каковы эти направления? Сколько кривых примыкает с каждым из направлений?

В примерах 3 и 4, рассмотренных в п. 4, все интегральные кривые уравнения (14) примыкают к точке  $(0, 0)$  (где правая часть обращается в неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ), имея в ней каждая свою касательную, в то время как ни одна из интегральных кривых уравнения (15) не примыкает к точке  $(0, 0)$ , так что для этого уравнения задача Коши с начальными данными  $x_0=0, y_0=0$  не имеет ни одного решения.



Р и с. 7



Р и с. 8

В некоторых случаях возникает необходимость искать решения  $y=y(x)$ , удовлетворяющие условиям:

$$y \rightarrow y_0 (\neq \infty) \text{ при } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow x_0 (\neq \infty)$$

или

$$y \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Указанные выше особые случаи задачи Коши исследуются в аналитической теории дифференциальных уравнений и в качественной теории дифференциальных уравнений.

Во всех случаях задачи Коши наряду с вопросами существования и единственности возникают вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной (аналитический вид, дифференциальные и геометрические свойства и особенности поведения во всей области существования) и как функции начальных данных  $x$ . Рассмотрение этих вопросов составляет одну из основных задач теории дифференциальных уравнений.

**6. Достаточное условие существования решения задачи Коши.** Предположим, что правая часть уравнения (1) определена и непрерывна в некоторой области  $G$  изменения  $x$  и  $y$ . Тогда, как уже отмечалось раньше (п. 4), уравнение (1) определяет некоторое поле направлений, причем в силу только что сделанного предположения о непрерывности правой части уравнения (1) это поле направлений непрерывно, так что направления в двух достаточно близких точках разнятся сколь угодно мало. Заметим, что из сделанного предположения о непрерывности правой части уравнения (1) следует, что всякое решение этого уравнения (если оно существует) будет непрерывно дифференцируемым, так что всякая интегральная кривая будет гладкой. Всякая интегральная кривая, как уже было сказано в п. 4, обладает тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с направлением поля, определяемым дифференциальным уравнением в этой точке. Попытаемся, пользуясь этим свойством интегральной кривой, найти решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными  $x_0, y_0$  из области  $G$ .

Возьмем в области  $G$  некоторую точку  $M_0(x_0, y_0)$  (рис. 8). Наклон поля в этой точке равен  $f(x_0, y_0)$ . Проведем через точку  $M_0(x_0, y_0)$  прямую с угловым коэффициентом  $f(x_0, y_0)$ . На этой прямой возьмем любую точку  $M_1(x_1, y_1)$ , принадлежащую области  $G$ , и через нее проведем прямую с угловым коэффициентом, равным наклону поля в этой точке, т. е.  $f(x_1, y_1)$ . На последней прямой возьмем любую точку  $M_2(x_2, y_2)$ , принадлежащую области  $G$ , и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом  $f(x_2, y_2)$  и т. д. Такое же построение можно сделать и влево от точки  $x = x_0$ . Построенная ломаная линия называется *ломаной Эйлера*.

Ясно, что можно построить бесчисленное множество ломаных Эйлера, проходящих через точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Каждая из этих ломаных с достаточно короткими звеньями дает некоторое представление об интегральной кривой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , если эта интегральная кривая существует. Естественно ожидать, что мы можем построить последовательность ломаных Эйлера, имеющую своим пределом (когда длины всех звеньев ломаной стремятся к нулю, а их число стремится к бесконечности) интегральную кривую, проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Можно доказать (см. гл. 5, п. 154), что при сделанном предположении относительно  $f(x, y)$  это действительно имеет место, так что *для существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для уравнения (1) достаточно предположить, что его правая часть непрерывна в окрестности начальных данных* (теорема Пеано).

Заметим, однако, что не исключена возможность существования нескольких последовательностей ломаных Эйлера, проходящих через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , каждая из которых стремится к своей интегральной кривой, так что в общем случае нет оснований ожидать, что мы получим единственную интегральную кривую, проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$ .



Более того, как показал М. А. Лаврентьев [178], единственность решения может нарушаться даже во всех точках непрерывности правой части уравнения (1).

Таким образом, теорема Пеано есть только теорема существования решения задачи Коши. Единственности решения она не гарантирует.

В этой книге рассматриваются только непрерывно дифференцируемые решения.

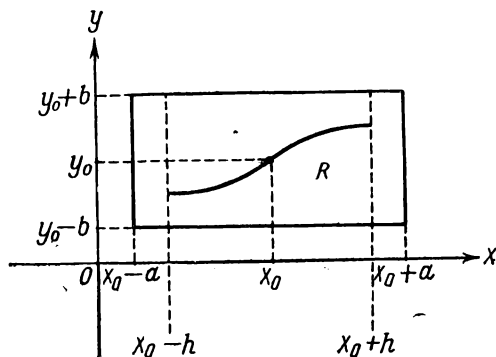


Рис. 9

**7. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.** Поставим вопрос: каким условиям достаточно подчинить правую часть уравнения (1) в окрестности начальных данных  $x_0, y_0$ , чтобы через точку  $(x_0, y_0)$  проходила одна и только одна интегральная кривая этого уравнения? В общем виде этот вопрос мы рассматриваем в гл. 5, где при некоторых предположениях относительно правой части уравнения (1) мы доказываем существование и единственность решения задачи Коши и показываем, что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами правой части уравнения (1) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для уравнения (1) в упрощенной формулировке.

**Теорема.** Пусть дано уравнение (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и поставлено начальное условие (17)

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$

Предположим, что функция  $f(x, y)$  определена в некоторой замкнутой ограниченной области (рис. 9)

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

с точкой  $(x_0, y_0)$  внутри ( $a$  и  $b$  — заданные положительные числа) и удовлетворяет в ней следующим двум условиям.

1. Функция  $f(x, y)$  непрерывна и, следовательно, ограничена, т. е.

$$|f(x, y)| \leq M,$$

где  $M$  — положительное число, а  $(x, y)$  — любая точка области  $R$ .

2. Функция  $f(x, y)$  имеет ограниченную частную производную по аргументу  $y$ , т. е.

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K,$$

где  $K$  — положительное число, а  $(x, y)$  — любая точка области  $R$ .

При этих предположениях уравнение (1) имеет единственное решение (16)

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальному условию (17). Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности начального значения  $x_0$  независимой переменной  $x$ , а именно оно заведомо определено в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где  $h$  есть наименьшее из чисел  $a$  и  $\frac{b}{M}$ ,

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что если правая часть уравнения (1) есть полином относительно  $x$  и  $y$  или любая другая функция, определенная и непрерывная относительно  $x$  и  $y$  вместе с частной производной по  $y$  при всех значениях  $x$  и  $y$ , то через любую точку  $(x_0, y_0)$  проходит одна и только одна интегральная кривая, ибо во всяком прямоугольнике  $R$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$  оба условия теоремы Пикара будут очевидно выполнены. В этом случае вся плоскость  $(x, y)$  будет заполнена не пересекающимися и не касающимися друг друга гладкими интегральными кривыми.

**Пример 1.** Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (20)$$

и поставлено начальное условие

$$y=0 \quad \text{при} \quad x=0. \quad (21)$$

Так как правая часть уравнения (20) есть полином относительно  $x$  и  $y$ , то решение с любыми начальными условиями, в том числе и с начальным условием (21), существует и единственно.

Оценим область определения решения с начальным условием (21). С этой целью построим прямоугольник  $R$  с центром в точке  $(0, 0)$

$$R: |x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

причем в качестве  $a$  и  $b$  можно взять любые положительные числа. Тогда

$$M = a^2 + b^2, \quad h = \min \left( a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Отсюда видно, что  $h$  зависит от выбора чисел  $a$  и  $b$ .<sup>\*</sup> В частности, при  $a=b=1$ , получим

$$h = \min \left( 1, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Поэтому уравнение (20) имеет единственное решение, заведомо определенное в интервале  $|x| \leq \frac{1}{2}$  и удовлетворяющее начальному условию (21). Это решение непрерывно дифференцируемо.

С геометрической точки зрения полученный результат означает, что уравнение (20) имеет только одну интегральную кривую, проходящую через начало координат, причем эта интегральная кривая гладкая.

Этот результат приобретает особое значение, если принять во внимание, что уравнение (20) не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах от элементарных функций, в чем мы убедимся в п. 51. Установленный факт существования и единственности решения дает нам основание пытаться искать его другими методами и в том числе находить это решение приближенно.

**Пример 2.** Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy), \quad (22)$$

удовлетворяющее начальному условию (21).

Так как правая часть уравнения (22) вместе с ее частной производной по  $y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$ , непрерывна при всех  $x$  и  $y$ , то через каждую точку плоскости  $(x, y)$

<sup>\*</sup> Наибольшим значением  $h$  будет

$$h_0 = \max_{a, b} \min \left( a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

проходит единственная интегральная кривая. Это же будет иметь место и в начале координат. Но легко заметить, что  $y \equiv 0$  (ось  $Ox$ ) есть решение уравнения (22) и это решение проходит через начало координат, так что оно и будет искомым решением. В силу только что установленной единственности решения уравнение (22) не имеет других решений, проходящих через начало координат.

Вообще, если в уравнении (1) функция  $f(x, y)$  удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара в некоторой окрестности заданной точки  $(x_0, y_0)$  и такова, что  $f(x, y_0) \equiv 0$  вблизи точки  $x = x_0$ , то единственным решением этого уравнения, проходящим через точку  $(x_0, y_0)$ , будет прямая  $y = y_0$ .

**8. Общее решение.** На примерах, рассмотренных ранее, мы уже видели, что дифференциальное уравнение (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

может иметь бесконечное множество решений. Семейство решений уравнения (1), зависящее от одной произвольной постоянной  $C$ ,

$$y = \omega(x, C) \quad (23)$$

называют обычно *общим решением* этого уравнения. Геометрически оно представляет собою семейство интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ , зависящее от одного параметра  $C$ , причем уравнение этого семейства разрешено относительно  $y$ . При каждом значении произвольной постоянной (параметра)  $C$  (из числа допустимых) формула (23) дает решение (интегральную кривую) уравнения (1).

Формула (23) позволяет, вообще говоря, решать задачу Коши для уравнения (1), т. е. находить решение, удовлетворяющее заданному начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной  $C$ .

С этой целью подставляют в формулу (23) вместо  $x$  и  $y$  числа  $x_0$  и  $y_0$ , решают полученное уравнение  $y_0 = \omega(x_0, C)$  относительно  $C$  и подставляют найденное значение  $C = C_0$  в формулу (23), в результате чего получают искомое решение в виде  $y = \omega(x, C_0)$ .

Однако при этом в общем случае не гарантируется ни разрешимость уравнения  $y_0 = \omega(x_0, C)$  относительно  $C$ , ни единственность найденного решения задачи Коши. Чтобы гарантировать и то и другое, нужно наложить на функцию  $y = \omega(x, C)$  некоторые ограничения, при которых формула (23) была бы пригодна для решения задачи Коши с любыми начальными данными  $x_0, y_0$  из некоторой области  $D$  изменения переменных  $x$  и  $y$ , и чтобы это решение было единственным.

Ниже мы даем определение общего решения уравнения (1) в области  $D$  изменения переменных  $x, y$ .\*

---

\* Формулировка этого определения общего решения принадлежит Н. П. Егину [53].

В качестве области  $D$  мы будем рассматривать некоторую область на плоскости  $(x, y)$ , через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1), так что в каждой точке  $(x, y)$  области  $D$  имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1). При этом область  $D$  есть либо все множество точек существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1), либо его часть.\*

Функцию

$$y = \varphi(x, C), \quad (24)$$

определенную в некоторой области изменения переменных  $x$  и  $C$ ,\*\* имеющую непрерывную частную производную по независимой переменной  $x$ , будем называть *общим решением* уравнения (1) в области  $D$ , если равенство (24) разрешимо относительно произвольной постоянной  $C$  в области  $D$ , так что при любых значениях  $x$  и  $y$ , принадлежащих области  $D$ ,\*\*\* равенством (24) определяется значение  $C$  по формуле \*\*\*\*

$$C = \psi(x, y) \quad (25)$$

и, если функция (24) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной  $C$ , доставляемых формулой (25), когда точка  $(x, y)$  пробегает область  $D$ .\*\*\*\*\*

Суть этого определения состоит в следующем. Пусть дано семейство кривых  $F$ , расположенных в  $D$  и зависящих от одного параметра  $C$ . Если про каждую кривую из  $F$  известно, что она является интегральной кривой уравнения (1) и все кривые из  $F$  в их совокупности покрывают  $D$ , то  $F$  есть общее решение уравнения (1) в области  $D$ .

Формула общего решения (24) дает возможность за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной  $C$  решить любую задачу Коши для уравнения (1) в области  $D$ , т. е. найти решение уравнения (1), определяемое начальными данными  $x_0, y_0$ , причем  $(x_0, y_0)$  — любая точка области  $D$ .

Для нахождения этого решения поступаем, как указано выше. Подставим в формулу (24) вместо  $x$  и  $y$  начальные данные  $x_0$  и  $y_0$ :

$$y_0 = \varphi(x_0, C).$$

---

\* Может случиться, что множество точек существования и единственности для уравнения (1) распадается на несколько областей, в каждой из которых уравнение (1) имеет свое общее решение.

\*\* Мы предполагаем, что множество  $S$  точек  $(x, C)$ , на котором определена функция (24) таково, что любое сечение  $C = C_0 = \text{const}$  этого множества, т. е. совокупность всех  $x$  таких, что точка  $(x, C_0)$  принадлежит  $S$ , представляет собою некоторый интервал оси  $Ox$ .

\*\*\* Т. е. во всякой точке  $(x, y)$ , лежащей внутри области  $D$ , но не на ее границе.

\*\*\*\*  $C = \psi(x, y)$ , вообще говоря, — многозначная функция.

\*\*\*\*\* При этом в качестве  $C$  мы допускаем и несобственные числа  $\pm\infty$ .

Найдем отсюда

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0.$$

Подставим это значение  $C$  в формулу (24). Получим

$$y = \varphi(x, C_0). \quad (24')$$

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными  $x_0, y_0$  нет.

Иногда в формуле общего решения (24) роль произвольной постоянной  $C$  играет начальное значение  $y_0$  искомой функции  $y$  при некотором фиксированном значении  $x_0$  аргумента  $x$ , так что формула (24) принимает следующий вид:

$$y = y(x, x_0, y_0).$$

Такая форма записи общего решения называется *общим решением в форме Коши*.

**Пример.** Рассмотрим уравнение (14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Покажем, что

$$y = Cx \quad (x \neq 0) \quad (24'')$$

является общим решением уравнения (14) в области

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \quad (26)$$

Прежде всего, легко видеть, что в области (26) имеет место существование и единственность решения задачи Коши.\* Далее, уравнение (24'') разрешимо в области (26) относительно  $C$ :

$$C = \frac{y}{x}. \quad (27)$$

Наконец, очевидно, что функция (24'') является решением уравнения (14) при всех значениях  $C$ , доставляемых формулой (27), когда точка  $(x, y)$  пробегает область (26). Следовательно, (24'') есть общее решение уравнения (14) в области (26).

Найдем решение уравнения (14), удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (x_0 > 0).$$

Полагая в общем решении (24'')  $x = x_0, y = y_0$ , имеем

$$y_0 = Cx_0,$$

---

\* Это следует из того, что правая часть уравнения (14) непрерывна относительно  $x$  и  $y$  в области (26) и в окрестности каждой точки  $(x, y)$  из этой области ее частная производная по  $y$  ограничена.

откуда

$$C = \frac{y_0}{x_0} \equiv C_0.$$

Подставляя это значение  $C$  в общее решение (24), находим

$$y = \frac{y_0}{x_0} x. \quad (28)$$

Это и есть искомое решение. Других решений, удовлетворяющих поставленному начальному условию, нет.

Заметим, что функция (28) будет общим решением уравнения (14) в форме Коши в области (26), если рассматривать в ней  $y_0$  как произвольную постоянную.

**9. Общий интеграл. Общее решение в параметрической форме.** В большинстве случаев, интегрируя уравнение (1), мы получаем общее решение (однопараметрическое семейство интегральных кривых) в неявном виде (в виде, не разрешенном относительно  $y$ ):

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (29)$$

или

$$\psi(x, y) = C. \quad (30)$$

Такая форма общего решения уравнения (1) называется обычно *общим интегралом* этого уравнения.

Будем называть соотношение (29) или (30) *общим решением в неявной форме* или *общим интегралом* уравнения (1) в области  $D$ , если это соотношение определяет общее решение (24)

$$y = \varphi(x, C)$$

уравнения (1) в области  $D$ .

Из этого определения следует, что (25) есть общий интеграл уравнения (1) в области  $D$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение (15)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Мы уже знаем (п. 4), что интегральными кривыми этого уравнения являются окружности

$$x^2 + y^2 = C \quad (C = R^2), \quad (31)$$

причем через каждую точку плоскости  $(x, y)$ , кроме начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (15). Соотношение (31) является общим интегралом уравнения (15). Оно будет общим интегралом в каждой из полуплоскостей. В самом деле, соотношение (31) определяет общие решения вида  $y = \varphi(x, C)$  в каждой

из этих областей, а именно

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

— общее решение в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), и

$$y = -\sqrt{C - x^2}$$

— общее решение в нижней полуплоскости ( $y < 0$ ).

Иногда, интегрируя дифференциальное уравнение (1), получают семейство интегральных кривых, зависящее от одной произвольной постоянной  $C$ , в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t, C), \\ y &= \psi(t, C). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением* уравнения (1) *в параметрической форме*.

Если из уравнений (32) удастся исключить параметр  $t$ , то получают общее решение в неявном или даже в явном виде.

**Пример.** Уравнение (15)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

имеет следующее общее решение в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \cos t, \\ y &= C \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Исключая параметр  $t$ , получим общий интеграл

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

**10. Частное решение.** Если решение уравнения (1) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этого уравнения, то такое решение мы будем называть *частным решением*.

Решение, получающееся из формулы общего решения (24) при частном числовом значении произвольной постоянной  $C$ , включая  $\pm\infty$ , является, очевидно, частным решением. При этом, если множество  $D$ , на котором определено рассматриваемое общее решение, не совпадает со всем множеством точек существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1), то формула этого общего решения содержит в себе не все частные решения уравнения (1), а только их часть. Остальные частные решения включены в формулы других общих решений уравнения (1).



*Решение, определяемое теоремой Пикара, является частным решением*, ибо в каждой точке этого решения имеет место единственность решения задачи Коши для данного уравнения.

Решая задачу Коши при помощи формулы общего решения (24) с начальными данными из области  $D$ , мы всегда получаем частное решение, так что решение (24') есть частное.

**Пример.** Рассмотрим уравнение (13)

$$\begin{aligned} y' &= 2x. \\ \text{Очевидно, что} \quad y &= x^2 + C \end{aligned} \quad (33)$$

есть общее решение этого уравнения в области

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$

т. е. на всей плоскости  $(x, y)$ .

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Полагая в (33)  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , имеем:  $y_0 = x_0^2 + C$ , откуда  $C = y_0 - x_0^2$ . Подставляя это значение  $C$  в общее решение (33), получаем

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2.$$

Это и есть искомое решение. Оно является частным решением.

**11. Особое решение.** Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, будем называть *особым решением*.

Геометрически особому решению соответствует интегральная кривая, не содержащаяся в семействе интегральных кривых, составляющих общее решение (общий интеграл). Поэтому особое решение не может лежать внутри области  $D$  существования общего решения.

Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения (общего интеграла) ни при каком числовом значении произвольной постоянной  $C$ , включая  $\pm\infty$ . Оно может получаться из формулы общего решения, определенного в области  $D$ , лишь при замене  $C$  на некоторую функцию от  $x$ ,  $C = C(x)$ .\*

Заметим, что существуют решения, которые не являются ни частными, ни особыми. В частности, если уравнение имеет частные и особые решения, то упомянутые выше решения можно получить, склеивая куски частных и особых решений и т. д. В дальнейшем на решениях, получающихся через склейку, мы не задерживаем внимания читателя.

---

\* Это надо понимать в том смысле, что если мы разрешим формулу общего решения (24) относительно  $C$ , то функция  $C = \psi(x, y)$  стремится к функции  $C(x)$ , когда точка  $(x, y)$  стремится изнутри  $D$  к точке  $(x, y(x))$ , лежащей на особом решении  $y = y(x)$ , если последнее представляет собою границу области  $D$  (см. приведенный ниже пример).

**Пример.** Возьмем уравнение

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y \geq 0). \quad (34)$$

Здесь радикал берется с положительным знаком. Считая, что  $y \neq 0$ , делим обе части уравнения на  $2\sqrt{y}$ . Получаем

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \quad \text{или} \quad (\sqrt{y})' = 1.$$

Отсюда

$$\sqrt{y} = x + C,$$

где  $x > -C$ , так как  $x + C > 0$ . Следовательно, уравнение (34) имеет семейство решений

$$y = (x + C)^2 \quad (x \geq -C). \quad (35)$$

(Здесь мы в неравенстве  $x > -C$  присоединили знак равенства, ибо функция (35) обращает уравнение (34) в тождество, которое имеет место и при  $x = -C$ ). Это — правые ветви парабол, у которых ось симметрии параллельна оси  $Oy$ , а вершины находятся на оси  $Ox$  (рис. 10). Тот факт, что левые ветви парабол не являются интегральными кривыми, очевиден и из самого дифференциального уравнения (34), ибо вдоль них касательная образует тупой угол с осью  $Ox$ , так что производная  $y'$  отрицательна, тогда как в уравнении (34) она предполагается неотрицательной. (Левые ветви являются интегральными кривыми уравнения  $y' = -2\sqrt{y}$ .)

Покажем, что функция

$$y = (x + C)^2 \quad (x > -C) \quad (36)$$

является общим решением уравнения (34) в области

$$D: -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad (37)$$

т. е. в верхней полуплоскости.

В самом деле, прежде всего убедимся, что в области (37) имеет место существование и единственность решения задачи Коши. Это следует из того, что для любой точки  $(x_0, y_0)$  из области (37) можно построить замкнутую окрестность вида

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b,$$

лежащую в верхней полуплоскости. В этой окрестности правая часть уравнения (34) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара. Действительно, функция  $f(x, y) \equiv$

$\equiv 2\sqrt{y}$  непрерывна, а  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$  ограничена. Поэтому через точку  $(x_0, y_0)$  проходит

одна и только одна интегральная кривая уравнения (34).

Проверим теперь, что функция (36) удовлетворяет обоим требованиям, содержащимся в определении общего решения, данным в п. 8.

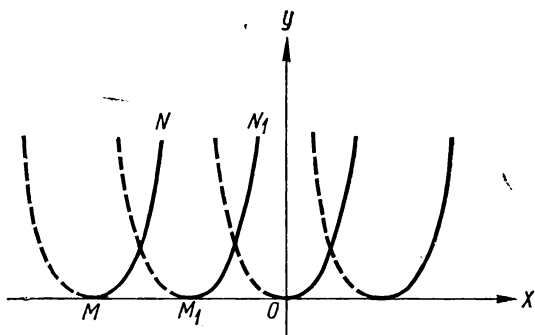


Рис. 10

1) Равенство (36) разрешимо в области (37) относительно произвольной постоянной  $C$ :

$$C = \sqrt[3]{y} - x.$$

2) Подставляя (36) в (34), получаем тождество

$$2(x+C) \equiv 2\sqrt[3]{(x+C)^2} \quad (x+C > 0),$$

так что функция (36) является решением уравнения (34) при всех значениях  $C$ .

Поэтому функция (36) является общим решением уравнения (34) в области (37).

Очевидно, что решением уравнения (34) будет также  $y \equiv 0$  (ось  $Ox$ ). Это решение особое, так как во всех точках его нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, через любую точку  $M(x_0, 0)$ , лежащую на оси  $Ox$ , проходит само решение  $y \equiv 0$ , примыкающая к ней полупарабола

$$MN: y = (x - x_0)^2 \quad (x \geq x_0)$$

(она содержится в семействе (36) при  $C = -x_0$ ) и, кроме того, бесчисленное множество решений типа  $MM_1N_1$ , которые можно составить из отрезков  $MM_1$  особого решения  $y \equiv 0$  [ $M_1 = M_1(x_1, 0)$ ] и частных решений — полупарабол

$$M_1N_1: y = (x - x_1)^2 \quad (x > x_1).$$

Отметим, что решения типа  $MM_1N_1$  не являются ни частными, ни особыми.

Рассматривая поле направлений, определяемое уравнением (34), видим, что через каждую точку  $M(x_0, 0)$ , лежащую на особом решении  $y \equiv 0$ , проходит не одна интегральная кривая, в то время как направление поля в этой точке только одно:

$$y' \big|_{(x_0, 0)} = 2\sqrt[3]{y} \big|_{(x_0, 0)} = 0.$$

Заметим еще, что особое решение  $y \equiv 0$  не содержится в формуле общего решения (36), т. е. не получается из нее ни при каком частном числовом значении произвольной постоянной  $C$ , но оно является границей области задания общего решения (36) и получается из формулы этого общего решения при  $C = -x$  (см. сноску на с. 44).

Ниже мы указываем способы нахождения особых решений или хотя бы кривых, «подозрительных» на особое решение.

**12. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение по дифференциальному уравнению.** Предположим, что правая часть уравнения (1)

$$y' = f(x, y)$$

определена и непрерывна в некоторой области  $G$  и имеет в каждой точке этой области производную по  $y$ . Тогда, если  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ограничена в области  $G$ , то, согласно теореме Пикара, через каждую точку этой области проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1) и, следовательно, уравнение (1) не имеет особых решений. Поэтому, при сделанных пред-

положениях, особые решения уравнения (1) нужно искать только среди тех кривых, вдоль которых  $\frac{\partial f}{\partial y}$  не ограничена.

Будем называть кривые, вдоль которых  $\frac{\partial f}{\partial y}$  не ограничена, *кривыми, подозрительными на особое решение*. Найдя кривую, подозрительную на особое решение, нужно, во-первых, проверить, что она вообще является интегральной кривой, и, во-вторых, убедиться, что в каждой точке ее нарушается единственность решения. Если и то и другое имеет место, то кривая, подозрительная на особое решение, действительно будет особым решением.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение (34)

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}.$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ; так что  $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$  только при  $y=0$ .

Поэтому кривой, подозрительной на особое решение, является только ось  $Ox$  ( $y=0$ ). Легко убедиться, что  $y=0$  является решением уравнения (34) и притом особым (см. п. 11).

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} + 1. \quad (38)$$

Здесь, так же как и в примере 1, единственной кривой, подозрительной на особое решение, является ось  $Ox$ . Но она даже не есть решение. Следовательно, уравнение (38) не имеет особых решений.

**13. Отсутствие особых решений у уравнения первого порядка с правой частью, рациональной относительно  $y$ .** Заметим, что в примерах предыдущего пункта правые части рассматриваемых уравнений и р а ц и о н а л ь н ы относительно  $y$ .

Рассмотрим случай уравнения (1), в котором правая часть  $f(x, y)$  — целая р а ц и о н а л ь н а я функция относительно  $y$ :

$$\frac{dy}{dx} = A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x)y + A_n(x). \quad (39)$$

Предположим, что в уравнении (39) коэффициенты  $A_i(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$ . Тогда в прямоугольнике

$$R: a_1 \leq x \leq b_1, \quad -k \leq y \leq k \quad (a_1 > a, b_1 < b),$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — числа, сколь угодно близкие к  $a$  и  $b$ , а число  $k$  — сколь угодно большое, правая часть уравнения (39) непрерывна и, кроме того,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  существует и ограничена, так что выполнены оба условия теоремы Пикара. Следовательно, уравнение (39) не имеет особых решений.

**Пример.** Уравнение (20)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

не имеет особых решений, ибо его правая часть есть полином относительно  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (40)$$

где  $P$  и  $Q$  — целые рациональные функции относительно  $y$  с непрерывными относительно  $x$  коэффициентами (например,  $P$  и  $Q$  — полиномы относительно  $x$  и  $y$ ). При этом мы предполагаем правую часть уравнения (40) *неприводимой*, т. е. считаем, что все возможные сокращения на общие множители уже выполнены.

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial y}$  может быть неограниченной лишь в точках  $(x_0, y_0)$ , где  $Q(x_0, y_0) = 0$ .

Будем различать два случая.

**С л у ч а й 1.**  $P(x_0, y_0) \neq 0$ . Правая часть перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (40')$$

удовлетворяет в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  обоим условиям теоремы Пикара. Следовательно, уравнение (40') имеет единственное решение  $x = x(y)$ , проходящее через точку  $(x_0, y_0)$ . Это решение — *частное*.

**С л у ч а й 2.**  $P(x_0, y_0) = 0$ . Правая часть уравнения (40) становится в точке  $(x_0, y_0)$  неопределенной. Будем считать, что  $P$  и  $Q$  — полиномы относительно  $x$  и  $y$ . Тогда в достаточно малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  нет точек, отличных от этой точки, в которых  $P$  и  $Q$  одновременно обращались бы в нуль и, следовательно, через каждую точку этой окрестности, отличную от самой точки  $(x_0, y_0)$ , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (40) или (40'), так что и в этом случае особых решений нет.

Итак, ни в случае 1, ни в случае 2 мы не получаем особых решений.

В частности, уравнение с дробно-линейной однородной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad-bc \neq 0) \quad (41)$$

не имеет особых решений.

**14. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение.** Предположим, что уравнение (1) допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (42)$$

где  $C$  — параметр, и оно имеет *оггибающую*, т. е. такую кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства (42) и ни на каком участке не совпадает ни с одной из кривых этого семейства.\*

Очевидно, что *оггибающая семейства интегральных кривых уравнения (1) представляет собою решение этого уравнения и притом о с о б о е*.

В самом деле, в каждой своей точке оггибающая имеет общую касательную с некоторой интегральной кривой семейства (42) и, следовательно, в каждой точке оггибающей направление касательной совпадает с направлением поля в этой точке. Это и означает, что оггибающая является интегральной кривой. Далее, в каждой точке оггибающей нарушается единственность решения задачи Коши: через эту точку проходят по крайней мере две интегральные кривые (а именно сама оггибающая и кривая семейства, которой оггибающая касается в этой точке), тогда как направление поля в ней одно.

**Пример 1.** Уравнение (34)

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых (35)

$$y = (x+C)^2 \quad (x \geq -C).$$

Из рис. 10 ясно, что это семейство имеет *оггибающую*  $y \equiv 0$  (ось  $Ox$ ), которая представляет собою *особое* решение уравнения (34).

Ниже мы сформулируем теорему о необходимом условии, которому должна удовлетворять оггибающая однопараметрического семейства кривых, и одну теорему о достаточном условии [16]. Для этого нам потребуется наложить некоторые ограничения как на характер семейства кривых, так и на оггибающую.

---

\* Огибающая может касаться не всех кривых семейства. Желая подчеркнуть это, мы иногда говорим об оггибающей соответствующей части семейства.

Предположим, что однопараметрическое семейство (42) таково, что функция  $\Phi(x, y, C)$  задана и имеет непрерывные частные производные по  $x, y, C$  во всех точках  $(x, y)$  из некоторой области  $G$  и при всех значениях  $C$  из интервала  $[C_1, C_2]$  и что при каждом  $C$  из  $[C_1, C_2]$  уравнение (42) определяет некоторую кривую. Тогда мы будем говорить, что уравнение (42) определяет в области  $G$  *регулярное семейство кривых*, зависящих от параметра  $C$  из  $[C_1, C_2]$ .

Будем говорить, что кривая  $\gamma$  задана в *гладкой параметризации*, если она задана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

при  $\alpha \leq t \leq \beta$ , в которых функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные производные и эти производные не обращаются одновременно в нуль ни при одном значении  $t$  из  $[\alpha, \beta]$ .

Предположим, что огибающая семейства (42) есть кривая в гладкой параметризации.

**Теорема 1** (необходимое условие огибающей). Пусть кривая (43) есть огибающая регулярного семейства (42). Тогда, если при  $t=t_0$  из  $[\alpha, \beta]$  она касается кривой

$$\Phi(x, y, C_0) = 0 \quad (C_0 \in [C_1, C_2])$$

семейства (42), то числа  $x_0, y_0$  и  $C_0$ , где  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ , удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Совокупность точек  $(x, y)$  из  $G$ , которые хотя бы при одном  $C$  из  $[C_1, C_2]$  удовлетворяют системе (44), называется *дискриминантной кривой семейства (42)*.

Из теоремы 1 следует, что огибающая является дискриминантной кривой или ее частью. Но дискриминантная кривая может содержать и точки, отличные от огибающей.

Во многих случаях из чисто геометрических соображений можно установить, будет ли дискриминантная кривая (или ее часть) огибающей семейства (42).

**Теорема 2** (достаточный признак огибающей). Пусть семейство (42) есть регулярное семейство и указана кривая  $\gamma$ , заданная уравнениями (43), и функция  $C=C(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), причем величины  $x(t), y(t), C(t)$  при всех  $t$  из  $[\alpha, \beta]$  тождественно удовлетворяют системе (44). Если при этом:

1) кривая  $\gamma$  задана в гладкой параметризации;

2) функция  $C(t)$  имеет непрерывную производную, не равную тождественно нулю ни на каком участке из  $[\alpha, \beta]$ ;

$$3) |\Phi_x'(x(t), y(t), C(t))| + |\Phi_y'(x(t), y(t), C(t))| \neq 0,$$

то кривая  $\gamma$  есть огибающая семейства (42).

Отметим два частных случая этой теоремы.

Замечание 1. Предположим, что система (44) определяет  $y$  и  $C$  как функции от  $x$ :

$$y=y(x), \quad C=C(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

причем  $y'(x)$  и  $C'(x)$  непрерывны в  $[a, b]$  и, кроме того,  $C'(x)$  не обращается в нуль в  $[a, b]$ . Тогда  $y=y(x)$  есть дискриминантная кривая. Принимая  $x$  за параметр, мы можем записать ее в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= y(x), \\ x &= x. \end{aligned} \right\} \quad (43')$$

Очевидно (43') есть кривая в гладкой параметризации, ибо правые части непрерывны вместе с производными по параметру (т. е. по  $x$ ) и, кроме того,  $x_x' = 1$ . Так что первое условие теоремы 2 выполнено.

Величина  $C$  как функция параметра  $x$  (в силу сделанного предположения), удовлетворяет второму условию теоремы 2.

Третье условие принимает вид

$$|\Phi_x'(x, y(x), C(x))| + |\Phi_y'(x, y(x), C(x))| \neq 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

Если это условие выполнено, то кривая  $y=y(x)$  будет огибающей семейства (42).

Замечание 2. В тех случаях, когда из системы (44) не удастся найти  $y$  и  $C$  как функции от  $x$ , но зато удастся выразить  $x$  и  $y$  через  $C$ , мы получаем дискриминантную кривую в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(C), \\ y &= y(C), \end{aligned} \right\} \quad (43'')$$

где  $C$  — параметр. Если функции  $x(C)$  и  $y(C)$  имеют непрерывные производные и если  $|x'(C)| + |y'(C)| \neq 0$  в интервале  $[C_1, C_2]$ , то кривая (43'') есть кривая в гладкой параметризации. Тем самым первое условие теоремы 2 выполнено. Далее мы имеем:  $C_C' = 1 \neq 0$ , так что второе условие этой теоремы тоже выполнено.

Третье условие принимает вид

$$|\Phi_x'(x(C), y(C), C)| + |\Phi_y'(x(C), y(C), C)| \neq 0 \quad (C_1 \leq C \leq C_2). \quad (45)$$

Если это условие выполнено, то кривая (43'') (при сделанных предположениях) будет огибающей семейства (42).

**Пример 2.** Найдем огибающую семейства

$$y = xC + \sqrt{1 - C^2} \quad (-1 < C < 1). \quad (46)$$

Это семейство регулярно на всей плоскости  $(x, y)$  при всех значениях параметра  $C$  из интервала  $(-1, 1)$ .



Составляя систему (44), имеем:

$$\left. \begin{aligned} y &= xC + \sqrt{1-C^2}, \\ 0 &= x - \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}. \end{aligned} \right\}$$

Дискриминантной кривой будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Здесь  $C$  — параметр. Кривая (47) есть кривая в гладкой параметризации, ибо  $x_C'$  и  $y_C'$  непрерывны и  $x_C' \neq 0$ .

Условие (45), очевидно, выполнено, ибо  $\Phi_{y'} \equiv 1 \neq 0$ . Следовательно, кривая (47) есть огибающая семейства (46). Исключая из уравнений (47) параметр  $C$ , получаем уравнение огибающей в явном виде:

$$y = \sqrt{1+x^2}.$$

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{3}{5} y^{-\frac{2}{3}}.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{5}{3} y^{\frac{2}{3}} y' = 1 \quad \text{или} \quad (y^{\frac{5}{3}})' = 1,$$

получим семейство интегральных кривых

$$y^{\frac{5}{3}} = x + C \quad \text{или} \quad y^5 - (x+C)^3 = 0.$$

Найдем дискриминантную кривую. Имеем

$$\left. \begin{aligned} y^5 - (x+C)^3 &= 0, \\ -3(x+C)^2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $x = -C$ ,  $y = 0$ . Очевидно, что дискриминантная кривая  $y = 0$  не является огибающей. Условие (45) не выполняется.

**15. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение, в процессе построения общего решения (общего интеграла).** Если в процессе интегрирования дифференциального уравнения мы делим обе его части на некоторую функцию  $\omega(x, y)$ , то получаем уравнение, вообще говоря, не равносильное данному, ибо мы можем при этом потерять решения вида

$y=y(x)$  или  $x=x(y)$ , при которых делитель  $\omega(x, y)$  обращается в нуль, если эти решения не содержатся в формуле общего решения, т. е. не получаются из нее ни при каких числовых значениях произвольной постоянной, включая  $C=\pm\infty$ . Решения, о которых идет речь, очевидно, являются особыми. Например, в п. 11, интегрируя уравнение (34), мы потеряли особое решение  $y=0$ , когда делили это уравнение на функцию  $2\sqrt{y}$ , которая обращается в нуль как раз при  $y=0$ .

**16. Понятие об интеграле дифференциального уравнения. Зависимость двух интегралов одного и того же уравнения.** Введем еще одно понятие, которое играет существенную роль как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в теории уравнений с частными производными. Это понятие об интеграле дифференциального уравнения.

Интеграл дифференциального уравнения (1) есть некоторая функция от двух переменных  $x$  и  $y$ , знание которой дает возможность проинтегрировать данное дифференциальное уравнение (1) и связанное с ним уравнение с частными производными. Наличие (хотя бы в смысле теоремы существования) у дифференциального уравнения интеграла, обладающего определенными свойствами, дает возможность получить ответ на многие вопросы общей теории дифференциальных уравнений. Ниже мы даем два (вообще говоря, неэквивалентных) определения интеграла дифференциального уравнения (1).

Пусть  $D$  есть область, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1) и функция (24)

$$y=\varphi(x, C)$$

есть общее решение \* этого уравнения в области  $D$ . Тогда равенство (24) разрешимо в  $D$  относительно  $C$ , так что имеет место соотношение (30)

$$\psi(x, y)=C.$$

Отметим одно свойство функции  $\psi(x, y)$ , стоящей в левой части равенства (30). Функция  $\psi(x, y)$  обращается в постоянную при замене  $y$  любым частным решением, расположенным в области задания общего решения (24), причем значение этой постоянной определяется выбранным частным решением, т. е. мы имеем тождество (относительно  $x$ ):

$$\psi[x, \varphi(x, C)]=C.$$

Всякую функцию  $\psi(x, y)$ , обладающую указанным свойством, будем называть *интегралом* уравнения (1) в области  $D$ .

---

\* Здесь, как и везде, мы пользуемся определением общего решения в области  $D$ , данным в п. 8.

Первое определение интеграла. Функция  $\psi(x, y)$ , определенная в области  $D$  и не приводящаяся к постоянной, называется *интегралом* уравнения (1) в области  $D$ , если при замене  $y$  любым частным решением этого уравнения, расположенным в области  $D$ , она обращается в постоянную.

Предположим теперь, что функция  $\psi(x, y)$ , будучи интегралом уравнения (1), имеет непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$ . Тогда вследствие того, что она вдоль любого частного решения обращается в постоянную, ее полный дифференциал  $d\psi$  должен обращаться тождественно (относительно  $x$ ) в нуль вдоль этого решения, т. е.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \equiv 0$$

вдоль любого частного решения. Но вдоль решения мы имеем

$$dy \equiv f(x, y) dx,$$

поэтому предыдущее тождество можно переписать так:

$$d\psi|_{(1)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} f(x, y) dx \equiv 0. \quad (48)$$

Это тождество должно выполняться во всех точках области  $D$ .

Таким образом, если интеграл  $\psi(x, y)$  имеет непрерывные частные производные, то он обладает тем свойством, что его полный дифференциал обращается в нуль в силу уравнения (1), т. е. при замене  $dy$  его значением из уравнения (1). При этом  $\frac{\partial\psi}{\partial y}$  должна быть отлична от нуля в области  $D$ , ибо из (48) следует, что в точке  $(x, y)$  из  $D$ , в которой  $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ , будет и  $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ , так что в этой точке поле, определяемое уравнением (1) не задано.

Второе определение интеграла. Функция  $\psi(x, y)$ , определенная и непрерывная вместе с частными производными по  $x$  и  $y$  в области  $D$  и такая, что  $\frac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$  в области  $D$ , называется *интегралом* уравнения (1) в области  $D$ , если ее полный дифференциал тождественно в  $D$  равен нулю в силу этого уравнения.

Деля обе части тождества (48) на  $dx$ , получаем

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{(1)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} f(x, y) \equiv 0 \quad ((x, y) \in D). \quad (49)$$

Левая часть этого тождества есть результат замены в выражении полной

частной производной от функции  $\psi$  по  $x$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

производной  $\frac{dy}{dx}$  ее значением из уравнения (1).

Таким образом, если  $\psi(x, y)$  есть интеграл уравнения (1), то ее полная частная производная по  $x$  тождественно (в  $D$ ) равна нулю в силу уравнения (1), т. е. при замене  $y'$  правой частью этого уравнения.

Ясно, что функция  $\psi(x, y)$ , являющаяся интегралом в смысле второго определения, будет интегралом и в смысле первого определения.

Обратное неверно, ибо функция  $\psi(x, y)$ , являющаяся интегралом в смысле первого определения, может не иметь частных производных по  $x$  и  $y$ .

Доказательство существования непрерывно дифференцируемого интеграла уравнения (1) при соответствующих предположениях относительно правой части этого уравнения дается в гл. 5 (п. 138).

**Пример 1.** Пусть дано уравнение (15)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Покажем, что функция

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 \quad (50)$$

является интегралом уравнения (15).

Существование и единственность решения задачи Коши гарантированы во всякой точке  $(x, y)$ , ордината которой отлична от 0, т. е. в верхней и нижней полуплоскостях.

Возьмем, например, верхнюю полуплоскость. В ней функция  $\psi(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными, причем  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$  отлична от нуля. Далее имеем

$$d\psi = 2xdx + 2ydy.$$

Подставляя в правую часть вместо  $dy$  его значение из уравнения (15), получим

$$d\psi|_{(15)} = 2xdx + 2y \left( -\frac{x}{y} \right) dx \equiv 0.$$

Следовательно, функция (50) есть интеграл уравнения (15) в верхней полуплоскости.

Аналогично убеждаемся, что она является интегралом уравнения (15) и в нижней полуплоскости.

Покажем, что если уравнение (1) имеет один интеграл, то оно имеет и бесчисленное множество интегралов. А именно имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Если  $\psi_1(x, y)$  есть интеграл уравнения (1) в области  $D$ , имеющий непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$ , а  $\Phi(z)$  любая функция, определенная в некоторой области изменения  $z$ , охватывающей все значения, принимаемые функцией  $\psi_1(x, y)$  (когда точка  $(x, y)$  пробегает всю область  $D$ ), и имеющая в этой области непрерывную производную, отличную от нуля, то функция

$$\psi = \Phi(\psi_1(x, y)) \quad (51)$$

тоже будет интегралом уравнения (1) в области  $D$ .

В самом деле, функция  $\psi$  имеет непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

причем  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$  в  $D$ . Далее имеем

$$d\psi = \frac{d\Phi}{d\psi_1} d\psi_1.$$

Так как  $d\psi_1 \equiv 0$  в силу уравнения (1), то и  $d\psi \equiv 0$  в силу этого уравнения. Следовательно,  $\psi$  есть интеграл уравнения (1) в области  $D$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $\Phi'(z)$  отлична от нуля не при всех  $z$  из указанной в теореме области, а лишь в ее части, то функция (51) будет интегралом уравнения (1) в соответствующей части области  $D$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Из доказанной теоремы следует, что если

$$\psi_1(x, y) = C_1$$

есть общий интеграл уравнения (1), то соотношение

$$\Phi(\psi_1(x, y)) = C \quad (C = \Phi(C_1)),$$

где  $\Phi(z)$  — любая функция, имеющая непрерывную производную, отличную от нуля, тоже является общим интегралом уравнения (1).

Это утверждение позволяет получать общий интеграл данного уравнения в наиболее удобном виде за счет надлежащего выбора функции  $\Phi$ .

**Пример 2.** Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это уравнение имеет, как нетрудно убедиться, следующий общий интеграл:

$$\psi_1 \equiv \arcsin x + \arcsin y = C_1.$$

Его левая часть есть трансцендентная функция.

Построим общий интеграл в алгебраическом виде. Для этого возьмем в качестве функции  $\Phi(z)$ , о которой шла речь выше, синус. Тогда получим общий интеграл в виде

$$\psi \equiv \sin(\arcsin x + \arcsin y) = C$$

или

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C,$$

т. е. мы получили общий интеграл в алгебраическом виде. Этот вид общего интеграла во многих отношениях более удобен, чем предыдущий. В частности, освобождаясь от радикалов, мы можем получить отсюда общий интеграл в рациональном виде.

Данное выше понятие об интеграле уравнения (1) легко переносится на уравнение в дифференциальной форме (3)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

и на уравнение в симметрической форме (5)

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Остановимся на интеграле, имеющем непрерывные частные производные.

Так как уравнение (3) равносильно совокупности уравнений (4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)},$$

то мы будем называть функцию  $\psi(x, y)$  *интегралом* уравнения (3) в области  $D$ , где  $D$  есть область существования и единственности решения задачи Коши для этого уравнения, если частные производные  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  существуют и непрерывны в  $D$ , не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке области  $D$  и если полный дифференциал функции  $\psi(x, y)$  тождественно (в  $D$ ) равен нулю в силу уравнения (3).

В случае, когда дифференциальное уравнение задано в симметрической форме (5), понятие интеграла вводится аналогично, причем предполагается, что в рассматриваемой области функции  $X$  и  $Y$  не обращаются одновременно в нуль.

Мы доказали выше, что если  $\psi_1$  есть какой-нибудь интеграл уравнения (1) в области  $D$ , то формула (51) при любой функции  $\Phi$ , обладающей указанным свойством, доставляет интеграл этого уравнения в области  $D$ .

Возникает вопрос, содержится ли любой интеграл уравнения (1), определенный в области  $D$ , в формуле (51) при соответствующем выборе функции  $\Phi$  (разумеется, что речь идет о непрерывно дифференцируемых

интегралах). Доказываемая ниже теорема о зависимости любых двух интегралов уравнения (1), определенных в одной и той же области, дает положительный ответ на этот вопрос.

Напомним сначала понятие о зависимости двух функций [149, т. II, с. 201].

Пусть даны две функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , определенные и непрерывные вместе со своими частными производными в некоторой области  $D$ . Если функция  $f(x, y)$  является функцией от функции  $g(x, y)$ , так что имеет место равенство

$$f = \Phi(g) \quad (52)$$

при всех значениях  $x, y$  из области  $D$ , причем  $\Phi(z)$  есть непрерывная функция от  $z$ , имеющая непрерывную производную при всех значениях, которые принимает функция  $g(x, y)$ , когда точка  $(x, y)$  пробегает область  $D$ , то говорят, что в области  $D$  функция  $f$  *зависит* от функции  $g$ . Функции  $f$  и  $g$  называют вообще *зависимыми* в области  $D$ , если  $f$  зависит от  $g$  или  $g$  зависит от  $f$ .

**Пример 3.** Две функции

$$f_1 = \ln x + \ln y, \quad g_1 = xy \quad (53)$$

зависимы в области  $x > 0, y > 0$  (первый квадрант), а именно:

$$f_1 = \ln g_1.$$

Следующая лемма устанавливает достаточное условие зависимости двух функций.

**Л е м м а** [149, т. II, с. 203]. Пусть даны две функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , определенные и непрерывные вместе со своими частными производными в области  $D$ . Предположим, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix},$$

называемый определителем Якоби или якобианом, тождественно равен нулю в области  $D$ , но

$$g_x''(x_0, y_0) + g_y''(x_0, y_0) \neq 0,$$

где  $(x_0, y_0)$  некоторая точка этой области. Тогда  $f$  есть функция от  $g$  в некоторой окрестности  $D_0$  точки  $(x_0, y_0)$ , т. е. при всех значениях  $x, y$  из  $D_0$  выполняется равенство (52).

**Пример 4.** Рассмотрим снова функции (53) ( $x > 0, y > 0$ ). Составим их якобиан:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix}.$$

Он тождественно равен нулю. Но в рассматриваемой области

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = y \neq 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = x \neq 0.$$

В качестве точки  $(x_0, y_0)$  можно взять любую точку из первого квадранта. Возьмем, например, точку  $(1, 1)$ . Согласно лемме, функция  $f_1$  будет функцией от  $g_1$  в некоторой окрестности взятой точки, т. е. в этой окрестности

$$f_1 = \Phi(g_1).$$

Найдем вид функции  $\Phi$ . Имеем

$$\ln x + \ln y = \Phi(xy).$$

Положим  $y = 1$ . Получим  $\ln x = \Phi(x)$ . Следовательно, в качестве  $\Phi$  нужно взять логарифм, так что

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \quad \text{или} \quad f_1 = \ln g_1.$$

Полученное равенство выполняется согласно лемме в некоторой окрестности точки  $(1, 1)$ . На деле, как уже сказано в примере 3, оно выполняется при всех  $x, y$  из первого квадранта, так что  $f_1$  является функцией  $g_1$  во всем первом квадранте.

Докажем теперь, что любые два интеграла уравнения (1) зависимы, а именно имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Любые два интеграла  $\psi(x, y)$  и  $\psi_1(x, y)$  уравнения (1), определенные в одной и той же области  $D$ , зависимы в некоторой области  $D_0$ , содержащейся внутри области  $D$ , т. е. тождественно (в  $D_0$ ) выполняется равенство

$$\psi = \Phi(\psi_1). \quad (54)$$

Действительно, так как  $\psi(x, y)$  и  $\psi_1(x, y)$  суть интегралы уравнения (1) в области  $D$ , то, согласно определению, (в  $D$ ) имеют место тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x, y) dx &\equiv 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} f(x, y) dx &\equiv 0, \end{aligned}$$



Но тогда (в  $D$ ) имеет место тождество

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0$$

(почему?).

Таким образом, якобиан функций  $\psi$  и  $\psi_1$  тождественно (в  $D$ ) равен нулю.

Отсюда, принимая во внимание, что  $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$  отлична от нуля во всякой точке  $(x_0, y_0)$  из области  $D$ , мы, в силу приведенной выше леммы, заключаем, что  $\psi$  есть функция от  $\psi_1$  в некоторой окрестности  $D_0$  точки  $(x_0, y_0)$ , т. е. тождественно (в  $D_0$ ) выполняется равенство (54). Теорема доказана.

Заметим еще, что в равенстве (54) функция  $\Phi$  имеет непрерывную производную по  $\psi_1$  при всех значениях, принимаемых функцией  $\psi_1$ , когда точка  $(x, y)$  пробегает область  $D_0$ . Кроме того,  $\frac{d\Phi}{d\psi_1}$  отлична от нуля, ибо, если  $\frac{d\Phi}{d\psi_1} = 0$ , то  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0$ , т. е.  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ , что невозможно, так как  $\psi$  есть интеграл уравнения (1).

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что зависимость между любыми двумя интегралами, определенными в одной и той же области, имеет место и для уравнений вида (3) и (5).

**17. Связь между обыкновенным дифференциальным уравнением и уравнением с частными производными.** Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной в нормальной форме (1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Пусть  $\psi(x, y)$  есть непрерывно дифференцируемый интеграл этого уравнения в области  $D$ . Тогда имеет место тождество (49)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x, y) \equiv 0 \quad ((x, y) \in D).$$

Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (55)$$

где  $z = z(x, y)$  — неизвестная функция от  $x$  и  $y$ . Выполнение тождества

(49) означает, что функция

$$z = \psi(x, y) \quad (56)$$

является решением уравнения (55) в области  $D$ .

Обратно, если функция (56)  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0\right)$  есть решение уравнения с частными производными (55) в области  $D$ , то  $\psi(x, y)$  является интегралом уравнения (1) в области  $D$ , ибо для функции  $\psi(x, y)$  имеет место тождество (49), а это и означает, что  $\psi(x, y)$   $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0\right)$  является интегралом уравнения (1) в области  $D$ .

Мы будем называть уравнение (1) *обыкновенным дифференциальным уравнением в нормальной форме, соответствующим уравнению с частными производными (55)*.

Легко видеть, что уравнению в дифференциальной форме (3) соответствует в указанном выше смысле уравнение с частными производными

$$N(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

а уравнение с частными производными, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка в симметрической форме (5), имеет вид

$$X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Пример.** Рассмотрим снова уравнение (15)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Соответствующим уравнением с частными производными будет

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (57)$$

В предыдущем пункте мы убедились, что функция  $\psi = x^2 + y^2$  есть интеграл уравнения (15) в верхней полуплоскости. Поэтому она должна быть решением уравнения (57) в верхней полуплоскости. И в самом деле, подставляя функцию  $z = x^2 + y^2$  в уравнение (57), получим

$$2x - \frac{x}{y} \cdot 2y = 0.$$

**18. Замечание об интегрируемости в квадратурах.** Желая иметь решения в форме, наиболее удобной для изучения их свойств и для вычис-

ления значений искомой функции, стараются во всех случаях, когда это возможно, проинтегрировать данное уравнение в квадратурах.

Решение вопроса об интегрируемости в квадратурах уравнения (1) зависит от вида функции  $f(x, y)$ . В общем случае уравнение (1) не интегрируется в квадратурах. Однако при некоторых частных видах функции  $f(x, y)$  его удастся проинтегрировать в квадратурах. Следующие параграфы этой главы и посвящены рассмотрению наиболее важных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Заметим, что, рассматривая уравнение в виде (1), мы тем самым считаем, что  $y$  есть искомая функция. Но часто случается, что заданное уравнение вида (1) не принадлежит ни к какому из известных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах, в то время как оно является таковым, если считать искомой функцией не  $y$ , а  $x$ , т. е. переписать заданное уравнение в виде (1')

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Если заданное уравнение имеет вид (3)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

то его всегда можно привести к виду (1) или (1'), разрешая относительно  $\frac{dy}{dx}$  или  $\frac{dx}{dy}$ . Если при этом хоть одно из полученных уравнений интегрируется в квадратурах, то тем самым интегрируется в квадратурах и данное уравнение.

Однако во многих случаях уравнение, записанное в виде (3), интегрируется в квадратурах и непосредственно, без предварительного разрешения его относительно  $\frac{dy}{dx}$  или  $\frac{dx}{dy}$ . Более того, в некоторых случаях оказывается, что заданное уравнение имеет вид (1), но ни оно само, ни перевернутое уравнение (1') не принадлежат ни к какому из известных интегрируемых типов, в то время как соответствующее им уравнение вида (3) интегрируется в квадратурах.

Поэтому, отвечая на вопрос об интегрируемости в квадратурах данного дифференциального уравнения, нужно проверить, не принадлежит ли оно к одному из известных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах, будучи записанным либо в виде (1), либо в виде (1'), либо в виде (3).

При рассмотрении уравнений, интегрируемых в квадратурах, чтобы не усложнять изложения, мы будем проводить подробный анализ уравнений и полученных решений (в частности, указывать область существования общего решения) лишь в случаях, представляющих наибольший

теоретический интерес, ограничиваясь в остальных случаях формальным интегрированием, т. е. нахождением семейства интегральных кривых, зависящего от одной произвольной постоянной, и интегральных кривых, не входящих в это семейство (если они существуют).

## § 2. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**19. Уравнение, не содержащее искомой функции.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1)$$

в котором правая часть не зависит от искомой функции. Это есть простейшее дифференциальное уравнение первого порядка. Мы уже встречались с ним во введении и в п. 5. Предположим, что функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ . Тогда функция

$$y = \int f(x) dx + C \quad (2)$$

является общим решением уравнения (1) в области

$$a < x < b, \quad -\infty < y < \infty. \quad (3)$$

Вся полоса (3) заполнена непересекающимися интегральными кривыми. Особых решений нет.

Если в формуле (2) в качестве первого слагаемого, т. е. в качестве первообразной для функции  $f(x)$ , взять определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_{x_0}^x f(x) dx, *$$

где  $x_0$  есть фиксированное значение независимой переменной  $x$ , взятое из интервала  $(a, b)$  (так что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ ), то найдем

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + C.$$

Полагая здесь  $x = x_0$  и обозначая  $y(x_0) \equiv y_0$ , получим  $y_0 = C$  (ср. введение, пример 1). Поэтому общее решение (2) можно переписать в виде

---

\* Эта первообразная выделяется среди всех других первообразных тем свойством, что она обращается в нуль при  $x = x_0$ .

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0. \quad (4)$$

Это есть общее решение уравнения (1) в области (3) в форме Коши (роль произвольной постоянной играет  $y_0$ ).\*

Если правая часть уравнения (1) непрерывна во всех точках интервала  $(a, b)$  за исключением одной точки  $x = \xi$ , в которой она обращается в бесконечность, то в окрестности этой точки вместо уравнения (1) нужно рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \quad (1')$$

Прямая  $x = \xi$  является, очевидно, решением уравнения (1'). Согласно сказанному в п. 2, мы должны присоединить это решение к решениям уравнения (1).

Решение  $x = \xi$  может быть или частным или особым в зависимости от того, сохраняется или нарушается в каждой точке этого решения единственность решения задачи Коши. При этом если решение  $x = \xi$  частное, то оно часто получается из формулы общего решения при  $C = \infty (-\infty)$ ,\*\* если же оно особое, то при  $C = C(y)$ .\*\*\*

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}. \quad (5)$$

Правая часть этого уравнения непрерывна при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 0$ .  
Функция

$$y = \frac{1}{x} + C \quad (6)$$

будет общим решением уравнения (5) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < \infty$$

\* Из формулы (4) видно, что решение задачи Коши с любыми начальными данными  $x_0, y_0$  из полосы (3) является непрерывно дифференцируемой функцией независимой переменной  $x$  и начальных данных  $x_0, y_0$  в области

$$a < x < b; \quad a < x_0 < b, \quad |y_0| < \infty.$$

$$** \text{ Т. е. } \lim_{(x, y) \rightarrow (\xi, y)} (y - \int f(x) dx) = \infty \quad (-\infty).$$

$$*** \text{ Т. е. } \lim_{(x, y) \rightarrow (\xi, y)} (y - \int f(x) dx) = C(y).$$

и

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Рассмотрим прямую  $x=0$  (ось  $Oy$ ). Она является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -x^2.$$

Это решение — частное, ибо в каждой точке его выполняется единственность решения задачи Коши, а именно через эту точку, кроме самого решения  $x=0$ , не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 11). Решение  $x=0$  получается из формулы общего решения (6) при  $C=\infty$ .

**Пример 2.** Возьмем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \quad (7)$$

Здесь правая часть непрерывна при всех значениях  $x$ , кроме  $x=0$ . Функция

$$y = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + C \quad \text{или} \quad y = \sqrt[3]{x^2} + C \quad (8)$$

будет общим решением уравнения (7) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < \infty$$

и

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Прямая  $x=0$  является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x}.$$

Это решение особое, так как во всех точках его нарушается единственность решения задачи Коши (рис. 12). Решение  $x=0$  получается из формулы общего решения (8) при  $C=y$ .

Прямая  $x=0$  является огибающей семейства интегральных кривых (8).

Заметим, что в рассмотренных примерах прямая  $x=0$  являлась (общей) границей областей, в которых определены общие решения. В первом случае эта граница оказалась частным решением, во втором — особым.

**20. Уравнение, не содержащее независимой переменной.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (9)$$

правая часть которого не содержит независимой переменной  $x$ . Предположим, что функция  $f(y)$  определена и непрерывна в интервале  $(c, d)$ .

Обратимся к перевернутому уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \quad (9')$$

Это уравнение не содержит искомой функции  $x$  и, следовательно, к нему применимо все сказанное в предыдущем пункте.

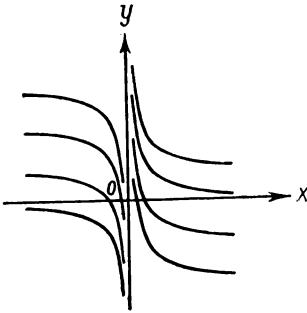


Рис. 11

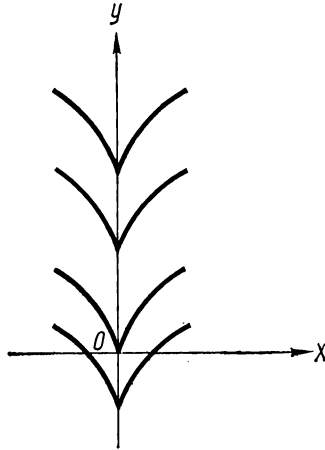


Рис. 12

Пусть функция  $f(y)$  не обращается в нуль ни в одной точке из интервала  $(c, d)$ . Тогда правая часть уравнения (9') определена и непрерывна во всем интервале  $(c, d)$ , и, в силу п. 19, функция

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + C \quad (10)$$

является общим решением уравнения (9') в области

$$c < y < d, \quad -\infty < x < \infty \quad (11)$$

и, следовательно, общим интегралом уравнения (9).

Общий интеграл (10) можно заменить *общим интегралом в форме Коши*:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(y)} dy + x_0.$$

Здесь  $y_0$  — фиксированное число из интервала  $(c, d)$ , а  $x_0$  — произвольная постоянная.

При сделанных предположениях относительно функции  $f(y)$  уравнение (9) не имеет особых решений.

Если функция  $f(y)$ , будучи непрерывной в интервале  $(c, d)$ , обращается в нуль в некоторой точке  $y=\eta$  из этого интервала, то правая часть уравнения (9') обращается в бесконечность в точке  $y=\eta$  и мы должны рассмотреть вместо уравнения (9') перевернутое уравнение, каковым будет данное уравнение (9).

Ясно, что уравнение (9) имеет решение  $y=\eta$ . Это решение будет частным, если во всех точках его сохраняется единственность решения задачи Коши. В противном случае оно будет особым. При этом, если решение  $y=\eta$  частное, то оно часто может быть получено из формулы общего интеграла (10) при  $C=\infty$  ( $-\infty$ ),\* если же оно — особое, то при  $C=C(x)$ .\*\*

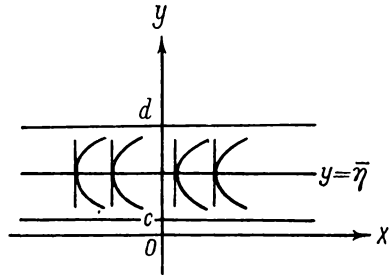


Рис. 13

Рассмотрим теперь случай, когда  $f(y)$  обращается в бесконечность в точке  $y=\eta$  внутри интервала  $(c, d)$ , оставаясь непрерывной и не равной нулю в остальных точках этого интервала. Тогда уравнение (9') имеет правую часть, непрерывную во всем интервале  $(c, d)$ . Поэтому через каждую точку области (11) проходит единственная интегральная кривая. Но интегральные кривые, проходящие через точки, лежащие на прямой  $y=\eta$ , имеют в каждой из этих точек касательную, параллельную оси  $Oy$  (рис. 13). Это видно как из формулы общего интеграла (10), так и из самого дифференциального уравнения (9) или из (9').

Все указанные выше результаты относительно уравнения (9) легко получаются и непосредственно, без обращения к перевернутому уравнению (9'). Нужно только следить за тем, чтобы в процессе интегрирования не терять решений (см. п. 15).

Разделим обе части уравнения (9) на функцию  $f(y)$ :

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad (f(y) \neq 0). \quad (12)$$

\* Т. е.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x, \eta)} \left( x - \int \frac{1}{f(y)} dy \right) = \infty \quad (-\infty).$

\*\* Т. е.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x, \eta)} \left( x - \int \frac{1}{f(y)} dy \right) = C(x).$



В скобках мы указываем для памяти то уравнение, которое следует рассмотреть после интегрирования уравнения (12), ибо, деля обе части уравнения (9) на  $f(y)$ , мы могли потерять те решения этого уравнения, которые обращают делитель  $f(y)$  в нуль.

Интегрируя уравнение (12), получим общий интеграл (10).

Рассмотрим теперь уравнение  $f(y)=0$ . Если оно имеет вещественное решение (одно или несколько) вида  $y=\eta$ , то прямая  $y=\eta$  всегда будет решением уравнения (9). Остается только проверить, каким будет это решение, частным или особым.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}. \quad (13)$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна при всех конечных значениях  $y$ , но она обращается в нуль при  $y=0$ . Поэтому только ось  $Ox$  может быть особым решением.

Прежде чем интегрировать уравнение (13), запишем его подробно в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{y}, & \text{если } y \geq 0, \\ \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{-y}, & \text{если } y \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Интегрируя первое из этих уравнений, имеем (см. п. 11)

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad (2\sqrt{y}=0?), \quad \sqrt{y}=x+C \quad (x > -C),$$

так что

$$y = (x+C)^2 \quad (x > -C) \quad (15)$$

будет общим решением этого уравнения в области

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty. \quad (16)$$

Аналогично, интегрируя второе из уравнений (14), имеем

$$\frac{dy}{2\sqrt{-y}} = dx \quad (2\sqrt{-y}=0?), \quad -\sqrt{-y}=x+C \quad (x < -C),$$

откуда находим, что

$$y = -(x+C)^2 \quad (x < -C) \quad (17)$$

является общим решением этого уравнения в области

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < 0. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь решение  $y=0$ , которое мы могли потерять при интегрировании. Это решение особое, так как через каждую точку его проходит не одно решение уравнения (13) (рис. 14).

Заметим, что особое решение  $y=0$  может быть получено из формул общего решения (15) и (17) при  $C=-x$ . Оно представляет собою (общую) границу областей

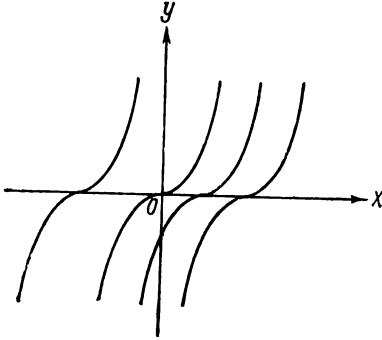


Рис. 14

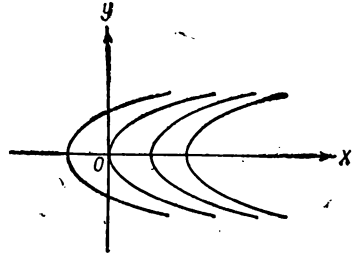


Рис. 15

(16) и (18), в которых определены эти общие решения. Ясно также, что особое решение  $y=0$  является огибающей семейств интегральных кривых

$$y = (x+C)^2 \quad (x \geq -C) \quad \text{и} \quad y = -(x+C)^2 \quad (x \leq -C)$$

уравнений (14).

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}. \quad (19)$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна при всех значениях  $y$ , кроме  $y=0$ , и не обращается в нуль. При  $y=0$  она обращается в бесконечность. Поэтому через каждую точку плоскости  $(x, y)$  проходит единственная интегральная кривая, но в точках оси  $Ox$  касательные к интегральным кривым параллельны оси  $Oy$ .

Действительно, интегрируя уравнение (19), имеем

$$2ydy = dx, \quad y^2 = x + C.$$

Найденный общий интеграл представляет собою семейство парабол (рис. 15), для которых осью симметрии является ось  $Ox$ , так что вершины лежат на оси  $Ox$ . Касательные в вершинах параллельны оси  $Oy$ .

В следующих трех параграфах мы ограничиваемся формальным интегрированием рассматриваемых уравнений. В частности, мы не указываем в общем случае область задания общего решения. Поэтому следует иметь в виду, что хотя получающимися формулами общего решения (общего интеграла) и можно пользоваться для решения конкретных за-

дач Коши, тем не менее в общем случае нельзя без дополнительных исследований гарантировать, что мы найдем таким путем искомое решение и что оно будет единственным. Чтобы убедиться и в том и в другом, нужно либо исследовать вопрос непосредственно, либо воспользоваться теоремой Пикара.

### § 3. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

#### 21. Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \quad (1)$$

в котором коэффициент при  $dx$  зависит только от  $x$ , а коэффициент при  $dy$  — только от  $y$ . Такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Будем предполагать, что функции  $X(x)$  и  $Y(y)$  непрерывны при всех рассматриваемых значениях  $x$  и  $y$ . Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$d \left( \int_{x_0}^x X(x) dx + \int_{y_0}^y Y(y) dy \right) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{x_0}^x X(x) dx + \int_{y_0}^y Y(y) dy = C. \quad (2)$$

Это есть общий интеграл уравнения (1). Особых решений нет.

Решение задачи Коши с начальными данными  $x_0, y_0$  в предположении, что  $X^2(x_0) + Y^2(y_0) \neq 0$ , можно найти (в неявном виде) по формуле

$$\int_{x_0}^x X(x) dx + \int_{y_0}^y Y(y) dy = 0, \quad (3)$$

которая определяет искомое решение в виде  $y = y(x)$ , где  $y(x_0) = y_0$  или  $x = x(y)$ , где  $x(y_0) = x_0$ .

Действительно, пусть, например,  $Y(y_0) \neq 0$ . Обозначив левую часть равенства (3) через  $F(x, y)$ ,

$$F(x, y) \equiv \int_{x_0}^x X(x) dx + \int_{y_0}^y Y(y) dy, \quad (4)$$

перепишем его в виде

$$F(x, y) = 0. \quad (5)$$

Легко убедиться, что при сделанных предположениях относительно  $X(x)$  и  $Y(y)$ , функция  $F(x, y)$  удовлетворяет всем условиям известной из курса математического анализа теоремы о существовании неявной функции  $y=y(x)$ , определяемой уравнением (5) [149, т. II, п. 315]. В самом деле:

1) можно указать такой прямоугольник

$$R: |x-x_0| \leq A, \quad |y-y_0| \leq B \quad (A>0, B>0)$$

с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , в котором функция  $F(x, y)$  будет определена и непрерывна вместе с частными производными  $F_x'$  и  $F_y'$ .

(Для этого достаточно взять числа  $A$  и  $B$  настолько малыми, чтобы функции  $X(x)$  и  $Y(y)$  были определены и непрерывны соответственно в интервалах  $|x-x_0| \leq A$  и  $|y-y_0| \leq B$ , после чего непрерывность  $F(x, y)$  непосредственно вытекает из ее вида (4) (почему?).  $F_x'$  и  $F_y'$  существуют и непрерывны в  $R$ , ибо  $F_x' = X(x)$ ,  $F_y' = Y(y)$ , а  $X(x)$  и  $Y(y)$  непрерывны при всех рассматриваемых значениях  $x$  и  $y$ );

2)  $F(x_0, y_0) = 0$  (это очевидно из (4));

3)  $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$  (ибо  $F_y'(x_0, y_0) = Y(y_0)$ , а  $Y(y_0) \neq 0$ ).

Поэтому существует одна и только одна функция  $y=y(x)$ , определенная и непрерывно дифференцируемая в некотором интервале  $|x-x_0| \leq a$  ( $0 < a \leq A$ ) и такая, что  $F(x, y(x)) \equiv 0$  в этом интервале и  $y(x_0) = y_0$ .

Функция  $y=y(x)$  является решением уравнения (1). Это следует из того, что, согласно правилу дифференцирования неявных функций, имеет место тождество

$$y' \equiv - \frac{F_x'(x, y(x))}{F_y'(x, y(x))},$$

которое можно переписать так:

$$y'(x) \equiv - \frac{X(x)}{Y(y(x))}$$

или

$$X(x)dx + Y(y(x))d(y(x)) \equiv 0,$$

а это и означает, что  $y=y(x)$  есть решение уравнения (1).

Следовательно,  $y=y(x)$  является решением поставленной задачи Коши. Это решение единственно.

В формуле (2) можно не писать пределов интегрирования, ибо числа, получающиеся от подстановки нижних пределов, мы можем включить в произвольную постоянную  $C$ . Тогда получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

К уравнению с разделенными переменными легко приводится уравнение вида

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0, \quad (6)$$

в котором коэффициенты при  $dx$  и  $dy$  представляют собою произведения функции от  $x$  на функцию от  $y$ . Такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Относительно функций  $m(x)$ ,  $n(y)$ ,  $m_1(x)$  и  $n_1(y)$  будем предполагать, что они непрерывны при всех рассматриваемых значениях  $x$  и  $y$ .

Умножая обе части уравнения (6) на

$$\frac{1}{n(y)m_1(x)},$$

получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0 \quad (n(y) \neq 0, m_1(x) \neq 0). \quad (7)$$

Его общим интегралом, а следовательно, и общим интегралом уравнения (6) будет

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C \quad (8)$$

или

$$\int_{x_0}^x \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^y \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C, \quad (9)$$

где  $m_1(x_0) \neq 0$ ,  $n(y_0) \neq 0$ .

Полагая в (9)  $C=0$  и предполагая дополнительно, что  $m(x_0)$  и  $n_1(y_0)$  не равны нулю одновременно, получим решение с начальными данными  $x_0$ ,  $y_0$ :

$$\int_{x_0}^x \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^y \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0.$$

**22. Особые решения.** Разделяя переменные, мы делили обе части уравнения (6) на  $n(y)m_1(x)$ . При этом мы могли потерять решения, определяемые уравнениями  $n(y)=0$  и  $m_1(x)=0$ , отмеченными в формуле (7) в скобках. В самом деле, если  $b$  есть (вещественный) корень уравнения  $n(y)=0$ , то, полагая в (6)  $y=b$ , получим тождество

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)db \equiv 0.$$

Следовательно,  $y=b$  есть решение уравнения (6). Аналогично убеждаемся, что  $x=a$ , где  $a$  — корень уравнения  $m_1(x)=0$ , тоже является решением уравнения (6). Если эти решения не входят в семейство (8) или (9), т. е. не получаются из (8) или из (9) при частных числовых значениях  $C$ , то они представляют собой особые решения уравнения (6).

Из решения  $y=b$  мы должны исключить точку с абсциссой  $x=a$ , так как в точке  $x=a$ ,  $y=b$  уравнение (6) не определяет наклон поля  $y'$ . По той же причине из решения  $x=a$  следует исключить точку с ординатой  $y=b$ .

Таким образом, решения вида  $y=b$  ( $x \neq a$ ) и  $x=a$  ( $y \neq b$ ) примыкают к точке  $x=a$ ,  $y=b$  и могут оказаться особыми. Других особых решений нет.

### 23. Примеры.

**Пример 1.** Проинтегрировать уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0 \quad (10)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку  $(0, 1)$ .

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (x = \pm 1, y = \pm 1?).$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C \quad (C > 0) \quad (11)$$

есть общий интеграл. Все решения

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 & (-1 < x < 1), \\ y &= -1 & (-1 < x < 1), \\ x &= 1 & (-1 < y < 1), \\ x &= -1 & (-1 < y < 1), \end{aligned} \right\}$$

примыкающие соответственно к точкам  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ ;  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ;  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  являются особыми, так как они не получаются из формулы общего интеграла (11) ни при каких числовых значениях произвольной постоянной и на каждом из них нарушается единственность решения задачи Коши. Они ограничивают область существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (10).

Решим поставленную задачу Коши. Полагая в общем интеграле (11)  $x=0$ ,  $y=1$ , находим:  $C=1$ . Подставляя найденное значение  $C$  в общий интеграл (11), получим решение нашей задачи Коши в виде

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1.$$

Но через точку  $(0, 1)$  проходит и особое решение  $y=1$ . Окончательно получаем две интегральные кривые, проходящие через точку  $(0, 1)$ :

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1 \quad \text{и} \quad y=1 \quad (-1 < x < 1).$$

**Пример 2.** Дано уравнение

$$\sin x dy - y \ln y dx = 0 \quad (y \geq 0). \quad (12)$$

Найти интегральные кривые, проходящие через точки  $M_1(0, 1)$  и  $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ :

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y \ln y} - \frac{dx}{\sin x} = 0 \quad (y \ln y = 0, \sin x = 0?).$$

Следовательно,

$$y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \quad (13)$$

есть общее решение уравнения (12).

Особых решений нет (почему?).

Переходя к решению предложенных задач Коши, заметим, что в точке  $M_1(0, 1)$  поле не определено. Однако, подставляя в общее решение (13) значения  $x=0$ ,  $y=1$ , получаем:  $1 = e^{C \cdot 0}$ . Это равенство справедливо при всех значениях  $C$ . Следовательно, все интегральные кривые (13) примыкают к точке  $M_1(0, 1)$ . Мы имеем здесь особый случай задачи Коши: начальные значения заданы в точке, где поле не определено. Всегда, решая задачу Коши, следует сначала проверить, не имеем ли мы дело с этим особым случаем.

Найдем теперь интегральную кривую, проходящую через точку  $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

$$C \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

Случай не особый. Имеем  $1 = e^C$ . Отсюда  $C=0$  и, следовательно,  $y=1$  ( $0 < x < \pi$ ) — искомая интегральная кривая.

В заключение настоящего параграфа отметим, что рассмотренные выше уравнения вида  $y' = f(x)$ ,  $y' = f(y)$ ,  $X(x)dx + Y(y)dy = 0$  можно считать частными случаями уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение с разделяющимися переменными является одним из основных типов уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной и допускающих интегрирование в квадратурах.

Многие дифференциальные уравнения приводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи соответствующей замены искомой функции и независимой переменной. В следующих двух параграфах мы рассматриваем два наиболее важных типа таких уравнений.

## § 4. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

## 24. Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

в котором  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  суть однородные функции одной и той же степени  $m$ , причем  $m$  может быть любым вещественным числом. Такое уравнение называется *однородным*.

Как известно [149, т. I, п. 145], функция  $f(x, y)$  называется *однородной функцией степени  $m$* , если при всяком  $t$  имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \quad (2)$$

т. е. при умножении обоих аргументов  $x$  и  $y$  на один и тот же множитель  $t$  функция приобретает этот же множитель в  $m$ -й степени. Полагая в тождестве (2)  $t = \frac{1}{x}$ , получим

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} f(x, y),$$

откуда

$$f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Пользуясь формулой (3), мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = - \\ &= -\frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Из формулы (4) следует, что в начале координат однородное уравнение, вообще говоря, не задает определенного направления поля, так что через начало координат не проходит ни одна интегральная кривая. Интегральные кривые однородного уравнения могут лишь примыкать к началу координат (см. п. 4, пример 3). Поведение интегральных кривых однород-



ного уравнения в окрестности начала координат требует специального исследования.\*

**З а м е ч а н и е.** Если в уравнении (1)  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  суть только *положительно однородные* функции одной и той же степени  $m$ , т. е. **тождества**

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y),$$

$$N(tx, ty) = t^m N(x, y)$$

имеют место только при (всех) положительных значениях  $t$ , то уравнение (1) будем называть *положительно однородным*. Оно интегрируется тем же методом, что и однородное уравнение.

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение (1), сделаем замену искомой функции  $y$  по формуле

$$y = zx, \quad (5)$$

где  $z$  — новая искомая функция от  $x$ . Будем иметь

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(zdx + xdz) = 0. \quad (6)$$

Но, так как

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

то (полагая  $y = zx$ ) имеем

$$M(x, zx) = x^m M(1, z), \quad N(x, zx) = x^m N(1, z).$$

Поэтому уравнение (6) можно переписать так:

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) = 0$$

или (сокращая на  $x^m$  и группируя оставшиеся члены)

$$(M(1, z) + N(1, z)z)dx + xN(1, z)dz = 0 \quad (x \neq 0?). \quad (7)$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)dz}{M(1, z) + N(1, z)z} = 0 \quad (M(1, z) + N(1, z)z \neq 0?).$$

---

\* Для простейшего случая, когда правая часть уравнения (4) есть дробно-линейная однородная функция от  $x$  и  $y$ , это исследование приведено в п. 141.

Интегрируя, находим

$$\ln|x| + \int \frac{N(1, z) dz}{M(1, z) + N(1, z)z} = \ln|C_1|,$$

$$x = Ce^{-\int \frac{N(1, z) dz}{M(1, z) + N(1, z)z}} \quad (C = \pm |C_1|),$$

так что

$$x = Ce^{\Psi(z)}, \quad (8)$$

где

$$\Psi(z) = - \int \frac{N(1, z) dz}{M(1, z) + N(1, z)z}.$$

Заменяя в (8)  $z$  на  $\frac{y}{x}$ , получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$x = Ce^{\Psi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (9)$$

**25. Особые решения.** Разделяя переменные в уравнении (7), мы могли потерять решения вида  $z = z_i$ , где  $z_i$  — корень уравнения

$$M(1, z) + N(1, z)z = 0.$$

Подставив эти значения  $z$  в формулу (5), найдем, что

$$y = z_i x \quad (x \neq 0) \quad (10)$$

(полупрямые, примыкающие к началу координат) суть решения однородного уравнения. Эти решения могут содержаться в формуле общего интеграла, но могут быть и особыми. Особыми решениями могут быть также полуоси оси  $Oy$ :  $x = 0$  ( $y \neq 0$ ). Других особых решений быть не может.

**26. Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Заметим прежде всего, что интегральными кривыми могут быть только кривые, расположенные в первом и третьем квадрантах, и полуоси осей координат, ибо  $x$  и  $y$  не могут иметь противоположных знаков.

Положим  $y = zx$ . Получим

$$z'x + z = \sqrt{z}, \quad \frac{dz}{z - \sqrt{z}} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (z - \sqrt{z} = 0, \quad x = 0?).$$

Интегрируя, найдем

$$2 \ln |\sqrt{z}-1| + \ln |x| = \ln |C_1|$$

или

$$|\sqrt{z}-1| \sqrt{|x|} = \sqrt{|C_1|}, \quad (\sqrt{z}-1) \sqrt{|x|} = C \quad (C = \pm \sqrt{|C_1|}).$$

Возвращаясь к переменной  $y$  (заменяя  $z$  на  $\frac{y}{x}$ ), получим

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) \sqrt{|x|} = C,$$

откуда

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = C, \quad \text{если } x > 0, y > 0,$$

$$\sqrt{-y} - \sqrt{-x} = C, \quad \text{если } x < 0, y < 0.$$

Рассмотрим уравнение  $z - \sqrt{z} = 0$ . Оно имеет корни:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ . Им соответствуют решения  $y = 0$  ( $x \neq 0$ ) и  $y = x$  ( $x \neq 0$ ). Первые из них — особые, вторые — частные. Полуси оси  $Oy$ :  $x = 0$  ( $y \neq 0$ ) тоже являются решениями. Эти решения — особые.

**27. Геометрическое свойство интегральных кривых однородного уравнения.** Поле, определяемое однородным уравнением, а следовательно, и интегральные кривые этого уравнения обладают одним характерным свойством. Чтобы выяснить это свойство, будем рассматривать однородное уравнение в виде (4).

Заметим, что правая часть уравнения (4) сохраняет постоянное значение во всех точках каждой полупрямой  $y = kx$  ( $x \neq 0$ ), выходящей из начала координат (если  $\varphi(k)$  определено), так что все эти полупрямые являются изоклинами уравнения (4).

Возьмем какую-нибудь интегральную кривую, отличную от полупрямой, выходящей из начала координат. Если мы увеличим или уменьшим радиус-векторы всех ее точек в одно и то же число раз, то получим кривую, у которой направление касательных во всех точках будет такое же, что и в соответствующих точках взятой кривой. Поэтому полученная кривая будет также интегральной кривой уравнения (4). Преобразование, о котором идет речь, равносильно замене текущих координат данной кривой текущими координатами  $x_1, y_1$  новой кривой по формулам:

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky \quad (11)$$

и называется *преобразованием подобия с центром подобия в начале координат*.

Итак, всякая кривая, полученная из интегральной кривой однородного уравнения при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат, является тоже интегральной кривой.

Легко видеть, что и обратно, все интегральные кривые, входящие в состав общего интеграла (9) и не являющиеся полупрямыми, выходящими из начала координат, могут быть получены при помощи преобразования вида (11) из одной такой интегральной кривой.

Действительно, пусть

$$x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{и} \quad x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

суть две интегральные кривые указанного вида. Обозначив текущие координаты второй интегральной кривой через  $x_1$ ,  $y_1$ , перепишем ее уравнение в виде

$$x_1 = C_2 e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}.$$

Умножив обе части уравнения

$$x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

на  $k$ , получим

$$kx = kC_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{или} \quad kx = kC_1 e^{\psi\left(\frac{ky}{kx}\right)}$$

Если теперь выбрать  $k = \frac{C_2}{C_1}$  и применить формулы (11), то и получим

$$x_1 = C_2 e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)} \quad \text{или} \quad x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Из доказанного свойства интегральных кривых однородного уравнения, в частности, следует:

1) если интегральная кривая, отличная от полупрямой (10), выходящей из точки  $(0, 0)$  и, следовательно, заключенная на некотором участке изменения  $x$  между двумя из полупрямых (10), примыкает к точке  $(0, 0)$ , то и все интегральные кривые, заключенные между этими полупрямыми, примыкают к точке  $(0, 0)$ ;

2) если некоторая кривая является интегральной кривой, то и симметричная относительно начала координат кривая тоже является интегральной кривой;

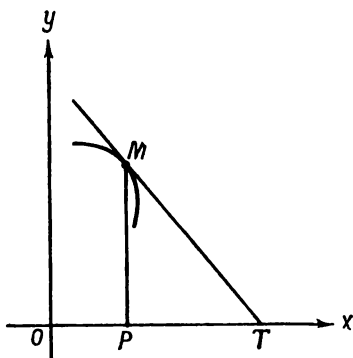
3) если одна из интегральных кривых замкнута, то и все интегральные кривые замкнуты.

Все это дает нам некоторое представление о поведении интегральных кривых однородного уравнения во всей области задания уравнения.\*

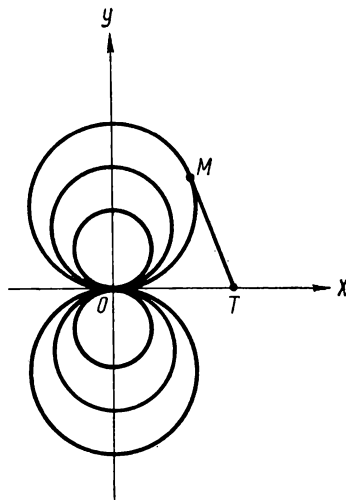
**Пример.** Найти кривые, у которых отрезок  $MT$  касательной от точки касания до пересечения с осью  $Ox$  равен отрезку  $OT$  оси  $Ox$  (рис. 16).

Так как

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}, \quad OT = x - \frac{y}{y'},$$



Р и с. 16



Р и с. 17

то условие  $MT = OT$  приводит к дифференциальному уравнению

$$y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2,$$

откуда

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$y = zx, \quad z'x = \frac{z+z^3}{1-z^2}; \quad \frac{1-z^2}{z+z^3} dz = \frac{dx}{x} \quad (z=0, x=0?),$$

$$\frac{z}{1+z^2} = Cx,$$

---

\* Более подробное исследование поведения интегральных кривых однородного уравнения см. в книге [53].

откуда  $\left( \text{заменяя } z \text{ на } \frac{y}{x} \right)$  получаем общий интеграл:

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C.$$

Особых решений нет (почему?).

Интегральные кривые суть окружности с центрами на оси  $Oy$ , примыкающие к началу координат и полуоси оси  $Ox$  (рис. 17). Все окружности, расположенные в верхней (нижней) полуплоскости, можно получить из одной из них при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.

**28. Простейшее уравнение, приводящееся к однородному.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f \left( \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c} \right). \quad (12)$$

Если  $c_1 = c = 0$ , то это уравнение однородное, ибо оно приводится к виду (4). Пусть хоть одно из чисел  $c_1, c$  отлично от нуля и предположим еще, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сделаем линейную замену обеих переменных: \*

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta.$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f \left( \frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c} \right).$$

Выбрав  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0, \\ a\alpha + b\beta + c &= 0, \end{aligned} \right\}$$

получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f \left( \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta} \right).$$

Интегрируя его и возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , найдем общий интеграл уравнения (12).

---

\* Геометрически это соответствует переносу начала координат в точку  $(\alpha, \beta)$ .

Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

то мы имеем  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$ , откуда  $a_1 = ka$ ,  $b_1 = kb$ . Поэтому уравнение (12) можно переписать в этом случае так:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) = f_1(ax+by).$$

Введя здесь вместо  $y$  новую неизвестную функцию  $z$  по формуле

$$z = ax + by,$$

мы приходим к уравнению, не содержащему независимой переменной:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf_1(z).$$

## § 5. ОБОБЩЕННОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

**29. Построение общего интеграла. Особые решения.** Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется *обобщенным однородным*, если существует такое число  $k$ , что левая часть уравнения становится однородной функцией от величин  $x$ ,  $y$ ,  $dx$  и  $dy$  при условии, что они считаются величинами соответственно первого,  $k$ -го, нулевого и  $(k-1)$ -го измерений, т. е. если равенство

$$M(tx, t^k y)dx + N(tx, t^k y)t^{k-1}dy = t^m [M(x, y)dx + N(x, y)dy]$$

выполняется при всех  $t$  тождественно относительно  $x$ ,  $y$ ,  $dx$  и  $dy$  или, что то же, при всех  $t$  выполняются тождества: \*

$$\left. \begin{aligned} M(tx, t^k y) &= t^m M(x, y), \\ N(tx, t^k y) &= t^{m-k+1} N(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Полагая в тождествах (2)  $t = \frac{1}{x}$ , находим:

---

\* При  $k=1$  имеем обычное однородное уравнение.

$$\left. \begin{aligned} M\left(1, \frac{1}{x^k} y\right) &= \frac{1}{x^m} M(x, y), \\ N\left(1, \frac{1}{x^k} y\right) &= \frac{1}{x^{m-k+1}} N(x, y), \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= x^m M\left(1, \frac{1}{x^k} y\right), \\ N(x, y) &= x^{m-k+1} N\left(1, \frac{1}{x^k} y\right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из этих формул ясно, что при  $k=0$  обобщенное однородное уравнение вырождается в уравнение с разделяющимися переменными.

Покажем, что *при всяком  $k$ , отличном от нуля, обобщенное однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить*

$$y = zx^k, \quad (4)$$

где  $z$  — новая неизвестная функция.

Действительно, выполняя в уравнении (1) подстановку (4), получим

$$M(x, zx^k)dx + N(x, zx^k)(x^k dz + kzx^{k-1}dx) = 0. \quad (5)$$

Воспользуемся тождествами (3), положив в них  $y = zx^k$ . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} M(x, zx^k) &= x^m M(1, z), \\ N(x, zx^k) &= x^{m-k+1} N(1, z), \end{aligned} \right\}$$

так что уравнение (5) можно переписать в виде

$$x^m M(1, z)dx + x^{m-k+1} N(1, z)(x^k dz + kzx^{k-1}dx) = 0$$

или (сокращая на  $x^m$  и собирая члены при  $dx$  и  $dz$ )

$$(M(1, z) + kN(1, z)z)dx + xN(1, z)dz = 0 \quad (x \neq 0?).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)dz}{M(1, z) + kN(1, z)z} = 0 \quad (M(1, z) + kN(1, z)z \neq 0?).$$

Интегрируя, находим

$$x = Ce^{\Psi(z)},$$



где

$$\psi(z) = - \int \frac{N(1, z) dz}{M(1, z) + kN(1, z)z}.$$

Возвращаясь к искомой функции  $y$ , получаем общий интеграл уравнения (1) в виде

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x^k}\right)}.$$

Особыми решениями могут быть только

$$x=0 \quad (y \neq 0) \quad \text{и} \quad y=zx^k \quad (x \neq 0),$$

где  $z_i$  — корень уравнения

$$M(1, z) + kN(1, z)z = 0.$$

**30. Пример.** Рассмотрим уравнение

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0. \quad (6)$$

Приравнявая измерения всех членов  $6dx$ ,  $-x^2y^2dx$  и  $x^2dy$  в предположении, что  $x$ ,  $y$ ,  $dx$  и  $dy$  суть величины соответственно 1-го,  $k$ -го, нулевого и  $(k-1)$ -го измерений, получаем систему

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1.$$

Эта система совместна, причем  $k = -1$ . Следовательно, уравнение (6) есть обобщенное однородное. Для интегрирования его нужно сделать подстановку

$$y = \frac{z}{x},$$

после чего получим уравнение

$$xdz - (z^2 + z - 6)dx = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$z = \frac{2 + 3Cx^5}{1 - Cx^5}.$$

Возвращаясь к функции  $y$ , получаем общее решение уравнения (6) в виде

$$y = \frac{2 + 3Cx^5}{x(1 - Cx^5)}.$$

Особых решений нет (почему?).

## § 6. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

## 31. Понятие о линейном уравнении. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

называется *линейным*. Оно содержит искомую функцию  $y$  и ее производную  $y'$  только в первой степени. Если записать его в виде, разрешенном относительно производной, то получим уравнение

$$y' = -p(x)y + q(x) \equiv f(x, y), \quad (2)$$

правая часть которого есть *линейная* функция от  $y$  с коэффициентами, зависящими от  $x$  (которые, в частности, могут быть и постоянными).

Относительно функций  $p(x)$  и  $q(x)$  будем предполагать, что они непрерывны в интервале  $(a, b)$  ( $a \geq -\infty$ ,  $b \leq \infty$ ).

Если в уравнении (1) функция  $q(x)$  тождественно равна нулю во всем интервале  $(a, b)$ , то это уравнение принимает вид

$$y' + p(x)y = 0 \quad (3)$$

и называется *однородным*. Его левая часть есть *однородная* линейная функция от  $y$  и  $y'$ . Уравнение (1), в котором  $q(x) \neq 0$ , называется *неоднородным*.

Уравнение вида

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = q(x), \quad (4)$$

в котором коэффициент при  $y'$  не равен единице, также называется *линейным*. Если  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$  и  $q(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$ , причем  $p_0(x)$  не обращается (в этом интервале) в нуль, то уравнение (4) делением обеих частей его на  $p_0(x)$  приводится к уравнению вида (1), в котором коэффициент при искомой функции и правая часть непрерывны в интервале  $(a, b)$ .

**32. Существование и единственность решения задачи Коши. Общие свойства линейного уравнения.** Из теоремы Пикара о достаточном условии существования и единственности решения задачи Коши, сформулированной в п. 7, следует, что *при сделанных предположениях относительно  $p(x)$  и  $q(x)$  уравнение (1) имеет единственное решение*

$$y = y(x),$$

*удовлетворяющее начальному условию*

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где в качестве  $x_0$  можно брать любое число из интервала  $(a, b)$ , а  $y_0$  мож-

но выбирать произвольно, т. е. через любую точку  $M_0(x_0, y_0)$  полосы (рис. 18)

$$a < x < b, \quad -\infty < y < \infty \quad (5)$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

В самом деле, если записать уравнение (1) в виде (2) (ср. п. 13), то ясно, что можно построить такой прямоугольник

$$R: |x - x_0| \leq a_1, \quad |y - y_0| \leq b_1$$

с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , целиком содержащийся внутри полосы (5), что внутри него правая часть уравнения (2) будет удовлетворять обоим условиям теоремы Пикара, ибо в этом прямоугольнике  $f(x, y)$  непрерывна и ограничена, а  $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ , так что  $\frac{\partial f}{\partial y}$  существует и ограничена.

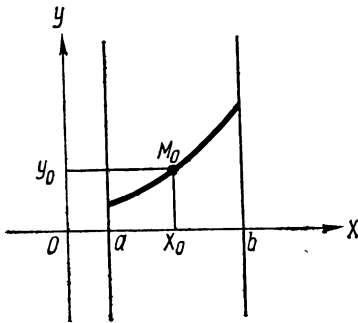


Рис. 18

А тогда уравнение (2) или, что то же, уравнение (1) имеет одно и только одно решение с начальными данными  $x_0, y_0$ . Это решение непрерывно дифференцируемо. Ниже мы докажем, что оно определено во всем интервале  $(a, b)$ . Всякое решение линейного уравнения (1) есть частное решение, так как во всей области решения этого уравнения, т. е. во всей полосе (5) имеет место существование и единственность решения задачи Коши. *Линейное уравнение (1) при сделанных предположениях не имеет особых решений.*

Таким образом, вся полоса (5) заполнена непересекающимися гладкими интегральными кривыми уравнения (1), причем каждая интегральная кривая определена во всем интервале  $(a, b)$  и представляет собою график частного решения.

При этом *интегральные кривые однородного уравнения (3) не могут пересекать ось  $Ox$* , ибо в противном случае в точке пересечения нарушалась бы единственность решения задачи Коши. В самом деле, пересечение могло бы иметь место только в интервале  $(a, b)$  оси  $Ox$ , а сам этот интервал, т. е.  $y=0$  ( $a < x < b$ ) тоже, очевидно, является решением уравнения (3), так что через точку пересечения проходили бы две интегральные кривые. Отсюда следует, что *если какое-нибудь решение однородного линейного уравнения обращается в нуль в одной точке интервала  $(a, b)$ ,\* то оно тождественно равно нулю во всем этом интервале, если же оно отлично от нуля хотя в одной точке интер-*

\* Т. е. интервала непрерывности коэффициента  $p(x)$ .

вала  $(a, b)$ , то оно не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.

Прежде чем перейти к интегрированию линейного уравнения, отметим два общих свойства этого уравнения.

1. *Линейное уравнение сохраняет свой вид (т. е. остается линейным) при любой замене независимой переменной*

$$x = \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  — любая функция от  $t$ , определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале  $(t_0, t_1)$ , причем  $a = \varphi(t_0)$ ,  $b = \varphi(t_1)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  во всем интервале  $(t_0, t_1)$ .<sup>\*</sup> В самом деле, мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Поэтому, подставляя  $x = \varphi(t)$  в (1), получим линейное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + p(\varphi(t))\varphi'(t)y = q(\varphi(t))\varphi'(t),$$

причем его коэффициент при  $y$  и правая часть непрерывны в интервале  $(t_0, t_1)$ .

2. *Линейное уравнение сохраняет свой вид при любой линейной замене искомой функции*

$$y = \alpha(x)z + \beta(x),$$

где  $z$  — новая неизвестная функция, а  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — произвольные непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ , причем  $\alpha(x) \neq 0$  в  $(a, b)$ . Действительно, так как

$$y' = \alpha'(x)z + \alpha(x)z' + \beta'(x),$$

то после преобразования получим

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' + \beta'(x) + p(x)(\alpha(x)z + \beta(x)) = q(x)$$

или

$$z' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)}z = \frac{q(x) - \beta'(x) - p(x)\beta(x)}{\alpha(x)},$$

т. е. опять линейное уравнение, у которого коэффициент при искомой функции и правая часть непрерывны в  $(a, b)$ .

<sup>\*</sup> При этих предположениях существует обратная функция  $t = \psi(x)$ , определенная и непрерывная вместе с первой производной в интервале  $(a, b)$ .

Заметим, что если  $\alpha(x)$  обращается в нуль в некоторых точках интервала  $(a, b)$ , то преобразованное уравнение будет тоже линейным, но коэффициент при искомой функции и правая часть могут иметь разрывы в этих точках.

**33. Построение общего решения однородного линейного уравнения.** Покажем, что *линейное уравнение всегда интегрируется в квадратурах*. Рассмотрим сначала однородное линейное уравнение (3)

$$y' + p(x)y = 0,$$

где функция  $p(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ .

Перепишав это уравнение в виде

$$dy + p(x)ydx = 0,$$

получаем уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \quad (y \neq 0?),$$

откуда

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad (6)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Все решения уравнения (3) содержатся в формуле (6), так как разделяя переменные, мы могли потерять лишь очевидное нулевое решение  $y=0$ , но и оно содержится в (6) при  $C=0$ . Из формулы (6) видно, что *всякое решение уравнения (3) определено во всем интервале  $(a, b)$* .

Покажем, что *функция (6) является общим решением уравнения (3) в области (5), т. е. во всей области задания уравнения (3)*.

В самом деле, уравнение (6) разрешимо относительно  $C$  в области (5), так что мы имеем

$$C = ye^{\int p(x)dx},$$

где функция справа определена в области (5). Кроме того, по построению функция (6) является решением уравнения (3) в интервале  $(a, b)$  при всех значениях произвольной постоянной  $C$ . А это, согласно сказанному в п. 8, и означает, что функция (6) есть общее решение уравнения (3) в области (5).

Заменим в формуле (6) неопределенный интеграл определенным интегралом с переменным верхним пределом  $x$  и фиксированным нижним пределом  $x_0$  ( $a < x_0 < b$ ). Получим

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \quad (7)$$

Положим здесь  $x=x_0$  и обозначим  $y(x_0) \equiv y_0$ . Тогда  $y_0=C$ . Подставив это значение  $C$  в (7), получим

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}. \quad (8)$$

Если  $y_0$  произвольно, то эта формула является общим решением уравнения (3) в области (5) в форме Коши. Если же  $y_0$  фиксировано, то это есть решение уравнения (3) с начальными данными  $x_0, y_0$ .

Из формулы (8) мы снова видим, что если начальное значение  $y_0$  решения  $y=y(x)$  однородного линейного уравнения (3) равно нулю, то  $y \equiv 0$  ( $a < x < b$ ), и если  $y_0 \neq 0$ , то решение  $y=y(x)$  не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(a, b)$  (см. п. 32).

Заметим, что если  $a=-\infty, b=\infty$ , так что область (5) принимает вид

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$

то формула (8) дает решение задачи Коши для уравнения (3) с любыми наперед заданными начальными данными  $x_0, y_0$ , причем каждое решение будет определено при всех значениях  $x$ .

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

Здесь коэффициент  $p(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  есть функция, определенная и непрерывная в интервале  $(-1, 1)$ . Пользуясь формулой (6), найдем

$$y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это есть общее решение рассматриваемого уравнения в области

$$-1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty.$$

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$y' + 2xy = 0.$$

В этом случае  $p(x)=2x$  не имеет точек разрыва. Поэтому всякое решение определено при всех  $x$ . Действительно, интегрируя данное уравнение, получаем

$$y = Ce^{-x^2},$$

откуда и вытекает наше утверждение.

**Пример 3.** Найти решение уравнения

$$y' - y \cos x = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y=1 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Пользуясь формулой (8), получаем

$$y = e^{\int_0^x \cos x \, dx} \quad \text{или} \quad y = e^{\sin x}.$$

**34. Свойства решений однородного линейного уравнения.** Решения однородного линейного уравнения обладают следующими двумя характеристическими для этого уравнения свойствами.

1. Если  $y_1$  есть частное решение уравнения (3), т. е. имеет место тождество

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv 0 \quad (a < x < b), \quad (9)$$

то функция

$$y = Cy_1, \quad (10)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

Действительно, полагая в левой части уравнения (3)  $y = Cy_1$  и принимая во внимание тождество (9), получаем

$$(Cy_1)' + p(x)(Cy_1) = C(y_1' + p(x)y_1) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Следовательно,  $y = Cy_1$  есть решение уравнения (3).

2. Если  $y_1$  — ненулевое частное решение уравнения (3), то формула (10), где  $C$  — произвольная постоянная, дает общее решение уравнения (3) в области (5).

В самом деле, уравнение (10) разрешимо в области (5) относительно  $C$ :

$$C = \frac{y}{y_1}$$

и, как показано выше, функция (10) является решением уравнения (3) при всех значениях  $C$ . Следовательно, функция (10) есть общее решение уравнения (3) в области (5).

Таким образом, для построения общего решения однородного линейного уравнения достаточно найти какое-нибудь одно ненулевое частное решение.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y' + ay = 0, \quad (11)$$

где коэффициент  $a$  — постоянное вещественное число. Очевидно, что

$$y_1 = e^{-ax}$$

будет ненулевым частным решением уравнения (11) в интервале  $(-\infty, \infty)$ , т. е. на всей оси  $Ox$ . Поэтому функция

$$y = Ce^{-ax}$$

будет общим решением уравнения (11) на всей плоскости  $(x, y)$ .

Из свойства 2 следует, что *всякие два ненулевых частных решения*  $y_1$  и  $y_2$  *уравнения (3) связаны соотношением вида*

$$y_2 \equiv \alpha y_1 \quad (a < x < b),$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная, отличная от нуля.

**35. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения.** Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Предположим, что нам известно некоторое решение  $y_1$  этого уравнения, т. е. справедливо тождество

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv q(x) \quad (a < x < b). \quad (12)$$

Введем новую неизвестную функцию  $z$  по формуле

$$y = y_1 + z. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (1), имеем

$$y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z = q(x).$$

Отсюда, согласно тождеству (12), получаем

$$z' + p(x)z = 0. \quad (14)$$

Мы получили для определения  $z$  однородное линейное уравнение, левая часть которого имеет тот же вид, что и левая часть уравнения (1).

Уравнение (14) называется *однородным линейным уравнением, соответствующим неоднородному линейному уравнению (1)*. Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$z = Ce^{-\int p(x) dx}, \quad (15)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Подставляя найденное значение  $z$  в (13), получим

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x) dx}. \quad (16)$$

Все решения уравнения (1) содержатся в формуле (16). Эта формула представляет собою *общее решение уравнения (1) в полсе (5)*

$$a < x < b,^* \quad -\infty < y < \infty,$$

т. е. во всей области задания уравнения (1) (почему?).

---

\* Напоминаем, что  $(a, b)$  есть интервал непрерывности функций  $p(x)$  и  $q(x)$ .



Таким образом, мы приходим к следующей теореме, устанавливающей структуру общего решения линейного неоднородного уравнения.

**Т е о р е м а.** Если  $y_1$  есть частное решение неоднородного линейного уравнения (1), то общее решение этого уравнения дается формулой (13), где  $z$  есть общее решение соответствующего однородного линейного уравнения (14).

Из этой теоремы следует, что знание одного частного решения неоднородного уравнения (1) дает возможность получить общее решение при помощи одной квадратуры.

Если мы знаем не одно, а два частных решения  $y_1$  и  $y_2$  неоднородного уравнения (1), то общее решение можно получить вовсе без квадратур, а именно общим решением будет

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1). \quad (17)$$

Действительно, из формулы (13) имеем:  $z = y - y_1$ ; заменяя здесь  $y$  на  $y_2$ , видим, что  $y_2 - y_1$  есть частное решение однородного уравнения (14). Тогда общее решение этого уравнения дается формулой  $z = C(y_2 - y_1)$  и, согласно доказанной теореме, формула (17) дает общее решение уравнения (1).

Выяснив структуру общего решения уравнения (1), укажем один общий способ фактического построения общего решения.

**36. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).** Будем искать решение уравнения (1) в том же виде, что и общее решение (15) соответствующего однородного уравнения (14), но будем считать  $C$  не постоянной, а некоторой непрерывно дифференцируемой функцией от  $x$ , т. е. положим

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx} \quad (18)$$

и выберем функцию  $C(x)$  так, чтобы (18) удовлетворяло уравнению (1). Подставляем (18) в (1):

$$C'(x) e^{-\int p(x) dx} - C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx} + p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx} = q(x),$$

откуда

$$C'(x) = q(x) e^{\int p(x) dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Подставляя это значение  $C(x)$  в формулу (18), получим

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right). \quad (19)$$

Это есть решение уравнения (1) по построению и притом общее в полосе (5), так как оно имеет структуру (13).

В самом деле, переписав (19) в виде суммы двух слагаемых

$$y = C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx,$$

видим, что первое слагаемое является общим решением соответствующего однородного уравнения (14), а второе есть (частное) решение неоднородного уравнения (1), ибо оно содержится в формуле (19) при  $C=0$ .

Таким образом, *общее решение неоднородного линейного уравнения (1) всегда может быть найдено двумя квадратурами.*

Из формулы (19) следует также, что *общее решение линейного уравнения имеет вид*

$$y = A(x)C + B(x), \quad (20)$$

*т. е.  $y$  является линейной функцией от произвольной постоянной  $C$ .*

Такой характер зависимости общего решения от произвольной постоянной имеет место только для линейного уравнения. Действительно, составляя дифференциальное уравнение семейства (20), придем к уравнению вида (1).\*

**Замечание 1.** В формуле общего решения (19) можно заменить неопределенные интегралы определенными интегралами с переменным верхним пределом. Тогда получим

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left( C + \int_{x_0}^x q(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} dx \right),$$

где  $x_0$  — любое фиксированное число из интервала  $(a, b)$ . Здесь  $C = y(x_0) \equiv y_0$ . Поэтому общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} dx \right), \quad (21)$$

где роль произвольной постоянной играет начальное значение  $y_0$  искомой функции  $y$ . Формула (21) является общим решением уравнения (1) в области (5) в форме Коши.

Очевидно, что при фиксированном значении  $y_0$  формула (21) дает решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию  $y=y_0$  при  $x=x_0$ . Это решение определено во всем интервале  $(a, b)$ .

---

\* В предположении, что  $A(x)$  и  $B(x)$  непрерывно дифференцируемы в некотором интервале  $(a, b)$ , причем  $A(x) \neq 0$  в  $(a, b)$ .

Из формулы (21) видно, что решение задачи Коши с начальными данными  $x_0, y_0$  из полосы (5) является непрерывно дифференцируемой функцией независимой переменной  $x$  и начальными данными  $x_0, y_0$  в области

$$a < x < b; \quad a < x_0 < b, \quad |y_0| < \infty.$$

Решение (21) можно переписать в виде

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{-\int_{\xi}^x p(t) dt} d\xi. \quad (22)$$

Это решение может быть найдено и непосредственно, если искать его в виде

$$y = C(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}, \quad (23)$$

где

$$C(x_0) = y_0. \quad (24)$$

Действительно, подставляя (23) в (1), имеем

$$C'(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} - C(x) p(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + p(x) C(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} = q(x),$$

откуда

$$C'(x) = q(x) e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (24), получим, что

$$C(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t) dt} d\xi.$$

Подставим это значение  $C(x)$  в формулу (23):

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t) dt} d\xi \right].$$

Раскрывая скобки, имеем

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \int_{x_0}^x q(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} p(t) dt} d\xi.$$

Внося во втором слагаемом множитель, стоящий перед интегралом, под знак интеграла, перепишем это слагаемое в виде

$$\int_{x_0}^x q(\xi) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} d\xi = \int_{x_0}^x q(\xi) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} d\xi,$$

что и приводит к формуле (22).

**З а м е ч а н и е 2.** Формула (21) показывает, что если  $p(x)$  и  $q(x)$  заданы и непрерывны в интервале  $(-\infty, \infty)$ , так что правая часть линейного уравнения (2) задана и непрерывна на всей плоскости  $(x, y)$ , то и решение с любыми начальными данными  $x_0, y_0$  будет непрерывно и даже непрерывно дифференцируемо при всех значениях  $x$ , так что интегральная кривая, проходящая через любую точку  $(x_0, y_0)$ , будет гладкой кривой на всем бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ .

Для нелинейного уравнения это свойство, вообще говоря, не имеет места. Возьмем, например, уравнение  $y' = y^2$ . Его правая часть определена и непрерывна на всей плоскости  $(x, y)$ . Однако из формулы общего решения

$$y = -\frac{1}{x+C}$$

видно, что никакое из решений, входящих в эту формулу при  $C \neq \infty$  не будет определено при всех значениях  $x$ . Для выяснения причины этого различия между линейными и нелинейными уравнениями требуется более детальная формулировка теоремы Пикара, которая будет дана в гл. 5 (см. пп. 124 и 126).

**З а м е ч а н и е 3.** Если  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны в  $(a, b)$ , за исключением отдельных точек, то формула общего решения (21) остается в силе для всех значений  $x$  из  $(a, b)$ , кроме, быть может, точек разрыва функций  $p(x)$  и  $q(x)$ , если интегралы при переходе через точки разрыва не теряют смысл.

**З а м е ч а н и е 4.** Линейное уравнение

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = f(x)$$

может иметь особые решения вида  $x=a$ , где  $a$  — корень уравнения  $p_0(x)=0$ .

**З а м е ч а н и е 5.** Общее решение неоднородного линейного уравнения (1) можно найти также следующим методом, принадлежащим Эйлеру.

Умножим обе части уравнения (1) на функцию

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}. \quad (25)$$

Получим уравнение

$$y'e^{\int p(x) dx} + p(x)ye^{\int p(x) dx} = q(x)e^{\int p(x) dx},$$

в котором левая часть есть точная производная от функции

$$ye^{\int p(x) dx},$$

так что мы можем переписать это уравнение в виде

$$\left( y e^{\int p(x) dx} \right)' = q(x) e^{\int p(x) dx},$$

откуда

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C$$

и, следовательно,

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

Мы получили тот же вид общего решения, что и при применении метода Лагранжа. Функция (25) называется *интегрирующим множителем* линейного уравнения (1), а изложенный метод Эйлера — *методом интегрирующего множителя*.

**З а м е ч а н и е 6.** Если в линейном уравнении (1)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

функции  $q(x)$  и  $p(x)$  связаны соотношением

$$q(x) = kp(x) \quad (k = \text{const}),$$

то оно принимает вид

$$y' + p(x)y = kp(x) \quad (26)$$

и является уравнением с разделяющимися переменными. Его общим решением будет

$$y = k + C e^{-\int p(x) dx}.$$

Это же общее решение мы можем получить, пользуясь формулой (13), заметив, что  $y_1 = k$  является частным решением уравнения (26).

### 37. Примеры.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y' - \frac{2}{x} y = x. \quad (27)$$

Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее однородное уравнение

$$z' - \frac{2}{x} z = 0$$

имеет общее решение

$$z = Cx^2.$$

Ищем общее решение данного неоднородного уравнения (27) в виде

$$y = C(x)x^2. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), имеем

$$C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x - \frac{2}{x} C(x)x^2 = x$$

или

$$C'(x) = \frac{1}{x},$$

откуда

$$C(x) = \ln |x| + C.$$

Подставляя это значение  $C(x)$  в формулу (28), получим

$$y = x^2(C + \ln |x|).$$

Это и есть общее решение уравнения (27).

Проинтегрируем уравнение (27) методом интегрирующего множителя.

Имеем

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая обе части уравнения (27) на  $\frac{1}{x^2}$ , приведем его к виду

$$\left( \frac{1}{x^2} \cdot y \right)' = \frac{1}{x},$$

откуда

$$y = x^2(C + \ln |x|).$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$xy' + 2x^2y = 1,$$

пользуясь формулой общего решения (19).

Имеем:

$$p(x) = 2x, \quad q(x) = \frac{1}{x}.$$

Подставляя в формулу (19), получим:

$$y = e^{-\int 2x dx} \left( C + \int \frac{1}{x} e^{\int 2x dx} dx \right)$$

или

$$y = e^{-x^2} \left( C + \int \frac{e^{x^2}}{x} dx \right).$$

**38. Геометрическое свойство интегральных кривых линейного уравнения.** Выясним одно геометрическое свойство интегральных кривых линейного уравнения (1)

$$y' + p(x)y = q(x):$$

Пусть  $y_1$  и  $y_2$  — два каких-либо частных решения этого уравнения. Тогда, как показано в п. 35, общее решение может быть записано в виде (17)

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Пусть  $y_3$  — частное решение, отличное от  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда оно содержится в (17) при некотором значении произвольной постоянной  $C = C_1$ :

$$y_3 = y_1 + C_1(y_2 - y_1).$$

Отсюда легко выводятся два тождества:

$$y_3 - y_1 = C_1(y_2 - y_1), \quad y_2 - y_3 = (1 - C_1)(y_2 - y_1),$$

из которых следует, что

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{1 - C_1}{C_1} \equiv \bar{C}_1, \quad (29)$$

т. е. всякая интегральная кривая линейного уравнения делит в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя интегральными кривыми этого уравнения. Установленное свойство может быть использовано при построении интегральных кривых линейного уравнения. Кроме того, из него вытекает одно характерное свойство касательных к интегральным кривым линейного уравнения.

Из равенств

$$\frac{M_3 M_2}{M_1 M_3} = \frac{N_3 N_2}{N_1 N_3} = \dots = \bar{C}_1$$

вытекает (рис. 19), что секущие  $N_1 M_1$ ,  $N_3 M_3$ ,  $N_2 M_2$  ... должны или пересекаться в одной точке, или быть параллельными. При неограниченном приближении отрезка  $N_1 N_2$  к отрезку  $M_1 M_2$  эти секущие перейдут в касательные в точках  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_2$ , ... Таким образом, касательные к интегральным кривым линейного уравнения, проведенные в точках пересечения этих кривых прямой, параллельной оси  $Oy$ , или пересекаются в одной точке, или параллельны [103, задачи 1346 и 1347].

**Пример 1.** Возьмем уравнение

$$y' + y = 0.$$

Рассмотрим три частных решения:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = 2e^{-x}, \quad y_3 = \frac{4}{3}e^{-x}. \quad (30)$$

Здесь

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{2e^{-x} - \frac{4}{3}e^{-x}}{\frac{4}{3}e^{-x} - e^{-x}} = 2,$$

так что (29) выполняется, причем  $\bar{C}_1 = 2$ . Построим касательные I—III к интегральным кривым (30) в точках пересечения их с осью  $Oy$  (рис. 20). Имеем

$$(I) Y - 1 = -X, \quad (II) Y - 2 = -2X, \quad (III) Y - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}X.$$

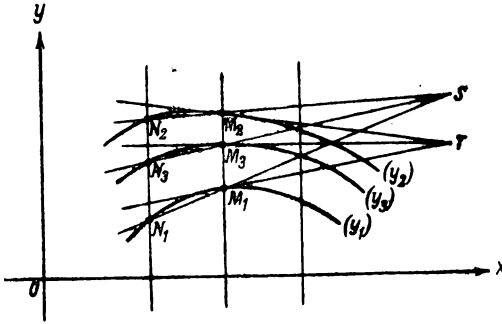


Рис. 19

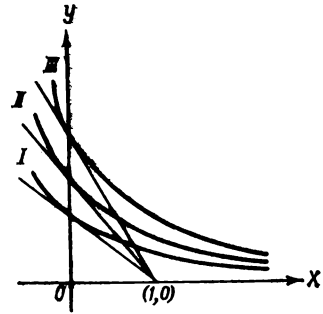


Рис. 20

Все эти касательные [как и касательные  $Y = -C(X-1)$  ко всем интегральным кривым  $y = Ce^{-x}$  в точках пересечения этих кривых с осью  $Oy$ ] пересекаются в точке  $X=1, Y=0$ .

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = x \operatorname{tg} x + 1. \quad (31)$$

Заметив, что  $y_1 = x$  является частным решением, получаем, что общим решением его является

$$y = C \cos x + x.$$

Касательные ко всем интегральным кривым в точках пересечения их с осью  $Oy$  параллельны, так как все они составляют угол  $45^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ . В самом деле,

$$y' = -C \sin x + 1, \quad y'|_{x=0} = 1,$$

какую бы интегральную кривую ни взять.\*

\* Это видно также и из самого дифференциального уравнения (31). Имеем  $y' = 1$  при  $x=0$ , каково бы ни было значение  $y$ .



## § 7. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

**39. Построение общего решения.** Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (1)$$

где  $m$  — любое вещественное число, называется *уравнением Бернулли*. Будем считать, что  $m$  отлично от 0 и 1, ибо в этих случаях уравнение Бернулли вырождается в линейное. Относительно функций  $p(x)$  и  $q(x)$  будем предполагать, что они непрерывны в интервале  $(a, b)$ .

*Уравнение Бернулли всегда может быть сведено к линейному уравнению.* В самом деле, преобразуем сначала правую часть уравнения Бернулли к виду правой части линейного уравнения. Для этого разделим обе части уравнения (1) на  $y^m$ :

$$y^{1-m} y' + p(x) y^{1-m} = q(x) \quad (y^m \neq 0?). \quad (2)$$

Введем теперь новую неизвестную функцию  $z$ , положив

$$y^{1-m} = z \left( y = z^{\frac{1}{1-m}} \right). \quad (3)$$

Тогда

$$(1-m)y^{-m} y' = z'.$$

Поэтому, умножая обе части уравнения (2) на  $1-m$  и выполняя подстановку (3), приходим к линейному уравнению

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x).$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной  $y$ , получим общее решение уравнения Бернулли в виде

$$y = \left( e^{\int (m-1)p(x) dx} \left( C + \int (1-m)q(x) e^{\int (1-m)p(x) dx} dx \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}. \quad (4)$$

**Пример.** Найти кривые, у которых отрезок  $OB$ , отсекаемый касательной на оси  $Oy$ , равен квадрату ординаты  $PM$  точки касания (рис. 21).

Пусть  $M(x, y)$  — любая точка искомой кривой  $y = y(x)$ . Уравнение касательной в точке  $M(x, y)$  имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

где  $X, Y$  — текущие координаты касательной. Полагая в этом уравнении  $X=0$ , находим

$$Y = y - xy',$$

так что

$$OB = y - xy'.$$

Условие задачи приводит к уравнению

$$y - xy' = y^2 \quad \text{или} \quad y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2. \quad (5)$$

Это — уравнение Бернулли. Деля обе части его на  $y^2$ , имеем

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Полагая

$$y^{-1} = z,$$

получим

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}.$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, находим

$$z = \frac{1}{x}(C+x).$$

Следовательно,

$$y = \frac{x}{x+C}. \quad (6)$$

Интегральными кривыми уравнения (5) будут также полуоси оси  $Ox$ :  $y=0$  ( $x \neq 0$ ).

Решениями задачи являются гиперболы (6) ( $C \neq 0$ ), их горизонтальная асимптота  $y=1$  и ось  $Ox$ .

**40. Особое решение.** Деля уравнение (1) на  $y^m$ , мы могли потерять решение  $y=0$ . Очевидно, что это могло случиться лишь при  $m > 0$  (так как при  $m \leq 0$  функция  $y=0$  не является решением уравнения Бернулли). Далее, если  $m > 1$ , то решение  $y=0$  содержится в формуле (4) при  $C = \infty$ . Оно является частным решением, ибо через точки оси  $Ox$  не проходит ни одна интегральная кривая, кроме самой оси  $Ox$ , так что во всякой точке оси  $Ox$  решение существует и единственно. Если же  $0 < m < 1$ , то решение  $y=0$  не содержится в формуле общего решения (4) и является особым, ибо в каждой точке этого решения нарушается единственность решения задачи Коши. Решение  $y=0$  может быть получено из формулы (4) при  $C = C(x)$ . В качестве простейших примеров, иллюстрирующих сказанное,

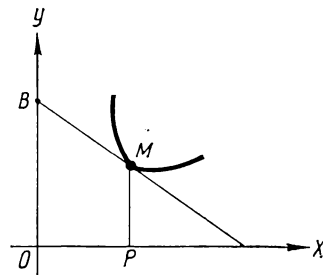


Рис. 21

могут служить уравнения  $y' = y^2$  и  $y' = 2\sqrt{y}$ . Для первого из них решение  $y=0$  — частное, для второго — особое (почему?).

## § 8. УРАВНЕНИЕ ДАРБУ

**41. Построение общего интеграла. Особые решения.** Рассмотрим уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0, \quad (1)$$

где  $M$  и  $N$  — однородные функции степени  $m$ , а  $P$  — однородная функция степени  $l$ . Уравнение такого вида называется *уравнением Дарбу*. Если  $l = m - 1$ , то уравнение Дарбу будет, очевидно, однородным уравнением.

Покажем, что *уравнение Дарбу приводится к уравнению Бернулли*. Для этого сделаем подстановку

$$y = zx, \quad (2)$$

где  $z$  — новая неизвестная функция. Имеем

$$dy = zdx + xdz, \quad xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 dz.$$

Поэтому, переписав уравнение (1) в виде (см. п. 24, формула (3))

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy + x^l P\left(1, \frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 0$$

и выполняя подстановку (2), получим

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) + x^{l+2} P(1, z)dz = 0.$$

Сократим на  $x^m$  \* и соберем члены при  $dx$  и  $dz$ :

$$(M(1, z) + N(1, z)z)dx + (N(1, z)x + P(1, z)x^{l+2-m})dz = 0 \quad (x=0?).$$

Деля обе части этого уравнения на  $M(1, z) + N(1, z)z$  и на  $dz$ , \*\* получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dz} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + N(1, z)z} x = - \frac{P(1, z)}{M(1, z) + N(1, z)z} x^{l+2-m} \\ (M(1, z) + N(1, z)z = 0?). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Это — уравнение Бернулли с искомой функцией  $x$  от независимой переменной  $z$ . Интегрируя уравнение (3) и возвращаясь к перемен-

\* При этом мы, быть может, теряем решение  $x=0$ , если  $m > 0$  и  $N(0, y) \equiv 0$ .

\*\* Тем самым мы принимаем  $z$  за независимую переменную.

ной  $y$ , найдем общий интеграл уравнения Дарбу. Полупрямые вида  $y = z_i x$  ( $x \neq 0$ ), где  $z_i$  — корень уравнения  $M(1, z) + N(1, z)z = 0$ , могут быть особыми решениями.

**42. Пример.** Рассмотрим уравнение

$$xdx + ydy + x^2(xdy - ydx) = 0. \quad (4)$$

Полагая  $y = zx$ , имеем

$$xdx + zx(xdz + zdx) + x^4 dz = 0$$

или

$$(1 + z^2)dx + (zx + x^3)dz = 0 \quad (x \neq 0).$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}x = -\frac{1}{1+z^2}x^3.$$

Это — уравнение Бернулли. Интегрируя его, найдем

$$\frac{1}{x^2} = C(1+z^2) + (1+z^2) \operatorname{arctg} z + z.$$

Возвратившись к переменной  $y$ , получим

$$C(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xy - 1 = 0$$

или

$$\rho^2 = \frac{1}{C + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi} \quad (x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi).^*$$

## § 9. УРАВНЕНИЕ ЯКОБИ

**43. Построение общего интеграла.** Некоторым обобщением одного частного случая уравнения Дарбу является *уравнение Якоби*

$$(a + a_1x + a_2y)(xdy - ydx) - (b + b_1x + b_2y)dy + (c + c_1x + c_2y)dx = 0. \quad (1)$$

Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что  $a = 0$ , ибо если  $a \neq 0$ , то, разместив произведение  $a(xdy - ydx)$  по другим слагаемым, получим опять уравнение Якоби, в котором  $a = 0$ . Свободный член  $a$  введен в (1) только для симметрии выкладок. С этой же целью скобка при  $dy$  взята со знаком минус. Покажем, что *уравнение Якоби всегда интегрируется в квадратурах*. Следуя Н. М. Гюнтеру [41] (другой метод интегрирования уравнения Якоби, принадлежащий проф. Д. Ф. Егорову, см. в учебнике В. В. Степанова [140, с. 41—46]), отметим сначала частные

\* Уравнение (4) интегрируется проще, если сразу перейти к полярным координатам.

случаи, в которых уравнение Якоби вырождается в одно из уравнений, рассмотренных выше:

1)  $a_1 = a_2 = 0$  — уравнение, приводящееся к однородному или к уравнению с разделяющимися переменными;

2)  $a_2 = b_2 = 0$  — уравнение, приводящееся к линейному относительно  $y$ ;

3)  $a_1 = c_1 = 0$  — уравнение, приводящееся к линейному относительно  $x$ ;

4)  $b = c = 0$  — уравнение, приводящееся к уравнению Дарбу.

В других случаях уравнение Якоби всегда может быть приведено к уравнению Дарбу или к линейному уравнению при помощи переноса начала координат или линейной замены искомой функции.

Полагая

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta, \quad (2)$$

получим:

$$a + a_1x + a_2y = A + a_1\xi + a_2\eta, \quad A = a + a_1\alpha + a_2\beta;$$

$$b + b_1x + b_2y = B + b_1\xi + b_2\eta, \quad B = b + b_1\alpha + b_2\beta;$$

$$c + c_1x + c_2y = C + c_1\xi + c_2\eta, \quad C = c + c_1\alpha + c_2\beta;$$

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta,$$

$$xdy - ydx = \xi d\eta - \eta d\xi + \alpha d\eta - \beta d\xi.$$

Поэтому, выполняя в (1) подстановку (2), получим

$$(A + a_1\xi + a_2\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) + (A + a_1\xi + a_2\eta)(\alpha d\eta - \beta d\xi) - \\ - (B + b_1\xi + b_2\eta)d\eta + (C + c_1\xi + c_2\eta)d\xi = 0$$

или

$$(A + a_1\xi + a_2\eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) - [B - A\alpha + (b_1 - a_1\alpha)\xi + (b_2 - a_2\alpha)\eta]d\eta + \\ + [C - A\beta + (c_1 - a_1\beta)\xi + (c_2 - a_2\beta)\eta]d\xi = 0.$$

Если можно выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$B - A\alpha = 0, \quad C - A\beta = 0, \quad (3)$$

то, освободившись от  $A$  путем распределения  $A(\xi d\eta - \eta d\xi)$  по двум последним слагаемым, получим уравнение Дарбу.

Вводя в систему (3) параметр  $\lambda$ , положив  $A = \lambda$ , получим систему

$$A - \lambda = 0, \quad B - \lambda\alpha = 0, \quad C - \lambda\beta = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} a - \lambda + a_1\alpha + a_2\beta &= 0, \\ b + (b_1 - \lambda)\alpha + b_2\beta &= 0, \\ c + c_1\alpha + (c_2 - \lambda)\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следовательно, система

$$\left. \begin{aligned} (a-\lambda)\gamma + a_1\alpha + a_2\beta &= 0, \\ b\gamma + (b_1-\lambda)\alpha + b_2\beta &= 0, \\ c\gamma + c_1\alpha + (c_2-\lambda)\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

должна иметь решение, в котором  $\gamma \neq 0$ . Для этого необходимо (но не достаточно), чтобы  $\lambda$  было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1-\lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

С л у ч а й 1. Если среди корней уравнения (6) существует такой, при котором система (5) имеет требуемое решение, то, взяв решение, в котором  $\gamma=1$ , или, что то же, разрешив систему (4) относительно  $\alpha$  и  $\beta$  и подставив найденные значения  $\alpha$  и  $\beta$  в (2), мы получим подстановку, приводящую уравнение Якоби (1) к уравнению Дарбу.

С л у ч а й 2. Если все ненулевые решения системы (5) таковы, что  $\gamma=0$ , то мы имеем

$$\left. \begin{aligned} a_1\alpha + a_2\beta &= 0, \\ (b_1-\lambda)\alpha + b_2\beta &= 0, \\ c_1\alpha + (c_2-\lambda)\beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\lambda$  — один из корней уравнения (6).

Предположим, что  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$ . Тогда первое из уравнений (7) не является тождеством, а второе и третье суть следствия первого:

$$\left. \begin{aligned} (b_1-\lambda)\alpha + b_2\beta &= k_1(a_1\alpha + a_2\beta), \\ c_1\alpha + (c_2-\lambda)\beta &= k_2(a_1\alpha + a_2\beta). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда следует, что коэффициенты при  $dy$  и  $dx$  в уравнении (1) после вычитания из них соответственно  $\lambda x$  и  $\lambda y$  будут линейными функциями от выражения  $a_1x + a_2y$ , входящего в коэффициент при  $x dy - y dx$ . Вычитая и прибавляя в левой части уравнения (1) выражение  $\lambda(x dy - y dx)$ , получим

$$\begin{aligned} (a-\lambda + a_1x + a_2y)(x dy - y dx) - [b + (b_1-\lambda)x + b_2y] dy + \\ + [c + c_1x + (c_2-\lambda)y] dx = 0 \end{aligned}$$

или (принимая во внимание (8))

$$\begin{aligned} (a-\lambda + a_1x + a_2y)(x dy - y dx) - [b + k_1(a_1x + a_2y)] dy + \\ + [c + k_2(a_1x + a_2y)] dx = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем теперь новую неизвестную функцию  $z$ , положив

$$a_1x + a_2y = a_2z \quad \left( y = z - \frac{a_1}{a_2}x \right). \quad (10)$$

Тогда

$$xdy - ydx = xdz - zdx,$$

и выполняя в уравнении (9) подстановку (10), получим

$$(a - \lambda + a_2z)(xdz - zdx) - (b + k_1a_2z) \left( dz - \frac{a_1}{a_2}dx \right) + (c + k_2a_2z)dx = 0.$$

Это уравнение приводится к линейному уравнению с неизвестной функцией  $x$ .

Если  $a_1 = 0$  ( $a_2 \neq 0$ ), то система (7) примет вид

$$\left. \begin{aligned} a_2\beta &= 0, \\ (b_1 - \lambda)\alpha + b_2\beta &= 0, \\ c_1\alpha + (c_2 - \lambda)\beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Она должна иметь ненулевое решение. Но  $\beta = 0$  (ибо  $a_2 \neq 0$ ). Поэтому  $\alpha \neq 0$  и, следовательно,  $\lambda = b_1$ ,  $c_1 = 0$ . Мы получили, таким образом, что  $a_1 = c_1 = 0$ , т. е. отмеченный выше частный случай 3.

Аналогично, в случае  $a_2 = 0$  ( $a_1 \neq 0$ ) мы приходим к отмеченному выше частному случаю 2.

#### 44. Примеры.

**Пример 1.** Дано уравнение

$$(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(xdy - ydx) = 0. \quad (11)$$

Перепишем это уравнение Якоби в виде (1):

$$(1 + x + y)(xdy - ydx) - (1 + x - y)dy + (-1 - x + y)dx = 0.$$

Составляем уравнение для  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

Это уравнение имеет корни:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

Возьмем корень  $\lambda_1 = 0$  и составим систему для нахождения  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} 1 + \alpha + \beta &= 0, \\ 1 + \alpha - \beta &= 0, \\ -1 - \alpha + \beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ , так что подстановка (2) имеет вид

$$x = \xi - 1, \quad y = \eta. \quad (12)$$

Выполняя в уравнении (11) подстановку (12), имеем

$$\begin{aligned} & (\eta - \xi)(d\xi + d\eta) + (\xi + \eta)[(\xi - 1)d\eta - \eta d\xi] = 0 \\ \text{или} \quad & (\eta - \xi)d\xi - 2\xi d\eta + (\xi + \eta)(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая в полученном уравнении Дарбу  $\eta = u\xi$ , имеем:

$$d\eta = u d\xi + \xi du, \quad \xi d\eta - \eta d\xi = \xi^2 du.$$

Поэтому уравнение (13) приведет к уравнению Бернулли с искомой функцией  $\xi$ :

$$\frac{d\xi}{du} + \frac{2}{1+u} \xi = \xi^2 \quad (1+u \neq 0).$$

Деля обе части этого уравнения на  $\xi^2$  и полагая  $\frac{1}{\xi} = v$ , придем к линейному уравнению

$$\frac{dv}{du} - \frac{2}{1+u} v = -1.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$v = 1 + u + C(1+u)^2.$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$  по формулам

$$v = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x+1}, \quad u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x+1},$$

получим общий интеграл уравнения (11) в виде

$$\frac{1}{x+1} = 1 + \frac{y}{x+1} + C \left( 1 + \frac{y}{x+1} \right)^2.$$

Особых решений нет.

**Пример 2.** Проинтегрировать уравнение

$$(2+x+y)(xdy-ydx) - (-m+x-y)dy + (m+x+3y)dx = 0, \quad (14)$$

где

$$m = \text{const} \neq 0.$$

Уравнение для  $\lambda$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -m & 1-\lambda & -1 \\ m & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda-2)^3 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$



Составляем систему для нахождения  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ -m - \alpha - \beta &= 0, \\ m + \alpha + \beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта система несовместна. Мы имеем здесь случай  $\gamma = 0$ .

Подстановка (10) имеет вид

$$x + y = z.$$

Выполняя ее, приведем уравнение Якоби (11) к линейному относительно  $x$ :

$$\frac{dx}{dz} - \frac{1}{z}x = \frac{m+z}{z^2},$$

откуда

$$x = -\frac{m}{2z} - 1 + Cz \quad \text{или} \quad (x+1)z + \frac{m}{2} = Cz^2.$$

Общим интегралом уравнения (14) будет

$$(x+1)(x+y) + \frac{m}{2} = C(x+y)^2.$$

Особых решений нет.

## § 10. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

**45. Существование и единственность решения задачи Коши. Общие свойства уравнения Риккати.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, в котором правая часть есть квадратичная функция от (искомой функции)  $y$ , т. е.

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \quad (1)$$

Такое уравнение называется *уравнением Риккати*. Будем считать, что функции  $P(x)$ ,  $Q(x)$  и  $R(x)$  определены и непрерывны в интервале  $(a, b)$  ( $a \geq -\infty$ ,  $b \leq \infty$ ), причем  $P(x) \not\equiv 0$  и  $R(x) \not\equiv 0$  в этом интервале (в противном случае уравнение Риккати вырождается в линейное уравнение или уравнение Бернулли).

При сделанных предположениях относительно  $P(x)$ ,  $Q(x)$  и  $R(x)$  уравнение Риккати (1) имеет единственное решение

$$y = y(x), \quad (2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (3)$$

где  $x_0$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ , а за  $y_0$  можно брать любое число, т. е. через каждую точку  $(x_0, y_0)$  полосы

$$a < x < b, \quad -\infty < y < \infty \quad (4)$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения Риккати (см. п. 13).

Действительно, всегда можно построить прямоугольник

$$R: |x - x_0| \leq a_1, \quad |y - y_0| \leq b_1$$

с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , который целиком лежит в полосе (4). В этом прямоугольнике правая часть уравнения Риккати (1) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара (почему?). А тогда уравнение (1) имеет единственное решение (2), удовлетворяющее начальному условию (3). Это решение определено, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности точки  $x = x_0$ . Существование этого решения во всем интервале непрерывности коэффициентов  $P(x)$ ,  $Q(x)$  и  $R(x)$  не гарантируется.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2 - 2y + 1.$$

Здесь правая часть определена и непрерывна на всей плоскости  $(x, y)$ . Но из формулы общего решения

$$y = 1 - \frac{1}{x - C}$$

видно, что никакое из решений, входящих в эту формулу при  $C \neq \infty$ , не будет определено при всех  $x$ .

Из сказанного выше следует, что *уравнение Риккати не имеет особых решений. Всякое решение его есть частное решение.*

Прежде чем перейти к вопросу об интегрируемости уравнения Риккати в квадратурах, отметим два общих свойства его.

1. *Уравнение Риккати, так же как и линейное уравнение, сохраняет свой вид при любом преобразовании независимой переменной*

$$x = \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  — любая непрерывно дифференцируемая функция, определенная в интервале  $(t_0, t_1)$ , причем  $a = \varphi(t_0)$ ,  $b = \varphi(t_1)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  в  $(t_0, t_1)$ .

Действительно, так как

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \varphi'(t),$$

то преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = (P(\varphi(t))y^2 + Q(\varphi(t))y + R(\varphi(t))\varphi'(t),$$

т. е. является опять уравнением Риккати.

2. В отличие от линейного уравнения уравнение Риккати сохраняет свой вид не только при любом линейном преобразовании искомой функции, но также и при любом дробно-линейном преобразовании

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}, \quad (5)$$

где  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\delta(x)$  — произвольные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые в интервале  $(a, b)$ , подчиненные лишь очевидному условию  $\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$ .

В самом деле, дифференцируя (5), находим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\alpha'z + \alpha z' + \beta')(\gamma z + \delta) - (\alpha z + \beta)(\gamma'z + \gamma z' + \delta')}{(\gamma z + \delta)^2} = \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)z' + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')z^2 + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \alpha\delta' - \beta\gamma')z + \beta'\delta - \beta\delta'}{(\gamma z + \delta)^2}; \end{aligned} \quad (6)$$

так что левая часть уравнения (1) заменится дробью (6). Правая же часть уравнения (1) после замены  $y$  выражением (5) и приведения к общему знаменателю обратится в дробь, числитель которой есть квадратичная функция от  $z$ , а знаменатель — тот же, что и у дроби (6). Поэтому преобразованное уравнение будет опять уравнением Риккати.

Применяя то или иное из указанных преобразований, мы можем значительно упростить вид уравнения Риккати и, таким образом, облегчить его изучение.

**46. Приведение уравнения Риккати к каноническому виду.** Покажем, что уравнение Риккати путем линейных преобразований искомой функции можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x) \quad (7)$$

(на некотором интервале изменения  $x$ ), т. е. сделать коэффициент при  $y^2$  равным 1 или  $-1$  и избавиться от члена, содержащего  $y$  в первой степени, если  $P''(x)$  и  $Q'(x)$  существуют и непрерывны.

Положим в (1)

$$y = \alpha(x)z,$$

где  $\alpha(x)$  — пока неопределенная функция от  $x$ , а  $z$  — новая неизвестная функция. Тогда будем иметь

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = P(x)\alpha^2(x)z^2 + Q(x)\alpha(x)z + R(x),$$

откуда

$$z' = P(x)\alpha(x)z^2 + \left( Q(x) - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \right) z + \frac{R(x)}{\alpha(x)}.$$

Возьмем

$$\alpha(x) = \pm \frac{1}{P(x)},^*$$

т. е. сделаем подстановку

$$y = \pm \frac{1}{P(x)} z. \quad (8)$$

Коэффициент при  $z^2$  станет равным  $\pm 1$ . Преобразованное уравнение будет иметь вид

$$z' = \pm z^2 + \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right) z \pm R(x)P(x).$$

Чтобы избавиться от коэффициента при искомой функции, сделаем еще одну подстановку

$$z = u + \beta(x),$$

где  $\beta(x)$  пока неопределенная функция от  $x$ , а  $u$  — новая неизвестная функция. Тогда получим

$$u' + \beta'(x) = \pm (u + \beta(x))^2 + \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right) (u + \beta(x)) \pm R(x)P(x)$$

или

$$\begin{aligned} u' = & \pm u^2 + \left( \pm 2\beta(x) + Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right) u \pm \beta^2(x) + \\ & + \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right) \beta(x) \pm R(x)P(x) - \beta'(x). \end{aligned}$$

Чтобы уничтожить коэффициент при  $u$ , достаточно положить

$$\beta(x) = \mp \frac{1}{2} \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right);$$

---

\* Мы ограничиваемся рассмотрением лишь того интервала, в котором  $P(x)$  не обращается в нуль.

т. е. сделать подстановку

$$z = u \mp \frac{1}{2} \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right). \quad (9)$$

Получим

$$\begin{aligned} u' = \pm u^2 \mp \frac{1}{4} \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 \pm \\ \pm R(x)P(x) \pm \frac{1}{2} \left( Q'(x) + \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \right). \end{aligned}$$

Объединяя подстановки (8) и (9), видим, что подстановка

$$y = \pm \frac{1}{P(x)} \left( u \mp \frac{1}{2} \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right) \right)$$

приводит уравнение Риккати (1) к виду

$$u' = \pm u^2 + R_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} R_1(x) = \mp \left( \frac{1}{4} \left( Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( Q'(x) + \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \right) \right) \pm R(x)P(x). \end{aligned}$$

Таким образом, при помощи линейной замены искомой функции уравнение Риккати всегда может быть приведено к виду (7) на каждом участке, в котором  $P(x)$  не обращается в нуль. Такой вид уравнения Риккати называется *каноническим*.

**47. Простейшие случаи интегрируемости в квадратурах.** Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости уравнения Риккати в квадратурах.

Если  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — постоянные, то уравнение Риккати представляет собою уравнение с разделяющимися переменными и, следовательно, общий интеграл его находится в квадратурах. В данном случае он выражается через элементарные функции.

*При переменных  $P$ ,  $Q$  и  $R$  уравнение Риккати в отличие от уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах, интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях.*

Отметим некоторые простейшие случаи интегрируемости в квадратурах уравнения Риккати (с переменными коэффициентами).

Это прежде всего уравнения вида

$$y' = \varphi(x) (ay^2 + by + c) \quad (10)$$

и

$$y' = a \frac{y^2}{x^2} + b \frac{y}{x} + c, \quad (11)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — постоянные числа (причем  $a^2 + c^2 \neq 0$ ), ибо первое из них есть уравнение с разделяющимися переменными, а второе — однородное. Уравнение (11) интегрируется в элементарных функциях.

Уравнение Риккати

$$y' = a \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} \frac{y}{x} + c \quad \text{или} \quad xy' = ay^2 + \frac{1}{2}y + cx \quad (12)$$

( $a^2 + c^2 \neq 0$ ) приводится к уравнению вида (10), если положить

$$y = z \sqrt{x}, \quad (13)$$

где  $z$  — новая неизвестная функция. Действительно, подставляя (13) в (12), получим

$$\sqrt{x}z' = az^2 + c.$$

Следовательно, уравнение (12) интегрируется в элементарных функциях.

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \quad (14)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные числа, тоже интегрируется в квадратурах и даже в элементарных функциях. В самом деле, нетрудно убедиться, что уравнение (14) является обобщенным однородным, причем  $k = -1$ . Выполняя теперь подстановку  $y = \frac{z}{x}$ , мы придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$xz' = Az^2 + (B+1)z + C,$$

общий интеграл которого выражается через элементарные функции.

**48. Построение общего решения в случае, когда известно одно частное решение.** Существование общего решения уравнения Риккати вытекает из теоремы существования общего решения, которую мы докажем в гл. 5.

В отношении построения общего решения в квадратурах уравнение Риккати выделяется среди нелинейных уравнений общего

вида тем, что знание одного частного решения дает возможность найти общее решение в квадратурах. Это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема.** *Если известно одно частное решение уравнения Риккати, то последнее всегда можно привести к уравнению Бернулли.*

Действительно, пусть  $y_1$  — частное решение уравнения Риккати (1), так что

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x). \quad (15)$$

Сделаем в уравнении (1) замену искомой функции, положив

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — новая искомая функция. Тогда

$$\begin{aligned} y_1' + z' &= P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + \\ &+ Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x). \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождество (15), мы и получим для определения  $z$  уравнение Бернулли

$$z' - (2P(x)y_1 + Q(x))z = P(x)z^2. \quad (16)$$

Уравнение (16) подстановкой  $\frac{1}{z} = u$  сводится к линейному уравнению

$$u' + (2P(x)y_1 + Q(x))u = -P(x). \quad (17)$$

Следовательно, уравнение Риккати в случае, когда известно одно частное решение его, интегрируется двумя квадратурами.

На практике нужно делать подстановку

$$y = y_1 + \frac{1}{u}, \quad (18)$$

приводящую уравнение Риккати (1) сразу к линейному уравнению (17).

Отметим два очевидных случая, в которых частное решение находится легко:

$$R(x) = -P(x)b^2 - Q(x)b, \quad y_1 = b;$$

$$R(x) = -P(x)x^2 - Q(x)x + 1, \quad y_1 = x.$$

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1.$$

Здесь  $y_1 = x$  — частное решение. Сделаем подстановку

$$y = x + \frac{1}{u},$$

тогда получим

$$u' + 3x^2u = -x,$$

откуда

$$u = e^{-x^3} \left( C - \int e^{x^3} x dx \right).$$

Следовательно,

$$y = x + \frac{e^{x^3}}{C - \int e^{x^3} x dx}.$$

**З а м е ч а н и е.** Из формулы (18), между прочим, видно, что в отличие от решений линейного уравнения *решение уравнения Риккати может обращаться в бесконечность при конечном значении  $x$*  (т. е. интегральная кривая может иметь вертикальную асимптоту) *даже тогда, когда коэффициенты  $P(x)$ ,  $Q(x)$  и  $R(x)$  заданы и непрерывны при всех значениях  $x$* . На примере уравнения  $y' = y^2 - 2y + 1$  мы это уже видели в п. 45.

**49. Структура общего решения.** Общее решение линейного уравнения (17) имеет вид (см. п. 36, формула (20))

$$u = A(x)C + B(x).$$

Подставляя это выражение для  $u$  в формулу (18), получим общее решение уравнения Риккати в следующем виде:

$$y = y_1 + \frac{1}{A(x)C + B(x)} = \frac{y_1 A(x)C + y_1 B(x) + 1}{A(x)C + B(x)}$$

или

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}, \quad (19)$$

т. е. *общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной  $C$* .

Такой характер зависимости общего решения от произвольной постоянной имеет место только для уравнения Риккати. Действительно, пусть (19) есть общее решение некоторого дифференциального уравнения, причем  $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0$ . Тогда, разрешая (19) относительно  $C$  и исключая  $C$  дифференцированием, имеем

$$\frac{\varphi_2(x) - y\psi_2(x)}{y\psi_1(x) - \varphi_1(x)} = C,$$

$$(\varphi_2' - y'\psi_2 - y\psi_2') (y\psi_1 - \varphi_1) - (\varphi_2 - y\psi_2) (y'\psi_1 + y\psi_1' - \varphi_1') = 0$$



или

$$(\psi_2\varphi_1 - \varphi_2\psi_1)y' + (-\psi_2'\psi_1 + \psi_2\psi_1')y^2 + \\ + (\varphi_2'\psi_1 + \psi_2'\varphi_1 - \varphi_2\psi_1' - \psi_2\varphi_1')y - \varphi_2'\varphi_1 + \varphi_2\varphi_1' = 0,$$

что после деления на коэффициент при  $y'$  приводит к уравнению Риккати.

**50. Построение общего решения в случае, когда известны два или три частных решения.** Если известны два частных решения уравнения Риккати, то общее решение его находится одной квадратурой.

В самом деле, если  $y_1$  и  $y_2$  — частные решения уравнения Риккати, то из (18) следует, что для линейного уравнения (17) известно одно частное решение

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

а тогда общее решение этого уравнения находится одной квадратурой. Следовательно, в таком случае общее решение уравнения Риккати находится одной квадратурой.

Наконец, если известны три частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится вовсе без квадратур.

Действительно, пусть  $y_1, y_2, y_3$  — частные решения уравнения Риккати. Тогда

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

суть два частных решения линейного уравнения (17), а тогда его общее решение, согласно формуле (17) п. 35, находится без квадратур:

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + C \left( \frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right). \quad (20)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае общее решение уравнения Риккати находится без квадратур.

Заменяя в равенстве (20) функцию  $u$  ее значением из формулы (18), получим

$$\frac{1}{y - y_1} = \frac{1}{y_2 - y_1} + C \left( \frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right).$$

Разрешая это равенство относительно  $C$ , найдем общий интеграл уравнения Риккати в виде

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C.$$

Отсюда следует, между прочим, что *ангармоническое отношение любых четырех частных решений уравнения Риккати есть величина постоянная*:

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv \text{const.}$$

**51. Специальное уравнение Риккати.** Выше мы показали, как найти общее решение уравнения Риккати в случае, когда известно одно, два или три частных решения. Сейчас мы рассмотрим один частный вид уравнения Риккати, в котором при некотором условии общее решение выражается в элементарных функциях, причем находится без предварительного знания частных решений. Уравнение, о котором идет речь, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m, \quad (21)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $m$  — постоянные числа, и называется *специальным уравнением Риккати*. Именно это уравнение и было изучено самим Риккати в XVIII в. Укажем два случая, когда уравнение (21) интегрируется в элементарных функциях.

С л у ч а й 1.  $m=0$ . Тогда уравнение (21) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = B. \quad (22)$$

Здесь переменные разделяются, причем общее решение найдется в элементарных функциях.

С л у ч а й 2.  $m=-2$ . При этом значении  $m$  уравнение (21) переписывается так:

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = \frac{B}{x^2}.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (14), и, следовательно, его общее решение находится в элементарных функциях.

Кроме этих значений  $m$ , специальное уравнение Риккати (21) интегрируется в элементарных функциях при всяком значении  $m$ , для которого выражение

$$\frac{m}{2m+4} \quad (23)$$

является целым числом (положительным или отрицательным). А именно можно доказать, что если показатель  $m$  удовлетворяет этому условию, то при помощи соответствующих преобразований независимой перемен-

ной и линейных и дробно-линейных преобразований искомой функции специальное уравнение Риккати (21) может быть приведено к виду (22), т. е. к случаю  $m=0$  [140, с. 51—53], или к уравнению Риккати вида (12) [102, с. 47, 48]. Как показал Лиувилль, *при всех других значениях показателя  $m$  специальное уравнение Риккати (21) не интегрируется даже в квадратурах.*

**Пример 1.** Дано уравнение

$$y' = y^2 + x^{-4}. \quad (24)$$

Здесь  $A=-1$ ,  $B=1$ ,  $m=-4$ . Вычисляя выражение (23) при  $m=-4$ , имеем

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-4}{-8+4} = 1.$$

Следовательно, уравнение (24) интегрируется в элементарных функциях.

**Пример 2.** Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}$$

имеем

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}+4} = -1,$$

так что оно тоже интегрируется в элементарных функциях.

**Пример 3.** Уравнение

$$y' = x^2 + y^2$$

не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах от элементарных функций, ибо

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{1}{4} \quad (\text{не целое число!}).$$

## § 11. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

**52. Понятие об уравнении в полных дифференциалах.** В предыдущих параграфах мы изучили несколько типов уравнений, разрешенных относительно производной, которые всегда допускали (за исключением уравнения Риккати) интегрирование в квадратурах.

Сейчас мы рассмотрим новый тип таких уравнений. Этот тип вследствие того, что к нему сводятся некоторые из ранее изученных, а также и многие другие уравнения, имеет важное значение в теории дифферен-

циальных уравнений. Речь идет об *уравнении в полных дифференциалах*. Так называется уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

левая часть которого представляет собою полный дифференциал некоторой функции  $U$  от  $x$  и  $y$ , т. е.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU. \quad (2)$$

Относительно функций  $M$  и  $N$  мы будем предполагать, что они непрерывны по обоим переменным в некоторой односвязной области\* и ни в одной точке этой области не обращаются одновременно в нуль.

Уравнение в полных дифференциалах можно записать так:

$$dU = 0.$$

Поэтому общий интеграл его имеет вид

$$U(x, y) = C.$$

При этом функция  $U$  является интегралом (см. п. 16) уравнения (1).

Особых решений уравнение в полных дифференциалах, очевидно, не имеет.

Рассмотрим в качестве первого примера уравнение

$$xdx + ydy = 0.$$

Левая часть этого уравнения представляет собою полный дифференциал функции

$$U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Поэтому общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = C^2 \quad (C^2 = 2C_1).$$

В качестве второго примера возьмем уравнение

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0. \quad (3)$$

Раскроем скобки и сгруппируем члены так, чтобы каждая группа представляла собою полный дифференциал:

---

\* Например, в прямоугольнике. Вообще область  $G$  называется *односвязной*, если она не имеет «дырок», даже точечных [149, т. II, с. 265].

$$x^3 dx + (y dx + x dy) - y dy = 0$$

или

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d(xy) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0.$$

Заменяя сумму дифференциалов на дифференциал суммы, получаем

$$d\left(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}\right) = 0, \quad U = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, уравнение (3) является уравнением в полных дифференциалах, а равенство

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C \quad (4)$$

есть его общий интеграл. Ясно, что построение функции  $U$  подобной группировкой слагаемых возможно лишь в том случае, если заранее известно, что левая часть уравнения представляет собою полный дифференциал. Но даже когда это и известно, нам не всегда удастся легко подобрать соответствующую группировку слагаемых. Поэтому возникают два вопроса. Как узнать по виду уравнения (1), является ли оно уравнением в полных дифференциалах? В случае положительного ответа на первый вопрос, как построить функцию  $U$  и, следовательно, общий интеграл уравнения (1)?

**53. Признак уравнения в полных дифференциалах. Построение общего интеграла.** Предположим, что функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  имеют непрерывные частные производные соответственно по  $y$  и по  $x$ . Пусть левая часть уравнения (1) представляет собою полный дифференциал, т. е.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Это равносильно тому, что имеют место тождества

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \quad (5)$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по  $y$ , а второе по  $x$ , получаем тождества:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x};$$

левые части полученных тождеств равны между собою,\* а тогда равны

\* Если смешанные производные непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования [149, т. I, с. 261].

и правые, т. е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (6)$$

Условие (6) является необходимым для того, чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциалом. Покажем, что это условие является достаточным. Действительно, пусть условие (6) выполнено. Покажем, что тогда существует функция  $U$ , удовлетворяющая соотношению (2) или, что то же, обоим равенствам (5).

Будем исходить из первого из равенств (5):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y).$$

Нетрудно убедиться, что ему удовлетворяет функция

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),^* \quad (7)$$

где  $\varphi(y)$  — произвольная функция от  $y$ , которую мы будем считать дифференцируемой и выберем ее так, чтобы функция (7) удовлетворяла и второму из равенств (5), т. е. чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

или

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y),^{**}$$

Используя условие (6), перепишем это равенство так:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

---

\* Интеграл имеет смысл, так как область, в которой определена  $M(x, y)$ , односвязна.

\*\* Выполненное здесь дифференцирование по параметру  $y$  под знаком интеграла законно, так как  $M(x, y)$  по предположению непрерывна по  $x$  и  $y$  вместе с производной  $\frac{\partial M}{\partial y}$  [149, т. II, с. 141].

Выполняя интегрирование, получаем:

$$N(x, y) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \varphi'(y) = N(x, y),$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y),$$

откуда

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

следовательно,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C',$$

где  $C'$  — уже произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение функции  $\varphi(y)$  в формулу (7), получаем искомую функцию  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C', \quad (8)$$

что и доказывает достаточность условия (6). Итак, *выполнение тождества (6) является необходимым и достаточным признаком уравнения в полных дифференциалах.*

Взяв одну из функций (8), например ту, в которой  $C' = 0$ , и приравняв ее произвольной постоянной  $C$ , получим общий интеграл уравнения (1) в следующем виде:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (9)$$

Если при построении функции  $U$  брать за исходное второе из равенств (5), то мы получим для общего интеграла следующее выражение:

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) нижние пределы интегрирования  $x_0$  и  $y_0$  можно выбирать произвольно в пределах рассматриваемой односвязной области, но так, чтобы получающиеся интегралы имели смысл. Удачный выбор  $x_0$  и  $y_0$  во многих случаях облегчает задачу интегрирования уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим снова уравнение (3)

$$(x^3+y)dx+(x-y)dy=0.$$

Здесь

$$M=x^3+y, \quad N=x-y, \quad \frac{\partial M}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1;$$

так что условие (6) выполнено. Для получения общего интеграла воспользуемся формулой (9), где положим  $x_0=y_0=0$ . Тогда получим

$$\int_0^x (x^3+y)dx + \int_0^y (-y)dy = C.$$

Выполняя интегрирование, получим общий интеграл опять в виде (4).

**Пример 2.** Дано уравнение

$$xy\,dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0 \quad (y > 0).$$

Условие (6) выполнено. Применим формулу (9), положив  $x_0=0$ ,  $y_0=1$ . Получим

$$\int_0^x xy\,dx + \int_1^y \frac{1}{y}dy = C, \quad \frac{x^2y}{2} + \ln y = C.$$

(Мы не можем полагать  $y_0=0$ , так как  $y=0$  не принадлежит области определения коэффициентов.)

**54. Решение задачи Коши.** Формулы (9) и (10) дают возможность легко получить решение задачи Коши с начальными данными  $x_0$ ,  $y_0$ , если точка  $(x_0, y_0)$  лежит в указанной выше области. Достаточно взять в качестве нижних пределов эти начальные данные и положить  $C=0$ . Получим две формулы:

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = 0, \quad (11)$$

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = 0, \quad (12)$$

которые и определяют (каждая в отдельности) искомое решение задачи Коши. Оно будет единственным.



В самом деле, рассмотрим, например, формулу (11). Обозначая ее левую часть через  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) \equiv \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy,$$

имеем  $U(x_0, y_0) = 0$ , но хоть одна из частных производных  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$  отлична от нуля в точке  $(x_0, y_0)$ , ибо последние равны соответственно  $M(x_0, y_0)$  и  $N(x_0, y_0)$ . Отсюда, согласно теореме о существовании неявной функции [149, т. I, п. 145], уравнение (11) в случае  $N(x_0, y_0) \neq 0$  определяет  $y$  как функцию от  $x$ ,  $y = y(x)$ , удовлетворяющую условию  $y(x_0) = y_0$ , а в случае  $M(x_0, y_0) \neq 0$  оно определяет  $x$  как функцию от  $y$ ,  $x = x(y)$ , где  $x(y_0) = x_0$ .\*

Заметим, однако, что иногда удобнее сначала найти общее решение, пользуясь произволом выбора  $x_0, y_0$  в формулах (9) — (10), а затем уже находить решение задачи Коши по общему правилу.

Если  $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ , то мы имеем особый случай задачи Коши (см. п. 5). Интегральные кривые, примыкающие к точке  $(x_0, y_0)$ , следует искать из формулы (11) или (12). Однако при этом не гарантируется ни существование, ни единственность решения задачи Коши.

## § 12. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

**55. Понятие об интегрирующем множителе.** Мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение в полных дифференциалах всегда интегрируется в квадратурах. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли уравнение не в полных дифференциалах привести к виду уравнения в полных дифференциалах? Оказывается, что во многих случаях это можно сделать. А именно, удастся найти функцию  $\mu = \mu(x, y)$ , после умножения на которую уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

преобразуется в уравнение

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

в полных дифференциалах, т. е.

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = dU(x, y).$$

---

\* Ср. нахождение решения задачи Коши для уравнения с разделенными переменными. Функция  $y = y(x)$  ( $x = x(y)$ ) является решением уравнения (1) (почему?).

Такая функция  $\mu$  называется *интегрирующим множителем*, а функция  $U(x, y)$  — *соответствующим ему интегралом* уравнения (1). Общий интеграл уравнения (1) дается равенством

$$U(x, y) = C.$$

При этом относительно функций  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  мы, так же как и в предыдущем параграфе, предполагаем, что они непрерывны вместе с частными производными  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$  в некоторой односвязной области и ни в одной точке этой области не обращаются одновременно в нуль, а от интегрирующего множителя  $\mu$  мы требуем, чтобы он не обращался в нуль и имел непрерывные частные производные первого порядка.

Применяя признак полного дифференциала к уравнению (2), находим, что интегрирующий множитель  $\mu$  должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Запишем это уравнение в развернутом виде:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \quad (3)$$

Это — уравнение с частными производными первого порядка с неизвестной функцией  $\mu$ .

В общем случае задача интегрирования уравнения (3) не легче, чем задача интегрирования уравнения (1). Эти задачи эквивалентны. Но в некоторых случаях удастся легко найти решение уравнения (3) и тем самым интегрирующий множитель  $\mu$  уравнения (1). В следующих пунктах мы рассмотрим несколько таких случаев.

**56. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от  $x$ .** Предположим, что уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от  $x$ ,  $\mu = \mu(x)$ . В этом случае  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ , так что уравнение (3) принимает вид

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

или (предполагая, что  $N \neq 0$ )

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (4)$$

Здесь левая часть есть функция от  $x$ . Тогда и правая часть должна быть функцией только от  $x$ . Таким образом, для существования интегрирующего множителя вида  $\mu = \mu(x)$  необходимо, чтобы

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x). \quad (5)$$

При этом (4) имеет вид

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(x),$$

откуда

$$\mu = C e^{\int \psi(x) dx}, \quad (6)$$

так что, если существует  $\mu = \mu(x)$ , то он содержится в формуле (6). Полагая для простоты записи  $C = 1$ , получим

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}. \quad (7)$$

Покажем, что при выполнении условия (5) функция (7) будет интегрирующим множителем уравнения (1). В самом деле, в этом случае уравнение (3) примет вид

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \psi(x) \mu.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (7) есть решение этого уравнения и, следовательно, интегрирующий множитель уравнения (1).

В качестве примера найдем интегрирующий множитель линейного уравнения

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Перепишем это уравнение в дифференциальной форме:

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0.$$

Проверяя выполнение условия (5), имеем

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv p(x) \equiv \psi(x).$$

Следовательно, функция

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \quad (8)$$

есть интегрирующий множитель линейного уравнения. Мы получили тот самый интегрирующий множитель, которым уже пользовались в замечании 5 п. 36.

**57. Случай интегрирующего множителя, зависящего только от  $y$ .** Найдем условие, при котором интегрирующий множитель зависит только от  $y$ :  $\mu = \mu(y)$ . В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$-M \frac{d\mu}{dy} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

или (если  $M \neq 0$ )

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

Если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y),$$

то интегрирующий множитель дается формулой

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy}.$$

**58. Случай интегрирующего множителя вида  $\mu = \mu(\omega(x, y))$ .** Рассмотрим более общий случай, когда интегрирующий множитель представляет собою функцию от заданной функции  $\omega(x, y)$  переменных  $x$  и  $y$ :  $\mu = \mu(\omega(x, y))$ . Тогда уравнение (3) для интегрирующего множителя можно переписать так:

$$N \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu(\omega)$$

или (если  $N\omega_x' - M\omega_y' \neq 0$ )

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega), \quad (9)$$

то

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} \equiv f(\omega) = f(\omega(x, y)).$$

Случаи интегрирующего множителя, зависящего только от  $x$  или только от  $y$ , содержатся в рассматриваемом случае при  $\omega = x$ ,  $\omega = y$ . Пользуясь условием (9), мы можем найти условие существования интегрирующего множителя наперед заданного вида. Например, интегрирующий множитель, зависящий только от произведения  $xy$  ( $\mu = \mu(xy)$ ), существует, если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} \equiv \psi(xy) \quad (\text{здесь } \omega = xy).$$

Условие существования интегрирующего множителя вида  $\mu = \mu(x+y)$  запишется так:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} \equiv \psi(x+y) \quad (\omega = x+y)$$

и т. д.

**59. Интегрирующий множитель и особые решения.** Зная интегрирующий множитель, мы можем найти не только общий интеграл уравнения, но также и все особые решения. Действительно, пусть дано уравнение (1)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

и известно, что  $\mu = \mu(x, y)$  есть его интегрирующий множитель, так что

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU.$$

Тогда мы имеем

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{\mu} dU.$$

Поэтому данное уравнение (1) можно переписать так:

$$\frac{1}{\mu} dU = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dU = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0.$$

Первое из них приводит к общему интегралу  $U = C$ , а второе может привести к особому решению. Итак, *особым решением уравнения (1) может быть только такое решение, вдоль которого интегрирующий множитель обращается в бесконечность*.\*

Отсюда получается простое *правило нахождения особых решений*: 1) найти линии, вдоль которых  $\mu$  обращается в  $\infty$ ; 2) проверить, являются ли найденные линии интегральными кривыми, т. е. представляют ли они решения уравнения; 3) проверить, содержатся ли найденные решения в общем решении или нет. Те из найденных решений, которые не содержатся в общем решении, и будут особыми решениями. Если окажется, что  $\mu$  не обращается в бесконечность (или обращается в бесконечность лишь в отдельных точках), то уравнение не имеет особых решений. Отсюда, в частности, опять получаем, что *линейное уравнение  $y' + p(x)y = q(x)$ , где  $p(x)$  — непрерывная функция, не имеет особых решений*, так как его интегрирующий множитель (8) не обращается в бесконечность в промежутке непрерывности  $p(x)$ .

Исследуем при помощи интегрирующего множителя вопрос об особых решениях уравнения с разделяющимися переменными и однородного уравнения.

**60. Интегрирующий множитель уравнения с разделяющимися переменными.** Вспомним, как мы интегрировали уравнение с разделяющимися переменными

$$m(x)n(y)dx + \tilde{m}_1(x)n_1(y)dy = 0. \quad (10)$$

Мы умножали это уравнение на множитель

$$\mu = \frac{1}{n(y)m_1(x)}, \quad (11)$$

после чего получали уравнение

$$\frac{m(x)}{m_1(x)} dx + \frac{n_1(y)}{n(y)} dy = 0,$$

---

\* Т. е. такое решение, при приближении к которому  $\mu \rightarrow \infty$ .

которое, очевидно, является уравнением в полных дифференциалах.

Следовательно, множитель (11) есть интегрирующий множитель уравнения (10) и мы, по существу, интегрировали в п. 21 уравнение с разделяющимися переменными методом интегрирующего множителя.

Из формулы (11) мы видим, что интегрирующий множитель  $\mu$  обращается в бесконечность лишь вдоль прямых, параллельных осям координат, определяемых уравнениями  $n(y)=0$ ,  $m_1(x)=0$  и, следовательно, только эти прямые и могут быть особыми решениями. Мы получили тот же результат, что и в п. 22.

**61. Интегрирующий множитель однородного уравнения.** Рассмотрим однородное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

где  $M$  и  $N$  — однородные функции одной и той же степени  $m$ . Применяя подстановку  $y = zx$  (см. п. 24), получаем

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(zdx + xdz) = 0$$

или

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) = 0.$$

Соберем вместе члены при  $dx$  и  $dz$ :

$$x^m (M(1, z) + N(1, z)z)dx + x^{m+1} N(1, z)dz = 0.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Оно имеет по предыдущему интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{(M(1, z) + N(1, z)z)x^{m+1}}.$$

Отсюда, возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , получаем интегрирующий множитель однородного уравнения (1) в виде

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny},^* \quad (2)$$

если  $Mx + Ny \neq 0$ . Если же  $Mx + Ny \equiv 0$ , то однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными вида  $ydx - xdy = 0$ .

Формула (12) дает возможность сразу получить все кривые, «подозрительные» на особое решение. Для этого достаточно решить уравнение  $Mx + Ny = 0$ . При этом мы получим те самые полупрямые, выходящие из начала координат, о которых шла речь в п. 25.

---

\* Это следует из того, что  $z = \frac{y}{x}$ ,  $x^m M(1, z) = M(x, y)$ ,  $x^m N(1, z) = N(x, y)$ .

**Пример.** Дано уравнение

$$(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0.$$

Имеем:

$$\mu = \frac{1}{(py - qx)x - (px + qy)y} = -\frac{1}{q(x^2 + y^2)};$$

$$-\frac{py - qx}{q(x^2 + y^2)}dx + \frac{px + qy}{q(x^2 + y^2)}dy = 0.$$

Сгруппируем члены так, чтобы каждая группа представляла собою полный дифференциал:

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{p}{q} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0;$$

$$d\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right) + d\left(\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |C_1|.$$

Окончательно получаем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \quad (C = |C_1| > 0)$$

Особых решений нет, ибо  $\mu$  не обращается в бесконечность ни на какой кривой.

### § 13. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

**62. Теорема о существовании интегрирующего множителя.** В предыдущем параграфе мы выяснили роль интегрирующего множителя для нахождения общего интеграла и особых решений уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1)$$

Мы указали также некоторые случаи легкого нахождения интегрирующего множителя. В настоящем параграфе мы изучаем общие свойства интегрирующего множителя и в заключение даем один общий способ нахождения интегрирующего множителя, основанный на использовании этих свойств.

В этом параграфе мы будем предполагать относительно функций  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$ , что они непрерывны вместе со всеми своими частными производными в некоторой односвязной области и ни в какой точке этой области не обращаются одновременно в нуль, а на интегрирующий множитель  $\mu$  будем налагать те же ограничения, что и в предыдущем параграфе. Из этих предположений следует, что в каждой точке рассматри-



ваемой области имеет место единственность решения задачи Коши и что интеграл  $U(x, y)$ , соответствующий интегрирующему множителю  $\mu$ , имеет непрерывные частные производные второго порядка. Последнее вытекает из того, что если  $\mu$  есть интегрирующий множитель уравнения (1), а  $U(x, y)$  соответствующий ему интеграл, то

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU,$$

а тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N,$$

и так как правые части имеют непрерывные частные производные по  $x$  и  $y$ , то производные от левых частей тоже существуют и непрерывны.

Докажем, что при некоторых условиях, гарантирующих существование общего интеграла (см., например, п. 138), существует и интегрирующий множитель

**Т е о р е м а.** *Если уравнение (1) имеет общий интеграл*

$$U(x, y) = C,$$

где  $U$  есть интеграл уравнения (1) в рассматриваемой области, имеющий непрерывные частные производные второго порядка, то это уравнение имеет и интегрирующий множитель.

Действительно, так как  $U(x, y)$  есть интеграл уравнения (1), то  $dU \equiv 0$  в силу этого уравнения, т. е. мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \equiv 0,$$

где  $dy$  определяется уравнением (1), так что  $dx$  и  $dy$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy &= 0, \\ Mdx + Ndy &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта однородная линейная система имеет ненулевое решение (ибо  $dx$ , как дифференциал независимой переменной, произволен). Поэтому справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} \equiv \mu(x, y). \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N.$$

Поэтому

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = dU,$$

т. е. левая часть уравнения (1) становится полным дифференциалом после умножения на функцию  $\mu$ , определяемую равенством (2). Следовательно,  $\mu$  есть интегрирующий множитель уравнения (1).

**63. Теорема о неединственности интегрирующего множителя.** Из уравнения для интегрирующего множителя  $\mu$  (да и просто из самого определения интегрирующего множителя) ясно, что если  $\mu$  есть его интегрирующий множитель, то  $C\mu$  (при любом  $C$ ) тоже будет интегрирующим множителем этого уравнения. Но совокупность интегрирующих множителей содержит и интегрирующие множители, отличные от  $C\mu$ . А именно справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Если  $\mu_0$  есть интегрирующий множитель уравнения (1), а  $U_0(x, y)$  соответствующий ему интеграл, то

$$\mu = \mu_0 \varphi(U_0), \quad (3)$$

где  $\varphi$  — любая функция, не равная тождественно нулю и имеющая непрерывную производную, тоже является интегрирующим множителем уравнения (1).

Действительно, умножая левую часть уравнения (1) на функцию (3), получаем

$$\begin{aligned} \mu_0 \varphi(U_0) (Mdx + Ndy) &= \varphi(U_0) \mu_0 (Mdx + Ndy) = \\ &= \varphi(U_0) dU_0 = d \int \varphi(U_0) dU_0. \end{aligned}$$

Левая часть уравнения стала полным дифференциалом функции  $\int \varphi(U_0) dU_0$ ; следовательно, функция  $\mu$ , определяемая формулой (9), есть интегрирующий множитель уравнения (1).

**64. Теорема об общем виде интегрирующего множителя и ее следствие.** Формула (3) содержит бесчисленное множество интегрирующих

множителей, порождаемых интегрирующим множителем  $\mu_0$  (и соответствующим ему интегралом). Возникает вопрос: содержатся ли все интегрирующие множители в формуле (3)? (Речь идет, разумеется, об интегрирующих множителях, определенных в одной и той же односвязной области, причем в этой области выполнены предположения относительно функций  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  и интегрирующего множителя.) Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** *Два любых интегрирующих множителя  $\mu_0$  и  $\mu_1$  уравнения (1) связаны соотношением*

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0). \quad (4)$$

Пусть  $U_0$  и  $U_1$  — интегралы, соответствующие интегрирующим множителям  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , т. е. мы имеем равенства:

$$\mu_0(Mdx + Ndy) = dU_0,$$

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = dU_1.$$

Деля второе из этих равенств на первое, получаем

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0}.$$

Так как, согласно теореме п. 16, имеем  $U_1 = \Phi(U_0)$ , причем  $\Phi$  — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Phi'(U_0)dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) \equiv \varphi(U_0),$$

где  $\varphi(U_0)$  имеет непрерывную производную,\* откуда ясно, что  $\mu_0$  и  $\mu_1$  связаны соотношением (4). Теперь мы можем утверждать, что *все интегрирующие множители уравнения (1) содержатся в формуле (3)*. Заметим, что в этой формуле мы можем заменить интеграл  $U_0$  любым интегралом  $U$ , ибо любой интеграл уравнения является функцией от  $U_0$ , а функция  $\varphi$  все равно произвольна, так что  $\varphi(U)$  будет произвольной функцией от  $U_0$ .

**С л е д с т в и е.** *Если  $\mu_0$  и  $\mu_1$  — два существенно различных интегрирующих множителя\*\* уравнения (1), то равенство*

---

\* Это следует из того, что  $\Phi''(U_0)$  существует и непрерывна, так как  $U_0$  и  $U_1$  имеют непрерывные частные производные второго порядка и являются интегралами уравнения (1).

\*\* Т. е. их отношение не равно тождественно постоянной.

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = C \quad (5)$$

является общим интегралом уравнения (1).

В самом деле, согласно формуле (4), мы имеем

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \varphi(U_0).$$

Но в силу замечания 2 п. 16 равенство  $\varphi(U_0) = C$  есть общий интеграл уравнения (1), а тогда и (5) есть общий интеграл этого уравнения.

В частности, если уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах и известен интегрирующий множитель  $\mu_1$ , отличный от постоянной, то  $\mu_1 = C$  есть общий интеграл этого уравнения, так как за  $\mu_0$  можно взять 1. Например, если уравнение (1) однородное и в полных дифференциалах, то его общий интеграл дается равенством

$$M(x, y)x + N(x, y)y = C,$$

если только левая часть этого равенства не обращается тождественно в постоянную величину.

**Пример 1.** Дано уравнение

$$xdy - ydx = 0.$$

Здесь  $\mu_0 = \frac{1}{xy}$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{x^2}$ , поэтому  $\frac{y}{x} = C$  — общий интеграл.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0.$$

Это уравнение однородное и в полных дифференциалах. Поэтому  $(x+y)x + (x-y)y = C$  или  $x^2 + 2yx - y^2 = C$  есть общий интеграл.

**65. Один общий способ нахождения интегрирующего множителя.** Предположим, что левую часть уравнения (1) можно разбить на две группы:

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0,$$

причем так, чтобы для каждой группы можно было легко найти интегрирующий множитель. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — эти множители, а  $U_1$  и  $U_2$  — соответствующие им интегралы. Тогда, согласно (3), все интегрирующие множители первой группы содержатся в формуле

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1),$$

а все интегрирующие множители второй группы — в формуле

$$\mu = \mu_2 \psi(U_2).$$

Если удастся выбрать произвольные функции  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы

$$\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2) \quad (6)$$

(причем одну из функций  $\varphi$  и  $\psi$  можно полагать равной единице), то

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2)$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения (1). Заметим, что группы, на которые мы разбиваем левую часть уравнения (1), не обязательно должны быть полными, т. е. содержать и  $dx$  и  $dy$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\left( \frac{y}{x} + 3x^2 \right) dx + \left( 1 + \frac{x^3}{y} \right) dy = 0. \quad (7)$$

Разобьем левую часть на две группы:

$$\left( \frac{y}{x} dx + dy \right) + \left( 3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy \right) = 0.$$

Находим для каждой группы интегрирующие множители и соответствующие им интегралы:

$$\mu_1 = x, \quad U_1 = xy; \quad \mu_2 = y, \quad U_2 = x^3 y.$$

Условие (6) принимает вид

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3 y).$$

Возьмем  $\varphi(U) = U^2$ ,  $\psi(U) = U$ , тогда  $x(xy)^2 = y(x^3 y) = x^3 y^2$ . Следовательно,  $\mu = x^3 y^2$ . Умножая данное уравнение (7) на найденный интегрирующий множитель и используя формулу (9) п. 53, полагая в ней  $x_0 = 0$ , найдем общий интеграл:

$$\int_0^x (x^2 y^3 + 3x^5 y^2) dx = C, \quad \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3 y)^2}{2} = C.$$

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

#### § 14. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**66. Общий случай уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.** Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной, имеют следующий общий вид:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Наиболее важным частным случаем таких уравнений являются уравнения, в которых левая часть представляет собою полином относительно  $y'$  с коэффициентами, зависящими от  $x$  и  $y$ :

$$y'^n + A_1(x, y)y'^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0.$$

Уравнение такого вида называется *уравнением первого порядка  $n$ -й степени*.

Всякая функция  $y = y(x)$ , определенная и непрерывно дифференцируемая в некотором интервале  $(a, b)$ ,\* называется *решением* уравнения (1) в этом интервале, если она обращает уравнение (1) в тождество\*\*

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0,$$

справедливое при всех значениях  $x$  из интервала  $(a, b)$ .

Если уже при интегрировании уравнения, разрешенного относительно производной, мы далеко не во всех случаях могли найти решение в явной форме, то для уравнения (1) эти случаи представляют тем более редкое исключение. Поэтому мы будем чаще всего искать решение в неявной или даже параметрической форме.

Будем говорить, что уравнение

$$\Phi(x, y) = 0$$

---

\* См. сноски на с. 24.

\*\* См. сноску на с. 16.

определяет в неявной форме решение уравнения (1), если оно определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$  и если эта последняя является решением уравнения (1). Далее будем говорить, что уравнения

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

определяют решение уравнения (1) в параметрической форме в интервале  $(t_0, t_1)$ , если в этом интервале имеет место тождество

$$F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0.$$

Кривую на плоскости  $(x, y)$ , соответствующую решению, будем называть *интегральной кривой* уравнения (1).

Предположим, что уравнение (1) определяет в каждой точке  $(x, y)$  некоторой области одно или несколько вещественных значений  $y'$ . Построив в каждой точке  $(x, y)$  этой области отрезки (для определенности будем считать, что это единичные отрезки и что середины их лежат в точке  $(x, y)$ ), наклон которых к оси  $Ox$  определяется значениями  $y'$  в этой точке,\* мы получим так называемое *поле направлений* (см. п. 4). Задача интегрирования уравнения (1) состоит в том, чтобы найти все гладкие кривые, в каждой точке которых направление касательной совпало бы с одним из направлений поля в этой точке.

Одной из важнейших задач интегрирования уравнения (1) является, так же как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной, *задача Коши* — задача нахождения решений, принимающих начальное значение  $y_0$  при  $x=x_0$ , что соответствует нахождению интегральных кривых, проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ .

Будем говорить, что *решение задачи Коши с начальными данными  $x_0, y_0$  единственно*, если через точку  $(x_0, y_0)$  в достаточно малой окрестности ее проходит столько интегральных кривых, сколько направлений поля определяет уравнение (1) в этой точке. В противном случае будем говорить, что рассматриваемая *задача Коши имеет не единственное решение*.

Поставим вопрос: каким условиям достаточно подчинить функцию  $F(x, y, y')$ , чтобы через заданную точку  $(x_0, y_0)$  в заданном направлении  $y'_0$  проходила одна и только одна интегральная кривая уравнения (1). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Если функция  $F(x, y, y')$  удовлетворяет следующим трем условиям:

---

\* Т. е. мы проводим отрезки, образующие с осью  $Ox$  угол, тангенс которого равен значению  $y'$  в этой точке. Каждому значению  $y'$  соответствует свой отрезок.

1)  $F(x, y, y')$  определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0, y_0')$ ;

2)  $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ ;

3)  $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$ ,

то уравнение (1) имеет единственное решение  $y=y(x)$ , определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки  $x=x_0$ , удовлетворяющее начальному условию  $y=y_0$  при  $x=x_0$  и такое, что  $y'(x_0)=y_0'$ .

Действительно, согласно теореме о существовании неявной функции от нескольких переменных [149, т. II, п. 316], уравнение (1) при сделанных предположениях определяет  $y'$  как однозначную функцию от  $x$  и  $y$ :  $y'=f(x, y)$ , которая будет задана и непрерывно дифференцируема в некоторой замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , причем  $f(x_0, y_0)=y_0'$ .

Применяя к уравнению  $y'=f(x, y)$  с начальными данными  $x_0, y_0$  теорему Пикара, сформулированную в п. 7, можем утверждать, что оно имеет единственное решение  $y=y(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y=y_0$  при  $x=x_0$ , определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки  $x=x_0$ . Так как при этом

$$y'(x_0)=f[x_0, y(x_0)]=f(x_0, y_0)=y_0',$$

т. е.  $y'(x_0)=y_0'$ , то найденное решение  $y=y(x)$  и является искомым решением уравнения (1).

Предположим, что, разрешая уравнение (1) относительно  $y'$ , мы найдем конечное число вещественных решений:

$$y'=f_k(x, y) \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

где функции  $f_k(x, y)$  определены в некоторой области  $D$ , так что мы имеем  $m$  уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Пусть во всякой точке  $(x, y)$  области  $D$  направления поля, определяемые каждым из уравнений (2), различны, так что интегральные кривые различных уравнений (2) не могут касаться друг друга внутри области  $D$ . Предположим, что для каждого из уравнений (2) задача Коши в области  $D$  имеет единственное решение и что каждое из уравнений (2) имеет в области  $D$  общий интеграл

$$\psi_k(x, y)=C \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Совокупность этих общих интегралов будем называть *общим интегралом уравнения (1) в области  $D$* .\*

---

\* Это определение общего интеграла распространяется и на случай, когда уравнение (1) имеет бесконечное число вещественных решений вида (2).



Иногда вместо равенств (3) пишут равносильное им одно равенство

$$(\psi_1(x, y) - C)(\psi_2(x, y) - C) \dots (\psi_m(x, y) - C) = 0, \quad (4)$$

так что в рассматриваемом случае левая часть общего интеграла представляет собою полином степени  $m$  относительно произвольной постоянной  $C$ .

При сделанных предположениях поле направлений, определяемое уравнением (1), представляет собою результат наложения полей направлений, определяемых уравнениями (2), а семейство интегральных кривых, образующих общий интеграл (4), есть наложение семейств интегральных кривых, образующих общие интегралы (3). В каждой точке  $(x, y)$ , лежащей внутри области  $D$ , имеет место единственность решения задачи Коши для уравнения (1).

Если уравнение (1) разрешимо относительно  $y'$ , т. е. оно распадается на уравнения вида (2), но поля, определяемые этими уравнениями, не удовлетворяют сделанному выше предположению, так что существует хотя одна точка  $(x_0, y_0)$  такая, что значения хотя бы двух из функций  $f_k(x, y)$  в этой точке совпадают, то интегральные кривые соответствующих уравнений касаются друг друга в точке  $(x_0, y_0)$ . Вследствие этого интегральными кривыми уравнения (1), кроме интегральных кривых уравнений (2), будут также и кривые, составленные из интегральных кривых упомянутых выше уравнений путем склейки их в точке  $(x_0, y_0)$ , переходя в ней с интегральной кривой одного из этих уравнений на интегральную кривую другого уравнения (см. п. 67, пример 2). В рассматриваемом случае общий интеграл опять записывается в виде (3) или (4).

В общем случае уравнения (1) нам не удастся разрешить его относительно  $y'$  в элементарных функциях. Тогда мы будем предполагать, что уравнение (1) определяет  $y'$  как неявную функцию от  $x$  и  $y$ .

В таком случае (а иногда это целесообразно даже если уравнение (1) и разрешимо относительно  $y'$ ) ищут однопараметрическое семейство интегральных кривых в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (5)$$

Такое семейство интегральных кривых называется *общим интегралом* уравнения (1). Если семейство интегральных кривых задано в виде, разрешенном относительно  $y$ :

$$y = \varphi(x, C), \quad (5')$$

то оно называется *общим решением* уравнения (1).

Заметим, что в формулу общего интеграла (5) могут входить и решения уравнений вида (2), где  $y'$  — комплексное (см. п. 70). Мы не рассматриваем здесь такие уравнения. Поэтому соответствующие им решения нужно исключить из формулы (5).

Иногда ограничиваются тем, что находят однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения (1) в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t, C), \\ y &= \psi(t, C). \end{aligned} \right\}$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением уравнения (1) в параметрической форме*.

Решение  $y=y(x)$  уравнения (1) будем называть *частным решением*, если в каждой его точке задача Коши имеет единственное решение.

Решение  $y=y(x)$  уравнения (1) будем называть *особым решением*, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Так же как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной, уравнение (1) может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми (ср. п. 11).

Вопрос о связи частного и особого решений с формулой общего интеграла для уравнения (1) является более сложным, чем для уравнения, разрешенного относительно производной.

Если уравнение (1) распадается на уравнения (2), причем правые части последних уравнений удовлетворяют в области  $D$  условиям существования и единственности решения задачи Коши и во всякой точке области  $D$  направления поля, определяемые каждым из этих уравнений, различны, то частное решение  $y=y(x)$ , лежащее внутри области  $D$ , содержится в общем интеграле (4) при некотором числовом значении произвольной постоянной  $C$ , и обратно, всякое такое решение будет частным. Интегральные кривые, соответствующие частным решениям, не касаются друг друга внутри области  $D$ .

Если мы ограничиваемся формальным определением общего интеграла как однопараметрического семейства интегральных кривых (5) без дополнительных предположений относительно функции  $\Phi$ , то может случиться, что частное решение  $y=y(x)$  получается из формулы общего интеграла при переменном значении  $C$ ,  $C=C(x)$ , и особое решение может получаться из формулы общего интеграла при конкретном числовом значении произвольной постоянной  $C$ .

То же самое относится и к случаю, когда общее решение найдено в параметрической форме.

Отметим один достаточный признак особого решения уравнения (1). Он относится к случаю, когда это уравнение распадается на уравнения, разрешенные относительно производной. В этом случае решение  $y=y(x)$  уравнения (1) будет, наверное, особым решением этого уравнения, если оно будет особым решением хотя бы для одного из уравнений, на которые оно распадается.

## 67. Примеры.

**Пример 1.** Возьмем уравнение

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0. \quad (6)$$

Оно распадается на два уравнения:

$$y' = 1, \quad y' = -y^2. \quad (7)$$

Правые части этих уравнений определены на всей плоскости  $(x, y)$ , причем ни в одной точке их значения не совпадают. Поэтому поле, определяемое уравнением (6), представляет собой наложение полей, определяемых уравнениями (7).

Общими решениями уравнений (7) на всей плоскости  $(x, y)$  соответственно будут

$$y = x + C, \quad y = \frac{1}{x + C}. \quad (8)$$

Совокупность этих общих решений и дает общий интеграл уравнения (6) на всей плоскости  $(x, y)$ . Его можно записать и в виде одного соотношения:

$$(y - x - C) \left( y - \frac{1}{x + C} \right) = 0.$$

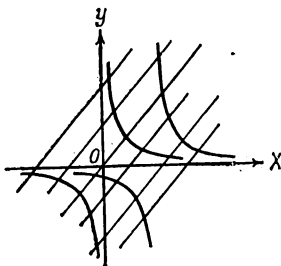


Рис. 22

Этот общий интеграл представляет собою наложение семейств интегральных кривых (8) (рис. 22).

Решение задачи Коши для уравнения (6) в каждой точке плоскости  $(x, y)$  единственно: в точке  $(x_0, y_0)$  мы имеем два направления поля  $y'_0 = 1$ ,  $y'_0 = -y_0^2$  и через нее проходят точно две интегральные кривые:

$$y = x + y_0 - x_0 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0} - x_0}, \quad \text{если } y_0 \neq 0, \quad (9)$$

или

$$y = x - x_0 \quad \text{и} \quad y = 0, \quad \text{если } y_0 = 0. \quad (10)$$

Решения (9) и (10) суть частные решения. Особых решений нет.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y'^2 - 2xy' = 0. \quad (11)$$

Разрешая относительно  $y'$ , находим два уравнения:

$$y' = 0, \quad y' = 2x. \quad (12)$$

Заметим, что хотя поля, определяемые этими уравнениями, так же как и уравнениями (7) в предыдущем примере, заданы на всей плоскости  $(x, y)$ , мы не имеем здесь наложения полей, ибо в точках оси  $Oy$  ( $x=0$ ) направления этих полей совпадают.

Совокупность общих интегралов уравнений (12):

$$y = C, \quad y - x^2 = C$$

или равносильное этой совокупности одно равенство

$$(y - C)(y - x^2 - C) = 0 \quad (13)$$

и дает общий интеграл уравнения (11) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad -\infty < y < \infty \quad (14)$$

и

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \quad (15)$$

В каждой из областей (14) и (15) общий интеграл (13) представляет собою наложение двух семейств кривых: прямых  $y=C$  и парабол  $y=x^2+C$  (рис. 23).

Возьмем любую точку  $M_0(x_0, y_0)$ , не лежащую на оси  $Oy$ , например любую точку из области (15), т. е. справа от оси  $Oy$ . В этой точке мы имеем два направления поля:  $y'_0=0$  и  $y'_0=2x_0$  и в достаточно малой окрестности этой точки через нее проходят две интегральные кривые

$$(I) \quad y=y_0,$$

$$(II) \quad y=x^2+y_0-x_0^2,$$

причем каждому из направлений поля соответствует одна интегральная кривая, т. е., согласно сказанному выше, мы имеем дело со случаем единственности решения задачи Коши.

Единственность решения задачи Коши нарушена только в точках оси  $Oy$  ( $x=0$ ): в то время как в каждой точке  $M_1(0, y_1)$  оси  $Oy$  направление поля одно,  $y'_0=0$ , через эту точку в любой сколь угодно малой окрестности ее проходит не одна интегральная кривая. А именно через эту точку проходят интегральные кривые:

$$y=y_1 \quad \text{и} \quad y=x^2+y_1.$$

Кроме того, через нее проходит интегральная кривая  $AM_1B$ :

$$y = \begin{cases} x^2+y_1, & -\infty < x \leq 0, \\ y_1, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

и еще интегральная кривая  $CM_1D$ :

$$y = \begin{cases} y_1, & -\infty < x \leq 0, \\ x^2+y_1, & 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

(Здесь мы имеем склейку частных решений в точке неединственности.) Таким образом, в каждой точке оси  $Oy$  нарушается единственность решения задачи Коши. Однако ось  $Oy$  ( $x=0$ ) не является интегральной кривой уравнения (11), так что это уравнение не имеет особых решений.

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$y'^3 - 1 = 0.$$

Разрешая относительно  $y'$ , получаем:

$$y' = 1, \quad y' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad y' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Так как нас интересуют лишь вещественные значения  $y'$ , то мы должны рассматривать только первое из полученных уравнений, из которого находим (вещественное!) общее решение данного уравнения в виде  $y=x+C$ .

**Пример 4.** Дано уравнение

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0. \quad (16)$$

Разрешая относительно  $y'$ , получаем два положительно однородных уравнения:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x} \quad (y^2 - 4x^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0).^* \quad (17)$$

Положим  $y = zx$ , тогда

$$z'x = \pm \sqrt{z^2 - 4}, \quad \frac{dz}{\pm \sqrt{z^2 - 4}} = \frac{dx}{x}$$

$$(x=0, \quad \sqrt{z^2 - 4} = 0?).$$

Интегрируя, находим

$$z \pm \sqrt{z^2 - 4} = Cx.$$

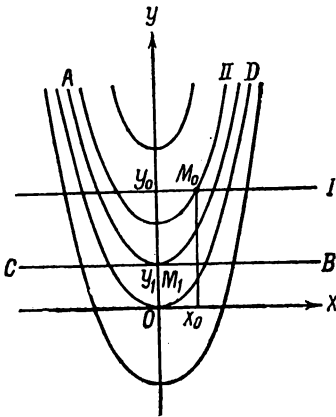


Рис. 23

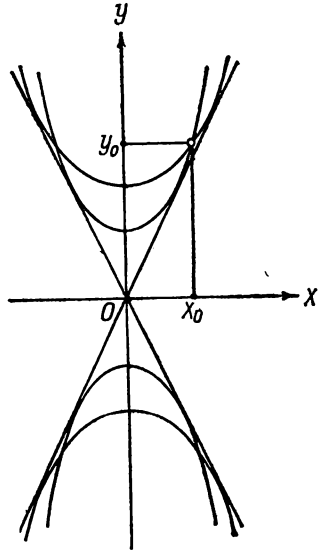


Рис. 24

Освобождаясь от иррациональности и возвращаясь к переменной  $y$ , получим семейство парабол (рис. 24):

$$C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0. \quad (18)$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения в каждой из областей:

$$\left. \begin{aligned} y^2 - 4x^2 > 0, \quad y > 0; \\ y^2 - 4x^2 > 0, \quad y < 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

\* Мы исключаем точку  $x=0, y=0$ , так как в ней поле не определено.

Действительно, в каждой точке  $(x_0, y_0)$ , лежащей внутри любой из областей (19), уравнение (16) задает два направления поля

$$y'_0 = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0^2}}{x_0}$$

и через каждую такую точку в достаточно малой окрестности ее проходят в точности две интегральные кривые семейства (18). Таким образом, в каждой точке, лежащей внутри любой из областей (19), имеет место единственность решения задачи Коши. Интегральные кривые семейства (18) не касаются друг друга. Они представляют собою частные решения.

Из равенств  $x=0$ ;  $\sqrt{z^2-4}=0$  следует, что мы могли потерять решения  $x=0$  ( $y \neq 0$ ) и  $y=\pm 2x$  ( $x \neq 0$ ). Нетрудно видеть, что полуоси оси  $Oy$  являются частными решениями уравнения (16), ибо они являются решениями этого уравнения и в каждой точке любого из них имеет место единственность решения задачи Коши. В самом деле, в точке  $(0, y_0)$ , где  $y_0 \neq 0$ , имеется два направления поля  $y'_0=0$ ,  $y'_0=\infty$  и через нее проходят две интегральные кривые:  $x^2=y_0(y-y_0)$  и  $x=0$  ( $y \neq 0$ ).

Полупрямые  $y=\pm 2x$  ( $x \neq 0$ ) являются решениями уравнения (16) и притом особыми, ибо в каждой точке любого из них нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, в точке  $(x_0, y_0)$  на решении  $y=2x$  ( $x \neq 0$ ) уравнение (16) задает одно направление поля,  $y'_0=2$ , в то время как через эту точку в любой сколь угодно малой окрестности ее проходит не одна интегральная кривая, а именно, само решение  $y=2x$  ( $x \neq 0$ ), парабола  $y = \frac{x^2}{x_0} + x_0$ , содержащаяся в общем интеграле (18) при  $C = \frac{2}{x_0}$ , и бесчисленное множество решений, склеенных из отрезков решения  $y=2x$  ( $x \neq 0$ ) и парабол.

Заметим, что решения  $y=\pm 2x$  ( $x \neq 0$ ) являются особыми для каждого из уравнений (17), на которые распадается уравнение (16).

**Пример 5.** Рассмотрим уравнение

$$y'^3 - 4yy' = 0. \quad (20)$$

Это уравнение распадается на три:

$$y'=0, \quad y'=2\sqrt{y}, \quad y'=-2\sqrt{y}. \quad (21)$$

Общим решением первого уравнения на всей плоскости  $(x, y)$  будет

$$y=C. \quad (22)$$

Интегрируя второе из уравнений (21), имеем:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad (\sqrt{y}=0?), \quad \sqrt{y}=x+C, \quad x+C>0,$$

так что

$$\sqrt{y}-x=C \quad (23)$$

будет общим интегралом этого уравнения в верхней полуплоскости.

Аналогично находим, что

$$\sqrt{y}+x=C \quad (24)$$

будет общим интегралом третьего из уравнений (21) в верхней полуплоскости.

Второе и третье из уравнений (21) имеют особое решение  $y=0$ .

Совокупность общих интегралов (22)–(24) представляет собою общий интеграл рассматриваемого уравнения (20) в верхней полуплоскости. Его можно записать и в виде одного равенства

$$(y-C)(\sqrt{y}-x-C)(\sqrt{y}+x-C)=0. \quad (25)$$

Общий интеграл (25) представляет собою наложение трех семейств интегральных кривых уравнений (21). В каждой точке  $(x_0, y_0)$  верхней полуплоскости мы имеем три направления поля:  $y'_0=0$ ,  $y'_0=2\sqrt{y_0}$ ,  $y'_0=-2\sqrt{y_0}$  и через эту точку в достаточно малой окрестности ее проходят три интегральные кривые (рис. 25):

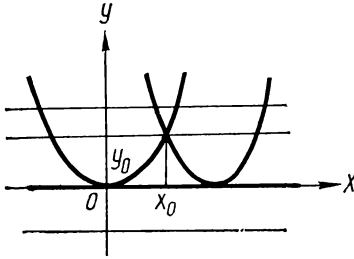


Рис. 25

$$y=y_0,$$

$$y=(x+\sqrt{y_0}-x_0)^2, \quad x>x_0-\sqrt{y_0},$$

$$y=(x-\sqrt{y_0}-x_0)^2, \quad x<\sqrt{y_0}+x_0.$$

Прямая  $y=0$  (ось  $Ox$ ) является особым решением уравнения (20), так как она является особым решением для второго и третьего из уравнений (21).

Заметим, что особое решение  $y=0$  получается из формулы общего интеграла (25) не только при  $C=-x$ ,  $C=x$ , но и при числовом значении  $C$ , а именно при  $C=0$ . Это объясняется тем, что для одного из уравнений (21), на которые распадается уравнение (20), а именно для уравнения  $y'=0$ , решение  $y=0$  будет частным.

**68. Нахождение кривых, подозрительных на особое решение, по дифференциальному уравнению.** В п. 12 мы показали, как по виду правой части дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

можно найти кривые, подозрительные на особое решение, в предположении, что правая часть этого уравнения непрерывна и имеет частную производную по  $y$  (конечную или нет). Напомним, что кривыми, подозрительными на особое решение, мы называли кривые, вдоль которых  $\frac{\partial f}{\partial y}$  не ограничена. Тот же вопрос естественно поставить и для уравнения (1)

$$F(x, y, y')=0,$$

не разрешенного относительно производной.

Предположим, что это уравнение определяет конечное или бесконечное число вещественных значений  $y'$ :

$$y' = f_k(x, y) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (26)$$

и что все функции  $f_k(x, y)$  непрерывны и имеют частные производные по  $y$ . Тогда, применив к каждому из уравнений (26) рассуждения п. 12, мы нашли бы все кривые, подозрительные на особые решения этих уравнений. Это — кривые, вдоль которых  $\frac{\partial f_k}{\partial y}$  обращаются в бесконечность.

Эти кривые будут подозрительными и на особое решение уравнения (1).

Однако в фактическом разрешении уравнения (1) относительно производной нет необходимости, ибо интересующую нас частную производную

$$\frac{\partial f_k}{\partial y} \equiv \frac{\partial y'}{\partial y}$$

можно найти и непосредственно из уравнения (1). В самом деле, дифференцируя уравнение (1) по  $y$  (в предположении, что существуют  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Производная  $\frac{\partial y'}{\partial y}$  (в предположении, что  $\frac{\partial F}{\partial y}$  отлична от нуля) будет неограничена, если

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Это условие нужно рассматривать совместно с уравнением (1), ибо нас интересуют не всякие кривые, вдоль которых  $\frac{\partial y'}{\partial y}$  не ограничена, а лишь интегральные кривые уравнения (1), следовательно, *кривые, подозрительные на особое решение, могут быть найдены исключением  $y'$  из системы*

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, y') &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



В результате исключения  $y'$  из системы (27) мы получим, вообще говоря, некоторую кривую

$$R(x, y) = 0.$$

Эта кривая называется *дискриминантной кривой дифференциального уравнения* (1). Чтобы дискриминантная кривая (или ее часть) была особым решением уравнения (1), нужно, чтобы она была решением этого уравнения и чтобы в каждой точке ее нарушалась единственность решения задачи Коши.\*

Рассмотрим частный случай уравнения (1), когда это уравнение является *к в а д р а т н ы м* относительно  $y'$ :

$$F(x, y, y') \equiv y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0. \quad (28)$$

Исключая  $y'$  из системы

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &\equiv 2y' + 2P(x, y) = 0, \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$R \equiv P^2(x, y) - Q(x, y) = 0, \quad (29)$$

так что дискриминантная кривая дифференциального уравнения (28) есть геометрическое место точек (29), в которых *д и с к р и м и н а н т* уравнения (28) (как *к в а д р а т н о г о* уравнения относительно  $y'$ ) равен нулю.

В каждой точке дискриминантной кривой (29) мы имеем *о д н о* направление поля,\*\* определяемое равенством

$$y' = -P(x, y),$$

в то время как через нее может пройти *н е о д н а* интегральная кривая.

**Пример 1.** Для уравнения

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$$

дискриминантной кривой будет

$$y^2 - 4x^2 = 0.$$

Она распадается на две прямые

$$y = \pm 2x.$$

Каждая из полупрямых  $y = \pm 2x$  ( $x \neq 0$ ) является решением уравнения и притом *о с о б ы м*, в чем мы уже убедились в примере 4 предыдущего пункта.

\* Подробное исследование дискриминантной кривой для случая уравнения  $n$ -й степени см. в книге [140, с. 125—132].

\*\* Ибо равенство  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  вместе с уравнением (28) есть условие кратности корня квадратного уравнения (28) относительно  $y'$ .

**Пример 2.** В случае уравнения

$$y'^2 - 2xy' + y = 0$$

дискриминантная кривая  $y = x^2$  не является особым решением, ибо она не является интегральной кривой этого уравнения.

**Пример 3.** Для уравнения

$$y'^2 - 2xy' - y^2 = 0$$

дискриминантная кривая  $x^2 + y^2 = 0$  вырождается в одну точку  $x = 0, y = 0$ , так что здесь мы не получаем кривой, подозрительной на особое решение.

### 69. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение.

Пусть дано семейство интегральных кривых уравнения (1) в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad y = \varphi(x, C).$$

Предположим, что это семейство имеет огибающую.\* Так же, как и в случае уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, эта *огибающая будет решением уравнения (1) и притом особым*. Действительно, в каждой точке ее направление касательной совпадает с одним из направлений поля, определяемым уравнением (1) в этой точке, вследствие чего огибающая является интегральной кривой. Кроме того, в каждой точке огибающей нарушается единственность решения задачи Коши в смысле, указанном в п. 66, ибо через каждую точку огибающей проходит больше число интегральных кривых, чем число направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0. \quad (30)$$

Мы уже показали в примере 4 п. 67, что уравнение (30) имеет семейство интегральных кривых

$$C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0. \quad (31)$$

Найдем огибающую этого семейства. Для этого ищем дискриминантную кривую семейства (31). Согласно п. 14, имеем:

$$\left. \begin{aligned} C^2x^2 - 2Cy + 4 &= 0, \\ 2Cx^2 - 2y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения находим  $C = \frac{y}{x^2}$  ( $x \neq 0$ ) и, подставляя в первое, получаем  $y^2 - 4x^2 = 0$  ( $x \neq 0$ ). Эта дискриминантная кривая распадается на полупрямые  $y = \pm 2x$  ( $x \neq 0$ ), каждая из которых является огибающей, соответствующей части семейства интегральных кривых (31), как это видно непосредственно из рис. 24.

\* Определение огибающей и способ нахождения ее см. в п. 14.

В следующих параграфах мы ограничиваемся изложением приемов нахождения семейств интегральных кривых, зависящих от одной произвольной постоянной  $C$ , так что речь будет идти главным образом о технике интегрирования уравнений, принадлежащих к тому или иному типу.

### § 15. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**70. Уравнение, содержащее только производную.** Естественно ожидать, что задача интегрирования уравнения (1) п. 66 облегчается, если левая часть этого уравнения не содержит аргумента  $x$  или искомой функции  $y$ , или того и другого вместе. Такие уравнения будем называть *неполными*. Простейшим из них является уравнение, содержащее только производную:

$$F(y') = 0. \quad (1)$$

Предположим, что это уравнение имеет некоторое (конечное или бесконечное) число вещественных решений:

$$y' = k_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где  $k_i$  — некоторые постоянные, так что мы имеем тождества

$$F(k_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Интегрируя уравнения (2), мы находим:

$$y = k_i x + C, \quad (4)$$

откуда

$$k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Подставляя это значение  $k_i$  в тождества (3), мы придем к одному соотношению

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \quad (5)$$

Это соотношение и является общим интегралом уравнения (1).

Таким образом, при сделанном предположении интегральные кривые уравнения (1) образуют семейство прямых линий (4), которое может быть записано в виде одного уравнения (5).

При этом в формулу (5) могут войти решения комплексных дифференциальных уравнений.

**Пример 1.** Рассмотрим снова уравнение примера 3 п. 67

$$y'^3 - 1 = 0.$$

Согласно (5), его общим интегралом является

$$\left( \frac{y-C}{x} \right)^3 - 1 = 0.$$

Однако сюда, кроме вещественного общего решения (см. п. 67, пример 3)

$$y = x + C,$$

входят решения комплексных дифференциальных уравнений:

$$y' = \frac{-1 + i\sqrt[3]{3}}{2}; \quad y' = \frac{-1 - i\sqrt[3]{3}}{2},$$

**З а м е ч а н и е.** Если корни уравнения (1) заполняют сплошь некоторый интервал, то, как показал Ю. С. Богданов,\* дифференциальное уравнение (1) может иметь решения, отличные от указанных выше.

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$y' + |y'| = 0. \quad (1')$$

Решая его относительно  $y'$ , имеем

$$y' = k \quad (-\infty < k \leq 0),$$

так что корни уравнения (1') заполняют сплошь интервал  $(-\infty, 0]$ . Интегральными кривыми уравнения (1') будут п р я м ы е

$$y = kx + C \quad (-\infty < k \leq 0). \quad (4')$$

Кроме того, решением уравнения (1') будет, например, функция

$$y = -x^2 \quad (0 \leq x < \infty),$$

которая, очевидно, не входит в семейство (4').

**71. Уравнение, не содержащее искомой функции.** Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y') = 0. \quad (6)$$

Если это уравнение разрешимо относительно  $y'$ , так что

$$y' = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

---

\* В работе [19] им найдены все решения уравнения (1) при произвольной функции  $F$ .

то совокупность общих решений уравнений (7), т. е.

$$y = \int f_k(x) dx + C \quad (k=1, 2, \dots)$$

дает общий интеграл уравнения (6).

Интегральными кривыми уравнения (6) будут также кривые, склеенные из интегральных кривых уравнений (7).

Предположим теперь, что уравнение (6) не разрешимо (в элементарных функциях) относительно  $y'$ , но можно найти такие элементарные функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , что

$$F[\varphi(t), \psi(t)] \equiv 0.$$

Тогда уравнение (6) можно записать в виде

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t). \quad (8)$$

В таком случае будем говорить, что уравнение (6) допускает *параметрическое представление* (8).

Для нахождения общего решения уравнения (6) заметим, что вдоль всякой интегральной кривой любого дифференциального уравнения первого порядка должно выполняться *основное соотношение*

$$dy = y' dx. \quad (9)$$

Пользуясь этим соотношением и параметрическим представлением уравнения (6), нетрудно найти общее решение этого уравнения в параметрической форме. Параметрическое выражение для  $x$  мы уже имеем:  $x = \varphi(t)$ . Найдем параметрическое выражение для  $y$ . Для этого заменим в основном соотношении (9)  $y'$  и  $dx$  их значениями из формул (8):  $y' = \psi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ . Получаем

$$dy = \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Интегрируя, находим

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C.$$

Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C. \quad (10)$$

Иногда удается исключить из уравнений (10) параметр  $t$ , и тогда мы получаем общее решение (общий интеграл) в обычной форме.

Если существует такое конечное число  $a$ , при котором

$$\lim_{y' \rightarrow \infty} F(a, y') = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{y' \rightarrow -\infty} F(a, y') = 0,$$

то  $x=a$  есть решение уравнения (6). Это решение может оказаться **особым**.

Если уравнение (6) разрешимо относительно  $x$ , т. е. если его можно переписать в виде

$$x=\varphi(y'), \quad (11)$$

то, положив  $y'=\psi(t)$ , получаем параметрическое представление:

$$x=\varphi(\psi(t)), \quad y'=\psi(t). \quad (12)$$

В частности, полагая  $y'=t$ , будем иметь:

$$x=\varphi(t), \quad y'=t. \quad (13)$$

Поэтому формулы (10) заменяются, в последнем случае, следующими:

$$x=\varphi(t), \quad y=\int t\varphi'(t)dt+C. \quad (14)$$

Обращаем внимание читателя на то, что при интегрировании уравнения вида (11) не всегда целесообразно принимать именно  $y'$  за параметр, т. е. использовать параметрическое представление (13). Во многих случаях уравнение (11) интегрируется проще, если воспользоваться более общим параметрическим представлением (12), подобрав удачным образом функцию  $\psi(t)$ . Уравнение (11) может иметь особые решения вида  $x=a$ , где  $a$  таково, что

$$\lim_{y' \rightarrow \infty} \varphi(y') = a \quad \text{или} \quad \lim_{y' \rightarrow -\infty} \varphi(y') = a.$$

**Замечание 1.** Практически нет необходимости пользоваться формулами (10) или (14). *Общее решение всегда получается из параметрического представления уравнения непосредственным использованием основного соотношения (9).* Это замечание относится и ко всем дальнейшим случаям построения общего решения в параметрической форме.

**Замечание 2.** Если рассматривать  $x$  и  $y'$  как прямоугольные координаты точки на плоскости  $(x, y')$ , то уравнению (6) соответствует на плоскости  $(x, y')$  некоторая кривая (рис. 26), а формулы (8) представляют параметрические уравнения этой кривой. Поэтому задача нахождения параметрического представления уравнения (6) равносильна задаче нахождения параметрических уравнений соответствующей плоской кривой. Последняя задача решается очень просто, если уравнение кривой разрешимо относительно одной из координат. Отметим еще один случай, когда эта задача решается легко. Это тот случай, когда уравнение кривой (6) можно представить в виде

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0, \quad (15)$$

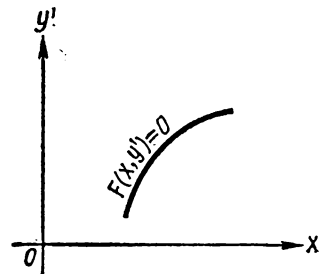


Рис. 26

где  $P(x, y')$  и  $Q(x, y')$  — однородные функции  $x$  и  $y'$  соответственно  $k$ -го и  $m$ -го измерений. Перепишем уравнение (15) так:

$$x^k P\left(1, \frac{y'}{x}\right) + x^m Q\left(1, \frac{y'}{x}\right) = 0.$$

Отсюда (считая  $k > m$ ) имеем:

$$x^{k-m} = - \frac{Q\left(1, \frac{y'}{x}\right)}{P\left(1, \frac{y'}{x}\right)}, \quad x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q\left(1, \frac{y'}{x}\right)}{P\left(1, \frac{y'}{x}\right)}}$$

Полагая

$$y' = tx, \tag{16}$$

находим:

$$x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}, \quad y' = t \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}.$$

Если, в частности,  $k-m=1$ , а  $P(x, y')$  и  $Q(x, y')$  суть полиномы, то получаем рациональное параметрическое задание кривой (15)\* и тем самым рациональное параметрическое представление соответствующего ей дифференциального уравнения.

Практически нужно сразу в уравнении (15) делать подстановку (16) и, найдя из полученного уравнения выражение  $x$  через  $t$ ,  $x = \varphi(t)$ , подставить его в (16), после чего мы получим выражение  $y'$  через  $t$ ,  $y' = t\varphi(t)$ , что вместе с  $x = \varphi(t)$  и дает параметрическое представление уравнения (15).

**Пример 1.** Дано уравнение

$$x = e^{y'} - y'. \tag{17}$$

Представим это уравнение в параметрической форме:

$$x = e^t - t, \quad y' = t,$$

отсюда

$$dy = y' dx = t(e^t - 1) dt, \quad y = \int t(e^t - 1) dt + C = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Общим решением уравнения (17) в параметрической форме будет

$$x = e^t - t, \quad y = (t-1)e^t - \frac{t^2}{2} + C.$$

**Пример 2.** Дано уравнение

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0. \tag{18}$$

Это уравнение имеет вид (15). Полагая  $y' = tx$ , получим

$$x^3 + t^3 x^3 - 3tx^2 = 0,$$

---

\* Такие кривые называются *уникурсальными*. Легко показать, что все кривые второго порядка суть уникурсальные кривые.

откуда

$$x = \frac{3t}{1+t^3}.$$

Тогда

$$y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Чтобы выразить  $y$  через параметр  $t$ , воспользуемся соотношением  $dy = y' dx$ .  
Получаем:

$$dy = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2} dt = \frac{9(1-2t^3)^2 t^2}{(1+t^3)^3} dt,$$

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)^2 t^2}{(1+t^3)^3} dt + C = \frac{3}{2} \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

Таким образом, общим решением уравнения (18) в параметрической форме будет

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3}{2} \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

**72. Уравнение, не содержащее независимой переменной.** Рассмотрим уравнение вида

$$F(y, y') = 0. \quad (19)$$

Если оно разрешимо относительно  $y'$ , так что

$$y' = f_k(y) \quad (k=1, 2, \dots),$$

то общий интеграл дается совокупностью равенств

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C \quad (k=1, 2, \dots).$$

Особыми решениями могут быть прямые  $y = b_i$ , где  $b_i$  — корни уравнений  $f_k(b) = 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ) или, что то же, уравнения  $F(b, 0) = 0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (19) не разрешимо относительно  $y'$ , но допускает *параметрическое представление*

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

В этом случае, используя основное соотношение  $dy = y' dx$ , имеем

$$\varphi'(t) dt = \psi(t) dx,$$

отсюда

$$dx = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C.$$



Присоединяя сюда равенство  $y=\varphi(t)$ , получаем общее решение уравнения (19) в параметрической форме

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t).$$

Если, в частности, уравнение (19) разрешимо относительно  $y$ , т. е. может быть приведено к виду

$$y = \varphi(y'), \quad (20)$$

то оно допускает параметрическое представление вида

$$y = \varphi(\psi(t)), \quad y' = \psi(t).$$

Например, полагая  $\psi(t) = t$ , имеем параметрическое представление

$$y = \varphi(t), \quad y' = t,$$

и общим решением в параметрической форме будет

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

Уравнение (20) может иметь особые решения вида  $y = b$ , где  $b = \varphi(0)$ .

**Пример.** Дано уравнение

$$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2. \quad (21)$$

Это уравнение однородно относительно величин  $y$  и  $2 - y'$ . Полагая

$$2 - y' = yt,$$

имеем

$$y^2(y' - 1) = y^2 t^2,$$

откуда

$$y' = 1 + t^2 \quad (y^2 \neq 0).$$

Поэтому

$$y = \frac{2 - y'}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

Итак, уравнение (21) допускает следующее параметрическое представление:

$$y = \frac{1}{t} - t, \quad y' = 1 + t^2.$$

Следуя общей теории, имеем

$$dy = y' dx, \quad \left(-\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = (1 + t^2) dx, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x = \frac{1}{t} + C.$$

Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид

$$x = \frac{1}{t} + C, \quad y = \frac{1}{t} - t.$$

Здесь параметр  $t$  легко исключается, после чего получаем общее решение в обычной форме

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}.$$

Особых решений нет (почему?).

**73. Обобщенное однородное уравнение.** Рассмотрим один тип полных уравнений, приводящихся к неполному уравнению вида (19). Пусть дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad (22)$$

в котором левая часть становится *однородной* функцией всех своих аргументов, если считать  $x, y, y'$  соответственно величинами 1-го,  $k$ -го,  $(k-1)$ -го измерений, т. е.

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y') = t^m F(x, y, y'). \quad (23)$$

Такое уравнение называется *обобщенным однородным*. Напомним, что мы уже рассматривали обобщенное однородное уравнение в § 5 гл. 1, но там мы предполагали его разрешенным относительно производной, в то время как здесь рассматривается общий случай.

Сделаем замену независимой переменной  $x$  и искомой функции  $y$  по формулам

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}, \quad (24)$$

где  $t$  — новая независимая переменная, а  $z$  — новая искомая функция. Будем иметь

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

или

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}. \quad (25)$$

Но, дифференцируя вторую из формул (24) по  $t$ , находим

$$\frac{dy}{dt} = \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{kt}.$$

Подставляя это выражение в (25), имеем

$$y' = \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{(h-1)t}.$$

Поэтому, выполняя в уравнении (22) подстановку (24), получим

$$F \left( e^t, ze^{ht}, \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{(h-1)t} \right) = 0,$$

или, согласно (23) (здесь роли  $t$ ,  $x$ ,  $y$  и  $y'$  играют соответственно  $e^t$ ,  $1$ ,  $z$  и  $\frac{dz}{dt} + kz$ )

$$e^{mt} F \left( 1, z, \frac{dz}{dt} + kz \right) = 0.$$

Сокращая на  $e^{mt}$ , приходим к уравнению типа (19):

$$F \left( 1, z, \frac{dz}{dt} + kz \right) = 0.$$

## § 16. ОБЩИЙ МЕТОД ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

**74. Приведение уравнения, не разрешенного относительно производной, к уравнению, разрешенному относительно производной. Общий случай.** Рассмотрим теперь *полное* уравнение общего вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Предположим, что оно допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v), \quad (2)$$

так что

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0$$

при всех значениях параметров  $u$  и  $v$ .

Используя уравнения (2) и основное соотношение  $dy = y'dx$ , мы всегда можем привести уравнение (1) к уравнению, разрешенному относительно производной.

Действительно, мы имеем

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv, \quad y' = \chi(u, v).$$

Подставляя все это в соотношение  $dy = y'dx$ , получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right).$$

Взяв здесь  $u$  за независимую переменную, получим уравнение, разрешенное относительно производной

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \quad (3)$$

Если мы сможем найти его общее решение

$$v = \omega(u, C), \quad (4)$$

то, подставляя функцию  $v$ , определяемую равенством (4), в первые два из уравнений (2), получим общее решение уравнения (1) в параметрической форме:

$$x = \varphi(u, \omega(u, C)), \quad y = \psi(u, \omega(u, C)).^*$$

**75. Случай, когда уравнение разрешимо относительно искомой функции.** Практическое применение изложенного выше метода связано с преодолением двух трудностей: 1) нахождением параметрического представления уравнения (1) и 2) интегрированием уравнения (3).

Первая трудность легко преодолевается, когда уравнение (1) разрешимо относительно искомой функции или аргумента.

Предположим сначала, что уравнение (1) *разрешимо относительно искомой функции*, т. е. может быть переписано в виде

$$y = \varphi(x, y'). \quad (5)$$

В этом случае за параметры  $u$  и  $v$  можно принять  $x$  и  $y'$ . Тогда равенства (2) будут иметь вид

$$x = x, \quad y = \varphi(x, y'), \quad y' = y'.$$

Отбрасывая первое из этих равенств и обозначая переменную  $y'$ , рассматриваемую как параметр, буквой  $p$ , получим следующее *параметрическое представление* уравнения (5):

$$y = \varphi(x, p), \quad y' = p. \quad (6)$$

---

\* Таким образом, задача нахождения параметрического представления (2) и интегрирования уравнения (3) эквивалентна задаче интегрирования уравнения (1).

Заменяя теперь в основном соотношении  $dy = y' dx$  величины  $dy$  и  $y'$  их значениями из формул (6):

$$dy = \varphi_x' dx + \varphi_p' dp, \quad y' = p,$$

получим дифференциальное уравнение

$$\varphi_x' dx + \varphi_p' dp = p dx. \quad (7)$$

Если принять в уравнении (7)  $x$  за независимую переменную, то, разделив обе его части на  $dx$ , мы придем к уравнению

$$\varphi_x' + \varphi_p' \frac{dp}{dx} = p.$$

Предположим, что нам удалось найти общее решение этого уравнения

$$p = \omega(x, C).$$

Тогда, подставляя найденное значение  $p$  в первое из уравнений (6), получим общее решение уравнения (5):

$$y = \varphi(x, \omega(x, C)).^*$$

Уравнение (7) может иметь особое решение

$$p = \gamma(x).$$

Подставляя это решение в первое из равенств (6), получим решение уравнения (5):

$$y = \varphi(x, \gamma(x)),$$

не содержащее произвольной постоянной. Это решение может быть особым.

**76. Случай, когда уравнение разрешимо относительно независимой переменной.** Если уравнение (1) разрешимо относительно независимой переменной, т. е. может быть приведено к виду

$$x = \varphi(y, y'), \quad (8)$$

то оно интегрируется так.

Полагая  $y' = p$ , получаем *параметрическое представление* уравнения (8):

$$x = \varphi(y, p), \quad y' = p.$$

---

\* Иногда уравнение (7) легче интегрируется, если принять за независимую переменную не  $x$ , а  $p$ . Тогда мы получим общее решение в параметрической форме.

Подставим в равенство  $dy = y'dx$  вместо  $y'$  и  $dx$  их значения

$$y' = p, \quad dx = \varphi_y' dy + \varphi_p' dp.$$

Получим

$$dy = p(\varphi_y' dy + \varphi_p' dp). \quad (9)$$

Приняв  $y$  за независимую переменную, придем к уравнению

$$1 = p \left( \varphi_y' + \varphi_p' \frac{dp}{dy} \right)$$

или

$$\frac{1}{p} = \varphi_y' + \varphi_p' \frac{dp}{dy}. \quad (10)$$

Отсюда

$$p = \omega(y, C),$$

и общий интеграл уравнения (8) имеет вид

$$x = \varphi(y, \omega(y, C)).$$

Если  $p = \gamma(y)$  — особое решение уравнения (10), то

$$x = \varphi(y, \gamma(y)) \quad (11)$$

может быть особым решением уравнения (8).

Если уравнение  $F(x, y, y') = 0$  разрешимо относительно  $x$ , т. е. может быть записано в виде (8), то оно, кроме особых решений вида (11), может еще иметь особые решения вида  $y = b$ , которые мы могли потерять при нахождении общего интеграла вследствие того, что искали общий интеграл в виде, разрешенном относительно  $x$ .

Решения вида  $y = b$  находятся так.

Полагаем в данном уравнении  $y = b$ , где  $b$  — некоторое неопределенное постоянное число. Получаем  $F(x, b, 0) = 0$ . Если существует такое число  $b$ , что это равенство выполняется тождественно относительно  $x$ , то  $y = b$  и будет решением данного уравнения.

Мы показали выше, что если уравнение  $F(x, y, y') = 0$  разрешимо относительно искомой функции  $y$  или аргумента  $x$ , т. е. приводимо к виду (5) или (8), то всегда можно легко получить его параметрическое представление. Однако затруднения в решении получающихся при этом уравнений (7) и (9), вообще говоря, остаются. Рассмотрим теперь два частных случая уравнения (5), в которых и эти затруднения отпадают.

**77. Уравнение Лагранжа.** Рассмотрим уравнение, в котором  $y$  является линейной функцией от  $x$  с коэффициентами, зависящими от  $y'$ , т. е. уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \quad (12)$$

Это уравнение называется *уравнением Лагранжа*.

Покажем, что *уравнение Лагранжа в отличие от уравнения (5) общего вида всегда интегрируется в квадратурах*.

Действительно, полагая  $y' = p$ , имеем:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad y' = p. \quad (13)$$

Заменяя в равенстве  $dy = y'dx$  величины  $dy$  и  $y'$  их значениями из (13), имеем

$$\varphi(p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = p dx$$

или

$$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0. \quad (14)$$

В полученном уравнении коэффициент при  $dx$  не зависит от  $x$ , а коэффициент при  $dp$  зависит от  $x$  линейно. Поэтому его можно привести к линейному уравнению с искомой функцией  $x$ . Для этого разделим обе части уравнения (14) на  $dp$  и  $\varphi(p) - p$ , предполагая, что  $\varphi(p) - p \neq 0$ , т. е. что в уравнении (12)  $\varphi(y') \neq y'$ .\* Получим

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (\varphi(p) - p \neq 0). \quad (15)$$

Это — линейное уравнение с искомой функцией  $x$  от независимой переменной  $p$ . Его общее решение имеет вид (см. п. 36, формула (20))

$$x = A(p)C + B(p).$$

Подставляя это выражение в первое из равенств (13), получим

$$y = A_1(p)C + B_1(p),$$

где

$$A_1(p) = A(p)\varphi(p), \quad B_1(p) = B(p)\varphi(p) + \psi(p).$$

Окончательно получаем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= A(p)C + B(p), \\ y &= A_1(p)C + B_1(p). \end{aligned} \right\}$$

Приводя уравнение (14) к виду (15), мы делили его на  $\varphi(p) - p$ . При этом мы могли потерять решения уравнения (14), имеющие вид  $p = p_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), где  $p_i$  — корни уравнения

$$\varphi(p) - p = 0. \quad (16)$$

---

\* Случай  $\varphi(y') \equiv y'$  будет рассмотрен в следующем пункте.

Подставляя эти значения  $p$  в первое из равенств (13) и принимая во внимание, что

$$\varphi(p_i) = p_i,$$

получим следующие решения уравнения Лагранжа:

$$y = p_i x + \psi(p_i) \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Эти решения могут быть как частными, так и особыми.

Таким образом, особыми решениями уравнения Лагранжа могут быть только прямые (17), где  $p_i$  суть корни уравнения (16).

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y = xy'^2 + y'^2. \quad (18)$$

Полагая  $y' = p$ , имеем:

$$y = xp^2 + p^2, \quad y' = p. \quad (19)$$

Пользуясь основным соотношением  $dy = y'dx$ , получаем

$$p^2 dx + (2px + 2p) dp = p dx$$

или

$$(p^2 - p) dx + 2p(x + 1) dp = 0.$$

Приводя это уравнение к линейному относительно  $x$ , имеем

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1} x = \frac{2}{1-p} \quad (p^2 - p = 0?).$$

Интегрируя, находим

$$x = \frac{C_1}{(p-1)^2} - 1.$$

Подставляя найденное выражение для  $x$  в первое из равенств (19), получим

$$y = \frac{C_1 p^2}{(p-1)^2}.$$

Поэтому уравнения

$$x = \frac{C_1}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{C_1 p^2}{(p-1)^2}$$

дают общее решение уравнения (18) в параметрической форме.

Исключая параметр  $p$ , получим общее решение в обычном виде:

$$y = (\sqrt{x+1} + C)^2 \quad (C = \sqrt{C_1}).$$

Уравнение  $p^2 - p = 0$  дает два значения  $p$ :  $p = 0$  и  $p = 1$ . Подставляя их в первое из равенств (19), найдем два решения уравнения (18):

$$y = 0, \quad y = x + 1.$$

Первое из этих решений является особым, второе — частным.



**78. Уравнение Клеро.** Рассмотрим теперь тот случай, когда в уравнении Лагранжа  $\varphi(y') \equiv y'$ . Тогда уравнение Лагранжа принимает вид

$$y = y'x + \psi(y') \quad (20)$$

и называется *уравнением Клеро*. Предположим, что  $\psi(y')$  есть нелинейная функция от  $y'$ , ибо в противном случае уравнение Клеро вырождается в уравнение с разделяющимися переменными.

Так же как и при интегрировании уравнения Лагранжа, положим  $y' = p$ . Тогда

$$y = px + \psi(p), \quad y' = p. \quad (21)$$

Пользуясь основным соотношением  $dy = y'dx$ , получаем

$$pdx + (x + \psi'(p))dp = pdx,$$

или

$$(x + \psi'(p))dp = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) распадается на два:

$$dp = 0 \quad \text{и} \quad x + \psi'(p) = 0. \quad (23)$$

Первое из этих уравнений дает для  $p$  постоянное значение  $p = C$ . Подставляя это значение в первое из уравнений (21), найдем общее решение и уравнения Клеро. Оно будет иметь вид

$$y = Cx + \psi(C), \quad (24)$$

т. е. представляет собою семейство прямых. Сравнивая (24) и (20), мы видим, что *общее решение уравнения Клеро получается формально заменой  $y'$  на  $C$* .

Второе из уравнений (23) дает выражение  $x$  через параметр  $p$ :

$$x = -\psi'(p).$$

Подставляя это значение  $x$  в первое из уравнений (21), получим выражение  $y$  через тот же параметр  $p$ . Таким образом, мы получаем еще решение уравнения Клеро:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

в котором  $p$  есть параметр.

Докажем, что это решение является заведомо особым, если  $\psi''(p)$  существует, непрерывна и не обращается в нуль. С этой целью покажем, что решение (25), при сделанном предположении относительно  $\psi(p)$ , является *ограничивающей* семейства интегральных кривых (24).

Согласно п. 14, находим сначала дискриминантную кривую, которая в нашем случае будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} y &= Cx + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C) \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= -\psi'(C), \\ y &= -C\psi'(C) + \psi(C). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Здесь  $C$  — параметр. Кривая (26) совпадает с кривой (25), так как уравнения (26) и (25) отличаются только обозначением параметра. Таким образом, решение (25) во всяком случае является дискриминантной кривой семейства (24). Чтобы убедиться, что она или, что то же, кривая (26) является огибающей семейства (24), достаточно показать, что кривая (26) есть кривая в гладкой параметризации. Это действительно имеет место, ибо

$$x_C' = -\psi''(C), \quad y_C' = -C\psi''(C),$$

откуда видно, что  $x_C'$  и  $y_C'$  непрерывны и  $x_C'$  не обращается в нуль.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y = y'x - \frac{1}{4} y'^2. \quad (27)$$

Заменяя  $y'$  на  $C$ , получаем общее решение

$$y = Cx - \frac{1}{4} C^2. \quad (28)$$

Ищем огибающую семейства (28). Находим

$$\left. \begin{aligned} y &= Cx - \frac{1}{4} C^2, \\ 0 &= x - \frac{1}{2} C. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем дискриминантную кривую:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} C, \\ y &= \frac{1}{4} C^2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Так как  $\psi''(C) = -\frac{1}{2} \neq 0$ , то кривая (29) является огibaющей. Исключая параметр  $C$ , получаем ее уравнение в явном виде:

$$y = x^2. \quad (30)$$

Интегральными кривыми уравнения (27) являются прямые (28) и их огibaющая, парабола (30) (рис. 27). Интегральными кривыми будут также и кривые вида  $AMT$ , составленные из дуги  $AM$  параболы (30) и касательной  $MT$  в точке  $M$ .

К уравнению Клеро мы приходим всякий раз, когда ищем кривую по свойству ее касательной, не зависящему от точки касания (т. е. общему для всех точек кривой). Пусть  $y = f(x)$  искомая кривая (рис. 28).

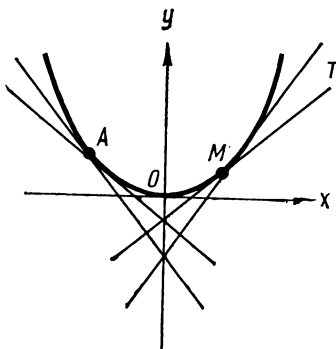


Рис. 27

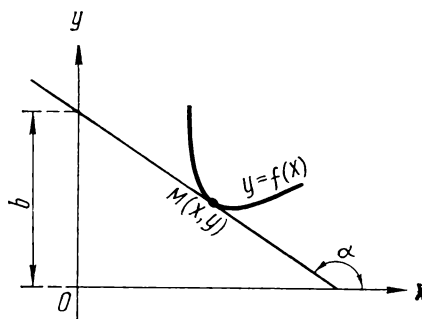


Рис. 28

Уравнение касательной в точке  $M(x, y)$  имеет вид

$$Y - y = y'(X - x) \quad \text{или} \quad Y = y'X + y - y'x.$$

Параметры касательной:  $k = \operatorname{tg} \alpha = y'$ ,  $b = y - y'x$ . Всякое общее свойство касательной выражается зависимостью между  $k$  и  $b$ :

$$F(k, b) = 0.$$

Заменяя здесь  $k$  и  $b$  их значениями, находим

$$F(y', y - y'x) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно  $y - y'x$ , получаем

$$y - y'x = \psi(y'),$$

т. е. уравнение Клеро. Особое решение и есть та кривая, семейство касательных к которой дает общее решение.

## § 17. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

**79. Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат.** В качестве примера одного из многочисленных геометрических приложений дифференциальных уравнений первого порядка рассмотрим так называемую *задачу о траекториях*. Пусть на плоскости  $(x, y)$  задано однопараметрическое семейство кривых линий

$$\Phi(x, y, a) = 0. \quad (1)$$

Кривая  $L_1$  (рис. 29), пересекающая все кривые  $L$  семейства (1) под одним и тем же постоянным углом  $\alpha^*$  называется *изогональной траекторией* этого семейства.

Если, в частности,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то изо-

гональная траектория называется *ортогональной*. Найдем изогональные (ортогональные) траектории семейства (1).

С этой целью установим сначала соотношение между угловыми коэффициентами касательной к кривой семейства (1) и к изогональной траектории в точке их пересечения. Пусть  $M(x_1, y_1)$  — любая точка на изогональной траектории  $L_1$ . Обозначим углы, образованные осью  $Ox$  с касательной  $MT$  к кривой  $L$  семейства (1), проходящей через точку  $M$ , и с касательной  $MT_1$  к траектории  $L_1$  в точке  $M$ , соответственно через  $\varphi$  и  $\varphi_1$ . Тогда при перемещении точки  $M$  по траектории выполняется соотношение

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha = \text{const},$$

причем

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Предположим, что  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  и обозначим  $\operatorname{tg} \alpha$  через  $k$ . Имеем  $\varphi = \varphi_1 - \alpha$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi_1}$$

---

\* Углом  $\alpha$  между двумя кривыми  $L_1$  и  $L$  в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

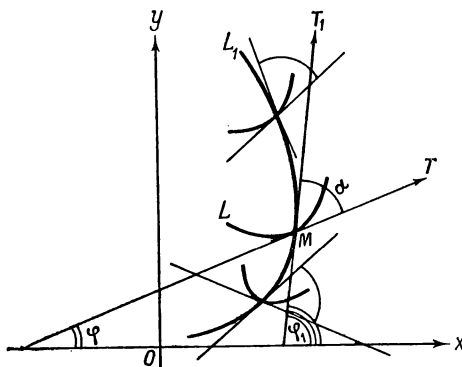


Рис. 29

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k \frac{dy_1}{dx_1}}. \quad (2)$$

Это равенство и устанавливает искомую связь между направлением касательной в любой точке  $M$  траектории  $L_1$  и направлением касательной к кривой  $L$  семейства (1), проходящей через эту точку.

Составим теперь дифференциальное уравнение семейства (1). Для этого, как всегда, исключим параметр  $a$  из уравнений

$$\Phi(x, y, a) = 0, \quad \Phi'_x + \Phi'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Получим

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (3)$$

Это равенство выполняется для всех точек области, заполненной кривыми семейства (1). Оно выполняется, в том числе и в рассматриваемой нами точке  $M$ . Но в этой точке мы можем заменить  $x$  и  $y$  на  $x_1$  и  $y_1$ , а  $\frac{dy}{dx}$  — на ее значение из (2), так что получим соотношение

$$F\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k \frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0, \quad (4)$$

связывающее координаты любой точки  $M$  траектории  $L_1$  с направлением касательной к ней в этой точке. Следовательно, равенство (4) есть *дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий*.

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$ , и, следовательно, вместо соотношения (2) мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Заменяя теперь в (3)  $x, y$  и  $\frac{dy}{dx}$  соответственно на  $x_1, y_1$  и  $-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$ , полу-

чим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$F\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0.$$

Получив дифференциальное уравнение семейства изогональных (ортогональных) траекторий, мы можем, конечно, переписать его, опуская индексы. В итоге мы приходим к следующему правилу нахождения дифференциального уравнения семейства изогональных (ортогональных) траекторий: 1) составить дифференциальное уравнение данного семейства, 2) заменить в полученном уравнении  $\frac{dy}{dx}$  на

$$\frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k \frac{dy}{dx}}, \text{ если } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \quad (k = \operatorname{tg} \alpha),$$

и на

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ если } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

## 80. Примеры.

**Пример 1.** Найти ортогональные траектории семейства полупрямых, выходящих из начала координат,  $y = ax$ .

Исключая  $a$  из уравнений  $y = ax$  и  $y' = a$ , найдем дифференциальное уравнение рассматриваемого семейства:  $y = y'x$ . Заменяя  $y'$  на  $-\frac{1}{y'}$ , получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:  $y = -\frac{1}{y'}x$  или  $ydy + xdx = 0$ . Следовательно, искомые ортогональные траектории суть окружности  $x^2 + y^2 = C^2$ .

**Пример 2.** Найти изогональные траектории семейства полупрямых, выходящих из начала координат. Дифференциальное уравнение семейства имеет вид  $y = y' \cdot x$ . Заменяя

здесь  $y'$  на  $\frac{y' - k}{1 + ky'}$ , получаем

$$y = \frac{y' - k}{1 + ky'} x$$

или

$$(y + kx)dx + (ky - x)dy = 0. \quad (5)$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомых изогональных траекторий.

Интегрируя однородное уравнение (5) при помощи интегрирующего множителя, получаем

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

(см. пример в п. 61, в нашем случае  $p=1$ ,  $q=-k$ ) или в полярных координатах

$r = Ce^{\frac{\theta}{k}}$ . Итак, искомыми изогональными траекториями является семейство логарифмических спиралей. Из курсов дифференциального исчисления [150, т. I, с. 604] известно, что логарифмическая спираль  $r = Ce^{m\theta}$  пересекает все свои радиус-векторы под постоянным углом  $\omega$ , причем  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m}$ . Теперь мы видим, что таким свойством обладает только логарифмическая спираль.

**Пример 3.** Найти силовые линии поля, создаваемого силами  $\bar{F} \{F_x, F_y\}$ , имеющими потенциал  $U = \frac{y}{x}$ , так что проекции сил на оси координат равны

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Линии  $U = C$  называются *линиями уровня* или *эквипотенциальными линиями*. *Силовыми линиями* называются линии, касательные к которым совпадают с направлением силы в точке касания. Направление силы определяется равенством  $\operatorname{tg}(\bar{F}, x) = \frac{F_y}{F_x}$ ;

а направление касательной к линии уровня равенством  $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{F_x}{F_y}$ . Следовательно, касательные к силовой линии и к линии уровня взаимно перпендикулярны. Таким образом, силовые линии суть ортогональные траектории семейства линий уровня.

Найдем силовые линии в нашем примере. Так как дифференциальным уравнением семейства линий уровня является  $y = y' \cdot x$ , то дифференциальным уравнением семейства силовых линий будет  $y = -\frac{1}{y'} x$ , откуда ясно, что силовыми линиями являются окружности  $x^2 + y^2 = C^2$ . Настоящий пример дает физическое истолкование примера 1.

**81. Случай полярных координат.** Если семейство кривых задано в полярных координатах \*

$$\Phi(r, \theta, \alpha) = 0, \quad (6)$$

то естественно и изогональные траектории искать в полярных координатах.

---

\* Если семейство кривых задано в декартовых координатах, то иногда переход к полярным координатам облегчает нахождение изогональных траекторий (см. пример 2).

Пусть  $L_1$  (рис. 30) — изогональная траектория и  $M(r_1, \theta_1)$  — любая точка на ней. Так как в полярных координатах обычно положение касательной определяют углом, образованным касательной с продолженным радиус-вектором, то положение касательной  $MT_1$  к изогональной траектории  $L_1$  определяется углом  $\omega_1 = \angle T_1MR$ , а положение касательной  $MT$  к кривой  $L$  семейства (6), проходящей через точку  $M$ , — углом  $\omega = \angle TMR$ .

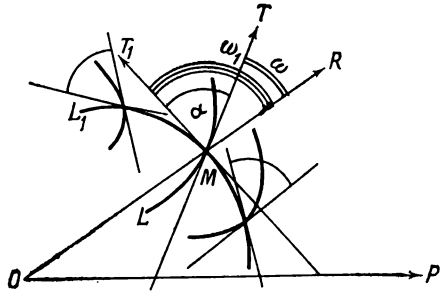


Рис. 30

Из рис. 30 видно, что

$$\omega_1 - \omega = \alpha = \text{const},$$

причем  $\text{tg } \omega_1 = \frac{\dot{r}_1}{r_1}$ ,  $\text{tg } \omega = \frac{\dot{r}}{r}$ ,\* где  $\dot{r}_1 = \frac{dr_1}{d\theta_1}$ ,  $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$ .

Предположим сначала, что  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  и обозначим  $\text{tg } \alpha$  через  $k$ . Имеем  $\omega = \omega_1 - \alpha$ . Поэтому

$$\text{tg } \omega = \frac{\text{tg } \omega_1 - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \omega_1}$$

или

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\frac{\dot{r}_1}{r_1} - k}{1 + k \frac{\dot{r}_1}{r_1}}.$$

Пусть дифференциальное уравнение семейства (6) имеет вид

$$F(r, \theta, \dot{r}) = 0.$$

\* Действительно, так как  $\omega = \widehat{(MR, MT)}$ , то

$$\text{tg } \omega = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot y'} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy},$$

откуда, переходя к полярным координатам по формулам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получаем

$$\text{tg } \omega = \frac{r^2 d\varphi}{r dr} = \frac{\dot{r}}{r}.$$



Перепишем это уравнение так:

$$F\left(r, \theta, \frac{\dot{r}}{r} r\right) = 0.$$

Заменяя здесь  $r, \theta, \frac{\dot{r}}{r}$  соответственно на

$$r_1, \theta_1 \text{ и } \frac{1+k \frac{r_1}{\dot{r}_1}}{\frac{r_1}{\dot{r}_1} - k}$$

и опуская индексы, получим дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий:

$$F\left(r, \theta, \frac{1+k \frac{r}{\dot{r}}}{\frac{r}{\dot{r}} - k} r\right) = 0.$$

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  $\omega = \omega_1 - \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{\operatorname{tg} \omega_1}$ ,  $\frac{r}{\dot{r}} = -\frac{\dot{r}_1}{r_1}$ . Поэтому дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий имеет вид

$$F\left(r, \theta, -\frac{r^2}{\dot{r}}\right) = 0. \quad (7)$$

**Пример 1.** Найти ортогональные траектории семейства кардиоид

$$r = a(1 + \cos \theta).$$

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 + \cos \theta), \\ \dot{r} &= -a \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$

Исключая  $a$ , получим дифференциальное уравнение семейства

$$\dot{r} = -\frac{r \sin \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Отсюда, заменяя, согласно (7),  $\dot{r}$  на  $-\frac{r^2}{\dot{r}}$ , находим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$-\frac{r^2}{\dot{r}} = -\frac{r \sin \theta}{1 + \cos \theta},$$

которое можно переписать так:

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

или

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Интегрируя, найдем

$$r = C(1 - \cos \theta).$$

Это и есть уравнение искоемых ортогональных траекторий.

**Пример 2.** Найти ортогональные траектории семейства лемнискат

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Для решения задачи удобнее перейти к полярным координатам. Получаем

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Дифференциальное уравнение этого семейства имеет вид

$$\dot{r} + r \operatorname{tg} 2\theta = 0.$$

Заменяя здесь, согласно (7),  $\dot{r}$  на  $-\frac{r^2}{\dot{r}}$ , получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$-r + \operatorname{tg} 2\theta \cdot \dot{r} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$r^2 = C \sin 2\theta.$$

Возвращаясь к переменным  $x, y$ , получим семейство ортогональных траекторий в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2Cxy = 0.$$

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ $n$ -го ПОРЯДКА

#### § 18. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**82. Предварительные замечания.** Рассмотрим теперь уравнение  $n$ -го порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Будем предполагать функцию  $F$  такой, чтобы уравнение (1) было разрешимо \* относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Если, в частности, уравнение (1) содержит искомую функцию и ее производные только в первой степени и не содержит их произведений, т. е. функция  $F$  линейна относительно  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , то это уравнение можно переписать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x).$$

Уравнение такого вида называется *линейным уравнением*. Теория линейных уравнений изложена в специальных главах 6—8.

В настоящей главе мы рассматриваем уравнения  $n$ -го порядка общего вида, причем в § 1 при изложении общих вопросов речь идет об уравнении, разрешенном относительно старшей производной, затем в § 2 мы рассматриваем также некоторые типы уравнений, не разрешенных относительно  $y^{(n)}$ .

Всякая функция  $y = y(x)$ , определенная и непрерывно дифференцируемая  $n$  раз в интервале  $(a, b)$ , \*\* называется *решением* уравнения (1) в этом интервале, если она обращает уравнение (1) в тождество \*\*\*

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

справедливое при всех значениях  $x$  из интервала  $(a, b)$ .

---

\* Хотя бы в смысле теоремы существования неявной функции.

\*\* См. первую сноску на с. 24.

\*\*\* См. сноску на с. 16.

**83. Геометрическое истолкование.** Всякому решению уравнения  $n$ -го порядка (1), так же как и решению уравнения первого порядка, соответствует на плоскости  $(x, y)$  некоторая кривая, которую, как и прежде, мы будем называть *интегральной кривой*.

Подобно тому, как уравнение первого порядка задает некоторое общее свойство семейства касательных всех его интегральных кривых, каждое уравнение  $n$ -го порядка тоже выражает собою некоторое общее геометрическое свойство всех его интегральных кривых.

Так, всякое уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

мы можем переписать в виде

$$F\left(x, y, y', (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

или

$$F_1\left(x, y, y', \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0,$$

откуда ясно, что оно представляет собою в общем случае связь между координатами, наклоном касательной и кривизной в каждой точке интегральной кривой.

**Пример.** Геометрическое свойство, выражаемое уравнением

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k \quad (k = \text{const}), \quad (3)$$

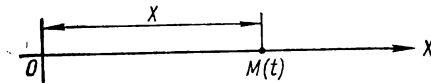
состоит, очевидно, в том, что все интегральные кривые этого уравнения имеют одну и ту же кривизну  $k$ . Таким свойством, как известно, обладают окружности радиуса  $\frac{1}{k}$ , так что каждая кривая из семейства окружностей

$$(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \frac{1}{k^2},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, является интегральной кривой уравнения (3). В этом нетрудно убедиться и непосредственно.

**84. Механическое истолкование уравнения второго порядка.** Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки  $M$  по оси  $Ox$

(рис. 31). Тогда  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  выражают соответственно положение, скорость и ускорение точки  $M$  в момент времени  $t$ . Считая, что (в общем случае) сила, действующая на точку, есть функция  $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ , зависящая от времени, положения и скорости точки, и что масса точки равна



Р и с. 31

единице, мы, согласно второму закону Ньютона, будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (4)$$

определяющее закон движения точки по оси  $Ox$ .

Всякое решение  $x=x(t)$  уравнения (4) соответствует некоторому движению (выражая закон этого движения — зависимость положения точки от времени) и иногда просто называется *движением*.

*Основной задачей интегрирования уравнения (4) является нахождение всех движений, определяемых этим уравнением, и изучение их свойств.*

Отметим, что наиболее полно эта задача решена для случая, когда сила  $f$  является линейной функцией от положения точки и ее скорости, т. е. когда мы имеем линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t). \quad (5)$$

Если коэффициенты  $p(t)$  и  $q(t)$  являются постоянными, то удастся найти все решения в квадратурах, а иногда даже в элементарных функциях (см. пп. 178 и 179).

В общем случае даже линейное уравнение (5) не удастся проинтегрировать в квадратурах, не говоря уже об уравнении (4) с нелинейной правой частью.

В связи с этим возникает проблема: по виду функции  $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  судить о свойствах движений, определяемых уравнением (4).

**85. Задачи Коши.** Для уравнения (2) *задача Коши* ставится следующим образом. Требуется среди всех решений уравнения (2) найти решение

$$y = y(x), \quad (6)$$

в котором функция  $y(x)$  вместе с ее производными до  $(n-1)$ -го порядка включительно принимает заданные значения  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  при заданном значении  $x_0$  независимой переменной  $x$ , т. е.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  — заданные числа, так что решение (6) удовлетворяет условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (7)$$

Числа  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  называются *начальными значениями* решения (6), число  $x_0$  — *начальным значением независимой переменной*, числа  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  вместе взятые называются *начальными данными* решения (6), а условия (7) — *начальными условиями* этого решения.

Характерная особенность задачи Коши состоит в том, что условия, которые налагаются на искомое решение при постановке ее, задаются при одном и том же значении независимой переменной.

В случае уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (8)$$

задача Коши состоит в нахождении решения (6), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (9)$$

Эта задача с геометрической точки зрения может быть истолкована как задача нахождения такой интегральной кривой (рис. 32), которая проходила бы через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имела бы в этой точке заданное направление касательной, т. е.  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$ .

Дадим механическое истолкование задачи Коши. Рассмотрим дифференциальное уравнение (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Задача Коши для уравнения (4) состоит в том, чтобы из всех движений, определяемых этим уравнением, найти движение  $x = x(t)$ , которое удовлетворяет начальным условиям:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (10)$$

т. е. найти такое движение, в котором движущаяся точка занимала бы в заданный (начальный) момент времени  $t_0$  заданное (начальное) положение  $x_0$  и имела бы заданную (начальную) скорость  $v_0$  (см. введение, пример 2).

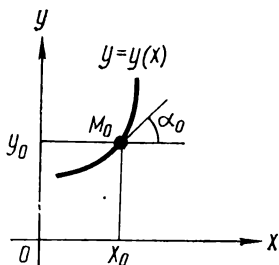
При решении задачи Коши для уравнения (4) возникают вопросы о том, определяют ли заданные начальные условия (10) движение  $x = x(t)$  и притом единственным или не единственным образом, в каком интервале изменения времени это движение определено, каков его характер, как изменяется движение с изменением начальных значений  $x_0$  и  $v_0$  и т. д. Все эти вопросы составляют часть общей теории дифференциальных уравнений и рассматриваются в гл. 5. Сейчас лишь заметим, что при некоторых условиях, наложенных на правую часть уравнения (4) в окрестности начальных данных  $t_0, x_0, v_0$ , оно определяет в некоторой окрестности начального момента времени единственное движение, удовлетворяющее начальным условиям (10) (см. п. 128) и что свойства этого движения вполне определяются свойствами правой части уравнения и начальными данными.

При рассмотрении задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка (2), так же как и в случае уравнения первого порядка (см. п. 5), возникают вопросы существования и единственности решения задачи Коши, а также вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной и как функции начальных данных.

Ответы на эти вопросы мы даем в гл. 5.

Обращаем внимание читателя на то, что единственность решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка (2) не означает, что через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$  проходит только одна интегральная кривая, как это имело место для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Например, для уравнения второго порядка (8) единственность решения задачи Коши с начальными условиями (9) нужно понимать в том смысле, что через точку  $M_0(x_0, y_0)$  проходит единственная интегральная кривая уравнения (8), обладающая тем свойством, что касательная к ней в этой точке составляет с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $\alpha_0$ , тангенс которого равен заданному начальному значению первой производной  $y'_0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$ , в то время как



Р и с. 32

через точку  $(x_0, y_0)$ , наряду с этой интегральной кривой, как правило, проходит еще бесчисленное множество интегральных кривых, но уже с другими наклонами касательных в этой точке.

**Пример.** Найдем решение уравнения

$$y'' + y = 0 \quad (11)$$

с начальными условиями

$$y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Можно доказать, что все решения уравнения (11) содержатся в формуле (см. п. 175, пример 4; в нашем случае  $k=1$ )

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad (12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Отсюда

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (13)$$

Выберем  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы  $y$  и  $y'$ , определяемые формулами (12) и (13), обратились бы соответственно в 1 и 0, когда  $x=0$ . Подставляя в (12) и (13) вместо  $x, y$  и  $y'$  числа 0, 1 и 0, получим:

$$1 = C_1 \quad \text{и} \quad 0 = C_2.$$

Следовательно, искомым решением будет

$$y = \cos x.$$

Это решение единственно. Однако через точку  $(0, 1)$ , кроме кривой  $y = \cos x$ , проходит бесчисленное множество интегральных кривых

$$y = \cos x + C_2 \sin x,$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная, не равная нулю, но ни одна из касательных к ним в точке  $(0, 1)$  не совпадает с касательной к кривой  $y = \cos x$  в этой точке.

Достаточное условие существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, указанное в п. 6, распространяется и на случай уравнения  $n$ -го порядка. А именно можно доказать, что *для существования (непрерывного вместе с производными до порядка  $n$  включительно) решения задачи Коши для уравнения (2) достаточно предположить, что правая часть этого уравнения непрерывна в окрестности начальных данных (теорема П е а н о) (см. гл. 5, п. 154).*

**86. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.** В гл. 5 мы докажем, что если правая часть уравнения (2) удовлетворяет в окрестности начальных данных некоторым условиям, то существует единственное решение задачи Коши с этими начальными данными, определенное в некоторой окрестности начального значения независимой переменной и что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами



правой части уравнения (2) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для уравнения (2) в упрощенной формулировке.

**Т е о р е м а.** Пусть дано уравнение (2)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

и поставлены начальные условия (7)

$$y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Предположим, что функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  определена в некоторой замкнутой ограниченной области

$$R: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad |y' - y_0'| \leq b, \dots, \\ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$$

с точкой  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$  внутри ( $a$  и  $b$  — заданные положительные числа) и удовлетворяет в этой области следующим двум условиям:

1) функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  непрерывна по всем своим аргументам и, следовательно, ограничена, т. е.

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M,$$

где  $M$  — положительное число, а  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  — любая точка области  $R$ ;

2) функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  имеет ограниченные частные производные по аргументам  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , т. е.

$$\left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}} \right| \leq K \quad (l=0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} \equiv y),$$

где  $K$  — положительное число, а  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  — любая точка области  $R$ .

При этих предположениях уравнение (2) имеет единственное решение (6)

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям (7). Это решение заведомо определено и непрерывно вместе с производными до порядка  $n$  включительно в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{\max_{(R)} (M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right).$$

Из этой теоремы следует, что *если правая часть уравнения (2) есть полином от своих аргументов, то какие бы начальные данные ни взять, существует единственное решение уравнения (2) с этими начальными данными.*

**87. Понятие о краевой (граничной) задаче. Примеры других дополнительных условий.** Сформулированная в п. 85 задача Коши является лишь одной из важнейших задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых ищется решение, удовлетворяющее *дополнительным условиям*. Другой, не менее важный, тип таких задач представляют так называемые *краевые (граничные) задачи*,\* в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, как это имеет место в задаче Коши, а на концах некоторого интервала  $[a, b]$ , и ищется решение, определенное внутри этого интервала. Эти условия называются *краевыми (граничными) условиями*.

Простейшие краевые условия имеют вид

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Здесь ищется решение, определенное в интервале  $[a, b]$  и принимающее заданные значения на концах этого интервала. Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой, концы которой находятся в заданных точках  $(a, A)$  и  $(b, B)$ .

Даже эта краевая задача может ставиться, очевидно, лишь для уравнения порядка выше первого, ибо, как мы уже говорили в п. 5, в случае уравнения первого порядка задание значения искомой функции (решения) в одной точке уже определяет (при некоторых условиях) интегральную кривую единственным образом, и последняя может удовлетворять краевому условию в другой точке лишь случайно.

В более общем случае при постановке краевых условий задают на каждом из концов интервала  $[a, b]$  некоторые соотношения между значением искомой функции и ее производными. Так, для уравнения второго порядка обычно ставят краевые условия вида

$$\left. \begin{aligned} h_1 y(a) + h_2 y'(a) &= A, \\ k_1 y(b) + k_2 y'(b) &= B, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $h_1, h_2, k_1, k_2, A$  и  $B$  — заданные вещественные числа, причем  $|h_1| + |h_2| \neq 0$  и  $|k_1| + |k_2| \neq 0$ .

**Пример 1.** Найти решение уравнения

$$y'' + y = 0, \quad (15)$$

---

\* К решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений приводятся многие задачи математической физики и вариационного исчисления (см. пример 2, п. 97).

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)=0, \quad y(\pi)=1. \quad (16)$$

Это простейшая краевая задача.

Воспользуемся формулой

$$y=C_1 \cos x+C_2 \sin x, \quad (17)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Эта формула, как показано выше, содержит все решения уравнения (15). Следовательно, либо мы найдем решение, удовлетворяющее поставленным краевым условиям (16) за счет выбора значений  $C_1$  и  $C_2$ , либо такого решения нет.

Положим в (16)  $x=0$ ,  $y=0$  и  $x=\pi$ ,  $y=1$ . Получим систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 1 &= C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта система несовместна. Следовательно, поставленная задача не имеет решения. В подобных случаях говорят, что краевые условия поставлены некорректно.

Заменим во втором из краевых условий (16) единицу нулем, т. е. будем искать решение уравнения (15) с краевыми условиями

$$y(0)=0, \quad y(\pi)=0.$$

Тогда для определения  $C_1$  и  $C_2$  получим систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 0 &= C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта система уже совместна. Из нее мы находим, что  $C_1=0$ , а  $C_2$  может принимать любое значение. Все функции

$$y=C_2 \sin x$$

будут решениями поставленной краевой задачи.

Из этого примера мы видим, что краевая задача может не иметь решений или этих решений может оказаться бесчисленное множество. Выбор нужного единственного решения определяется дополнительными требованиями к искомому решению.

**Пример 2.** Найти решение уравнения

$$y''=6x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)=0, \quad y'(1)=0.$$

Это — краевые условия вида (14). Здесь ищется интегральная кривая, левый конец которой находится в начале координат, а правый лежит на прямой  $x=1$ , причем (левая) касательная на правом конце параллельна оси  $Ox$ .

Интегрируя последовательно данное уравнение, имеем:

$$\begin{aligned}y' &= 3x^2 + C_1, \\y &= x^3 + C_1x + C_2.\end{aligned}$$

Подставим сюда краевые условия. Получим

$$\left. \begin{aligned}0 &= 3 \cdot 1 + C_1, \\0 &= 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,\end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = -3$ ,  $C_2 = 0$ , так что искомым решением будет

$$y = x^3 - 3x.$$

В качестве примеров других дополнительных условий (отличных от начальных и краевых), налагаемых на концах интервала  $[a, b]$  на решение уравнения второго порядка, приведем условия периодичности

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b),$$

т. е. когда на концах интервала, внутри которого ищется решение, значения искомого решения и его первой производной совпадают, и условия конечности решения на концах интервала.

**Пример 3.** Уравнение (15)

$$y'' + y = 0$$

имеет решения, удовлетворяющие условиям периодичности на концах интервала  $[0, 2\pi]$ :

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Таковыми решениями, очевидно, будут функции (17)

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

**Пример 4.** Найти решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0,$$

определенное в интервале  $[-1, 1]$  и конечное на концах этого интервала.

Здесь не задаются значения решения на концах интервала  $[-1, 1]$ , не налагаются условия и на производную. Требуется лишь конечность решения на концах интервала.

Одно из искоемых решений можно угадать. Это  $y = x$ . Очевидно, что решениями будут и все функции

$$y = Cx,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

В дальнейшем (см. п. 184) будет доказано, что других решений нет.





определяет общее решение  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  уравнения (2) в области  $D$ .

**90. Общее решение в параметрической форме** (ср. п. 9). В некоторых случаях нахождение общего решения уравнения (2) в явной или неявной форме представляет большие затруднения. В таких случаях, интегрируя дифференциальное уравнение (2), ищут семейство интегральных кривых, зависящее от  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \quad (22)$$

Такое семейство интегральных кривых мы будем называть *общим решением* уравнения (2) в *параметрической форме*.

Если из уравнений (22) удастся исключить параметр  $t$ , то получают общее решение в неявном или даже в явном виде.

**91. Частное решение** (ср. п. 10). Если решение уравнения (2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этого уравнения, то такое решение мы будем называть *частным решением*. Решение, получающееся из формулы общего решения при частных числовых значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , включая  $\pm\infty$ , будет, очевидно, частным решением. Решая задачу Коши при помощи формулы общего решения, мы всегда получаем частное решение.

**92. Особое решение** (ср. п. 11). Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, будем называть *особым решением*.

Уравнение  $n$ -го порядка (2) может иметь семейство особых решений, зависящее от произвольных постоянных, причем число последних может доходить до  $n-1$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y'' = 2\sqrt{y'}. \quad (23)$$

Полагая

$$y' = z,$$

где  $z$  — новая неизвестная функция, получаем

$$z' = 2\sqrt{z}. \quad (24)$$

Это уравнение имеет (см. п. 11) общее решение

$$z = (x + C_1)^2 \quad (x > -C_1).$$

Заменяя  $z$  на  $y'$ , имеем

$$y' = (x + C_1)^2 \quad (x > -C_1).$$

Интегрируя это уравнение, получим общее решение уравнения (23) в виде

$$y = \frac{1}{3} (x + C_1)^3 + C_2 \quad (x > -C_1).$$

Уравнение (24) имеет (см. п. 11) особое решение

$$z = 0.$$

Заменяя в нем  $z$  на  $y'$ , имеем

$$y' = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим еще семейство решений уравнения (23) в виде

$$y = C.$$

Каждое из них является особым (почему?).

**93. Промежуточные интегралы. Первые интегралы.** Чаще всего, интегрируя уравнение (2), мы приходим сначала к соотношению, содержащему произвольные постоянные и производные, но порядок старшей производной меньше  $n$ :

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, \dots, C_k) = 0 \quad (1 \leq k < n). \quad (25)$$

Такое соотношение называется *промежуточным интегралом* уравнения (2) или *интегралом  $k$ -го порядка*. Оно представляет собою дифференциальное уравнение порядка  $n-k$ , содержащее  $k$  произвольных постоянных. В процессе интегрирования уравнения (25) мы введем еще  $n-k$  произвольных постоянных и получим соотношение, содержащее  $x, y$  и  $n$  произвольных постоянных, т. е. общий интеграл уравнения (2).

Если промежуточный интеграл имеет вид

$$\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \quad (26)$$

т. е. содержит производную порядка  $n-1$  и одну произвольную постоянную, то он называется *первым интегралом* уравнения (2).

Если известен один первый интеграл (26), то интегрирование уравнения (2) сводится к интегрированию уравнения  $(n-1)$ -го порядка.

Если имеем два независимых первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) &= 0, \\ \Phi_1^{(2)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_2) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

то, исключая из них  $y^{(n-1)}$ , получим промежуточный интеграл вида

$$\Phi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0;$$

так что дело сводится к интегрированию уравнения порядка  $n-2$ .



Знание  $k$  ( $1 \leq k < n$ ) независимых первых интегралов позволяет понизить порядок уравнения на  $k$  единиц.

Наконец, если мы имеем  $n$  независимых первых интегралов, то, исключая из них  $y'$ ,  $y''$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}$ , мы получим

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

т. е. общий интеграл.

**94. Замечание об уравнении  $n$ -го порядка, не разрешенном относительно старшей производной.** Пусть дано уравнение (1)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

не разрешенное относительно старшей производной  $y^{(n)}$ . Предположим, что, разрешая его, получаем конечное или бесконечное число значений для  $y^{(n)}$ :

$$y^{(n)} = f_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (27)$$

Совокупность общих интегралов уравнений (27) будем называть *общим интегралом* уравнения (1).

В некоторых случаях удастся проинтегрировать уравнение (1) и не производя фактического разрешения его относительно  $y^{(n)}$ . Если при этом получается  $n$ -параметрическое семейство интегральных кривых в виде, разрешенном или неразрешенном относительно  $y$ , то будем его называть соответственно *общим решением* или *общим интегралом* уравнения (1).

Задача Коши для уравнения (1) ставится так же, как и для уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Если начальным данным  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  и каждому из значений  $y^{(n)}$ , определяемых из уравнения

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

соответствует только одно решение, то говорят, что задача Коши имеет единственное решение. В противном случае говорят, что единственность решения задачи Коши нарушена.

Теорема, доказанная в гл. 2, п. 66, переносится и на уравнение  $n$ -го порядка (1).

**Т е о р е м а.** Если функция  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  удовлетворяет следующим трем условиям:

1)  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)})$ ;

2)  $F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0$ ;

3)  $F'_{y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) \neq 0$ ,

то уравнение (1) имеет единственное решение  $y=y(x)$ , определенное и  $n$  раз непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки

$x = x_0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$  при  $x = x_0$  и такое, что  $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ .

Для доказательства нужно, так же как и в гл. 2, п. 66, воспользоваться теоремой о существовании неявной функции от нескольких переменных и теоремой Пикара, сформулированной в п. 86.

Если в каждой точке решения  $y = y(x)$  имеет место единственность решения задачи Коши, то оно называется *частным* решением.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*. Уравнение (1), так же как и уравнение, разрешенное относительно старшей производной, может допускать семейство особых решений, зависящее от  $n-1$  произвольных постоянных.

Кривые, подозрительные на особое решение уравнения (1), можно найти по аналитическому виду функции  $F$ , если предположить, что она непрерывно дифференцируема по всем аргументам в рассматриваемой области. Тогда, в силу приведенной выше теоремы, особыми решениями могут быть только те кривые, для которых

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (28) и определяют кривые, подозрительные на особое решение.

### § 19. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА \*

**95. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка  $n$ .** В настоящем параграфе мы укажем некоторые типы уравнений  $n$ -го порядка, общее решение (общий интеграл) которых можно найти при помощи квадратур. При этом мы ограничиваемся формальным интегрированием рассматриваемых уравнений. Приведение к квадратурам выполняется либо при помощи специальных способов, применяемых непосредственно к данному уравнению, либо путем предварительного понижения порядка уравнения, если получаемое при этом уравнение интегрируется в квадратурах.

Заметим, что понижение порядка часто оказывается полезным и в тех случаях, когда получаемое уравнение не удастся проинтегрировать в квадратурах, ибо получаемое уравнение связывает дифференциальные свойства более низкого порядка, чем свойства, выражаемые данным уравнением.

Далее, численное и графическое интегрирование дифференциальных уравнений производится тем легче, чем ниже порядок уравнения.

\* Здесь речь будет идти главным образом о нелинейных уравнениях. Линейные уравнения будут специально рассмотрены в гл. 6—8.

Поэтому, прежде чем интегрировать уравнение численно или графически, стараются понизить его порядок.

Мы рассмотрим сначала (пп. 95—97) неполные уравнения. Простейшими из них являются уравнения, содержащие только независимую переменную и производную порядка  $n$ . Будем различать два случая.

**С л у ч а й 1.** Если уравнение порядка  $n$  может быть написано в виде

$$y^{(n)} = f(x), \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ , то оно легко интегрируется в квадратурах.

Действительно, так как  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ , то мы можем переписать уравнение (1) так:

$$(y^{(n-1)})' = f(x),$$

откуда

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1, \quad (2)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная, а  $x_0$  — любое фиксированное число из промежутка  $(a, b)$ .

Аналогичными рассуждениями находим:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx + C_1(x - x_0) + C_2, \quad (2_1)$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx dx + \frac{C_1}{2} (x - x_0)^2 + C_2(x - x_0) + C_3, \quad (2_2)$$

. . . .

$$y' = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx dx \dots dx}_{(n-1) \text{ раз}} + \frac{C_1}{(n-2)!} (x - x_0)^{n-2} +$$

$$+ \frac{C_2}{(n-3)!} (x - x_0)^{(n-3)} + \frac{C_3}{(n-4)!} (x - x_0)^{n-4} + \dots + C_{n-1}, \quad (2_{n-2})$$

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx dx \dots dx}_{n \text{ раз}} + \frac{C_1}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_2}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + \frac{C_3}{(n-3)!} (x-x_0)^{n-3} + \dots + \\
& + C_{n-1} (x-x_0) + C_n.
\end{aligned} \tag{2_{n-1}}$$

Последняя формула содержит в себе все решения уравнения (1) и дает общее решение этого уравнения в области

$$\begin{aligned}
a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty, \dots, \\
-\infty < y^{(n-1)} < \infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

Она позволяет найти решение с любыми начальными значениями искомой функции и ее производных до  $(n-1)$ -го порядка включительно:

$$\begin{aligned}
y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, \quad y^{(n-3)} = y_0^{(n-3)}, \quad y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}, \\
y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}
\end{aligned}$$

при  $x = x_0$ , где  $x_0$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ . Для определения соответствующих значений произвольных постоянных положим в формулах (2),  $(2_1)$ ,  $(2_2)$ ,  $\dots$ ,  $(2_{n-2})$ ,  $(2_{n-1})$  соответственно

$$y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \quad y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}, \quad y^{(n-3)} = y_0^{(n-3)}, \quad \dots, \quad y' = y_0', \quad y = y_0$$

и вместо  $x$  подставим всюду число  $x_0$ . Тогда получим:

$$y_0^{(n-1)} = C_1, \quad y_0^{(n-2)} = C_2, \quad y_0^{(n-3)} = C_3, \quad \dots, \quad y_0' = C_{n-1}, \quad y_0 = C_n.$$

Подставив эти значения произвольных постоянных в формулу  $(2_{n-1})$ , мы и найдем искомое решение

$$\begin{aligned}
y = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \\
+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{(n-2)} + \dots + y_0' (x-x_0) + y_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Если в полученной формуле считать  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  произвольными постоянными числами, то она представляет собою общее решение уравнения (1) в области (3). Здесь роль произвольных постоянных играют начальные значения искомой функции и ее производных до порядка  $n-1$  включительно, так что при сделанном предположении (4) является общим решением в форме Коши.

Заметим, что функция

$$Y_1 = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx \quad (5)$$

является, очевидно, решением уравнения (1) и представляет собою частное решение этого уравнения, так как оно получается из общего решения  $(2_{n-1})$  при  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ .

Это частное решение, очевидно, удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$Y_1(x_0) = 0, \quad Y_1'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad Y_1^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

В дальнейшем такие начальные условия мы будем называть *нулевыми*.

Формула (5) содержит  $n$  квадратур. Однако их можно заменить одной квадратурой, а именно, можно показать, что имеет место следующая *формула Коши*: \*

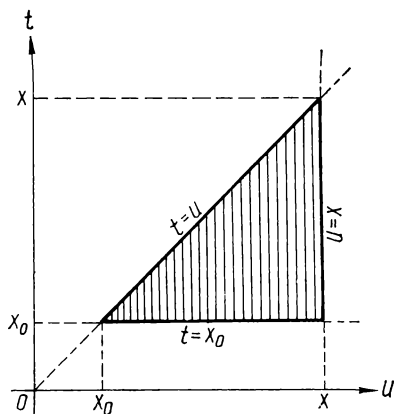
$$Y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

В самом деле, мы можем рассматривать интеграл

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx = \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) dt$$

как повторный, равный соответствующему двойному интегралу по области, ограниченной прямыми (рис. 33):

$$u = x, \quad t = x_0, \quad t = u.$$



Р и с. 33

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x du = \int_{x_0}^x f(t) (x-t) dt.$$

Поэтому

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx = \int_{x_0}^x f(t) (x-t) dt.$$

\* Эта формула есть частный случай формулы Коши для неоднородного линейного уравнения (см. п. 172):

Аналогично находим:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx dx &= \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) (u-t) dt = \\
 &= \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x (u-t) du = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^2 dt, \\
 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx dx dx &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) (u-t)^2 dt = \\
 &= \frac{1}{3!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^3 dt, \\
 &\dots \dots \dots \\
 Y_1(x) &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx dx \dots dx = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем записать общее решение (4) в виде

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \\
 &+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + \dots + y_0' (x-x_0) + y_0, *
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  — произвольные постоянные числа.

**Пример 1.** Найти движение, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t)$$

---

\* По существу эта формула является представлением решения уравнения (1) по известной формуле Тэйлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла.

и начальными условиями:

$$x=0, \quad \frac{dx}{dt}=0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Согласно формуле (6), искомым движением будет

$$x = \int_0^t f(z) (t-z) dz.$$

Общее решение уравнения (1) можно также найти последовательным интегрированием этого уравнения, беря вместо определенных интегралов с переменным верхним пределом неопределенные интегралы. Будем иметь:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1 \equiv f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int f_1(x) dx + C_1 x + C_2 \equiv f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int f_2(x) dx + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \equiv f_3(x) + \\ + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3,$$

. . . . .

$$y = \int f_{n-1}(x) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \\ + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

**Пример 2.** Среди всех интегральных кривых уравнения

$$y'' = 6x \tag{7}$$

выделить ту, которая касается в начале координат прямой  $y=x$  (см. п. 87, пример 2).

Задача сводится к нахождению решения уравнения (7), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y=0, \quad y'=1 \quad \text{при} \quad x=0. \tag{8}$$

Найдем сначала общее решение. Интегрируя последовательно уравнение (7), имеем:

$$y' = 3x^2 + C_1,$$

$$y = x^3 + C_1 x + C_2.$$

Удовлетворяя начальным условиям (8), находим, что  $C_1=1$ ,  $C_2=0$ , так что искомой интегральной кривой будет

$$y = x^3 + x. \tag{9}$$

Заметим, что начальным условиям (8) можно удовлетворять и в процессе последовательного интегрирования уравнения (7). Поступая таким образом, мы сначала будем иметь

$$y' = 3x^2 + C_1.$$

Но  $y' = 1$  при  $x = 0$ . Поэтому  $C_1 = 1$ . Далее нужно интегрировать уравнение

$$y' = 3x^2 + 1.$$

Получаем

$$y = x^3 + x + C_2.$$

Но  $y = 0$  при  $x = 0$ . Поэтому  $C_2 = 0$ , и мы приходим к решению (9).

**С л у ч а й 2.** Рассмотрим теперь случай, когда уравнение порядка  $n$  имеет вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0, \quad (10)$$

причем оно неразрешимо (в элементарных функциях) относительно  $y^{(n)}$  (или же выражение для  $y^{(n)}$  получается слишком сложным).

Покажем, как можно построить общее решение уравнения (10) в параметрической форме, в предположении, что это уравнение допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad (11)$$

где функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  таковы, что  $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$  (ср. п. 71).

Выразим  $y$  через параметр  $t$ . Так как

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Теперь имеем

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \psi_1(t, C_1) \varphi'(t) dt.$$

Откуда

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1) \varphi'(t) dt + C_2 \equiv \psi_2(t, C_1, C_2).$$

Продолжая эти рассуждения, найдем

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Следовательно, *общее решение* уравнения (10) в параметрической форме имеет вид

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Отметим два частных случая, в которых удается легко получить *параметрическое представление уравнения (10)*.



а. Уравнение (10) разрешимо относительно независимой переменной, т. е. представимо в виде (см. п. 71)

$$x = \varphi(y^{(n)}). \quad (12)$$

В этом случае, полагая  $y^{(n)} = \psi(t)$ , получаем:

$$x = \varphi(\psi(t)), \quad y^{(n)} = \psi(t). \quad (13)$$

Формулы (13) и дают параметрическое представление уравнения (12).

Если в качестве функции  $\psi(t)$  взять сам параметр  $t$ , т. е. принять за параметр производную  $y^{(n)}$ , то будем иметь следующее параметрическое представление уравнения (10):

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = t.$$

Заметим, однако, что здесь, так же как и в случае соответствующего уравнения первого порядка (см. п. 71), не всегда целесообразно принимать за параметр производную. Иногда оказывается выгоднее воспользоваться более общим параметрическим представлением (13), выбрав удачным образом функцию  $\psi(t)$ .

б. Уравнение (10) имеет вид

$$P(x, y^{(n)}) + Q(x, y^{(n)}) = 0, \quad (14)$$

где  $P$  и  $Q$  — однородные функции соответственно измерений  $k$  и  $m$ .

Для нахождения параметрического представления уравнения (14) поступаем так же, как и в случае соответствующего уравнения первого порядка (см. п. 71, уравнение (15)).

Полагая в уравнении (14)

$$y^{(n)} = tx \quad (15)$$

и разрешая полученное уравнение относительно  $x$ , выразим  $x$  через параметр  $t$ ,  $x = \varphi(t)$ . Подставляя это выражение для  $x$  в формулу (15), найдем выражение  $y^{(n)}$  через  $t$ ,  $y^{(n)} = t\varphi(t)$ . Таким образом, параметрическим представлением уравнения (14) будет

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = t\varphi(t).$$

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение вида (12):

$$e^{y''} + y'' = x. \quad (16)$$

Приняв  $y''$  за параметр, т. е. положив  $y'' = t$ , получим  $x = e^t + t$ , так что уравнение (16) допускает параметрическое представление вида

$$x = e^t + t, \quad y'' = t.$$

Выразим  $y$  через параметр  $t$ . Имеем

$$dy' = y'' dx = t(e^t + 1) dt.$$

Отсюда

$$y' = \int t(e^t + 1) dt + C_1 = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Далее,

$$dy = y' dx = \left( (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right) (e^t + 1) dt,$$

так что

$$\begin{aligned} y &= \int \left( (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right) (e^t + 1) dt + C_2 = \\ &= \left( \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left( \frac{t^2}{2} + C_1 - 1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$x = e^t + t, \quad y = \left( \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left( \frac{t^2}{2} + C_1 - 1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

**96. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных.** Далее мы рассмотрим *несколько типов уравнений, допускающих понижение порядка.*

Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n), \quad (17)$$

причем производная  $k$ -го порядка обязательно входит в уравнение.

Введем новую неизвестную функцию  $z$ , положив

$$y^{(k)} = z. \quad (18)$$

Тогда уравнение (17) переписется так:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Это уравнение  $(n-k)$ -го порядка. Нам удалось, таким образом, *понижить порядок уравнения (17) на  $k$  единиц.*

Предположим, что, решая полученное уравнение, мы найдем его общее решение

$$z = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}). \quad (19)$$

Тогда мы имеем

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}).$$

Мы получили уравнение уже рассмотренного выше типа. Интегрируя его, введем еще  $k$  произвольных постоянных. Получим

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Если вместо общего решения (19) мы получаем общий интеграл

$$\Omega(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

то заменяя  $z$  его значением из подстановки (18), мы приходим к уравнению

$$\Omega(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0.$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (10). Если оно допускает параметрическое представление, то мы получим его общее решение (в параметрической форме) при помощи  $k$  квадратур, которые введут еще  $k$  произвольных постоянных.

**Пример.** Дано уравнение

$$4y' + y''^2 = 4xy''. \quad (20)$$

Положим  $y' = z$ . Тогда

$$4z + z'^2 = 4xz'$$

или

$$z = xz' - \frac{z'^2}{4}. \quad (21)$$

Это — уравнение Клеро. Его общее решение имеет вид

$$z = Cx - \frac{C^2}{4},$$

поэтому

$$y' = Cx - \frac{C^2}{4};$$

откуда

$$y = C_1 x(x - C_1) + C_2 \quad \left( C_1 = \frac{C}{2} \right).$$

Это и есть общее решение уравнения (20).

Уравнение (21) имеет особое решение  $z = x^2$ . Ему соответствует уравнение  $y' = x^2$ . Поэтому

$$y = \frac{x^3}{3} + C',$$

где  $C'$  — произвольная постоянная, также является решением уравнения (20). Легко видеть, что это решение особое.

Отметим два частных случая уравнения вида (17).

1. Уравнение вида

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (22)$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно  $y^{(n)}$ :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}).$$

Полагая  $y^{(n-1)} = z$ , получаем  $z' = f(z)$ , откуда  $\frac{dz}{f(z)} = dx$ ,  $z = \omega(x, C_1)$ ,  $y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$ . Это — уравнение вида (1).

Если уравнение (22) не разрешимо (в элементарных функциях) относительно  $y^{(n)}$ , но допускает параметрическое представление:

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad (23)$$

то из соотношения  $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$  находим, используя (23), что

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)},$$

откуда

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1.$$

Присоединяя сюда параметрическое выражение  $y^{(n-1)}$ , получаем:

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1, \quad y^{(n-1)} = \varphi(t),$$

откуда, так же как из (11), находим параметрическое выражение для  $y$

$$y = \varphi_n(t, C_2, C_3, \dots, C_n),$$

так что  $x$  и  $y$  выражаются через параметр  $t$  и  $n$  произвольных постоянных, т. е. мы получаем общее решение в параметрической форме.

2. Уравнение вида

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \quad (24)$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно  $y^{(n)}$ :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Положим  $y^{(n-2)} = z$ . Тогда

$$z'' = f(z).$$

Умножим обе части этого уравнения на  $2z'dx$ :

$$2z' \cdot z'' dx = 2f(z) \cdot z' dx.$$

Перепишав полученное уравнение в виде

$$d(z'^2) = 2f(z) dz$$

и интегрируя, найдем:

$$\left. \begin{aligned} z'^2 &= 2 \int f(z) dz + C_1, & z' &= \sqrt{2 \int f(z) dz + C_1},^* \\ \frac{dz}{\sqrt{2 \int f(z) dz + C_1}} &= dx, \\ z &= \varphi(x, C_1, C_2). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Это — уравнение вида (1).

Предположим, что уравнение (24) неразрешимо относительно  $y^{(n)}$ , но допускает *параметрическое представление*:

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

Имеем:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx.$$

Умножая обе части первого уравнения на  $y^{(n-1)}$ , заменяя справа  $y^{(n-1)} dx$  на  $dy^{(n-2)}$ , получаем

$$y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = y^{(n)} dy^{(n-2)}$$

или

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\psi(t)\varphi'(t)dt,$$

откуда

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2 \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1} \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Присоединяя сюда  $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ , получим формулы типа (23). Дальнейшие квадратуры введут  $n-1$  новых произвольных постоянных.

**97. Уравнение, не содержащее независимой переменной.** Это уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (25)$$

Введем новую искомую функцию  $z$  по формуле

$$y' = z \quad (26)$$

---

\* Здесь и ниже имеются в виду оба значения корня.

и примем  $y$  за независимую переменную. Выразим  $y''$ ,  $y'''$ , ...,  $y^{(n)}$  через функцию  $z$  и ее производные по  $y$ . Имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dy} z \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{dy} z \right) \frac{dy}{dx} = \left( \frac{d^2 z}{dy^2} z + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right) z, \dots,$$

$$y^{(n)} = \omega \left( z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right).$$

Поэтому уравнение (25) примет вид

$$F \left( y, z, \frac{dz}{dy} z, \dots, \omega \left( z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right) \right) = 0. \quad (27)$$

Это уравнение порядка  $n-1$ . Если, решая его, мы найдем общее решение

$$z = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

то, возвращаясь к искомой функции  $y$ , получим уравнение

$$y' = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}). \quad (28)$$

Проинтегрировав его, найдем общий интеграл уравнения (25).

Особые решения уравнения (27) могут привести к особым решениям уравнения (25) в силу подстановки (26).

Далее особые решения могут возникнуть вследствие интегрирования уравнения (28).

Наконец, мы могли потерять решения вида  $y = \text{const}$ , принимая  $y$  за независимую переменную. Поэтому нужно положить в уравнении (25)  $y = b$ . Будем иметь

$$F(b, 0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Если полученное уравнение имеет вещественные корни  $b = b_i$ , то уравнение (25) допускает решения вида  $y = b_i$ .

**Пример 1.** Дано уравнение

$$(1+y^2)yy'' = (3y^2-1)y'^2. \quad (29)$$

Полагая  $y' = z$  и принимая  $y$  за независимую переменную, имеем  $y'' = \frac{dz}{dy} z$ , так что уравнение (29) примет вид

$$(1+y^2)y \frac{dz}{dy} z = (3y^2-1)z^2.$$

Сократим на  $z$  (при этом равенство  $z=0$  дает  $y=\text{const}$ , что мы пока отбросим, ибо приняли  $y$  за независимую переменную):

$$(1+y^2)y \frac{dz}{dy} = (3y^2-1)z.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2-1}{(1+y^2)y} dy.$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$\ln |z| = 2 \ln(1+y^2) - \ln |y| + \ln |C_1|$$

или

$$\frac{zy}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Возвращаясь к функции  $y$ , получим

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2} = C_1.$$

Это есть первый интеграл уравнения (29).

Интегрируя еще раз, найдем общий интеграл

$$\frac{1}{1+y^2} = -2C_1x + C_2$$

или

$$\frac{1}{1+y^2} = Ax + B,$$

где  $A = -2C_1$ ,  $B = C_2$ . Положим теперь в уравнении (29)  $y=b$ . Получим

$$(1+b^2)b \cdot 0 = (3b^2-1) \cdot 0.$$

Так как любое  $b$  удовлетворяет этому уравнению, то уравнение (29) допускает семейство решений  $y=C$ , где  $C$  — произвольное постоянное число.

**Пример 2.** Задача о брахистохроне. В вертикальной плоскости  $(x, y)$  заданы две точки  $A(a, A)$  и  $B(b, B)$ . Найти кривую  $y=y(x)$ , двигаясь по которой под действием силы тяжести (в предположении, что трение и сопротивление среды настолько малы, что ими можно пренебречь), материальная точка перейдет из точки  $A$  в точку  $B$  за наименьший промежуток времени. Эта кривая называется *брахистохроной*.

В вариационном исчислении [42, с. 9—13, 33, 34; 162, с. 281, 304, 305] доказывается, что искомая кривая должна быть интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' = 0, \quad F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}.$$

Кроме того, из условия задачи следует, что из всех решений последнего уравнения следует выделить решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$y(a)=A, \quad y(b)=B.$$

Оказывается, что брахистохроной является циклонда.

**98. Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных.** Так называется уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0, \quad (30)$$

в котором  $F$  есть однородная функция относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , т. е. при всяком  $t$  имеет место тождество

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)})=t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Введем новую неизвестную функцию  $z$ , положив

$$\frac{y'}{y}=z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= yz, \quad y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y(z^3 + 3zz' + z''), \quad \dots, \quad y^{(n)} = y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (30) примет вид

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}))=0. \quad (31)$$

Воспользуемся теперь свойством однородности функции  $F$ . В нашем случае роль  $t$  играет  $y$ , поэтому можем переписать (31) так:

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}))=0.$$

Сокращая на  $y^m$  (при этом мы можем потерять решение  $y=0$ , если  $m>0$ , однако из дальнейшего будет видно, что этого не случится), получаем уравнение  $(n-1)$ -го порядка с искомой функцией  $z$ .

Если мы сможем найти общее решение полученного уравнения в виде

$$z=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то, заменяя  $z$  на  $\frac{y'}{y}$ , будем иметь

$$\frac{y'}{y}=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$



Следовательно,

$$y = C_n e^{\int \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx}. \quad (32)$$

Это и есть общее решение уравнений (30).

Решение  $y=0$  содержится в формуле (32) при  $C_n=0$ .

**Пример.** Дано уравнение

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0. \quad (33)$$

Полагая  $\frac{y'}{y} = z$ , имеем:

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z').$$

Поэтому уравнение переписется так:

$$xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Сокращая на  $y^2$ , получаем

$$2xz^2 + xz' - z = 0.$$

Это уравнение делением на  $x$  приводится к уравнению Бернулли. Интегрируя его, получаем

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Заменяя  $z$  на  $\frac{y'}{y}$ , будем иметь

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}. \quad (34)$$

Уравнение (33) имеет решения  $y=C$ , не содержащиеся (при  $C \neq 0$ ) в формуле (34).

**99. Обобщенное однородное уравнение** (ср. п. 73). Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (35)$$

в котором левая часть становится однородной функцией всех своих аргументов, если считать  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$  соответственно величинами первого,  $k$ -го,  $(k-1)$ -го,  $\dots$ ,  $(k-n)$ -го измерений, т. е.

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (36)$$

Такое уравнение называется *обобщенным однородным*.

Для интегрирования уравнения (35) введем вместо  $x$  и  $y$  новые переменные  $t$  и  $z$ , положив (см. п. 73)

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}. \quad (37)$$

Выразим производные от старой искомой функции  $y$  по старой независимой переменной  $x$  через производные от новой искомой функции  $z$  по новой независимой переменной  $t$ .

Прежде всего, так же как и в п. 73, получим

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \quad (38)$$

так что производная от  $y$  по старой независимой переменной  $x$  равна производной от  $y$  по новой независимой переменной  $t$ , умноженной на  $e^{-t}$ . Дифференцируя по  $t$  вторую из формул (37), находим

$$\frac{dy}{dt} = \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{kt}.$$

Подставляя это выражение в (38), имеем

$$y' = \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{(k-1)t}. \quad (39)$$

Мы получили выражение первой производной от  $y$  по  $x$  через первую производную от  $z$  по  $t$ .

Аналогично находим:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = \left( \frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1) \frac{dz}{dt} + k(k-1)z \right) e^{(k-2)t}, \quad (39_1)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} e^{-t} = \left( \frac{d^3z}{dt^3} + (3k-3) \frac{d^2z}{dt^2} + \right. \\ \left. + (k(k-1) + (k-2)(2k-1)) \frac{dz}{dt} + k(k-1)(k-2)z \right) e^{(k-3)t} \quad (39_2)$$

и т. д. Наконец,

$$y^{(n)} = \omega \left( z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^n z}{dt^n} \right) e^{(k-n)t}, \quad (39_{n-1})$$

Выполняя теперь в уравнении (35) подстановку (37) и заменяя при этом производные  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$  их выражениями из формул (39), (39<sub>1</sub>), ..., (39<sub>n-1</sub>), получим уравнение вида

$$F \left( e^t, z e^{kt}, \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) e^{(k-1)t}, \dots \right)$$

$$\dots, \omega \left( z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^n z}{dt^n} \right) e^{(k-n)t} = 0.$$

Вынося, согласно (36), за знак функции  $F$  множитель  $e^{mt}$  и сокращая на него, получим уравнение  $n$ -го порядка

$$F \left( 1, z, \frac{dz}{dt} + kz, \dots, \omega \left( z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^n z}{dt^n} \right) \right) = 0.$$

Это уравнение не содержит независимой переменной  $t$  и потому, согласно п. 97, допускает понижение порядка на единицу.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0. \quad (40)$$

Считая  $x$ ,  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  соответственно величинами первого,  $k$ -го,  $(k-1)$ -го и  $(k-2)$ -го измерений, составляем условие, определяющее  $k$ , т. е. условие, при котором все члены будут одного измерения. Первый член  $x^3 y''$  имеет измерение  $3 + (k-2)$ , ибо  $x^3$  имеет измерение 3, а  $y''$  — измерение  $(k-2)$ . Измерение второго члена  $2xyy'$  равно  $1 + k + (k-1)$ . Третий член  $(-x^2 y'^2)$  имеет измерение  $2 + 2(k-1)$ . Наконец, измерение последнего члена  $(-y^2)$  равно  $2k$ . Приравнявая все эти измерения, получаем условие, определяющее  $k$ :

$$1 + k = 2k = 2k = 2k.$$

Это условие будет выполнено при  $k=1$ . Следовательно, уравнение (40) является обобщенным однородным.

Делаем подстановку

$$x = e^t, \quad y = ze^t.$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \frac{dz}{dt} + z, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) e^{-t},$$

так что после подстановки получим

$$e^{3t} (z'' + z') e^{-t} + 2e^t z e^t (z' + z) - e^{2t} (z' + z)^2 - z^2 e^{2t} = 0$$

или

$$z'' + z' - z^2 = 0.$$

Это уравнение не содержит независимой переменной  $t$ . Положим  $z' = u$  и примем  $z$  за независимую переменную. Тогда  $z'' = u'u$  и мы имеем

$$u'u + u - u^2 = 0.$$

Сократив на  $u$ , получаем

$$u' + 1 - u = 0 \quad (u \neq 0?),$$

откуда

$$u = C_1 e^z + 1,$$

но  $u = z'$ , поэтому

$$z' = C_1 e^z + 1.$$

Интегрируя, находим

откуда

$$C_2(C_1 + e^{-z}) = e^{-t},$$

$$z = \ln \frac{C_2 e^t}{1 - C_1 C_2 e^t}.$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , получим общее решение уравнения (40) в виде

$$y = x \ln \frac{C_2 x}{1 - C_1 C_2 x}$$

или

$$y = x \ln \frac{A_1 x}{1 + A_2 x} \quad (A_1 = C_2, \quad A_2 = -C_1 C_2).$$

Равенство  $u = 0$  приводит к семейству частных решений

$$y = Cx \quad (x \neq 0).$$

Особых решений нет (почему?).

**100. Уравнение, левая часть которого есть точная производная.** Предположим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (41)$$

представляет собою точную производную по  $x$  от некоторой функции  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , зависящей от переменных  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , т. е.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = -\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

или

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

причем написанное равенство выполняется тождественно относительно всех переменных  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ .

Тогда ясно, что уравнение (41) имеет первый интеграл

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

так что порядок этого уравнения понизился на единицу.

**Пример 1.** Дано уравнение

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = 0. \quad (42)$$

Здесь

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = \frac{d}{dx} \left( \ln |y''| - \frac{3}{2} \ln(1+y'^2) \right),$$

т. е. левая часть уравнения (42) есть точная производная. Поэтому уравнение (42) допускает первый интеграл

$$\ln |y''| - \frac{3}{2} \ln(1+y'^2) = \ln |C_1|,$$

или

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = 0.$$

Левая часть полученного уравнения снова есть точная производная, ибо

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x \right).$$

Следовательно,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1 x = C_2. \quad (43)$$

Это есть интеграл второго порядка уравнения (42).

Интегрируя уравнение (43), получим общий интеграл уравнения (42) в виде (ср. введение, пример 4)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad \left( a = -\frac{C_2}{C_1}, b = \frac{C_3}{C_1}; R = \frac{1}{C_1} \right).$$

Если левая часть уравнения (41) не является точной производной, то в некоторых случаях удастся найти такую функцию  $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , что после умножения на нее левая часть этого уравнения становится точной производной. Эта функция называется *интегрирующим множителем* уравнения (41).

Так же, как и для уравнения первого порядка (см. п. 59), знание функции  $\mu$  дает возможность не только найти первый интеграл, но также и особые решения. Последние представляют собою решения уравне-

$$\frac{1}{\mu} = 0.$$

Мы не будем касаться вопроса о нахождении функции  $\mu$  в общем случае, а ограничимся рассмотрением примера.

**Пример.** Пусть дано уравнение

$$y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0. \quad (44)$$

Умножая обе части на функцию  $\mu = \frac{1}{yy'}$ , получаем

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0 \quad (yy' \neq 0?) \quad (45)$$

или

$$\frac{d}{dx} (\ln |y'| + y^2 + \ln |y| - 2 \ln |x|) = 0,$$

так что левая часть уравнения (45) является точной производной, а равенство

$$\ln |y'| + y^2 + \ln |y| - 2 \ln |x| = \ln |C_1| \quad \text{или} \quad e^{y^2} yy' - C_1 x^2 = 0$$

есть первый интеграл. Далее имеем

$$e^{y^2} yy' - C_1 x^2 = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{C_1}{3} x^3 \right).$$

Поэтому равенство

$$\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{C_1}{3} x^3 = C_2$$

является общим интегралом уравнения (44). Особых решений нет, так как уравнение  $yy' = 0$  приводит к решениям  $y = C$ , которые содержатся в общем интеграле.

## СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

**101. Предварительные замечания.** Совокупность соотношений вида

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — искомые функции от независимой переменной  $x$ , называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*. Будем предполагать функции  $F_1, F_2, \dots, F_n$  такими, что система (1) разрешима относительно производных от искомых функций

Системы вида (2) называются *нормальными системами дифференциальных уравнений*. Число уравнений, входящих в систему (2), называется *порядком* этой системы. Согласно этому определению, система (2) есть система  *$n$ -го порядка*. В этом параграфе мы будем рассматривать исключительно *нормальные системы*.

Если правые части системы (2) зависят линейно от искоемых функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , т. е. если система (2) имеет вид





**Пример.** Дана система двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Легко убедиться, что совокупность функций

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x$$

является решением этой системы в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Действительно, заменяя в данной системе  $y$  и  $z$  соответственно на  $e^x$  и  $-e^x$ , мы получим тождества, справедливые при всех значениях  $x$ .

Система (4) имеет и другие решения. Например, решением будет

$$y_2 = e^{9x}, \quad z_2 = e^{9x} \quad (-\infty < x < \infty),$$

а также пара функций вида

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z &= -C_1 e^x + C_2 e^{9x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

при  $-\infty < x < \infty$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Чтобы убедиться в последнем, подставим (5) в систему (4). Из формулы (5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}, \\ \frac{dz}{dx} &= -C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому, подставляя (5) в систему (4), получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} &= 5(C_1 e^x + C_2 e^{9x}) + 4(-C_1 e^x + C_2 e^{9x}), \\ -C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} &= 4(C_1 e^x + C_2 e^{9x}) + 5(-C_1 e^x + C_2 e^{9x}), \end{aligned} \right\}$$

которые выполняются тождественно относительно  $x$  при любых числовых значениях постоянных  $C_1$  и  $C_2$ .

Мы рассмотрели конкретную систему двух уравнений и убедились, что она имеет решение, содержащее две произвольные постоянные. В дальнейшем мы увидим, что при некоторых условиях и вообще *нормальная система  $n$  уравнений допускает решение, содержащее  $n$  произвольных постоянных*.

Процесс нахождения решений системы (2) называется *интегрированием* этой системы. *Основной задачей интегрирования системы (2) является нахождение всех решений и изучение их свойств.*





состоянием покоя будет

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad x_n \equiv 0.$$

В случае автономной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(т. е. когда правые части системы не зависят явно от времени) всякому решению системы

$$\left. \begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

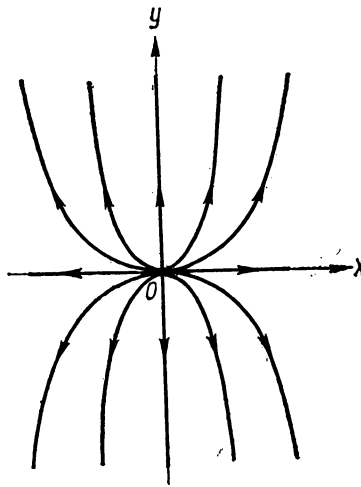
соответствует движение, вырождающееся в состояние покоя.

Система (6) определяет поле скоростей в той части пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где определены функции  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . При этом если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  фиксированы, а  $t$  изменяется, то мы получаем картину изменения скорости в фиксированной точке. Если, в частности, система (6) автономная, так что она имеет вид (8), то в заданной точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с течением времени скорость не изменяется.

Основной задачей интегрирования системы (6) является нахождение всех движений, определяемых этой системой, и изучение их свойств.

**Пример 2.** Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Р и с. 34



В этом случае задача Коши состоит в том, чтобы из всех движений, определяемых системой (6), найти такое движение (7), в котором

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad \dots, \quad x_n = x_n^{(0)} \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (13)$$

т. е. движущаяся точка находится в заданной точке  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  фазового пространства в заданный момент времени  $t_0$ . Точка  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  называется *начальной точкой*, а  $t_0$  — *начальным моментом времени*. Числа  $t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  называются *начальными данными* движения (7), а условия (13) — *начальными условиями* этого движения.

В связи с задачей Коши для системы (6) возникают следующие вопросы, имеющие большое теоретическое и практическое значение.

1. При каких условиях, наложенных на правые части системы (6), существует движение (7) с заданными начальными условиями (13)?

2. При каких условиях это движение является единственным, т. е. заданным начальными условиями (13) соответствует только одно движение (7), определяемое системой (6)?

3. Каковы свойства решения задачи Коши как функции от времени  $t$ , т. е. в каком интервале изменения времени определены функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , каков характер зависимости их от времени и каков их аналитический вид?

4. Каковы геометрические особенности поведения траектории движения, соответствующего решению задачи Коши, в фазовом пространстве?

5. Каковы свойства решения задачи Коши как функции начальных значений  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , как изменяется движение (7) с изменением начальных значений?

Эти вопросы рассматриваются в гл. 5.

**Пример.** Рассмотрим систему (9)

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Эта система определяет семейство движений (10)

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^{2t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Выделим движение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = 1, \quad y = 1 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

т. е. движение, в котором движущаяся точка находится в точке (1, 1) в момент времени  $t = 0$ .

Подставляя в уравнения семейства движений  $t = 0, x = 1, y = 1$ , находим:  $1 = C_1, 1 = C_2$ , так что искомым движением будет

$$x = e^t, \quad y = e^{2t}.$$

Траекторией этого движения служит полупарабола  $y=x^2$  ( $x>0$ ), причем из уравнений движения видно, что при  $t>0$  точка будет двигаться от точки  $(1, 1)$ , удаляясь на  $\infty$  с возрастанием  $t$ . Это видно также и из самой системы дифференциальных уравнений, ибо для  $x>0$ ,  $y>0$

$$\frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0,$$

вследствие чего с увеличением времени  $t$  обе координаты  $x$  и  $y$  точки  $(x, y)$  тоже увеличиваются. При  $t<0$  точка движется от начала координат ( $t=-\infty$ ) к точке  $(1, 1)$ .

При рассмотрении задачи Коши для системы (2), так же как и в случае одного дифференциального уравнения, возникают вопросы существования и единственности решения задачи Коши, а также вопросы о свойствах решения задачи Коши как функции независимой переменной и как функции начальных данных.

Ответы на эти вопросы мы даем в гл. 5. Оказывается, что для существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для системы (2) достаточно предположить, что правые части этой системы непрерывны в окрестности начальных данных (теорема Пеано).

**105. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.** В гл. 5 мы докажем, что если правые части системы (2) удовлетворяют в окрестности начальных данных некоторым условиям, то существует единственное решение задачи Коши с этими начальными данными, определенное в некоторой окрестности начального значения независимой переменной, и что свойства решения задачи Коши вполне определяются свойствами правых частей системы (2) и начальными данными. Сейчас мы приведем без доказательства основную теорему существования и единственности (теорему Пикара) для системы (2) в упрощенной формулировке.

**Т е о р е м а.** Пусть дана нормальная система (2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\}$$

и поставлены начальные условия (12)

$$y_1=y_1^{(0)}, \quad y_2=y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y_n=y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x=x_0.$$







$$\left. \begin{aligned} y_1^{(0)} &= \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2^{(0)} &= \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\vdots \\ y_n^{(0)} &= \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \right\}$$

Найдем из этой системы  $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 &= \psi_2(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \equiv C_2^{(0)}, \\ &\vdots \\ C_n &= \psi_n(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \equiv C_n^{(0)}. \end{aligned} \right\}$$

Подставим эти значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в формулу общего решения (14).  
Получим:

[illegible]

Это и есть искомое решение. Других решений с начальными данными  $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  нет.

Иногда в формуле общего решения (14) роль произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  играют начальные значения  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  искомых функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  при некотором фиксированном значении  $x_0$  аргумента  $x$ , так что формула (14) принимает вид:

[illegible]

Такая форма записи общего решения называется *общим решением в форме Коши*.

**107. Частное решение** (ср. п. 10). Если решение системы (2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши для этой системы, то такое решение мы будем называть *частным решением*.

Решение, получающееся из формулы общего решения при частных числовых значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , включая  $\pm\infty$ , будет, очевидно, частным решением.

Решая задачу Коши, при помощи формулы общего решения всегда получаем частное решение.

**108. Особое решение** (ср. п. 11). Решение системы (2), в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши для этой системы, будем называть *особым решением*.

**Пример.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + \frac{2}{x}y - \sqrt{z}, \\ \frac{dz}{dx} &= 2\sqrt{z}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $x \neq 0$ .

Интегрируя второе уравнение, находим

$$z = (x + C_1)^2, \quad x > -C_1,$$

Подставим это выражение для  $z$  в первое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{2}{x}y - C_1.$$

Это уравнение линейное. Интегрируя его, получаем

$$y = C_1x + C_2x^2.$$

Следовательно, система (16) имеет общее решение

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1x + C_2x^2, \\ z &= (x + C_1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

при  $x > -C_1$ . Второе из уравнений (16) имеет особое решение  $z=0$ . Подставляя его в первое уравнение, получим

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{2}{x}y,$$

откуда

$$y = x^2 (C + \ln |x|).$$

Таким образом, система (16) кроме общего решения (17) имеет еще семейство решений

$$\left. \begin{aligned} y &= x^2 (C + \ln |x|), \\ z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Каждое из них является особым, ибо во всех точках каждого из этих решений нарушается единственность решения задачи Коши (почему?).

**109. Понятие об интеграле нормальной системы. Первые интегралы. Общий интеграл. Число независимых интегралов.** Рассмотрим одно из равенств (15)

$$\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i. \quad (18)$$

Функция  $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ , входящая в (18), обладает одним характерным свойством. Она обращается в постоянную при замене  $y_1, \dots, y_n$  любым частным решением системы (2), расположенным в области задания общего решения (14), т. е. мы имеем тождество

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)) \equiv C_i.$$

Всякая функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , обладающая таким свойством, называется *интегралом* системы (2).

Ниже речь идет о системах, для которых вся область существования и единственности совпадает с областью  $D$  определения некоторого общего решения.

**Первое определение интеграла.** Функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , определенная в области  $D$  и не приводящаяся к постоянной, называется *интегралом системы (2) в области  $D$* , если при замене  $y_1, \dots, y_n$  любым частным решением этой системы, расположенным в области  $D$ , она обращается в постоянную.

Если функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , будучи интегралом системы (2), имеет непрерывные частные производные по  $x, y_1, \dots, y_n$ , то вследствие того, что она вдоль любого частного решения обращается в постоянную, ее полный дифференциал  $d\psi$  должен обращаться тождественно (относительно  $x$ ) в нуль вдоль этого решения, т. е.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n \equiv 0$$

вдоль любого частного решения. Но вдоль решения мы имеем

$$dy_k \equiv f_k(x, y_1, \dots, y_n) dx \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Поэтому предыдущее тождество можно переписать так:

$$\begin{aligned} d\psi|_{(2)} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \dots, y_n) dx + \\ &+ \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) dx \equiv 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, если интеграл  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам, то он обладает тем свойством, что его полный дифференциал обращается тождественно в нуль в силу системы (2), т. е. при замене  $dy_1, \dots, dy_n$  их значениями из системы (2).

Второе определение интеграла. Функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , непрерывно дифференцируемая в области  $D$  и такая, что  $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$  не обращаются одновременно в нуль в этой области, называется *интегралом системы (2) в области  $D$* , если полный дифференциал этой функции тождественно в  $D$  равен нулю в силу системы (2), т. е. имеет место тождество (19).

Деля обе части тождества (19) на  $dx$ , получим

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{(2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \dots, y_n) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) \equiv 0,$$

так что полная частная производная от функции  $\psi$  по  $x$  тождественно равна нулю в силу системы (2), т. е. при замене  $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$  правыми частями этой системы.

Ясно, что функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , являющаяся интегралом системы (2) в смысле второго определения, будет интегралом этой системы и в смысле первого определения.

Обратное неверно, ибо функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ , являющаяся интегралом системы (2) в смысле первого определения, может не иметь частных производных по всем своим аргументам.

Равенство

$$\psi(x, y_1, \dots, y_n) = C,$$

где  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  — интеграл системы (2) в смысле первого или второго определения, а  $C$  — произвольная постоянная, называется *первым интегралом системы (2)*.

Например, каждое из равенств (15) является первым интегралом системы (2).

Совокупность  $n$  первых интегралов (15) обладает тем свойством, что она разрешима относительно искомых функций  $y_1, \dots, y_n$ , причем в результате этого мы получаем общее решение (14) системы (2) в области  $D$ . Всякую совокупность  $n$  первых интегралов, обладающую таким свойством, будем называть *общим интегралом системы (2) в области  $D$* .

Первые интегралы (15), образующие общий интеграл системы (2), обладают тем свойством, что интегралы  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  *независимы*, т. е. между функциями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  не существует соотношения вида

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$$

ни при каком выборе функции  $\Phi$ . В самом деле, если бы такое соотношение существовало, то мы не смогли бы найти из системы (15) функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Если интегралы  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  имеют непрерывные частные производные, то для независимости их необходимо и достаточно, чтобы якобиан функций  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_n$  не обращался тождественно в нуль:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (20)$$

Достаточность вытекает из следующей теоремы математического анализа.

**Т е о р е м а.** Пусть даны  $t$  функций  $u_1, u_2, \dots, u_t$  от  $n$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq t$ ), имеющие непрерывные частные производные первого порядка. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти функции были независимы между собой, т. е. чтобы ни одна из них не приводилась к постоянной и чтобы они не удовлетворяли соотношению, не содержащему независимых переменных  $x$ , заключается в том, чтобы по крайней мере один из функциональных определителей, которые можно образовать из столбцов таблицы

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_2}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_1}, \frac{\partial u_t}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_t}{\partial x_n},$$

не приводился тождественно к нулю [29, с. 314, 315].

**Необходимость.** Пусть  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  — независимые интегралы системы (2), определенные в области  $D$ . Возьмем в области  $D$  точку  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , в которой хоть один из определителей  $n$ -го порядка, составленных из матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{array} \right\| \quad (21)$$

отличен от нуля. (Такая точка существует, согласно сформулированной выше теореме.) Покажем, что именно определитель, составленный из последних  $n$  столбцов матрицы (21), отличен от нуля в этой точке, т. е.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \quad (x=x_0, y_1=y_1^{(0)}, \dots, y_n=y_n^{(0)}). \quad (20')$$

Если  $\frac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$  в точке  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , то условие (20'), очевидно, выполняется.

Предположим, что хоть одна из  $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$  отлична от нуля в точке  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ . Так как  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  суть интегралы системы (2), то в точке  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n &= 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} f_n &= 0, \\ \vdots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что линейная неоднородная система

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} u_1 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} u_n &= 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} u_1 + \dots + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} u_n &= 0, \\ \vdots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} u_1 + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} u_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

при  $x=x_0$ ,  $y_1=y_1^{(0)}$ ,  $\dots$ ,  $y_n=y_n^{(0)}$  совместна. Следовательно (согласно теореме об условии совместности неоднородной линейной системы), ранг матрицы системы (22) равен рангу расширенной матрицы, а так как ранг расширенной матрицы равен  $n$ , то и ранг матрицы системы (22) равен  $n$ , что и означает, что выполняется условие (20').

Всякие  $n$  первых интегралов мы будем называть *независимыми*, если соответствующие им интегралы независимы.

Из сказанного вытекает, что задача построения общего интеграла системы будет решена, если мы найдем  $n$  независимых первых интегралов.

Общего способа нахождения первых интегралов указать нельзя. Заметим лишь, что во многих случаях удастся найти первый интеграл путем некоторых преобразований данной системы, в результате которых получается легко интегрируемое дифференциальное уравнение. Всякое такое уравнение будем называть *интегрируемой комбинацией*. Простейшей интегрируемой комбинацией является уравнение вида  $\frac{d\psi}{dx}=0$  или

$d\psi=0$ , где  $\psi$  есть функция от  $x$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\dots$ ,  $y_n$ . В этом случае, очевидно, первым интегралом будет  $\psi=C$ . Каждая интегрируемая комбинация порождает первый интеграл. Однако среди них могут оказаться и зависимые. Поэтому всякий раз, получая новый первый интеграл, нужно проверять, будет ли он независимым с ранее найденными.

При этом *если число интегралов есть  $k$  ( $1 < k < n$ ), то они будут независимыми тогда и только тогда, когда хоть один из функциональных определителей  $k$ -го порядка, составленный из столбцов таблицы*

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_k}{\partial y_n}, \end{array}$$

*не равен тождественно нулю.*

Это доказывается теми же рассуждениями, которые мы проводили выше для доказательства условия независимости  $n$  интегралов системы (2).



**Пример 1.** Рассмотрим снова систему (4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z. \end{aligned} \right\}$$

Общее решение ее дается равенствами (5)

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z &= -C_1 e^x + C_2 e^{9x} \end{aligned} \right\}$$

(почему?). Разрешая систему (5) относительно  $C_1$  и  $C_2$ , получаем:

$$\frac{1}{2} (y-z) e^{-x} = C_1, \quad \frac{1}{2} (y+z) e^{-9x} = C_2. \quad (23)$$

Это есть общий интеграл системы (4). Каждое из равенств (23) является первым интегралом системы (4), а функции, стоящие в левых частях этих равенств, суть интегралы этой системы. Очевидно, что функции

$$\psi_1 = (y-z) e^{-x}, \quad \psi_2 = (y+z) e^{-9x}$$

тоже будут интегралами системы (4). Убедимся в этом непосредственно на основании второго определения интеграла. Находя полные дифференциалы функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим:

$$d\psi_1 = (dy - dz + (z-y)dx) e^{-x}, \quad d\psi_2 = (dy + dz - 9(y+z)dx) e^{-9x}.$$

Подставляя сюда вместо  $dy$  и  $dz$  их значения из рассматриваемой системы (4), имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\psi_1|_{(4)} &= (5y + 4z - (4y + 5z) + z - y) e^{-x} dx \equiv 0, \\ d\psi_2|_{(4)} &= (5y + 4z + 4y + 5z - 9(y+z)) e^{-9x} dx \equiv 0. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  суть интегралы системы (4).

Эти интегралы можно получить и непосредственно путем преобразований системы (4). Действительно, вычитая в (4) второе уравнение из первого, имеем интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(y-z)}{dx} = y-z,$$

откуда

$$y-z = C_1 e^x$$

или

$$(y-z) e^{-x} = C_1.$$

Следовательно,

$$\psi_1 = (y-z) e^{-x}$$

есть интеграл системы (4). Складывая в (4) первое уравнение со вторым, аналогично получаем, что

$$\psi_2 = (y+z) e^{-9x}$$

есть интеграл системы (4). Интегралы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , очевидно, независимы. В этом можно убедиться и при помощи вычисления их якобиана, ибо последний, будучи равным  $2e^{-10x}$ , не обращается в нуль.

**Пример 2.** Возьмем систему более общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p(x)y + q(x)z, \\ \frac{dz}{dx} &= q(x)y + p(x)z. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Для этой системы тем же приемом, что и в предыдущем примере, легко находятся два первых интеграла. Складывая почленно первое уравнение системы (24) со вторым, имеем

$$\frac{d(y+z)}{dx} = (p(x) + q(x))(y+z),$$

откуда

$$y+z = C_1 e^{\int (p(x) + q(x)) dx}. \quad (25)$$

Вычитая почленно второе уравнение системы (24) из первого, имеем

$$\frac{d(y-z)}{dx} = (p(x) - q(x))(y-z),$$

откуда

$$y-z = C_2 e^{\int (p(x) - q(x)) dx}. \quad (26)$$

Разрешая систему уравнений (25), (26) относительно  $C_1$  и  $C_2$ , получим два независимых первых интеграла системы (24), т. е. общий интеграл. Разрешая ту же систему относительно  $y$  и  $z$ , найдем общее решение системы (24).

Например, указанным приемом легко интегрируется следующая с виду сложная система:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\cos \ln x)y + (\sin \ln x)z, \\ \frac{dz}{dx} &= (\sin \ln x)y + (\cos \ln x)z. \end{aligned} \right\}$$

Общим решением этой системы будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^{x \sin \ln x} + C_2 e^{x \cos \ln x}, \\ z &= C_1 e^{x \sin \ln x} - C_2 e^{x \cos \ln x}. \end{aligned} \right\}$$

**Пример 3.** Найти общий интеграл системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_3 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_2 - y_1. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Сложим все уравнения. Получаем

$$\frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dx} = 0,$$

т. е.

$$\psi_1 \equiv y_1 + y_2 + y_3 = C_1$$

является первым интегралом системы (27).

Далее, умножив уравнения (27) соответственно на  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  и складывая, будем иметь

$$\frac{d(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}{dx} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi_2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$$

тоже есть первый интеграл системы (27). Очевидно, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — независимые интегралы (ибо  $\psi_1$  не может быть представлена никакой функцией от  $\psi_2$ ).

Мы могли бы дальше поступить следующим образом. Умножим первое из уравнений (27) на  $y_2$ , второе — на  $y_1$  и сложим. Получаем

$$\frac{d(y_1 y_2)}{dx} = y_2 y_3 - y_2^2 + y_1^2 - y_1 y_3. \quad (28)$$

Умножим первое из уравнений (27) на  $y_3$ , третье — на  $y_1$  и сложим. Тогда

$$\frac{d(y_1 y_3)}{dx} = y_3^2 - y_2 y_3 + y_1 y_2 - y_1^2. \quad (29)$$

Умножим второе из уравнений (27) на  $y_3$ , третье — на  $y_2$  и сложим. Получаем

$$\frac{d(y_2 y_3)}{dx} = y_1 y_3 - y_3^2 + y_2^2 - y_1 y_2. \quad (30)$$

Сложив уравнения (28) — (30), будем иметь

$$\frac{d(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)}{dx} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi \equiv y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = C$$

также является первым интегралом системы (27).

Но мы имеем

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi)}{D(y_1, y_2, y_3)} \equiv 0 \quad (\text{почему?}).$$

Поэтому интегралы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi$ , а вместе с ними и первые интегралы  $\psi_1 = C_1$ ,  $\psi_2 = C_2$ ,  $\psi = C$  не будут независимыми. Непосредственной проверкой легко убедиться, что между интегралами  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi$  существует следующая функциональная зависимость:

$$\psi = \frac{1}{2} (\psi_1^2 - \psi_2).$$

Для нахождения недостающего первого интеграла воспользуемся найденными первыми интегралами  $\psi_1 = C_1$  и  $\psi_2 = C_2$ . Составим систему

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &\equiv y_1 + y_2 + y_3 = C_1, \\ \psi_2 &\equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Разрешим эту систему относительно  $y_1$  и  $y_2$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - y_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2} \right), \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - y_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2} \right). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя найденные выражения для  $y_1$  и  $y_2$  в последнее из уравнений системы (27), будем иметь

$$\frac{dy_3}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_3 - 3y_3^2}.$$

Получили одно уравнение с одной неизвестной функцией. Интегрируя его, находим

$$\arcsin \frac{3y_3 - C_1}{\sqrt{6C_2 - 2C_1^2}} - \sqrt{3} x = C_3.$$

Заменяя здесь  $C_1$  и  $C_2$  их значениями из системы (31), получаем первый интеграл

$$\psi_3 \equiv \arcsin \frac{2y_3 - y_1 - y_2}{2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3}} - \sqrt{3} x = C_3. \quad (32)$$

Равенства (31) и (32) и составляют общий интеграл системы (27).

Докажем две общие теоремы о числе интегралов нормальной системы, причем будем предполагать, что интегралы, о которых идет речь, имеют непрерывные частные производные по  $x, y_1, \dots, y_n$ .

**Т е о р е м а 1.** *Нормальная система  $n$  уравнений не может допускать более  $n$  независимых интегралов.*

Утверждение теоремы равносильно тому, что если известны  $n+1$  интегралов системы (2)

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \psi,$$

то они не могут быть независимы. Рассмотрим два случая:

а) интегралы  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  зависимы. В этом случае теорема, очевидно, доказана;

б) интегралы  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  независимы. Тогда они удовлетворяют условию (20)

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Так как функции  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  и  $\psi$  суть интегралы системы (2), то мы имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n &= 0. \end{aligned}$$

Эти тождества показывают, что линейная однородная система

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} u_2 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} u_{n+1} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} u_2 + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} u_{n+1} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} u_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} u_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

имеет ненулевое решение  $u_1=1, u_2=f_1, \dots, u_{n+1}=f_n$ . Поэтому определитель системы (33) равен нулю, т. е.

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \psi)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n, x)} \equiv 0.$$

Отсюда вследствие условия (20) на основании известной теоремы дифференциального исчисления [149, т. II, с. 203] вытекает, что  $\psi$  является функцией от  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \quad (34)$$

в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , в которой

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \quad (x=x_0, y_1=y_1^{(0)}, \dots, y_n=y_n^{(0)}),$$

т. е. функции  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  и  $\psi$  оказываются зависимыми. При этом функция  $\Phi$  имеет непрерывные частные производные по  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , которые не обращаются одновременно в нуль.\*

\* Ср. аналогичное утверждение для случая  $n=1$  (п. 16).

**Теорема 2.** Если  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) — независимые интегралы системы (2), определенные в области  $D$ , а  $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_k)$  — любая функция, определенная в некоторой области изменения  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , охватывающей все значения, принимаемые соответственно функциями  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  (когда точка  $(x, y_1, \dots, y_n)$  пробегает всю область  $D$ ), и имеющая в этой области непрерывные частные производные по  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , не равные нулю одновременно, то функция

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) \quad (35)$$

тоже будет интегралом системы (2).

В самом деле, функция  $\psi$  имеет непрерывные частные производные по  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_n} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}. \end{aligned}$$

Покажем, что в некоторой области частные производные от функции  $\psi$  по  $y_1, y_2, \dots, y_n$  не обращаются одновременно в нуль.

Не умаляя общности, мы можем предположить, что якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_k)} \quad (36)$$

не равен тождественно нулю в области  $D$ . Тогда в области  $D$  существует такая точка  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , что в ней и в некоторой окрестности ее якобиан (36) отличен от нуля. В этой окрестности  $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$  не обращаются одновременно в нуль.

Остается показать, что полный дифференциал функции  $\psi$  тождественно (в  $D$ ) равен нулю в силу системы (2). Мы имеем

$$d\psi = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} d\psi_i.$$

Так как  $d\psi_1 \equiv 0, \dots, d\psi_n \equiv 0$  в силу системы (2), то и  $d\psi \equiv 0$  в силу этой системы.

Следовательно, функция (35) есть интеграл системы (2).

На основании доказанных здесь теорем мы можем утверждать, что если система (2) допускает  $n$  независимых интегралов  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , то формула (34) содержит в себе при произвольной функции  $\Phi$  (обладающей указанными свойствами) все интегралы системы (2) и, следовательно, представляет собою самый общий вид интеграла этой системы.

В п. 138 доказывается, что при некоторых условиях, наложенных на правые части системы (2), последняя всегда имеет  $n$  независимых интегралов. Тем самым доказывается, что формула (34) действительно представляет собой самый общий вид (непрерывно дифференцируемого) интеграла системы (2).\*

**110. Связь между нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнением с частными производными.** Мы видели в п. 17, что между уравнением первого порядка в нормальной форме и соответствующим уравнением с частными производными первого порядка существует тесная связь, которая осуществляется через интеграл данного обыкновенного дифференциального уравнения в нормальной форме. Покажем, что аналогичная связь существует и в случае нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  есть непрерывно дифференцируемый интеграл нормальной системы (2). Тогда, как установлено выше, для  $\psi$  имеет место тождество

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \equiv 0.$$

Это тождество означает, что функция  $u = \psi$  является решением уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0$$

с неизвестной функцией  $u = u(x, y_1, \dots, y_n)$ .

Обратно, если  $u = \psi(x, y_1, \dots, y_n)$  есть решение указанного уравнения с частными производными, отличное от тождественной константы, то функция  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  является интегралом нормальной системы дифференциальных уравнений (2), ибо, вычисляя полный дифференциал этой функции в силу системы (2), мы имеем

---

\* Напоминаем, что речь идет об интегралах в смысле второго определения, заданных в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , в которой выполнены условия существования и единственности решения.

$$\begin{aligned}
 d\psi|_{(2)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \dots, y_n) dx + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) dx = \\
 &= \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \dots, y_n) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) dx.
 \end{aligned}$$

Так как правая часть тождественно равна нулю (почему?), то

$$d\psi|_{(2)} \equiv 0,$$

и, следовательно,  $\psi$  — интеграл системы (2).

### 111. Понижение порядка системы при помощи первых интегралов.

Чем ниже порядок системы, тем интегрирование ее теоретически проще.

Покажем, что знание одного первого интеграла дает возможность понизить порядок системы на единицу.

Пусть известен один первый интеграл

$$\psi_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1. \quad (37)$$

Предположим, что уравнение (37) разрешимо относительно одной из искоемых функций, например относительно  $y_1$ , так что мы имеем

$$y_1 = \bar{\varphi}_1(x, y_2, \dots, y_n, C_1). \quad (38)$$

Подставив это значение  $y_1$  в последние  $n-1$  уравнений системы (2), мы получим систему  $n-1$  уравнений с  $n-1$  неизвестными функциями  $y_2, y_3, \dots, y_n$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, \bar{\varphi}_1, y_2, \dots, y_n), \\
 \frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, \bar{\varphi}_1, y_2, \dots, y_n), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, \bar{\varphi}_1, y_2, \dots, y_n).
 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, порядок системы (2) понизился на единицу.

Предположим, что нам удалось найти общее решение полученной системы

$$\left. \begin{aligned}
 y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
 y_3 &= \varphi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n).
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$





$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_{k+1}}{dx} &= f_{k+1}(x, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_k, y_{k+1}, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_k, y_{k+1}, \dots, y_n). \end{aligned} \right\}$$

Предположим, что нам удалось найти общее решение этой системы

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= \varphi_{k+1}(x, C_1, \dots, C_n), \\ &\vdots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Тогда, заменяя в (42) величины  $y_{k+1}, \dots, y_n$  их значениями, согласно формулам (43), будем иметь формулы

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \\ &\vdots \\ y_k &= \varphi_k(x, C_1, \dots, C_n), \end{aligned} \right\}$$

которые вместе с формулами (43) и дают [139, с. 55] общее решение системы (2).

Если известны  $n-1$  независимых первых интегралов системы (2), то задача интегрирования ее приводится к интегрированию только одного уравнения с одной неизвестной функцией (см. п. 110, пример 3).

Наконец, если мы имеем  $n$  независимых первых интегралов, то, как сказано выше, мы тем самым уже имеем общий интеграл, и задача решена.

**112. Приведение уравнения  $n$ -го порядка к системе  $n$  уравнений первого порядка и обратная задача.** Пусть дано уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (44)$$

Обозначим искомую функцию  $y$  через  $y_1$ ,\*  $y_1 = y$ , и введем в рассмотрение новые функции  $y_2, y_3, \dots, y_n$ , определив их при помощи соотношений

$$y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}. \quad (45)$$

В силу этого выбора новых функций и данного уравнения будем иметь:

---

\* Исключительно в целях симметрии обозначений. На практике в этом нет необходимости.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y' = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y'' = y_3, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y^{(n-1)} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\}$$

так что функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Система (46) называется *нормальной системой дифференциальных уравнений, равносильной уравнению (44)*. Можно построить и другие нормальные системы, эквивалентные уравнению (44), если ввести новые неизвестные функции при помощи соотношений, отличных от (45).

Легко видеть, что если мы нашли решение  $y_1, y_2, \dots, y_n$  системы (46), то тем самым нашли решение  $y = y_1$  уравнения (44) и, наоборот, если имеем решение  $y$  уравнения (44), то тем самым имеем решение  $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$  системы (46).

Такое же соответствие мы имеем и для задачи Коши. Если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  есть решение системы (46), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при } x = x_0,$$

то  $y = y_1$  будет решением уравнения (44), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y = y_1^{(0)} \equiv y_0, \quad y' = y_2^{(0)} \equiv y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n^{(0)} \equiv y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0$$

и, наоборот, если  $y$  есть решение уравнения (44), удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0,$$

то  $y_1=y$ ,  $y_2=y'$ ,  $\dots$ ,  $y_n=y^{(n-1)}$  будет решением системы (46), удовлетворяющим начальным условиям

$$y_1=y_0\equiv y_1^{(0)}, y_2=y_0'\equiv y_2^{(0)}, \dots, y_n=y_0^{(n-1)}\equiv y_n^{(0)} \text{ при } x=x_0.$$

Если мы нашли общее решение системы (46) в области  $D(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , то тем самым мы нашли общее решение уравнения (44) в области  $D(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  и наоборот, так что *задача интегрирования уравнения (44) равносильна задаче интегрирования системы (46)*.\*

Приведение одного уравнения любого порядка, разрешенного относительно старшей производной, к равносильной нормальной системе уравнений в некоторых случаях упрощает задачу нахождения общего решения или решения задачи Коши, а главное, избавляет нас от необходимости проводить доказательство некоторых общих теорем о существовании и свойствах решений раздельно для уравнений высшего порядка и для систем уравнений первого порядка и дает возможность сводить исследование поведения решений уравнения  $n$ -го порядка к изучению того же вопроса для равносильной ему нормальной системы, причем фазовым пространством (см. п. 103) будет пространство переменных  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ . Именно поэтому в качественной теории дифференциальных уравнений исследуют, главным образом, нормальные системы дифференциальных уравнений.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}), \quad (47)$$

где  $t$  — время,  $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ . Введем наряду с искомой функцией  $x$  новую функцию  $y$ , положив  $y=\dot{x}$ . Тогда уравнение (47) приведет к системе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(t, x, y). \end{aligned} \right\} \quad (46')$$

Если мы изучим поведение решений полученной системы на фазовой плоскости  $(x, y)$ , то тем самым мы изучим поведение решений уравнения (47). При этом исследование системы оказывается более удобным, чем непосредственное исследование уравнения (47) (см. п. 142).

Рассмотрим теперь вопрос о приведении нормальной системы к одному уравнению. Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где  $f_i$  — дифференцируемые  $n-1$  раз функции.

\* Именно поэтому система (46) и называется равносильной уравнению (44).



сительно  $y_2, \dots, y_n$ . При этом  $y_2, \dots, y_n$  выразятся через  $x, y, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$ . Заменяя в последнем уравнении системы (49) функции  $y_2, \dots, y_n$  найденными их выражениями, получим уравнение  $n$ -го порядка

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (51)$$

Если мы имеем решение  $y_1, y_2, \dots, y_n$  системы (48), то первая функция  $y_1$  и будет решением уравнения (51).

Покажем, что (при сделанном предположении) и наоборот, решение  $y_1$  уравнения (51) и функции  $y_2, \dots, y_n$ , найденные из первого уравнения (48) и первых  $n-2$  уравнений системы (49),\* составляют решение системы (48).

В самом деле функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  удовлетворяют первому уравнению системы (48), так что мы имеем тождество  $y_1' \equiv f_1$ . Вычитая в системе (49) третьи части из вторых и принимая во внимание, что  $y_1' \equiv f_1$ , мы получим систему равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} (y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} (y_n' - f_n) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} (y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} (y_n' - f_n) &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_2} (y_2' - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n} (y_n' - f_n) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которые мы можем рассматривать как линейную однородную систему уравнений с неизвестными  $y_2' - f_2, \dots, y_n' - f_n$ . Так как определитель этой системы в силу условия (50) отличен от нуля, то все неизвестные равны нулю, т. е.  $y_2' - f_2 \equiv 0, \dots, y_n' - f_n \equiv 0$ , так что  $y_2' \equiv f_2, \dots, y_n' \equiv f_n$ . Присоединяя сюда установленное выше тождество  $y_1' \equiv f_1$ , заключаем, что функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  действительно удовлетворяют системе (48).

Уравнение (51) мы будем называть *уравнением  $n$ -го порядка, равносильным системе (48)* в том смысле, что задача интегрирования системы (48) равносильна задаче интегрирования уравнения (51).

Приведение системы к одному уравнению иногда значительно упрощает ее интегрирование, а также изучение свойств решений.

Может случиться, что функции  $y_2, \dots, y_n$  нельзя найти через  $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$ . Тогда мы не получим уравнения  $n$ -го порядка. Например, может оказаться, что уже из первого уравнения данной системы (48) и первого уравнения системы (49) можно исключить  $y_2, \dots, y_n$  (см. п. 217,

\* При этом  $y_2, \dots, y_n$  являются известными функциями от  $x$ . В самом деле, они выражаются через  $x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ , но  $y_1$ , а следовательно, и  $y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$  суть известные функции от  $x$ .

пример), так что мы получим для  $y_1$  уравнение второго порядка. Если найдем общее решение этого уравнения  $y_1 = \varphi(x, C_1, C_2)$ , то данная система (48) приведет к системе  $n-2$  уравнений с  $n-2$  неизвестными, ибо одна из функций  $y_2, \dots, y_n$  выразится через  $x, y_1, y_1'$  и остальные функции. К полученной системе можно применить те же преобразования, в результате чего она либо приведет к одному уравнению  $(n-2)$ -го порядка, либо выделится еще уравнение с одной неизвестной функцией.

В общем случае система (48) приведет к группе уравнений, каждое из которых имеет порядок  $s$ , где  $1 \leq s \leq n$ , причем сумма этих порядков всегда равна  $n$ . При интегрировании полученной группы уравнений мы можем иногда ввести больше, чем  $n$  произвольных постоянных. Тогда эти произвольные постоянные зависимы друг от друга и нужно найти их связь между собою, для чего достаточно подставить полученное семейство решений в уравнения заданной системы.

**Пример.** Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \quad (52)$$

Эта система (путем дифференцирования первого уравнения и использования второго) приводится к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Его общим решением будет (см. п. 175, пример 4)

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Поэтому

$$y = \frac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Общим решением системы (52) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned} \right\}$$

**113. Один общий способ интегрирования нормальной системы двух уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Коши — Римана [52].** Излагаемый ниже метод интегрирования в конечном виде одного класса систем дифференциальных уравнений основан на использовании функций комплексной переменной.\*

---

\* Все необходимые сведения из теории функций комплексной переменной читатель найдет в книгах [138, т. I, гл. VI, § 1, п. 163—169, 172; т. III, ч. 2, гл. I, § 1—7; 150, т. II, гл. XII, § 5].

Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где  $x$  и  $y$  — искомые вещественные функции от вещественной независимой переменной  $t$ . Предположим, что правые части этой системы имеют непрерывные частные производные и удовлетворяют *условиям Коши — Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Введем в рассмотрение комплексную переменную  $z$ , положив

$$z = x + iy,$$

и определим производную от  $z$  по  $t$  равенством \*.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}.$$

Тогда, умножая второе из уравнений системы (53) на  $i$  и складывая с первым, получаем

$$\frac{dz}{dt} = u(x, y) + iv(x, y) \equiv f(z)$$

или

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \quad (54)$$

где  $f(z)$  — регулярная функция от комплексной переменной  $z$ . Из уравнения (54) имеем

$$\frac{dz}{f(z)} = dt \quad (f(z) \neq 0),$$

откуда

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z)} = t + C, \quad (55)$$

---

\* Здесь  $z$  рассматривается как комплексная функция от вещественной переменной  $t$ . Подробнее о таких функциях см. п. 159.



где  $C = C_1 + iC_2$  — произвольное постоянное комплексное число,  $C_1$  и  $C_2$  — вещественные произвольные постоянные числа. При этом мы считаем, что путь интегрирования не проходит через точки, в которых  $f(z) = 0$ . На плоскости  $(x, y)$  этим исключительным точкам соответствуют точки равновесия (покоя) системы (53) (см. п. 140).

Отделяя в равенстве (55) вещественную и мнимую части, получим выражение для  $x$  и  $y$  как функций от  $t$  и произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ .

Заметим, что если  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  суть полиномы, то и  $f(z)$  будет полиномом. В этом случае интеграл в (55) выражается через элементарные функции.

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= mx + ny, \\ \frac{dy}{dt} &= -nx + my. \end{aligned} \right\}$$

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = m, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = n, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -n,$$

так что условия Коши — Римана выполнены. Следуя изложенному методу, получим

$$\frac{dz}{dt} = bz \quad (b = m - in),$$

откуда

$$z = Ce^{bt} \quad (C = C_1 + iC_2).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим общее решение рассматриваемой системы в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{mt} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt), \\ y &= e^{mt} (C_2 \cos nt - C_1 \sin nt). \end{aligned} \right\}$$

Изложенный метод интегрирования нормальной системы двух уравнений, удовлетворяющих условиям Коши — Римана, можно распространить на нормальную систему любого порядка [136].

Этот метод применяется как в самой теории дифференциальных уравнений, так и в ее приложениях [74, 171].

**114. Понятие о системе уравнений высших порядков.** Система уравнений высших порядков имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Предположим, что эта система разрешима относительно старших производных:

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \vdots \\ y_n^{(m_n)} &= f_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Система вида (56), т. е. система уравнений, разрешенная относительно старших производных, называется *канонической* системой.

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением только канонических систем.

Каноническая система вида (56) сводится к нормальной системе\* уравнений, если обозначить все производные, стоящие справа, через новые неизвестные функции (так же, как в случае одного уравнения  $n$ -го порядка). Получим  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  уравнений первого порядка.

Вообще говоря, система (56) приводится и к одному уравнению порядка  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  с одной неизвестной функцией.

Общее решение системы (56) содержит  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  произвольных постоянных.

Задача Коши для системы (56) формулируется так: среди всех решений системы (56) найти такое решение  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , которое вместе со своими производными до порядков соответственно  $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_n - 1$  принимает наперед заданные числовые значения при заданном значении  $x$ , так что при  $x = x_0$  мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_{10}, y_1' = y_{10}', \dots, y_1^{(m_1-1)} = y_{10}^{(m_1-1)}, \\ y_2 &= y_{20}, y_2' = y_{20}', \dots, y_2^{(m_2-1)} = y_{20}^{(m_2-1)}, \\ \vdots \\ y_n &= y_{n0}, y_n' = y_{n0}', \dots, y_n^{(m_n-1)} = y_{n0}^{(m_n-1)}, \end{aligned} \right\}$$

где правые части суть наперед заданные числа.

**Пример.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + k^2 y_2 &= 0, \\ y_2'' + k^2 y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Найти нормальную систему и одно уравнение четвертого порядка, равносильные этой системе.

---

\* Система общего вида также при некоторых ограничениях весьма общего характера приводится к нормальной системе уравнений [139, с. 19—38].

Положим  $y_3 = y_1'$ ,  $y_4 = y_2'$ . Получаем:

$$y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad y_3' = -k^2 y_2, \quad y_4' = -k^2 y_1.$$

Полученная нормальная система равносильна данной системе уравнений.

Дифференцируем первое уравнение системы (57) два раза. Тогда, принимая во внимание второе уравнение, получим уравнение четвертого порядка

$$y_1^{(4)} - k^4 y_1 = 0, \quad (58)$$

равносильное системе (57). Проинтегрировав уравнение (58), найдем  $y_2$  по формуле

$$y_2 = -\frac{1}{k^2} y_1''.$$

Система (57) проинтегрирована этим методом в п. 220.

**115. Построение всего множества нормальных систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную траекторию [60].** Пусть на фазовой плоскости  $(x, y)$  задана кривая

$$W(x, y) = 0 \quad (59)$$

и требуется найти все такие системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= P(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

для которых кривая (59) является траекторией. Задача состоит в том, чтобы по заданной функции  $W$  найти соответствующие функции  $P$  и  $Q$ , указав их общий вид. Подобные задачи часто возникают в приложениях [72].

Для решения поставленной задачи установим сначала одно соотношение, связывающее функцию  $W$  с функциями  $P$  и  $Q$ , которое должно всегда выполняться на траектории  $W=0$ .

Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (61)$$

есть некоторое движение, определяемое системой (60). Тогда имеем тождества

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\equiv Q(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &\equiv P(x(t), y(t)). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Уравнения (61) суть параметрические уравнения некоторой траектории, определяемой системой (60). Предположим, что, исключив параметр  $t$ , мы получим уравнение траектории в обычной форме и что последнее имеет вид (59), где функция  $W$  непрерывно дифференцируема.

Заменив в полученном уравнении (59) переменные  $x$  и  $y$  их значениями из (61), будем иметь тождество

$$W(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по  $t$ , получаем

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} \equiv 0,$$

откуда, в силу (62), будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x(t), y(t)) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, если  $W(x, y) = 0$  есть траектория, определяемая системой (60), то вдоль этой траектории должно выполняться равенство

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) = 0. \quad (63)$$

Если это равенство выполняется тождественно, то всякая кривая из семейства

$$W(x, y) = C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная, будет траекторией для системы дифференциальных уравнений (60).

Пусть, например, дана система (см. п. 3, пример 1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) \equiv Q, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2 - 1) \equiv P. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Возьмем

$$W = x^2 + y^2 - 1.$$

Проверим, будет ли кривая

$$W \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (65)$$

траекторией системы (64). Составим для системы (64) равенство (63). Получим

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Это равенство выполняется на кривой (65). Поэтому последняя является траекторией системы (64). Но кривая

$$x^2 + y^2 - 1 = C \quad (C \neq 0)$$

не является траекторией системы (64).

Переходя к решению поставленной задачи, докажем, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) = F(W; x, y), \quad (66)$$

где

$$F(0, \xi, \eta) = 0.$$

В самом деле, обозначим левую часть равенства (66) через  $\omega(x, y)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial W}{\partial y} P(x, y) \equiv \omega(x, y).$$

Найдя затем  $y$  из уравнения  $W(x, y) = W$ :

$$y = \varphi(W, x)$$

и подставив это значение  $y$  в функцию  $\omega(x, y)$ , мы получим

$$\omega(x, y) = \omega(x, \varphi(W, x)).$$

Аналогично, разрешая уравнение  $W(x, y) = W$  относительно  $x$ , мы можем представить функцию  $\omega(x, y)$  в виде

$$\omega(x, y) = \omega(\psi(W, y), y),$$

так что мы можем написать

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} (\omega(x, \varphi(W, x)) + \omega(\psi(W, y), y)) \equiv F(W, x, y),$$

что и доказывает справедливость равенства (66).

Считая  $F(W, x, y)$  заданной функцией, мы можем рассматривать равенство (66) как одно уравнение с двумя неизвестными  $P$  и  $Q$ .

Возьмем функцию  $Q$  в виде

$$Q(x, y) = F_1(W, x, y) - \frac{\partial W}{\partial y} M(x, y),$$

где

$$F_1(0, \xi, \eta) = 0,$$





**Пример 1.** Система

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

есть система  $n-1$  дифференциальных уравнений в симметрической форме.

**Пример 2.** Привести нормальную систему двух уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x}$$

к симметрической форме.

Следуя указанному выше способу, имеем

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{z}{x}} = \frac{dz}{\frac{y}{x}}.$$

Умножив все знаменатели на  $x$ , получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}. \quad (5)$$

Это и есть искомая система. Если ввести симметричные обозначения

$$x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3,$$

то система (5) переписывается в виде

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_3} = \frac{dx_3}{x_2}.$$

**117. Интегралы, первые интегралы и общий интеграл системы дифференциальных уравнений в симметрической форме.** Рассмотрим систему (1)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned}$$

Предположим, что функции  $X_1, X_2, \dots, X_n$  определены и непрерывны вместе с первыми частными производными по  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в некоторой области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем ни в одной точке этой области они не обращаются одновременно в нуль. Пусть  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  — некоторая точка указанной области. Не умаляя общности, будем считать, что

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0.$$



\* Здесь и ниже речь идет об интегралах, определенных в некоторой окрестности точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

мых интегралов автономной системы, не зависящих явно от аргумента. Рассмотрим автономную систему вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где роль независимой переменной играет время  $t$ . Покажем, что *эта система может допускать не более чем  $n-1$  независимых интегралов, не содержащих явно время  $t$ .*

С этой целью перепишем систему (8) в симметрической форме:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Интегралы системы (8), не содержащие явно  $t$ , будут, очевидно, интегралами системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Но последняя имеет не более чем  $n-1$  независимых интегралов, поэтому автономная система (8) может допускать не более чем  $n-1$  интегралов, не содержащих явно независимую переменную, в нашем случае — время  $t$ .

Так, в примере 3 п. 109 мы нашли для автономной системы трех уравнений два независимых интеграла:  $\psi_1 = y_1 + y_2 + y_3$  и  $\psi_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ , не содержащих явно независимую переменную  $x$ . Интеграл  $\psi = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$ , согласно только что доказанному, необходимо должен был оказаться зависимым с интегралами  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Третий независимый интеграл  $\psi_3$  должен содержать независимую переменную  $x$ . Именно в таком виде он нами и найден.

Мы видели, что *общее решение системы (1) может быть найдено, если свести ее к нормальной системе  $n-1$  уравнений (6)*. Покажем еще, что *общее решение системы (1) может быть найдено путем рассмотрения некоторой нормальной системы  $n$  уравнений*.

С этой целью введем переменную  $t$ , приравняв в системе (1) равные отношения дифференциалу  $t$ :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.*$$

\* Иногда вместо  $dt$  берут  $\varphi(t)dt$ .

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Предположим, что для этой системы мы нашли  $n-1$  независимых первых интегралов, не содержащих явно  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_2, \\ &\vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Разрешая (10), например, относительно  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{\varphi}_1(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ x_2 &= \bar{\varphi}_2(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \bar{\varphi}_{n-1}(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставим эти значения  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  в последнее из уравнений системы (9). Тогда

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Это уравнение легко интегрируется. Имеем

$$\int \frac{dx_n}{f(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = t + C_n.$$

Отсюда

$$x_n = \varphi_n(t + C_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}). \quad (12)$$



или (умножая все знаменатели на  $z-y$ )

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (15)$$

Складывая числители и знаменатели, получим

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Отсюда  $dx+dy+dz=0$  или  $d(x+y+z)=0$ . Следовательно, семейство плоскостей

$$\psi_1 \equiv x+y+z=C_1 \quad (16)$$

есть первый интеграл системы (14).

Для получения другого первого интеграла умножим числители и знаменатели дробей (15) соответственно на  $2x$ ,  $2y$ ,  $2z$  и сложим числители и знаменатели полученных дробей:

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Отсюда видим, что семейство сфер

$$\psi_2 \equiv x^2+y^2+z^2=C_2^2 \quad (17)$$

представляет собою первый интеграл системы (14). Первые интегралы (16) и (17), очевидно, независимы, так что совокупность их дает общий интеграл системы (14).

**Пример 2.** Проинтегрировать систему

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}. \quad (18)$$

Из

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

имеем первый интеграл

$$\psi_1 \equiv z-2y=C_1.$$

Воспользуемся свойством ряда равных отношений. Вычитая в системе (18) из числителя и знаменателя последней дроби числители и знаменатели первых двух дробей, имеем

$$\frac{d(z-x-y)}{-\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1}.$$

Эта интегрируемая комбинация дает другой первый интеграл

$$\psi_2 \equiv 2\sqrt{z-y-x}+y=C_2.$$

Построение общего интеграла системы (18) закончено.

**Пример 3.** Проинтегрировать систему

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}. \quad (19)$$

Запишем эту систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y-x}},$$

отсюда

$$\frac{dx}{1} = \frac{z dy}{z-1} = \frac{(y-x) dz}{1}.$$

Составим пропорцию

$$\frac{z(dy-dx)}{-1} = \frac{(y-x)dz}{1}.$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{dy-dx}{-(y-x)} = \frac{dz}{z} \quad \text{или} \quad \frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Интегрируя, найдем первый интеграл

$$(y-x)z = C_1. \quad (20)$$

Найдя отсюда  $z$  и подставив в первое уравнение системы (19), будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y-x}{C_1}$$

или

$$dy = dx - \frac{y-x}{C_1} dx, \quad \frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dx}{C_1} = 0,$$

откуда

$$(y-x)e^{\frac{x}{C_1}} = C_2.$$

Заменив здесь  $C_1$  ее значением из (20), найдем другой первый интеграл

$$(y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}} = C_2.$$

**Пример 4.** Найти два независимых интеграла системы

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}. \quad (21)$$

Имеем:  $dy=0$ ,  $y=C_1$ . Следовательно,

$$\psi_1=y$$

есть интеграл системы (21).

Заменяем в равенстве  $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{y}$  величину  $y$  на  $C_1$ :

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{C_1}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$z = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}.$$

Отсюда, разрешая относительно  $C_2$  и заменяя  $C_1$  на  $y$ , получаем

$$ze^{-\frac{x}{y}} = C_2.$$

Следовательно,

$$\psi_2 = ze^{-\frac{x}{y}}$$

есть интеграл системы (21).

Интегралы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , очевидно, независимы.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

#### § 22. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА ПИКАРА)

**118. Предварительные замечания.** В предыдущих главах мы изложили основные понятия и определения, относящиеся к уравнению первого порядка, нормальной системе уравнений первого порядка, уравнению  $n$ -го порядка и системе уравнений высших порядков. Мы указали там, что основной задачей интегрирования как одного дифференциального уравнения, так и системы уравнений, является нахождение всех решений и изучение их свойств.

Если удастся выразить все решения в элементарных функциях, то исследование свойств решений не представляет большого труда. Однако такие случаи представляют собою редкое исключение.

Гораздо большее число уравнений удастся проинтегрировать в квадратурах. Но и эти уравнения встречаются довольно редко. Наиболее известные типы таких уравнений мы рассмотрели в предыдущих главах.

В общем случае дифференциальное уравнение не интегрируется в квадратурах. Тогда применяют приближенные методы интегрирования. При этом обычно ищут решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям, например, решают задачу Коши (начальную задачу) или краевую (граничную) задачу.

Предположим, что решается *задача Коши*, т. е. ищется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. В этом случае приближенные способы могут дать реальное представление об искомом решении дифференциального уравнения только тогда, когда нам заранее известно, что решение с заданными начальными условиями существует, единственно и определено в интересующем нас интервале изменения независимой переменной.

Мы изложим доказательство трех основных теорем существования и решения задачи Коши: теоремы Пикара, теоремы Коши и теоремы Пяно, соответствующих основным условиям, которым обычно подчинены дифференциальные уравнения. Две из них (теоремы Пикара и Коши) устанавливают не только существование, но и единственность решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Эти теоремы существования и единственности имеют принципиальное значение для всего естествознания, ибо они устанавливают условия, гарантирующие возможность нахождения вполне определенного закона того или иного явления по



дифференциальным свойствам его и по начальным данным. Это особенно важно потому, что для многих явлений природы соответствующие им законы выражаются только при помощи дифференциальных уравнений.

Приближенные методы, поскольку они дают лишь решение конкретной задачи Коши, т. е. решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, не позволяют полностью характеризовать даже это решение и совершенно ничего не могут сказать ни о свойствах решений с другими начальными условиями, ни о наличии решений с теми или иными наперед заданными интересующими нас особенностями их поведения.

В связи с этим возникает потребность в построении общей теории дифференциальных уравнений, методы которой давали бы возможность судить о свойствах всех решений любого дифференциального уравнения только по его аналитической структуре и позволяли бы дать ответ на вопрос о существовании решения с заданными свойствами. Устанавливая условия, гарантирующие наличие решения, обладающего интересующими нас свойствами, общая теория дает также и методы приближенного, а иногда и точного построения этого решения.

*Основная задача общей теории дифференциальных уравнений* состоит в том, чтобы установить связь между свойствами решений уравнения и свойствами самого уравнения, а именно выяснить, какими свойствами обладают решения того или иного дифференциального уравнения и каким условиям следует подчинить правую часть уравнения, чтобы оно допускало решение, обладающее теми или иными наперед заданными свойствами.

Основой этой общей теории являются вышеуказанные теоремы существования.

Заметим, что так как уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной, и канонические системы уравнений высшего порядка всегда могут быть приведены к нормальной системе уравнений (см. пп. 112 и 114), то доказательство теорем существования достаточно проводить лишь для нормальных систем. Так мы и будем поступать в настоящей главе.

**119. Формулировка теоремы Пикара для нормальной системы  $n$  уравнений.** Пусть дана система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

и пусть поставлена задача Коши: найти решение системы (1'), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при } x = x_0, \quad (2')$$

где  $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  — некоторые заданные числа, т. е. требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку  $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ .

Предположим, что правые части системы (1') определены в некоторой замкнутой области

$$R: |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^{(0)}| \leq b \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

с точкой  $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  внутри ( $a$  и  $b$  — заданные положительные числа).

Установим условия, обеспечивающие существование и единственность (непрерывно дифференцируемого) решения поставленной задачи Коши.

**Теорема Пикара.** Пусть правые части системы (1') удовлетворяют в области  $R$  следующим двум условиям:

1) функции  $f_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) непрерывны по всем своим аргументам и, следовательно (в силу замкнутости и ограниченности  $R$ ), ограничены, т. е.

$$|f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $M$  — положительное число, а  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  — любая точка области  $R$ ;

2) функции  $f_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , т. е.

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)| \leq L \sum_{i=1}^n |\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|,$$

где  $L$  — положительное число (константа Липшица), а  $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$  и  $(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)$  — любые две точки области  $R$ .

Тогда система (1') имеет единственное решение

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (3')$$

удовлетворяющее начальным условиям (2'). Это решение заведомо определено и непрерывно дифференцируемо в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right),$$

и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R$ , т. е.

$$|y_k(x) - y_k^{(0)}| \leq b \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4')$$

**З а м е ч а н и е.** Условие Липшица представляет собою оценку роста правых частей системы (1') по аргументам  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , причем эта оценка равномерна относительно  $x$  в интервале  $|x - x_0| \leq a$ .

Условие Липшица будет, в частности, выполнено, если все функции  $f_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) имеют ограниченные в области  $R$  частные производные по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , т. е.

$$\left| \frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_l} \right| \leq K \quad (k, l=1, 2, \dots, n),$$

где  $K$  — некоторое положительное число, а  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  — любая точка области  $R$ .

Действительно, в этом случае, используя последовательно формулу конечных приращений (формулу Лагранжа), мы имеем:

$$\begin{aligned} & f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) = \\ & = (f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)) + \\ & + (f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)) + \dots + \\ & + (f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n) - f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n)) = \\ & = \frac{\partial f_k(x, \bar{y}_1 + \theta_{1k}(\bar{y}_1 - \bar{y}_1), \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)}{\partial y_1} (\bar{y}_1 - \bar{y}_1) + \\ & + \frac{\partial f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2 + \theta_{2k}(\bar{y}_2 - \bar{y}_2), \dots, \bar{y}_n)}{\partial y_2} (\bar{y}_2 - \bar{y}_2) + \dots + \\ & + \frac{\partial f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n + \theta_{nk}(\bar{y}_n - \bar{y}_n))}{\partial y_n} (\bar{y}_n - \bar{y}_n) \\ & (0 < \theta_{lk} < 1; \quad k, l=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

откуда и вытекает условие Липшица, причем  $L=K$ .

При  $n=1$ , т. е. в случае одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

условие Липшица (для правой части) относительно  $y$  имеет вид

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leq L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|.$$

Оно заведомо выполнено, если в области задания уравнения частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  существует и ограничена:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K.$$

Условие Липшица не предполагает существования соответствующих частных производных, вследствие этого оно является более общим. Например, для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = |y| \quad (f(x, y) \equiv |y|)$$

частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в точках оси  $Ox$  ( $y=0$ ) не существует. Однако (по свойству абсолютной величины разности) имеем

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| = |\bar{y} - \bar{\bar{y}}| \leq |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|,$$

так что условие Липшица выполнено на всей плоскости  $(x, y)$ , причем  $L=1$ .\*

Заменяя условие Липшица (более сильным) требованием существования и ограниченности соответствующих частных производных, мы получаем упрощенные формулировки теоремы Пикара для нормальной системы  $n$  уравнений (п. 105) и для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной (п. 7).

**120. Доказательство теоремы Пикара для нормальной системы двух уравнений.** С целью упрощения записи мы будем доказывать сформулированную выше теорему Пикара для случая  $n=2$ . При этом ход доказательства для случая  $n$  уравнений становится очевидным.

Итак, будем рассматривать систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$y=y_0, \quad z=z_0 \quad \text{при} \quad x=x_0. \quad (2)$$

Предположим, что в области

$$R: \quad |x-x_0| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b, \quad |z-z_0| \leq b,$$

\* Подробнее относительно условия Липшица см. [102, с. 134—137].

где  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  — заданные положительные числа, правые части системы (1) удовлетворяют двум условиям:

1)  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  непрерывны и, следовательно, ограничены:

$$|f_1(x, y, z)| \leq M, \quad |f_2(x, y, z)| \leq M;$$

2)  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $y$  и  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} |f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, \bar{y}, \bar{z})| &\leq L(|\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{z} - \bar{z}|), \\ |f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, \bar{y}, \bar{z})| &\leq L(|\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{z} - \bar{z}|), \end{aligned} \right\}$$

где  $L$  — постоянное положительное число, а  $(x, \bar{y}, \bar{z})$  и  $(x, \bar{y}, \bar{z})$  — любые две точки области  $R$ .

Докажем, что при сделанных предположениях система (1) имеет единственное решение

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям (2), и что это решение заведомо определено и непрерывно дифференцируемо в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right),$$

и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R$ , т. е.

$$|y(x) - y_0| \leq b, \quad |z(x) - z_0| \leq b \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h. \quad (4)$$

С этой целью заменим систему (1) с начальными условиями (2) равносильной системой интегральных уравнений.

Предположим, что искомое решение (3) найдено. Тогда, подставляя его в систему (1), мы получим тождества:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(y(x))}{dx} &\equiv f_1(x, y(x), z(x)), \\ \frac{d(z(x))}{dx} &\equiv f_2(x, y(x), z(x)) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

при  $|x - x_0| < h$ . Интегрируя их по  $x$  в пределах от  $x_0$  до  $x$  и принимая

во внимание начальные условия (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} y(x) - y_0 &\equiv \int_{x_0}^x f_1(x, y(x), z(x)) dx, \\ z(x) - z_0 &\equiv \int_{x_0}^x f_2(x, y(x), z(x)) dx \end{aligned} \right\}$$

при  $|x - x_0| \leq h$ . Переносим в этих тождествах числа  $y_0$  и  $z_0$  вправо, заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} y(x) &\equiv y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y(x), z(x)) dx, \\ z(x) &\equiv z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y(x), z(x)) dx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

при  $|x - x_0| \leq h$ . Рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y, z) dx, \\ z &= z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y, z) dx, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $y$  и  $z$  суть неизвестные функции от  $x$ . Такая система уравнений называется *системой интегральных уравнений*. *Решением* системы интегральных уравнений (7) называется совокупность функций  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , определенных в некотором интервале и обращающих (в этом интервале) уравнения системы (7) в тождества.

Из тождеств (6) мы видим, что функции (3) образуют решение системы (7).

Итак, решение (3) системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) является решением системы интегральных уравнений (7).

Обратно, решение  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  системы интегральных уравнений (7), определенное и непрерывное в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и не выходящее при этих значениях  $x$  из области  $R$ , будет искомым решением системы (1).

Действительно, подставляя это решение в систему (7), получим тождества (6). Подынтегральные функции  $f_1(x, y(x), z(x))$  и  $f_2(x, y(x),$

$z(x)$ ), рассматриваемые как сложные функции от  $x$ , будут непрерывными функциями от  $x$  в интервале  $|x-x_0| \leq h$ , ибо функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  непрерывны относительно всех своих аргументов в области  $R$ , а функции  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$ , согласно предположению, определены и непрерывны в интервале  $|x-x_0| \leq h$  и не выходят при этих значениях  $x$  из области  $R$ . Поэтому из (6) следует, что функции  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  непрерывно дифференцируемы в интервале  $|x-x_0| \leq h$ , так как определенный интеграл с переменным верхним пределом  $x$  от непрерывной функции от  $x$  является непрерывно дифференцируемой функцией верхнего предела. Дифференцируя тождества (6), мы получим тождества (5), так что рассматриваемое решение системы интегральных уравнений (7) является решением системы (1), определенным и непрерывно дифференцируемым в интервале  $|x-x_0| \leq h$ . Начальные условия (2), как следует из уравнений (7), выполняются автоматически.

Из приведенных рассуждений следует, что для доказательства теоремы Пикара нам достаточно установить существование и единственность решения системы интегральных уравнений (7), определенного и непрерывного в интервале  $|x-x_0| \leq h$  и не выходящего при этих значениях  $x$  из области  $R$ .

Докажем сначала существование решения системы интегральных уравнений (7). Применим для этого *метод последовательных приближений Пикара*.

За исходное (нулевое) приближение,  $y_0(x)$ ,  $z_0(x)$ , примем функции, равные тождественно соответствующим начальным значениям искомых функций:  $y_0(x) \equiv y_0$ ,  $z_0(x) \equiv z_0$ .

Заменим в подынтегральных функциях системы (7) переменные  $y$  и  $z$  нулевым приближением. Полученные функции возьмем в качестве *первого приближения*:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_0, z_0) dx, \\ z_1(x) &= z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y_0, z_0) dx. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

За *второе приближение* возьмем:

$$\left. \begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, z_1) dx, \\ z_2(x) &= z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, z_1) dx. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вообще в качестве  $n$ -го приближения возьмем функции, определяемые соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}) dx, \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1}) dx. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, мы построим две последовательности функций:

$$\left. \begin{aligned} y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots, \\ z_0, z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x), \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Дальнейшее доказательство существования решения разобьем на три части.

1. Докажем, что все функции последовательности (11) определены и непрерывны в промежутке  $|x - x_0| \leq h$  и не выходят из области  $R$ , т. е. для всех значений  $n$  имеют место неравенства

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad |z_n(x) - z_0| \leq b \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h. \quad (12)$$

Для этого применим метод математической индукции. Рассмотрим сначала функции  $y_1(x)$  и  $z_1(x)$ . Формулы (8) показывают, что эти функции определены и непрерывны во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$ , ибо функции  $f_1(x, y_0, z_0)$  и  $f_2(x, y_0, z_0)$  непрерывны в этом интервале, а определенный интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции представляет собою, как известно, непрерывную функцию своего верхнего предела в том же интервале.

Оценим теперь разности  $y_1(x) - y_0$ ,  $z_1(x) - z_0$ . Имеем: \*

$$\left. \begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f_1(x, y_0, z_0) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x_1, y_0, z_0)| dx \right| \leq \\ &\leq M |x - x_0|, \\ |z_1(x) - z_0| &\leq M |x - x_0|. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отсюда видно, что функции  $y_1(x)$  и  $z_1(x)$  не выйдут из области  $R$ , т. е.

---

\* Здесь мы используем известную формулу

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



будут выполняться неравенства

$$|y_1(x) - y_0| \leq b, \quad |z_1(x) - z_0| \leq b,$$

если потребовать, чтобы  $M|x - x_0| \leq b$ , т. е.  $|x - x_0| \leq \frac{b}{M}$ . Поэтому, если

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right),$$

то при  $|x - x_0| \leq h$  функции  $y_1(x)$  и  $z_1(x)$  будут определены, непрерывны и не выйдут из области  $R$ .

Итак, наше утверждение справедливо для функций  $y_1(x)$  и  $z_1(x)$ .

Предположим теперь, что оно справедливо для функций  $y_{n-1}(x)$  и  $z_{n-1}(x)$ , и докажем, что оно тогда верно и для функций  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$ .

Для этого обратимся к формулам (10). Прежде всего из этих формул мы видим, что функции  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  определены и непрерывны в интервале  $|x - x_0| \leq h$ . Действительно, так как функции  $y_{n-1}(x)$  и  $z_{n-1}(x)$  определены и непрерывны в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и не выходят при этих значениях  $x$  из области  $R$ , то функции  $f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})$  и  $f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1})$ , рассматриваемые как сложные функции от  $x$ , тоже непрерывны в интервале  $|x - x_0| \leq h$ , а тогда из формул (10) следует, что функции  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  будут определены и непрерывны в этом же интервале.

Далее мы имеем оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})| dx \right| \leq M|x - x_0| \leq b, \\ |z_n(x) - z_0| &\leq b \end{aligned} \right\}$$

при  $|x - x_0| \leq h$ , т. е.  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  не выходят из области  $R$  при  $|x - x_0| \leq h$ .

Из приведенных рассуждений и вытекает, что все функции последовательностей (11) определены и непрерывны в промежутке  $|x - x_0| \leq h$  и не выходят при этих значениях  $x$  из области  $R$ .

2. Докажем теперь, что *последовательности (11) равномерно сходятся в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и, следовательно, предельные функции непрерывны в этом интервале.*

Для этого заметим, что сходимость последовательностей (11) равносильна сходимости рядов:

$$\left. \begin{aligned} y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots, \\ z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \dots + (z_n - z_{n-1}) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

так как частными суммами этих рядов являются как раз  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$ .

Оценим члены рядов (14). Мы уже имели оценки (см. формулы (13)):

$$\left. \begin{aligned} |y_1 - y_0| &\leq M|x - x_0|, \\ |z_1 - z_0| &\leq M|x - x_0|. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Оценим разности  $y_2 - y_1$  и  $z_2 - z_1$ . Из равенств (8) и (9) находим, что

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, z_1) dx - \int_{x_0}^x f_1(x, y_0, z_0) dx = \\ &= \int_{x_0}^x (f_1(x, y_1, z_1) - f_1(x, y_0, z_0)) dx, \end{aligned}$$

отсюда

$$|y_2 - y_1| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_1, z_1) - f_1(x, y_0, z_0)| dx \right|.$$

Используя условие Липшица и принимая во внимание оценки (15) для разностей  $y_1 - y_0$  и  $z_1 - z_0$ , получаем:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &\leq L \left| \int_{x_0}^x (|y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|) dx \right| \leq \\ &\leq 2LM \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = 2LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Аналогично для разности  $z_2 - z_1$  получаем такую же оценку:

$$|z_2 - z_1| \leq 2LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Предположим теперь, что справедливы оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y_{n-1}| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \\ |z_n - z_{n-1}| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Покажем, что тогда имеют место оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_{n+1}-y_n| &\leq M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_{n+1}-z_n| &\leq M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \right\}$$

Действительно,

$$y_{n+1}-y_n = \int_{x_0}^x (f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})) dx,$$

отсюда

$$\begin{aligned} |y_{n+1}-y_n| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})| dx \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x (|y_n - y_{n-1}| + |z_n - z_{n-1}|) dx \right| \leq \\ &\leq 2L \left| \int_{x_0}^x M(2L)^{n-1} \frac{|x-x_0|^n}{n!} dx \right| = M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$|z_{n+1}-z_n| \leq M(2L)^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но мы уже убедились выше, что оценки (16) справедливы для  $n=1$  и  $n=2$ . Следовательно, они верны для всех  $n$ .

Из оценок (16) следует, что для интересующих нас значений  $x$ , т. е. для значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x-x_0| \leq h$ , мы имеем следующие оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y_{n-1}| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \\ |z_n - z_{n-1}| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

при  $|x-x_0| \leq h$ .

В силу первой из оценок (17) члены первого из рядов (14) для всех значений  $x$  из интервала  $|x-x_0| \leq h$  не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов следующего сходящегося ряда с положительными членами:

$$\begin{aligned}
& |y_0| + Mh + M2L \frac{h^2}{2!} + M(2L)^2 \frac{h^3}{3!} + \dots + M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!} + \dots = \\
& = |y_0| + \frac{M}{2L} \left( 2Lh + \frac{(2Lh)^2}{2!} + \frac{(2Lh)^3}{3!} + \dots + \frac{(2Lh)^n}{n!} + \dots \right) = \\
& = |y_0| + \frac{M}{2L} (e^{2Lh} - 1).
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно признаку Вейерштрасса [148, т. II, с. 74], первый из рядов (14) сходится и притом равномерно в промежутке  $|x - x_0| \leq h$ .

Аналогично доказывается равномерная сходимость (в том же интервале) второго из рядов (14).

Обозначим суммы рядов (14) или, что то же, предельные функции и последовательности (11) через  $y(x)$  и  $z(x)$ . Так как все члены рядов (14) непрерывны в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и эти ряды сходятся равномерно в интервале  $|x - x_0| \leq h$ , то по теореме о непрерывности суммы ряда [149, т. II, с. 76, теорема 1] функции  $y(x)$  и  $z(x)$  также непрерывны в этом интервале.

Таким образом, последовательности (11) равномерно сходятся в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и предельные функции  $y(x)$  и  $z(x)$  непрерывны в этом интервале.

3. Докажем, наконец, что предельные функции  $y(x)$  и  $z(x)$  не выходят из области  $R$  при  $|x - x_0| \leq h$ , т. е. имеет место (4), и удовлетворяют системе интегральных уравнений (7).

В самом деле, переходя к пределу в неравенствах (12), мы получим неравенства (4).

Покажем теперь, что предельные функции  $y(x)$  и  $z(x)$  удовлетворяют системе (7). Для этого заметим сперва, что

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_1(x, y_n, z_n) dx &= \int_{x_0}^x f_1(x, y, z) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_2(x, y_n, z_n) dx &= \int_{x_0}^x f_2(x, y, z) dx \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

при  $|x - x_0| \leq h$ . Действительно,

$$\left| \int_{x_0}^x f_1(x, y_n, z_n) dx - \int_{x_0}^x f_1(x, y, z) dx \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y, z)| dx \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x (|y_n - y| + |z_n - z|) dx \right|. \end{aligned}$$

Так как  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  сходятся равномерно к  $y(x)$  и  $z(x)$  в  $|x - x_0| \leq h$ , то по любому наперед заданному положительному числу  $\varepsilon$  найдется номер  $N_\varepsilon$  такой, что при  $n \geq N_\varepsilon$  выполняются неравенства  $|y_n - y| < \varepsilon$ ,  $|z_n - z| < \varepsilon$  для всех  $x$  из интервала  $|x - x_0| \leq h$  одновременно. Поэтому, продолжая предыдущую оценку, получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^x f_1(x, y_n, z_n) dx - \int_{x_0}^x f_1(x, y, z) dx \right| \leq \\ &\leq 2L\varepsilon |x - x_0| \leq 2L\varepsilon h \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценку

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_0}^x f_2(x, y_n, z_n) dx - \int_{x_0}^x f_2(x, y, z) dx \right| \leq \\ &\leq 2L\varepsilon |x - x_0| \leq 2L\varepsilon h \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из этих двух оценок и следуют соотношения (18).

Теперь, переходя в тождествах (10) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , мы получим тождества (6), следовательно, найденные нами функции  $y(x)$  и  $z(x)$  образуют решение системы интегральных уравнений (7). Это решение определено и непрерывно в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R$ , а тогда, как показано выше, функции  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  представляют собою решение системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2), определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале  $|x - x_0| \leq h$ .

Таким образом, существование решения (3) доказано.

Докажем теперь, что *это решение единственное*.\* Допустим, что существует другое решение:  $y = y^*(x)$ ,  $z = z^*(x)$ , удовлетворяющее тем же

---

\* Мы доказываем единственность методом Гурса [39, с. 322, 323]. Другое доказательство единственности см. в книге [140, с. 147—149]. Можно также воспользоваться известной леммой Гронуолла [103, с. 305, 306].

начальным условиям, определенное и непрерывное в некотором интервале  $|x-x_0| \leq h'$ , где  $0 < h' \leq h$ , и не выходящее при этих значениях  $x$  из области  $R$ . Тогда мы имеем тождества:

$$\left. \begin{aligned} y^* &\equiv y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x, y^*, z^*) dx, \\ z^* &\equiv z_0 + \int_{x_0}^x f_2(x, y^*, z^*) dx \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

при  $|x-x_0| \leq h'$ .

Оценим разности  $y_n - y^*$ ,  $z_n - z^*$ . Используя формулы (10) и (19), а также условие Липшица, получаем:

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y^*| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}) - f_1(x, y^*, z^*)| dx \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x (|y_{n-1} - y^*| + |z_{n-1} - z^*|) dx \right|, \\ |z_n - z^*| &\leq L \left| \int_{x_0}^x (|y_{n-1} - y^*| + |z_{n-1} - z^*|) dx \right|. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Полученные оценки имеют рекуррентный характер. Чтобы найти из них интересующие нас оценки разностей  $y_n - y^*$ ,  $z_n - z^*$ , оценим сначала разности  $y_0(x) - y^*$ ,  $z_0(x) - z^*$ . Пользуясь (19), имеем:

$$\left. \begin{aligned} |y_0(x) - y^*| &= |y_0 - y^*| \leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y^*, z^*)| dx \right| \leq \\ &\leq M |x - x_0|, \\ |z_0(x) - z^*| &\leq M |x - x_0|. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Полагая теперь в формулах (20)  $n=1$  и принимая во внимание (21), получаем оценки разностей  $y_1 - y^*$ ,  $z_1 - z^*$ :

$$\left. \begin{aligned} |y_1 - y^*| &\leq L \cdot 2M \frac{|x - x_0|^2}{2}, \\ |z_1 - z^*| &\leq L \cdot 2M \frac{|x - x_0|^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Полагая в (20)  $n=2$  и используя оценки (22), найдем:

$$\left. \begin{aligned} |y_2 - y^*| &\leq L \cdot 2 \cdot L \cdot 2M \frac{|x - x_0|^3}{3!} = M(2L)^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}, \\ |z_2 - z^*| &\leq M(2L)^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}. \end{aligned} \right\}$$

Продолжая эти рассуждения, получим искомые оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y^*| &\leq M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z^*| &\leq M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Правые части неравенств (23) стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  как общий член сходящегося ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{M}{2L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= \frac{M}{2L} (e^{2L|x - x_0|} - 1), \end{aligned}$$

поэтому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h'.$$

Но мы уже доказали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leq h.$$

Поэтому  $y^*(x) \equiv y(x)$ ,  $z^*(x) \equiv z(x)$  при  $|x - x_0| \leq h'$ , т. е. решение  $y = y^*(x)$ ,  $z = z^*(x)$  совпадает (на интервале  $|x - x_0| < h'$ ) с решением  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , построенным в теореме Пикара, что и доказывает единственность последнего.\*

Доказанная теорема Пикара имеет простой геометрический и механический смысл.

С геометрической точки зрения она, как уже отмечено выше, устанавливает достаточные условия для того, чтобы через задан-

---

\* Изложенное доказательство теоремы существования и единственности можно значительно сократить, если воспользоваться принципом сжатых отображений [9, с. 185—190; 119, с. 61—66, 123—131; 161, с. 48—53].

ную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  проходила одна и только одна гладкая интегральная кривая системы (1).

С механической точки зрения эта теорема дает достаточные условия, при выполнении которых система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= P(t, x, y), \end{aligned} \right\}$$

где  $t$  — время, а  $x$  и  $y$  — координаты точки на плоскости  $(x, y)$ , определяет единственное «гладкое» движение

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Отметим в заключение, что изложенный метод доказательства теоремы Пикара (метод последовательных приближений) не только дает возможность установить самый факт существования решения, но и позволяет строить приближенное решение, а именно приближения к решению дают функции  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$ .

При этом погрешность от замены точного решения  $y(x)$ ,  $z(x)$  приближенным решением  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$  оценивается формулами

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y| &\leq M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z| &\leq M(2L)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \right\}$$

Действительно, рассуждая так же, как и в доказательстве единственности решения, мы получим, что

$$\left. \begin{aligned} |y_n - y| &\leq M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \\ |z_n - z| &\leq M(2L)^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned} \right\}$$

откуда и следует указанная выше оценка погрешности.



Изложенный метод доказательства теоремы Пикара дает также возможность получить оценку решения (3). В самом деле, так как  $y(x)$  и  $z(x)$  суть суммы рядов (14):

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}), \\ z(x) &= z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_{n-1}) \end{aligned} \right\}$$

при  $|x - x_0| \leq h$ , то, принимая во внимание, что эти ряды абсолютно сходятся, и используя оценки (16), получим:

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - y_{n-1}| \leq |y_0| + M \sum_{n=1}^{\infty} (2L)^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!} = \\ &= |y_0| + \frac{M}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2L|x - x_0|)^n}{n!} = |y_0| + \frac{M}{2L} (e^{2L|x - x_0|} - 1), \\ |z(x)| &\leq |z_0| + \frac{M}{2L} (e^{2L|x - x_0|} - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, для решения (3) получаем оценки

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |y_0| + \frac{M}{2L} (e^{2L|x - x_0|} - 1), \\ |z(x)| &\leq |z_0| + \frac{M}{2L} (e^{2L|x - x_0|} - 1) \end{aligned}$$

при  $|x - x_0| \leq h$ .

При доказательстве теоремы Пикара мы использовали условие Липшица. Существование непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши, как уже отмечалось в п. 104, гарантируется теоремой Пеано и без выполнения условия Липшица, при единственном предположении о непрерывности правых частей системы дифференциальных уравнений в окрестности начальных данных. Однако теорема Пеано не гарантирует единственности решения.\* Тем не менее в общей теории дифференциальных уравнений теорема Пеано играет важную роль. Чтобы не отвлекать внимание читателя от рассуждений, связанных непосредственно с теоремой Пикара, мы изложим доказательство теоремы Пеано несколько далее (см. § 27).

---

\* Единственность решения можно доказать и при более слабом условии, чем условие Липшица. См., например, теорему Осгуда в книге [119, с. 49—52, 119—122].

**121. Замечание о выборе нулевого приближения.** В качестве нулевого приближения мы не обязательно должны брать начальные значения искомых функций. Можно взять любые непрерывные функции, не выходящие из области  $R$  при  $|x - x_0| \leq h$ . При этом сами последовательные приближения изменятся, но предельные функции останутся теми же вследствие единственности решения. Здесь сказывается замечательное свойство изложенного метода последовательных приближений: *результат не зависит от выбора исходного приближения*. Последнее не обязано удовлетворять ни дифференциальному уравнению, ни начальным условиям, ибо отклонение от искомого решения в нулевом приближении исправляется последующими приближениями.

В следующих пунктах мы распространяем теорему Пикара на случай других областей задания правых частей системы (1), рассматриваем вопрос о продолжении решения, выясняем особенности теоремы Пикара для линейной системы, а также рассматриваем вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка.

**122. Случай одностороннего интервала изменения независимой переменной.**

*Теорема.* Предположим, что в области вида

$$R: \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a,^* \quad |y - y_0| \leq b, \quad |z - z_0| \leq b$$

правые части системы (1) удовлетворяют условиям теоремы Пикара п. 120. Тогда система (1) имеет единственное решение (3), удовлетворяющее начальным условиям (2), определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале

$$x_0 \leq x \leq x_0 + h^{**} \quad \left( h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right) \right).$$

Для доказательства нужно повторить все рассуждения п. 120, заменяя всюду двусторонний интервал изменения независимой переменной,  $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ , односторонним интервалом  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ .

В двух следующих пунктах мы формулируем замечания для двустороннего интервала, однако все остается справедливым и для случая одностороннего интервала.

**123. Случай области, не ограниченной по искомым функциям.**

*Теорема.* Предположим, что в области вида

$$R: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty, \quad (24)$$

\* Или  $x_0 - a \leq x \leq x_0$ .

\*\* Или  $x_0 - h \leq x \leq x_0$ .

правые части системы (1) удовлетворяют условиям теоремы Пикара, а именно:

- 1) функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  непрерывны по всем аргументам;
- 2) функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $y$  и  $z$ , причем существует константа Липшица  $L$ , одна и та же для всей бесконечной области (24).

При указанных условиях система (1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение (3), определенное во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$  и удовлетворяющее начальным условиям (2), причем начальные значения искомых функций  $y_0$  и  $z_0$  можно брать любыми.

Здесь в отличие от теоремы Пикара п. 120 мы не предполагаем ограниченности функций  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  во всей области  $R$ . Но она и не потребуется.

**Доказательство.** Пусть заданы любые начальные значения искомых функций  $y_0$  и  $z_0$ . Тогда, повторяя рассуждения теоремы Пикара п. 120, нетрудно убедиться, что система (1) имеет единственное решение (3), в котором  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$ , причем это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$ .

В самом деле, последовательные приближения будут определены во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$ , ибо в случае теоремы Пикара п. 120 мы сжимали интервал изменения независимой переменной лишь для того, чтобы последовательные приближения не вышли из области  $R$ . Теперь этой опасности нет, ибо область  $R$  неограничена по искомым функциям.

Далее, при исследовании рядов (14) на сходимость мы будем оценивать разности  $y_1 - y_0$  и  $z_1 - z_0$ , пользуясь формулами (8), где функции  $f_1(x, y_0, z_0)$  и  $f_2(x, y_0, z_0)$ , будучи функциями только от  $x$ , непрерывными в замкнутом интервале  $|x - x_0| \leq a$ , ограничены. Поэтому мы опять получим оценки вида (13). При оценке же последующих разностей  $y_2 - y_1$ ,  $z_2 - z_1$ , ... мы используем каждый раз лишь условие Липшица и оценки предыдущих разностей. Из этих оценок вытекает, что ряды (14) сходятся равномерно во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$ . Следовательно, решение (3) будет определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале  $|x - x_0| \leq a$ , причем  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$ .

Единственность решения (3) доказывается так же, как и в п. 120.

**124. Случай области, не ограниченной по всем переменным.** Предположим, что в области вида

$$R: |x| < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty \quad (25)$$

правые части системы (1) удовлетворяют условию 1 теоремы Пикара п. 120, т. е. функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  определены и непрерывны во всякой точке пространства  $(x, y, z)$ . Относительно выполнения условия Липшица будем различать два случая.

**С л у ч а й 1.** Функции  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $y$  и  $z$ , причем для любой области вида (24) имеется постоянная  $L$  одна и та же для всей области. В этом случае существует единственное решение (3), удовлетворяющее начальным условиям (2), где все начальные данные  $x_0, y_0$  и  $z_0$  можно выбирать любыми, т. е. через любую точку  $(x_0, y_0, z_0)$  проходит единственное решение (3) системы (1). Это решение определено и непрерывно дифференцируемо при всех значениях  $x$ .

В самом деле, пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  — любая заданная точка. Тогда, взяв в области (25) вместо бесконечного интервала изменения независимой переменной конечный интервал вида  $|x - x_0| \leq a$ , где  $a$  — любое положительное число, мы на основании п. 123 можем утверждать, что через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  проходит единственное решение, определенное и непрерывно дифференцируемое в интервале  $|x - x_0| \leq a$ .

Далее, какую бы точку  $x = x^*$  ни взять, всегда можно выбрать число  $a$  настолько большим, что  $x = x^*$  будет лежать внутри интервала  $|x - x_0| \leq a$ . Следовательно, решение, проходящее через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , будет определено и непрерывно дифференцируемо в точке  $x = x^*$ .

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y' = x + \sin y.$$

Частная производная по  $y$  от правой части этого уравнения существует и ограничена на всей плоскости  $(x, y)$ , ибо

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |\cos y| \leq 1,$$

так что условие Липшица выполнено на всей плоскости, причем  $L = 1$ . Следовательно, решение с любыми начальными данными  $x_0, y_0$  будет определено и непрерывно дифференцируемо при любом  $x$  и может быть получено по методу Пикара.

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$y' = |y|. \quad (26)$$

Здесь правая часть тоже удовлетворяет условию Липшица на всей плоскости, причем  $L = 1$  (см. с. 263), хотя в точках оси  $Ox$  частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  не существует.

Поэтому уравнение (26) имеет решение, проходящее через любую точку  $(x_0, y_0)$ , и это решение определено и непрерывно дифференцируемо при всех значениях  $x$ .

В этом легко убедиться и непосредственно. Действительно, переписав наше уравнение в виде

$$\left. \begin{aligned} y' &= y & \text{при } y \geq 0, \\ y' &= -y & \text{при } y \leq 0 \end{aligned} \right\}$$

и, интегрируя, найдем, что формулы

$$\left. \begin{aligned} y &= Ce^x, & C &\geq 0, \\ y &= Ce^{-x}, & C &\leq 0 \end{aligned} \right\}$$

дают общее решение соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, включая ось  $Ox$  (рис. 35), откуда и вытекает наше утверждение.

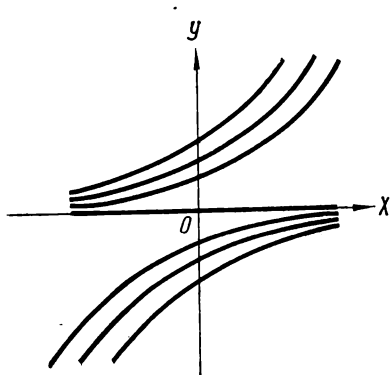


Рис. 35

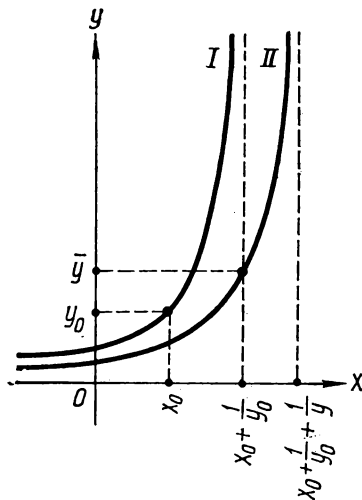


Рис. 36

**С л у ч а й 2.** Условие Липшица выполнено в окрестности любой точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , но не существует константы  $L$ , пригодной для произвольной области вида (24). В этом случае существует единственное решение (3) системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), где  $x_0, y_0, z_0$  — любые заданные числа, иными словами, существует единственное решение, проходящее через любую заданную точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Но существование этого решения гарантировано лишь в некоторой окрестности взятой точки  $x = x_0$ .

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2. \quad (27)$$

Правая часть непрерывна при всех значениях  $x$  и  $y$ . Проверяя условие Липшица, пишем:

$$|\overline{y^2} - \underline{y^2}| = |\overline{y} + \underline{y}| \cdot |\overline{y} - \underline{y}| \leq L |\overline{y} - \underline{y}|,$$

если  $|\overline{y+y}| \leq L$ . Нет  $L$ , пригодной для всей плоскости  $(x, y)$ .\*

Следовательно, существует решение с любыми начальными данными. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Но мы не гарантируем, что оно будет определено при всех значениях  $x$  (ср. п. 36, замечание 2).

Интегрируя уравнение (27), находим, что

$$y = -\frac{1}{x+C}$$

есть общее решение на всей плоскости  $(x, y)$ .

Найдем решение (рис. 36), проходящее через точку  $(x_0, y_0)$ , не лежащую на оси  $Ox$ . Соответствующим значением произвольной постоянной будет  $C = -\left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)$ , так что искомое решение имеет вид

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}, \quad (28)$$

откуда ясно, что оно обращается в бесконечность при

$$x = x_0 + \frac{1}{y_0} \equiv \overline{x}.$$

Заметим, однако, что через всякую точку  $\left(x_0 + \frac{1}{y_0}, \overline{y}\right)$ , где  $\overline{y} \neq 0$ , проходит непрерывная интегральная кривая

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{\overline{y}}\right)}.$$

Но она будет иметь разрыв в точке  $x = x_0 + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{\overline{y}}$ , так что у каждого решения будет своя точка  $x = \overline{x}$ , в которой оно перестает быть непрерывным. Эта точка определяется начальными данными решения и передвигается с изменением начальных данных (т. е. при переходе к другому решению).

Мы предполагали выше, что точка  $(x_0, y_0)$  не лежит на оси  $Ox$ , т. е.  $y_0 \neq 0$ . Если же мы возьмем точку  $(x_0, 0)$ , то через нее проходит единственная интегральная кривая  $y = 0$ , так что уравнение (27) имеет и такое решение, которое непрерывно при всех значениях  $x$ .

---

\* В этом можно также убедиться, исходя из частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ , которая ограничена во всякой конечной области, но не ограничена на всей плоскости  $(x, y)$ . Если же  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L$  и если существует  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , то  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$ .

**Пример 4.** Пусть дано уравнение

$$y' = x + y^2 \quad (29)$$

с начальным условием

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (30)$$

[138, т. II, с. 158, 159].

Здесь, как и в предыдущем примере,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ , так что решение с любыми начальными данными существует и может быть найдено методом последовательных приближений.

Соответствующим интегральным уравнением будет

$$y = \int_0^x (x + y^2) dx.$$

Беря начальное значение искомой функции за нулевое приближение, найдем два первых приближения:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= \int_0^x \left( x + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}. \end{aligned} \right\}$$

Эти и все следующие приближения будут определены и непрерывны при всех значениях  $x$ , но сходимость последовательных приближений и, тем самым, применимость метода последовательных приближений для приближенного интегрирования уравнения (29) при начальном условии (30) гарантируется лишь в некоторой окрестности точки  $x=0$ . Определим эту окрестность.

Очевидно, что в нашем случае числа  $a$  и  $b$  мы можем брать любыми. При этом

$$M = \max |x + y^2| = a + b^2.$$

Поэтому область существования решения, определяемого методом последовательных приближений, дается формулой

$$|x| \leq \min \left( a, \frac{b}{a + b^2} \right),$$

из которой видно, что для области существования решения мы не можем получить сколь угодно большого интервала, хотя правая часть данного уравнения определена и непрерывна при всех значениях  $x$  и  $y$ . Заметим, что здесь нет константы Липшица, пригодной для всей плоскости  $(x, y)$ .

Решения, определенного для всех значений  $x$ , не существует.

**З а м е ч а н и е.** Иногда в силу физических или геометрических соображений уравнения рассматриваются не во всей области существования правых частей, а лишь в ее части. В таких случаях интервал сходимости последовательных приближений определяется формулой  $|x - x_0| \leq h$ ,  $h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ . Так, если рассматривать уравнение (29)

с начальным условием (30) в квадрате  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ , то сходимость последовательных приближений будет обеспечена по крайней мере на интервале  $|x| \leq \frac{1}{2}$ .

**125. О продолжении решения, определяемого теоремой Пикара.** Решение  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$ , найденное в теореме Пикара п. 120, определено и непрерывно дифференцируемо в промежутке  $|x-x_0| \leq h$ , где  $h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ . Если  $h < a$ , то это решение, вообще говоря, можно

*продолжить*, т. е. можно найти такие функции  $y=\bar{y}(x)$  и  $z=\bar{z}(x)$ , определенные и непрерывно дифференцируемые в некотором интервале, содержащем внутри себя интервал  $|x-x_0| \leq h$ , которые удовлетворяли бы системе дифференциальных уравнений (1) и совпадали бы с функциями  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  во всех точках интервала  $|x-x_0| \leq h$ .

Продолжение решения  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  вправо от точки  $x=x_0+h$  производится так. Предположим, что в точке  $x=x_0+h$  решение  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  не достигает границы области  $R$ , т. е.

$$|y(x_0+h)-y_0| < b, \quad |z(x_0+h)-z_0| < b. \quad (31)$$

(Если вместо неравенств (31) выполняется хоть одно из равенств  $|y(x_0+h)-y_0|=b$ ,  $|z(x_0+h)-z_0|=b$ , то продолжение решения, вообще говоря, не возможно.) Возьмем точку  $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ , где

$$x^{(1)}=x_0+h, \quad y^{(1)}=y(x_0+h), \quad z^{(1)}=z(x_0+h),$$

и построим область

$$R^{(1)}: |x-x^{(1)}| \leq a^{(1)}, \quad |y-y^{(1)}| \leq b^{(1)}, \quad |z-z^{(1)}| \leq b^{(1)},$$

причем:

$$a^{(1)}=a-h,$$

$$b^{(1)}=\min [y_0+b-y^{(1)}, y^{(1)}-(y_0-b), z_0+b-z^{(1)}, z^{(1)}-(z_0-b)].$$

Область  $R^{(1)}$  лежит внутри области  $R$ . Следовательно, в ней выполнены оба условия теоремы Пикара. Поэтому система (1) имеет единственное решение

$$y=\tilde{y}(x), \quad z=\tilde{z}(x), \quad (32)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=y^{(1)}, \quad z=z^{(1)} \quad \text{при} \quad x=x^{(1)},$$



определенное и непрерывно дифференцируемое в промежутке

$$|x - x^{(1)}| \leq h^{(1)} \quad \left( h^{(1)} = \min \left( a^{(1)}, \frac{b^{(1)}}{M} \right) \right).$$

В силу теоремы единственности решение (32) совпадает с решением  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  в интервале  $x^{(1)} - h^{(1)} \leq x \leq x^{(1)}$ . Но оно определено и справа от точки  $x = x^{(1)}$ , в промежутке  $x^{(1)} \leq x \leq x^{(1)} + h^{(1)}$ . Мы будем называть решение (32) *непосредственным продолжением решения*  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  из интервала  $|x - x_0| \leq h$  в интервал  $|x - x^{(1)}| \leq h^{(1)}$  через их общую часть  $[x^{(1)} - h^{(1)}, x^{(1)}]$ .

Если решение (32) не достигает границы области  $R$ , то аналогично предыдущему строится его непосредственное продолжение и т. д. Можно доказать, что, продолжая этот процесс, мы после конечного числа шагов либо убедимся, что имеет место хотя бы одно из равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + a'} y(x) = y_0 \mp b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + a'} z(x) = z_0 \mp b,$$

где  $a' < a$ , так что решение достигает границы области  $R$  при значении  $x$ , меньшем чем  $x_0 + a$ , и тогда дальнейшее продолжение решения окажется, вообще говоря, невозможным, либо решение продолжимо до значения  $x$ , сколь угодно близкого к правой границе интервала  $|x - x_0| \leq a$ .\*

Продолжение решения влево от точки  $x = x_0 - h$  производится аналогично.

До сих пор речь шла о продолжении решения, определяемого теоремой Пикара в случае конечной области  $R$ . Если область  $R$  не ограничена по всем переменным и условие Липшица выполняется в окрестности каждой точки, но нет константы  $L$ , пригодной для всей области  $R$ , то при продолжении решения мы встречаемся с одной из двух возможностей:

1) решение, найденное по методу Пикара, неограниченно продолжимо;

2) в результате продолжения решения, найденного по методу Пикара, мы получаем решение, в котором  $y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ , когда  $x$  стремится к некоторому конечному числу  $\bar{x}$ . Ясно, что в этом случае решение, определяемое теоремой Пикара, не продолжимо вправо от точки  $x = \bar{x}$  [59, с. 55—58].

**Пример 1.** В качестве иллюстрации первой из указанных возможностей рассмотрим решение уравнения

$$y' = x \sin y \tag{33}$$

\* Доказательство этого утверждения в случае уравнения  $y' = f(x, y)$  см. в книге [140, с. 65, 66]. По вопросу о продолжимости решения нормальной системы дифференциальных уравнений см. [9, 15, 44, 58, 67, 75, 128, 151].

с начальным условием

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (34)$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$ , если  $|x| \leq L$ , так что условие Липшица выполняется в окрестности любой точки плоскости  $(x, y)$ , но нет постоянной  $L$ , пригодной для всей плоскости  $(x, y)$ .

Интегрируя уравнение (33), получаем  $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = C e^{\frac{x^2}{2}}$ . Удовлетворяя начальному условию (34), находим  $C = 1$ . Следовательно, рассматриваемое решение имеет вид

$$y = 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Это решение определено при всех значениях  $x$ .

Следовательно, решение уравнения (33) с начальным условием (34), определяемое теоремой Пикара, продолжимо на все значения  $x$ .

**Пример 2.** В качестве иллюстрации второй возможности рассмотрим решение уравнения (27)

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

с начальным условием

$$y = y_0 (> 0) \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (35)$$

Здесь, как показано выше, тоже нет постоянной  $L$ , пригодной для всей плоскости  $(x, y)$ . Рассматриваемое решение имеет вид (28).

Это решение определено и непрерывно в интервале  $-\infty < x < \bar{x}$ , где

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{y_0}.$$

Здесь  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \bar{x}$ . (Строго говоря, надо писать  $x \rightarrow \bar{x} - 0$ , так как здесь имеется в виду предел слева.) Решение (28) имеет вертикальную асимптоту  $x = \bar{x}$  (положение которой, как мы видим, определяется начальными данными решения). Следовательно, решение уравнения (27) с начальным условием (35), найденное по методу Пикара, не продолжимо на все значения  $x$ : оно не продолжимо правее точки  $x = \bar{x}$ . Влево это решение продолжимо неограниченно.

**Пример 3.** Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad (36)$$

с начальным условием

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (37)$$

Интегрируя уравнение (36), имеем

$$\arctg y = x + C \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2} \right).$$

Отсюда следует, что рассматриваемое решение имеет вид

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

Оно имеет, очевидно, две вертикальные асимптоты  $x = -\frac{\pi}{2}$  и  $x = \frac{\pi}{2}$  (рис. 37). Следовательно, решение уравнения (36) с начальным условием (37), найденное по методу Пикара, будет непродолжимо левее точки  $x = -\frac{\pi}{2}$  и правее точки  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**126. Теорема Пикара для линейной системы дифференциальных уравнений.** Пусть дана линейная система  $n$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

**Теорема.** Если коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывны в интервале  $[a, b]$ , то система (38) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \\ y_n &= y_n(x), \end{aligned} \quad (39)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)}$  при  $x = x_0$ , где  $x = x_0$  — любая заданная точка интервала  $[a, b]$ , а начальные значения искомых функций  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  — произвольные заданные числа. Решение (39) определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале  $[a, b]$ , т. е. во всей области непрерывности функций  $p_{kl}$  и  $f_k(x)$ .\*

Докажем эту теорему для  $n=2$ .

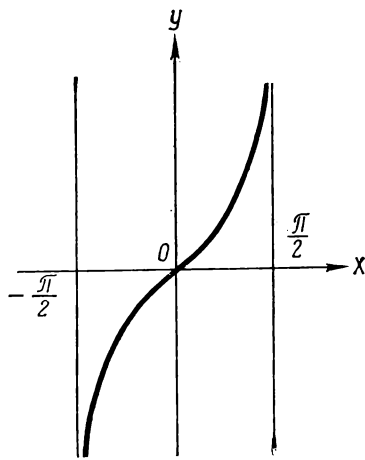


Рис. 37

\* Для одного линейного уравнения первого порядка мы это уже показали в п. 36.

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p_{11}(x)y + p_{12}(x)z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= p_{21}(x)y + p_{22}(x)z + f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Предположим, что коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) непрерывны в интервале  $[a, b]$ .

Докажем, что система (40) имеет единственное решение

$$y=y(x), \quad z=z(x), \quad (41)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=y_0, \quad z=z_0 \quad \text{при} \quad x=x_0, \quad (42)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — заданные числа, причем начальное значение независимой переменной  $x_0$  принадлежит интервалу  $[a, b]$ , а начальные значения искомых функций  $y_0$  и  $z_0$  можно брать любыми, и, что это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале  $[a, b]$ .

Для этого заметим сначала, что при сделанном предположении правые части системы (40) непрерывны в области

$$a \leq x \leq b, \quad |y| < \infty, \quad |z| < \infty \quad (43)$$

и удовлетворяют в этой области условию Липшица относительно  $y$  и  $z$ , причем существует константа Липшица  $L$  одна и та же для всей бесконечной области (43), ибо правые части системы (40) имеют ограниченные в области (43) частные производные по  $y$  и  $z$ . В самом деле, эти частные производные равны коэффициентам  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ), а последние, будучи непрерывными в замкнутом интервале  $[a, b]$ , ограничены в этом интервале, так что вышеуказанные частные производные существуют и ограничены во всей области (43).

Пусть теперь  $x=x_0$  есть любая точка интервала  $[a, b]$ . Если эта точка лежит на конце интервала  $[a, b]$ , т. е.  $x_0=a$  или  $x_0=b$ , то, на основании пп. 122 и 123, система (40) имеет единственное решение (41), удовлетворяющее начальным условиям (42), определенное и непрерывно дифференцируемое во всем интервале  $[a, b]$ , так что наше утверждение в рассматриваемом случае доказано. Если же  $a < x_0 < b$ , то в каждом из интервалов  $[a, x_0]$  и  $[x_0, b]$  система (40) имеет единственное решение,

удовлетворяющее начальным условиям (42). Объединяя эти решения, мы получим единственное решение системы (40), удовлетворяющее начальным условиям (42), определенное и непрерывно дифференцируемое во всем интервале  $[a, b]$ . Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, сходящимся во всем интервале  $[a, b]$ . Таким образом наше утверждение доказано полностью.

*Замечание 1. Если коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) непрерывны в открытом интервале  $(a, b)$ , то система (40) имеет единственное решение (41), удовлетворяющее начальным условиям (42), где  $x_0$  — любая точка из интервала  $(a, b)$ , а начальные значения  $y_0$  и  $z_0$  можно брать любыми. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем открытом интервале  $(a, b)$ .*

В самом деле, взяв замкнутый интервал  $[a+\delta, b-\delta]$ , мы окажемся в условиях только что доказанной теоремы, откуда в силу произвольности  $\delta$  и вытекает доказываемое утверждение.

*Замечание 2. Если коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) непрерывны при всех значениях  $x$  (например, если они постоянны или же представляют собою полиномы от  $x$  или функции типа  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  и т. п.), то система (40) будет иметь единственное решение (41), удовлетворяющее начальным условиям (42), где, как начальное значение аргумента,  $x_0$ , так и начальные значения искомых функций,  $y_0$  и  $z_0$ , можно выбирать произвольно. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо при всех значениях  $x$  и может быть получено по методу последовательных приближений (т. е. последовательные приближения сходятся к решению при всех значениях  $x$ ).*

*Замечание 3. Если коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k=1, 2$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) являются дробно-рациональными функциями от  $x$ , т. е. имеют вид  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — полиномы от  $x$ , то решение с начальными условиями  $y=y_0$ ,  $z=z_0$  при  $x=x_0$ , где все  $Q(x_0) \neq 0$ , а  $y_0$  и  $z_0$  — произвольные числа, будет определено и непрерывно дифференцируемо до ближайшего вещественного корня уравнений  $Q(x)=0$ .*

*Замечание 4. Мы доказали теорему Пикара для линейной системы уравнений в случаях замкнутого и открытого интервалов изменения  $x$ . Аналогично формулируется и доказывается теорема Пикара для линейной системы в случаях интервалов вида  $[a, b)$  и  $(a, b]$ .*

Таким образом, решение линейной системы дифференциальных уравнений (38) с любыми начальными значениями искомых функций существует и непрерывно дифференцируемо всюду, где коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) непрерывны.

В этом состоит одно из замечательных свойств линейных систем. Нелинейные системы этим свойством, вообще говоря, не обладают.

Основываясь на указанном свойстве, можно строить приближенное решение линейной системы с любыми начальными значениями искомых функций при начальном значении независимой переменной из интервала непрерывности коэффициентов системы (38) и функций  $f_k(x)$ , ибо во всем этом интервале существование и единственность искомого решения обеспечены.

**Пример 1.** Найти решение линейной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z, \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=1, \quad z=-1 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Согласно теореме Пикара, искомое решение существует, единственно, непрерывно дифференцируемо при всех значениях  $x$  и может быть найдено методом Пикара. Имеем:

$$\begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x (5y + 4z) dx, \quad z = -1 + \int_0^x (4y + 5z) dx; \\ y_0(x) &= 1, \quad z_0(x) = -1; \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x dx = 1 + x, \quad z_1(x) = -1 + \int_0^x (-1) dx = -(1 + x); \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (5(1+x) - 4(1+x)) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!}; \\ z_2(x) &= -1 + \int_0^x (4(1+x) - 5(1+x)) dx = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right); \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \rightarrow e^x = y, \\ z_n(x) &= -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \rightarrow -e^x = z. \end{aligned}$$

Искомым решением будет (ср. п. 104)  $y=e^x$ ,  $z=-e^x$ . Других решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям, нет.

**Пример 2.** Пусть дано линейное уравнение

$$y' - y = x^2 \tag{44}$$

и поставлено начальное условие

$$y=1 \quad \text{при} \quad x=0. \tag{45}$$

Найти второе приближение по методу Пикара. Сравнить с точным решением, получаемым квадратурами.

Здесь опять искомое решение существует, единственно, определено при всех значениях  $x$  и может быть найдено методом Пикара. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x (y+x^2) dx, \\ y_0(x) &= 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x (1+x^2) dx = 1+x+\frac{x^3}{3}, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(1+x+x^2+\frac{x^3}{3}\right) dx = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3 \cdot 4}, \end{aligned} \right\}$$

так что

$$y_2(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3 \cdot 4}. \quad (46)$$

Точным решением уравнения (44) с начальным условием (45) будет

$$y = 3e^x - x^2 - 2x - 2.$$

Разлагая это решение в ряд по степеням  $x$ , имеем

$$y = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2 \cdot 4}+\dots \quad (47)$$

Сравнивая (46) и (47), видим, что при малых значениях  $x$  второе приближение мало отличается от точного решения.

**127. О решении однородной линейной системы с нулевыми начальными значениями искомых функций.** Линейная система (38) называется *однородной*, если все функции  $f_h(x)$  тождественно равны нулю в рассматриваемом интервале изменения  $x$ . Однородная линейная система имеет, следовательно, такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n, \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Здесь правые части представляют собою однородные линейные функции относительно  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Предположим, что коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ) непрерывны в некотором интервале  $(a, b)$ . Пусть требуется найти решение системы (48) с нулевыми начальными значениями искомых функций, т. е. решение с начальными условиями:

$$y_1=0, \quad y_2=0, \quad \dots, \quad y_n=0 \quad \text{при} \quad x=x_0 \in (a, b).^*$$

Очевидно, что искомым решением будет

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad y_n \equiv 0 \quad (a < x < b), \quad (49)$$

в котором все неизвестные функции тождественно равны нулю во всем интервале  $(a, b)$ . Решение (49) будем называть *нулевым* решением. В силу теоремы единственности других решений с нулевыми начальными значениями искомых функций не существует.

Таким образом, если относительно какого-либо решения однородной линейной системы известно, что в нем все функции  $y_1=y_1(x)$ ,  $y_2=y_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $y_n=y_n(x)$  принимают значение нуль в некоторой точке  $x=x_0$  из интервала непрерывности коэффициентов системы, то это решение есть нулевое.\*\*

Это свойство решений однородной линейной системы мы используем в дальнейшем при построении общей теории линейных систем. Для одного однородного линейного уравнения мы уже отметили это свойство в п. 32.

Дадим еще механическое истолкование рассматриваемого свойства. Пусть дана система:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n, \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n, \end{aligned} \right\}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты движущейся точки,  $t$  — время,  $p_{kl}(t)$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ) — непрерывные функции  $t$  при  $a < t < b$ . Тогда един-

\*  $\in$  — знак принадлежности. Запись  $x_0 \in (a, b)$  означает, что число  $x_0$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ .

\*\* Здесь, как и везде в этой книге, имеется в виду, что  $x_0 \neq \pm \infty$ . Не исключена возможность существования ненулевого решения, принимающего нулевые значения в бесконечно удаленной точке, если функции  $p_{kl}(x)$  определены и непрерывны при всех значениях  $x$ .



ственным движением с начальными условиями:

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad \dots, \quad x_n=0 \quad \text{при} \quad t=t_0 \in (a, b)$$

является состояние покоя \*

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad x_n \equiv 0 \quad (a < t < b).$$

**128. Теорема Пикара для уравнения  $n$ -го порядка.** Пусть дано уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (50)$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (51)$$

В п. 112 мы показали, что нахождение решения уравнения (50), удовлетворяющего начальным условиям (51), приводится путем введения неизвестных функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad (52)$$

к нахождению решения нормальной системы  $n$  уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1 = y_0, \quad y_2 = y_0', \quad \dots, \quad y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Поэтому для уравнения (50) имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

**Теорема Пикара.** *Предположим, что правая часть уравнения (50) удовлетворяет в области*

---

\* Это, однако, не исключает возможности существования движений, стремящихся к состоянию покоя при  $t \rightarrow \infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ , если, конечно, функции  $p_{ki}(t)$  определены и непрерывны при всех значениях  $t$ .

$$R: \quad |x-x_0| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b, \quad |y'-y'_0| \leq b, \dots, \\ |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}| \leq b,$$

где  $a$  и  $b$  — положительные числа, двум условиям:

1) функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  непрерывна по всем своим аргументам и, следовательно, ограничена, т. е.

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M,$$

где  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R$ , а  $M$  — постоянное положительное число;

2) функция  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  удовлетворяет условию Липшица относительно переменных  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , т. е.

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', \dots, \bar{\bar{y}}^{(n-1)})| \leq \\ \leq L(|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + |\bar{y}' - \bar{\bar{y}}'| + \dots + |\bar{y}^{(n-1)} - \bar{\bar{y}}^{(n-1)}|),$$

где  $(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)})$  и  $(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', \dots, \bar{\bar{y}}^{(n-1)})$  — любые две точки области  $R$ , а  $L$  — постоянное положительное число.\*

Тогда существует единственное решение

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям (51), определенное и непрерывное вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно в интервале

$$|x-x_0| \leq h,$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{\max_R (M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right).$$

Из этой теоремы вытекает справедливость теоремы Пикара для уравнения (50) в упрощенной формулировке, приведенной в п. 86, где условие Липшица заменено более сильным требованием ограниченности частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}.$$

---

\* Условие Л и п ш и ц а, в частности, будет выполнено, если существуют ограниченные в области  $R$  частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$  (ср. замечание в п. 119).

Утверждения, доказанные в пп. 122—125, переносятся с соответствующими изменениями и на случай уравнения (50).

**129. Теорема Пикара для линейного уравнения  $n$ -го порядка.** Рассмотрим линейное уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (53)$$

Введением неизвестных функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  по формулам (52) это уравнение приводится к следующей линейной системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= -p_1(x)y_n - p_2(x)y_{n-1} - \dots - \\ &\quad - p_{n-1}(x)y_2 - p_n(x)y_1 + f(x). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Из теоремы Пикара для системы (54) вытекает следующая теорема существования и единственности для линейного уравнения (53).

**Теорема Пикара.** Если в уравнении (53) все коэффициенты  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  и функция  $f(x)$  непрерывны в интервале  $[a, b]$ , то оно имеет единственное решение

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где  $x_0$  принадлежит интервалу  $[a, b]$ , а  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  — любые заданные числа.

Это решение определено и непрерывно вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно во всем интервале  $[a, b]$ , т. е. во всем интервале непрерывности коэффициентов уравнения (53) и функции  $f(x)$ .

**Замечание.** Все замечания к теореме Пикара для линейной системы, сделанные в п. 126, переносятся с соответствующими изменениями и на случай линейного уравнения  $n$ -го порядка. В частности, если  $p_l(x)$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ) и  $f(x)$  непрерывны при всех значениях  $x$ , то существует единственное решение, удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям, т. е. все числа  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  можно брать лю-

быми. Это решение будет определено и непрерывно вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно при всех значениях  $x$ , и может быть найдено методом последовательных приближений.

**136. О решении однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных.** Если в линейном уравнении (53) функция  $f(x)$  тождественно равна нулю в рассматриваемом интервале изменения  $x$ , то оно называется *однородным* и имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (55)$$

Здесь левая часть есть однородная линейная функция относительно искомой функции  $y$  и всех ее производных.

К уравнению (55) применима доказанная выше теорема существования и единственности.

В частности, *единственным решением с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных, т. е. решением, удовлетворяющим начальным условиям*

$$y=0, \quad y'=0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0, \quad (56)$$

где  $x=x_0$  — любая точка из интервала непрерывности коэффициентов уравнения (55), является нулевое решение:

$$y \equiv 0.$$

Действительно, нулевое решение удовлетворяет начальным условиям (56), а в силу теоремы единственности других решений, удовлетворяющих этим же начальным условиям, быть не может.

Из доказанного следует, что если относительно какого-либо решения однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка известно, что оно в какой-либо точке, лежащей в интервале непрерывности коэффициентов уравнения, обращается в нуль вместе со своими производными до  $(n-1)$ -го порядка включительно, то это решение есть нулевое. Этим свойством решения однородного линейного уравнения мы воспользуемся при построении общей теории линейных уравнений  $n$ -го порядка.

Геометрически в случае  $n=1$  это свойство означает, что ненулевое решение однородного линейного уравнения первого порядка  $y' + p(x)y = 0$  не может иметь общей точки с осью  $Ox$  на интервале непрерывности коэффициента  $p(x)$  (что уже отмечено нами в п. 32). В случае  $n=2$  оно означает, что ненулевое решение однородного линейного уравнения второго порядка  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  не может касаться оси  $Ox$  на интервале непрерывности коэффициентов  $p(x)$  и  $q(x)$ . В самом деле, в точке касания мы имели бы  $y=0$ ,  $y'=0$ , а тогда  $y \equiv 0$  во всем интервале непрерывности  $p(x)$  и  $q(x)$ .

С механической точки зрения рассматриваемое свойство может быть истолковано так. Предположим, что дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки по оси  $Ox$  имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0,$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  суть функции от  $t$ , непрерывные в некотором интервале. Тогда *единственным движением с нулевыми начальными значениями положения и скорости точки, т. е. движением с начальными условиями:*

$$x=0, \quad \frac{dx}{dt}=0 \quad \text{при} \quad t=t_0,$$

*где начальный момент времени  $t=t_0$  лежит в интервале непрерывности коэффициентов  $p(t)$  и  $q(t)$ , будет состояние покоя*

$$x \equiv 0.$$

### § 23. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЯ КАК ФУНКЦИИ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА

**131. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от параметров.** В предыдущих параграфах мы считали начальные данные решения фиксированными и изучали решение как функцию независимой переменной. Будем теперь изменять начальные данные. Первый вопрос, который при этом возникает,— это вопрос о том, будет ли малому изменению начальных данных соответствовать малое же изменение решения. Этот вопрос исключительно важен не только для самой теории дифференциальных уравнений, но и для ее приложений. Дело в том, что в задачах прикладного характера начальные данные находятся измерением. Но за абсолютную точность измерения ручаться нельзя. Поэтому нам важно быть уверенными в том, что небольшие погрешности в измерении начальных данных не приведут к сильному изменению решения. Мы покажем, что при соблюдении условий теоремы Пикара решение будет зависеть непрерывным образом от начальных данных, а при дополнительных предположениях оно будет даже дифференцируемо по начальным данным. Но прежде чем это доказать, мы исследуем более общий вопрос о зависимости решения от параметров, имеющий и самостоятельное значение как для теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений.





Предположим, что функции  $f_1(x, y, z, \lambda)$  и  $f_2(x, y, z, \lambda)$  удовлетворяют в области

$$R: |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b, |z-z_0| \leq b \quad (2)$$

изменения переменных  $x, y, z$  и в интервале

$$\lambda^{(0)} \leq \lambda \leq \lambda^{(1)} \quad (3)$$

изменения параметра  $\lambda$  следующим двум условиям:

1) функции  $f_1(x, y, z, \lambda)$  и  $f_2(x, y, z, \lambda)$  непрерывны по  $x, y, z, \lambda$  в области (2), (3) и, следовательно, ограничены:

$$|f_k(x, y, z, \lambda)| \leq M \quad (k=1, 2),$$

причем число  $M$  не зависит от параметра  $\lambda$ ;

2) функции  $f_1(x, y, z, \lambda)$  и  $f_2(x, y, z, \lambda)$  удовлетворяют условию Липшица относительно  $y$  и  $z$ :

$$|f_k(x, \bar{y}, \bar{z}, \lambda) - f_k(x, \bar{y}, \bar{z}, \lambda)| \leq L(|\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{z} - \bar{z}|) \quad (k=1, 2),$$

причем число  $L$  не зависит от параметра  $\lambda$ .

Докажем, что система (1) имеет единственное решение:

$$\left. \begin{aligned} y &= y(x, \lambda), \\ z &= z(x, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (5)$$

причем это решение определено и непрерывно дифференцируемо как функция от независимой переменной  $x$  в интервале

$$|x - x_0| \leq h, \quad (6)$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right),$$

определено и непрерывно как функция параметра  $\lambda$  в интервале (3), равномерно относительно  $x$  из интервала (6).

С этой целью мы будем поступать так же, как при доказательстве теоремы Пикара п. 120. Нам нужно лишь внести некоторые изменения и дополнения, вызванные тем, что правые части системы (1) зависят не только от  $x, y, z$ , но и от параметра  $\lambda$ .





1. Все функции последовательностей (10) определены и непрерывны как функции от независимой переменной  $x$  в интервале (6) и как функции параметра  $\lambda$  в интервале (3) и не выходят при этих значениях  $x$  и  $\lambda$  из области  $R$ .

В справедливости этого утверждения легко убедиться методом математической индукции.

В самом деле, из формул (8) мы видим, что функции  $y_1(x, \lambda)$  и  $z_1(x, \lambda)$  определены и непрерывны как функции от  $x$  в интервале  $|x - x_0| \leq a$  и как функции от параметра  $\lambda$  в интервале (3), ибо  $f_1(x, y_0, z_0, \lambda)$  и  $f_2(x, y_0, z_0, \lambda)$  непрерывны как относительно  $x$ , так и относительно  $\lambda$  в указанных областях. Далее, оценивая разности  $y_1(x, \lambda) - y_0$  и  $z_1(x, \lambda) - z_0$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} |y_1(x, \lambda) - y_0| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f_1(x, y_0, z_0, \lambda)| dx \right| \leq M |x - x_0|, \\ |z_1(x, \lambda) - z_0| &\leq M |x - x_0|. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому функции  $y_1(x, \lambda)$  и  $z_1(x, \lambda)$  не выйдут из области  $R$ , если  $|x - x_0| \leq h$ ,  $\lambda^{(0)} \leq \lambda \leq \lambda^{(1)}$ . Таким образом, доказываемое утверждение справедливо для функций  $y_1(x, \lambda)$  и  $z_1(x, \lambda)$ .

Предположив, что это утверждение справедливо для функций  $y_{n-1}(x, \lambda)$  и  $z_{n-1}(x, \lambda)$ , и используя формулы (9), убеждаемся, что оно справедливо и для функций  $y_n(x, \lambda)$  и  $z_n(x, \lambda)$ .

В самом деле, подынтегральные функции в формулах (9), рассматриваемые как сложные функции от  $x$  и  $\lambda$ , непрерывны в промежутках (6) и (3), так что функции  $y_n(x, \lambda)$  и  $z_n(x, \lambda)$  определены и непрерывны в этих интервалах. Кроме того, имеют место оценки

$$\left. \begin{aligned} |y_n(x, \lambda) - y_0| &\leq b, \\ |z_n(x, \lambda) - z_0| &\leq b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

при  $|x - x_0| \leq h$ ,  $\lambda^{(0)} \leq \lambda \leq \lambda^{(1)}$ .

Из приведенных рассуждений и вытекает справедливость доказываемого утверждения для всех функций последовательностей (10).

2. Последовательности (10) равномерно сходятся относительно независимой переменной  $x$  в интервале (6) и относительно параметра  $\lambda$  в интервале (3), и, следовательно, предельные функции непрерывны относительно независимой переменной  $x$  в интервале (6) и относительно параметра  $\lambda$  в интервале (3).

В самом деле, для членов рядов:

$$\left. \begin{aligned} & y_0 + (y_1(x, \lambda) - y_0) + (y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)) + \dots \\ & \dots + (y_n(x, \lambda) - y_{n-1}(x, \lambda)) + \dots, \\ & z_0 + (z_1(x, \lambda) - z_0) + (z_2(x, \lambda) - z_1(x, \lambda)) + \dots \\ & \dots + (z_n(x, \lambda) - z_{n-1}(x, \lambda)) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

соответствующих последовательностям (10), мы, так же как и в п. 120, получим оценки:

$$\left. \begin{aligned} |y_n(x, \lambda) - y_{n-1}(x, \lambda)| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \\ |z_n(x, \lambda) - z_{n-1}(x, \lambda)| &\leq M(2L)^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \end{aligned} \right\}$$

справедливые для всех значений  $x$  и  $\lambda$  соответственно из интервалов (6) и (3). Поэтому ряды (12) сходятся равномерно относительно  $x$  в интервале (6) и относительно  $\lambda$  в интервале (3).

Обозначим суммы рядов (12) или, что то же, предельные функции и последовательностей (10) через  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$ . В силу только что доказанной равномерной сходимости рядов (12) и доказанной выше непрерывности членов этих рядов функции  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$  непрерывны относительно  $x$  в интервале (6) и относительно  $\lambda$  в интервале (3).

3. *Предельные функции  $y(x, \lambda)$  и  $z(x, \lambda)$  не выходят из области  $R$ , когда  $x$  и  $\lambda$  изменяются соответственно в интервалах (6) и (3), и удовлетворяют системе интегральных уравнений (7).*

Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в неравенствах (11) при  $n \rightarrow \infty$  и в формулах (9) при  $n \rightarrow \infty$ , используя в последнем случае доказанную выше равномерную сходимость последовательностей (10).

Таким образом, доказано, что система (1) имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), причем найденное решение является не только непрерывной функцией от  $x$ , но и от параметра  $\lambda$ . Это решение будет непрерывно как функция параметра  $\lambda$  в промежутке (3) равномерно относительно  $x$  из интервала (6).

Так же, как и в п. 120, можно доказать единственность найденного решения.

Кроме того, из самой системы (1) вытекает, что найденное решение будет иметь производную по  $x$ , непрерывную относительно  $x$  в интервале (6) и относительно  $\lambda$  в интервале (3).



Тогда из рассуждений теоремы настоящего пункта следует, что если правые части системы (1') удовлетворяют всем условиям этой теоремы, а начальные данные суть непрерывные функции от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в области (3'), причем эти функции не выходят из области  $R$ , содержащейся внутри  $R$ , то существует единственное решение системы (1') с начальными условиями (5'') и это решение будет непрерывной функцией от  $x$  в некотором интервале  $|x - x_0| \leq h < h$  и от  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в области (3').

В случае линейной системы можно в качестве  $\Phi_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \dots, \Phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  брать любые непрерывные функции от параметров и решение будет определено во всем интервале непрерывности правых частей относительно независимой переменной. Именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Если коэффициенты системы (13) и функции  $f_k$  суть непрерывные функции относительно независимой переменной  $x$  и относительно параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в области  $[a, b]$ , (3'), а начальные данные суть непрерывные функции от  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в области (3'), причем значения, принимаемые функцией  $\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , лежат в промежутке  $[a, b]$ , то существует единственное решение системы (13), удовлетворяющее начальным условиям (5''), и это решение будет непрерывной функцией от  $x$  в интервале  $[a, b]$  и от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в области (3').

Из рассуждений теоремы настоящего пункта также следует, что, если:

- 1) правые части системы (1') в области (2'), (3') обладают свойством:

$$|f_k(\bar{x}, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - f_k(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon$$

при  $|x - \bar{x}| < \delta(\varepsilon)$ ,  $|y_1 - \bar{y}_1| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\dots$ ,  $|y_n - \bar{y}_n| < \delta(\varepsilon)$ ,  $|\lambda_1 - \bar{\lambda}_1| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\dots$ ,  $|\lambda_m - \bar{\lambda}_m| < \delta(\varepsilon)$ , где  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m$  фиксированные значения параметров из области (3');

- 2)  $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  ограничены в области (2'), (3') и удовлетворяют условию Липшица относительно  $y_1, \dots, y_n$  с константой  $L$ , не зависящей от  $x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ;

- 3) функции, входящие в начальные условия (5''), непрерывны при  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$  и не выходят из области  $R$ , то существует единственное решение системы (1') с начальными условиями (5'') и это решение будет непрерывной функцией от независимой переменной  $x$  в интервале  $|x - x_0| \leq h$  и от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  при  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$ .

В частности, для линейной системы (13) справедливо следующее утверждение. Если:

- 1) функции  $p_{ki}$  и  $f_k$  в области  $[a, b]$ , (3') обладают свойством

$$|p_{ki}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - p_{ki}(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon,$$

$$|f_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - f_k(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)| < \varepsilon$$

при  $|x - \bar{x}| < \delta(\varepsilon)$ ,  $|\lambda_1 - \bar{\lambda}_1| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\dots$ ,  $|\lambda_m - \bar{\lambda}_m| < \delta(\varepsilon)$ , где  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

- 2) функции  $p_{ki}$  и  $f_k$  ограничены в области  $[a, b]$ , (3');

- 3) функции, входящие в начальные условия (5''), непрерывны при  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$ , причем значения функции  $x = \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  лежат в интервале  $[a, b]$ , то существует единственное решение системы (13) с начальными условиями (5''), и это решение будет непрерывной функцией от  $x$  в интервале  $[a, b]$  и от параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  при  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_m = \bar{\lambda}_m$ .

**132. Теорема о непрерывной зависимости решения нормальной системы от начальных данных.** Пусть дана система уравнений:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (14')$$

правые части которой определены в области

$$R: |x-x_0| \leq a, \quad |y_1-y_1^{(0)}| \leq b, \dots, |y_n-y_n^{(0)}| \leq b$$

с центром в заданной точке  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ .

**Теорема.** Если правые части системы (14') удовлетворяют в области  $R$  обоим условиям теоремы Пикара, то решение

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (15')$$

с начальными условиями:

$$y_1 = y_1^*, \dots, y_n = y_n^* \quad \text{при} \quad x = x^* \quad (16')$$

будет непрерывной функцией от независимой переменной  $x$  и от начальных данных  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ , когда  $x$  изменяется в некоторой окрестности точки  $x=x_0$ , а начальные данные  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  — в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , а именно решение (15') будет непрерывной функцией от  $x$  и от  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ , когда  $x$  изменяется в интервале

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad (17')$$

а  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  лежат в области

$$|x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y_1^*-y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, |y_n^*-y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \quad (18')$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad 0 \leq \omega < \frac{h}{4}.$$

При этом решение (15') будет непрерывно как функция начальных данных  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  в области (18') равномерно относительно  $x$  из интервала (17'). Последнее означает, что для всякого положительного числа  $\epsilon$ , найдется такое положительное число  $\delta$ , что неравенства

$$|\varphi_k(x, x^* + \Delta x^*, y_1^* + \Delta y_1^*, \dots, y_n^* + \Delta y_n^*) - \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)| < \epsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

будут выполняться одновременно для всех  $x$  из интервала (17'), когда  $|\Delta x^*| < \delta$ ,  $|\Delta y_1^*| < \delta$ , ...,  $|\Delta y_n^*| < \delta$ . Здесь, конечно,  $\delta$  можно выбрать независимо от выбора начальных данных  $x^*$ ,  $y_1^*$ , ...,  $y_n^*$  из области (18').

Докажем эту теорему для  $n=2$ . В общем случае доказательство проводится аналогично. Итак, рассмотрим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: |x-x_0| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b, \quad |z-z_0| \leq b$$

условиям теоремы Пикара.

Докажем, что решение

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x, x^*, y^*, z^*), \\ z &= \psi(x, x^*, y^*, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

с начальными условиями

$$y=y^*, \quad z=z^* \quad \text{при} \quad x=x^* \quad (16)$$

будет непрерывной функцией от  $x$  и от  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$ , когда  $x$  изменяется в интервале

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad (17)$$

а  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  — в области

$$|x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y^*-y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |z^*-z_0| \leq \frac{b}{2}, \quad (18)$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right), \quad 0 \leq \omega < \frac{h}{4},$$

причем решение (15) будет непрерывно как функция начальных данных  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  в области (18) равномерно относительно независимой переменной  $x$  из интервала (17).

С этой целью сделаем замену независимой переменной и искомых функций по формулам:

$$x - x^* = \xi, \quad y - y^* = \eta, \quad z - z^* = \zeta.$$

Тогда система (14) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= f_1(\xi + x^*, \eta + y^*, \zeta + z^*) \equiv \bar{f}_1(\xi, \eta, \zeta; x^*, y^*, z^*), \\ \frac{d\zeta}{d\xi} &= f_2(\xi + x^*, \eta + y^*, \zeta + z^*) \equiv \bar{f}_2(\xi, \eta, \zeta; x^*, y^*, z^*). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Начальные условия (16) заменятся новыми начальными условиями:

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (20)$$

Согласно сделанному выше предположению, правые части системы (19) удовлетворяют условиям теоремы Пикара относительно переменных  $\xi, \eta, \zeta$  в области

$$\left. \begin{aligned} |\xi + x^* - x_0| &\leq a, \\ |\eta + y^* - y_0| &\leq b, \\ |\zeta + z^* - z_0| &\leq b \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и содержат  $x^*, y^*$  и  $z^*$  в качестве параметров.

Заметим, что неравенства (21) будут выполняться, если, например, считать, что  $\xi, \eta, \zeta$  изменяются в области

$$|\xi| \leq \frac{a}{2}, \quad |\eta| \leq \frac{b}{2}, \quad |\zeta| \leq \frac{b}{2}, \quad (22)$$

а параметры  $x^*, y^*, z^*$  — в области

$$|x^* - x_0| \leq \frac{a}{2}, \quad |y^* - y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |z^* - z_0| \leq \frac{b}{2}. \quad (23)$$

В самом деле, при этих условиях мы будем иметь:

$$|\xi + x^* - x_0| \leq |\xi| + |x^* - x_0| \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,$$

$$|\eta + y^* - y_0| \leq |\eta| + |y^* - y_0| \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

$$|\zeta + z^* - z_0| \leq |\zeta| + |z^* - z_0| \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$



Следовательно, правые части системы (19) удовлетворяют всем условиям теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров, когда  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x^*, y^*, z^*$  изменяются соответственно в областях (22) и (23).

Поэтому система (19) имеет единственное решение:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta(\xi, x^*, y^*, z^*), \\ \zeta &= \zeta(\xi, x^*, y^*, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

с начальными условиями (20), определенное и непрерывное как функция от независимой переменной  $\xi$  и параметров  $x^*, y^*, z^*$ , когда  $\xi$  изменяется в интервале

$$|\xi| \leq \frac{h}{2}, \quad (25)$$

а  $x^*, y^*, z^*$  — в области (23). При этом решение (24) непрерывно как функция параметров  $x^*, y^*, z^*$  равномерно относительно независимой переменной  $\xi$  в интервале (25).

Возвращаясь в формулах (24) к старым переменным  $x, y, z$ , получим решение (15) (почему?):

$$\begin{aligned} y &= y^* + \eta(x - x^*, x^*, y^*, z^*) \equiv \varphi(x, x^*, y^*, z^*), \\ z &= z^* + \zeta(x - x^*, x^*, y^*, z^*) \equiv \psi(x, x^*, y^*, z^*). \end{aligned}$$

Это есть решение системы (14) с начальными условиями (16). Из (25) вытекает, что оно определено как функция независимой переменной  $x$  в области

$$|x - x^*| \leq \frac{h}{2}.$$

Последнее неравенство будет, например, выполнено, если считать, что независимая переменная  $x$  изменяется в окрестности точки  $x = x_0$ , определяемой неравенством

$$|x - x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega,$$

а начальное значение  $x^*$  отличается от  $x_0$  по абсолютной величине не больше, чем на  $\omega$ :

$$|x^* - x_0| \leq \omega.$$

Действительно, мы будем иметь тогда, что

$$\begin{aligned} |x - x^*| &= |x - x_0 + x_0 - x^*| \leq |x - x_0| + |x^* - x_0| \leq \\ &\leq \frac{h}{2} - \omega + \omega = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, решение (15) будет непрерывной функцией от  $x$  и от начальных данных  $x^*, y^*, z^*$ , когда  $x$  изменяется в интервале (17), а  $x^*, y^*, z^*$  — в области (18). При этом решение (15) будет непрерывной функцией от  $x^*, y^*, z^*$  в области (18), равномерно относительно  $x$  из интервала (17).

*З а м е ч а н и е.* Если система (14') — линейная, т. е. имеет вид

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

причем все  $p_{kl}(x)$  и  $f_k(x)$  непрерывны в интервале  $|x-x_0| \leq a$ , то решение (15') с начальными условиями (16') будет непрерывной функцией от  $x$  в интервале

$$|x-x_0| \leq \frac{a}{2} - \omega \quad \left( 0 \leq \omega < \frac{a}{4} \right) \quad (27)$$

и начальных данных  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  в области

$$|x^*-x_0| \leq \omega, |y_1^*| < \infty, \dots, |y_n^*| < \infty, \quad (28)$$

причем решение (15') есть непрерывная функция от  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  в области (28) равномерно относительно  $x$  из интервала (27).\*

Для линейного уравнения первого порядка непрерывная зависимость решения от начальных данных вытекает непосредственно из формулы общего решения в форме Коши.

*З а м е ч а н и е.* Можно показать, что для решений систем дифференциальных уравнений вида (14'), правые части которых непрерывны и ограничены в некоторой области  $D$ , непрерывная зависимость решений от начальных данных вытекает из единственности решения задачи Коши с любыми начальными данными из области  $D$  [119, с. 75].

Более полное исследование вопроса о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных содержится в работе [7].

**133. Понятие об устойчивости решения (движения) в смысле Ляпунова.** Если правые части системы (14') определены и непрерывны лишь в конечном (замкнутом) промежутке изменения независимой переменной  $x$ , то из предыдущего пункта следует, что при выполнении условий теоремы Пикара, любые два решения, имеющие достаточно близкие начальные значения, будут сколь угодно близки между собою в некотором конечном интервале изменения  $x$ .

Если же правые части системы (14') определены и непрерывны при всех значениях  $x \geq x_0$ , то в случае, когда какие-либо два решения системы также определены при всех значениях  $x \geq x_0$ , возникает вопрос: можем ли мы гарантировать наперед заданную бли-

---

\* Однако в отличие от случая, рассмотренного в доказанной выше теореме, здесь нет гарантии, что  $\delta$  можно выбрать независимо от выбора начальных данных  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ .

зость этих решений при всех значениях независимой переменной, больших начального значения последней, если взять начальные значения искомых функций достаточно близкими?

Рассмотрим некоторое решение системы (14') и будем сравнивать его со всеми другими решениями, имеющими начальные значения, близкие к начальным значениям рассматриваемого решения. Если при этом окажется, что рассматриваемое решение таково, что все другие решения, имеющие начальные значения, достаточно близкие к начальным значениям рассматриваемого решения, будут сколь угодно близки к нему при всех  $x \geq x_0$ , то оно называется устойчивым в смысле Ляпунова.

**Пример 1.** Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= -2y - 2z. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{-x} (y_0 \cos x + (y_0 + z_0) \sin x), \\ z &= e^{-x} (z_0 \cos x - (2y_0 + z_0) \sin x), \end{aligned} \right\}$$

где произвольные постоянные  $y_0$  и  $z_0$  суть начальные значения искомых функций при  $x=0$ .

Рассмотрим частное решение

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{-x} \sin x, \\ z &= e^{-x} (\cos x - \sin x) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

с начальными значениями искомых функций

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 1$$

при  $x=0$ .

Возьмем решение

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= e^{-x} (\delta \cos x + (1 + 2\delta) \sin x), \\ \bar{z} &= e^{-x} ((1 + \delta) \cos x - (1 + 3\delta) \sin x) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

с измененными начальными значениями искомых функций

$$\bar{y}_0 = y_0 + \delta = \delta, \quad \bar{z}_0 = z_0 + \delta = 1 + \delta$$

при (том же значении аргумента)  $x=0$ .





Таким образом, в случае устойчивости невозмущенного решения (34) все возмущенные решения (35), соответствующие достаточно малым возмущениям, будут при всех значениях  $t \geq t_0$  находиться в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения. По существу здесь речь идет о непрерывной зависимости решений от начальных значений искомых функций, равномерной относительно независимой переменной во всем полубесконечном интервале  $t \geq t_0$ .

**Определение 2.** Если существует хоть одно положительное число  $\varepsilon$ , для которого нельзя подобрать такое положительное число  $\delta$ , чтобы при выполнении неравенств (36) выполнялись бы и неравенства (37) при всех значениях  $t \geq t_0$ , то невозмущенное решение (34) называется *неустойчивым*.

**Определение 3.** Если невозмущенное решение (34) устойчиво и, кроме того, для всех решений (35), соответствующих достаточно малым возмущениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_n(t) = 0, \quad (38)$$

то оно называется *асимптотически устойчивым*.

Таким образом, в случае асимптотической устойчивости невозмущенного решения, все возмущенные решения (35), соответствующие достаточно малым возмущениям, будут не только находиться в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения при всех значениях  $t \geq t_0$ , но и будут асимптотически приближаться к нему при  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 4.** Если невозмущенное решение (34) неустойчиво, но для всякого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое положительное число  $\delta$ , что при возмущениях, подчиненных некоторым условиям вида

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0 \quad \text{или} \quad f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \geq 0,$$

где  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ , в случае выполнения неравенств (36) выполнялись бы и неравенства (37) при всех значениях  $t \geq t_0$ , то такое невозмущенное решение называется *условно устойчивым*.

Таким образом, в случае условной устойчивости для всякого числа  $\varepsilon > 0$  найдется соответствующее число  $\delta > 0$ , но не при всяких возмущениях, а лишь при возмущениях, подчиненных некоторым условиям.

Исследование данного решения на устойчивость производится легче всего, когда мы располагаем общим решением в форме Коши и если последнее имеет простую аналитическую структуру, в частности, если начальные значения искомых функций входят в общее решение линейно.

• **Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \quad (39)$$

Эта система обладает нулевым решением

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0. \quad (40)$$

Исследуем его на устойчивость.

Найдем общее решение в форме Коши. Мы уже знаем из п. 112, что система (39) имеет общее решение

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

определенное во всем пространстве  $(t, x, y)$ . Преобразуем его в общее решение в форме Коши. Для этого найдем решение с начальными условиями

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (42)$$

где  $x_0, y_0$  — любые заданные вещественные числа. Подставляя начальные условия (42) в систему (41), имеем

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_2,$$

так что искомым общим решением в форме Коши будет

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{aligned} \right\}$$

Оно тоже определено во всем пространстве  $(t, x, y)$ .

Из общего решения в форме Коши мы видим, что все возмущенные решения ( $|x_0| + |y_0| \neq 0$ ) определены при всех  $t \geq 0$ .

Кроме того, так как  $x_0$  и  $y_0$  входят в общее решение (41) линейно, а функции  $\cos t$  и  $\sin t$  ограничены при всех  $t \geq 0$ , то ясно, что выбором  $x_0$  и  $y_0$  можно сделать значения  $x(t)$  и  $y(t)$  при всех  $t \geq 0$  сколь угодно малыми, так что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется соответствующее  $\delta > 0$ .

В самом деле, считая, что

$$|x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \equiv \delta, \quad |y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \equiv \delta,$$

имеем

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad t \geq 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы (39) устойчиво. Заметим, что асимптотической устойчивости нет.

**Пример 3.** Нулевое решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

н е у с т о й ч и в о. В самом деле, из общего решения

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^t \equiv x(t), \\ y &= y_0 e^{-t} \equiv y(t) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

видно, что если  $x_0 > 0$  ( $< 0$ ), то  $x(t) \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ) при  $t \rightarrow \infty$ .

**Пример 4.** Нулевое решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned} \right\}$$

а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в о, ибо из общего решения

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^{-t} \equiv x(t), \\ y &= y_0 e^{-t} \equiv y(t) \end{aligned} \right\}$$

видим, что при всех  $t \geq 0$  будут выполняться неравенства:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x_0| < \varepsilon, \quad |y_0| < \varepsilon \quad (\delta = \varepsilon),$$

так что нулевое решение у с т о й ч и в о и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.*$$

**Пример 5.** Нулевое решение системы (43), как показано в примере 3, неустойчиво в смысле Ляпунова, если на возмущения не налагать никаких ограничений, кроме требования их малости. Но, подчинив возмущения  $x_0, y_0$  (при  $t=0$ ) ограничению  $x_0=0$ , мы получим, согласно формуле (44), что все возмущенные решения имеют вид  $x \equiv 0, y = y_0 e^{-t}$ , так что  $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ , если  $|y_0| < \varepsilon$  ( $\delta = \varepsilon$ ). Следовательно, нулевое решение системы (43) у с л о в н о у с т о й ч и в о ( $\delta = \varepsilon$ ).

В случаях, когда известно общее решение (общий интеграл) в элементарных функциях, вопрос об устойчивости невозмущенного решения (34) обычно решается непосредственной проверкой. Однако эти случаи, как уже неоднократно отмечалось выше, представляют собой редкое исключение. Поэтому возникла потребность в построении общей теории устойчивости решения, которая давала бы возможность судить об устойчивости невозмущенного решения (34) только по аналитической структуре правых частей системы (33).

Впервые строгая теория устойчивости решения (движения) была построена великим русским математиком академиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857—1918 гг.); им же впервые дано приведен-

---

\* Рассмотренное выше решение (30) системы (29) тоже асимптотически устойчиво.



ное выше определение устойчивости. Основы этой теории изложены в его знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 г. [97].

В этой диссертации А. М. Ляпунов предложил два метода исследования движения на устойчивость [59, 64, 130, 137]. Первый из них основан на специальном аналитическом представлении общего решения системы (33) («ряды Ляпунова»). Второй метод, называемый часто «прямым методом» или «методом функций Ляпунова», позволяет (не требуя знания общего решения системы (33)) сделать заключение об устойчивости решения (34) за счет использования специально конструируемых функций («функций Ляпунова»), по поведению которых в силу системы (33) и делается заключение о наличии и характере устойчивости решения (34).

Эти методы А. М. Ляпунова стали основными методами исследования решения (34) системы (33) на устойчивость и в работах многих математиков и механиков получили широкое применение и дальнейшее развитие [11—15, 24, 43, 54—57, 59, 60, 63—69, 75, 80, 81, 82, 100, 101, 106, 118, 123, 129, 130, 151—153, 158, 168, 170, 172—177, 179, 183, 184, 186].

Исключительные заслуги в развитии и применении теории устойчивости принадлежат члену-корреспонденту Академии наук СССР Николаю Гурьевичу Четаеву (1902—1959 гг.) [62].

Изложение теории устойчивости движения читатель найдет в книгах [8—11, 15, 21—24, 30, 33, 40, 44, 51, 54, 91, 98, 109, 119, 125, 128, 140, 151—153, 161, 164].

Наряду с устойчивостью и асимптотической устойчивостью в смысле Ляпунова часто представляют интерес свойства решений (движений) во всей области задания правых частей системы (33) как функций относительно  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и, в частности, во всем фазовом пространстве  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , когда эта область совпадает с ним.

Одним из таких свойств является свойство ограниченности решений [45, 56, 68, 117], а именно часто требуется выяснить, не будут ли все решения этой системы ограниченными при  $t \rightarrow \infty$ . Иногда важно знать, имеет ли система (34) вообще ограниченные (при  $t \rightarrow \infty$ ) решения (т. е. существует ли хотя бы одно ограниченное решение). Если все решения системы (33) ограничены при  $t \rightarrow \infty$ , причем заходят в одну и ту же область  $D$  и в дальнейшем не покидают ее, то система (33) называется *диссипативной*. Первые существенные результаты по диссипативным системам получены Болем. Большой вклад в развитие теории диссипативных систем внесли В. А. Плисс и В. А. Якубович.

Другое важное свойство, которым обладают решения (35) некоторых классов систем вида (33) — свойство (38), если оно выполнено при любых начальных значениях искомых функций, т. е. случай, когда все движения системы, где бы они ни начинались, с течением времени при-

ближаются к невозмущенному движению (34). При этом само движение (34) может быть и неустойчивым [81].

Если невозмущенное решение (34) системы (33) устойчиво в смысле Ляпунова и выполнено (38) при любых начальных значениях искоемых функций из области существования решений системы (33), то оно называется *устойчивым в целом*.

Если движение (34) устойчиво в смысле Ляпунова, то всегда существует некоторая область, окружающая начало координат, в которой проходят ограниченные движения; аналогично, если имеет место асимптотическая устойчивость, то существует область, в которой начинаются движения, обладающие свойством (38). Но эти области могут оказаться лишь частью области существования решений. В частности, если движение (34) асимптотически устойчиво, но неустойчиво в целом, то возникает задача нахождения той области, где начинаются движения, обладающие свойством (38). Эту область называют *областью асимптотической устойчивости в целом*. Исследованию такого рода вопросов применительно к теории автоматического регулирования посвящен ряд работ М. А. Айзермана, В. И. Зубова, А. М. Летова, А. И. Лурье, В. А. Якубовича и др.

Наряду с методами аналитического характера, предложенными Ляпуновым, для решения указанных задач широко применяются качественные методы исследования, развитые Н. П. Еругиным [58]. Полезным оказалось также соединение методов Ляпунова с качественными методами, примененное в работах Е. А. Барбашина, Н. П. Еругина, Б. А. Ершова, Н. Н. Красовского, В. А. Плисса, Б. Н. Скачкова, А. П. Тугова и др. В некоторых из этих работ качественные методы применяются к уравнению выше второго порядка.

#### 134. Теорема о дифференцируемости решения по начальным данным.

В п. 132 мы доказали, что при выполнении условий теоремы Пикара решение нормальной системы дифференциальных уравнений является непрерывной функцией от начальных данных. Но иногда одной непрерывности оказывается недостаточно и требуется установить существование производных по начальным данным. Для этого, конечно, придется на правые части системы дополнительные ограничения.

Пусть дана система уравнений (14')

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

правые части которой определены и непрерывны в области

$$R: |x-x_0| \leq a, \quad |y_1-y_1^{(0)}| \leq b, \dots, |y_n-y_n^{(0)}| \leq b,$$

и пусть в этой области существуют непрерывные частные производ-

ные  $\frac{\partial f_k}{\partial y_l}$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ). Тогда в области  $R$  выполнены оба условия теоремы Пикара.

Рассмотрим область

$$R': \quad |x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y_1^*-y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, \quad |y_n^*-y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2} \\ \left( 0 < \omega < \frac{h}{4}, \quad h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right) \right).$$

Возьмем в ней произвольную точку  $(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$  и построим решение системы (14'), проходящее через эту точку, т. е. решение (15')

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \dots, y_n^*) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

с начальными условиями (16')

$$y_1 = y_1^*, \dots, y_n = y_n^* \quad \text{при} \quad x = x^*.$$

Согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных (п. 132), решение (16') будет определено и непрерывно по  $x$  в интервале (17'), а по начальным данным  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  — в области (18').

**Т е о р е м а.** *При сделанных предположениях функции (15') имеют частные производные по начальным данным  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ , непрерывные как функции от независимой переменной  $x$  и начальных данных  $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$  в области:*

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad |x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y_1^*-y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, \\ |y_n^*-y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}.$$

Докажем эту теорему для  $n=2$ . В общем случае доказательство проводится аналогично.

Итак, рассмотрим систему (14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Предположим, что правые части этой системы непрерывны вместе с частными производными по  $y$  и  $z$  в области

$$R: |x-x_0| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b, \quad |z-z_0| \leq b.$$

Докажем, что если  $(x^*, y^*, z^*)$  — любая точка области

$$R': |x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y^*-y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |z^*-z_0| \leq \frac{b}{2}$$

$$\left( 0 < \omega < \frac{h}{4}, \quad h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right) \right),$$

то решение (15)

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x; x^*, y^*, z^*), \\ z &= \psi(x; x^*, y^*, z^*) \end{aligned} \right\}$$

с начальными условиями (16)

$$y = y^*, \quad z = z^* \quad \text{при} \quad x = x^*$$

имеет частные производные  $\frac{\partial y}{\partial x^*}, \frac{\partial z}{\partial x^*}, \frac{\partial y}{\partial y^*}, \frac{\partial z}{\partial y^*}$  и  $\frac{\partial y}{\partial z^*}, \frac{\partial z}{\partial z^*}$  по начальным данным  $x^*, y^*, z^*$  непрерывные как функции от  $x, x^*, y^*, z^*$  в области

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad |x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y^*-y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |z^*-z_0| \leq \frac{b}{2}. \quad (45)$$

Мы увидим ниже, что интересующие нас частные производные от решения (15) по начальным данным  $x^*, y^*$  и  $z^*$  образуют решения некоторой одной и той же линейной системы дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями.

Докажем сначала существование и непрерывность частных производных от решения (15) по  $y^*$ , т. е.  $\frac{\partial y}{\partial y^*}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y^*}$ . При этом если  $y^* = y_0 \pm \frac{b}{2}$ , то речь будет идти об односторонней производной.

Дадим начальному значению  $y^*$  приращение  $\Delta y^*$  настолько малое, чтобы точка  $(x^*, y^* + \Delta y^*, z^*)$  не выходила из  $R$ , и построим решение

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \varphi(x; x^*, y^* + \Delta y^*, z^*), \\ \bar{z} &= \psi(x; x^*, y^* + \Delta y^*, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

с начальными условиями

$$\bar{y} = y^* + \Delta y^*, \quad \bar{z} = z^* \quad \text{при} \quad x = x^*.$$

Введем в рассмотрение функции:

$$u = \frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*}, \quad v = \frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}. \quad (47)$$

Докажем, что существуют пределы этих функций при  $\Delta y^* \rightarrow 0$ .

С этой целью подставим последовательно функции (46) и (15) в систему (14). Так как эти функции образуют решения системы (14), то в результате получим тождества:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dx} &= f_1(x, \bar{y}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{dx} &= f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Вычтем почленно равенства (49) из равенств (48). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\bar{y} - y)}{dx} &= f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, z), \\ \frac{d(\bar{z} - z)}{dx} &= f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Преобразуем правые части этих равенств:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, z) &= (f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})) + \\ &+ (f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)) = \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} (\bar{y} - y) + \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)}{\bar{z} - z} (\bar{z} - z) = \frac{\partial f_1(x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y} (\bar{y} - y) + \\
 & + \frac{\partial f_1(x, y, z + \theta_{12}(\bar{z} - z))}{\partial z} (\bar{z} - z) = a_{11}(x, \Delta y^*) (\bar{y} - y) + \\
 & + a_{12}(x, \Delta y^*) (\bar{z} - z), \\
 & f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, z) = (f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})) + \\
 & + (f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)) = \frac{f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} (\bar{y} - y) + \\
 & + \frac{f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)}{\bar{z} - z} (\bar{z} - z) = \frac{\partial f_2(x, y + \theta_{21}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y} (\bar{y} - y) + \\
 & + \frac{\partial f_2(x, y, z + \theta_{22}(\bar{z} - z))}{\partial z} (\bar{z} - z) = a_{21}(x, \Delta y^*) (\bar{y} - y) + \\
 & + a_{22}(x, \Delta y^*) (\bar{z} - z),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} = \frac{\partial f_1(x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y}, \\
 a_{12}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_1(x, y, \bar{z}) - f_1(x, y, z)}{\bar{z} - z} = \frac{\partial f_1(x, y, z + \theta_{12}(\bar{z} - z))}{\partial z}, \\
 a_{21}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_2(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_2(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y} = \frac{\partial f_2(x, y + \theta_{21}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y}, \\
 a_{22}(x, \Delta y^*) &= \frac{f_2(x, y, \bar{z}) - f_2(x, y, z)}{\bar{z} - z} = \frac{\partial f_2(x, y, z + \theta_{22}(\bar{z} - z))}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Выражения  $a_{kl}(x, \Delta y^*)$  суть функции только от  $x$  и  $\Delta y^*$ . В самом деле, входящие в них функции  $y, z$  определяются формулами (15) и зависят от  $x, x^*, y^*, z^*$ , а функции  $\bar{y}, \bar{z}$  определяются формулами (46) и зависят от  $x, x^*, y^*, z^*$  и  $\Delta y^*$ . Но точка  $(x^*, y^*, z^*)$  фиксиро-

вана. Поэтому выражения  $a_{kl}$  зависят только от  $x$  и  $\Delta y^*$ . Величины  $\theta_{kl}$  тоже являются функциями от  $x$  и  $\Delta y^*$ , причем  $|\theta_{kl}| < 1$ .

Функции  $a_{kl}(x, \Delta y^*)$  непрерывны относительно  $x$  и  $\Delta y^*$  при  $|x - x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega$  и при достаточно малых  $|\Delta y^*|$ .

Убедимся в этом, например, для функции  $a_{11}(x, \Delta y^*)$ . Для этого обратимся к первой из формул (51).

Если в точке  $(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*)$ , принадлежащей вышеуказанной области, разность  $\bar{y} - y$  отлична от нуля, то непрерывность функции  $a_{11}(x, \Delta y^*)$  в этой точке следует из формулы

$$a_{11}(x, \Delta y^*) = \frac{f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) - f_1(x, y, \bar{z})}{\bar{y} - y}. \quad (52)$$

В самом деле, так как  $y$  есть непрерывная функция от  $x$  при  $x = \tilde{x}$ , а функции  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ , согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных, непрерывны относительно  $x$  и  $\Delta y^*$  при  $x = \tilde{x}$ ,  $\Delta y^* = \tilde{\Delta y}^*$  и все эти функции не выходят из области  $R$ , в которой функция  $f_1(x, y, z)$  непрерывна по всем своим аргументам, то функции  $f_1(x, \bar{y}, \bar{z})$  и  $f_1(x, y, \bar{z})$  будут непрерывными функциями от  $x$  и  $\Delta y^*$  при  $x = \tilde{x}$ ,  $\Delta y^* = \tilde{\Delta y}^*$  (как сложные функции от  $x$  и  $\Delta y^*$ ). Таким образом, числитель и знаменатель дроби (52) суть непрерывные функции от  $x$  и  $\Delta y^*$  в точке  $(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*)$ , причем знаменатель отличен от нуля в этой точке. Поэтому  $a_{11}(x, \Delta y^*)$  есть непрерывная функция от  $x$  и  $\Delta y^*$  в точке  $(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*)$ .

Если же точка  $(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*)$  такова, что в ней  $\bar{y} - y = 0$ , то воспользуемся формулой

$$a_{11}(x, \Delta y^*) = \frac{\partial f_1(x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y}.$$

Имеем

$$a_{11}(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*) = \frac{\partial f_1(\tilde{x}, y(\tilde{x}), \bar{z}(\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*))}{\partial y}$$

Если  $(x, \Delta y^*) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\Delta y}^*)$ , то разность  $\bar{y} - y$  стремится к нулю, и вследствие предположенной непрерывности частных производных от правых

частей системы (14) мы будем иметь:

$$\frac{\partial f_1(x, y + \theta_{11}(\bar{y} - y), \bar{z})}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial f_1(\tilde{x}, y(\tilde{x}), \bar{z}(\tilde{x}, \tilde{\Delta}y^*))}{\partial y},$$

т. е.

$$a_{11}(x, \Delta y^*) \rightarrow a_{11}(\tilde{x}, \tilde{\Delta}y^*),$$

а это и означает, что функция  $a_{11}(x, \Delta y^*)$  непрерывна в точке  $(\tilde{x}, \tilde{\Delta}y^*)$ .

В частности, функции  $a_{kl}(x, \Delta y^*)$  непрерывны и при  $\Delta y^* = 0$ , причем мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \\ a_{12}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}, \\ a_{21}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y}, \\ a_{22}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

После указанных преобразований система (50) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(\bar{y} - y)}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*) (\bar{y} - y) + a_{12}(x, \Delta y^*) (\bar{z} - z), \\ \frac{d(\bar{z} - z)}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*) (\bar{y} - y) + a_{22}(x, \Delta y^*) (\bar{z} - z). \end{aligned} \right.$$

Разделив уравнения этой системы на  $\Delta y^*$ , получим следующие тождества

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*}\right)}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*) \frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*} + a_{12}(x, \Delta y^*) \frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}, \\ \frac{d\left(\frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}\right)}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*) \frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*} + a_{22}(x, \Delta y^*) \frac{\bar{z} - z}{\Delta y^*}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$



Из тождеств (54) следует, что функции (47) являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= a_{11}(x, \Delta y^*)u + a_{12}(x, \Delta y^*)v, \\ \frac{dv}{dx} &= a_{21}(x, \Delta y^*)u + a_{22}(x, \Delta y^*)v. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Найдем значения функций (47) при  $x=x^*$ . Полагая в формулах (47)  $x=x^*$  и принимая во внимание начальные данные решений (15) и (46), получаем

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=x^*} &= \frac{\bar{y}|_{x=x^*} - y|_{x=x^*}}{\Delta y^*} = \frac{(y^* + \Delta y^*) - y^*}{\Delta y^*} = 1, \\ v|_{x=x^*} &= \frac{\bar{z}|_{x=x^*} - z|_{x=x^*}}{\Delta y^*} = \frac{z^* - z^*}{\Delta y^*} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, функции (47) являются решением системы (55) с начальными условиями

$$u=1, \quad v=0 \quad \text{при} \quad x=x^*. \quad (56)$$

Система (55) линейная, причем согласно доказанному выше, ее коэффициенты  $a_{hl}(x, \Delta y^*)$  непрерывны относительно независимой переменной  $x$  при  $|x-x_0| \leq \frac{h}{2}$  —  $\omega$  и относительно параметра  $\Delta y^*$  при достаточно малом  $|\Delta y^*|$  и, в частности, при  $\Delta y^*=0$ . Поэтому система (55) имеет единственное решение

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x; x^*, 1, 0; \Delta y^*), \\ v &= v(x; x^*, 1, 0; \Delta y^*), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям (56) и содержащее  $\Delta y^*$  в качестве параметра. Согласно замечанию 1 п. 131, это решение есть непрерывная функция от  $\Delta y^*$  в точке  $\Delta y^*=0$ . Вследствие этого существуют пределы функций  $u$  и  $v$  при  $\Delta y^* \rightarrow 0$ .

Но эти пределы есть не что иное, как частные производные  $\frac{\partial u}{\partial y^*}, \frac{\partial v}{\partial y^*}$ .

Таким образом, существование частных производных от решения (15) по  $y^*$  доказано.

Докажем теперь, что эти производные непрерывны как функции от  $x$  и начальных данных  $x^*, y^*, z^*$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что предельные функции

$$U = \frac{\partial y}{\partial y^*}, \quad V = \frac{\partial z}{\partial y^*} \quad (57)$$

являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} V, \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} U + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} V \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

с начальными условиями:

$$U=1, \quad V=0 \quad \text{при} \quad x=x^*, \quad (59)$$

т. е. с теми же начальными условиями, что и функции (47).

В самом деле, переходя к пределу в тождествах (55) при  $\Delta y^* \rightarrow 0$  и принимая во внимание формулы (53), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\partial y}{\partial y^*}\right)}{dx} &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^*} + \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y^*}, \\ \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y^*}\right)}{dx} &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^*} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y^*}, \end{aligned} \right\}$$

откуда и следует, что функции (57) являются решением системы (58). Далее, из формул (56) мы видим, что значения, принимаемые функциями (47) при  $x=x^*$ , не зависят от  $\Delta y^*$ . Поэтому пределы этих функций при  $\Delta y^* \rightarrow 0$ , т. е. функции (57), принимают те же значения при  $x=x^*$ , что и функции (47). Таким образом, функции (57) образуют решение системы (58) с начальными условиями (59).

Система (58) линейная, причем коэффициенты ее суть непрерывные функции от независимой переменной  $x$  и от параметров  $x^*, y^*, z^*$  в области (45). Последнее вытекает из того, что в силу п. 132 функции  $y$  и  $z$  зависят непрерывно от  $x$  и  $x^*, y^*, z^*$  в области (45) и не выходят из области  $R$ , а частные производные  $\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}$  непрерывны по  $x, y, z$  в этой области, так

что коэффициенты системы (58), рассматриваемые как сложные функции от  $x, x^*, y^*, z^*$ , будут непрерывны в области (45).

Одно из начальных данных решения (57), а именно начальное значение независимой переменной является, очевидно, функцией от параметра  $x^*$  и притом непрерывной (в то время как остальные начальные данные не зависят от параметров).

Поэтому вследствие замечания 2 п. 131 решение системы (58) с начальными условиями (59) непрерывно относительно  $x, x^*, y^*, z^*$  в той же области (45), а так как этим решением как раз и являются частные производные от решения (15) по начальному значению  $y^*$ :  $\frac{\partial y}{\partial y^*}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y^*}$ , то последние суть непрерывные функции от независимой переменной  $x$  и начальных данных  $x^*, y^*, z^*$  в области (45).

Существование и непрерывность частных производных  $\frac{\partial y}{\partial z^*}, \frac{\partial z}{\partial z^*}$  доказывается аналогично. При этом оказывается, что эти частные производные будут решениями системы (58) с начальными условиями:

$$U=0, \quad V=1 \quad \text{при} \quad x=x^*. \quad (60)$$

Докажем теперь существование и непрерывность частных производных от решения (15) по начальному значению независимой переменной:  $\frac{\partial y}{\partial x^*}, \frac{\partial z}{\partial x^*}$ .

Поступая так же, как и при доказательстве существования частных производных  $\frac{\partial y}{\partial y^*}, \frac{\partial z}{\partial y^*}$ , дадим начальному значению  $x^*$  приращение  $\Delta x^*$ , беря последнее настолько малым, чтобы точка  $(x^* + \Delta x^*, y^*, z^*)$  не вышла из области  $R$ , и построим решение:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y} &= \varphi(x; x^* + \Delta x^*, y^*, z^*), \\ \tilde{z} &= \psi(x; x^* + \Delta x^*, y^*, z^*) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

с начальными условиями:

$$\tilde{y} = y^*, \quad \tilde{z} = z^* \quad \text{при} \quad x = x^* + \Delta x^*.$$

Введем в рассмотрение функции:

$$u = \frac{\tilde{y} - y}{\Delta x^*}, \quad v = \frac{\tilde{z} - z}{\Delta x^*}. \quad (62)$$

Докажем, что эти функции имеют пределы, когда  $\Delta x^* \rightarrow 0$ .

С этой целью подставим решения (15) и (61) в систему (14) и вычтем почленно вторые тождества из первых. Получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\tilde{y}-y)}{dx} &= f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_1(x, y, z), \\ \frac{d(\tilde{z}-z)}{dx} &= f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Преобразуя правые части этой системы так же, как мы преобразовывали правые части системы (50), получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\tilde{y}-y)}{dx} &= b_{11}(x, \Delta x^*) (\tilde{y}-y) + b_{12}(x, \Delta x^*) (\tilde{z}-z), \\ \frac{d(\tilde{z}-z)}{dx} &= b_{21}(x, \Delta x^*) (\tilde{y}-y) + b_{22}(x, \Delta x^*) (\tilde{z}-z), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_{11}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_1(x, y, \tilde{z})}{\tilde{y}-y} = \frac{\partial f_1(x, y + \theta_{11}(\tilde{y}-y), \tilde{z})}{\partial y} \\ b_{12}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_1(x, y, \tilde{z}) - f_1(x, y, z)}{\tilde{z}-z} = \frac{\partial f_1(x, y, z + \theta_{12}(\tilde{z}-z))}{\partial z} \\ b_{21}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z}) - f_2(x, y, \tilde{z})}{\tilde{y}-y} = \frac{\partial f_2(x, y + \theta_{21}(\tilde{y}-y), \tilde{z})}{\partial y} \\ b_{22}(x, \Delta x^*) &= \frac{f_2(x, y, \tilde{z}) - f_2(x, y, z)}{\tilde{z}-z} = \frac{\partial f_2(x, y, z + \theta_{22}(\tilde{z}-z))}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Можно доказать, что функции  $b_{hl}(x, \Delta x^*)$  непрерывны относительно  $x$  и  $\Delta x^*$  при  $|x-x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega$  и при достаточно малом  $|\Delta x^*|$ . В частности, они будут непрерыв-

ными функциями от  $\Delta x^*$  и при  $\Delta x^*=0$ , причем

$$\left. \begin{aligned} b_{11}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y}, \\ b_{12}(x, 0) &= \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z}, \\ b_{21}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y}, \\ b_{22}(x, 0) &= \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Разделив оба уравнения системы (63) на  $\Delta x^*$ , получим тождества

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\tilde{y}-y}{\Delta x^*}\right)}{dx} &= b_{11}(x, \Delta x^*) \frac{\tilde{y}-y}{\Delta x^*} + b_{12}(x, \Delta x^*) \frac{\tilde{z}-z}{\Delta x^*}, \\ \frac{d\left(\frac{\tilde{z}-z}{\Delta x^*}\right)}{dx} &= b_{21}(x, \Delta x^*) \frac{\tilde{y}-y}{\Delta x^*} + b_{22}(x, \Delta x^*) \frac{\tilde{z}-z}{\Delta x^*}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Отсюда видно, что функции (62) образуют решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= b_{11}(x, \Delta x^*) u + b_{12}(x, \Delta x^*) v, \\ \frac{dv}{dx} &= b_{21}(x, \Delta x^*) u + b_{22}(x, \Delta x^*) v. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Найдем значения функций (62) при  $x=x^*$ . Полагая в формулах (62)  $x=x^*$  и принимая во внимание начальные данные решения (15), получаем

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=x^*} &= \frac{\tilde{y}|_{x=x^*}-y|_{x=x^*}}{\Delta x^*} = \frac{\tilde{y}|_{x=x^*}-y^*}{\Delta x^*}, \\ v|_{x=x^*} &= \frac{\tilde{z}|_{x=x^*}-z|_{x=x^*}}{\Delta x^*} = \frac{\tilde{z}|_{x=x^*}-z^*}{\Delta x^*}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Но из тождеств

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y} &= y^* + \int_{x^* + \Delta x^*}^x f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}) dx, \\ \tilde{z} &= z^* + \int_{x^* + \Delta x^*}^x f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z}) dx \end{aligned} \right\}$$

при  $x = x^*$  находим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}|_{x=x^*} &= y^* + \int_{x^* + \Delta x^*}^{x^*} f_1(x, \tilde{y}, \tilde{z}) dx, \\ \tilde{z}|_{x=x^*} &= z^* + \int_{x^* + \Delta x^*}^{x^*} f_2(x, \tilde{y}, \tilde{z}) dx. \end{aligned} \right\}$$

Применим к интегралам справа теорему о среднем. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}|_{x=x^*} &= y^* - f_1(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*)) \Delta x^*, \\ \tilde{z}|_{x=x^*} &= z^* - f_2(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*)) \Delta x^*. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя в формулы (66), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=x^*} &= -f_1(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*)), \\ v|_{x=x^*} &= -f_2(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*)). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, функции (62) являются решением системы (65) с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} u &= -f_1(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_1 \Delta x^*, \Delta x^*)), \\ v &= -f_2(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \tilde{y}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*), \\ &\quad \tilde{z}(x^* + \theta_2 \Delta x^*, \Delta x^*)) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

при  $x = x^*$ .

Система (65) линейная. Коэффициенты этой системы, как указано выше, непрерывны относительно независимой переменной  $x$  при  $|x - x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega$  и относительно параметра  $\Delta x^*$  в точке  $\Delta x^* = 0$ . Начальные значения решения (62) как функции параметра  $\Delta x^*$ , очевидно, также непрерывны в точке  $\Delta x^* = 0$  (так как  $|\theta_1| < 1$ ,  $|\theta_2| < 1$ ). А тогда, в силу замечания 2 п. 131, функции (62) будут непрерывными функциями параметра  $\Delta x^*$  в точке  $\Delta x^* = 0$ . Поэтому функции (62) имеют пределы при  $\Delta x^* \rightarrow 0$ , равные соответственно

$$U = \frac{\partial y}{\partial x^*}, \quad V = \frac{\partial z}{\partial x^*}, \quad (68)$$

чем и доказывается существование частных производных от решения (15) по начальному значению независимой переменной.

Для доказательства непрерывности этих частных производных заметим, что функции (68) образуют решение системы дифференциальных уравнений (58) с начальными условиями:

$$U = -f_1(x^*, y^*, z^*), \quad V = -f_2(x^*, y^*, z^*) \quad \text{при} \quad x = x^*, \quad (69)$$

в чем нетрудно убедиться, если перейти к пределу при  $\Delta x^* \rightarrow 0$  в тождествах (65) и в начальных условиях (67).

Коэффициенты системы (58) являются непрерывными функциями  $x$  и параметров  $x^*, y^*, z^*$  в области (45). Начальные данные решения (68), как это видно из (69), суть непрерывные функции параметров  $x^*, y^*, z^*$  в области  $R'$ . Поэтому, согласно теореме замечания 2 п. 131, решение (68) будет непрерывной функцией  $x$  и начальных значений  $x^*, y^*, z^*$  в области (45), чем и доказывается непрерывность производных  $\frac{\partial y}{\partial x^*}, \frac{\partial z}{\partial x^*}$  относительно независимой переменной  $x$  и начальных данных  $x^*, y^*, z^*$  в области (45).

Итак, все частные производные от решения (15) по начальным данным  $x^*, y^*, z^*$  существуют и непрерывны относительно  $x, x^*, y^*, z^*$ . При этом частные производные по каждому (одному и тому же) начальному данному образуют решение одной и той же однородной линейной системы (58) с соответствующими начальными условиями (59), (60) или (69).

Еще раз обращаем внимание читателя на то, что начальные данные  $x^*, y^*, z^*$  входят в качестве параметров как в коэффициенты

системы (58) (ибо под  $y$  и  $z$  мы должны подразумевать функции (15)), так и в соответствующие начальные условия.

**Замечание.** Если система (14') линейная, т. е. имеет вид (26), и если коэффициенты  $f_{kl}(x)$  и функции  $f_k(x)$  непрерывны в интервале  $|x-x_0| \leq a$ , то решение (15') имеет частные производные по начальным значениям  $x^*$ ,  $y_1^*$ ,  $\dots$ ,  $y_n^*$ , непрерывные в области

$$\left. \begin{aligned} |x-x_0| &\leq \frac{a}{2} - \omega, \quad |x^*-x_0| \leq \omega, \quad |y_1^*| < \infty, \dots, \\ |y_n^*| < \infty \quad \left( 0 < \omega < \frac{a}{4} \right).^* \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

**135. Обобщения.** Можно доказать следующие более общие утверждения [140, с. 298—307; 119, с. 83—87].

1. Если правые части системы (14') непрерывны в области  $R$  вместе с частными производными  $t$ -го порядка по совокупности переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то решение (15') имеет все частные производные порядка  $t$  по совокупности начальных значений искомых функций  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$  и те частные производные  $t$ -го порядка по совокупности всех начальных данных  $x^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ , в которых дифференцирование по  $x^*$  производится один раз; если, кроме того, правые части системы (14') имеют частные производные  $p$ -го порядка ( $p \leq t$ ) по независимой переменной  $x$ , непрерывные в области  $R$ , то решение (15') имеет частные производные порядка  $t$  по совокупности всех начальных данных  $x^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ , в которых дифференцирование по  $x^*$  производится не более  $p+1$  раз.

В частности, решение (15') линейной системы (26), у которой коэффициенты  $r_{kl}(x)$  и функции  $f_k(x)$  непрерывны в интервале  $|x-x_0| \leq a$ , имеет частные производные всех порядков по начальным значениям  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ , непрерывные в области (70), и частные производные любого порядка по совокупности всех начальных данных, в которых дифференцирование по  $x^*$  производится один раз.

Если, кроме того, предположить, что коэффициенты  $r_{kl}(x)$  и функции  $f_k(x)$  имеют производные  $p$ -го порядка, непрерывные в  $|x-x_0| \leq a$ , то решение (15') имеет частные производные любого порядка по совокупности начальных данных  $x^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ , непрерывные в области (70), в которых дифференцирование по  $x^*$  производится не более чем  $p+1$  раз.

2. Если правые части системы (1') непрерывно дифференцируемы по параметрам, то и решение (4') будет непрерывно дифференцируемо по параметрам. В частности, это имеет место для систем, правые части которых линейны относительно параметров.

---

\* Для одного линейного уравнения первого порядка справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из формулы общего решения в форме Коши.



3. Если правые части системы (1') имеют непрерывные смешанные частные производные по параметрам порядка  $m$ , то и решение (4') имеет непрерывные соответствующие смешанные частные производные по параметрам порядка  $m$ .

4. Все теоремы пп. 131, 132, 134, а также их обобщения 1—3, подобно теореме Пикара; переносятся с соответствующими изменениями и на уравнения  $n$ -го порядка.

#### § 24. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

**136. Теорема существования общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений [53].** Теорема Пикара, устанавливая достаточные условия существования и единственности решения конкретной задачи Коши, обладает, однако, тем недостатком, что, изменив начальные данные, мы вынуждены заново проводить все рассуждения и вычисления, связанные с применением метода последовательных приближений.

Поэтому представляется весьма важным доказательство такой теоремы, которая устанавливала бы существование общего решения, позволяющего получать решение любой задачи Коши, с начальными данными из области существования этого общего решения, за счет надлежащего выбора произвольных постоянных.

В настоящем параграфе мы докажем, что если в заданной области  $R$  выполнены условия теоремы Пикара, то существует общее решение, определенное в некоторой области  $R'$ , лежащей внутри области  $R$ . При этом доказательство теоремы существования общего решения мы будем проводить для нормальной системы дифференциальных уравнений, так же как это имело место при доказательстве теоремы Пикара.

Пусть дана система

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1')$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leq b, \dots, |y_n - y_n^{(0)}| \leq b$$

условиям теоремы Пикара. Тогда существует единственное решение

$$y_k = \varphi_k(x; x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_k = y_k^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R$ .

Построим область

$$R_{\frac{1}{2}}: |x - x_0| \leq \frac{a}{2}, |y_1 - y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, |y_n - y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}.$$

Возьмем в ней произвольную точку  $(x_0, \bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)})$  и построим область

$$\bar{R}_{\frac{1}{2}}: |x - x_0| \leq \frac{a}{2}, |y_1 - \bar{y}_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, |y_n - \bar{y}_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}.$$

Очевидно, область  $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$  содержится в области  $R$ . Поэтому в ней выполнены условия теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение

$$y_k = \varphi_k(x; x_0, \bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (2')$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_k = \bar{y}_k^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо относительно  $x$  в интервале

$$|x - x_0| \leq \frac{h}{2}$$

и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$ .

Далее, согласно теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных (см. п. 132), решение (2') будет непрерывной функцией  $x$  и начальных значений искомых функций  $\bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}$  в области

$$|x - x_0| \leq \frac{h}{2}, |\bar{y}_1^{(0)} - y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, |\bar{y}_n^{(0)} - y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2}.$$

(Мы пишем  $\frac{h}{2}$  вместо  $\frac{h}{2} - \omega$ , так как здесь начальное значение независимой переменной не варьируется.)

**Т е о р е м а.** При сделанных предположениях относительно правых частей системы (1') формулы (2'), где величины  $\bar{y}_1^{(0)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}$  рассматриваются как произвольные постоянные, подчиненные условиям

$$|\bar{y}_1^{(0)} - y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \dots, |\bar{y}_n^{(0)} - y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{2},$$

дают общее решение системы (1') в области

$$D: |x - x_0| \leq \frac{h}{4}, |y_1 - y_1^{(0)}| \leq \frac{b}{4}, \dots, |y_n - y_n^{(0)}| \leq \frac{b}{4},$$

содержащей внутри себя точку  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ .

Докажем эту теорему для  $n=2$ . В общем случае доказательство проводится аналогично.

Итак, рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположим, что правые части ее удовлетворяют в области

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq b$$

условиям теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x; x_0, y_0, z_0), \\ z &= \psi(x; x_0, y_0, z_0), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Это решение определено и непрерывно в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R$ .

Построим область

$$R_{\frac{1}{2}}: |x - x_0| \leq \frac{a}{2}, |y - y_0| \leq \frac{b}{2}, |z - z_0| \leq \frac{b}{2}.$$

Возьмем в ней произвольную точку  $(x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  и построим область

$$\bar{R}_{\frac{1}{2}}: |x-x_0| \leq \frac{a}{2}, |y-\bar{y}_0| \leq \frac{b}{2}, |z-\bar{z}_0| \leq \frac{b}{2}.$$

Очевидно, область  $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$  содержится в области  $R$ . Поэтому в ней выполнены все условия теоремы Пикара и, следовательно, существует единственное решение

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x; x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), \\ z &= \psi(x; x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = \bar{y}_0, \quad z = \bar{z}_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Это решение заведомо определено и непрерывно в интервале

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2}$$

и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $\bar{R}_{\frac{1}{2}}$ .

Решение (2) будет непрерывной функцией от  $x, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  в области

$$|x-x_0| \leq \frac{h}{2}, \quad |\bar{y}_0-y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |\bar{z}_0-z_0| \leq \frac{b}{2}.$$

Докажем, что формулы (2), где величины  $\bar{y}_0$  и  $\bar{z}_0$  рассматриваются как произвольные постоянные, подчиненные условиям

$$|\bar{y}_0-y_0| \leq \frac{b}{2}, \quad |\bar{z}_0-z_0| \leq \frac{b}{2},$$

дают общее решение системы (1) в области

$$D: |x-x_0| \leq \frac{h}{4}, \quad |y-y_0| \leq \frac{b}{4}, \quad |z-z_0| \leq \frac{b}{4},$$

содержащей внутри себя точку  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Достаточно (см. п. 106) доказать, что система (2) разрешима относительно  $\bar{y}_0$  и  $\bar{z}_0$  в области  $D$ .

С этой целью возьмем в области  $D$  любую точку  $(x^*, y^*, z^*)$  и построим область

$$R_{\frac{1}{4}}^*: |x-x^*| \leq \frac{a}{4}, \quad |y-y^*| \leq \frac{b}{4}, \quad |z-z^*| \leq \frac{b}{4}.$$

Так как область  $R_{\frac{1}{4}}^*$  содержится в  $R_{\frac{1}{2}}$ , то в ней выполнены все условия теоремы Пикара, и, следовательно, существует единственное решение

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x; x^*, y^*, z^*), \\ z &= \psi(x; x^*, y^*, z^*), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y^*, \quad z = z^* \quad \text{при} \quad x = x^*.$$

Решение (3) заведомо определено и непрерывно в интервале

$$|x - x^*| \leq \frac{h}{4}$$

и не выходит при этих значениях  $x$  из области  $R_{\frac{1}{4}}^*$ , а следовательно, и из  $R_{\frac{1}{2}}$ .

Решение (3) будет определено и в точке  $x = x_0$ , ибо

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{h}{4}$$

(по самому выбору точки  $(x^*, y^*, z^*)$ ). Обозначим значения функций, образующих решение (3), в точке  $x = x_0$  через  $\bar{y}_0, \bar{z}_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_0 &= \varphi(x_0; x^*, y^*, z^*), \\ \bar{z}_0 &= \psi(x_0; x^*, y^*, z^*). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Точка  $(x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ , где  $\bar{y}_0$  и  $\bar{z}_0$  определены формулами (4), принадлежит области  $R_{\frac{1}{2}}$  (почему?).

Построим теперь решение (2), проходящее именно через эту точку  $(x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ . Решение (3), в силу (4), тоже проходит через эту точку, так что, согласно теореме о единственности, решения (2) и (3) совпадают.

Следовательно, решение (2) проходит через точку  $(x^*, y^*, z^*)$ , т. е. мы имеем

$$\left. \begin{aligned} y^* &= \varphi(x^*; x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), \\ z^* &= \psi(x^*; x_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Равенства (5) и (4) показывают, что система (2) разрешима относительно  $\bar{y}_0$  и  $\bar{z}_0$  в области  $D$ , так как  $(x^*, y^*, z^*)$  — любая точка области  $D$ .

Теорема доказана.

### 137. Замечания.

1. В формулах (2) роль произвольных постоянных играют начальные значения  $\bar{y}_0, \bar{z}_0$  искомых функций, так что эти формулы дают общее решение системы (1) в форме Коши. Но произвольные постоянные могут входить в общее решение не обязательно в качестве начальных значений искомых функций. Для большинства уравнений, рассмотренных в предыдущих главах, именно данное обстоятельство и имело место. Объясняется это тем, что в получаемых там общих решениях произвольные постоянные входили в общее решение в результате применения того или иного специального приема интегрирования этих уравнений.

Напомним, что для линейного уравнения первого порядка мы получили также общее решение и в форме Коши, где роль произвольной постоянной играло начальное значение  $y_0$  искомой функции.

В дальнейшем (п. 205) мы увидим, что в случае линейной системы произвольные постоянные, входящие в общее решение, легко выражаются через начальные значения искомых функций.

Для нелинейных уравнений точное выражение произвольных постоянных через начальные значения искомых функций фактически чаще всего не выполнимо, ибо приводит к решению сложных уравнений.

2. Доказанная теорема о существовании общего решения, так же как и теорема Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений, распространяется и на уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

**138. Доказательство существования  $n$  независимых интегралов нормальной системы  $n$  уравнений.** В п. 109 мы доказали, что нормальная система (1')

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

не может иметь более чем  $n$  независимых интегралов, но вопрос о том, при каких условиях система (1') имеет  $n$  независимых интегралов, остался открытым. Теперь, опираясь на теорему существования общего решения, мы сможем ответить и на этот вопрос.

Предположим, что правые части системы (1') удовлетворяют в области

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y_1 - y_1^{(0)}| \leq b, \dots, |y_n - y_n^{(0)}| \leq b$$



тельно мы приходим к следующему утверждению: *система (1') имеет  $n$  и только  $n$  независимых (непрерывно дифференцируемых) интегралов, определенных в некоторой области, содержащей внутри себя точку  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , в окрестности которой правые части системы (1') удовлетворяют обоим условиям теоремы Пикара и, кроме того, непрерывно дифференцируемы по  $y_1, \dots, y_n$ .*

## § 25. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

**139. Особые точки уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.** Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Наряду с этим уравнением мы, как сказано в п. 1, всегда будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (1')$$

используя последнее в окрестности тех точек, в которых  $f(x, y)$  обращается в бесконечность.

Точка  $(x_0, y_0)$  называется *особой точкой* уравнения (1), если в любой достаточно малой окрестности ее правые части уравнений (1) и (1') не удовлетворяют условиям теоремы Пикара. Все остальные точки называются *неособыми*.

Особая точка  $(x_0, y_0)$  называется *изолированной особой точкой*, если в некоторой достаточно малой окрестности ее нет других особых точек.

Точка  $(x_0, y_0)$  будет, например, особой, если уравнение (1) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (2)$$

причем  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ . Такую особую точку будем называть *особой точкой типа  $\frac{0}{0}$* .

Если правая часть уравнения (1) обращается в бесконечность в точке  $(x_0, y_0)$ , но у перевернутого уравнения (1') правая часть удовлетворяет в некоторой окрестности этой точки условиям теоремы Пикара, то точка  $(x_0, y_0)$  будет *неособой точкой* для перевернутого, а следовательно и для исходного уравнения. В этом случае уравнение (1') имеет единственную интегральную кривую  $x = x(y)$ , проходящую через точку



$(x_0, y_0)$ , причем касательная к ней в этой точке параллельна оси ординат.

В качественной теории дифференциальных уравнений показывается, что знание конфигурации особых точек, т. е. расположения их на плоскости  $(x, y)$  и поведения интегральных кривых в окрестности особых точек, вообще говоря, дает возможность судить о поведении интегральных кривых во всей области задания дифференциального уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}. \quad (3)$$

Здесь все точки плоскости  $(x, y)$  неособые, кроме, быть может, точек, лежащих на оси  $Ox$ . В каждой точке оси  $Ox$  правая часть уравнения обращается в бесконечность. Однако у перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = y \quad (3')$$

правая часть в точках оси  $Ox$  равна нулю, т. е. имеет уже конечное значение и удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, точки оси  $Ox$  тоже являются неособыми точками уравнения (3). Через каждую точку  $(x_0, 0)$  оси  $Ox$  проходит единственная интегральная кривая  $x = x(y)$ , имеющая в этой точке, согласно уравнению (3'), касательную, параллельную оси  $Oy$ . И в самом деле, интегрируя уравнение (3') при начальном условии  $x = x_0$  при  $y = 0$ , мы получаем единственную интегральную кривую

$$x = \frac{y^2}{2} + x_0 \quad \text{или} \quad y^2 = 2(x - x_0),$$

которая, очевидно, проходит через точку  $(x_0, 0)$  и имеет в ней касательную, параллельную оси  $Oy$ . Таким образом, уравнение (3) не имеет особых точек.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение (ср. п. 4, пример 3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \quad (4)$$

Здесь все точки плоскости  $(x, y)$ , не лежащие на оси  $Oy$ , являются неособыми. В точках оси  $Oy$  будем рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad (4')$$

откуда следует, что все точки, не лежащие на оси  $Ox$ , тоже неособые. Остается рассмотреть начало координат:  $x=0, y=0$ . В этой точке правые части обоих уравнений (4) и (4') обращаются в неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ; так что они даже не определены и, следовательно, условия теоремы Пикара ни в какой окрестности этой точки не выпол-

няются ни для одного из этих уравнений. Поэтому начало координат является особой точкой уравнения (4), причем последняя является изолированной особой точкой типа  $\frac{0}{0}$ .

Интегрируя уравнение (4), мы получим семейство полупрямых

$$y=Cx \quad (x \neq 0), \quad x=0 \quad (y \neq 0),$$

примыкающих к особой точке — началу координат. Этот факт выявляет некоторую особенность поведения семейства интегральных кривых в окрестности изолированной особой точки типа  $\frac{0}{0}$ . В следующем примере мы встретимся с другой особенностью поведения интегральных кривых в окрестности особой точки.

**Пример 3.** Возьмем уравнение (ср. п. 4, пример 4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (5)$$

Здесь начало координат, так же как и в предыдущем примере, является изолированной особой точкой типа  $\frac{0}{0}$ . Общий интеграл уравнения (5) имеет вид

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

так что все интегральные кривые замкнуты и содержат особую точку — начало координат — внутри себя и ни одна из интегральных кривых не примыкает к особой точке.

**Пример 4.** Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad-bc \neq 0) \quad (6)$$

с дробно-линейной однородной правой частью начало координат будет изолированной особой точкой типа  $\frac{0}{0}$ . Поведение интегральных кривых уравнения (6) в окрестности особой точки — начала координат — мы рассматриваем в п. 141.

**Пример 5.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}.$$

Правая часть этого уравнения определена и непрерывна в верхней полуплоскости ( $y \geq 0$ ). Все точки верхней полуплоскости являются неособыми, исключая точки, лежащие на оси  $Ox$ . Все последние точки являются особыми, так как в них нарушено условие Липшица. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Big|_{y=0} = \infty.$$

В рассматриваемом случае особые точки не изолированы, они образуют собою линию. Такая линия называется *особой линией* дифференциального уравнения.



Дадим теперь понятие о точках равновесия системы дифференциальных уравнений.

Пусть  $(x_0, y_0)$  есть особая точка типа  $\frac{0}{0}$  для уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

т. е.

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

Рассмотрим стационарную систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= P(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $t$  — время, а  $x$  и  $y$  — координаты точки на фазовой плоскости  $(x, y)$ . Так как в точке  $(x_0, y_0)$  функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  обращаются в нуль, то система (8) имеет решение  $x \equiv x_0, y \equiv y_0$  — состояние покоя. Такая точка  $(x_0, y_0)$  называется *точкой равновесия (покоя)* системы (8).

Система (8) *равносильна* уравнению (2) в том смысле, что каждая интегральная кривая уравнения (2) является траекторией системы (8) на фазовой плоскости  $(x, y)$  и обратно каждая траектория системы (8) на фазовой плоскости  $(x, y)$ , отличная от точки равновесия  $x = x_0, y = y_0$ , есть интегральная кривая уравнения (2).

Из сказанного ясно, что *точка равновесия системы (8) является, вообще говоря, особой точкой типа  $\frac{0}{0}$  соответствующего ей уравнения (2)*. В связи с этим часто точки равновесия системы (8) называют *особыми точками* этой системы.

Отметим, что к точке равновесия  $(x_0, y_0)$  системы (8) могут асимптотически приближаться движения

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

определяемые этой системой и отличные от состояния равновесия, т. е.  $x(t) \neq x_0, y(t) \neq y_0$ , и

$$\lim_{t \rightarrow \infty (-\infty)} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty (-\infty)} y(t) = y_0.$$



называется *точкой равновесия (покоя)* системы (10). Исключая из системы (10) время  $t$ , мы получим систему  $n-1$  уравнений, например, вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx_n} &= \frac{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{aligned} \right\}$$

для которой точка  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  будет особой точкой типа  $\frac{0}{0}$ .

Точка равновесия системы (10) является, вообще говоря, *особой точкой (точкой неопределенности)* соответствующей ей системы дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned}$$

Данное выше определение точки равновесия распространяется и на систему, правые части которой явно содержат время. Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Точка  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ , в которой при всех  $t \geq t_0$  правые части системы (11) одновременно обращаются в нуль:

$$\left. \begin{aligned} X_1(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ X_2(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ X_n(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

называется *точкой равновесия (покоя)* системы (11).

*Исследование поведения траекторий нормальной системы дифференциальных уравнений в окрестности точки равновесия составляет одну из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений.*

При этом исследовании обычно считают, что рассматриваемая точка равновесия находится в начале координат, т. е. полагают

$$x_1^{(0)}=0, \quad x_2^{(0)}=0, \quad \dots, \quad x_n^{(0)}=0,$$

ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи подстановки:

$$\xi_1=x_1-x_1^{(0)}, \quad \xi_2=x_2-x_2^{(0)}, \quad \dots, \quad \xi_n=x_n-x_n^{(0)}.$$

Вопрос о поведении траекторий нормальной системы дифференциальных уравнений (11) в окрестности точки равновесия

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad \dots, \quad x_n=0$$

тесно связан с вопросом об устойчивости (в смысле Ляпунова) нулевого решения (невозмущенного движения):

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad x_n \equiv 0,$$

определяемого этой системой.

**141. Поведение интегральных кривых уравнения с дробно-линейной однородной правой частью в окрестности особой точки** [140, с. 76—84; 119, с. 87—97].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}, \quad (12)$$

где  $a, b, c, d$  — постоянные вещественные числа, причем  $ad+bc \neq 0$ .<sup>\*</sup> Для этого уравнения точка  $x=0, y=0$  является единственной изолированной особой точкой типа  $\frac{0}{0}$ .

Так как в точке  $x=0, y=0$  поле направлений не определено, то мы считаем, что через нее не проходит ни одна интегральная кривая уравнения (12) (см. п. 4).

Если мы заменим уравнение (12) равносильной ему системой двух линейных уравнений: \*\*

<sup>\*</sup> В противном случае правая часть уравнения (12) обратится в постоянную.

<sup>\*\*</sup> Система (13) равносильна уравнению (12) в том смысле, что траекториями движений, определяемых системой (13) и отличных от состояния покоя, являются интегральные кривые уравнения (12) (см. п. 140).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

то увидим, что особая точка  $x=0$ ,  $y=0$  уравнения (12) является точкой равновесия системы (13). Движение, начинающееся в этой точке, сводится к состоянию покоя

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0. \quad (14)$$

Но, как мы уже отметили выше, могут существовать движения  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , начинающиеся в неособых точках и стремящиеся к состоянию покоя (14) при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty (-\infty)} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty (-\infty)} y(t) = 0.$$

О траекториях таких движений на фазовой плоскости  $(x, y)$  мы будем говорить, что они *примыкают* к особой точке  $(0, 0)$ . Таким образом, *вопрос о наличии движений, определяемых системой (13), отличных от состояния покоя и стремящихся к состоянию покоя, равносильен вопросу о наличии интегральных кривых уравнения (12), примыкающих к особой точке  $x=0$ ,  $y=0$ .*

*Вопрос о наличии периодических решений системы (13) тесно связан с вопросом о существовании замкнутых интегральных кривых уравнения (12).*

*Вопрос об устойчивости невозмущенного движения (14) также, как мы увидим в дальнейшем, тесно связан с вопросом о поведении интегральных кривых уравнения (12) в окрестности особой точки.*

Говоря о поведении интегральных кривых уравнения (12) в окрестности особой точки, мы имеем в виду следующие вопросы: примыкают ли интегральные кривые (все или часть из них) к особой точке, если да, то с определенным (для каждой кривой) направлением (направлением касательной к интегральной кривой в особой точке) или же без определенного направления, если с определенным направлением, то имеет ли каждая интегральная кривая, примыкающая к особой точке, свое направление или все интегральные кривые, или хотя бы часть их, имеют одно и то же направление,\* и тогда, какое именно; если интегральные кривые не примыкают к особой точке, то лежит ли каждая из них в некоторой ограниченной части плоскости или нет?

С целью облегчения изучения качественной картины поведения интегральных кривых уравнения (12) в окрестности особой точки, упростим

---

\* Такое направление называется *критическим*.



это уравнение при помощи линейного преобразования

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — некоторые постоянные вещественные числа, причем  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .<sup>\*</sup> Это преобразование переводит окрестность особой точки  $x=0, y=0$  уравнения (12) в окрестность особой точки  $\xi=0, \eta=0$  преобразованного уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{c_1\xi + d_1\eta}, \quad (16)$$

причем (в силу условия  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ) так, что качественная картина поведения интегральных кривых остается без изменения.

Попытаемся выбрать коэффициенты преобразования (15)  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  так, чтобы преобразованное уравнение (16) имело вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}, \quad (17)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — некоторые постоянные числа.

Вычисляя дифференциалы от левых и правых частей формул (15), имеем

$$d\xi = \alpha dx + \beta dy,$$

$$d\eta = \gamma dx + \delta dy,$$

поэтому

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части на  $dx$  и заменим отношение  $\frac{dy}{dx}$  его значением из уравнения (12). Получим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma + \delta \frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta \frac{dy}{dx}} = \frac{\gamma + \delta \frac{ax + by}{cx + dy}}{\alpha + \beta \frac{ax + by}{cx + dy}}$$

---

<sup>\*</sup> Такое линейное преобразование, т. е. преобразование с определителем, отличным от нуля, называется *неособенным*.

или

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)}.$$

Очевидно, что правая часть этого уравнения примет в результате преобразования (15) искомый вид  $\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}$ , если числа  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — коэффициенты преобразования (15) — выбрать так, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\gamma(cx+dy) + \delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy) + \beta(ax+by)} = \frac{\lambda_1(\gamma x + \delta y)}{\lambda_2(\alpha x + \beta y)}.$$

Это тождество будет наверное выполнено, если

$$\left. \begin{aligned} \gamma(cx+dy) + \delta(ax+by) &= \lambda_1(\gamma x + \delta y), \\ \alpha(cx+dy) + \beta(ax+by) &= \lambda_2(\alpha x + \beta y). \end{aligned} \right\}$$

Приравнявая коэффициенты при  $x$  и  $y$ , получаем две системы:

$$\left. \begin{aligned} (c-\lambda_1)\gamma + a\delta &= 0, \\ d\gamma + (b-\lambda_1)\delta &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} (c-\lambda_2)\alpha + a\beta &= 0, \\ d\alpha + (b-\lambda_2)\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эти системы имеют ненулевые решения, если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

которое, раскрывая определитель, можно записать следующим образом

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0. \quad (20')$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12), а его корни — *характеристическими числами*.\*

Если характеристическое уравнение имеет два различных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то, решая системы (18) и (19), мы и найдем искомые числа  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ , причем условие  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  будет выполнено.

Действительно, в уравнении (12) коэффициенты  $a$  и  $d$  не равны нулю одновременно (в противном случае это уравнение уже имеет вид (17)).

---

\* В данном случае характеристические числа не равны нулю, ибо  $bc - ad \neq 0$ .

Пусть  $a \neq 0$ . Тогда из первых уравнений (18) и (19) находим:

$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{c-\lambda_1}{a}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{c-\lambda_2}{a}.$$

Отсюда, в силу того, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , получаем:  $\frac{\delta}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\alpha}$  или  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

Итак, в случае различных корней \* характеристического уравнения уравнение (12) при помощи подстановки вида (15) приводится к более простому уравнению (17).

Поведение интегральных кривых этого уравнения в окрестности особой точки  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  зависит от характера корней характеристического уравнения.

Случай 1.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные и одного знака. Не умаляя общности, будем считать, что  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ . Интегрируя уравнение (17), получаем

$$\ln|\eta| = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln|\xi| + \ln|C_1| \quad (\xi \neq 0), \quad \eta = 0 \quad (\xi \neq 0)$$

или

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi \neq 0), \quad C = \pm|C_1|. \quad (21)$$

Так как наряду с уравнением (17) мы должны рассматривать и перевернутое уравнение

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_2\xi}{\lambda_1\eta}, \quad (17')$$

то  $\xi=0$  ( $\eta \neq 0$ ), т. е. положительная и отрицательная части оси  $O\eta$ , являются интегральными кривыми уравнения (17). Эти интегральные кривые содержатся, впрочем, и в формуле (21) при  $C=\infty$ .

Все интегральные кривые (21) примыкают к особой точке. Действительно, мы имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Интегральные кривые  $\xi=0$  ( $\eta \neq 0$ ), очевидно, тоже примыкают к особой точке.

Таким образом, все интегральные кривые уравнения (17) примыкают к особой точке. (Здесь мы существенно воспользовались тем, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — величины одного знака.)

---

\* Случай кратных корней мы рассматриваем далее.

Выясним теперь вопрос о направлениях, под которыми интегральные кривые примыкают к особой точке. Для интегральных кривых семейства (21) имеем

$$\eta_{\xi}' = \pm C \frac{\lambda_1}{\lambda_2} |\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \quad (\xi \neq 0).$$

Так как  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , то  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 > 0$  и, следовательно,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta_{\xi}' = 0,$$

так что все эти интегральные кривые примыкают к особой точке с определенным и притом одним и тем же направлением (все они в особой точке касаются оси  $O\xi$ ). Интегральные кривые  $\xi=0$  ( $\eta \neq 0$ ) примыкают к особой точке тоже с определенным направлением (вдоль оси  $O\eta$ ), но отличным от направления интегральных кривых (21).

Итак, в рассматриваемом случае все интегральные кривые уравнения (17) примыкают к особой точке  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  и притом с определенным направлением. Особая точка такого типа называется *узлом* (рис. 38). Такой узел называется *простым*.

Так как в окрестности особой точки  $x=0$ ,  $y=0$  исходного уравнения (12) мы будем иметь ту же качественную картину расположения интегральных кривых, то особая точка  $x=0$ ,  $y=0$  уравнения (12) также называется *узлом*.

Случай 2.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные и разных знаков. В этом случае только четыре интегральные кривые  $\eta=0$  ( $\xi \neq 0$ ),  $\xi=0$  ( $\eta \neq 0$ ) примыкают к особой точке, все же остальные интегральные кривые, как показывает формула (21), не примыкают к особой точке, т. е.  $\eta$  не стремится к нулю, когда  $\xi \rightarrow 0$ . При этом каждая из этих интегральных кривых обладает тем свойством, что при  $\xi \rightarrow 0$  точка  $(\xi, \eta)$ , лежащая на ней, сначала приближается к особой точке  $(0, 0)$ , а затем начинает от нее удаляться. Особая точка такого типа называется *седлом* (рис. 39).<sup>\*</sup> В этом случае особая точка  $x=0$ ,  $y=0$  уравнения (12) также называется *седлом*.

Таким образом, в случае различных вещественных характеристических чисел мы имеем либо узел, либо седло.

Рассмотрим теперь случай комплексных характеристических чисел.

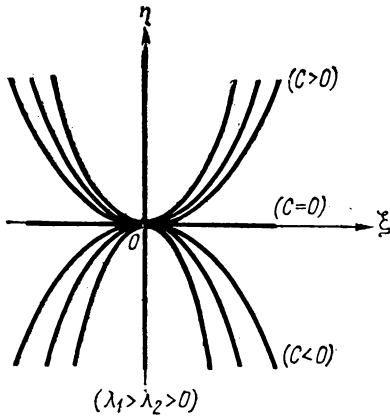
<sup>\*</sup> Интегральные кривые  $\eta=0$  ( $\xi \neq 0$ ),  $\xi=0$  ( $\eta \neq 0$ ) являются сепаратриссами седла.

С л у ч а й 3.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные, но не чисто мнимые,  $\lambda_1 = p + iq$ ,  $\lambda_2 = p - iq$  ( $p \neq 0$ ). Уравнение (17) принимает в этом случае вид

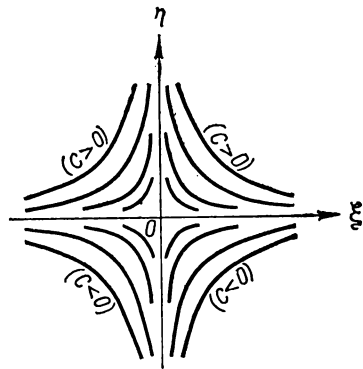
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p+iq}{p-iq} \frac{\eta}{\xi}. \quad (17'')$$

Найдем  $\alpha$  и  $\beta$  из системы (19), где  $\lambda_2 = p - iq$ . Затем, считая  $a \neq 0$  и полагая в системе (18)  $\gamma = \bar{\alpha}$ ,\* найдем, пользуясь системой (18), что

$$\delta = -\frac{c - \lambda_1}{a} \bar{\alpha} = -\frac{c - \bar{\lambda}_2}{a} \bar{\alpha} = \bar{\beta}.$$



Р и с. 38



Р и с. 39

Поэтому мы можем записать преобразование (15) в нашем случае так:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y. \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — комплексные, причем  $\eta = \bar{\xi}$ . Желая иметь дело с вещественными переменными, сделаем подстановку:

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv, \quad (22)$$

где  $u$  и  $v$  — вещественные переменные. Тогда уравнение (17'') переписывается так:

\* Через  $\bar{z}$  мы обозначаем комплексное число, сопряженное с  $z$ .

$$\frac{du-idv}{du+idv} = \frac{(p+iq)(u-iv)}{(p-iq)(u+iv)}$$

или

$$(du-idv)(pu+qv+i(pv-qu)) = (du+idv)(pu+qv+i(qu-pv)).$$

Замечая, что это равенство имеет вид  $\bar{z}=z$  и приравнивая нулю мнимые части, придем к уравнению

$$(pv-qu)du - (pu+qv)dv = 0. \quad (23)$$

Интегрируя это уравнение, находим (см. п. 61, формула

$$\sqrt{u^2+v^2} = Ce^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{v}{u}}. \quad (24)$$

Полученная формула содержит все решения уравнения (23).

Полагая

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi,$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты, мы можем переписать семейство интегральных кривых (24) в виде

$$r = Ce^{-\frac{p}{q} \varphi}. \quad (25)$$

Это логарифмические спирали на плоскости  $(u, v)$ . Из формулы (25) видно, что все интегральные кривые уравнения (23) примыкают к особой точке  $u=0, v=0$  (рис. 40) при  $\varphi \rightarrow \infty$ , если  $p$  и  $q$  одного знака (или при  $\varphi \rightarrow -\infty$ , если  $p$  и  $q$  противоположных знаков), но не имеют в ней определенного направления. Все интегральные кривые (25) бесконечное число раз обходят особую точку в одном и том же направлении, асимптотически приближаясь к ней. Та же качественная картина будет иметь место и в окрестности особой точки  $x=0, y=0$  исходного уравнения (12). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

Случай 4.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  чисто мнимые:  $\lambda_1=iq, \lambda_2=-iq$ . Полагая в (24)  $p=0$ , получим

$$u^2+v^2=C^2.$$

Отсюда видно, что все интегральные кривые уравнения (23), где  $p=0$ , суть окружности с центром в особой точке  $u=0, v=0$ , а интегральные кривые уравнения (12) суть эллипсы, окружающие особую точку  $x=0, y=0$ . В этом случае особая точка называется *центром* (рис. 41).

Итак, в случае различных характеристических чисел мы имеем четыре возможных типа особой точки: узел, седло, фокус и центр.

Рассмотрим теперь случай кратных характеристических чисел. В этом случае

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2}.$$

Система (19) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{c-b}{2} \alpha + a\beta &= 0, \\ d\alpha + \frac{b-c}{2} \beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

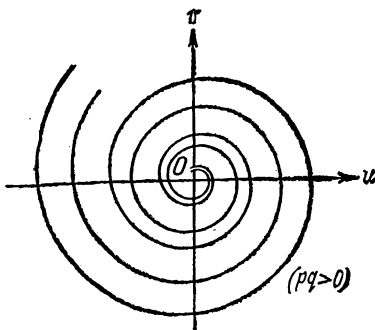


Рис. 40

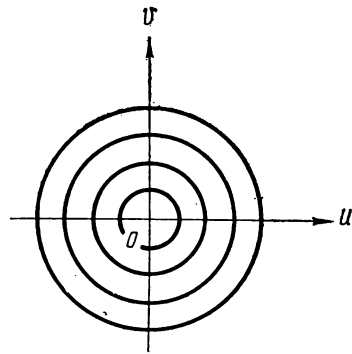


Рис. 41

причем определитель этой системы равен нулю по самому выбору числа  $\lambda$ . Поэтому

$$(b-c)^2 + 4ad = 0.*$$

Возможны два случая.

Случай 1. Система (26) не тождественная, т. е. не все коэффициенты ее равны нулю. Предположим, что  $a \neq 0$ .

Тогда, положив  $\alpha = a$ , получим  $\beta = \frac{b-c}{2}$ .

\* Это равенство легко получить и непосредственно из условия

$$\left( \frac{b+c}{2} \right)^2 - (bc - ad) = 0,$$

которое в нашем случае, очевидно, выполнено в силу теоремы Виета.

Сделаем теперь в уравнении (12) подстановку

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}y, \\ \eta &= y. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{dy}{adx + \frac{b-c}{2}dy} = \frac{\frac{dy}{dx}}{a + \frac{b-c}{2} \frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{ax+by}{cx+dy}}{a + \frac{b-c}{2} \frac{ax+by}{cx+dy}} = \\ &= \frac{ax+by}{a(cx+dy) + \frac{b-c}{2}(ax+by)} = \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b+c}{2}y}{\left(ac + \frac{b-c}{2}a\right)x + \left(ad + \frac{b-c}{2}b\right)y} = \\ &= \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b+c}{2}y}{\frac{b+c}{2}ax + \left(-\frac{(b-c)^2}{4} + \frac{b-c}{2}b\right)y} = \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b+c}{2}y}{\frac{b+c}{2}ax + \frac{b^2-c^2}{4}y} = \\ &= \frac{\left(ax + \frac{b-c}{2}y\right) + \frac{b+c}{2}y}{-\frac{b+c}{2}\left(ax + \frac{b-c}{2}y\right)} = -\frac{\xi + \lambda_1\eta}{\lambda_1\xi}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование (27) приводит уравнение (12) к уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \lambda_1\eta}{\lambda_1\xi} \quad (28)$$

с особой точкой  $\xi=0, \eta=0$ .

Выясним характер поведения интегральных кривых уравнения (28) в окрестности этой особой точки. Интегрируя уравнение (28), перепишем его так

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\eta}{\xi}.$$

Рассматривая это уравнение как однородное, полагаем  $\eta = z\xi$ . Тогда получим



$$\frac{dz}{d\xi} \xi = \frac{1}{\lambda_1},$$

откуда

$$z = \frac{1}{\lambda_1} \ln |\xi| + C,$$

и, следовательно, общим решением уравнения (28) будет

$$\eta = \xi \left( C + \frac{1}{\lambda_1} \ln |\xi| \right) \quad (\xi \neq 0). \quad (29)$$

Все интегральные кривые, определяемые формулой (29), примыкают к особой точке  $\xi=0, \eta=0$  (рис. 42,  $\lambda_1 > 0$ ), входя в нее с одним и тем же направлением (вдоль оси  $O\eta$ ), ибо

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta'_\xi = \pm \infty$$

(знак противоположен знаку  $\lambda$ ).

Очевидно, что обе части оси  $O\eta$  также являются интегральными кривыми, входящими в особую точку  $\xi=0, \eta=0$  и притом с тем же направлением, что и интегральные кривые (29).

Следовательно, в рассматриваемом случае особая точка  $\xi=0, \eta=0$  уравнения (28) и соответственно особая точка  $x=0, y=0$  уравнения (12) является узлом. Такой узел называется *вырожденным узлом*: все интегральные кривые уравнения (28) примыкают к особой точке  $\xi=0, \eta=0$  с одним и тем же направлением, в то время как в случае обыкновенного узла (рис. 38) две интегральные кривые уравнения (17), а именно полуоси оси  $O\eta$ , примыкали к особой точке  $\xi=0, \eta=0$  с направлением, отличным от направления всех других интегральных кривых.

Случай 2. Система (26) тождественная. В этом случае  $a=0, b=c, d=0$ , так что исходное уравнение (12) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Все интегральные кривые даются формулами

$$\left. \begin{aligned} y &= Cx & (x \neq 0), \\ x &= 0 & (y \neq 0). \end{aligned} \right\}$$

Все они примыкают к особой точке  $x=0, y=0$  с определенным (для каждой кривой) направлением, так что особая точка является узлом.

В отличие от ранее рассмотренных случаев узла, здесь каждая интегральная кривая примыкает к особой точке со своим направлением. Такой узел называется *диритическим* (*особым*) *узлом* (рис. 43).

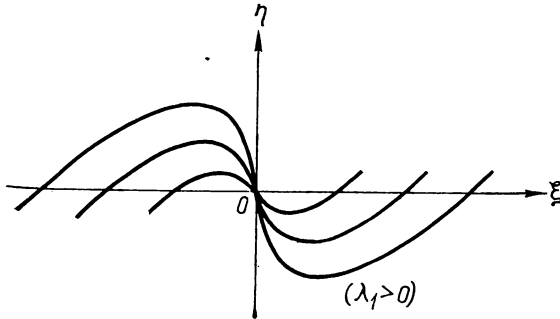


Рис. 42

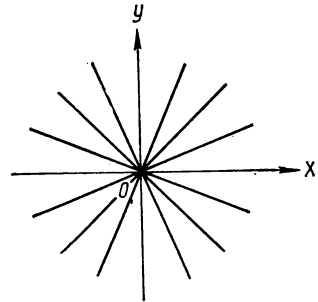


Рис. 43

Обратимся снова к системе (13)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\}$$

[113, с. 84—93; 126, с. 115—127; 161, с. 206—214], соответствующей рассмотренному уравнению (12).

Мы будем называть точку равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  этой системы *узлом*, *седлом*, *фокусом* или *центром*, если для уравнения (12) точка  $x=0$ ,  $y=0$  является соответственно узлом, седлом, фокусом или центром.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (20'')$$

называется *характеристическим уравнением* этой системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (13) в предположении, что  $ad - bc \neq 0$ , т. е. что уравнение (20'') не имеет нулевых корней. Решение этого вопроса зависит от вида корней характеристического уравнения.

Если корни уравнения (20'')  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различны и вещественны, то при помощи неособенного линейного преобразования (15) система (13) может быть приведена к виду \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_2 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_1 \eta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

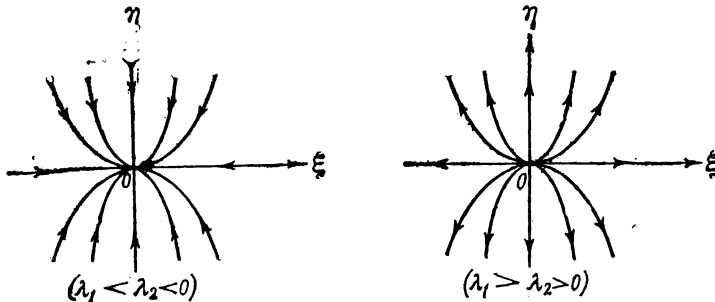
Общее решение системы (30) имеет вид

$$\xi = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

или (в форме Коши)

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda_2 t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda_1 t}. \quad (31)$$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и одного знака, то из формул (31) следует, что при отрицательных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  нулевое решение  $\xi \equiv 0, \eta \equiv 0$  системы (30) будет асимптотически устойчиво, а при положительных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  оно будет неустойчивым.



Р и с. 44

Действительно, если  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , то решение  $\xi \equiv 0, \eta \equiv 0$  устойчиво, причем  $\delta = \varepsilon$  (ср. п. 133, пример 4). Кроме того, из формул (31) видно, что  $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, в этом случае решение  $\xi \equiv 0, \eta \equiv 0$  асимптотически устойчиво. Если же  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , то из формул (31) видно, что решение  $\xi \equiv 0, \eta \equiv 0$  неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (30), изображены схематически на рис. 44.\*\*

\* Система (30) соответствует уравнению (17): она получается из этого уравнения, если переписать его в виде  $\frac{d\eta}{\lambda_1 \eta} = \frac{d\xi}{\lambda_2 \xi} = dt$ .

\*\* Здесь и во всех последующих рисунках стрелки указывают направление движения по траектории при возрастании времени  $t$ .

Так как преобразование (15) неособенное, то нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (13) будет иметь такой же характер устойчивости (почему?).

Таким образом, в случае узла невозмущенное движение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  будет асимптотически устойчиво, если оба корня характеристического уравнения отрицательны, и неустойчиво, если оба корня положительны.

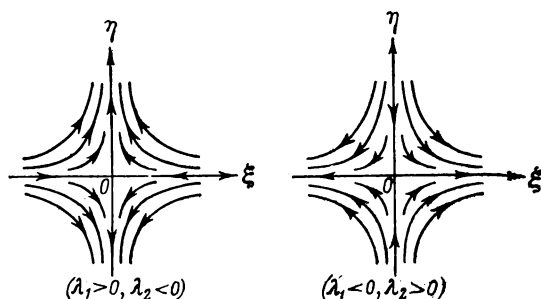


Рис. 45

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и знаки их противоположны, то из формул (31) следует, что решение  $\xi \equiv 0$ ,  $\eta \equiv 0$  системы (30) неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (30), в рассматриваемом случае изображены схематически на рис. 45.

Решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (13) также будет неустойчиво (почему?).

Таким образом, в случае седла невозмущенное движение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  будет неустойчивым.

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные, но не чисто мнимые, т. е.  $\lambda_1 = p + iq$ ,  $\lambda_2 = p - iq$  ( $p \neq 0$ ), то система (13) при помощи неособенных линейных преобразований (15') и (22) может быть приведена к виду\*

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= pu + qv, \\ \frac{dv}{dt} &= -qu + pv. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

---

\* Эта система соответствует уравнению (23). Перепишав (23) в виде  $\frac{du}{pu + qv} = \frac{dv}{pv - qu} = dt$ , мы и приходим к системе (32).

Система (32) имеет, согласно (24), первый интеграл

$$\sqrt{u^2+v^2} = C_1 e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{v}{u}}, \quad (33)$$

не зависящий от  $t$ . Этому первому интегралу соответствует однопараметрическое семейство траекторий на фазовой плоскости  $(u, v)$ , которые представляют собою логарифмические спирали (рис. 40),

$$r = C_1 e^{-\frac{p}{q} \varphi},$$

где  $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$ .

Найдем другой первый интеграл (он будет содержать явно время  $t$  (почему?)). Умножая первое из уравнений (32) на  $u$ , второе на  $v$  и складывая почленно, получим

$$u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = p(u^2+v^2) \quad \text{или} \quad \frac{d(u^2+v^2)}{dt} = 2p(u^2+v^2),$$

откуда

$$u^2+v^2 = C_2 e^{2pt}. \quad (34)$$

Из найденных первых интегралов (33) и (34) виден характер движений, определяемых системой (32).

Перепишав (34) в виде

$$u^2+v^2 = (u_0^2+v_0^2) e^{2pt},$$

где  $u_0 = u(0)$ ,  $v_0 = v(0)$ , заключаем, что при  $p < 0$  нулевое решение  $u \equiv 0$ ,  $v \equiv 0$  системы (32) устойчиво и притом асимптотически. Если же  $p > 0$ , то решение  $u \equiv 0$ ,  $v \equiv 0$  неустойчиво. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (32), изображены схематически на рис. 46.

Нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (13) также будет асимптотически устойчивым при  $p < 0$  и неустойчивым при  $p > 0$ .

Таким образом, в случае фокуса невозмущенное движение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  будет асимптотически устойчиво, если характеристические числа имеют отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если последняя положительна.

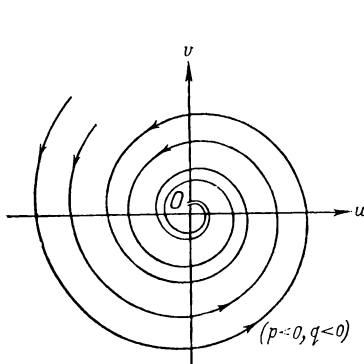
Если характеристические числа чисто мнимые, т. е.  $\lambda_1 = iq$ ,  $\lambda_2 = -iq$ , то система (32) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= qv, \\ \frac{dv}{dt} &= -qu. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

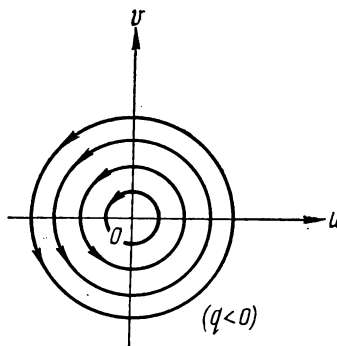
Эта система имеет первый интеграл

$$u^2 + v^2 = C_1^2 \quad \text{или} \quad u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2,$$

откуда видно, что нулевое решение  $u \equiv 0, v \equiv 0$  устойчиво, но неасимптотически. Траектории возмущенных движений, определяемых системой (35), изображены схематически на рис. 47.



Р и с. 46



Р и с. 47

Нулевое решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы (13) будет также неасимптотически устойчиво.

Таким образом, в случае центра невозмущенное движение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неасимптотически устойчиво.

Наконец, в случае кратных корней характеристического уравнения следует различать две возможности.

1. Система (13) преобразуется в такую

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \lambda_1 \eta. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

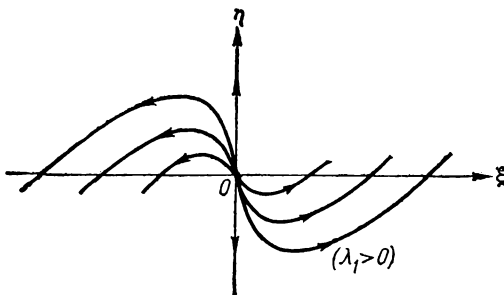
В этом случае точка  $\xi = 0, \eta = 0$ , а следовательно, и точка равновесия  $x = 0, y = 0$  системы (13) является вырожденным узлом. Интегрируя последовательно уравнения системы (36), находим, что ее общее решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta &= e^{\lambda_1 t} (C_2 + C_1 t) \end{aligned} \right\}$$

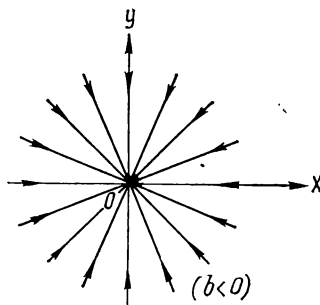
или (в форме Коши)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \\ \eta &= e^{\lambda_1 t} (\eta_0 + \xi_0 t). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда видно, что решение  $\xi \equiv 0, \eta \equiv 0$  асимптотически устойчиво, если  $\lambda_1 < 0$ , и неустойчиво при  $\lambda_1 > 0$ . Траектории возмущенных движений, определяемых системой (36), изображены схематически на рис. 48 ( $\lambda_1 > 0$ ).



Р и с. 48



Р и с. 49

*Невозмущенное движение  $x \equiv 0, y \equiv 0$ , определяемое системой (27), будет асимптотически устойчиво при  $\lambda_1 < 0$  и неустойчиво при  $\lambda_1 > 0$ .*

2. Система (13) имеет вид \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= bx, \\ \frac{dy}{dt} &= by. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Точка  $x=0, y=0$  есть критический узел. Из общего решения

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{bt}, \\ y &= C_2 e^{bt} \end{aligned} \right\}$$

или (в форме Коши)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 e^{bt}, \\ y &= y_0 e^{bt} \end{aligned} \right\}$$

видно, что *невозмущенное движение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  асимптотически устойчиво при  $b < 0$  и неустойчиво при  $b > 0$ .* Траектории возмущенных дви-

\* Это соответствует случаю, когда система (26) тождественная.

жений, определяемых системой (37) в случае  $b < 0$  изображены схематически на рис. 49.

**142. Один физический пример.** Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массы  $m$  по оси  $Ox$ . Уравнение этого движения имеет вид (ср. п. 84, уравнение (4))

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (38)$$

где  $f$  — сила, действующая на точку. Это уравнение можно привести к системе двух уравнений первого порядка (ср. п. 112, система (46'))

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{m} f(t, x, y). \end{aligned} \right\}$$

Предположим [119, с. 195], что на точку действует *восстанавливающая сила*

$$-ax,$$

притягивающая ее к началу координат, и *сила сопротивления среды*, пропорциональная скорости

$$-b \frac{dx}{dt}.$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  постоянны,  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ . Например, это будет иметь место в задаче о вертикальных колебаниях тела массы  $m$ , подвешенного на пружине, около положения равновесия  $x=0$ , если считать, что упругая сила пружины действует в сторону положения равновесия и пропорциональна удалению  $x$  от положения равновесия и что колебание происходит в среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости и имеет направление, обратное направлению скорости [138, т. II, с. 94].

При сделанных предположениях уравнение (38) примет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b \frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \quad (39)$$



где  $h = \frac{b}{2m} \geq 0$ ,  $k^2 = \frac{a}{m} > 0$ , а соответствующей уравнению (39) системой дифференциальных уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -k^2x - 2hy. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Точке равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  этой системы соответствует особая точка  $x=0$ ,  $y=0$  уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k^2x - 2hy}{y}. \quad (41)$$

Изучив поведение решений системы (40) или уравнения (41) в окрестности точки  $x=0$ ,  $y=0$ , мы тем самым изучим поведение решений системы (40) относительно нулевого решения  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  этой системы, а следовательно, и поведение решений уравнения (39) относительно его нулевого решения  $x \equiv 0$ .

Характеристическим уравнением системы (40) будет

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 & -2h-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \quad (42)$$

Характер корней этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

зависит от соотношения между упругой силой пружины и силой сопротивления среды.

Рассмотрим сначала случай  $h=0$ , т. е. когда колебания происходят в среде без сопротивления. В этом случае дифференциальное уравнение (39) и соответствующая ему система (40) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \quad (43)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -k^2x. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (45)$$

Корни уравнения (45)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — чисто мнимые. Точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (44) является центром. Невозмущенное решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  этой системы неасимптотически устойчиво. Всякое решение  $x=x(t)$  уравнения (43) ограничено при всех значениях  $t$  вместе с его производной по времени  $\frac{dx}{dt}$  (любое движение, определяемое уравнением (43), ограничено вместе со скоростью этого движения при  $t \rightarrow \infty$ ).

Предположим теперь, что  $h > 0$ , т. е. колебания происходят в среде с сопротивлением. Здесь возможны три случая.

С л у ч а й 1.  $h^2 - k^2 > 0$  (случай большого сопротивления среды). В этом случае оба корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения (42) вещественны и отрицательны (ибо  $h > 0$ ). Точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (40) — обыкновенный узел. Нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (40) асимптотически устойчиво. Всякое решение  $x=x(t) \neq 0$  уравнения (39) будет стремиться к нулевому решению  $x \equiv 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

С л у ч а й 2.  $h^2 = k^2$ . Здесь  $\lambda_1 = \lambda_2 = -h < 0$ . Точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (40) — вырожденный узел. Нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  этой системы асимптотически устойчиво. Любое решение  $x=x(t) \neq 0$  уравнения (39) стремится к нулевому решению  $x \equiv 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

С л у ч а й 3.  $h^2 - k^2 < 0$  (случай малого сопротивления среды). В этом случае  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут комплексными сопряженными, но не чисто мнимыми (ибо  $h \neq 0$ ). Точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (40) — фокус. Нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  этой системы асимптотически устойчиво, ибо вещественная часть характеристических чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательна. Всякое решение  $x=x(t) \neq 0$  уравнения (39) будет стремиться к нулевому решению  $x \equiv 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при наличии сопротивления среды ( $h > 0$ ) точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (40), соответствующей уравнению (39), становится узлом или фокусом. Невозможен случай седла. Кроме того, наличие сопротивления среды делает устойчивость нулевого решения  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (40) асимптотической. Все движения

$x = x(t) \not\equiv 0$ , определяемые уравнением (39), обладают свойством

$$x(t) \rightarrow 0, \quad \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Мы получили качественную характеристику решений уравнения (39) и соответствующей ему системы (40), не интегрируя их. В п. 180 будут получены те же (и некоторые дополнительные) результаты на основании формулы общего решения уравнения (39).

**143. Понятие о проблеме центра и фокуса.** В п. 141 мы рассмотрели поведение интегральных кривых уравнения (12)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad-bc \neq 0)$$

и равносильной ему системы (13)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx+dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax+by. \end{aligned} \right\}$$

При этом качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки  $x=0, y=0$  вполне определялась корнями характеристического уравнения (20'')

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Поставим теперь вопрос: сохранится ли качественная картина, если мы добавим в правой части уравнения (12) (или, что то же, в правых частях системы (13)) члены высших степеней относительно  $x$  и  $y$ ? Естественно, что на этот вопрос в общем случае следует ожидать отрицательный ответ. Тогда возникает другой вопрос. В каких условиях и какие члены высших степеней или вообще какие функции от  $x$  и  $y$ , обращающиеся в нуль вместе с  $x$  и  $y$ , можно добавить, чтобы качественная картина не нарушалась? Те же вопросы возникают и относительно устойчивости невозмущенного движения  $x \equiv 0, y \equiv 0$ .

Ответ на эти вопросы дают качественная теория дифференциальных уравнений и теория устойчивости движения.

Актуальность этих вопросов для приложений вытекает хотя бы из физического примера, рассмотренного в п. 142, если предположить, что

$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  является нелинейной функцией относительно  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$  и имеет вид

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = -bx - a \frac{dx}{dt} + P\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где  $P$  — степенной ряд относительно  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ , не содержащий свободного члена и членов первой степени относительно  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ .

Оказывается, что для системы вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + \psi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + \varphi(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  в некоторой окрестности точки  $x=0, y=0$  имеют непрерывные частные производные, причем  $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$  и

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \frac{|\varphi_x'| + |\varphi_y'| + |\psi_x'| + |\psi_y'|}{(|x| + |y|)^\alpha} = 0, \quad (\alpha > 0),$$

качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки вполне определяется корнями характеристического уравнения (20''), когда последние имеют вещественные части, отличные от нуля, так что если при сделанных предположениях для укороченной системы (13)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\}$$

мы имеем узел, седло или фокус, то то же самое мы будем иметь и для полной системы (46) [140, с. 84—94].

Указанные условия для  $\varphi$  и  $\psi$  будут в частности выполнены, если  $\varphi$  и  $\psi$  разлагаются в ряды по степеням  $x$  и  $y$  без свободных и линейных членов.

Если же корни характеристического уравнения (20'') чисто мнимые, т. е. в случае, когда точка  $x=0, y=0$  является центром для системы (13),

мы не можем ручаться, что она будет центром и для системы (46). Более того, для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = y + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + Q(x, y) \quad (47)$$

Пуанкаре [127] в случае, когда  $P$  и  $Q$  полиномы, не содержащие свободных и линейных членов, и Ляпуновым [97] в случае, когда  $P$  и  $Q$  функции, разложения которых по степеням  $x$  и  $y$  начинаются членами не ниже второго измерения, показано, что особая точка  $x=0, y=0$  может быть как центром, так и фокусом, в то время как для соответствующей укороченной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (48)$$

эта особая точка является центром. При этом расположение типа центр может быть нарушено добавлением к правым частям системы (47) или (48) членов сколь угодно высокого порядка.

Возникает проблема установления аналитического критерия для отличия центра от фокуса. Эта проблема называется *проблемой центра и фокуса*.

А. М. Ляпунов дал общий метод различения центра и фокуса. Используя и развивая идеи А. М. Ляпунова, Н. А. Сахарников [132—134] довел до конца решение проблемы центра и фокуса для случая, когда  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — полиномы второго порядка и решил ее для случая однородных полиномов третьего порядка.\* Проблема различения центра и фокуса решена также в случае, когда  $P(x, y) \equiv 0$ , а  $Q(x, y)$  — полином третьей или пятой степени [86, 87].

Проблема различения центра и фокуса при наличии линейных членов в правых частях системы дифференциальных уравнений возникает не только в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения. Эта проблема, как показал А. М. Ляпунов [97] может возникнуть и в случае нулевых корней характеристического уравнения, т. е. когда  $ad - bc = 0$ . А именно, А. М. Ляпунов показал, что для системы

$$\frac{dx}{dt} = y + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (49)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — степенные ряды, не содержащие свободных и ли-

\* См. также работы К. С. Сибирского [135] и Н. А. Лукашевича [95].

нейных членов, при некоторых дополнительных условиях особая точка  $x=0, y=0$  может быть центром или фокусом. При этом оказывается, что в случае, когда  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  суть полиномы второго порядка, особая точка  $x=0, y=0$  не может быть ни центром, ни фокусом.

Продолжая исследования А. М. Ляпунова, А. Ф. Андреев [5] решил проблему центра и фокуса для системы вида (49) в случае, когда нелинейности  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются однородными полиномами третьей степени.

Отметим, что если в системе (47)  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  суть не аналитические функции от  $x$  и  $y$  (т. е. не представимы в виде сходящихся степенных рядов по степеням  $x$  и  $y$ ), удовлетворяющие условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

то особая точка  $x=0, y=0$  этой системы может быть центром, фокусом или центрофокусом (т. е. в любой окрестности точки  $x=0, y=0$  могут находиться как замкнутые траектории, так и спирали).

То же самое имеет место при некоторых дополнительных условиях и для системы (49). Достаточные условия, при которых для этой системы возникает проблема центра, фокуса и центрофокуса, указаны А. Ф. Андреевым [3].

В пп. 141—143 мы рассмотрели вопрос о поведении интегральных кривых в окрестности точки равновесия и связанный с ним вопрос об устойчивости движения (решения) лишь для системы двух уравнений вида (13).

Рассмотрение того же вопроса для общего случая системы двух уравнений и системы  $n$  уравнений читатель может найти в трудах создателей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений А. М. Ляпунова [97] и А. Пуанкаре [127], в работах И. Бендиксона [165], М. Фроммера [169], О. Перрона [179] и др.

Наряду с работами, в которых используются и развиваются идеи и методы Ляпунова и Пуанкаре, в последние годы появилось большое число работ, в которых существенно развивается качественный метод Фроммера [2—4, 6, 85].

Для подробного и систематического изучения вопросов, связанных с проблемой центра и фокуса, и других важных вопросов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений читатель может обратиться к известным книгам В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [113], Ф. Трикоми [144, гл. 2] и Дж. Сансоне [131, т. 2, гл. 9, § 1], (см. также обзорную статью В. В. Немыцкого [112]).

## § 26. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА КОШИ)

**144. Понятие о голоморфном решении.** Теорема Пикара, рассмотренная в § 1, устанавливает условия, которые достаточно наложить на правые части нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, \dots, n) \quad (1')$$

в окрестности начальной точки  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , чтобы было обеспечено существование единственного решения задачи Коши, проходящего через эту точку и обладающего непрерывной производной первого порядка. Существование производных высшего порядка теорема Пикара не гарантирует. Правда, нетрудно показать, что *если правые части системы (1') имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до  $p$ -го ( $p \geq 1$ ) порядка, то всякое решение этой системы имеет непрерывные производные по  $x$  до  $(p+1)$ -го порядка.*

В самом деле, пусть  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$  есть решение системы (1'). При наших предположениях правые части этой системы имеют непрерывные производные по  $x$  (как сложные функции от  $x$ ), а тогда и левые части имеют непрерывные производные по  $x$ . Поэтому существуют непрерывные производные второго порядка от  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  по  $x$ , причем

$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_s} y_s' \quad (k=1, \dots, n).$$

Отсюда следует, что если  $p \geq 2$ , то решение  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$  имеет непрерывную производную по  $x$  третьего порядка, т. е.  $\frac{d^3 y_k(x)}{dx^3}$  ( $k=1, \dots, n$ ) существуют и непрерывны, и т. д.

Если правые части системы (1') имеют частные производные по всем аргументам любого порядка, то, согласно предыдущему, и всякое решение этой системы имеет производную по  $x$  любого порядка.

Если какое-либо решение  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$  системы (1') не только имеет производные всех порядков, но функции, составляющие это решение, разлагаются в степенные ряды по степеням разности  $x - x_0$ , т. е.

$$y_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(k)} (x - x_0)^s \quad (k=1, \dots, n),$$

причем ряды справа сходятся при всех значениях  $x$  из некоторого интервала  $|x - x_0| < \rho$ , где  $\rho$  — положительное число (может быть и  $\rho = +\infty$ ), то это решение называется *голоморфным в точке  $x = x_0$* .

Вообще, функция  $f(x)$  называется *голоморфной в точке  $x=x_0$* , если она представима в некоторой окрестности этой точки сходящимся степенным рядом по степеням разности  $x-x_0$ , т. е. если

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (x-x_0)^h,$$

причем ряд справа сходится в некотором интервале  $|x-x_0| < \rho$  ( $\rho > 0$ ).

Таким образом, решение  $y_1=y_1(x), \dots, y_n=y_n(x)$  называется *голоморфным в точке  $x=x_0$* , если все функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  голоморфны в этой точке.

В настоящем параграфе мы докажем теорему Коши о существовании и единственности решения задачи Коши, голоморфного в точке  $x=x_0$ , где  $x_0$  — начальное значение независимой переменной.

При этом нам потребуется понятие о голоморфной функции нескольких независимых переменных.

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется *голоморфной* относительно совокупности всех своих аргументов *в точке  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$* , если она представима в некоторой окрестности этой точки сходящимся степенным рядом по степеням разностей  $x_1-x_1^{(0)}, \dots, x_n-x_n^{(0)}$ , т. е. если

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h_1, \dots, h_n=0}^{\infty} a_{h_1 \dots h_n} (x_1-x_1^{(0)})^{h_1} \dots (x_n-x_n^{(0)})^{h_n},$$

причем ряд справа сходится в некоторой области

$$|x_1-x_1^{(0)}| < \rho_1, \dots, |x_n-x_n^{(0)}| < \rho_n \quad (\rho_k > 0).$$

**145. Понятие о мажоранте.** Прежде чем излагать доказательство теоремы Коши, введем понятие о мажоранте, которая используется как при доказательстве теоремы Коши, так и во многих других вопросах теории дифференциальных уравнений.

Пусть даны два степенных ряда:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h_1, \dots, h_n=0}^{\infty} a_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \quad (\text{I})$$

и

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h_1, \dots, h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}, \quad (\text{II})$$

причем коэффициенты ряда (I) имеют произвольные знаки, а все коэффициенты ряда (II) положительны и не меньше абсолютных вели-



чин соответствующих коэффициентов ряда (I)

$$|a_{k_1 \dots k_n}| \leq A_{k_1 \dots k_n}.$$

Кроме того, предположим, что ряд (II) с х о д и т с я в некоторой окрестности начала координат. Тогда ряд (II) называется *мажорантным (усиливающим) рядом* или *мажорантой* для ряда (I), а функция  $F(x_1, \dots, x_n)$  называется *мажорирующей (усиливающей) функцией* или *мажорантой* для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Покажем, что *всегда можно построить мажорантный ряд, сумма которого будет элементарной функцией, так что для всякой функции, разлагающейся в степенной ряд, существует э л е м е н т а р н а я мажоранта*.

В самом деле, пусть ряд (I) сходится в области

$$|x_1| < \rho_1, \dots, |x_n| < \rho \quad (\rho_k > 0).$$

Тогда при любых положительных числах  $\rho'_1, \dots, \rho'_n$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \rho'_1 < \rho_1, \dots, 0 < \rho'_n < \rho_n,$$

ряд

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} |a_{k_1 \dots k_n}| \rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n}$$

будет сходящимся. Обозначим его сумму через  $M$

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} |a_{k_1 \dots k_n}| \rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n} = M.$$

Тогда

$$|a_{k_1 \dots k_n}| \rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n} \leq M,$$

откуда

$$|a_{k_1 \dots k_n}| \leq \frac{M}{\rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n}}.$$

Возьмем

$$A_{k_1 \dots k_n} = \frac{M}{\rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n}}$$

и построим ряд

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} A_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho_1'^{k_1} \dots \rho_n'^{k_n}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = \\
 &= M \sum_{k_1=0}^{\infty} \left( \frac{x_1}{\rho_1'} \right)^{k_1} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left( \frac{x_n}{\rho_n'} \right)^{k_n}. \quad (III)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

то ряд (III) сходится в области

$$|x_1| < \rho_1', \dots, |x_n| < \rho_n'$$

и его суммой будет

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{\rho_1'}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{\rho_n'}\right)}.$$

Ряд (III) является мажорантным для ряда (I), а его сумма  $F(x_1, \dots, x_n)$  является (элементарной) мажорантой для функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

В частности, для ряда

$$f(x, y, z) = \sum_{l, m, n=0}^{\infty} a_{lmn} x^l y^m z^n \quad (|x| < \rho, |y| < r, |z| < r)$$

мажорантным рядом будет

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho_1'^l r'^m r'^n} x^l y^m z^n = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) \left(1 - \frac{y}{r'}\right) \left(1 - \frac{z}{r'}\right)} \\
 &(|x| < \rho', |y| < r', |z| < r'; \quad 0 < \rho' < \rho, \quad 0 < r' < r), \quad (IV)
 \end{aligned}$$

а для ряда

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \quad (|x| < \rho)$$

в качестве мажорантного ряда можно взять

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k} x^k = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} \quad (|x| < \rho'; \quad 0 < \rho' < \rho). \quad (V)$$

**146. Формулировка теоремы Коши для нормальной системы  $n$  уравнений.** Пусть дана система (1')

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots, y_n) \quad (k=1, \dots, n).$$

**Теорема.** Если правые части системы (1') голоморфны относительно совокупности всех своих аргументов в точке  $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ , т. е. разложимы в степенные ряды вида

$$\begin{aligned} f_k(x, y_1, \dots, y_n) = \\ = \sum_{m_0, m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_0 m_1 \dots m_n}^{(k)} (x-x_0)^{m_0} (y_1-y_1^{(0)})^{m_1} \dots (y_n-y_n^{(0)})^{m_n} \\ (k=1, \dots, n), \end{aligned}$$

причем эти ряды сходятся в области

$$|x-x_0| < \rho, \quad |y_1-y_1^{(0)}| < r, \quad \dots, \quad |y_n-y_n^{(0)}| < r \quad (\rho > 0, r > 0),$$

то система (1') имеет единственное решение, голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1=y_1^{(0)}, \dots, y_n=y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x=x_0, \quad (2')$$

т. е. решение, представимое степенными рядами

$$y_k = y_k^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(k)} (x-x_0)^s \quad (k=1, \dots, n),$$

заведомо сходящимися в области

$$|x-x_0| < \rho_1 < \rho, \quad \rho_1 = \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)\rho'M}}\right), \quad (3')$$

где  $0 < \rho' < \rho$ ,  $0 < r' < r$ , а  $M$  — некоторая положительная постоянная.\*

---

\*  $M$  есть наибольшее из чисел  $M_1, \dots, M_n$ , входящих в выражения (элементарных) мажорант вида (III) для правых частей системы (1').

Существование и единственность решения задачи Коши (1'), (2') следует уже из теоремы Пикара п. 119, условия которой при соблюдении условия теоремы Коши заведомо выполнены. В теореме Коши устанавливается голоморфность этого решения в точке  $x=x_0$ .

Не умаляя общности, можно считать все начальные данные нулевыми

$$x_0=0, y_1^{(0)}=0, \dots, y_n^{(0)}=0,$$

так как в противном случае этого всегда можно добиться подстановкой

$$x-x_0=\xi, y_1-y_1^{(0)}=\eta_1, \dots, y_n-y_n^{(0)}=\eta_n.$$

**147. Доказательство теоремы Коши для нормальной системы двух уравнений.** Мы будем доказывать теорему Коши, как и теорему Пикара, для случая  $n=2$ , при этом, согласно сказанному в конце предыдущего пункта, будем предполагать все начальные данные нулевыми.

Итак, пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Мы докажем, что если правые части  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  голоморфны в точке  $x=0, y=0, z=0$ , так что

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} a_{lmn} x^l y^m z^n, \\ f_2(x, y, z) &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} b_{lmn} x^l y^m z^n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем ряды справа сходятся в области

$$|x| < \rho, |y| < r, |z| < r \quad (\rho > 0, r > 0),$$

то система (1) имеет единственное решение, голоморфное в точке  $x=0$  и удовлетворяющее начальным условиям

$$y=0, z=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad (3)$$

т. е. решение, представимое степенными рядами

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ z &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

заведомо сходящимися в области

$$|x| < \rho_1 < \rho, \quad \rho_1 = \rho' (1 - e^{-\frac{r'}{3\rho'M}}),$$

где  $0 < \rho' < \rho$ ,  $0 < r' < r$ , а  $M$  — некоторая положительная постоянная.

З а м е ч а н и е. Если система (1) имеет решение, голоморфное в точке  $x=0$  и удовлетворяющее нулевым начальным условиям (3), то ряды (4) можно записать в виде \*

$$\left. \begin{aligned} y &= y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(h)}(0)}{h!}x^h + \dots, \\ z &= z'(0)x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{z^{(h)}(0)}{h!}x^h + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Но эти ряды мы можем составить формально и не будучи заранее уверенными в существовании решения (4), голоморфного в точке  $x=0$ , пользуясь лишь тем, что правые части системы (1) голоморфны в точке  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ .

В самом деле, из уравнений (1) находим

$$\left. \begin{aligned} y'(0) &= f_1(0, 0, 0), \\ z'(0) &= f_2(0, 0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Дифференцируя систему (1), мы получим

$$\left. \begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z', \\ z''_{x^2} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'. \end{aligned} \right\}$$

Полагая в правых частях  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  и принимая во внимание (6), мы найдем значения вторых производных  $y''_{x^2}$  и  $z''_{x^2}$  в точке  $x=0$  и т. д.

Доказательство сходимости формальных рядов (5) впервые было дано Коши. Он доказал, что ряды (5) сходятся в некоторой достаточно малой окрестности точки  $x=0$  и, следовательно, всегда представляют искомое решение, голоморфное в точке  $x=0$ .

Доказательство теоремы Коши. Для удобства доказательства теоремы Коши построим формальное решение (4) методом неопределенных коэффициентов, т. е. будем искать решение системы (1) в виде (4), считая коэффициенты  $c_h^{(1)}$  и  $c_h^{(2)}$  неопределенными, и определим их формальной подстановкой рядов (4) в систему (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  в левых и правых частях полученных равенств.

\* Ряды (5) суть ряды Тейлора для функций  $y=y(x)$  и  $z=z(x)$ , образующих решение задачи Коши (1), (3). Понятие о ряде Тейлора для функции  $f(x)$  см., например, в книге [149, т. II, с. 50—61, 97, 98].

Подставляя ряды (4) в систему (1), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} k c_h^{(1)} x^{h-1} &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} a_{lmn} x^l \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \right)^m \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k \right)^n, \\ \sum_{h=1}^{\infty} k c_h^{(2)} x^{h-1} &= \sum_{l, m, n=0}^{\infty} b_{lmn} x^l \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \right)^m \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k \right)^n. \end{aligned} \right\}$$

Представляя правые части в виде рядов по степеням  $x$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} k c_h^{(1)} x^{h-1} &= \sum_{h=1}^{\infty} P_{h-1}^{(1)}(a_{\lambda\mu\nu}, c_1^{(1)}, \dots, c_{h-1}^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{h-1}^{(2)}) x^{h-1}, \\ \sum_{h=1}^{\infty} k c_h^{(2)} x^{h-1} &= \sum_{h=1}^{\infty} P_{h-1}^{(2)}(b_{\lambda\mu\nu}, c_1^{(1)}, \dots, c_{h-1}^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{h-1}^{(2)}) x^{h-1}. \end{aligned} \right\}$$

Приравняв свободные члены, коэффициенты при первой степени  $x$ , при второй степени  $x$ ,  $\dots$ , при  $(k-1)$ -й степени  $x$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} c_1^{(1)} &= a_{000} \equiv P_0^{(1)}, \\ c_1^{(2)} &= b_{000} \equiv P_0^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7_1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2c_2^{(1)} &= a_{100} + a_{010}c_1^{(1)} + a_{001}c_1^{(2)} \equiv P_1^{(1)}, \\ 2c_2^{(2)} &= b_{100} + b_{010}c_1^{(1)} + b_{001}c_1^{(2)} \equiv P_1^{(2)}; \end{aligned} \right\} \quad (7_2)$$

$$\left. \begin{aligned} 3c_3^{(1)} &= a_{200} + a_{110}c_1^{(1)} + a_{101}c_1^{(2)} + a_{010}c_2^{(1)} + \\ &+ a_{020}c_1^{(1)^2} + a_{001}c_2^{(2)} + a_{002}c_1^{(2)^2} + a_{011}c_1^{(1)}c_1^{(2)} \equiv P_2^{(1)}, \\ 3c_3^{(2)} &= b_{200} + b_{110}c_1^{(1)} + b_{101}c_1^{(2)} + b_{010}c_2^{(1)} + \\ &+ b_{020}c_1^{(1)^2} + b_{001}c_2^{(2)} + b_{002}c_1^{(2)^2} + b_{011}c_1^{(1)}c_1^{(2)} \equiv P_2^{(2)}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7_3)$$

$$\left. \begin{aligned} k c_k^{(1)} &= P_{k-1}^{(1)}(a_{\lambda\mu\nu}, c_1^{(1)}, \dots, c_{k-1}^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{k-1}^{(2)}), \\ k c_k^{(2)} &= P_{k-1}^{(2)}(b_{\lambda\mu\nu}, c_1^{(1)}, \dots, c_{k-1}^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{k-1}^{(2)}). \end{aligned} \right\} \quad (7_k)$$

Формулы  $(7_k)$  носят рекуррентный характер. Они выражают коэффициенты  $c_k^{(1)}$  и  $c_k^{(2)}$  рядов (4) через предшествующие коэффициенты  $c_1^{(1)}, \dots, c_{k-1}^{(1)}$ ;  $c_1^{(2)}, \dots, c_{k-1}^{(2)}$  этих рядов и через известные коэффициенты  $a_{\lambda\mu\nu}$ ,  $b_{\lambda\mu\nu}$  ( $\lambda + \mu + \nu \leq k-1$ ) разложений правых частей данной системы (1). Так как при этом приходится выполнять лишь действия сложения и умножения, то  $P_{k-1}^{(1)}$  и  $P_{k-1}^{(2)}$  являются полиномами от всех своих аргументов, т. е. от указанных коэффициентов рядов (2) и первых  $k-1$  коэффициентов каждого из рядов (4), причем все

коэффициенты этих полиномов суть целые положительные числа.\*

Но из (7<sub>1</sub>) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} c_1^{(1)} &= a_{000}, \\ c_1^{(2)} &= b_{000}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти значения в формулы (7<sub>2</sub>), находим

$$\left. \begin{aligned} c_2^{(1)} &= \frac{1}{2} (a_{100} + a_{010}a_{000} + a_{001}b_{000}), \\ c_2^{(2)} &= \frac{1}{2} (b_{100} + b_{010}a_{000} + b_{001}b_{000}). \end{aligned} \right\}$$

Затем из формул (7<sub>3</sub>) мы можем найти  $c_3^{(1)}$ ,  $c_3^{(2)}$  и т. д.

Найдя  $c_1^{(1)}, \dots, c_{k-1}^{(1)}$ ;  $c_1^{(2)}, \dots, c_{k-1}^{(2)}$  и подставив их в (7<sub>k</sub>), мы получим

$$\left. \begin{aligned} c_k^{(1)} &= Q_k^{(1)}(a_{\lambda\mu\nu}, b_{\lambda\mu\nu}), \\ c_k^{(2)} &= Q_k^{(2)}(a_{\lambda\mu\nu}, b_{\lambda\mu\nu}), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $Q_k^{(1)}$  и  $Q_k^{(2)}$  суть полиномы с положительными коэффициентами от коэффициентов рядов (2)  $a_{\lambda\mu\nu}$  и  $b_{\lambda\mu\nu}$  ( $\lambda + \mu + \nu \leq k-1$ ).

Таким образом, все коэффициенты рядов (4) найдены. Поскольку все эти коэффициенты определяются единственным образом по формулам (8), то *решение, голоморфное в точке  $x=0$ , с заданными (в данном случае нулевыми) начальными значениями может существовать только одно.*

**З а м е ч а н и е.** Формальные ряды (4) можно часто построить и в тех случаях, когда правые части системы (1) не голоморфны в точке  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , но тогда в общем случае нет гарантии, что эти ряды будут сходиться хоть в какой-нибудь окрестности точки  $x=0$  (т. е. в окрестности начального значения  $x$ ).

С подобной ситуацией мы можем встретиться уже в случае одного уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 y' + (x-1)y + 1 = 0. \quad (9)$$

Поставим начальное условие

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (10)$$

Будем искать решение задачи Коши (9), (10) в виде ряда по степеням  $x$

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k.$$

\* Например, у полинома  $P_1^{(1)}$  все коэффициенты равны единице.

Подставляя этот ряд в уравнение (9), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k+1} + x + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при всех степенях  $x$ :

$$\begin{aligned} x: \quad 1 - c_1 &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^k: \quad k c_{k-1} - c_k &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим, что

$$c_k = k! \quad (k=1, \dots).$$

Таким образом, формальным рядом, удовлетворяющим уравнению (9) и начальному условию (10), будет

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k! x^k.$$

Но этот ряд расходится при всяком  $x$ , отличном от нуля.

Следовательно, задача Коши (9), (10) не имеет решения, голоморфного в точке  $x=0$ .

Записав уравнение (9) в виде, разрешенном относительно  $y$ , получим

$$y' = \frac{1-x}{x^2} y - \frac{1}{x^2}.$$

Заметим, что правая часть этого уравнения не голоморфна в начальной точке  $x=0, y=1$ .

Докажем теперь сходимостъ рядов (4). Для этого построим ряды, мажорирующие формальные ряды (4), т. е. заведомо сходящиеся ряды с положительными коэффициентами, превосходящими абсолютные величины коэффициентов формальных рядов (4).

С этой целью рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений, заменяя правые части системы (1) их общей мажорантой и обозначая новые искомые функции через  $Y$  и  $Z$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) \left(1 - \frac{Y}{r'}\right) \left(1 - \frac{Z}{r'}\right)}, \\ \frac{dZ}{dx} &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) \left(1 - \frac{Y}{r'}\right) \left(1 - \frac{Z}{r'}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Здесь  $M = \max(M_1, M_2)$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — постоянные, входящие в выражения мажорант вида (IV) для  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$ , а  $\rho'$  и  $r'$  — любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \rho' < \rho, \quad 0 < r' < r.$$

Система (11) называется *мажорантной* по отношению к рассматриваемой нами системе (1). Правые части системы (11), так же как и правые части системы (1), голоморфны в точке  $x=0, Y=0, Z=0$ . Их разложение имеет вид

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)\left(1 - \frac{Z}{r'}\right)} = \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n} x^l Y^m Z^n,$$

причем ряд справа сходится в области

$$|x| < \rho', \quad |Y| < r', \quad |Z| < r', \quad (12)$$

а его коэффициенты положительны и превосходят абсолютные величины соответствующих коэффициентов разложений правых частей системы (1)

$$\left. \begin{aligned} |a_{lmn}| &\leq \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n}, \\ |b_{lmn}| &\leq \frac{M}{\rho'^l r'^m r'^n}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Найдем решение мажорантной системы (11), удовлетворяющее, так же как и искомое решение системы (1), нулевым начальным условиям

$$Y=0, \quad Z=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad (14)$$

и покажем, что это решение голоморфно в точке  $x=0$  и что ряды, представляющие это решение, мажорируют формальные ряды (4), чем и будет завершено доказательство теоремы Коши.

Так как система (11) и начальные условия (14) симметричны относительно  $Y$  и  $Z$ , т. е. сохраняют свой вид при замене  $Y$  на  $Z$ , то  $Y \equiv Z$ . Действительно, мы имеем

$$\frac{dY}{dx} \equiv \frac{dZ}{dx}, \quad Y(0) = Z(0),$$

т. е. функции  $Y$  и  $Z$  имеют одинаковые производные в интервале суще-

ствования решения задачи Коши (11), (14) и в одной точке ( $x=0$ ) этого интервала их значения совпадают, а тогда эти функции совпадают на всем интервале существования решения задачи Коши (11), (14).

Поэтому достаточно найти решение уравнения

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) \left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^2}, \quad (15)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$Y=0 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Интегрируя уравнение (15), имеем

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^2 dY &= \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} dx, \\ -\frac{r'}{3} \left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 &= -M \rho' \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) + C. \end{aligned}$$

Полагая в полученном общем интеграле  $x=0$ ,  $Y=0$ , находим, что  $C = -\frac{r'}{3}$ , так что искомым решением будет

$$-\frac{r'}{3} \left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 = -M \rho' \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) - \frac{r'}{3}$$

или

$$\left(1 - \frac{Y}{r'}\right)^3 = 1 + \frac{3\rho'M}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right),$$

откуда

$$Y = r' \left(1 - \sqrt[3]{1 + \frac{3\rho'M}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)}\right). \quad (16)$$

Полученное решение (16) разложимо в ряд по степеням величины

$$\alpha \equiv \frac{3\rho'M}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right),$$

если  $|\alpha| < 1$ , так как разложение функции  $\sqrt[3]{1+\alpha} = (1+\alpha)^{1/3}$  по степеням  $\alpha$  представляет собой биномиальный ряд, который, как известно, сходит-

ся при  $|\alpha| < 1$  [149, т. II, с. 59]. В свою очередь  $\alpha$  разложима в ряд по степеням  $x$ , если  $|x| < \rho'$ , ибо разложение функции  $\ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right)$  по степеням  $x$  получается заменой в (логарифмическом) ряде для функции  $\ln(1+t)$ , сходящемся при  $|t| < 1$ , [149, т. II, с. 56], переменной  $t$  на  $\left(-\frac{x}{\rho'}\right)$ , так что полученный ряд будет сходиться при  $\left|-\frac{x}{\rho'}\right| < 1$  или  $|x| < \rho'$ .

Следовательно,  $Y$  разложимо в ряд по степеням  $x$ , если

$$|x| < \rho' \quad \text{и} \quad \left| \frac{3\rho'M}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) \right| < 1. \quad (17)$$

В дальнейшем достаточно рассматривать только положительные значения  $x$ .<sup>\*</sup> Чтобы при этом удовлетворить первому из неравенств (17), будем считать, что

$$0 < x < \rho'.$$

При этом условии второе из неравенств (17) примет вид <sup>\*\*</sup>

$$-\frac{3\rho'M}{r'} \ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) < 1$$

или

$$\ln \left(1 - \frac{x}{\rho'}\right) > -\frac{r'}{3\rho'M}, \quad 1 - \frac{x}{\rho'} > e^{-\frac{r'}{3\rho'M}},$$

откуда

$$0 < x < \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{3\rho'M}}\right).$$

Следовательно, решение (16) разложимо в ряд по степеням  $x$

$$Y = \sum_{h=1}^{\infty} \bar{c}_h x^h,$$

сходящийся в области

$$|x| < \rho_1 \equiv \rho' \left(1 - e^{-\frac{r'}{3\rho'M}}\right). \quad (18)$$

<sup>\*</sup> Ибо известно, что если степенной ряд по степеням  $x$  сходится при  $x = x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится и при всяком значении  $x$ , удовлетворяющем неравенству  $|x| < |x_0|$  [149, т. II, с. 88].

<sup>\*\*</sup> Так как, если  $a < 0$ , то  $|a| = -a$ .

Таким образом, для мажорантной системы (11) мы получили решение

$$\left. \begin{aligned} Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k^{(1)} x^k, \\ Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k^{(2)} x^k, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\bar{c}_k^{(1)} = \bar{c}_k^{(2)} = \bar{c}_k,$$

голоморфное в точке  $x=0$  и удовлетворяющее нулевым начальным условиям (14).

Коэффициенты рядов (19) мы получили путем разложения решения (16) в ряд по степеням  $x$ . Но те же самые коэффициенты мы можем получить путем непосредственной подстановки рядов (19) в систему (11) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ , т. е. тем же путем, каким были получены коэффициенты рядов (4).<sup>\*</sup> При этом для определения  $\bar{c}_k^{(1)}$  и  $\bar{c}_k^{(2)}$  мы будем иметь опять формулы (8), в которых лишь следует заменить коэффициенты разложений функций  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  соответствующими коэффициентами разложения мажоранты, т. е.  $a_{\lambda\mu\nu}$  и  $b_{\lambda\mu\nu}$  нужно заменить на  $\frac{M}{\rho^{\lambda}\rho'^{\mu}\rho''^{\nu}}$ . Так как в формулах (8) функции  $Q_k^{(1)}$  и  $Q_k^{(2)}$  суть полиномы с положительными коэффициентами от коэффициентов рядов, стоящих в правых частях системы (1), и так как мы заменяем эти последние коэффициенты положительными коэффициентами рядов для правых частей мажорантной системы (11), то, принимая во внимание оценки (13), мы видим, что коэффициенты рядов (19) будут положительными и будут превосходить абсолютные величины соответствующих коэффициентов рядов (4), дающих формальное решение поставленной задачи Коши (1), (3), т. е. мы будем иметь неравенства

$$\left. \begin{aligned} |c_k^{(1)}| &\leq \bar{c}_k^{(1)}, \\ |c_k^{(2)}| &\leq \bar{c}_k^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

для всех  $k=1, 2, \dots$

Так как ряды (19) сходятся в области (18), причем коэффициенты этих рядов положительны и превосходят, согласно (20), абсолютные величины соответствующих коэффициентов рядов (4), то последние схо-

---

<sup>\*</sup> Так как выше мы показали, что для системы с голоморфными правыми частями может существовать только одно голоморфное решение задачи Коши.

дятся по крайней мере в той же области (18), так что ряды (4) представляют не только формальное, но и истинное решение задачи Коши (1), (3), голоморфное в точке  $x=0$ . Теорема доказана.

Теорема Коши, так же как и теорема Пикара, дает возможность приближенно находить решения задачи Коши. При этом приближенные решения состоят из п о л н о м о в.

Сравнивая теорему Коши с теоремой Пикара, мы видим, что теорема Коши применима к более узкому классу дифференциальных уравнений, но зато она дает решение в виде степенных рядов, причем для построения решения нам совершенно не нужно выполнять квадратуры, что в общем случае применения метода Пикара связано с большими трудностями и вызывает дополнительные погрешности.

Теорема Коши легко распространяется на случай комплексных значений аргумента и искомых функций, являясь в этом случае одной из основных теорем аналитической теории дифференциальных уравнений.

Наряду с указанными достоинствами теорема Коши обладает тем общим с теоремой Пикара недостатком, что дает лишь решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям. Чтобы найти решение с другими начальными условиями, нужно проводить все вычисления заново.

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad (21)$$

и требуется найти решение, голоморфное в точке  $x=0$  и удовлетворяющее начальному условию

$$y=1 \quad \text{при} \quad x=0. \quad (22)$$

Искомое решение существует и единственно (почему?). Его можно найти, подставляя ряд

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$$

в уравнение (21) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , или по формуле

$$y = 1 + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots,$$

определяя значения последовательных производных от искомого решения  $y$  в точке  $x=0$  из уравнения (21) и уравнений, полученных из него последовательным дифференцированием, согласно методу, указанному в замечании на с. 376.

Но мы, зная, что уравнение (21) интегрируется в элементарных функциях, найдем сначала решение поставленной задачи Коши (21), (22), а затем представим его в виде ряда по степеням  $x$ .

Интегрируя уравнение (21), имеем

$$y = -\frac{1}{x+C}.$$

Удовлетворяя начальному условию (22), находим, что  $C = -1$ , так что искомым решением будет

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Это решение определено и непрерывно в области (ср. п. 124, пример 3)

$$-\infty < x < 1.$$

Оно голоморфно в точке  $x=0$ . Разлагая это решение в ряд по степеням  $x$ , получим

$$y = 1 + x + x^2 + \dots + x^h + \dots$$

Ряд справа сходится лишь в области  $|x| < 1$ , несмотря на то, что ряд в правой части уравнения (21) сходится при всех (конечных) значениях  $x$  и  $y$ . Это одна из характерных особенностей нелинейных дифференциальных уравнений вообще.

Найдем теперь решение того же уравнения (21), голоморфное в точке  $x=0$ , но с другим начальным условием

$$y=0 \quad \text{при} \quad x=0. \quad (23)$$

Таким решением, очевидно, является

$$y=0. \quad (24)$$

Здесь ряд (24), представляющий решение задачи Коши (21), (23), голоморфное в точке  $x=0$ , сходится при всех значениях  $x$ .

Как видно из рассмотренного примера, область сходимости ряда, представляющего голоморфное решение задачи Коши, определяется не только областью сходимости рядов, представляющих правые части системы дифференциальных уравнений, но еще как-то зависит и от выбора начальных данных.

Характер этой зависимости изучается в аналитической теории дифференциальных уравнений. Отметим, что теорема Коши дает лишь нижнюю границу области сходимости ряда, представляющего решение задачи Коши в окрестности начального значения независимой переменной. К тому же, как мы увидим ниже (см. п. 149), голоморфные решения могут иногда существовать даже и в тех случаях, когда условие теоремы Коши не выполнено.

**148. Теорема Коши для линейной системы.** В общем случае область сходимости рядов, представляющих решение задачи Коши, доставляемое теоремой Коши, как это следует из формулы (3'), несколько меньше области сходимости относительно  $x$  правых частей системы (1'). Покажем, что в случае линейной системы область сходи-

мости рядов, представляющих решение задачи Коши, не меньше, чем область сходимости относительно  $x$  правых частей системы.

Пусть дана линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k=1, \dots, n) \quad (25)$$

и поставлены начальные условия

$$y_1 = y_1^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (26)$$

**Теорема.** *Предположим, что в системе (25) коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, \dots, n$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, \dots, n$ ) голоморфны в точке  $x=x_0$ , так что имеют место разложения*

$$p_{kl}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(k,l)} (x-x_0)^s, \quad f_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(k)} (x-x_0)^s \quad (27)$$

$$(k, l=1, \dots, n),$$

где ряды справа сходятся в некотором интервале

$$|x-x_0| < \rho \quad (\rho > 0). \quad (28)$$

Тогда система (25) имеет единственное решение

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (29)$$

голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (26), с любыми начальными значениями искомых функций, так что решение (29) представимо в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} (x-x_0)^k, \\ &\vdots \\ y_n &= y_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} (x-x_0)^k, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

причем ряды справа заведомо сходятся в интервале (28), т. е. в том же интервале, что и ряды (27), а  $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  — любые заданные числа.

Доказательство, так же как и в общем случае теоремы Коши, будем проводить для  $n=2$  в предположении, что все начальные данные равны нулю.

Итак, пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p_{11}(x)y + p_{12}(x)z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= p_{21}(x)y + p_{22}(x)z + f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Мы докажем, что если  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2$ ) и  $f_k(x)$  ( $k=1, 2$ ) голоморфны в точке  $x=0$ , т. е. представимы в некоторой области

$$|x| < \rho \quad (\rho > 0) \quad (32)$$

рядами вида

$$p_{kl}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(k,l)} x^s, \quad f_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(k)} x^s,$$

сходящимися в области (32), то существует единственное решение

$$y=y(x), \quad z=z(x), \quad (33)$$

голоморфное в точке  $x=0$  и удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y=0, \quad z=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad (34)$$

причем ряды

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ z &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

представляющие решение (33), заведомо сходятся в интервале (32).

Эта теорема доказывается так же, как и теорема Коши предыдущего пункта, но здесь, используя линейность системы (31), удастся построить мажорантную систему дифференциальных уравнений, позволяющую получить более широкую область сходимости рядов (35), представляющих решение задачи Коши (31), (34).

Подставляя ряды (35) в систему (31) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , мы определим все коэффициенты рядов (35) по формулам (8).

Для доказательства сходимости рядов (35) рассмотрим мажорантную систему дифференциальных уравнений



$$\left. \begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (Y+Z+1), \\ \frac{dZ}{dx} &= \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (Y+Z+1), \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где функция

$$\frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^l} x^l \quad (|x| < \rho' < \rho)$$

представляет собою общую мажоранту вида (V) для функций  $p_{hi}(x)$  и  $f_h(x)$ .

Заметим, что мажорантная система (36), так же как и система (31), является л и н е й н о й. Она получена из системы (31) путем мажорирования коэффициентов  $p_{hi}(x)$  и функций  $f_h(x)$ .

Будем искать решение мажорантной системы (36), удовлетворяющее, так же как и искомое решение системы (31), н у л е в ы м начальным условиям

$$Y=0, Z=0 \quad \text{при} \quad x=0. \quad (37)$$

Заметим прежде всего, что  $Y \equiv Z$ , так как система (36) и начальные условия (37) симметричны относительно  $Y$  и  $Z$ , так что наша задача приводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} (2Y+1), \quad (38)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$Y=0 \quad \text{при} \quad x=0. \quad (39)$$

Интегрируя уравнение (38), имеем

$$\frac{dY}{2Y+1} = \frac{M}{1 - \frac{x}{\rho'}} dx, \quad \frac{1}{2} \ln(2Y+1) = -M \rho' \ln \left( 1 - \frac{x}{\rho'} \right) + C.$$

Удовлетворяя начальному условию (39), находим, что  $C=0$ , так что

искомым решением будет

$$\frac{1}{2} \ln(2Y+1) = -M \rho' \ln \left( 1 - \frac{x}{\rho'} \right),$$

откуда

$$2Y+1 = \left( 1 - \frac{x}{\rho'} \right)^{-2M\rho'}.$$

Поэтому

$$Y = \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{x}{\rho'} \right)^{-2M\rho'} - 1 \right). \quad (40)$$

Из формулы (40) видно, что решение  $Y$  представимо в виде степенного ряда

$$Y = \sum_{h=1}^{\infty} \bar{c}_h x^h,$$

сходящегося при  $|x| < \rho'$ , ибо ряд для  $\left( 1 - \frac{x}{\rho'} \right)^{-2M\rho'}$  получается из (биномиального) ряда для функции  $(1+t)^m$ , если положить  $t = -\frac{x}{\rho'}$ ,  $m = -2M\rho'$ .

Таким образом, мажорантная система (36) имеет решение

$$\left. \begin{aligned} Y &= \sum_{h=1}^{\infty} \bar{c}_h^{(1)} x^h, \\ Z &= \sum_{h=1}^{\infty} \bar{c}_h^{(2)} x^h \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

( $\bar{c}_h^{(1)} = \bar{c}_h^{(2)} = \bar{c}_h$ ), где ряды справа сходятся в области  $|x| < \rho'$ .

Но коэффициенты рядов (41) мы могли бы определять и по формулам (8), подставляя (41) в (36) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . При этом мы снова получили бы, что коэффициенты рядов (41) положительны (почему?) и что они превосходят абсолютные величины соответствующих коэффициентов формальных рядов (35). Поэтому ряды (35) также должны сходиться по крайней мере при  $|x| < \rho'$ . Так как  $\rho'$  можно взять сколь угодно близким к  $\rho$ , то ряды (35) будут сходиться в области (32). Теорема доказана.

*Замечание 1. Если в системе (25) коэффициенты  $p_{hi}(x)$  и функции  $f_h(x)$  суть целые функции, т. е. представимы рядами по степеням разности  $x - x_0$  (где  $x_0$  — любое число), сходящимися при всех значениях  $x$ , то каковы бы ни были числа  $x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ , система (25) имеет решение вида (30), причем функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  также являются целыми. Например, это будет иметь место, когда функции  $p_{hi}(x)$  и  $f_h(x)$  постоянны или представляют собой полиномы от  $x$  или функции типа  $e^x, \sin x, \cos x$ .*

В рассматриваемом случае можно искать решение системы (25) с любыми начальными данными в виде рядов (30) с неопределенными коэффициентами  $c_s^{(h)}$ . Сходимость найденных рядов обеспечена при всех значениях  $x$ .

*З а м е ч а н и е 2.* Если в системе (25) коэффициенты  $p_{ki}(x)$  и функции  $f_k(x)$  суть рациональные дроби, т. е. имеют вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (42)$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — полиномы от  $x$  и если число  $x_0$  не обращает в нуль ни одного из знаменателей этих дробей, то система (25) будет иметь единственное решение, голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (26), где начальные значения искомых функций можно задавать произвольно. При этом ряды (30), представляющие это решение, будут сходиться по крайней мере в интервале  $|x-x_0|<\rho$ , где  $\rho$  есть расстояние от точки  $x=x_0$  до ближайшей из точек, в которых знаменатели дробей (42) обращаются в нуль (при этом учитываются все корни уравнений  $Q(x)=0$  как вещественные, так и комплексные).

В самом деле, при сделанных предположениях функции  $p_{ki}(x)$  и  $f_k(x)$  представимы рядами вида (27) по степеням разности  $x-x_0$ , сходящимися в интервале  $|x-x_0|<\rho$ , откуда, в силу теоремы Коши, и вытекает наше утверждение.

Из сказанного ясно, что в рассматриваемом случае решение системы (25) с начальными условиями (26) можно искать в виде рядов (30) с неопределенными коэффициентами  $c_s^{(h)}$ , причем дело сводится только к вычислению этих коэффициентов. Сходимость найденных рядов обеспечена по крайней мере в интервале  $|x-x_0|<\rho$ .

*З а м е ч а н и е 3.* Линейное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (43)$$

в котором коэффициент  $p(x)$  и правая часть  $q(x)$  голоморфны в точке  $x=x_0$ , имеет единственное решение, голоморфное в этой точке и принимающее любое заданное начальное значение  $y_0$  (при  $x=x_0$ ), причем ряд

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

представляющий это решение, заведомо сходится в той же области  $|x-x_0|<\rho$ , в которой сходятся ряды

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k,$$

представляющие функции  $p(x)$  и  $q(x)$  в окрестности точки  $x=x_0$ .

В справедливости этого утверждения легко убедиться и непосредственно на основании формулы общего решения уравнения (43) в форме Коши

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} dx \right). \quad (44)$$

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y' - \cos x \cdot y = 0. \quad (45)$$

Здесь коэффициент при  $y$  есть целая функция. Поэтому решение с любыми начальными данными  $x_0$ ,  $y_0$  существует, единственно и является целой функцией. В частности, решением с начальным условием

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (46)$$

согласно формуле (44), будет

$$y = e^{\sin x}.$$

Разлагая это решение в ряд по степеням  $x$  (заведомо сходящийся при всех  $x$ ) и ограничиваясь выписыванием первых восьми членов, имеем

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + \frac{1}{90}x^7 + \dots$$

В качестве приближенного решения задачи Коши (45), (46) можно, например, взять

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

**Пример 2.** Пусть дано уравнение

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 0.$$

Какие начальные данные можно задавать, чтобы задача Коши заведомо имела голоморфное решение? В какой области будет сходиться ряд, представляющий решение задачи Коши?

Так как коэффициент при  $y$  представляет собою отношение полиномов, причем знаменатель не имеет вещественных корней, то решение с любыми начальными данными  $x_0$ ,  $y_0$  существует, единственно и будет голоморфно в точке  $x = x_0$ . При этом ряд

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

представляющий решение задачи Коши с начальными данными  $x_0$ ,  $y_0$ , заведомо сходится в области

$$|x - x_0| < \rho,$$

где

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + 1} \quad (47)$$

(почему?). В частности, решением с начальным условием

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

согласно (44), будет

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Это решение представимо в виде ряда по степеням  $x$ , который, в силу (47), заведомо сходится при  $|x| < 1$ . Этим рядом будет

$$y = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots \quad (|x| < 1).$$

**149. Примеры существования голоморфных решений в случае невыполнения условия теоремы Коши.** Условие теоремы Коши является лишь достаточным для существования голоморфного решения, так как можно построить примеры систем уравнений, правые части которых не голоморфны в начальной точке, а решение задачи Коши, голоморфное в точке  $x=x_0$ , где  $x_0$  — начальное значение независимой переменной, существует.

Ограничимся случаем одного уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (48)$$

и предположим, что правая часть  $f(x, y)$  не голоморфна в начальной точке  $(x_0, y_0)$ . В этом случае точка  $(x_0, y_0)$  является обычно особой точкой уравнения (48) и речь идет о том особом случае задачи Коши (см. п. 5), когда ищется решение вида

$$y = y(x), \quad (49)$$

примыкающее к особой точке  $(x_0, y_0)$ , т. е. решение, обладающее свойством

$$y(x) \rightarrow y_0 \text{ при } x \rightarrow x_0. \quad (50)$$

Решение такой задачи Коши, голоморфное в точке  $x=x_0$ , может быть даже единственным. Но может существовать и целое семейство решений, голоморфных в точке  $x=x_0$  и обладающих свойством (50). Кроме того, могут существовать не голоморфные решения, обладающие свойством (50), причем последние могут существовать и наряду с голоморфными решениями, чего не может быть в случае, когда правая часть уравнения (48) удовлетворяет условию теоремы Коши (почему?).

В связи с возможностью существования не голоморфных решений, обладающих свойством (50), возникает вопрос об аналитической структуре этих решений.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{y}{x}. \quad (51)$$

Правая часть этого уравнения, очевидно, не голоморфна в точке  $(0, 0)$ , ибо она даже не определена в этой точке. Точка  $(0, 0)$  является изолированной особой точкой уравнения (51) типа  $\frac{0}{0}$  (дикритический узел).

Поставим вопрос, существуют ли голоморфные и не голоморфные в точке  $x=0$  решения вида (49) уравнения (51), обладающие свойством

$$y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (52)$$

Общее решение уравнения (51) имеет вид

$$y=Cx \quad (x \neq 0). \quad (53)$$

Оно содержит в себе все решения вида (49). Все эти решения голоморфны в точке  $x=0$  и обладают свойством (52).

Неголоморфных решений вида (49), обладающих свойством (52), нет.

Заметим, что мы исключили из всех решений точку  $(0, 0)$ , ибо уравнение (51) не задано в этой точке. Так что при каждом фиксированном значении произвольной постоянной  $C$  мы получаем из формулы (53) пару интегральных кривых (полупрямых), примыкающих к особой точке  $(0, 0)$  соответственно при  $x \rightarrow +0$  и  $x \rightarrow -0$ . Это замечание следует иметь в виду и впредь, когда будет идти речь об аналитическом представлении решения, обладающего свойством (50), где  $(x_0, y_0)$  — особая точка уравнения (48).

**Пример 2.** Пусть дано уравнение \*

$$xy' - by = ax \quad \text{или} \quad y' = \frac{ax + by}{x} \quad (b \neq 0). \quad (54)$$

Правая часть уравнения (54), очевидно, не голоморфна в точке  $(0, 0)$ . Исследуем вопрос о существовании решений вида (49), обладающих свойством (52), голоморфных и не голоморфных в точке  $x=0$ .

Интегрируя уравнение (54), получаем общее решение в виде

$$y = C|x|^b + \frac{a}{1-b}x \quad (x \neq 0); \quad \text{если} \quad b \neq 1; \quad (55)$$

$$y = Cx + ax \ln |x| \quad (x \neq 0), \quad \text{если} \quad b = 1. \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) содержат все решения вида (49). Из этих формул видно, что если  $b$  не равно целому положительному числу, то существует только одно решение вида (49), голоморфное в точке  $x=0$  и обладающее свойством (52). Этим решением будет

$$y = \frac{a}{1-b}x \quad (x \neq 0).$$

Если  $b=1$ , то голоморфных решений, обладающих свойством (52), нет, как это видно из формулы (56).

В случае когда  $b > 1$  — целое, все решения, доставляемые формулой (55), будут голоморфны в точке  $x=0$  и будут обладать свойством (52), так что в этом случае существует бесконечное множество решений, голоморфных в точке  $x=0$  и обладающих свойством (52).

Рассмотрим вопрос о существовании не голоморфных (в точке  $x=0$ ) решений, обладающих свойством (52).

Если  $b$  не равно целому положительному числу, причем  $b > 0$ , то существует бесконечное множество не голоморфных решений, доставляемых формулой (55). Все они голоморфны относительно  $x$  и  $|x|^b$  в точке  $(0, 0)$ .

\* Это уравнение является частным случаем уравнения Брио и Буке

$$xy' - by = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \equiv \varphi(x, y),$$

где  $\varphi(x, y)$  голоморфна в точке  $(0, 0)$  [53, с. 403—437].

Если  $b < 0$ , то неголоморфных решений нет.

Если  $b = 1$ , то существует бесконечное множество неголоморфных решений, обладающих свойством (52). Это все решения, доставляемые формулой (56). Заметим, что все они голоморфны относительно  $x$  и  $x \ln |x|$  в точке  $(0, 0)$ .

Если  $b > 1$  — целое, то неголоморфных решений нет.

Обращаем внимание читателя на проблему сосуществования голоморфных и неголоморфных решений.

Возникает вопрос, когда уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (57)$$

где функции  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  голоморфны в точке  $(0, 0)$  и обращаются в нуль в этой точке, имеет голоморфные и неголоморфные (в точке  $x=0$ ) решения вида (49), обладающие свойством (52) и каков возможный аналитический вид неголоморфных решений? Этот вопрос изучается в аналитической теории дифференциальных уравнений. Решение его проливает свет на качественную картину поведения интегральных кривых уравнения (57) в окрестности изолированной особой точки  $(0, 0)$  и на вопрос об устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения  $x \equiv 0, y \equiv 0$  соответствующей (автономной) системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y). \end{aligned} \right\}$$

**150. Теорема Коши для уравнения  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной.** Рассмотрим теперь вопрос о существовании голоморфного решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка. Мы ограничимся случаем уравнения, разрешенного относительно старшей производной.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (58)$$

и поставлены начальные условия

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (59)$$

Поставим вопрос: каким условиям достаточно подчинить правую часть уравнения (58) в окрестности начальных данных  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ , чтобы оно имело решение, голоморфное в точке  $x = x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (59)?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы так же, как и в п. 128, приведем уравнение (58) к нормальной системе  $n$  уравнений первого порядка путем введения  $n$  неизвестных функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , определяемых равенствами

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Получим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Вследствие этого нахождение решения уравнения (58), голоморфного в точке  $x = x_0$  и удовлетворяющего начальным условиям (59), равносильно нахождению решения системы (60), голоморфного в точке  $x = x_0$  и удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_0, \quad y_2 = y_0', \quad \dots, \quad y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (61)$$

Правые части системы (60) будут удовлетворять условию теоремы Коши для нормальной системы  $n$  уравнений п. 146, если предположить, что функция  $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  голоморфна относительно совокупности всех своих аргументов в точке  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ , т. е. если

$$\begin{aligned} & f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= \sum_{m_0, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_0 \dots m_n} (x - x_0)^{m_0} (y_1 - y_0)^{m_1} (y_2 - y_0')^{m_2} \dots (y_n - y_0^{(n-1)})^{m_n}, \end{aligned}$$

где ряд справа сходится в некоторой области

$$|x - x_0| < \rho, \quad |y_1 - y_0| < r, \quad |y_2 - y_0'| < r, \quad \dots, \quad |y_n - y_0^{(n-1)}| < r \\ (\rho > 0, \quad r > 0).$$

В этом случае система (60) имеет единственное решение

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x),$$

голоморфное в точке  $x = x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям



(61), причем ряды, представляющие это решение, заведомо сходятся в области

$$|x-x_0| < \rho_1 < \rho, \quad \rho_1 = \rho' (1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)\rho'M}}), \quad (62)$$

где  $0 < \rho' < \rho$ ,  $0 < r' < r$ , а  $M$  — некоторая положительная постоянная.

Поэтому для уравнения (58) имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Если правая часть уравнения (58) голоморфна относительно совокупности всех своих аргументов в точке  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ , т. е. представима в виде

$$\begin{aligned} f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \\ = \sum_{m_0, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_0 \dots m_n} (x-x_0)^{m_0} (y-y_0)^{m_1} (y'-y'_0)^{m_2} \dots (y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)})^{m_n}, \end{aligned}$$

где ряд справа сходится в области

$$|x-x_0| < \rho, \quad |y-y_0| < r, \quad |y'-y'_0| < r, \quad \dots, \quad |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}| < r \\ (\rho > 0, \quad r > 0),$$

то существует единственное решение, голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (59), т. е. решение вида

$$\begin{aligned} y = y_0 + y'_0(x-x_0) + \frac{y''_0}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \\ + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (x-x_0)^k, \end{aligned} \quad (63)$$

причем ряд справа заведомо сходится в области (62).

При этом коэффициенты  $c_k$  могут быть определены подстановкой ряда (63) в уравнение (58) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x-x_0$ .

**151. Теорема Коши для линейного уравнения  $n$ -го порядка.** Рассмотрим теперь вопрос о существовании голоморфного решения задачи Коши для линейного уравнения.

Пусть дано линейное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (64)$$

и поставлены начальные условия

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (65)$$

**Теорема.** Если коэффициенты  $p_k(x)$  и правая часть  $f(x)$  голоморфны в точке  $x=x_0$ , так что

$$\left. \begin{aligned} p_k(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} p_s^{(k)}(x-x_0)^s \quad (k=1, \dots, n), \\ f(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} b_s(x-x_0)^s, \end{aligned} \right\}$$

где ряды справа сходятся в области

$$|x-x_0| < \rho \quad (\rho > 0), \quad (66)$$

то уравнение (64) имеет единственное решение  $y=y(x)$ , голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (65), где  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  — любые заданные числа, т. е. решение вида

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \\ &+ \sum_{h=n}^{\infty} c_h(x-x_0)^h, \quad |x-x_0| < \rho. \end{aligned} \quad (67)$$

Коэффициенты  $c_h$  можно определить подстановкой ряда (67) в уравнение (64) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x-x_0$ .

Эта теорема вытекает из теоремы п. 148 так же, как теорема предыдущего пункта следует из теоремы п. 146.

Если в уравнении (64) функции  $p_k(x)$  и  $f(x)$  суть целые функции, то каковы бы ни были числа  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ , уравнение (64) имеет решение вида (67), причем функция  $y$  также является целой. Например, это будет иметь место, когда функции  $p_k(x)$  и  $f(x)$  постоянны, или суть полиномы от  $x$ , или функции типа  $e^x, \sin x, \cos x$  (ср. п. 148, замечание 1).

Если  $p_k(x)$  и  $f(x)$  представляют собою рациональные дроби вида (42), где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — полиномы от  $x$ , а  $x_0$  — любое число, не обращающее в нуль ни одного из знаменателей дробей, то уравнение (64) имеет единственное решение  $y=y(x)$ , голоморфное в точке  $x=x_0$  и удовлетворяющее начальным условиям (65), причем числа  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  можно задавать произвольно. Это решение имеет вид (67), где ряд справа заведомо сходится в области  $|x-x_0| < \rho$ , где  $\rho$  — расстояние от точки  $x=x_0$  до ближайшей из точек, в которых знаменатели выше указанных дробей обращаются в нуль (ср. п. 148, замечание 2; см. также [102, с. 211—214]).

В заключение отметим, что теорема Коши представляет собою лишь достаточное условие существования голоморфного решения задачи Коши для уравнения  $n$ -го порядка. Для линейного однородного уравнения второго порядка мы покажем это в п. 191.

**152. Теорема о голоморфности решения относительно параметра.**  
 Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z, \lambda), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z, \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

правые части которой голоморфны относительно  $x, y, z$  и параметра  $\lambda$  в точке  $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z, \lambda) &= \sum_{k, l, m, n=0}^{\infty} a_{klmn} (x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m (\lambda-\lambda_0)^n, \\ f_2(x, y, z, \lambda) &= \sum_{k, l, m, n=0}^{\infty} b_{klmn} (x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m (\lambda-\lambda_0)^n, \end{aligned} \right\}$$

причем ряды справа сходятся в области

$$\begin{aligned} |x-x_0| < \rho, \quad |y-y_0| < r, \quad |z-z_0| < r, \quad |\lambda-\lambda_0| < \Lambda \\ (\rho > 0, \quad r > 0, \quad \Lambda > 0). \end{aligned}$$

При сделанных предположениях существует единственное решение

$$y = y(x, \lambda), \quad z = z(x, \lambda)$$

системы (68), голоморфное в точке  $(x_0, \lambda_0)$  и удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (69)$$

т. е. решение, представимое в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{kl}^{(1)} (x-x_0)^k (\lambda-\lambda_0)^l, \\ z &= \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{kl}^{(2)} (x-x_0)^k (\lambda-\lambda_0)^l, \end{aligned} \right\}$$

сходящихся в области

$$|x-x_0| < \rho_1 < \rho, \quad |\lambda-\lambda_0| < \Lambda_1 < \Lambda,$$

где  $\rho_1$  и  $\Lambda_1$  — некоторые положительные числа, связанные определенной зависимостью.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Коши.\*

**З а м е ч а н и е.** С соответствующими изменениями теорема настоящего пункта переносится на случай нескольких параметров, на нормальную систему  $n$  уравнений и на уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

### § 27. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (ТЕОРЕМА ПЕАНО)

**153. Теорема Арцеля.** Во всех предыдущих рассуждениях мы рассматривали уравнения, правые части которых удовлетворяли условиям, гарантирующим не только существование, но и единственность решения.

В настоящем параграфе мы покажем, что существование решения можно гарантировать при более слабом требовании относительно правых частей уравнения, а именно мы докажем теорему Пеано, согласно которой, как уже говорилось ранее (см. пп. 85 и 104), для существования решения задачи Коши достаточно потребовать только непрерывности правых частей уравнений в окрестности начальных данных. Правда, при этом мы уже не можем гарантировать единственности решения. Но последние и не всегда требуется. Многие вопросы качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости решения (движения) в смысле Ляпунова могут рассматриваться и для систем дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условиям единственности.

Для доказательства теоремы Пеано нам потребуется доказываемая ниже теорема Арцеля относительно семейства функций  $\{f(x)\}$ , равномерно ограниченных и равномерно непрерывных в некотором интервале  $[a, b]$ .

Будем говорить, что функции  $f(x)$  семейства  $\{f(x)\}$  равномерно ограничены в интервале  $[a, b]$ , если существует такое постоянное положительное число  $M$ , что для всякой функции  $f(x)$  из этого семейства и для любого  $x$  из интервала  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq M.$$

Здесь существенно, что число  $M$  — одно и то же для всех функций семейства  $\{f(x)\}$ . Например, функции семейства  $\{\sin \alpha x\}$  равномерно ограничены во всяком интервале, причем  $M=1$ .

---

\* Можно доказать, что решение системы (68), удовлетворяющее начальным условиям (69), голоморфно относительно параметра  $\lambda$  в точке  $\lambda=\lambda_0$ , не требуя голоморфности правых частей системы (68) относительно  $x$  в точке  $x=x_0$ . Достаточно предположить, что правые части только непрерывны относительно  $x$  в окрестности точки  $x=x_0$  и голоморфны относительно совокупности аргументов  $y, z$  и  $\lambda$  в точке  $(y_0, z_0, \lambda_0)$  [141].

Далее будем говорить, что функции  $f(x)$  семейства  $\{f(x)\}$  *равностепенно непрерывны* в интервале  $[a, b]$ , если по всякому положительному числу  $\varepsilon$  найдется такое зависящее только от  $\varepsilon$  и не зависящее от выбора функции  $f(x)$  положительное число  $\eta$ , что для всякой функции семейства  $\{f(x)\}$  будет выполняться неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

при любых значениях  $x''$  и  $x'$  из промежутка  $[a, b]$ , абсолютная величина разности которых меньше  $\eta$

$$|x'' - x'| < \eta.$$

Здесь существенно, что при заданном  $\varepsilon > 0$  число  $\eta$  одно и то же для всех функций семейства. Например, функции семейства  $\{\sin(\alpha + x)\}$  равностепенно непрерывны во всяком интервале, как это следует из формулы

$$|\sin(\alpha + x'') - \sin(\alpha + x')| = |\cos(\alpha + \bar{x})| |x'' - x'| \quad (x' < \bar{x} < x'').$$

Здесь  $\eta = \varepsilon$ . Напротив, функции семейства  $\{\sin \alpha x\}$  уже не будут равностепенно непрерывными ни в каком интервале. В самом деле, имеем

$$|\sin \alpha x'' - \sin \alpha x'| = |\alpha \cos \alpha \bar{x}| |x'' - x'|.$$

Здесь правая часть — неограниченная функция от  $\alpha$ .

**Теорема Арцеля.** *Из всякого семейства функций  $\{f(x)\}$ , состоящего из бесконечного множества функций, определенных в интервале  $[a, b]$ , равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в этом интервале, можно выделить равномерно сходящуюся в  $[a, b]$  бесконечную последовательность функций.*

Для доказательства\* заметим прежде всего, что так как все функции семейства  $\{f(x)\}$  равномерно ограничены в интервале  $[a, b]$ , то их графики будут расположены в прямоугольнике  $ABCD$  (рис. 50) со сторонами, имеющими длины  $b - a$  и  $2M$ .

Составим бесконечную последовательность чисел

$$\varepsilon_1 = \frac{M}{2^{\alpha+1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M}{2^{\alpha+2}}, \quad \dots, \quad \varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k}}, \quad \dots,$$

---

\* Приводимое доказательство теоремы Арцеля принадлежит Л. А. Люстернику и заимствовано нами из книги [119, с. 37—39].

где  $\alpha$  — какое-нибудь целое положительное число или нуль. Каждому числу  $\varepsilon_k$  будет соответствовать число  $\eta_k = \eta_k(\varepsilon_k)$ , участвующее в определении равностепенной непрерывности функций семейства  $\{f(x)\}$ .

Разобьем вертикальную сторону  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  на отрезки длиной  $\varepsilon_1$ , а горизонтальную сторону — на отрезки длиной  $\leq \eta_1$ . Через полученные точки проведем прямые параллельные осям координат, так что весь прямоугольник  $ABCD$  разобьется на меньшие прямоугольники. При построении рис. 50

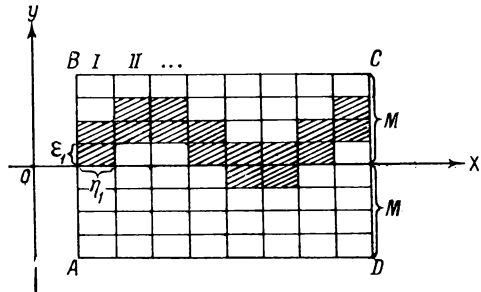


Рис. 50

положено  $\alpha = 1$ . Вертикальные полосы, составленные из таких прямоугольников, будем обозначать римскими цифрами  $I, II$ .

Заметим, что так как

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad |x'' - x'| < \eta_1,$$

то график каждой функции семейства  $\{f(x)\}$  может проходить не больше чем по двум соседним прямоугольникам каждой такой полосы.

Рассмотрим сначала полосу  $I$ . Так как в ней имеется лишь конечное число пар соседних прямоугольников, а через всю эту полосу проходят графики всех функций семейства  $\{f(x)\}$ , состоящего из бесконечного множества функций, то по крайней мере по одной паре соседних прямоугольников полосы  $I$  проходит бесконечное множество графиков функций из семейства  $\{f(x)\}$ . Эта пара прямоугольников на нашем рисунке заштрихована. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те функции, графики которых в полосе  $I$  проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Таких функций, как мы уже показали, бесконечное множество.

В полосе  $II$  все графики этих функций могут проходить только по четырем прямоугольникам этой полосы, график же каждой такой функции может проходить только по двум соседним из них. Следовательно, в полосе  $II$  существуют по крайней мере два таких смежных прямоугольника, по которым проходит бесконечное множество графиков функций данного семейства  $\{f(x)\}$  и притом таких, которые и на полосе  $I$  проходят только по заштрихованным прямоугольникам. Эти прямоугольники полосы  $II$  у нас также заштрихованы.

Рассуждая и дальше таким же образом, мы найдем целую полосу, расположенную над всем интервалом  $[a, b]$ , шириной  $2\varepsilon_1$ , по которой проходит бесконечное множество графиков функций семейства  $\{f(x)\}$ . Эта полоска у нас заштрихована. Будем ее обозначать через  $S_1$ .

Возьмем из этих графиков какой-нибудь один; пусть это будет график функции  $f_1^*(x)$ . Семейство оставшихся функций, графики которых проходят по  $S_1$ , обозначим через  $\{f_1(x)\}$ .

С семейством функций  $\{f_1(x)\}$  проделаем то же, что мы проделали с семейством  $\{f(x)\}$ , с той только разницей, что теперь вместо  $\varepsilon_1$  возьмем  $\varepsilon_2$  и вместо  $\eta_1$  возьмем  $\eta_2$ . Тогда получим вложенную в  $S_1$  полоску  $S_2$  шириной  $2\varepsilon_2$ , по которой проходят графики бесчисленного множества функций из семейства  $\{f_1(x)\}$ . Одну из этих функций обозначим через  $f_2^*(x)$ , а семейство остальных таких функций обозначим через  $\{f_2(x)\}$ .

Продолжая эти рассуждения, мы получим, таким образом, бесконечную последовательность функций

$$f_1^*(x), f_2^*(x), \dots, f_k^*(x), \dots$$

Графики всех этих функций, начиная с  $f_k^*(x)$ , лежат в полоске  $S_k$  шириной  $\frac{M}{2^{\alpha+h-1}}$ . Следовательно, эта последовательность сходится равномерно в интервале  $[a, b]$ , что и требовалось доказать.

**154. Теорема существования решения дифференциального уравнения с непрерывной правой частью (теорема Пеано).** Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

правая часть которого определена в некоторой области

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b,$$

где  $a$  и  $b$  — заданные положительные числа. Тогда имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а** [145, с. 68—73]. *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна и, следовательно, ограничена в области  $R$ , т. е. для всех точек  $(x, y)$  из области  $R$  выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (2)$$

где  $M$  — постоянное положительное число, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение

$$y = \varphi(x),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (3)$$

Это решение определено и непрерывно вместе с первой производной в интервале

$$|x - x_0| \leq h,$$

где

$$h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$$

и не выходит из области  $R$ , пока  $x$  изменяется в интервале  $|x - x_0| \leq h$ .

Установим сначала одну лемму.

Пусть дана ломаная линия  $y = \psi(x)$ , состоящая из  $n$  звеньев. Обозначим через  $x_0, x_1, \dots, x_n$  абсциссы угловых точек, а через  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — угловые коэффициенты звеньев этой ломаной. Тогда справедлива следующая лемма.

**Л е м м а.** Если угловые коэффициенты звеньев ломаной  $y = \psi(x)$  заключены между двумя числами  $k^{(1)}$  и  $k^{(2)}$

$$k^{(1)} \leq k_i \leq k^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то угловой коэффициент  $k$  всякой хорды ломаной  $y = \psi(x)$  также заключен между этими числами, т. е.

$$k^{(1)} \leq k \leq k^{(2)}.$$

Действительно, пусть концы хорды имеют абсциссы  $x'$  и  $x''$ . Тогда

$$k = \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'}.$$

Пусть  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  — проекции звеньев нашей ломаной на ось  $Ox$ , так что

$$k_i = \frac{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Предположим, что между точками  $x'$  и  $x''$  находятся точки  $x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_{\mu+l}$ ; тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x_\mu) - \psi(x')}{x_\mu - x'} &= k_\mu, & \frac{\psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu)}{x_{\mu+1} - x_\mu} &= k_{\mu+1}, \dots \\ \dots, & & \frac{\psi(x'') - \psi(x_{\mu+l})}{x'' - x_{\mu+l}} &= k_{\mu+l+1}. \end{aligned}$$



Отсюда

$$\begin{aligned}\psi(x_\mu) - \psi(x') &= k_\mu(x_\mu - x'), \\ \psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu) &= k_{\mu+1}(x_{\mu+1} - x_\mu), \\ &\vdots \\ \psi(x'') - \psi(x_{\mu+l}) &= k_{\mu+l+1}(x'' - x_{\mu+l}).\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned}\psi(x'') - \psi(x') &= k_\mu(x_\mu - x') + k_{\mu+1}(x_{\mu+1} - x_\mu) + \dots + \\ &+ k_{\mu+l+1}(x'' - x_{\mu+l}).\end{aligned}$$

Но

$$k^{(1)} \leq k_\mu \leq k^{(2)}, \quad k^{(1)} \leq k_{\mu+1} \leq k^{(2)}, \quad \dots, \quad k^{(1)} \leq k_{\mu+l+1} \leq k^{(2)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}k^{(1)}(x_\mu - x' + x_{\mu+1} - x_\mu + \dots + x'' - x_{\mu+l}) &\leq \psi(x'') - \psi(x') \leq \\ &\leq k^{(2)}(x_\mu - x' + x_{\mu+1} - x_\mu + \dots + x'' - x_{\mu+l})\end{aligned}$$

или

$$k^{(1)}(x'' - x') \leq \psi(x'') - \psi(x') \leq k^{(2)}(x'' - x'),$$

откуда

$$k^{(1)} \leq \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} \leq k^{(2)},$$

что и доказывает лемму. Ясно, что утверждение леммы справедливо для ломаной, состоящей из любого конечного числа звеньев.

**Доказательство теоремы Пеано.** Ограничимся доказательством существования решения для интервала  $[x_0, x_0 + h]$ . Из метода доказательства будет видно, что оно легко переносится и на интервал  $[x_0 - h, x_0]$ .

Рассмотрим замкнутую область

$$R_+: \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h, \quad |y - y_0| \leq b.$$

Возьмем любое целое положительное число  $n$  и построим ломаную Эйлера  $y = \varphi_n(x)$  (рис. 51). Для этого разделим интервал  $[x_0, x_0 + h]$  на  $n$  равных частей, обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = x_0 + h$$

и определим  $\varphi_n(x)$  следующим образом (см. п. 6):

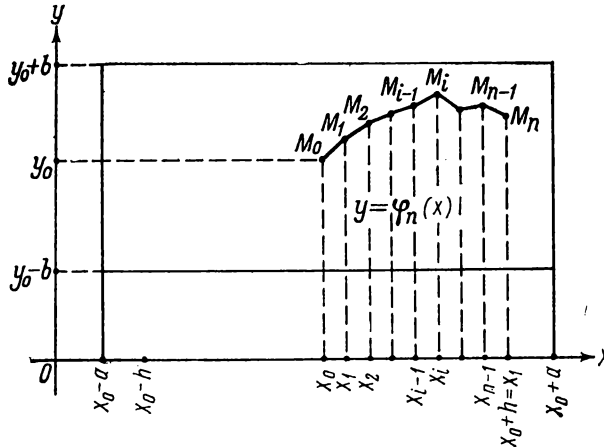
$$\left. \begin{aligned}\varphi_n(x) &= y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad \text{при } x_0 \leq x \leq x_1, \\ \varphi_n(x) &= y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x - x_{i-1}), \quad \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \varphi_n(x) &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}), \quad \text{при } x_{n-1} \leq x \leq x_n,\end{aligned} \right\}$$

где

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Построенная ломаная  $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$  целиком лежит в области  $R_+$ . В самом деле, в силу доказанной выше леммы мы имеем оценку

$$-M \leq \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}{x - x_0} \leq M \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h$$



Р и с. 51

(ибо угловые коэффициенты всех звеньев нашей ломаной лежат, согласно условию (2), между  $-M$  и  $M$ ). Из этой оценки следует, что

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b,$$

т. е.

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

Давая  $n$  значения  $1, 2, \dots$ , мы получим последовательность ломаных Эйлера. Соответствующая ей последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (4)$$

будет удовлетворять обоим условиям теоремы Арцеля.

Действительно, при  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$  мы имеем для любого  $n$  оценку

$$|\varphi_n(x)| = |(\varphi_n(x) - y_0) + y_0| \leq |\varphi_n(x) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0|,$$

так что функции  $\varphi_n(x)$  равномерно ограничены в интервале  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ .

Далее, эти функции равностепенно непрерывны в интервале  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ . В самом деле, в силу леммы мы имеем

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| \leq M|x'' - x'|$$

для любых  $x'$  и  $x''$  из интервала  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ . Следовательно, какое бы  $\varepsilon > 0$  ни взять, мы для любого  $n$  будем иметь

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| < \varepsilon,$$

если

$$|x'' - x'| < \eta = \frac{\varepsilon}{M}, \quad x_0 \leq x', \quad x'' \leq x_0 + h,$$

а это и означает, что  $\varphi_n(x)$  равностепенно непрерывны в интервале  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ .

По теореме Арцеля, из последовательности (4) можно выбрать подпоследовательность

$$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \dots, \varphi_{n_k}(x), \dots, \quad (5)$$

сходящуюся равномерно в интервале  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ .

Обозначим предельную функцию подпоследовательности (5) через  $\varphi(x)$ . Ясно, что кривая  $y = \varphi(x)$  не выходит из области  $R_+$ .

Докажем, что  $y = \varphi(x)$  будет искомым решением уравнения (1).\*

Заметим прежде всего, что начальное условие (3) выполняется автоматически, ибо все ломаные Эйлера проходят через точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

Чтобы убедиться в том, что  $y = \varphi(x)$  является решением уравнения (1) в интервале  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ , покажем, что функция  $\varphi(x)$  имеет производную в любой точке  $\bar{x}$  интервала  $[x_0, x_0 + h]$  и что эта производная равна  $f(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ , то найдется такая замкнутая область

$$R_1: |x - \bar{x}| \leq \delta, \quad |y - \bar{y}| \leq \delta,$$

что для каждой точки  $(x, y)$  этой области выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

---

\* Может случиться, как уже отмечено в п. 6, что существует несколько подпоследовательностей типа (5), каждая из которых сходится к своей функции. Тогда мы найдем несколько решений уравнения (1), проходящих через точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

Пусть

$$h_1 = \min \left( \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M} \right).$$

Возьмем приращение  $\Delta x$ , удовлетворяющее неравенствам

$$0 < |\Delta x| \leq h_1,$$

и фиксируем его.

Выберем  $N_1$  таким, чтобы при  $k > N_1$  имело место неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h \quad (7)$$

(это возможно, ибо подпоследовательность (5) сходится к  $\varphi(x)$  равномерно в интервале  $[x_0, x_0 + h]$ ) и чтобы расстояние между абсциссами угловых точек ломаных  $y = \varphi_{n_k}(x)$  было меньше  $\frac{h_1}{2}$  (для этого достаточно взять  $n_k > \frac{2h}{h_1}$ , так как расстояние между абсциссами угловых точек ломаной  $y = \varphi_{n_k}(x)$  равно  $\frac{h}{n_k}$ ).

Оценим разность

$$\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}). \quad (8)$$

Покажем сначала, что при  $k > N_1$  все угловые точки ломаных  $y = \varphi_{n_k}(x)$ , абсциссы которых заключены между числами  $\bar{x}$  и  $\bar{x} + \Delta x$ , лежат внутри области  $R_1$ . В самом деле, пусть сначала  $\Delta x > 0$ . Согласно выбору  $\Delta x$  и на основании леммы, имеем

$$|\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})| \leq h_1 M \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta x.$$

Отсюда, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leq h_1 M \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \Delta x.$$

Теперь, принимая во внимание (7), при  $k > N_1$ , будем иметь

$$|\varphi_{n_k}(x) - \bar{y}| = |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x) +$$

$$+\varphi(x)-\varphi(\bar{x})|<\frac{3\delta}{4} \quad \text{при} \quad \bar{x}\leq x\leq \bar{x}+\Delta x,$$

так что наше утверждение доказано для  $0\leq\Delta x\leq h_1$ . Если  $\Delta x<0$ , то левая часть интервала  $[\bar{x}+\Delta x, \bar{x}]$  покрыта проекцией звена  $M_{i-1}M_i$ , где  $x_{i-1}\leq\bar{x}+\Delta x<x_i$ , но так как  $x_i-x_{i-1}<\frac{h_1}{2}$ , то

$$|\varphi_{n_k}(x_{i-1})-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)|<\frac{h_1}{2}M\leq\frac{\delta}{4M}M=\frac{\delta}{4}.$$

Теперь получаем

$$\left. \begin{aligned} |\varphi_{n_k}(x_{i-1})-\bar{y}| &= |\varphi_{n_k}(x_{i-1})-\varphi(\bar{x})| = |\varphi_{n_k}(x_{i-1})- \\ &-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)+\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})+\varphi_{n_k}(\bar{x})-\varphi(\bar{x})| < \delta, \\ |x_{i-1}-\bar{x}| &= |x_{i-1}-x_i+x_i-\bar{x}| < \frac{h_1}{2}+h_1 < \delta. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, при  $k>N_1$  все угловые точки ломаных  $y=\varphi_{n_k}(x)$ , абсциссы которых заключены между числами  $\bar{x}$  и  $\bar{x}+\Delta x$ , лежат внутри области  $R_1$ . Но тогда угловые коэффициенты всех этих звеньев заключены, согласно (6), между числами  $f(\bar{x}, \bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}$  и  $f(\bar{x}, \bar{y})+\frac{\varepsilon}{2}$ . Отсюда, в силу леммы, получаем

$$f(\bar{x}, \bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}<f(\bar{x}, \bar{y})+\frac{\varepsilon}{2},$$

так что искомая оценка разности (8) имеет вид

$$\left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь разность

$$\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}). \quad (9)$$

При  $k>N_1$  мы имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} \right| + \\
& + \left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \\
& < \left| \frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)}{\Delta x} \right| + \left| \frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} \right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Выберем такое число  $N_2 > N_1$ , чтобы при  $k > N_2$  было

$$|\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < |\Delta x| \frac{\varepsilon}{4} \text{ для всех } x \text{ из } [x_0, x_0 + h].$$

Тогда при  $k > N_2$  получим оценку разности (9)

$$\left| \frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x) - \varphi(\bar{x})}{\Delta x} - f(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \varepsilon, \quad (10)$$

где  $\Delta x$  фиксированное достаточно малое число. Оценка (10) показывает, что производная от  $\varphi(x)$  в точке  $x = \bar{x}$  существует и равна  $f(\bar{x}, \bar{y})$ . Так как  $\bar{x}$  — любое число из интервала  $[x_0, x_0 + h]$ , то для всякого  $x$  из этого интервала мы имеем

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)].$$

Теорема доказана.

*З а м е ч а н и е.* Мы изложили доказательство теоремы Пеано для области вида  $R$ . Однако теорема Пеано остается в силе и для любой замкнутой области: если правая часть уравнения (1) определена и непрерывна в замкнутой области  $G(x, y)$ , то через всякую внутреннюю точку этой области проходит хотя одна интегральная кривая уравнения (1).

Доказанная теорема Пеано легко распространяется на нормальную систему  $n$  уравнений, а следовательно, и на уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Если правые части системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

определены и непрерывны в замкнутой области  $G(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , то через всякую внутреннюю точку этой области проходит хотя одна интегральная кривая системы (11).

## § 28. ТЕОРЕМА КАТЕДОРИ

**155. Предварительные замечания.** Минимальным требованием в теоремах существования решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, доказанных выше, было требование непрерывности правых частей уравнений (теорема Пеано), т. е. непрерывность поля направлений. Это требование было естественным, так как мы в качестве решений рассматривали только непрерывно дифференцируемые функции. Если от последнего условия отказаться, то можно доказать существование решения задачи Коши и не предполагая непрерывности правых частей системы дифференциальных уравнений в окрестности начальных данных.

Мы будем допускать в качестве решений абсолютно непрерывные функции, понятие о которых дается ниже. При этом само решение будем понимать в более широком смысле, не требуя, чтобы оно обращало уравнения системы в тождества при всех значениях  $x$  из интервала задания решения.

Дадим сначала определение абсолютно непрерывной функции.

Пусть функция  $f(x)$  задана на интервале  $[a, b]$ . Тогда, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всякой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ , лежащих внутри интервала  $[a, b]$ , и таких, что сумма их длин меньше  $\delta$

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k)) \right| < \varepsilon,$$

то функция  $f(x)$  называется *абсолютно непрерывной в интервале  $[a, b]$* .

Очевидно, что всякая функция, абсолютно непрерывная в интервале  $[a, b]$ , непрерывна и даже равномерно непрерывна в этом интервале.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся понятия измеримого множества, измеримой функции и интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции.

Если  $G$  — непустое открытое ограниченное множество, то его мерой  $mG$  называется сумма длин всех его составляющих интервалов  $\delta_k$

$$mG = \sum_k m \delta_k.$$

Пусть  $F$  — непустое ограниченное замкнутое множество. Если  $A = \inf F$ ,  $B = \sup F$ , то интервал  $S = [A, B]$  называется *наименьшим замкнутым интервалом*, содержащим  $F$ . При этом дополнение множества  $F$  до интервала  $[A, B]$ , т. е. множество

$$C_S F = [A, B] \setminus F$$

открыто. Мерой непустого ограниченного замкнутого множества  $F$  называется число

$$mF = B - A - m[C_S F].$$

При этом мера любого замкнутого интервала  $[a, b]$  равна длине этого интервала

$$m[a, b] = b - a.$$

Дадим теперь определение меры любого ограниченного множества  $E$ , введя предварительно понятия внешней и внутренней мер этого множества.

*Внешней мерой  $m^*E$  ограниченного множества  $E$*  называется точная нижняя граница мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих множество  $E$ ,

$$m^*E = \inf_{G \supset E} \{mG\}.$$

*Внутренней мерой  $m_*E$  ограниченного множества  $E$*  называется точная верхняя граница мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в множестве  $E$ ,

$$m_*E = \sup_{F \subset E} \{mF\}.$$

Ограниченное множество  $E$  называется *измеримым*, если его внутренняя и внешняя меры равны друг другу

$$mE = m^*E = m_*E.$$



Если две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  заданы на одном и том же множестве  $E$  и их значения не совпадают только на множестве  $E_0 \subset E$ , причем  $mE_0 = 0$ , то говорят, что  $f(x)$  и  $g(x)$  *равны почти везде на  $E$* . Такие функции называются также *эквивалентными*.

Вообще говорят, что некоторое свойство *справедливо почти везде*, если множество точек, на котором оно нарушается, имеет меру нуль.

Можно доказать, что *если  $f(x)$  абсолютно непрерывна на интервале  $[a, b]$ , то она почти везде на этом интервале имеет производную*.

Введем понятие измеримой функции.

Функция  $f(x)$ , заданная на множестве  $E$ , называется *измеримой на нем*, если множество  $E$  измеримо и если при любом  $a$  будет измеримым множество

$$E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\},$$

т. е. множество всех тех  $x$  из  $E$ , для которых  $f(x) > a$ .

Нетрудно убедиться, что если  $f(x)$  измерима на каждом из взаимно не пересекающихся множеств, то она измерима и на их объединении.

Отметим еще, что множество измеримых функций замкнуто относительно операции предельного перехода, т. е. если последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , измеримых на  $E$ , сходится почти везде на  $E$  к функции  $f(x)$ , то последняя будет тоже измеримой на  $E$ .

Дадим теперь определение интеграла Лебега от измеримой ограниченной функции.

Предположим, что функция  $f(x)$  задана на множестве  $E$ , измерима и ограничена на нем, так что

$$A < f(x) < B, \quad \forall x \in E.$$

Разобьем интервал  $[A, B]$  на  $n$  частей точками

$$y_0 = A < y_1 < \dots < y_k < y_{k+1} < \dots < y_n = B$$

и рассмотрим множества

$$e_k = \{x \in E \mid y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Построим *нижнюю и верхнюю суммы Лебега*

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m e_k.$$

Пусть

$$U = \sup \{s\}, \quad V = \inf \{S\}.$$

Можно доказать [112, с. 130], что (для любой измеримой и ограниченной функции)

$$U=V.$$

**О п р е д е л е н и е.** Общее значение чисел  $U$  и  $V$  называется *интегралом Лебега от функции  $f(x)$  по множеству  $E$*  и обозначается

$$(L) \int_E f(x) dx \quad \text{или} \quad \int_E f(x) dx.$$

В частности, если  $E=[a, b]$ , то пишут

$$(L) \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, *любая измеримая и ограниченная функция интегрируема в смысле Лебега.*

Отметим [111, с. 146], что всякая функция  $f(x)$ , интегрируемая на  $[a, b]$  в смысле Римана (и, следовательно, ограниченная), интегрируема и в смысле Лебега, причем

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (L) \int_a^b f(x) dx.$$

Обратное не верно. Например, известная функция Дирихле

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное;} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное,} \end{cases}$$

(эквивалентная нулю) интегрируема в смысле Лебега и не интегрируема в смысле Римана (почему?).

В дальнейшем факт интегрируемости функции  $f(x)$  в смысле Лебега на множестве  $E$  будем записывать так:

$$f(x) \in L^1(E).$$

Отметим некоторые свойства интеграла Лебега [111, с. 131—141].

1. Если  $f(x) \equiv c$  на измеримом множестве  $E$ , то

$$\int_E f(x) dx = c \cdot mE.$$

2. Если  $mE=0$  и  $f(x)$  — любая ограниченная измеримая функция, заданная на  $E$ , то

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

3. Если  $f(x)$  измерима и ограничена на измеримом множестве  $E$  и  $E = \bigcup_k E_k$ , причем  $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$  ( $k \neq k'$ ), то

$$\int_E f(x) dx = \sum_k \int_{E_k} f(x) dx.$$

4. Если измеримые ограниченные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  заданы на (измеримом) множестве  $E$  и эквивалентны на  $E$ , то их интегралы равны

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx.$$

Следовательно, можно изменять значение подынтегральной функции на множестве меры нуль, не нарушая при этом ни интегрируемости функции, ни величины самого интеграла.

$$5. \int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

$$6. \int_E cf(x) dx = c \int_E f(x) dx.$$

7. Если  $f(x) \leq F(x)$ ,  $\forall x \in E$ , то

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E F(x) dx.$$

8. Если  $f(x)$  измерима и ограничена на множестве  $E$ , то

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx.$$

9. Если  $f(x) \in L^1([a, b])$ , то функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

абсолютно непрерывна на  $[a, b]$  и  $\Phi'(x) = f(x)$  почти везде на  $E$ .

10. Теорема Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла Лебега). Пусть дана последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , заданных на множестве  $E$ , и выполнены три условия:

- 1)  $\forall n \ f_n(x) \in L^1(E)$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  почти везде на  $E$ ,
- 3) Существует функция  $m(x) \in L^1(E)$  такая, что  $\forall n \ |f_n(x)| \leq m(x)$  почти везде на  $E$ .

Тогда:

- 1)  $f(x) \in L^1(E)$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$ .

Ниже будет доказана теорема Каратеодори существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  — вещественная (не обязательно непрерывная) функция, определенная на некотором множестве  $A$ . При этом под *решением уравнения (1) на интервале  $I$*  мы будем понимать абсолютно непрерывную функцию  $y = y(x)$ , заданную на интервале  $I$ , причем такую, что

$$(x, y(x)) \in A, \quad \forall x \in I$$

и

$$y'(x) \equiv f(x, y(x))$$

почти везде на  $I^*$  (ср. определение решения уравнения (1), данное в п. 2).

**156. Формулировка и доказательство теоремы Каратеодори.** Предположим, что правая часть уравнения (1) определена в прямоугольнике

$$R: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

и удовлетворяет в нем двум условиям:

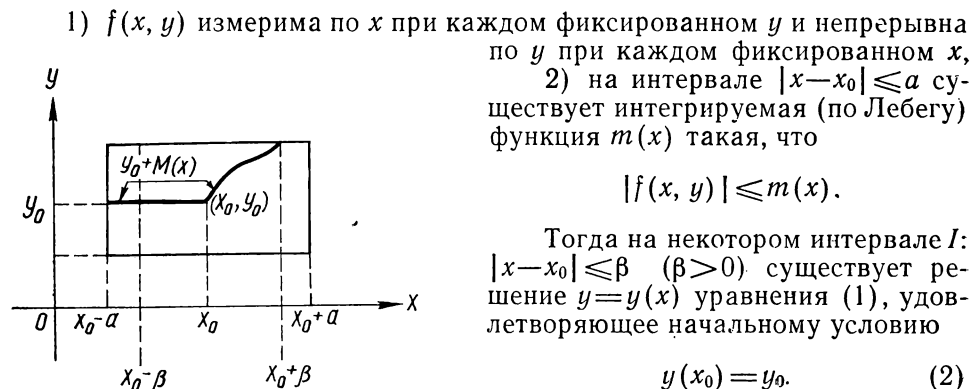


Рис. 52

**Доказательство.** Ограничимся доказательством существования решения поставленной задачи Коши (1), (2) для значений  $x \geq x_0$  (для  $x \leq x_0$  доказательство проводится аналогично). Введем вспомогательную функцию (рис. 52)

$$M(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0 - a, x_0]; \\ \int_{x_0}^x m(x) dx, & x \in [x_0, x_0 + a]. \end{cases} \quad (3)$$

Эта функция определена в интервале  $[x_0 - a, x_0 + a]$ , обращается в нуль в точке  $x = x_0$  и тождественно равна нулю слева от нее, непрерывна и не убывает во всем интервале  $[x_0 - a, x_0 + a]$ .

Поэтому существует  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq a$ , такое, что (рис. 52)

$$(x, y_0 \pm M(x)) \in R, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta],$$

т. е.

$$M(x) \leq b \quad \text{при} \quad x \in [x_0, x_0 + \beta].$$

Мы докажем в дальнейшем, что именно в интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$  и существует искомое решение задачи Коши (1), (2).

Для доказательства существования решения нам потребуется следующая лемма.

**Лемма.** Если функция  $f(x, y)$  удовлетворяет обоим условиям теоремы Каратеодори, а функция  $y = \varphi(x)$  непрерывна в интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$ ,  $0 < \beta \leq a$ , и не выходит

из области  $R$ , т. е.

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta],$$

то суперпозиция  $f[x, \varphi(x)]$  интегрируема в смысле Лебега на интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$ .

В самом деле, функция  $f[x, \varphi(x)]$  определена и ограничена на  $[x_0, x_0 + \beta]$  (почему?). Поэтому нам нужно доказать только ее измеримость. Для этого мы, пользуясь непрерывностью, будем рассматривать ее как предел некоторой последовательности  $\{\varphi_k(x)\}$  кусочно постоянных на  $[x_0, x_0 + \beta]$  функций. Фиксируем  $k$ . Тогда на каждом участке постоянства  $\varphi_k(x)$  суперпозиция  $f(x, \varphi_k(x))$  в силу первого условия теоремы Каратеодори будет измеримой (здесь мы пользуемся тем, что  $f(x, y)$  измерима по  $x$  при фиксированном  $y$ ). Измеримость эта сохранится и на всем интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$ , являющемся объединением участков постоянства  $\varphi_k(x)$ . Далее, так как функция  $f(x, y)$  непрерывна по второму аргументу при фиксированном значении первого, то, фиксируя  $x \in [x_0, x_0 + \beta]$ , мы имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x, \varphi_k(x)) = f(x, \varphi(x)).$$

При этом  $f(x, \varphi(x))$  измерима, ибо множество измеримых функций замкнуто относительно операции предельного перехода. Наконец, так как функция  $\varphi(x)$  не выходит из области  $R$ , то мы можем воспользоваться вторым условием теоремы Каратеодори. Функция  $f(x, \varphi(x))$  окажется мажорируемой функцией  $m(x)$ , интегрируемой в смысле Лебега, а тогда она и сама интегрируема в смысле Лебега на  $[x_0, x_0 + \beta]$ , что и доказывает лемму.

Доказательство существования решения задачи Коши (1), (2) мы будем проводить по схеме, близкой к схеме доказательства теоремы Пеано, приведенного в п. 154. Но здесь вместо ломаных Эйлера мы построим *последовательные приближения по Каратеодори*, определяя их так:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0, & x \in \left[ x_0, x_0 + \frac{\beta}{n} \right]; \\ y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{\beta}{n}} f(t, y_n(t)) dt, & x \in \left[ x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + \beta \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что все эти приближения, очевидно, удовлетворяют начальному условию (2), ибо  $y_n(x_0) = 0$ , так что все кривые (4) проходят через начальную точку  $(x_0, y_0)$ . Но в отличие от пикаровских приближений последовательные приближения (4) по Каратеодори определяются независимо друг от друга: при построении  $y_{n+1}(x)$  не используется  $y_n(x)$ .

Мы покажем ниже, что формулы (4) действительно определяют на интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$  функции от  $x$ , что приближения (4) не выходят из области  $R$ , что при этом они равномерно ограничены

и равномерно непрерывны на интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$ . Затем так же, как и при доказательстве теоремы Пеано, мы, пользуясь теоремой Арцеля, выберем из последовательности  $\{y_n(x)\}$  равномерно сходящуюся подпоследовательность, предел которой и будет искомым решением задачи Коши (1), (2).

Покажем сначала, что формулы (4) определяют функции  $y_n(x)$  на интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$  и что кривые  $y = y_n(x)$  не покидают области  $R$ , т. е.

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \beta].$$

Для функции  $y_1(x)$  это утверждение очевидно, ибо

$$y_1(x) \equiv y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + \beta].$$

Покажем теперь, что любая функция  $y_n(x)$  определена и непрерывна на всем интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$  и не выходит из области  $R$ . Очевидно, достаточно показать, что вторая из формул (4) задает непрерывную на  $\left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + \beta\right]$  функцию и что последняя не выходит из  $R$ . Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения достаточно разбить интервал  $[x_0, x_0 + \beta]$  на  $n$  равных частей и провести индукцию по числу  $k$  шагов.

В самом деле, на первом шаге мы должны получить, пользуясь второй из формул (4), функцию  $y_n(x)$  на интервале  $\left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + 2\frac{\beta}{n}\right]$ . При этом (в силу выбора пределов интегрирования) переменная интегрирования изменяется в пределах

$$x_0 \leq t \leq x_0 + \frac{\beta}{n},$$

т. е. нам достаточно знать  $y_n(x)$  на начальном участке  $\left[x_0, x_0 + \frac{\beta}{n}\right]$ . На последнем функция  $y_n(x)$  определена, непрерывна и не выходит из  $R$ . Следовательно, согласно доказанной выше лемме, суперпозиция  $f(x, y_n(x))$  интегрируема в смысле Лебега, а тогда интеграл от нее будет непрерывной функцией верхнего предела. Так что  $y_n(x)$  определена и непрерывна на интервале  $\left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + 2\frac{\beta}{n}\right]$ . Покажем, что она не выходит из области  $R$ . Имеем (при  $x \in \left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + 2\frac{\beta}{n}\right]$ )

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x - \frac{\beta}{n}} |f(t, y_n(t))| dt \leq \int_{x_0}^{x - \frac{\beta}{n}} m(t) dt = \\
&= M \left( x - \frac{\beta}{n} \right) \leq M \left( x_0 + \frac{\beta}{n} \right) \leq b.
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что на  $k$ -м шаге вторая из формул (4) доставляет функцию  $y_n(x)$ , непрерывную на интервале  $\left[ x_0 + k \frac{\beta}{n}, x_0 + (k+1) \frac{\beta}{n} \right]$ , и что при этом  $(x, y_n(x)) \in R$ . Тогда, рассуждая так же, как и выше, убедимся, что  $y_n(x)$  будет определена и непрерывна на участке  $\left[ x_0 + (k+1) \frac{\beta}{n}, x_0 + (k+2) \frac{\beta}{n} \right]$ ; соответствующем  $(k+1)$ -му шагу, причем  $y_n(x)$  не выйдет из области  $R$ .

Таким образом, все приближения Каратеодори, доставляемые формулами (4), определены и непрерывны на  $[x_0, x_0 + \beta]$  и не выходят из области  $R$ .

Следуя принятому выше плану доказательства теоремы Каратеодори, покажем, что последовательность  $\{y_n(x)\}$  содержит равномерно сходящуюся на  $[x_0, x_0 + \beta]$  подпоследовательность. Для этого, имея в виду применение теоремы Арцеля, убедимся, что множество функций  $\{y_n(x)\}$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно на  $[x_0, x_0 + \beta]$ .

В самом деле, так как все  $y_n(x)$  не выходят из области

$$R: |y_n(x) - y_0| \leq b, \quad x \in [x_0, x_0 + \beta], \quad (5)$$

то

$$|y_n(x)| \leq |y_0| + b, \quad \forall n, x \in [x_0, x_0 + \beta],$$

т. е. множество  $\{y_n(x)\}$  равномерно ограничено на  $[x_0, x_0 + \beta]$ .

Покажем, что множество  $\{y_n(x)\}$  равномерно непрерывно на  $[x_0, x_0 + \beta]$ . Возьмем любые  $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \beta]$ . Тогда в силу (4), (3) и условия 2 имеем

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq M \left( x_2 - \frac{\beta}{n} \right) - M \left( x_1 - \frac{\beta}{n} \right),$$



ибо

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = \left\{ \begin{array}{l} |y_0 - y_0| = 0 = M\left(x_2 - \frac{\beta}{n}\right) - M\left(x_1 - \frac{\beta}{n}\right), \\ x_1, x_2 \in \left[x_0, x_0 + \frac{\beta}{n}\right]; \\ \left| y_0 - \left( y_0 + \int_{x_0}^{x_2 - \frac{\beta}{n}} f(t, y_n(t)) dt \right) \right| \leq \\ \leq M\left(x_2 - \frac{\beta}{n}\right) - M\left(x_1 - \frac{\beta}{n}\right), \\ x_1 \in \left[x_0, x_0 + \frac{\beta}{n}\right], \quad x_2 \in \left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + \beta\right]; \\ \left| y_0 + \int_{x_0}^{x_2 - \frac{\beta}{n}} f(t, y_n(t)) dt - \left( y_0 + \int_{x_0}^{x_1 - \frac{\beta}{n}} f(t, y_n(t)) dt \right) \right| = \\ = \left| \int_{x_1 - \frac{\beta}{n}}^{x_2 - \frac{\beta}{n}} f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \int_{x_1 - \frac{\beta}{n}}^{x_2 - \frac{\beta}{n}} m(t) dt = \\ = M\left(x_2 - \frac{\beta}{n}\right) - M\left(x_1 - \frac{\beta}{n}\right), \\ x_1, x_2 \in \left[x_0 + \frac{\beta}{n}, x_0 + \beta\right]. \end{array} \right.$$

Так как  $M(x)$  равномерно непрерывна на  $[x_0, x_0 + \beta]$  (почему?), то

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \beta],$$

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \left| M\left(x_2 - \frac{\beta}{n}\right) - M\left(x_1 - \frac{\beta}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \beta], \\ |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |y_n(x_2) - y_n(x_1)| < \varepsilon \quad \forall n,$$

а это и означает, что множество  $\{y_n(x)\}$  равномерно непрерывно на  $[x_0, x_0 + \beta]$ .

Применяя теперь теорему Арцеля, выделим из последовательности  $\{y_n(x)\}$  подпоследовательность  $\{y_{n_k}(x)\}$ , равномерно сходящуюся к некоторой функции  $y(x)$  на  $[x_0, x_0 + \beta]$ . При этом функция  $y(x)$  непрерывна (почему?).

Чтобы доказать, что  $y(x)$  является решением задачи Коши (1), (2), покажем, что она удовлетворяет на интервале  $[x_0, x_0 + \beta]$  интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad (6)$$

(ср. доказательство теоремы Пикара, изложенное в п. 120). Желая получить соответствующее интегральное тождество

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, x_0 + \beta], \quad (7)$$

предельным переходом (при  $k \rightarrow \infty$ ) в формуле

$$y_{n_k}(x) = \begin{cases} y_0, & x \in \left[ x_0, x_0 + \frac{\beta}{n_k} \right]; \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n_k}(t)) dt, & x \in \left[ x_0 + \frac{\beta}{n_k}, x_0 + \beta \right], \end{cases} \quad (8)$$

заметим, что

$$f(x, y_{n_k}(x)) \in L^1 \quad ([x_0, x_0 + \beta]),$$

$$|f(x, y_{n_k}(x))| \leq m(x) \in L^1 \quad ([x_0, x_0 + \beta]).$$

Поэтому в силу теоремы Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла) имеем

$$f(x, y(x)) \in L^1 \quad ([x_0, x_0 + \beta]),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n_k}(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (9)$$

Наличие переменного (при  $k \rightarrow \infty$ ) верхнего предела в формуле (8) не дает возможности сделать непосредственный предельный переход, опираясь на (9). Поэтому перепишем вторую из формул (8) так:

$$\begin{aligned} y_{n_k}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x - \frac{\beta}{n_k}} f(t, y_{n_k}(t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n_k}(t)) dt - \int_{x - \frac{\beta}{n_k}}^x f(t, y_{n_k}(t)) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Возьмем теперь  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \beta$ , выберем  $K$  так, чтобы  $\forall k \geq K$ ,  $\frac{\beta}{n_k} < \varepsilon$  и оценим последний интеграл в (10) для

$$x \in \left[ x_0 + \frac{\beta}{n_k}, x_0 + \beta \right] \supset [x_0 + \varepsilon, x_0 + \beta].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{x - \frac{\beta}{n_k}}^x f(t, y_{n_k}(t)) dt \right| &\leq \int_{x - \frac{\beta}{n_k}}^x m(t) dt \leq \\ &\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \beta} m(x) \cdot \frac{\beta}{n_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Переходя теперь к пределу в (10), мы получим интегральное тождество

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in [x_0 + \varepsilon, x_0 + \beta].$$

Но так как  $\varepsilon$  можно выбрать любым, то полученное интегральное тождество будет справедливо и для всего интервала  $[x_0, x_0 + \beta]$ . Тожество (7) и говорит о том, что функция  $y(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению (6).

Из тождества (7) ясно, что  $y(x)$  удовлетворяет начальному условию (2) (впрочем, это следует уже из того, что  $y_{n_k}(x_0) = 0 \forall k$ ). Остается убедиться, что  $y(x)$  обращает уравнение (1) в тождество почти везде на  $[x_0, x_0 + \beta]$ . Так как интеграл в правой части тождества (7), будучи интегралом Лебега с переменным верхним пределом от функции  $f(x, y(x)) \in L^1([x_0, x_0 + \beta])$ , является абсолютно непрерывной функцией на  $[x_0, x_0 + \beta]$ , то функция  $y(x)$  тоже будет абсолютно непрерывна на этом интервале. Кроме того,

$$(x, y(x)) \in R, \quad x \in [x_0, x_0 + \beta],$$

в чем легко убедиться, перейдя к пределу в неравенстве

$$|y_{n_k}(x) - y_0| \leq b, \quad x \in [x_0, x_0 + \beta],$$

вытекающем из (5).

Наконец, производная правой части тождества (7) существует почти везде на  $[x_0, x_0 + \beta]$  и равна подынтегральной функции, так что

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$$

почти везде на  $[x_0, x_0 + \beta]$ .

Таким образом, функция  $y(x)$  является решением уравнения (1) на  $[x_0, x_0 + \beta]$  и так как она удовлетворяет начальному условию (2), то, следовательно, является искомым решением задачи Коши (1), (2). Единственность не гарантируется.

Теорема Каратеодори является основной теоремой существования решений уравнений с разрывными и правыми частями. Среди последних результатов, относящихся к уравнениям с разрывными правыми частями, отметим работы В. М. Матросова [105], О. Я. Новикова и В. М. Егорова [114].

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $n$ -го ПОРЯДКА

#### § 29. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

**157. Предварительные замечания.** В настоящей и во всех последующих главах, кроме двух последних, мы рассматриваем линейные дифференциальные уравнения любого порядка и системы линейных дифференциальных уравнений.

Эти уравнения представляют собою наиболее разработанную часть теории дифференциальных уравнений.

Объясняется это, с одной стороны, тем, что линейные уравнения и системы линейных уравнений обладают рядом замечательных свойств, значительно облегчающих построение и исследование решений. С другой стороны, интерес к разработке проблем теории линейных уравнений и систем линейных уравнений является следствием многочисленных приложений этих уравнений, так как выяснилось, что линейные уравнения либо описывают реальные процессы, либо дают так называемое первое приближение, и во многих случаях представляется возможным уже по этому первому приближению судить о характере изучаемого явления.

Линейным дифференциальным уравнением, как уже сказано в п. 82, называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

или уравнение более общего вида

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1')$$

Если в уравнении (1')  $p_0(x) \neq 0$ , то, поделив на него, приходим к уравнению (1).

Предположим, что коэффициенты уравнения (1)  $p_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $p_n(x)$  и правая часть  $f(x)$  заданы и непрерывны в интервале  $(a, b)$ . При этом предположении уравнение (1) имеет, согласно п. 129, единственное решение  $y = y(x)$ , удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где  $x = x_0$  — любая точка из интервала  $(a, b)$ , а  $y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1}$  — любые заданные числа. Это решение определено и  $n$  раз дифференцируемо во всем интервале  $(a, b)$ . Оно может быть найдено, например, по методу Пикара.

Существование общего решения уравнения (1) при наших предположениях относительно  $p_k(x)$  и  $f(x)$  вытекает из замечания 2 п. 137. Особых решений линейное уравнение (1) не имеет. Всякое решение этого уравнения является частным решением.

Все сказанное относится, очевидно, и к линейному уравнению вида (1'), у которого коэффициенты  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$  и правая часть  $f(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$ , причем ни в одной точке этого интервала коэффициент при старшей производной  $p_0(x)$ , не обращается в нуль. Точки, в которых  $p_0(x) = 0$ , называются *особыми точками* уравнения (1'). Вопросы о существовании, об аналитических свойствах и о построении решений в окрестности таких точек изучаются в аналитической теории дифференциальных уравнений. Начальные сведения по этим вопросам читатель найдет в п. 191—193.

Задачей настоящей главы является выяснение специфических общих свойств решений линейных уравнений и структуры общего решения, а также рассмотрение основных методов построения общего решения.

Если  $f(x) \equiv 0$  в интервале  $(a, b)$ , то уравнение (1) или (1') называется *однородным* (см. п. 130). В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Если же  $f(x) \not\equiv 0$  в интервале  $(a, b)$ , то уравнение (1) или (1') называется *неоднородным*.

В дальнейшем мы для сокращения записи введем в рассмотрение следующий *линейный дифференциальный оператор*:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x). \quad (3)$$

Нетрудно убедиться, что оператор  $L$  обладает следующими основными свойствами:

- 1) постоянный множитель можно выносить за знак оператора:

$$L(ky) = kL(y);$$

- 2) оператор от суммы двух функций равен сумме операторов от этих функций:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

3) оператор от линейной комбинации функций равен той же линейной комбинации операторов от этих функций:

$$L\left(\sum_{i=1}^m C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^m C_i L(y_i).$$

Используя оператор (3), мы можем переписать неоднородное уравнение (1) в виде

$$L(y) = f(x),$$

а однородное уравнение (2) — в виде

$$L(y) = 0.$$

Функция  $y = y(x)$  является решением неоднородного уравнения (1) в интервале  $(a, b)$ , если оператор (3) от этой функции  $L(y(x))$ , тождественно равен  $f(x)$  в интервале  $(a, b)$

$$L(y(x)) \equiv f(x) \quad (a < x < b).$$

Функция  $y = y(x)$  является решением однородного уравнения (2) в интервале  $(a, b)$ , если

$$L(y(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

**Пример 1.** Пусть дано уравнение

$$y'' + y = 1. \quad (4)$$

Имеем

$$L(y) = y'' + y, \quad L(y) = 1.$$

Функция  $y = \sin x + 1$  — решение уравнения (4) в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо

$$L(\sin x + 1) = L(\sin x) + L(1) \equiv 1 \quad (-\infty < x < \infty).$$

**Пример 2.** Для уравнения

$$y'' - y = 0 \quad (5)$$

имеем

$$L(y) = y'' - y, \quad L(y) = 0.$$

Функция  $y = e^x$  — решение уравнения (5) в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо

$$L(e^x) \equiv 0 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отметим два общих свойства линейного уравнения.

**158. Инвариантность линейного уравнения относительно любого преобразования независимой переменной и относительно линейного преобра-**

зования искомой функции. *Линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной* (ср. п. 32).

В самом деле, положим

$$x = \varphi(t) \quad (t = \psi(x)),$$

где  $\varphi(t)$  — любая функция от  $t$ , определенная и непрерывная вместе со своими производными до порядка  $n$  включительно в интервале  $(\alpha, \beta)$ , причем  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  во всем интервале  $(\alpha, \beta)$ . Тогда (см. п. 32)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)},$$

так что производная по  $x$  получается умножением производной по  $t$  на  $\frac{1}{\varphi'(t)}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)} \right) \frac{1}{\varphi'(t)} = \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{(\varphi'(t))^2} - \frac{dy}{dt} \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}, \end{aligned}$$

т. е.  $\frac{d^2y}{dx^2}$  выражается линейно и однородно через  $\frac{dy}{dt}$  и  $\frac{d^2y}{dt^2}$ .

Нетрудно убедиться, что вообще  $\frac{d^k y}{dx^k}$  выразится в виде линейной однородной функции от  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , ...,  $\frac{d^k y}{dt^k}$ , коэффициенты которой непрерывны в интервале  $(\alpha, \beta)$ .

Следовательно, заменяя в уравнении (1) производные по  $x$  их выражениями через производные по  $t$ , а  $x$  — через  $\varphi(t)$  и умножая обе части полученного уравнения на  $(\varphi'(t))^n$ , мы придем опять к линейному уравнению, причем его коэффициенты и правая часть будут непрерывными функциями от  $t$  (в частности, они могут оказаться и постоянными) в интервале  $(\alpha, \beta)$ .

Если удастся найти общее решение преобразованного уравнения, то, полагая в нем  $t = \psi(x)$ , мы получим общее решение данного уравнения.

**Замечание 1.** Выполняя подстановку  $x = \varphi(t)$  в однородном линейном уравнении (2), мы, очевидно, снова получим однородное линейное уравнение.



Покажем, что *линейное уравнение остается линейным при любой линейной замене искомой функции* (ср. п. 32).

Пусть

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \quad (6)$$

где  $z$  — новая неизвестная функция, а  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — произвольные  $n$  раз непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ , причем  $\alpha(x) \neq 0$  в интервале  $(a, b)$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} y' &= \alpha'z + \alpha z' + \beta', \\ y'' &= \alpha''z + 2\alpha'z' + \alpha z'' + \beta'', \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \alpha^{(n)}z + n\alpha^{(n-1)}z' + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^{(n-2)}z'' + \dots + \alpha z^{(n)} + \beta^{(n)}. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому, выполняя в уравнении (1) подстановку (6) и деля обе части полученного уравнения на  $\alpha(x)$ , мы придем снова к уравнению вида (1), коэффициенты и правая часть которого будут непрерывны в интервале  $(a, b)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Очевидно, что, выполняя подстановку

$$y = \alpha(x)z \quad (7)$$

в однородном линейном уравнении, мы снова получим однородное линейное уравнение.

**З а м е ч а н и е 3.** Используя подстановку вида (7) уравнение (2) (и уравнение (1)), всегда можно привести к уравнению, не содержащему члена с производной  $(n-1)$ -го порядка. В самом деле, так как

$$y^{(n)} = \alpha z^{(n)} + n\alpha'z^{(n-1)} + \dots, \quad y^{(n-1)} = \alpha z^{(n-1)} + \dots,$$

то после подстановки в уравнение (2) получаем

$$\alpha z^{(n)} + (n\alpha' + p_1(x))\alpha z^{(n-1)} + \dots = 0.$$

Чтобы уничтожить член, содержащий  $z^{(n-1)}$ , выберем  $\alpha(x)$  так, чтобы  $n\alpha' + p_1(x)\alpha = 0$ , для чего достаточно положить

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n} \int p_1(x) dx}.$$

Итак, подстановка

$$y = e^{-\frac{1}{n} \int p_1(x) dx} z$$

приводит уравнение (2) к уравнению, не содержащему члена с производной  $(n-1)$ -го порядка.

§ 30. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ  $n$ -ГО ПОРЯДКА

**159. Свойства решений.** В дальнейшем будет показано, что для интегрирования не однородного линейного уравнения

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

достаточно уметь найти общее решение однородного уравнения с той же левой частью

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

Поэтому мы начнем изложение общей теории линейных уравнений с изучения однородных линейных уравнений.

Наша окончательная задача состоит в нахождении всех вещественных решений уравнения (1). Однако для решения этой задачи иногда оказывается выгодно сначала найти некоторые комплексные решения.

Прежде чем дать понятие о комплексном решении уравнения (1), дадим определение комплексной функции вещественной переменной.

Функцию

$$z(x) = u(x) + iv(x),$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — вещественные функции от вещественной переменной  $x$ , а  $i = \sqrt{-1}$ , будем называть *комплексной функцией от вещественной переменной  $x$* . Функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* комплексной функции  $z(x)$ . Примером такой функции является

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

или функция более общего вида  $e^{\alpha x}$ , где  $\alpha = a + ib$ , причем  $a$  и  $b$  — вещественные:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \\ &= e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx. \end{aligned} \quad (2)$$

*Производная  $n$ -го порядка от функции  $z(x)$  по вещественной переменной  $x$ , в предположении, что  $u^{(n)}(x)$  и  $v^{(n)}(x)$  существуют, определяется так:*

$$z^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x).$$

Вычислим производные от некоторых комплексных функций вещественной переменной.

1. При любом  $\alpha$ , вещественном или комплексном, справедлива формула

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}.$$

При  $\alpha$  вещественном эта формула известна. Пусть теперь  $\alpha = a + ib$ . Тогда в силу (2) имеем

$$e^{\alpha x} = e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx.$$

Отсюда по данному выше определению производной находим

$$(e^{\alpha x})' = a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx + i(a e^{ax} \sin bx + b e^{ax} \cos bx).$$

Группируя члены, получаем

$$\begin{aligned} (e^{\alpha x})' &= a e^{ax} \cos bx + i a e^{ax} \sin bx + i(b e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx) = \\ &= a e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + i b e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \\ &= a e^{ax} e^{ibx} + i b e^{ax} e^{ibx} = (a + ib) e^{(a+ib)x} = \alpha e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

2. При любом вещественном  $k$  и любом  $\alpha$  вещественном или комплексном справедлива формула

$$(x^k e^{\alpha x})' = (k x^{k-1} + \alpha x^k) e^{\alpha x}. \quad (3)$$

При  $\alpha$  вещественном эта формула известна. Если  $\alpha = a + ib$ , то имеем

$$x^k e^{\alpha x} = x^k e^{ax} \cos bx + i x^k e^{ax} \sin bx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x^k e^{\alpha x})' &= k x^{k-1} e^{ax} \cos bx + a x^k e^{ax} \cos bx - b x^k e^{ax} \sin bx + \\ &+ i(k x^{k-1} e^{ax} \sin bx + a x^k e^{ax} \sin bx + b x^k e^{ax} \cos bx) = \\ &= k x^{k-1} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + x^k e^{ax} (a + ib) \cos bx + \\ &+ i x^k e^{ax} (a + ib) \sin bx = k x^{k-1} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + \\ &+ (a + ib) x^k e^{ax} e^{ibx} = k x^{k-1} e^{\alpha x} + \alpha x^k e^{\alpha x} = (k x^{k-1} + \alpha x^k) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

3. Используя формулу (3), убедимся, что если  $P_n(x)$  — полином  $n$ -й степени от  $x$ , а  $\alpha$  — любое вещественное или комплексное число, не равное нулю, то

$$(P_n(x) e^{\alpha x})' = \overline{P}_n(x) e^{\alpha x}, \quad (4)$$

где  $\overline{P}_n(x)$  — некоторый полином  $n$ -й степени от  $x$ .

4. При любом  $\alpha$ , вещественном или комплексном, справедлива формула

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

При  $\alpha$  вещественном эта формула известна. Если  $\alpha = a + ib$ , то по определению полагаем

$$\begin{aligned} x^\alpha &= e^{\ln x \alpha} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = e^{(a+ib) \ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = \\ &= x^a (\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= (x^a \cos(b \ln x))' + i(x^a \sin(b \ln x))' = ax^{a-1} \cos(b \ln x) - \\ &- bx^{a-1} \sin(b \ln x) + i(ax^{a-1} \sin(b \ln x) + bx^{a-1} \cos(b \ln x)) = \\ &= \alpha x^{a-1} \cos(b \ln x) + i\alpha x^{a-1} \sin(b \ln x) = \alpha x^a (\cos(b \ln x) + \\ &+ i \sin(b \ln x)) x^{-1} = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Дадим теперь понятие о комплексном решении уравнения (1). Комплексная функция от вещественной переменной  $x$

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \quad (5)$$

называется *комплексным решением* однородного линейного уравнения (1) в интервале  $(a, b)$ , если подстановка ее в уравнение (1) обращает это уравнение в тождество, т. е. если

$$L(y(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b). \quad (6)$$

Покажем, что *всякое комплексное решение уравнения (1) порождает два вещественных решения этого уравнения, а именно: если комплексная функция  $y(x)$  является решением уравнения (1), то ее вещественная и мнимая части являются вещественными решениями этого уравнения.*

В самом деле, пусть функция (5) есть решение уравнения (1). Тогда мы имеем тождество (6). Вычисляя  $L(y(x))$ , мы имеем

$$L(y(x)) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)).$$

Поэтому (6) можно переписать в виде

$$L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

откуда

$$L(y_1(x)) \equiv 0, \quad L(y_2(x)) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

а это и означает, что  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  являются решениями уравнения (1) в интервале  $(a, b)$ .

**Пример 1.** Уравнение

$$y'' + y = 0 \quad (7)$$

имеет комплексное решение

$$y(x) \equiv e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

ибо  $(e^{ix})'' = -e^{ix}$ , а тогда функции  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  являются вещественными решениями уравнения (7), в чем легко убедиться и непосредственно.

Установим теперь три замечательных свойства решений однородного линейного уравнения.

1. Если  $y_1$  есть решение однородного линейного уравнения (1), т. е.

$$L(y_1) \equiv 0,$$

то функция

$$y = Cy_1,$$

где  $C$  — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения.

В самом деле, мы имеем

$$L(Cy_1) = CL(y_1).$$

Но  $L(y_1) \equiv 0$ , поэтому  $L(Cy_1) \equiv 0$ , а это и означает, что  $Cy_1$  есть решение уравнения (1).

2. Если  $y_1$  и  $y_2$  — решения уравнения (1), то их сумма

$$y = y_1 + y_2$$

тоже является решением уравнения (1).

Действительно, мы имеем

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Но

$$L(y_1) \equiv 0, \quad L(y_2) \equiv 0.$$

Поэтому

$$L(y_1 + y_2) \equiv 0,$$

т. е.  $y_1 + y_2$  — решение уравнения (1).

3. Если  $y_1, y_2, \dots, y_m$  — решения уравнения (1), то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_m$  — произвольные постоянные, тоже является решением уравнения (1).

Это свойство следует из свойств 1 и 2.

**Пример 2.** Возьмем уравнение (7)

$$y'' + y = 0.$$

В примере 1 мы показали, что функции  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  являются частными решениями уравнения (7). Поэтому функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, тоже будет решением этого уравнения.

Поставим теперь основной вопрос: каковы должны быть  $n$  частных решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , чтобы формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (8)$$

содержащая  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , давала общее решение уравнения (1)? Чтобы ответить на этот вопрос, введем понятие о линейной независимости функций.

**160. Понятие о линейной независимости функций.** Функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  называются *линейно независимыми* в интервале  $(a, b)$ , если между ними не существует соотношения вида

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad \text{при} \quad a < x < b, \quad (9)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — постоянные числа, не равные нулю одновременно. В противном случае функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  называются *линейно зависимыми* в интервале  $(a, b)$ .

Для случая двух функций  $y_1$  и  $y_2$  понятие линейной независимости в интервале  $(a, b)$  сводится, очевидно, к тому, чтобы отношение этих функций  $\frac{y_1}{y_2}$  не было постоянным в интервале  $(a, b)$ ; при этом имеется

в виду, что это отношение определено во всех точках интервала  $(a, b)$ .

Очевидно, что, если одна из функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  тождественно равна нулю в интервале  $(a, b)$ , то эти функции линейно зависимы в  $(a, b)$ .

В самом деле, пусть, например,  $y_1 \equiv 0$  ( $a < x < b$ ). Тогда при любом  $\alpha_1 \neq 0$  и при  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  будет выполняться соотношение (9), а это и означает, что функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы в  $(a, b)$ .

**З а м е ч а н и е.** Если функции

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , то, заменив в них аргумент  $x$  новым аргументом  $t$  по формуле

$$x = \varphi(t),$$



Допустим противное, т. е. предположим, что существует соотношение вида

$$\begin{aligned} & \alpha_0^{(1)} e^{\lambda_1 x} + \alpha_1^{(1)} x e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{n_1}^{(1)} x^{n_1} e^{\lambda_1 x} + \\ & + \alpha_0^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \alpha_1^{(2)} x e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_{n_2}^{(2)} x^{n_2} e^{\lambda_2 x} + \\ & + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \\ & + \alpha_0^{(m)} e^{\lambda_m x} + \alpha_1^{(m)} x e^{\lambda_m x} + \dots + \alpha_{n_m}^{(m)} x^{n_m} e^{\lambda_m x} \equiv 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\alpha_i^{(k)}$  — постоянные числа, среди которых хоть одно отлично от нуля.

Соотношение (11) можно переписать в виде

$$\sum_{h=1}^m P_{n_h}(x) e^{\lambda_h x} \equiv 0, \quad (12)$$

где  $P_{n_h}(x)$  — полином степени  $n_h$ , причем здесь не все полиномы  $P_{n_h}(x)$  тождественно равны нулю.

Не умаляя общности, предположим, что  $P_{n_m}(x) \not\equiv 0$ . Тогда, умножая (12) на  $e^{-\lambda_1 x}$ , получим

$$P_{n_1}(x) + \sum_{h=2}^m P_{n_h}(x) e^{(\lambda_h - \lambda_1) x} \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество  $n_1 + 1$  раз по  $x$ , получим

$$\sum_{h=2}^m P_{n_h}^{(1)}(x) e^{(\lambda_h - \lambda_1) x} \equiv 0, \quad (13)$$

причем  $P_{n_m}^{(1)}(x) \not\equiv 0$ .\*

Умножая (13) на  $e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x}$ , получаем

$$P_{n_2}^{(1)}(x) + \sum_{h=3}^m P_{n_h}^{(1)}(x) e^{(\lambda_h - \lambda_2) x} \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество  $n_2 + 1$  раз, находим

$$\sum_{h=3}^m P_{n_h}^{(2)}(x) e^{(\lambda_h - \lambda_2) x} \equiv 0,$$

причем  $P_{n_m}^{(2)}(x) \not\equiv 0$ .

---

\* Ибо  $P_{n_m}^{(1)}(x)$  есть полином той же степени, что и  $P_{n_m}(x)$  (см. п. 159, формула (4)).





$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *определителем Вронского* для функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  или *вронскианом* этих функций.

**Теорема.** Если функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы в интервале  $(a, b)$ , то их вронскиан  $W(x)$  тождественно равен нулю в этом интервале.

Действительно, согласно условию теоремы, мы имеем равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \quad (a < x < b),$$

где не все  $\alpha_i$  равны нулю. Пусть, например,  $\alpha_n \neq 0$ . Тогда

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \quad (a < x < b).$$

Дифференцируя это тождество  $n-1$  раз и подставляя  $y_n$  и найденные значения  $y_n', y_n'', \dots, y_n^{(n-1)}$  в последний столбец определителя Вронского, получаем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2' - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)} - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Разлагая определитель (16) на сумму определителей, будем иметь в каждом из них два пропорциональных столбца, вследствие чего все эти определители равны нулю, а тогда и  $W(x)$  будет равен нулю во всех точках интервала  $(a, b)$ .

Заметим, что доказанное необходимое условие линейной зависимости  $n$  функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  не является, вообще говоря, достаточным.

**Пример.** Пусть даны две функции

$$y_1 = \begin{cases} x^2 & \text{для } x \leq 0, \\ 0 & \text{для } x > 0; \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0, \\ x^2 & \text{для } x > 0. \end{cases}$$



теоремы единственности (см. п. 130) решение (19) является нулевым,  $y \equiv 0$ , т. е. мы имеем тождество

$$C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \dots + C_n^{(0)} y_n \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

в котором не все  $C_i^{(0)}$  равны нулю, а это означает, что решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , линейно зависимы в интервале  $(a, b)$ , вопреки предположению. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы предыдущего пункта следует, что для того, чтобы  $n$  решений уравнения (1) были линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался в нуль ни в одной точке этого интервала.

В самом деле, если решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , то  $W(x) \neq 0$  в  $(a, b)$ . Обратно, если  $W(x) \neq 0$  в  $(a, b)$ , то решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , ибо в противном случае  $W(x)$  был бы равен нулю во всем интервале  $(a, b)$ .

Однако оказывается, что для установления линейной независимости  $n$  решений уравнения (1) достаточно убедиться, что  $W(x)$  не обращается в нуль хоть в одной точке интервала  $(a, b)$ . Это вытекает из следующих двух замечательных свойств вронскиана  $n$  решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка.

1. Если вронскиан  $n$  решений уравнения (1) равен нулю в одной точке  $x = x_0$  из интервала  $(a, b)$ , в котором все коэффициенты уравнения (1) непрерывны, то он равен нулю во всех точках этого интервала.

Действительно, если  $W(x_0) = 0$ , то по только что доказанной теореме функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно зависимы в интервале  $(a, b)$ , а тогда по теореме предыдущего пункта вронскиан  $W(x)$  тождественно равен нулю во всем интервале  $(a, b)$ .

2. Если вронскиан  $n$  решений уравнения (1) отличен от нуля в одной точке  $x = x_0$  интервала  $(a, b)$ , то он отличен от нуля во всех точках этого интервала.

В самом деле, если бы  $W(x)$  обратился в нуль в некоторой точке интервала  $(a, b)$ , то, по свойству 1, он равнялся бы нулю во всех точках интервала  $(a, b)$ , в том числе и в точке  $x = x_0$ , что противоречит предположению.

Таким образом, для линейной независимости  $n$  решений уравнения (1) в интервале  $(a, b)$ , в котором все коэффициенты уравнения (1) непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля хоть в одной точке этого интервала.

Отсюда следует, что если  $n$  решений уравнения (1) линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , то они будут линейно независимыми и во всяком частичном интервале  $(a_1, b_1)$ , содержащемся в  $(a, b)$ .

З а м е ч а н и е. Два линейно независимых в интервале  $(a, b)$  решения  $y_1$  и  $y_2$  однородного линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого непрерывны в  $(a, b)$ , не могут одновременно обращаться в нуль в точке  $x_0 \in (a, b)$ .

В самом деле, если  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , то

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

а тогда  $y_1$  и  $y_2$  линейно зависимы в  $(a, b)$ , так что  $y_2 = ky_1$ .

**163. Формула Остроградского — Лиувилля.** Установленные выше свойства вронскиана решений однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1) легко получаются из следующей замечательной формулы Остроградского — Лиувилля, выражающей (с точностью до постоянного множителя) вронскиан решений этого уравнения через коэффициент при производной  $(n-1)$ -го порядка:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}, \quad (20)$$

где  $x = x_0$  — любая точка из интервала  $(a, b)$ .

Докажем формулу (20). Мы имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируем этот определитель, применяя правило дифференцирования по строкам, согласно которому производная от определителя  $n$ -го порядка равна сумме  $n$  определителей, получающихся из него поочередной заменой элементов 1-й, 2-й, ...,  $n$ -й строк их производными [150, т. I, с. 388]. Так как все эти определители, кроме последнего, очевидно, равны нулю, то будем иметь

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первых  $n-1$  строк соответственно на  $p_n(x)$ ,  $p_{n-1}(x)$ ,  $\dots$ ,  $p_2(x)$  и прибавляя к элементам последней строки, мы в силу дифференциального уравнения (1) получаем

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} - p_2 y_2^{(n-1)} & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x) W(x)$$

или

$$W'(x) + p_1(x) W(x) = 0.$$

Записывая общее решение этого уравнения в форме Коши (см. п. 33), мы и получим формулу (20).

В частности, для вронскиана решений однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (21)$$

при условии, что коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$ , будем иметь

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$$

Если при этом  $p(x) \equiv 0$ , то  $W(x) = W(x_0) = \text{const}$ .

Из формулы (20) видно, что если  $W(x_0) = 0$ , то  $W(x) \equiv 0$  во всем интервале  $(a, b)$ . Если же  $W(x_0) \neq 0$ , то  $W(x)$  не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(a, b)$ .

**164. Понятие о фундаментальной системе решений.** Совокупность  $n$  решений однородного уравнения (1), определенных и линейно независимых в интервале  $(a, b)$ , называется *фундаментальной системой решений* в этом интервале. Из предыдущего следует, что для того, чтобы система  $n$  решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы вронскиан этих решений был отличен от нуля хотя в одной точке интервала непрерывности коэффициентов уравнения (1). Все решения, входящие в фундаментальную систему, очевидно, не нулевые.

**Пример.** Для уравнения (7)

$$y'' + y = 0$$

функции  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  образуют фундаментальную систему решений в интервале  $(-\infty, \infty)$ , так как эти функции удовлетворяют уравнению (7) и линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$  (см. п. 160, пример 3). Теперь мы можем убедиться в линейной

независимости этих решений еще и при помощи вронскиана. В самом деле, мы имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Уравнение (7) имеет и другие фундаментальные системы решений. Например, всякая пара функций вида  $y_1 = k \cos x$ ,  $y_2 = k \sin x$ , где  $k$  — любое постоянное число, не равное нулю, будет фундаментальной системой решений этого уравнения.

**165. Доказательство существования фундаментальной системы решений.** На примере уравнения (7) мы показали, что однородное линейное уравнение может иметь бесконечное множество фундаментальных систем. Ответ на вопрос о существовании фундаментальной системы решений уравнения (1) общего вида дается следующей теоремой.

**Т е о р е м а.** *Если коэффициенты уравнения (1) непрерывны в интервале  $(a, b)$ , то существует фундаментальная система решений, определенных в этом интервале.*

Действительно, возьмем точку  $x = x_0$  из интервала  $(a, b)$  и построим, применяя метод Пикара, решение  $y_1$  с начальными условиями

$$y_1 = 1, \quad y_1' = 0, \quad y_1'' = 0, \quad \dots, \quad y_1^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (22)$$

Затем, применяя снова метод Пикара, построим решение  $y_2$  с начальными условиями

$$y_2 = 0, \quad y_2' = 1, \quad y_2'' = 0, \quad \dots, \quad y_2^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (23)$$

и т. д. Наконец, построим решение  $y_n$  с начальными условиями

$$y_n = 0, \quad y_n' = 0, \quad y_n'' = 0, \quad \dots, \quad y_n^{(n-1)} = 1 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (24)$$

Вычисляя вронскиан построенных решений в точке  $x = x_0$ , получаем

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — фундаментальная система решений, каждое из которых, согласно теореме Пикара, определено в интервале  $(a, b)$ .

Из самого метода доказательства видно, что *существует бесконечное множество фундаментальных систем.*

В самом деле, в условиях (22) — (24) мы можем взять вместо 1 и 0 любые  $n^2$  чисел, определитель из которых не нуль. Тогда  $W(x_0) \neq 0$ , и, следовательно, мы опять получим фундаментальную систему решений.

Фундаментальная система решений с начальными условиями (22)—(24) (построенная нами при доказательстве теоремы) называется *нормированной* в точке  $x=x_0$ . Для всякого однородного линейного уравнения вида (1) с непрерывными коэффициентами существует одна и только одна фундаментальная система решений, нормированная в любой заданной точке интервала непрерывности коэффициентов.

*Замечание.* Если коэффициенты уравнения (1) голоморфны в области  $|x-x_0|<\rho$  ( $0<\rho\leq\infty$ ), то применяя теорему Коши п. 151, так же как и выше, убеждаемся, что существует фундаментальная система решений, голоморфных по крайней мере в этой же области. В частности, существует одна и только одна фундаментальная система решений, голоморфных в области  $|x-x_0|<\rho$ , нормированная в точке  $x=x_0$ .

**166. Построение общего решения.** Знание  $n$  линейно независимых решений, т. е. фундаментальной системы решений, дает возможность построить решение уравнения (1), содержащее  $n$  произвольных постоянных, причем это решение будет общим решением. А именно имеет место следующая теорема.

**Основная теорема.** Если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — фундаментальная система решений уравнения (1), то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (25)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные числа, дает общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty, \dots, \quad |y^{(n-1)}| < \infty, \quad (26)$$

т. е. во всей области задания уравнения (1).

Действительно, система, состоящая из равенства (25) и равенств, полученных  $(n-1)$ -кратным дифференцированием этого равенства

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \\ y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

разрешима относительно произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в области (26), ибо (27) есть линейная система, причем ее определитель, будучи равным  $W(x)$ , отличен от нуля, так как  $y_1, y_2, \dots, y_n$  есть фундаментальная система решений.

Кроме того, по третьему свойству решений однородного линейного уравнения функция (25) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .





так что произвольные постоянные суть не что иное, как сами начальные значения искомого частного решения. Поэтому решение с начальными условиями (28) выражается через нормированную фундаментальную систему решений формулой

$$y = y_0 y_1 + y_0' y_2 + \dots + y_0^{(n-1)} y_n. \quad (31)$$

Из сказанного ясно также, что формулу (31) можно рассматривать как общее решение уравнения (1) в форме Коши: роль произвольных постоянных играют начальные значения решения в фиксированной точке  $x = x_0$  из интервала непрерывности коэффициентов  $p_k(x)$ .

Доказанная основная теорема и дает ответ на вопрос, поставленный в конце п. 159: для возможности получения общего решения уравнения (1) с помощью формулы (8) необходимо и достаточно, чтобы решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  были линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , т. е. чтобы они составляли фундаментальную систему решений.

Отметим еще, что общее решение однородного линейного уравнения представляет собой однородную линейную функцию от произвольных постоянных.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение (7)

$$y'' + y = 0.$$

Выше мы убедились, что  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  есть фундаментальная система решений этого уравнения в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Поэтому, согласно основной теореме, формула

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

дает общее решение уравнения (7) во всем пространстве  $(x, y, y')$ .

Фундаментальная система решений  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  нормирована в точке  $x = 0$ . Поэтому решение с начальными условиями  $y = y_0$ ,  $y' = y_0'$  при  $x = 0$  дается формулой

$$y = y_0 \cos x + y_0' \sin x. \quad (32)$$

Формула (32) при произвольных  $y_0$  и  $y_0'$  представляет собою общее решение уравнения (7) в форме Коши во всем пространстве  $(x, y, y')$ .

**Пример 2.** Дано уравнение

$$y'' - y = 0. \quad (33)$$

Легко догадаться, что функции  $y_1 = e^x$  и  $y_2 = e^{-x}$  являются решениями этого уравнения. Так как они линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , то

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (34)$$

есть общее решение во всем пространстве  $(x, y, y')$ .

Фундаментальная система решений  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^{-x}$  не нормирована в точке  $x = 0$ . Построим фундаментальную систему решений, нормированную в этой точке. Пусть это

будет  $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x)$ ,  $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x)$ . Решения  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  являются линейными комбинациями решений  $y_1$  и  $y_2$  с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 &= a_{11} e^x + a_{12} e^{-x}, \\ \bar{y}_2 &= a_{21} e^x + a_{22} e^{-x}, \end{aligned} \right\}$$

где постоянные  $a_{ih}$  надо выбрать так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 &= 1, \quad \bar{y}_1' = 0 \quad \text{при } x=0, \\ \bar{y}_2 &= 0, \quad \bar{y}_2' = 1 \quad \text{при } x=0. \end{aligned} \right\}$$

Удовлетворяя этим условиям, приходим к двум алгебраическим системам:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= a_{11} + a_{12}, \\ 0 &= a_{11} - a_{12}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 0 &= a_{21} + a_{22}, \\ 1 &= a_{21} - a_{22}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эти системы, находим:  $a_{11} = a_{12} = \frac{1}{2}$ ,  $a_{21} = \frac{1}{2}$ ,  $a_{22} = -\frac{1}{2}$ , так что

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x.$$

Таким образом, гиперболические функции  $\operatorname{ch} x$  и  $\operatorname{sh} x$  представляют собою фундаментальную систему решений уравнения (33), нормированную в точке  $x=0$ , подобно тому, как тригонометрические функции  $\cos x$  и  $\sin x$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (7), нормированную в этой точке.

Поэтому функция

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$$

есть так же, как и функция (34), общее решение уравнения (33) во всем пространстве  $(x, y, y')$ .

Решение уравнения (33) с начальными условиями:  $y = y_0$ ,  $y' = y_0'$  при  $x=0$  имеет вид

$$y = y_0 \operatorname{ch} x + y_0' \operatorname{sh} x.$$

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение Бесселя \*

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \quad (x \neq 0). \quad (35)$$

Нетрудно проверить, что  $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ,  $y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  есть фундаментальная система решений уравнения (35) в интервале  $(0, \infty)$ . Поэтому

---

\* Это уравнение есть частный случай уравнения Бесселя общего вида  $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$  при  $n = \pm \frac{1}{2}$ .

$$y = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

есть общее решение уравнения (35) в области

$$0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty.$$

**167. Число линейно независимых решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка. Уравнение (1) не может иметь более чем  $n$  линейно независимых частных решений.**

Действительно, пусть мы имеем  $n+1$  частных решений  $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ . Рассмотрим первые  $n$  решений. Если они линейно зависимы, то и все наши  $n+1$  решений линейно зависимы, ибо мы имеем соотношение

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0 \quad (a < x < b),$$

где не все  $\alpha_i$  равны нулю. Если же решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы, то, согласно основной теореме, всякое решение, в том числе и  $y_{n+1}$ , выражается линейно через  $y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$y_{n+1} = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \dots + C_n^{(0)} y_n,$$

так что решения  $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$  снова оказываются линейно зависимыми.

**168. Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений.** Выше мы убедились, что уравнение (1), коэффициенты которого непрерывны в промежутке  $(a, b)$ , имеет  $n$  и только  $n$  линейно независимых в этом промежутке решений. Покажем, что обратно: *всякой системе  $n$  раз непрерывно дифференцируемых и линейно независимых в интервале  $(a, b)$  функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , вронскиан которых не равен нулю ни в одной точке этого интервала, соответствует одно и только одно однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка вида (1), для которого эта система функций будет фундаментальной системой решений в интервале  $(a, b)$ .*

Коэффициенты  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $p_n(x)$  искомого уравнения должны удовлетворять системе

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + p_2(x) y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y_1' + p_n(x) y_1 &= 0, \\ y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + p_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y_2' + p_n(x) y_2 &= 0, \\ \vdots &\quad \vdots \\ y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + p_2(x) y_n^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y_n' + p_n(x) y_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Определитель этой системы равен  $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot W(x)$ .<sup>\*</sup> Так как он отличен от нуля, то искомые коэффициенты определяются единственным образом.

Искомое уравнение можно получить еще так. Заметим, что для совместности системы (36) и уравнения (1) должно выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & & y' & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при } a < x < b$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при } a < x < b. \quad (37)$$

Разлагая определитель в (37) по элементам последнего столбца и деля все члены полученного уравнения на  $W(x)$ , мы и получим искомое уравнение. В самом деле, из равенства (37) видно, что функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  являются решениями этого уравнения (ибо при замене  $y$  соответственно на  $y_1, y_2, \dots, y_n$  мы всегда будем получать определитель с двумя равными столбцами), а так как этими решениями уравнение (1) определяется единственным образом, то полученное нами уравнение (37) и является искомым.

Таким образом, коэффициенты уравнения (1) выражаются единственным образом через его фундаментальную систему решений. Этот факт используется, например, в аналитической теории дифференциальных уравнений для построения дифференциального уравнения, фундаментальная система решений которого имеет заданную аналитическую структуру.

Выразим, в частности, коэффициенты линейного однородного уравнения второго порядка (21)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

через его фундаментальную систему решений  $y_1, y_2$ . В этом случае система (36) имеет следующий вид:

<sup>\*</sup>  $\left[\frac{n}{2}\right]$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $\frac{n}{2}$ .

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, находим:

$$p(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \quad q(x) = -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'W'(x)}{y_1W(x)}. \quad (38)$$

Следовательно, фундаментальной системе решений  $y_1, y_2$  соответствует уравнение

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)}y' + \left( -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'}{y_1} \frac{W'(x)}{W(x)} \right) y = 0.$$

**Пример 1.** Рассмотрим функции

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Эти функции линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$  и их вронсиан  $W(x) = 1$ , так что он отличен от нуля при всех  $x$ . Подставляя рассматриваемые функции в формулы (38), получаем  $p(x) = 0$ ,  $q(x) = 1$ . Следовательно, соответствующим дифференциальным уравнением будет уравнение (7)

$$y'' + y = 0.$$

**З а м е ч а н и е.** Требование необращения в нуль вронсиана  $W(x)$  во всем интервале  $(a, b)$ , где функции  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейно независимы, можно отбросить. Но тогда хоть один из коэффициентов полученного уравнения будет разрывным в той точке, в которой  $W(x) = 0$ .

**Пример 2.** Даны функции

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2. \quad (39)$$

Эти функции линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Однако их вронсиан  $W(x) = x^2$  обращается в нуль в точке  $x = 0$ . По формулам (38) находим  $p(x) = -\frac{2}{x}$ ,  $q(x) = \frac{2}{x^2}$ . Поэтому соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь следующий вид:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0. \quad (40)$$

Здесь коэффициенты  $p(x) = -\frac{2}{x}$  и  $q(x) = \frac{2}{x^2}$  разрывны в точке  $x = 0$ , как и следовало ожидать, ибо  $W(0) = 0$ .

Данные функции (39) образуют фундаментальную систему решений уравнения (40) в каждом из интервалов  $(-\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ . Соответственно этому получим два общих решения: одно в области

$$-\infty < x < 0, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty,$$

другое в области

$$0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty.$$



В самом деле, из предыдущего ясно, что все функции (43) являются решениями уравнения (1). Предположим, что они линейно зависимы. Тогда имеем тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \int u_2 dx + \dots + \alpha_n y_1 \int u_n dx = 0,$$

причем не все  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  равны нулю.\* Сокращая это тождество на  $y_1$  и дифференцируя, получим

$$\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0,$$

т. е.  $u_2, \dots, u_n$  линейно зависимы, вопреки предположению.

**Пример.** Дано уравнение

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0 \quad (x \neq 0). \quad (44)$$

Очевидно, что  $y_1 = x$  является его частным решением. Полагая в уравнении (44)

$$y = x \int u \, dx,$$

получим уравнение

$$xu'' = 0 \quad \text{или} \quad u'' = 0$$

(так как  $x \neq 0$ ), для которого мы знаем два линейно независимых частных решения:  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = x$ . Поэтому линейно независимыми частными решениями данного уравнения будут:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \int 1 \, dx = x^2, \quad y_3 = x \int x \, dx = \frac{x^3}{2} \quad \text{или} \quad y_3 = x^3.$$

Следовательно, формула

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

дает общее решение уравнения (44) в каждой из областей:

$$\left. \begin{aligned} -\infty < x < 0, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty, \quad |y''| < \infty; \\ 0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty, \quad |y''| < \infty. \end{aligned} \right\}$$

*Если мы знаем  $k$  линейно независимых частных решений уравнения (1)  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , то порядок этого уравнения можно понизить на  $k$  единиц, причем полученное уравнение  $(n-k)$ -го порядка остается линейным и однородным.*

Действительно, выполняя подстановку (41), мы получим для  $u$  уравнение (42) порядка  $n-1$ .

---

\* Ибо, если все  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  равны нулю, то тогда и  $\alpha_1 = 0$ , так как  $y_1 \neq 0$ .



Для уравнения (42) мы имеем  $k-1$  решений, получаемых из формулы (41) поочередной заменой  $y$  на  $y_2, y_3, \dots, y_k$ :

$$u_2 = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)', \quad u_3 = \left( \frac{y_3}{y_1} \right)', \quad \dots, \quad u_k = \left( \frac{y_k}{y_1} \right)'.$$

Эти решения линейно независимы, ибо в противном случае мы имели бы тождество

$$\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0,$$

где не все  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$  равны нулю. Интегрируя это тождество, мы получили бы

$$C_1 + \alpha_2 \int u_2 dx + \dots + \alpha_k \int u_k dx = 0.$$

Отсюда

$$C_1 + \alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + \dots + \alpha_k \frac{y_k}{y_1} = 0,$$

$$C_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k = 0,$$

чего быть не может, так как  $y_1, y_2, \dots, y_k$  линейно независимы.

Введем теперь новую функцию  $v$  с помощью равенства

$$u = u_2 \int v dx \quad \text{или} \quad v = \left( \frac{u}{u_2} \right)'.$$

Тогда для  $v$  получим по предыдущему уравнение  $(n-2)$ -го порядка, у которого мы знаем  $k-2$  линейно независимых решений:

$$v_3 = \left( \frac{u_3}{u_2} \right)', \quad \dots, \quad v_k = \left( \frac{u_k}{u_2} \right)'.$$

Продолжая так дальше, мы получим однородное линейное уравнение  $(n-k)$ -го порядка. В частности, если мы знаем  $n-1$  линейно независимых частных решений уравнения (1), то мы придем изложенным выше способом к однородному линейному уравнению первого порядка. Таким образом, знание  $n-1$  линейно независимых частных решений уравнения (1) дает возможность проинтегрировать это уравнение в квадратурах. Отсюда следует, что для интегрирования однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка достаточно знать одно (ненулевое) частное решение (см. п. 188).

§ 31. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ  $n$ -го ПОРЯДКА

**170. Структура общего решения неоднородного уравнения.** Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Относительно коэффициентов  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  и правой части  $f(x)$  мы предполагаем (см. п. 157), что они непрерывны в интервале  $(a, b)$ .

Предположим, что для уравнения (1) нам удалось найти частное решение  $y_1$ , так что мы имеем тождество

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1 = f(x)$$

или

$$L(y_1) \equiv f(x) \quad (a < x < b). \quad (2)$$

Введем новую неизвестную функцию  $z$  по формуле

$$y = y_1 + z. \quad (3)$$

Подставляя функцию (3) в уравнение (1), получим

$$L(y_1 + z) = f(x).$$

Но  $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z)$ , так что мы имеем

$$L(y_1) + L(z) = f(x),$$

откуда, в силу (2), находим, что  $z$  должна удовлетворять уравнению

$$L(z) = 0 \quad (4)$$

или

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0.$$

Это уравнение называется *однородным линейным уравнением  $n$ -го порядка, соответствующим неоднородному уравнению (1)*.

Общее решение однородного уравнения (4) дается формулой

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n, \quad (5)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — некоторая фундаментальная система решений этого уравнения, а  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные.

Подставляя (5) в (3), получаем

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n. \quad (6)$$

Все решения уравнения (1) содержатся в формуле (6). Эта формула представляет собою общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty, \quad \dots, \quad |y^{(n-1)}| < \infty, \quad (7)$$

т. е. во всей области задания уравнения (1) (почему?).

Таким образом, для нахождения общего решения неоднородного уравнения (1) достаточно найти одно какое-нибудь частное решение этого уравнения и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения (4).

**Замечание 1.** Пусть правая часть неоднородного уравнения (1) представляет собою сумму двух слагаемых,\* так что оно имеет вид

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \quad (8)$$

Предположим, что  $y_1$  — частное решение уравнения

$$L(y) = f_1(x),$$

а  $y_2$  — частное решение уравнения

$$L(y) = f_2(x).$$

Тогда  $y_1 + y_2$  является частным решением уравнения (8).

В самом деле, мы имеем

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Но так как  $L(y_1) = f_1(x)$ ,  $L(y_2) = f_2(x)$ , то

$$L(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

т. е.  $y_1 + y_2$  есть частное решение уравнения (8).

**Пример.** Пусть дано уравнение

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x. \quad (9)$$

Уравнение

$$y'' + 2y = 2$$

имеет частное решение  $y_1 = 1$ .

Уравнение

$$y'' + 2y = 3e^x$$

имеет частное решение  $y_2 = e^x$ . Поэтому  $y = 1 + e^x$  будет частным решением уравнения (9).

**Замечание 2.** Пусть известно  $m$  частных решений неоднородного уравнения (1):  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Положим  $y = y_1 + z$ . Отсюда получаем  $m-1$  частных решений соответствующего однородного уравнения (4):  $z_k = y_k - y_1$  ( $k = 2, 3, \dots, m$ ). Если эти решения линейно независимы в  $(a, b)$ , то порядок неоднородного уравнения (1) можно

---

\* Доказываемое ниже распространяется и на случай  $m$  слагаемых.

понизить на  $m-1$  единиц. При этом нужно воспользоваться той же последовательностью взамен искомой функции, что и при рассмотренном в п. 169 понижении порядка однородного уравнения. Так, первой заменой будет  $y = z_2 \int u \, dx$ . Она приводит уравнение (1) к неоднородному уравнению  $(n-1)$ -го порядка.

**171. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** Покажем, что общее решение неоднородного уравнения (1) можно найти в квадратурах, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (4).

Будем искать общее решение уравнения (1) в таком же виде, как и общее решение соответствующего однородного уравнения (4), заменяя произвольные постоянные некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями от  $x$ , т. е. положим

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i, \quad (10)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — некоторая фундаментальная система решений уравнения (4).

Выберем функции  $C_i(x)$  ( $i=1, \dots, n$ ) так, чтобы функция  $y$ , определяемая формулой (10), была общим решением уравнения (1).

Искомые функции  $S_i(x)$  подчинены только одному соотношению, которое получается в результате подстановки функции (10) в уравнение (1). Поэтому для определения этих функций мы можем подчинить их любым  $n-1$  условиям.

Чтобы получить систему для определения  $C_i(x)$  наиболее простой, мы будем, вычисляя последовательные производные  $y', \dots, y^{(n-1)}$  от выражения (10), всякий раз полагать равной нулю совокупность членов, содержащих  $C_i'(x)$ . Таким образом, мы приходим к следующим равенствам:

[illegible]

Подставим эти значения  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$  в уравнение (1). Для этого умножим равенства (11) соответственно на  $p_n(x), p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \dots, p_1(x), 1$ , сложим почленно и приравняем правую часть полученного равенства правой части уравнения (1)

$$\sum_{i=1}^n C_i(x) L(z_i) + \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x).$$

Так как  $L(z_i) \equiv 0$  ( $i=1, \dots, n$ ), то последнее равенство переписывается так:

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким образом, для определения  $C_i(x)$  получаем следующую систему  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i' &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-2)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эта система является алгебраической линейной неоднородной системой относительно  $C_i'(x)$ . Разрешая ее относительно  $C_i'(x)$  (что возможно, ибо определитель системы (12), будучи равным  $W(x)$ , отличен от нуля во всем интервале  $(a, b)$ ), получим

$$C_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}, \quad (13)$$

где  $W_{ni}(x)$  — алгебраическое дополнение элементов  $n$ -й строки определителя  $W(x)$ . Все функции  $\frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}$  непрерывны в интервале  $(a, b)$ .

Из равенств (13) находим \*

---

\* Вместо определенных интегралов с переменным верхним пределом можно брать неопределенные интегралы.

$$C_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)} dx + C_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные, а  $x_0$  — любая точка из интервала  $(a, b)$ .

Подставляя найденные значения функций  $C_i(x)$  в формулу (10), получим

$$y = \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^n C_i z_i. \quad (14)$$

Полагая здесь  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ , получим (частное) решение неоднородного линейного уравнения (1)

$$y_1 = \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)} dx, \quad (15)$$

так что (14) можно записать в виде (6) и, следовательно, решение, определяемое формулой (14), есть общее решение уравнения (1) в области (7).

Заметим, что частное решение (15), как нетрудно убедиться, удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0, \quad \dots, \quad y_1^{(n-1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

В частности, для неоднородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (16)$$

имеем

$$y = -z_1 \int_{x_0}^x \frac{z_2 f(x)}{W(x)} dx + z_2 \int_{x_0}^x \frac{z_1 f(x)}{W(x)} dx + C_1 z_1 + C_2 z_2. \quad (14')$$

При этом

$$y_1 = -z_1 \int_{x_0}^x \frac{z_2 f(x)}{W(x)} dx + z_2 \int_{x_0}^x \frac{z_1 f(x)}{W(x)} dx \quad (15')$$

есть частное решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Для уравнения

$$y'' + q(x)y = f(x) \quad (p(x) = 0)$$

формулы (14') и (15') принимают более простой вид

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_2 f(x) dx + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_1 f(x) dx + C_1 z_1 + C_2 z_2, \quad (14'')$$

$$y_1 = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_2 f(x) dx + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_1 f(x) dx \quad (15'')$$

(почему?).

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x) \quad (k \neq 0). \quad (16')$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z'' + k^2 z = 0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$z_1 = \cos kx, \quad z_2 = \sin kx$$

(почему?). Поэтому, пользуясь формулой (14''), получим общее решение уравнения (16') в виде

$$y = -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin ktdt + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^x f(t) \cos ktdt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

или (вводя  $\cos kx$  и  $\sin kx$  под знаки определенных интегралов и объединяя полученные интегралы)

$$y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin k(x-t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (14''')$$

Частное решение

$$y_1 = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin k(x-t) dt$$

удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y_1 = 0, \quad y_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

(почему?).

Таким образом, для нахождения общего решения неоднородного уравнения (1) достаточно уметь построить фундаментальную систему решений соответствующего ему однородного уравнения (4), после чего общее решение уравнения (1) найдется в квадратурах.

**172. Метод Коши** [39, с. 369]. Формула (15) дает частное решение уравнения (1). Укажем еще один метод построения частного решения неоднородного уравнения (1) в случае, когда известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — заданная фундаментальная система решений однородного уравнения (4). Построим, пользуясь формулой (5), решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$z=0, z'=0, \dots, z^{(n-2)}=0, z^{(n-1)}=1 \quad \text{при} \quad x=\alpha, \quad (17)$$

где  $x=\alpha$  — любая заданная точка из интервала  $(a, b)$  (т. е. из интервала непрерывности коэффициентов и правой части уравнения (1)). Это решение будет, очевидно, зависеть от  $\alpha$  как от параметра. Обозначим его через  $z=\varphi(x, \alpha)$ . Здесь  $\varphi(x, \alpha)$  есть функция от независимой переменной  $x$  и от параметра  $\alpha$ , определенная и непрерывная в области  $a < x < b$ ,  $a < \alpha < b$ , и имеет непрерывные частные производные по  $x$  до  $n$ -го порядка включительно. Так как функция  $z=\varphi(x, \alpha)$ , рассматриваемая как функция от  $x$ , является решением однородного уравнения  $L(z)=0$  при всяком  $\alpha$  из интервала  $(a, b)$ , то имеет место тождество

$$L(\varphi(x, \alpha)) \equiv 0 \quad (a < x < b, \quad a < \alpha < b). \quad (18)$$

Кроме того, в силу начальных условий (17), функция  $\varphi(x, \alpha)$ , рассматриваемая как функция от  $x$ , удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \alpha) &= 0, \quad \varphi'(\alpha, \alpha) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0, \\ \varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha) &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\varphi^{(p)}(\alpha, \alpha) = \left( \frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p} \right)_{x=\alpha}.$$

В дальнейшем нам понадобится также следующая запись условий (19):

$$\varphi(x, x) = 0, \quad \varphi'(x, x) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-2)}(x, x) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(x, x) = 1, \quad (20)$$

где

$$\varphi^{(p)}(x, x) = \left( \frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p} \right)_{\alpha=x}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$Y(x) = \int_{x_0}^x \varphi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \quad (21)$$



где  $x_0$  — любое постоянное число, заключенное между числами  $a$  и  $b$ . Покажем, что функция (21) является частным решением неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными значениями искомой функции и всех ее производных до  $(n-1)$ -го порядка включительно:

$$Y=0, Y'=0, \dots, Y^{(n-1)}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0. \quad (22)$$

Убедимся в этом непосредственной проверкой. Вычислим сначала производные  $Y', \dots, Y^{(n)}$ . Используя формулу \*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x \psi(x, \alpha) d\alpha \right) = \int_{x_0}^x \psi'_x(x, \alpha) d\alpha + \psi(x, x)$$

и принимая во внимание, что функция  $\varphi(x, \alpha)$  удовлетворяет условиям (20), мы имеем последовательно:

$$\frac{dY}{dx} = \int_{x_0}^x \varphi'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \varphi(x, x) f(x) = \int_{x_0}^x \varphi'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \quad (23_1)$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \int_{x_0}^x \varphi''(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \varphi'(x, x) f(x) = \int_{x_0}^x \varphi''(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \quad (23_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} &= \int_{x_0}^x \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \varphi^{(n-2)}(x, x) f(x) = \\ &= \int_{x_0}^x \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (23_{n-1})$$

$$\frac{d^nY}{dx^n} = \int_{x_0}^x \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \varphi^{(n-1)}(x, x) f(x) =$$

---

\* Эта формула есть частный случай общей формулы дифференцирования определенного интеграла по параметру в случае, когда и пределы интеграла зависят от параметра:

$$\frac{d}{dy} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y)$$

(см. [149, т. II, с. 146]).

В нашем случае интеграл (21) зависит от параметра  $x$ , причем верхний предел тоже зависит от этого параметра, а нижний предел от параметра не зависит.

$$= \int_{x_0}^x \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + f(x). \quad (23_n)$$

Подставим теперь функцию  $Y$  и найденные значения ее производных в левую часть уравнения (1). Получим

$$\begin{aligned} L(Y) &= \int_{x_0}^x \varphi^{(n)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + f(x) + \\ &+ p_1(x) \int_{x_0}^x \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \dots + \\ &+ p_{n-1}(x) \int_{x_0}^x \varphi'(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha + p_n(x) \int_{x_0}^x \varphi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Включая множители  $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$  в подынтегральные функции и объединяя все полученные интегралы, будем иметь

$$\begin{aligned} L(Y) &= \int_{x_0}^x (\varphi^{(n)}(x, \alpha) + p_1(x) \varphi^{(n-1)}(x, \alpha) + \dots + \\ &+ p_{n-1}(x) \varphi'(x, \alpha) + p_n(x) \varphi(x, \alpha)) f(\alpha) d\alpha + f(x) \end{aligned}$$

или

$$L(Y) = \int_{x_0}^x L(\varphi(x, \alpha)) f(\alpha) d\alpha + f(x),$$

откуда, согласно (18), находим, что

$$L(Y) \equiv f(x) \quad (a < x < b),$$

а это и означает, что функция  $Y$ , определяемая формулой (21), есть частное решение неоднородного уравнения (1).

Из формул (23<sub>1</sub>)—(23 <sub>$n-1$</sub> ) видно, что частное решение (21) удовлетворяет начальным условиям (22).

Формула (21) называется *формулой Коши для неоднородного уравнения*.\*

Используя частное решение неоднородного уравнения (1), доставляемое формулой Коши, мы можем записать общее решение этого уравнения в виде

\* С частным случаем се мы уже встречались в п. 95.

$$y = z + \int_{x_0}^x \varphi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

где  $z$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (4).

Так как для нахождения общего решения неоднородного уравнения достаточно уметь построить фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, то особый интерес представляют такие линейные дифференциальные уравнения, у которых фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения находится легко. К числу таких уравнений относятся прежде всего уравнения с постоянными коэффициентами.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n$ -ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 32. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

**173.** Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородного линейного уравнения в случае различных корней характеристического уравнения. В этой главе мы будем изучать линейное уравнение  $n$ -го порядка

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  — постоянные вещественные числа, а  $f(x)$  — функция от  $x$ , непрерывная в интервале  $(a, b)$  (в частности,  $f(x)$  может быть постоянной в этом интервале).

Среди линейных уравнений с постоянными коэффициентами наибольшее значение для приложений имеют уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где  $p$  и  $q$  — постоянные вещественные числа.

Интегрирование неоднородного уравнения (1), как показано в предыдущей главе, приводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения. Поэтому сначала мы изучим вопрос о построении общего решения однородного линейного уравнения

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (2)$$

В силу теоремы п. 166 задача построения общего решения уравнения (2) будет решена, если мы найдем хоть одну фундаментальную систему решений. В следующих двух пунктах мы покажем, что фундаментальная система решений уравнения (2) может быть построена из элементарных функций.

Однородное линейное уравнение первого порядка (см. п. 34, пример)

$$y' + ay = 0,$$

где  $a$  — постоянное вещественное число, имеет частное решение вида

$$y_1 = e^{-ax}.$$

Следуя Эйлеру, будем и для однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка (2) искать частное решение в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — некоторое, пока неопределенное, постоянное число (вещественное или комплексное).

Подставляя (3) в левую часть уравнения (2), т. е. вычисляя оператор  $L(y)$  от функции  $y = e^{\lambda x}$ , получим

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}, \quad (4)$$

где

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Из (4) ясно, что функция  $y = e^{\lambda x}$  является решением уравнения (2), т. е.  $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$ , тогда и только тогда, когда  $\lambda$  является корнем уравнения  $P(\lambda) = 0$  или

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (5)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* однородного линейного уравнения (2).

Легко видеть, что для составления характеристического уравнения (5) достаточно заменить в уравнении (2) производную  $k$ -го порядка через  $k$ -ю степень  $\lambda$ , если при этом, как всегда, условиться считать, что производная нулевого порядка от функции есть сама функция, так что при составлении характеристического уравнения нужно заменять  $y$  на 1.

Предположим, что все корни характеристического уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  различны и вещественны. Подставляя их поочередно в формулу (3), мы найдем  $n$  вещественных частных решений уравнения (2):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Эти решения, как показано в примере 4 п. 160, линейно независи-

с н ы в интервале  $(-\infty, +\infty)$  \*, так что они составляют фундаментальную систему решений.

Поэтому, согласно теореме п. 166, формула

$$y = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x},$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, дает о б щ е е решение уравнения (2) в области

$$|x| < \infty, |y| < \infty, |y'| < \infty, \dots, |y^{(n-1)}| < \infty. \quad (6)$$

Предположим теперь, что все корни характеристического уравнения по-прежнему различны, но среди них имеются к о м п л е к с н ы е.

Пусть  $a+ib$  — комплексный корень характеристического уравнения. Тогда характеристическое уравнение имеет и сопряженный комплексный корень  $a-ib$ , ибо все его коэффициенты в е щ е с т в е н н ы. Корню  $a+ib$  соответствует, в силу формулы (3), решение

$$y = e^{(a+ib)x}.$$

Это решение к о м п л е к с н о е. Согласно доказанному в п. 159, его вещественная и мнимая части, т. е. функции

$$e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx \quad (7)$$

также являются решениями уравнения (2). Эти решения, очевидно, л и н е й н о н е з а в и с и м ы в интервале  $(-\infty, \infty)$ .

Аналогично, сопряженному корню  $a-ib$  соответствуют также два вещественных линейно независимых частных решения

$$e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx.$$

---

\* Это следует также из того, что

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

ибо второй множитель есть определитель Вандермонда, а он не равен нулю, когда все числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  различны.

Но первое из них совпадает с первым из решений (7), а второе из этих решений и второе из решений (7), очевидно, линейно зависимы, так что сопряженный корень не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, если все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные, то каждому вещественному корню  $\lambda_k$  соответствует решение  $e^{\lambda_k x}$ , а каждой паре сопряженных комплексных корней  $a \pm ib$ , соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения вида (7). В частности, каждой паре сопряженных чисто мнимых корней  $\pm ib$  соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения

$$\cos bx, \quad \sin bx.$$

Всего мы получим  $n$  вещественных решений вида

$$e^{\lambda_k x}, \quad e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx, \quad (8)$$

которые образуют фундаментальную систему решений, так как эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо в противном случае,

используя формулы Эйлера, мы получили бы, что функции вида  $e^{\lambda_v x}$ , где  $\lambda_v$  различны, линейно зависимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , что противоречит утверждению, доказанному в примере 4 п. 160.

Пользуясь основной теоремой п. 166, мы получаем общее решение уравнения (2) в области (6) в виде линейной комбинации всех частных решений (8) с произвольными постоянными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . При этом вещественному корню  $\lambda_k$  в общем решении соответствует выражение  $C_k e^{\lambda_k x}$ , а двум сопряженным комплексным корням  $a \pm ib$  соответствует выражение вида

$$e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

В частности, двум сопряженным чисто мнимым корням  $\pm ib$  соответствует выражение вида

$$C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

**Пример 1.** Дано уравнение

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

имеет простые корни:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ . Поэтому функции

$$e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

тоже имеет простые корни:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ , причем один из них равен нулю. Следовательно, функции

$$1, e^x, e^{2x}$$

составляют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

есть общее решение.

**Пример 3.** Пусть дано уравнение

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0,$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

имеет один вещественный корень  $\lambda_1 = -1$  и два сопряженных комплексных корня:  $\lambda_2 = 2 + i3$ ,  $\lambda_3 = 2 - i3$ . Поэтому функции

$$e^{-x}, e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x$$

составляют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$$

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} + 4y = 0. \quad (9)$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = 0,$$

имеем

$$\lambda = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, 3),$$

так что

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i,$$



$$\lambda_2 = \sqrt[4]{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 + i,$$

$$\lambda_3 = \sqrt[4]{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 - i,$$

$$\lambda_4 = \sqrt[4]{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - i.$$

Следовательно, функции

$$\begin{array}{ll} e^x \cos x, & e^x \sin x, \\ e^{-x} \cos x, & e^{-x} \sin x \end{array}$$

образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$$

есть общее решение уравнения (9).

**Пример 5.** Пусть дано уравнение

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

имеет один вещественный корень  $\lambda_1 = 1$  и два сопряженных комплексных и притом чисто мнимых корня  $\lambda_2 = 2i$ ,  $\lambda_3 = -2i$ . Поэтому в качестве фундаментальной системы решений можно взять функции

$$e^x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x,$$

а

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

будет общим решением.

**174. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения.** Пусть  $\lambda_1$  есть  $k$ -кратный корень характеристического уравнения (вещественный или комплексный), так что

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad \text{но} \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \quad (10)$$

Чтобы найти решения, соответствующие характеристическому числу  $\lambda_1$ , поступим следующим образом.

Продифференцируем тождество (см. формулу (4))

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda) e^{\lambda x} \quad (11)$$

$m$  раз по  $\lambda$ , используя при дифференцировании левой части формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right) \quad (u = e^{\lambda x}),$$

т. е. выполняя дифференцирование по  $\lambda$  под знаком оператора, а при дифференцировании правой части формулу Лейбница для  $m$ -й производной от произведения двух функций

$$(uv)^{(m)} = \sum_{v=0}^m C_m u^{(v)} v^{(m-v)} \quad (C_m^0 = 1),$$

полагая  $u(\lambda) = P(\lambda)$ ,  $v(\lambda) = e^{\lambda x}$ . Получим

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{v=0}^m C_m^v P^{(v)}(\lambda) x^{m-v} e^{\lambda x}. \quad (12)$$

Отсюда вследствие (10) имеем

$$L(x^m e^{\lambda x}) \equiv 0 \quad \text{при} \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

т. е. функции

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \quad (13)$$

являются решениями уравнения (2).

Эти решения линейно независимы (см. п. 160, пример 4) в интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Если при этом  $\lambda_1$  есть вещественный корень, то решения (13) — тоже вещественны.

Таким образом, *всякому вещественному корню  $\lambda_1$  кратности  $k$  соответствует  $k$  вещественных линейно независимых решений вида (13).*

Если характеристическое уравнение имеет комплексный корень  $a+ib$  кратности  $k$ , то оно имеет и сопряженный комплексный корень  $a-ib$  той же кратности. Согласно (13), корню  $a+ib$  соответствует  $k$  решений:

$$e^{(a+ib)x}, x e^{(a+ib)x}, \dots, x^{k-1} e^{(a+ib)x}.$$

Эти решения комплексные. Отделив в них вещественные и мнимые части, мы получим (см. п. 159)  $2k$  вещественных решений:

$$\left. \begin{array}{l} e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, \quad x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо в противном случае, используя формулы Эйлера, мы получили бы, что функции вида  $x^m e^{\lambda_v x}$ , где все  $\lambda_v$  различные, линейно зависимы в этом интервале.

Нетрудно убедиться, что так же, как и в случае простого комплексного корня, сопряженный корень  $a - ib$  не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, каждой паре сопряженных комплексных корней  $a \mp ib$  кратности  $k$  соответствует  $2k$  вещественных линейно независимых решений вида (14).

В общем случае, построив вещественные решения, соответствующие каждому простому вещественному корню, линейно независимые решения, соответствующие каждой паре простых сопряженных комплексных корней, линейно независимые решения, соответствующие каждому кратному вещественному корню и каждой паре кратных сопряженных комплексных корней, мы получим всего  $n$  вещественных решений.

Все эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , ибо в противном случае мы получили бы, что функции вида  $x^m e^{\lambda_v x}$ , где все  $\lambda_v$  различные, линейно зависимы в этом интервале.

Линейная комбинация найденных  $n$  линейно независимых решений с произвольными постоянными коэффициентами есть общее решение в области (6). При этом вещественному корню  $\lambda_1$  кратности  $k$  соответствует в общем решении слагаемое  $P_{k-1}(x) e^{\lambda_1 x}$ , а паре сопряженных комплексных корней  $a \pm ib$  кратности  $k$  соответствует слагаемое  $e^{ax}(P_{k-1}(x) \cos bx + Q_{k-1}(x) \sin bx)$ , где  $P_{k-1}(x)$  и  $Q_{k-1}(x)$  — полиномы степени  $k-1$  с произвольными коэффициентами.

**Пример 1.** Пусть дано уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \quad (15)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

имеет один трехкратный вещественный корень  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Поэтому уравнение (15) имеет три линейно независимых решения вида

$$e^x, \quad xe^x, \quad x^2 e^x,$$

а общим решением будет

$$y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

имеет один простой корень  $\lambda_1 = 3$  и один двукратный корень  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ . Этим корням соответствуют решения

а 
$$e^{3x}, e^{2x}, xe^{2x},$$

$$y = C_1 e^{3x} + e^{2x} (C_2 + C_3 x)$$

будет общим решением.

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

имеет один двукратный вещественный корень  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  и два простых комплексных сопряженных корня  $\lambda_3 = i$ ,  $\lambda_4 = -i$ . Поэтому в качестве фундаментальной системы решений можно взять

$$e^{2x}, xe^{2x}; \cos x, \sin x,$$

так что формула

$$y = e^{2x} (C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

даст общее решение.

**Пример 4.** Пусть дано уравнение

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

имеет двукратный комплексный корень  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$  и двукратный сопряженный комплексный корень  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$ . Следовательно, функции

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cos x, \quad xe^x \cos x, \\ e^x \sin x, \quad xe^x \sin x \end{array} \right\}$$

составляют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = e^x [(C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x].$$

**Пример 5.** Рассмотрим следующее уравнение:

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$$

имеет один простой корень  $\lambda_1 = 1$  и два двукратных комплексных сопряженных корня  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$ . Поэтому функции

$$e^x; \cos 2x, x \cos 2x, \sin 2x, x \sin 2x$$

образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x$$

есть общее решение.

**175. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.** Мы показали в двух предыдущих пунктах, что для однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами всегда существует фундаментальная система решений, состоящая из элементарных функций, и что тем самым всегда имеется возможность построить общее решение в элементарных функциях. Построим теперь фундаментальную систему решений и общее решение в случае уравнения второго порядка и воспользуемся полученным общим решением для нахождения решений, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (16)$$

где  $p$  и  $q$  — вещественные числа. Отметим прежде всего, что в этом случае любая фундаментальная система решений  $y_1, y_2$  будет определена при всех  $x$ , а общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (17)$$

задано в области

$$|x| < \infty, |y| < \infty, |y'| < \infty, \quad (18)$$

т. е. во всем пространстве  $(x, y, y')$ , так что задача Коши с любыми начальными данными  $x_0, y_0, y_0'$  может быть решена при помощи формулы общего решения (17) за счет выбора значений произвольных постоянных. Если при этом фундаментальная система решений  $y_1, y_2$  нормирована в точке  $x_0$ , то общее решение в области (18) можно записать в виде

$$y = y_0 y_1 + y_0' y_2,$$

где  $y_0, y_0'$  — произвольные постоянные.

Поведение любого решения уравнения (16) определяется поведением его фундаментальной системы решений, причем когда говорят о поведении решения, то имеется в виду поведение не только самого решения, но и его первой производной.

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (16) методом Эйлера составим, следуя правилу, указанному в п. 174, характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения — характеристические числа уравнения (16) — имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Если  $\frac{p^2}{4} - q > 0$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественные, причем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Фундаментальной системой решений будет

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad (19)$$

а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (20)$$

Как видим, фундаментальная система решений состоит из целых функций. Единственная «особенность» может быть только при  $x \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ). Нас будет интересовать (в частности, при исследовании решений уравнения на устойчивость) главным образом поведение фундаментальной системы решений при  $x \rightarrow \infty$ . Это поведение определяется в случае уравнения с постоянными коэффициентами характеристическими числами. В рассматриваемом случае оно зависит от того, будут ли характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  положительными, отрицательными или одно из них равно нулю. Представляет интерес случай, когда оба решения (19) или хотя бы одно из них стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$  вместе с первой производной, т. е. обладают свойством

$$y \rightarrow 0, \quad y' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Ясно, что если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, то оба решения (19) обладают свойством (21). Этот случай представляет наибольший интерес, ибо тогда из формулы общего решения (20) видно, что любое решение обладает свойством (21).

Если  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные сопряженные

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib \quad \left( a = -\frac{p}{2}, \quad b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right).$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx, \quad (22)$$

а общим решением будет

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Заметим, что если вещественные части характеристических чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, т. е.  $p > 0$ , то оба решения, образующие фундаментальную систему решений (22), а вместе с ними и любое решение обладают свойством (21).

Если характеристические числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — чисто мнимые ( $p=0$ ,  $q>0$ ),  $\lambda_{1,2}=\pm ib$ , то фундаментальная система решений примет вид

$$y_1=\cos bx, \quad y_2=\sin bx \quad (23)$$

и общим решением будет

$$y=C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

Здесь ни одно из решений, входящих в фундаментальную систему решений (23), не обладает свойством (21). Но интересно отметить, что фундаментальная система решений состоит из ограниченных и периодических функций и таким же свойством будет обладать любое решение.

Наконец, если  $\frac{p^2}{4}-q=0$ , то характеристические числа кратные,  $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$ . В этом случае уравнение (16) имеет фундаментальную систему решений

$$y_1=e^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2=xe^{-\frac{p}{2}x}. \quad (24)$$

Общим решением будет

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}(C_1+C_2x).$$

Если  $p>0$ , то решения (24) и любое решение обладают свойством (21).

Заметим, что для того чтобы уравнение (16) допускало хоть одно ненулевое решение, обладающее свойством (21), необходимо и достаточно, чтобы существовало характеристическое число с отрицательной вещественной частью.

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$y''+5y'+6y=0$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y=1, \quad y'=2 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

имеет различные вещественные корни  $\lambda_1=-2$ ,  $\lambda_2=-3$ . Поэтому функции

$$y_1=e^{-2x}, \quad y_2=e^{-3x}$$

образуют фундаментальную систему решений, а общим решением будет

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Решения, образующие фундаментальную систему решений и любое решение, обладают свойством (21).

Для нахождения решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям, подставим последние в систему

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}, \\ y' &= -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x}. \end{aligned} \right\}$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 2 &= -2C_1 - 3C_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = 5$ ,  $C_2 = -4$ , так что искомым решением будет

$$y = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + 5y' = 0.$$

Имеем

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -5;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-5x};$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-5x}.$$

Здесь существует однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (21). Это семейство имеет вид

$$y = C_2 e^{-5x}.$$

**Пример 3.** Для уравнения

$$y'' + y' + y = 0$$

будем иметь

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x;$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Всякое решение обладает свойством (21).

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (k \neq 0)$$

в форме Коши и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$



Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни,  $\lambda_{1,2} = \pm ik$ . Поэтому фундаментальной системой решений будет

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos kx, & y_2 &= \sin kx, \\ \text{а общее решение имеет вид} & & y &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \end{aligned} \quad (25)$$

Из этой формулы видно, что все решения — периодические.

Преобразуем общее решение (25) в общее решение в форме Коши. Для этого найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (26)$$

где  $y_0, y_0'$  — любые заданные числа. Подставляя начальные условия (26) в систему

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx, \\ y' &= -kC_1 \sin kx + kC_2 \cos kx, \end{aligned} \right\}$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1, \\ y_0' &= kC_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{y_0'}{k}.$$

Подставляя эти значения в общее решение (25), получим общее решение в форме Коши

$$y = y_0 \cos kx + y_0' \cdot \frac{\sin kx}{k}, \quad (27)$$

где роль произвольных постоянных играют  $y_0$  и  $y_0'$ , а  $\cos kx, \frac{\sin kx}{k}$  — фундаментальная система решений, нормированная в точке  $x=0$ .

Для выделения частного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям, достаточно положить в общем решении в форме Коши (27)  $y_0=1, y_0'=0$ . Получим

$$y = \cos kx.$$

**Пример 5.** Для уравнения

$$y'' - k^2 y = 0 \quad (k \neq 0)$$

найти общее решение и построить фундаментальную систему решений, нормированную в точке  $x=0$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - k^2 &= 0, & \lambda_{1,2} &= \pm k; \\ y_1 &= e^{kx}, & y_2 &= e^{-kx}; \\ y &= C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего примера здесь всегда существует однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (21).

Построим фундаментальную систему решений, нормированную в точке  $x=0$ . Полагая в системе

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \\ y' &= kC_1 e^{kx} - kC_2 e^{-kx} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$x=0$ ,  $y=1$ ,  $y'_0=0$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 - C_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = \frac{1}{2}$ ,  $C_2 = \frac{1}{2}$ , так что

$$y_1 = \frac{1}{2} (e^{kx} + e^{-kx}) = \operatorname{ch} kx.$$

Аналогично, полагая в системе (28)  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y'=1$ , находим  $C_1 = \frac{1}{2k}$ ,  $C_2 = -\frac{1}{2k}$ , поэтому

$$y_2 = \frac{1}{2k} (e^{kx} - e^{-kx}) = \frac{1}{k} \operatorname{sh} kx.$$

Таким образом, фундаментальной системой решений, нормированной в точке  $x=0$ , будет

$$y_1 = \operatorname{ch} kx, \quad y_2 = \frac{1}{k} \operatorname{sh} kx.$$

Пользуясь ею, можно записать общее решение в форме Коши

$$y = y_0 \operatorname{ch} kx + y'_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} kx}{k}.$$

В качестве фундаментальной системы решений можно, конечно, взять

$$y_1 = \operatorname{ch} kx, \quad y_2 = \operatorname{sh} kx,$$

что даст общее решение в виде \*

$$y = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx.$$

**Пример 6.** Для уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

будем иметь

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2;$$

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x};$$

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x).$$

Все решения обладают свойством (21).

---

\* Ср. примеры 1 и 2 п. 166, которые являются частными случаями примеров 4 и 5 настоящего пункта.

**Пример 7.** Доказать, что ненулевое решение уравнения

$$y'' - k^2 y = 0 \quad (k \neq 0) \quad (29)$$

не может пересекать ось  $Ox$  более, чем в одной точке.

Предположим, что существует ненулевое решение, обращающееся в нуль в некоторых точках  $x=a$  и  $x=b$ , т. е. решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (30)$$

Это решение должно получаться из формулы общего решения

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \quad (31)$$

при соответствующих значениях  $C_1$  и  $C_2$ , ибо последняя содержит в себе все решения уравнения (29).

Подставляя в (31) краевые условия (30), имеем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 e^{ka} + C_2 e^{-ka}, \\ 0 &= C_1 e^{kb} + C_2 e^{-kb}, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = C_2 = 0$  (так как  $a \neq b$ ); и, следовательно,  $y \equiv 0$ , т. е. ненулевых решений, пересекающих ось  $Ox$  в двух точках, нет.

**Пример 8.** Рассмотрим следующую задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (32)$$

где  $\lambda$  — параметр. Найти те значения  $\lambda$ , при которых существуют ненулевые решения, определенные в интервале  $[0, \pi]$  и удовлетворяющие краевым условиям \*

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (33)$$

т. е. решения, обращающиеся в нуль в двух заданных точках:  $x=0$  и  $x=\pi$ .

Рассмотрим три возможных случая.

С л у ч а й 1.  $\lambda = 0$ . Уравнение (32) принимает вид

$$y'' = 0.$$

Его общим решением будет

$$y = C_1 x + C_2. \quad (34)$$

Это — семейство прямых. Единственной прямой, удовлетворяющей краевым условиям (33), является сама ось  $Ox$ :  $y \equiv 0$ .\*\* Но мы ищем ненулевые решения. Таким образом,  $\lambda$  должно быть отлично от нуля.

С л у ч а й 2.  $\lambda < 0$ . Общим решением уравнения (32) будет

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

---

\* С необходимостью решать такого рода краевую задачу мы сталкиваемся, например, в математической физике при интегрировании волнового уравнения методом Фурье.

\*\* В этом легко убедиться и аналитически. Подставляя в общее решение (34) краевые условия (33), имеем  $0 = C_2$ ,  $0 = C_1 \pi + C_2$ , откуда  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е.  $y \equiv 0$ .

Удовлетворяя краевым условиям (33), имеем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1, \\ 0 &= C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е. опять получаем  $y \equiv 0$ . Таким образом,  $\lambda$  не может быть отрицательным.

С л у ч а й 3.  $\lambda > 0$ . Здесь общее решение есть

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (35)$$

Попытаемся выбрать  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы удовлетворить краевым условиям (33). Подставляя последние в (35), имеем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 0 &= C_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi. \end{aligned} \right\}$$

Первое из этих равенств дает  $C_1 = 0$ , после чего второе принимает вид

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0.$$

Нас интересуют только ненулевые значения  $C_2$ , ибо в противном случае  $y \equiv 0$ . Поэтому  $\lambda$  должно быть таким, чтобы

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad (\lambda > 0),$$

т. е.  $\lambda = k^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При этих значениях  $\lambda$  из формулы общего решения при  $C_1 = 0$  получаем ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям (33), в виде

$$y = C_2 \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная, отличная от нуля, которую мы можем считать равной единице, так как всякое решение однородного линейного уравнения определяется с точностью до постоянного множителя.

Таким образом, искомыми значениями  $\lambda$  будут

$$\lambda = \lambda_k = k^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

При этом данное уравнение (32) примет вид

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (k > 0 — \text{целое}). \quad (36)$$

Его ненулевыми решениями, удовлетворяющими краевым условиям (33), будут функции

$$y = y_k = \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Числа  $\lambda_k = k^2$  называются *характеристическими (собственными) числами*, а соответствующие им решения  $y_k = \sin kx$  — *характеристическими (собственными) функциями* рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля (32), (33).

Заметим, что все характеристические числа  $\lambda_k$  положительны, образуют монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к  $\infty$ , т. е.  $\lambda_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , и что каждому характеристическому числу  $\lambda_k$  соответствует ровно одна характеристическая

функция  $y_k$ .<sup>\*</sup> Заметим еще, что характеристическая функция  $y_k$  обращается в нуль внутри  $[0, \pi]$  ровно  $k-1$  раз.<sup>\*\*</sup>

Обращаем внимание читателя на то, что нули решения  $y_k = \sin kx$  расположены равномерно. Это является следствием постоянства коэффициентов уравнения (36). Возникает вопрос, как расположены нули ненулевых решений однородного линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Обсуждению этого вопроса, который тесно связан с теорией краевых задач, посвящен § 37 гл. 8.

Покажем, что характеристические функции, соответствующие неравным между собой характеристическим числам, ортогональны на интервале  $[0, \pi]$ , т. е. интеграл от их произведения, взятый по интервалу  $[0, \pi]$ , равен нулю:

$$\int_0^{\pi} y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Это следует из того, что

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Свойство ортогональности семейства функций  $\{\sin kx\}$  на интервале  $[0, \pi]$  дает возможность разложить функцию  $f(x)$ , заданную и кусочно дифференцируемую на интервале  $[0, \pi]$ , в ряд Фурье по синусам [149, т. II, с. 385, 386].

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (0 < x < \pi), \quad (37)$$

где коэффициенты  $b_k$  (коэффициенты Фурье) вычисляются по формуле \*\*\*

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (38)$$

Заметим, что систему функций  $\{\sin kx\}$  легко нормировать на интервале  $[0, \pi]$ , т. е. путем умножения на некоторый постоянный множитель добиться того, чтобы интеграл от квадрата полученной функции по интервалу  $[0, \pi]$  стал равным единице. В данном

\* Т. е. характеристическому числу  $\lambda_k$  не может соответствовать несколько линейно независимых решений.

\*\* Эти свойства характеристических чисел и характеристических функций остаются в силе и для более общей задачи Штурма — Лиувилля.

\*\*\* Действительно, умножая обе части разложения (37) на  $\sin px$  и интегрируя по интервалу  $[0, \pi]$ , имеем

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin px dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} \sin kx \cdot \sin px dx = b_p \int_0^{\pi} \sin^2 px dx = b_p \cdot \frac{\pi}{2},$$

откуда и следует (38).

случае этот множитель для всех функций будет одним и тем же, ибо

$$\int_0^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{\pi}{2},$$

так что нужно умножить каждую функцию на  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . Получим нормированную на интервале  $[0, \pi]$  систему функций  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \right\}$ .

### § 33. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

**176. Предварительные замечания.** Рассмотрим теперь неоднородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где, как и в случае однородного уравнения, будем предполагать, что коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — постоянные вещественные числа. Относительно функции  $f(x)$ , стоящей в правой части уравнения (1), будем предполагать, что она непрерывна в некотором интервале  $(a, b)$ .

В предыдущем параграфе мы для всякого однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами научились строить фундаментальную систему решений, а тогда общее решение уравнения (1) находится (методом Лагранжа) в квадратурах.

Для некоторых частных видов функции  $f(x)$  удастся найти частное решение уравнения (1) без квадратур. В таких случаях, складывая это частное решение с общим решением соответствующего однородного уравнения, мы получаем без квадратур и общее решение уравнения (1).

**177. Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.**

1. Предположим, что в уравнении (1) правая часть  $f(x)$  представляет собою произведение полинома на показательную функцию, т. е.

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \quad (2)$$

где

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m \quad (m \geq 0)$$

есть полином с вещественными или комплексными коэффициентами (он может быть и постоянным числом); а  $\alpha$  — постоянное число вещественное

или комплексное (в том числе и равное нулю). При построении частного решения уравнения (2) различают два случая.

*С л у ч а й 1.  $\alpha$  не является корнем характеристического уравнения, т. е.  $P(\alpha) \neq 0$ . В этом случае частное решение  $y_1$  уравнения (2) следует искать в виде*

$$y_1 = Q_m(x) e^{\alpha x}, \quad (3)$$

где

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m \quad (4)$$

есть полином  $m$ -й степени с неопределенными коэффициентами, так что частное решение (3) имеет ту же аналитическую структуру, что и правая часть самого уравнения (2).

Коэффициенты полинома  $Q_m(x)$  определяются подстановкой (3) в (2) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях полученного равенства. Убедимся, что искомые коэффициенты найдутся и притом единственным образом, так что уравнение (2) имеет только одно частное решение вида (3).

Подставляя функцию (3) в уравнение (2), вследствие основных свойств оператора  $L$ , получаем

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L(Q_m e^{\alpha x}) = L((q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x}) = \\ &= q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \dots + q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + q_m L(e^{\alpha x}) = \\ &= (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (см. п. 174, формулы (11) и (12))

$$\left. \begin{aligned} L(e^{\alpha x}) &= P(\alpha) e^{\alpha x}, \\ L(x^s e^{\alpha x}) &= \sum_{v=0}^s C_s^v P^{(v)}(\alpha) x^{s-v} e^{\alpha x}, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} q_0 \sum_{v=0}^m C_m^v P^{(v)}(\alpha) x^{m-v} e^{\alpha x} + q_1 \sum_{v=0}^{m-1} C_{m-1}^v P^{(v)}(\alpha) x^{m-1-v} e^{\alpha x} + \\ + \dots + q_{m-1} \sum_{v=0}^1 C_1^v P^{(v)}(\alpha) x^{1-v} e^{\alpha x} + q_m P(\alpha) e^{\alpha x} = \\ = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Сокращая на  $e^{\alpha x}$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , имеем:







$$y_1 = \tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}, \quad (9)$$

где  $\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$  и  $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$  — полиномы  $m$ -й степени с неопределенными коэффициентами.

**С л у ч а й 2.** Если  $a+ib$  является  $k$ -кратным корнем ( $k \geq 1$ ) характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде

$$y_1 = x^k (\tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}). \quad (10)$$

Приводя (9) и (10) к вещественному виду, получаем в окончательном итоге следующее правило нахождения частного решения, когда правая часть уравнения (1) имеет вид (8).

**С л у ч а й 1.** Если  $a+ib$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде

$$y_1 = e^{ax} (Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx), \quad (11)$$

где  $Q_m^{(1)}(x)$  и  $Q_m^{(2)}(x)$  — полиномы  $m$ -й степени с неопределенными коэффициентами.

**С л у ч а й 2.** Если  $a+ib$  является  $k$ -кратным корнем ( $k \geq 1$ ) характеристического уравнения, то частное решение найдется в виде

$$y_1 = x^k e^{ax} (Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx), \quad (12)$$

где  $Q_m^{(1)}(x)$  и  $Q_m^{(2)}(x)$  — полиномы  $m$ -й степени с неопределенными коэффициентами.

В обоих случаях коэффициенты полиномов  $Q_m^{(1)}(x)$  и  $Q_m^{(2)}(x)$  определяются непосредственной подстановкой  $y_1$  в уравнение (1).

Обращаем особое внимание читателя на то, что частное решение следует искать в виде (11) или (12) также и в том случае, когда  $P_m^{(1)}(x) \equiv 0$  или  $P_m^{(2)}(x) \equiv 0$ .

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (13)$$

где  $p$  и  $q$  — вещественные числа, а  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ .

Если правая часть уравнения (13) является одной из рассмотренных выше комбинаций полиномов, показательных и тригонометрических функций или же представляет собою сумму функций такого вида, то, найдя частное решение этого уравнения методом неопределенных коэффициентов и прибавив к нему общее решение соответствующего однородного уравнения, получим общее решение уравнения (13) в элементарных функциях.

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2. \quad (14)$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 5z' + 6z = 0, \quad (15)$$

имеем:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3; \quad z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \quad (16)$$

Так как число  $\alpha$  равно нулю и не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (14) ищем в виде

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C. \quad (17)$$

Подставим  $y_1$  в уравнение (14). Для этого умножим равенство (17) и равенства, полученные из него дифференцированием два раза по  $x$  на соответствующие коэффициенты уравнения (14) и приравняем сумму правых частей полученных равенств правой части уравнения (14). Будем иметь

$$\begin{array}{r|l} 6 & y_1 = Ax^2 + Bx + C \\ (-5) & y_1' = 2Ax + B \\ 1 & y_1'' = 2A \end{array} \quad \hline 6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему:

$$6A = 6, \quad 6B - 10A = -10, \quad 6C - 5B + 2A = 2,$$

откуда  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ . Следовательно,  $y_1 = x^2$  и общим решением уравнения (14) будет

$$y = x^2 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x \quad (\alpha = 0). \quad (18)$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - 5z' = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5; \quad z = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Так как число 0 является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (18) следует искать в виде

$$y_1 = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Далее, так же как и в примере 1, находим:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad y_1 = \frac{1}{3} x^3.$$

Следовательно, общим решением (18) будет

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1 + C_2e^{5x}.$$

**Пример 3.** Для уравнения

$$y'' - y = 6e^{2x} \quad (\alpha = 2)$$

имеем:

$$z'' - z = 0; \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1; \quad z = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то

$$\begin{array}{r|l} (-1) & y_1 = Ae^{2x} \\ 0 & y_1' = 2Ae^{2x} \\ 1 & y_1'' = 4Ae^{2x} \\ \hline & 3Ae^{2x} = 6e^{2x}, \\ & A = 2, \quad y_1 = 2e^{2x}; \\ & y = 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}. \end{array}$$

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = 2e^x \quad (\alpha = 1).$$

Здесь опять

$$z'' - z = 0; \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1; \quad z = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Но число 1 является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = Axe^x, \quad A = 1, \quad y_1 = xe^x; \\ y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}. \end{array} \right\}$$

**Пример 5.** Для уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} \quad (\alpha = 2)$$

имеем:

$$z'' - 4z' + 4z = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2; \quad z = e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

Число 2 является двукратным корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = Ax^2e^{2x}, \quad A = 1, \quad y_1 = x^2e^{2x}; \\ y = x^2e^{2x} + e^{2x}(C_1 + C_2x). \end{array} \right\}$$

**Пример 6.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2. \quad (19)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} z'' - 6z' + 5z &= 0; \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5; \\ z &= C_1e^x + C_2e^{5x}. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (19) состоит из двух слагаемых. Поэтому в силу замечания 1 п. 170 для построения частного решения уравнения (19) достаточно построить

частные решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} y'' - 6y' + 5y &= -3e^x, \\ y'' - 6y' + 5y &= 5x^2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

и взять их сумму. Для первого из уравнений (20) имеем

$$y_1 = Axe^x, \quad A = \frac{3}{4}, \quad y_1 = \frac{3}{4}xe^x.$$

Для второго из уравнений (20) имеем

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= Ax^2 + Bx + C, \quad A = 1, \quad B = \frac{12}{5}, \quad C = \frac{62}{25}, \\ y_2 &= x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому

$$y_1 + y_2 = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$$

будет частным решением уравнения (19), а общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25} + C_1e^x + C_2e^{5x}.$$

**Пример 7.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = e^x (\cos x - 7 \sin x) \quad (a=1, b=1). \quad (21)$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' + z' - 2z = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2; \quad z = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Составляя число  $a+ib$ , имеем  $a+ib=1+i$ . Так как это число не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (21) ищем в виде

$$y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x). \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (21), будем иметь:

$$\begin{array}{l|l} -2 & y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x) \\ 1 & y_1' = e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) \\ 1 & y_1'' = e^x (2B \cos x - 2A \sin x) \end{array} \quad \hline \begin{aligned} & e^x ((-A+3B) \cos x - (B+3A) \sin x) = \\ & = e^x (\cos x - 7 \sin x). \end{aligned}$$

Сокращая на  $e^x$  и приравнявая коэффициенты при  $\cos x$  и  $\sin x$ , получим систему

$$-A+3B=1, \quad -B-3A=-7,$$

откуда  $A=2$ ,  $B=1$ . Следовательно,

$$y_1 = e^x (2 \cos x + \sin x)$$

и общим решением уравнения (21) будет

$$y = e^x (2 \cos x + \sin x) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

**Пример 8.** Для уравнения

$$y'' + y' + y = -13 \sin 2x \quad (a=0, b=0) \quad (23)$$

имеем:

$$z'' + z' + z = 0; \quad \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z = e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Число  $a+ib=i2$  не является корнем характеристического уравнения. Несмотря на то, что правая часть уравнения (23) не содержит  $\cos 2x$ , частное решение ищем в виде, содержащем и член с  $\cos 2x$ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cos 2x + B \sin 2x, \quad A=2, \quad B=3, \\ y_1 &= 2 \cos 2x + 3 \sin 2x. \end{aligned} \right\}$$

Общим решением будет

$$y = 2 \cos 2x + 3 \sin 2x + e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

**Пример 9.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 2 \sin x \quad (a+ib=i).$$

Имеем:

$$z'' + z = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i; \quad z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Здесь число  $i$  является простым корнем характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде, содержащем множитель  $x$ :

$$y_1 = x(A \cos x + B \sin x), \quad A=-1, \quad B=0, \quad y_1 = -x \cos x.$$

Поэтому

$$y = -x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

будет общим решением данного уравнения.

## § 34. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

**178. Свободные колебания.** Рассмотрим снова задачу, которой мы занимались в п. 142, и дадим другое доказательство полученных там результатов, а также исследуем более общий случай.

Пусть материальная точка массы  $m > 0$  движется по оси  $Ox$ , находясь под действием восстанавливающей силы  $-ax$  ( $a > 0$ ), притягиваю-

щей точку к началу координат, силы сопротивления среды —  $b \frac{dx}{dt}$  ( $b \geq 0$ ), пропорциональной скорости, причем направление силы сопротивления противоположно направлению скорости\* и *возмущающей силы*, направленной по оси  $Ox$  и равной  $F(t)$  в момент времени  $t$ . Тогда, применяя второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b \frac{dx}{dt} + F(t).$$

Перепишем его в виде

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = f(t), \quad (1)$$

где

$$h = \frac{b}{2m} \geq 0, \quad k^2 = \frac{a}{m} > 0, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Уравнение (1) называют *уравнением колебаний*. При этом если возмущающая сила отсутствует, так что  $F(t) \equiv 0$ , то  $f(t) \equiv 0$ . В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \quad (2)$$

и называется *уравнением свободных колебаний*. Уравнение (1), в котором  $f(t) \not\equiv 0$ , называется *уравнением вынужденных колебаний*\*\*.

Наша задача состоит в том, чтобы изучить характер движений (колебаний), определяемых уравнениями (1) и (2), в зависимости от соотношений между восстанавливающей силой, силой сопротивления среды и возмущающей силой.

Начнем с изучения свободных колебаний. Соответствующим характеристическим уравнением будет

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \quad (3)$$

Предположим сначала, что  $h=0$ , т. е. рассмотрим колебания в среде без сопротивления. Тогда уравнение (2) примет вид

\* Заметим, что в механике представляет интерес и случай, когда  $b < 0$ , т. е. направление силы сопротивления среды совпадает с направлением скорости (случай «отрицательного трения») (см., например, [8, с. 82—94; 116, с. 56—59]).

\*\* Вследствие линейности дифференциального уравнения (1) колебания, определяемые этим уравнением, называют *линейными* (более подробно см. об этом, например, [23]).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \quad (4)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет чисто мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm ik,$$

так что общим решением уравнения (4) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (5)$$

Введем вместо  $C_1$  и  $C_2$  новые произвольные постоянные  $A$  и  $\varphi$ , полагая

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi. \quad (6)$$

Тогда общее решение (5) преобразуется к виду

$$x = A \sin (kt + \varphi). \quad (7)$$

Движение, соответствующее ненулевому решению, определяемому формулой (7), называется *чисто гармоническим колебанием с периодом*  $T = \frac{2\pi}{k}$ , *частотой*  $k^*$ , *амплитудой*  $A$  и *начальной фазой*  $\varphi^{**}$ .

Амплитуда и начальная фаза определяются из начальных условий

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = x_0' \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (8)$$

где  $x_0$  и  $x_0'$  — заданные числа. Подставляя начальные данные  $t=0$ ,  $x_0$  и  $x_0'$  в формулы

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(kt + \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= Ak \cos(kt + \varphi), \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \sin \varphi, \\ x_0' &= Ak \cos \varphi, \end{aligned} \right\}$$

---

\* Заметим, что период  $T$  и частота  $k$  колебаний (7) не зависят от начальных данных. Это свойство колебаний (7) называется *изохронностью*.

\*\* *Фазой* гармонического колебания называется аргумент функции  $\sin$ . В нашем случае фазой является  $kt + \varphi$ , а *начальной фазой* (т. е. значением фазы при  $t=0$ ) является  $\varphi$ .



откуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{x_0'}.$$

Из формулы (7) мы видим, что в рассматриваемом случае всякое движение (движение с любыми начальными данными) ограничено при всех значениях  $t$ :

$$|x(t)| \leq A.$$

Рассмотрим систему (см. п. 142, формула (44))

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -k^2 x, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

соответствующую уравнению (4), на фазовой плоскости  $(x, y)$ . Здесь, как уже показано в п. 142 (см. там случай  $h=0$ ), начало координат  $x=0, y=0$  является точкой равновесия типа центр. Общее решение системы (9) дается формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(kt + \varphi), \\ y &= Ak \cos(kt + \varphi). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда снова видно, что для системы (9) начало координат является точкой равновесия типа центр, ибо траекториями, отличными от точки равновесия  $x=0, y=0$ , будут эллипсы

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 k^2} = 1.$$

Невозмущенное движение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неасимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что  $h > 0$ , т. е. колебание происходит в среде с сопротивлением. Характеристическое уравнение (3) имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Здесь возможны три случая.

Случай 1.  $h^2 - k^2 > 0$  (случай большого сопротивления). В этом случае оба корня характеристического уравнения вещественны и отрица-

тельны. Общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - k^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - k^2})t}. \quad (10)$$

Соответствующие движения называются *апериодическими движениями*.

Из формулы (10) следует, что *всякое ненулевое решение уравнения (2) стремится к нулевому решению  $x \equiv 0$  при  $t \rightarrow \infty$* .

Для соответствующей системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -k^2 x - 2hy \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

начало координат  $x=0$ ,  $y=0$  будет точкой равновесия типа узел. Из формулы общего решения

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - k^2})t} + C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - k^2})t}, \\ y &= -(h - \sqrt{h^2 - k^2}) C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - k^2})t} - \\ &\quad - (h + \sqrt{h^2 - k^2}) C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - k^2})t} \end{aligned}$$

следует, что нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  системы (10) асимптотически устойчиво, точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  системы (11) — асимптотически устойчивый узел.

**Случай 2.**  $h^2 = k^2$  (*граничный случай*). Здесь  $\lambda_1 = \lambda_2 = -h < 0$ . Общим решением уравнения (2) будет

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t).$$

Соответствующие ему движения также называются *апериодическими* (специальный случай апериодических движений).

*Всякое ненулевое решение уравнения (2) стремится к нулевому решению  $x \equiv 0$  при  $t \rightarrow \infty$* .

Для системы (11) начало координат будет точкой равновесия типа узел. Из общего решения

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \\ y &= e^{-ht} [-h(C_1 + C_2 t) + C_2] \end{aligned} \right\}$$

следует, что нулевое решение системы (11) асимптотически

устойчиво, точка равновесия  $x=0, y=0$  системы (11) — асимптотически устойчивый узел.

Случай 3.  $h^2 - k^2 < 0$  (случай малого сопротивления). В этом случае характеристическое уравнение (3) имеет сопряженные комплексные корни

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i \sqrt{k^2 - h^2},$$

причем их вещественная часть отрицательна. Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид

$$x = e^{-ht} [C_1 \cos(\sqrt{k^2 - h^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t)]$$

или

$$x = Ae^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi), \quad (12)$$

где  $A$  и  $\varphi$  связаны с  $C_1$  и  $C_2$  формулами (6).

Движение (12) называется *затухающим гармоническим колебанием* с периодом  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}$  частотой  $\omega = \sqrt{k^2 - h^2}$ , амплитудой  $Ae^{-ht}$  и начальной фазой  $\varphi$ . В отличие от чисто гармонического колебания (7) здесь амплитуда  $Ae^{-ht}$  уже не постоянна. При этом число  $A$  называется *начальной амплитудой\**, а  $h$  — *коэффициентом затухания*. Множитель  $e^{-ht}$  характеризует быстроту затухания. Начальная амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  определяются из начальных условий (8).

Из формулы (12) видно, что *всякое решение уравнения (2), отличное от нулевого, стремится к последнему при  $t \rightarrow \infty$* .

Для системы (11) точка  $x=0, y=0$  будет точкой равновесия типа фокус. Из формулы общего решения этой системы

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi), \\ y &= Ae^{-ht} (-h \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi) + \\ &\quad + \sqrt{k^2 - h^2} \cos(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi)) \end{aligned} \right\}$$

следует, что нулевое решение ее асимптотически устойчиво. Точка равновесия  $x=0, y=0$  системы (11) — асимптотически устойчивый фокус.

В заключение исследования свободных колебаний заметим, что *во всех рассмотренных случаях нулевое решение системы (11) устойчиво, причем для колебаний в среде с сопротивлением оно даже асимпто-*

\* Так как  $Ae^{-ht}|_{t=0} = A$ .

*тически* устойчиво \*. С точки зрения качественной теории отметим, что мы не встретились со случаем, когда начало координат является точкой равновесия типа седло.

**179. Вынужденные колебания.** Рассмотрим теперь уравнение вынужденных колебаний (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = f(t) \quad (f(t) \neq 0).$$

Здесь так же, как и в теории свободных колебаний, следует различать случаи колебания в среде без сопротивления ( $h=0$ ) и в среде с сопротивлением ( $h>0$ ).

*Уравнение вынужденных колебаний в среде без сопротивления* имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = f(t). \quad (13)$$

Здесь *собственные колебания*, определяемые соответствующим однородным уравнением, есть чисто гармонические колебания. Применяя метод вариации произвольных постоянных, мы найдем общее решение уравнения (13) в виде (см. п. 171, формула (14'''))

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u) du$$

или

$$x = A \sin(kt + \varphi) + \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u) du.$$

Здесь второе слагаемое представляет собою частное решение

$$x_1 = \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u) du \equiv x_1(t), \quad (14)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x_1(t) \big|_{t=0} = 0, \quad x_1'(t) \big|_{t=0} = 0.$$

---

\* Если  $h < 0$ , то нулевое решение системы (11) неустойчиво, причем при большом сопротивлении ( $h^2 > k^2$ ) точка равновесия  $x=0, y=0$  системы (11) является неустойчивым узлом, а при малом сопротивлении ( $h^2 < k^2$ ) — неустойчивым фокусом (убедитесь в этом).

Движение, соответствующее частному решению (14), называется *чисто вынужденным колебанием*.

Таким образом, колебание, определяемое уравнением (13), складывается из собственных колебаний точки под влиянием восстанавливающей силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия, и чисто вынужденных колебаний, вызванных воздействием возмущающей силы.

В приложениях часто встречается гармоническая возмущающая сила  $F(t) = N \sin \omega t$ . В этом случае частное решение уравнения вынужденных колебаний может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Сложив его с общим решением соответствующего уравнения свободных колебаний, мы и получим общее решение уравнения вынужденных колебаний.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = M \sin \omega t \quad \left( M = \frac{N}{m}, a + ib = i\omega \right); \quad (15)$$

Сравнивая число  $i\omega$  с корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 + k^2 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm ik$ , видим, что при нахождении частного решения следует различать два случая: 1)  $\omega \neq k$ , 2)  $\omega = k$ .

В случае  $\omega \neq k$ , число  $i\omega$  не является корнем характеристического уравнения. Поэтому, обозначая частное решение уравнения (15) через  $x_1(t)$ , имеем:

$$\begin{array}{l|l} k^2 & x_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ 0 & x_1'(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ 1 & x_1''(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \end{array}$$


---


$$\begin{aligned} & A(k^2 - \omega^2) \cos \omega t + B(k^2 - \omega^2) \sin \omega t = M \sin \omega t; \\ & \left. \begin{aligned} A(k^2 - \omega^2) &= 0, \\ B(k^2 - \omega^2) &= M; \end{aligned} \right\} \quad A=0, \quad B = \frac{M}{k^2 - \omega^2}; \end{aligned}$$

$$x_1(t) = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Общим решением уравнения (15) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

или

$$x = A \sin(kt + \varphi) + \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

В случае  $\omega = k$  число  $i\omega$  является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\begin{array}{l|l} k^2 & x_1(t) = t(A \cos kt + B \sin kt) \\ 0 & x_1'(t) = A \cos kt + B \sin kt + t(-Ak \sin kt + Bk \cos kt) \\ 1 & x_1''(t) = 2(-Ak \sin kt + Bk \cos kt) + t(-Ak^2 \cos kt - Bk^2 \sin kt) \end{array}$$

$$\begin{aligned} -2Ak \sin kt + 2Bk \cos kt &= M \sin kt; \\ -2Ak &= M, \\ 2Bk &= 0; \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -2Ak &= M, \\ 2Bk &= 0; \end{aligned}} \right\} \quad A = -\frac{M}{2k}, \quad B = 0;$$

$$x_1(t) = -\frac{M}{2k} t \cos kt.$$

Общим решением будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{M}{2k} t \cos kt$$

или

$$x = A \sin(kt + \varphi) - \frac{M}{2k} t \cos kt. \quad (16)$$

Второй член этой формулы представляет собою произведение степени  $t$  на периодическую функцию. В астрономии такой член называется *вековым членом*.

Формула (16) показывает, что в случае  $\omega = k^*$  мы имеем колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Это явление называется в физике резонансом между собственными колебаниями рассматриваемой материальной точки и возмущающей силой.

Уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = f(t) \quad (f(t) \neq 0, h > 0)$$

также может быть проинтегрировано методом вариации произвольных постоянных.

В случае гармонической возмущающей силы частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов [138, т. II, с. 98—102].

### § 35. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**180. Некоторые сведения из операционного исчисления.** В этом параграфе мы покажем, как операционное исчисление может быть использовано при нахождении решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения и для линейной системы дифференциальных уравнений. Напомним сначала некоторые сведения из операционного исчисления, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения.

Прежде всего нам потребуется понятие об определенном интеграле

---

\* Т. е. когда частота возмущающей гармонической силы совпадает с частотой собственных колебаний материальной точки.

от комплексной функции вещественной переменной, т. е. от функции вида (см. п. 159)

$$z(x) = u(x) + iv(x),$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — вещественные функции вещественной переменной  $x$ , заданные на некотором интервале изменения  $x$ . Этот интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны.

В случае конечного интервала  $[a, b]$  по определению полагают

$$\int_a^b z(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx,$$

так что интегрирование комплексной функции вещественной переменной сводится к интегрированию ее вещественной и мнимой частей.

Легко убедиться, что известные правила вычисления определенных интегралов от вещественных функций распространяются на случай комплексных функций вещественной переменной. Например,

$$\begin{aligned} \int_a^b kz(x) dx &= k \int_a^b z(x) dx, \\ \int_a^b (z_1(x) + z_2(x)) dx &= \int_a^b z_1(x) dx + \int_a^b z_2(x) dx. \end{aligned}$$

Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , а тем самым и функция  $z(x)$  заданы на интервале  $[0, \infty)$ , то несобственный интеграл от функции  $z(x)$  в интервале от  $a$  до  $\infty$ ,  $\int_a^\infty z(x) dx$ , определяют равенством

$$\int_a^\infty z(x) dx = \int_a^\infty u(x) dx + i \int_a^\infty v(x) dx.$$

Этот несобственный интеграл называют *сходящимся*, если несобственные интегралы  $\int_a^\infty u(x) dx$  и  $\int_a^\infty v(x) dx$  сходятся. Если хоть один из последних интегралов расходится, то и интеграл  $\int_a^\infty z(x) dx$  называют *расходящимся*.

Предположим теперь, что  $f(t)$  есть некоторая функция вещественной переменной  $t$ , заданная на интервале  $[0, \infty)$ . Возьмем функцию  $e^{-pt}$ , где  $p = \sigma + i\tau$  — комплексное число (рис. 53). Это есть комплексная функция вещественной переменной  $t$ , определяемая равенством (см. п. 159)

$$e^{-pt} = e^{-\sigma t} \cos \tau t - i e^{-\sigma t} \sin \tau t.$$

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

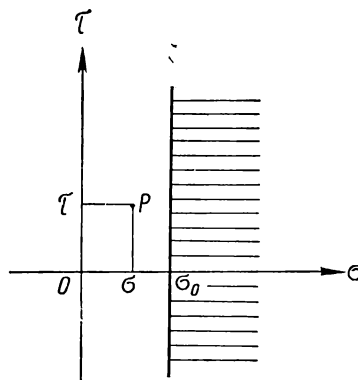


Рис. 53

зависящий от комплексного параметра  $p$ . Каждому значению параметра  $p$ , лежащему в области сходимости интеграла (1), которая, очевидно, зависит от характера поведения функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , этот интеграл ставит в соответствие определенное число  $\bar{f}(p)$ , так что

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Интеграл (1), рассматриваемый как (комплексная) функция параметра  $p$ , называется *интегралом Лапласа* или *оператором Лапласа*.

Преобразование функции  $f(t)$  в функцию  $\bar{f}(p)$ , осуществляемое оператором Лапласа, называется *преобразованием Лапласа*. При этом функция  $\bar{f}(p)$  называется *изображением* (по Лапласу) функции  $f(t)$ , а функция  $f(t)$  — *оригиналом* для функции  $\bar{f}(p)$ . Отметим еще раз, что функция  $f(t)$  вещественная, а  $\bar{f}(p)$  — комплексная.

Будем обозначать соответствие между оригиналом и изображением символом  $\dot{\rightarrow}$ , направляя стрелку в сторону оригинала, так что

$$f(t) \dot{\leftarrow} \bar{f}(p) \quad \text{или} \quad \bar{f}(p) \dot{\rightarrow} f(t).$$

Совокупность правил, позволяющих находить изображения по оригиналам и восстанавливать оригиналы по изображениям, образует *операционное исчисление*. При этом операциям над оригиналами соответствуют определенные операции над изображениями.



Прежде чем устанавливать основные свойства изображений, позволяющие переходить от операций над оригиналами к операциям над изображениями, укажем класс функций  $f(t)$  — *класс оригиналов*, в котором будем рассматривать преобразование Лапласа. Мы будем предполагать, что функции  $f(t)$  определены при всех  $t \geq 0$ ,<sup>\*</sup> непрерывны при этих значениях  $t$  и таковы, что существуют такие (вообще говоря, свои для каждой из  $f(t)$ ) вещественные числа  $M > 0$  и  $\sigma_0$ , что при всех  $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}. \quad (2)$$

Покажем, что для таких функций  $f(t)$  интеграл Лапласа (1) сходится в некоторой области изменения  $p$ .

Так как

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} \cos \tau t dt - i \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} \sin \tau t dt,$$

то нам нужно исследовать на сходимость интегралы

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} \cos \tau t dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} \sin \tau t dt. \quad (3)$$

Оценивая подынтегральную функцию первого из них и принимая во внимание оценку (2), имеем

$$|f(t) e^{-\sigma t} \cos \tau t| \leq M e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} = M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt$$

сходится при  $\sigma > \sigma_0$ , то при этих значениях  $\sigma$  сходится и первый из интегралов (3). Аналогично убеждаемся, что второй из интегралов (3) тоже будет сходиться при  $\sigma > \sigma_0$ .

Таким образом, в области

$$\operatorname{Re} p > \sigma_0$$

(на рис. 52 эта область заштрихована, причем  $\sigma_0$  может быть и неположительна) интеграл Лапласа (1) сходится и, следовательно, существует изображение функции  $f(t)$ .

<sup>\*</sup> Иногда  $f(t)$  определяют нулем для всех  $t < 0$ .

Например, изображение функции

$$f(t) = \sin t \quad (t \geq 0)$$

существует в области

$$\operatorname{Re} p > 0,$$

т. е. во всей правой полуплоскости комплексной плоскости ( $p$ ), ибо

$$|\sin t| \leq 1,$$

так что  $M=1$ ,  $\sigma_0=0$ .

Установим теперь некоторые свойства изображений, которые нам потребуются в этом параграфе.

1. Если  $f(t) \leftrightarrow \bar{f}(p)$ , то  $cf(t) \leftrightarrow c\bar{f}(p)$  ( $c=\text{const}$ ).

2. Если  $f_1(t) \leftrightarrow \bar{f}_1(p)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow \bar{f}_2(p)$  ( $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ ), то

$$f_1(t) + f_2(t) \leftrightarrow \bar{f}_1(p) + \bar{f}_2(p) \quad (\operatorname{Re} p > \sigma_0).$$

Эти два свойства, выражающие линейность оператора Лапласа, непосредственно следуют из определения изображения и известных свойств определенного интеграла.

Из свойств 1 и 2 вытекает следующее общее свойство линейности изображения:

3. Если  $f_k(t) \leftrightarrow \bar{f}_k(p)$  ( $k=1, \dots, n$ ;  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ ), то

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k \bar{f}_k(p) \quad (\operatorname{Re} p > \sigma_0).$$

Пусть нам известно изображение  $\bar{f}(p)$  функции  $f(t)$ . Поставим вопрос, как изменится это изображение, если аргумент  $t$  подвергнуть операции «растяжения», т. е. заменить  $t$  на  $at$  ( $a > 0$ ). Ответ на этот вопрос дает следующее свойство преобразования Лапласа:

4. Если  $f(t) \leftrightarrow \bar{f}(p)$ , то

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a > 0)$$

(теорема подобия).

Действительно, имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt = (at = z) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right).$$

При интегрировании дифференциальных уравнений операционным методом нам потребуется уметь находить изображение произведения функции  $f(t)$ , изображение которой нам известно, на экспоненту  $e^{at}$ . Для этой цели нам будет полезно следующее свойство преобразования Лапласа:

5. Если  $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \bar{f}(p)$ , то

$$e^{at} f(t) \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \bar{f}(p-a)$$

(теорема сдвига).

В самом деле, заметим прежде всего, что из неравенства (2) следует, что

$$|e^{at} f(t)| \leq M e^{(\sigma_0 + \operatorname{Re} a)t},$$

так что функция  $e^{at} f(t)$  принадлежит классу рассматриваемых нами оригиналов, причем изображение ее существует при  $\operatorname{Re} p > \sigma_0 + \operatorname{Re} a$ . Далее имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = \bar{f}(p-a).$$

**Пример 1.** Найти изображение функции  $e^{at} \sin bt$  ( $a$  и  $b$  — вещественные).

Искомое изображение существует при  $\operatorname{Re} p > a$ , так как изображение функции  $\sin bt$  существует при  $\operatorname{Re} p > 0$  (почему?).

Чтобы найти изображение функции  $e^{at} \sin bt$ , построим сначала изображение функции  $f(t) = \sin t$ . Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \left. \frac{e^{-pt} (-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

так что

$$\sin t \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Теперь, пользуясь свойством 4, найдем изображение функции  $\sin bt$  ( $b > 0$ ):

$$\sin bt \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \frac{1}{b} \frac{1}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} \quad \text{или} \quad \sin bt \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \frac{b}{p^2 + b^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Наконец, пользуясь свойством 5, получаем

$$e^{at} \sin bt \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} \quad (\operatorname{Re} p > a).$$

Мы показали выше, что сумме отображений соответствует сумма оригиналов (см. свойство 2). Покажем теперь, что произведению изображений соответствует с в е р т к а оригиналов, т. е. имеет место свойство:

6. Если  $f_1(t) \leftrightarrow \bar{f}_1(p)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow \bar{f}_2(p)$ , то

$$\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p) \dot{\leftrightarrow} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

где функция, стоящая в правой части, называется *сверткой* функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

В самом деле, находя изображение свертки, имеем

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \dot{\leftrightarrow} \int_0^\infty e^{-pt} \left( \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \right) dt. \quad (4)$$

Интеграл справа есть повторный интеграл, взятый по сектору, ограниченному положительной полуосью оси  $Ot$  и полупрямой  $\tau=t$  ( $t \geq 0$ ) (рис. 54). Изменив в нем порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\infty f_1(\tau) \left( \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right) d\tau.$$

Вычислим внутренний интеграл. Имеем

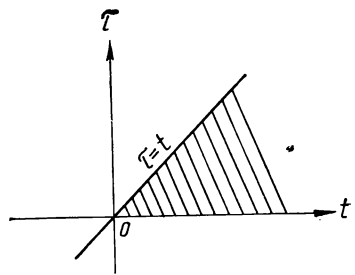
$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt = (t-\tau=z) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p(\tau+z)} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \bar{f}_2(p).$$

Поэтому (4) примет вид

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \dot{\leftrightarrow} \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau} \bar{f}_2(p) d\tau = \bar{f}_2(p)\bar{f}_1(p),$$

откуда и следует 6.



Р и с. 54

В операционном исчислении рассмотренное свойство 6 носит название теоремы свертывания. Эта теорема дает возможность найти функцию по ее изображению, если последнее удастся представить в виде произведения изображений известных функций. Теорема свертывания будет использована ниже при интегрировании дифференциальных уравнений операционным методом.

З а м е ч а н и е. Из теоремы свертывания следует, что

$$6'. \int_0^t f(\tau) d\tau \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p} \bar{f}(p).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить  $f_1(t) = f(t)$ ,  $f(t) \equiv 1$  и принять во внимание, что

$$1 \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Последнее следует из того, что

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Таким образом, интегрированию оригинала по интервалу  $[0, t]$  соответствует деление изображения на  $p$ , так что изображение интеграла л и н е й н о относительно изображения подынтегральной функции.

Покажем, что изображения производных функции  $f(t)$  выражаются л и н е й н о через ее изображение  $\bar{f}(p)$ .

Предположим, что функция  $f(t)$  принадлежит рассматриваемому классу оригиналов, так что для нее выполняется оценка (2), и непрерывно дифференцируема при всех  $t \geq 0$ , причем  $f'(t)$  тоже принадлежит этому классу оригиналов, т. е.

$$|f'(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}.$$

Тогда имеет место свойство

7. Если  $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \bar{f}(p)$ , то

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p\bar{f}(p) - f(0) \equiv \bar{f}'(p) \quad [\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, \sigma_1)]. \quad (5)$$

В самом деле,

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + p\bar{f}(p),$$

ибо результат подстановки верхнего предела равен нулю в силу оценки

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} p)t} \quad (t \geq 0).$$

Правило 7 приобретает наиболее простой вид, если начальное значение оригинала  $f(t)$  при  $t=0$  равно нулю, т. е.  $f(0)=0$ . В этом случае имеем

$$7'. f'(t) \leftrightarrow p\bar{f}(p), \quad (5')$$

т. е. дифференцированию оригинала соответствует просто умножение изображения на  $p$ .

**Пример 2.** Найти изображение функции  $\cos bt$  ( $b$  — вещественное число).  
Найдем сначала изображение функции  $\cos t$ . Заметим, что

$$\cos t = (\sin t)', \quad \sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1} \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad \sin 0 = 0.$$

Поэтому на основании свойства 7' имеем

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Теперь, пользуясь свойством 4, получим, что

$$\cos bt \leftrightarrow \frac{1}{b} \frac{\frac{p}{b}}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + b^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Предположим, что функция  $f(t)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема, причем сама  $f(t)$  и все ее производные до порядка  $n$  включительно принадлежат рассматриваемому классу оригиналов, так что

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq Me^{\sigma_0 t}, \\ |f'(t)| &\leq M_1 e^{\sigma_1 t}, \\ &\dots \dots \dots \\ |f^{(n)}(t)| &\leq M_n e^{\sigma_n t}. \end{aligned}$$

Тогда имеет место свойство

8. Если  $f(t) \leftrightarrow \bar{f}(p)$ , то

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n \bar{f}(p) - (p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)). \quad (6)$$

$$(\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)).$$

Убедимся, что это свойство справедливо при  $n=2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f''(t) e^{-pt} dt &= f'(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f'(0) + p(p\bar{f}(p) - f(0)) = p^2\bar{f}(p) - (pf(0) + f'(0)). \end{aligned}$$

Методом математической индукции нетрудно убедиться, что свойство 8 справедливо при любом  $n$ .

Правило 8 приобретает наиболее простой вид, если

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

В этом случае, имеем

$$8'. \quad f^{(n)}(t) \Leftarrow p^n \bar{f}(p). \quad (6')$$

Приведем еще одно замечательное свойство изображения  $\bar{f}(p)$ , рассматриваемого как комплексная функция от  $p$ . Можно доказать (см., например, [157, с. 10—14, 27—29]), что изображение  $\bar{f}(p)$  представляет собой функцию комплексной переменной  $p$ , регулярную в области

$$\operatorname{Re} p \geq \sigma' > \sigma_0 \quad (\sigma' = \sigma_0 + \delta, \quad \forall \delta > 0),$$

так что ее особые точки могут лежать только слева от прямой  $\sigma = \sigma'$ . Например,

$$f(t) \equiv \sin t \Leftarrow \frac{1}{p^2 + 1} \equiv \bar{x}(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Здесь  $\sigma_0 = 0$ . Особые точки изображения  $\bar{x}(p)$  ( $p = \pm i$ ) лежат слева от прямой  $\sigma = \delta$ ,  $\forall \delta > 0$ . При этом производные от функции  $\bar{f}(p)$  можно находить дифференцированием интеграла Лапласа по (комплексному) параметру  $p$ , выполняя дифференцирование под знаком интеграла, так что

$$\bar{f}(p)' = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} (f(t) e^{-pt}) dt$$

или

$$\bar{f}(p)' = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt.$$

Дифференцируя еще раз, найдем

$$\bar{f}(p)'' = \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt$$

и вообще

$$\bar{f}(p)^{(n)} = \int_0^{\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-pt} dt,$$

т. е.

$$(-1)^n t^n f(t) \stackrel{*}{\leftarrow} \bar{f}(p)^{(n)}.$$

Пользуясь этой формулой, мы можем найти изображение произведения  $t^n$  ( $n > 0$ , целое) на заданную функцию  $f(t)$ , если изображение последней известно. Получим

$$9. \quad t^n f(t) \stackrel{*}{\leftarrow} (-1)^n \bar{f}(p)^{(n)}.$$

**Пример 3.** Найти изображение степени  $t^n$  ( $n > 0$ , целое).

Полагая в формуле 9  $f(t) \equiv 1 \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{1}{p}$  ( $\operatorname{Re} p > 0$ ), получим

$$t^n \stackrel{*}{\leftarrow} (-1)^n \left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

или

$$t^n \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

В частности,

$$t \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{1}{p^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

**Пример 4.** Найти изображения функций  $t \sin bt$ ,  $t \cos bt$ .

Так как

$$\cos bt \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{n}{p^2 + b^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

то в силу свойства 9

$$t \cos bt \stackrel{*}{\leftarrow} (-1) \frac{p}{(p^2 + b^2)^2}$$

или

$$t \cos bt \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{n^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

Аналогично, находим

$$t \sin bt \stackrel{*}{\leftarrow} \frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$



**Пример 5.** Найти, пользуясь изображением функции  $e^{\lambda t}$  и свойством 9, изображение функции  $t^n e^{\lambda t}$  ( $n > 0$ , целое,  $\lambda = \text{const}$ ).

Имеем

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p-\lambda} \quad (\text{Re } p > \text{Re } \lambda); \\ t^n e^{\lambda t} &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} (-1)^n \left( \frac{1}{p-\lambda} \right)^{(n)}; \\ t^n e^{\lambda t} &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}} \quad (\text{Re } p > \text{Re } \lambda). \end{aligned}$$

Заметим, что к тому же результату мы придем несколько проще, если воспользуемся найденным выше изображением  $t^n$  и свойством 5.

Приведем таблицу изображений наиболее часто встречающихся функций (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

$f(t)$	$\bar{f}(p)$	$\text{Re } p$
$c$ ( $c = \text{const}$ )	$\frac{c}{p}$	$\text{Re } p > 0$
$t^n$ ( $n > 0$ , целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0$
$e^{\lambda t}$ ( $\lambda = \text{const}$ )	$\frac{1}{p-\lambda}$	$\text{Re } p > \text{Re } \lambda$
$t^n e^{\lambda t}$ ( $n > 0$ , целое)	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\text{Re } p > \text{Re } \lambda$
$\sin bt$ ( $b$ — вещественное)	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	$\text{Re } p > 0$
$e^{at} \sin bt$ ( $a$ и $b$ — вещественные)	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	$\text{Re } p > a$
$t \sin bt$ ( $b$ — вещественное)	$\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$	$\text{Re } p > 0$
$\cos bt$ ( $b$ — вещественное)	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	$\text{Re } p > 0$
$e^{at} \cos bt$ ( $a$ и $b$ — вещественные)	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	$\text{Re } p > a$
$t \cos bt$ ( $b$ — вещественное)	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$	$\text{Re } p > 0$
$\text{ch } at$ ( $a \geq 0$ )	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\text{Re } p > a$
$\text{sh } at$ ( $a \geq 0$ )	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{Re } p > a$

**181. Операционный метод решения задачи Коши для линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.** Пусть дано линейное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad \left( x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k} \right), \quad (7)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — вещественные числа, а функция  $f(t)$  задана и непрерывна при  $t \geq 0$  и такая, что для нее имеет место оценка (2). Поставим начальные условия

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (8)$$

где  $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$  — любые заданные числа.

Решение  $x = x(t)$  задачи Коши (7), (8) существует и единственно. Оно определено при всех  $t \geq 0$  (почему?).

Покажем, как можно найти это решение операционным методом. Найдем сначала изображение (по Лапласу) искомого решения  $x(t)$ . С этой целью построим изображения обеих частей уравнения (7). Пользуясь линейностью преобразования Лапласа, имеем

$$\overline{x^{(n)}}(p) + a_1 \overline{x^{(n-1)}}(p) + \dots + a_{n-1} \overline{x'}(p) + a_n \overline{x}(p) = \overline{f}(p).$$

Заменяя изображения производных их значениями, согласно формулам (5) и (6), и принимая во внимание начальные условия (8), найдем

$$\begin{aligned} & p^n \overline{x}(p) - (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \dots + x_0^{(n-1)}) + \\ & + a_1 p^{n-1} \overline{x}(p) - a_1 (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \dots + x_0^{(n-2)}) + \dots + \\ & + a_{n-1} p \overline{x}(p) - a_{n-1} x_0 + a_n \overline{x}(p) = \overline{f}(p). \end{aligned}$$

Разрешим это уравнение относительно  $\overline{x}(p)$ . Сбрав все члены, содержащие  $\overline{x}(p)$ , и перенеся все остальные члены в правую часть, получим

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \overline{x}(p) = \overline{f}(p) + \psi(p),$$

где

$$\begin{aligned} \psi(p) = & p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \dots + x_0^{(n-1)} + \\ & + a_1 (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \dots + x_0^{(n-2)}) + \dots + a_{n-1} x_0. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициент при  $\overline{x}(p)$  есть не что иное, как характеристический полином  $P(p)$  для уравнения (7). Поэтому уравнение можно записать в виде

$$P(p) \overline{x}(p) = \overline{f}(p) + \psi(p). \quad (9)$$

Это уравнение называется *изображающим уравнением* для задачи Коши (7), (8) или *операторным уравнением*, соответствующим этой задаче. Уравнение (9), как и следовало ожидать, является **линейным алгебраическим** уравнением относительно изображения  $\bar{x}(p)$ .

Из уравнения (9) находим, что

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p) + \psi(p)}{P(p)}. \quad (10)$$

Восстанавливая по изображению (10) оригинал, получим искомое решение  $x(t)$ .

Отметим, что формула (10) для изображения решения принимает наиболее простой вид, если искомое решение  $x(t)$  удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (8')$$

В этом случае имеем

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{P(p)}. \quad (10')$$

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$x'' + x = \sin t. \quad (11)$$

Найдем решение  $x = x(t)$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -\frac{1}{2}. \quad (12)$$

Найдем сначала изображение искомого решения. С этой целью построим изображающее уравнение, взяв изображения обеих частей уравнения (12). Так как

$$\begin{aligned} \bar{x}''(p) &= p^2 \bar{x}(p) - [px(0) + x'(0)] = p^2 \bar{x}(p) + \frac{1}{2}, \\ \sin t &\leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}; \end{aligned}$$

то изображающим уравнением будет

$$p^2 \bar{x}(p) + \frac{1}{2} + \bar{x}(p) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{1 - p^2}{2(p^2 + 1)^2}.$$

Найдем оригинал  $x(t)$ . Для этого подберем в таблице изображений (табл. 1) подходящее изображение. Находим

$$\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \dot{\rightarrow} t \cos t.$$

Поэтому решением задачи Коши (11), (12) будет

$$x(t) = -\frac{1}{2} t \cos t.$$

**Пример 2.** Найти решение  $x=x(t)$  уравнения

$$\ddot{x} - x = \frac{1}{2} e^t,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Найдем  $\overline{x}(p)$ . Имеем

$$\overline{x''}(p) = p^2 \overline{x}(p).$$

Далее, пользуясь таблицей изображений (табл. 1), находим

$$\frac{1}{2} e^t \dot{\leftarrow} \frac{1}{2} \frac{1}{p-1}.$$

Поэтому изображающим уравнением будет

$$(p^2-1) \overline{x}(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)(p^2-1)}.$$

Для нахождения оригинала по этому изображению разложим последнее на простейшие дроби:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)(p^2-1)} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} \right].$$

Теперь, пользуясь таблицей изображений (табл. 1), найдем

$$x(t) = \frac{1}{4} \left( t e^t - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} \right)$$

или \*

$$x(t) = \frac{1}{4} te^t - \frac{1}{4} \operatorname{sh} t.$$

**Пример 3.** Найти решение  $x = x(t)$  уравнения

$$x''' - x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$$

Найдем  $\bar{x}(p)$ . Так как

$$\overline{x'''}(p) = p^3 \bar{x}(p) - p^2 x(0) - p x'(0) - x''(0) = p^3 \bar{x}(p) - p^2 - p - 1,$$

то изображающим уравнением будет

$$p^3 \bar{x}(p) - p^2 - p - 1 - \bar{x}(p) = 0$$

или

$$(p^3 - 1) \bar{x}(p) = p^2 + p + 1,$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Поэтому

$$x(t) = e^t.$$

**З а м е ч а н и е.** Пусть поставлена задача Коши (7), (8'), т. е. ищется решение уравнения (7) с нулевыми начальными условиями. Тогда в силу (10') имеем

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p)}{P(p)} \quad \text{или} \quad \bar{x}(p) = \bar{f}(p) \cdot \frac{1}{P(p)}.$$

Предположим, что нам известен оригинал для функции  $\frac{1}{P(p)}$ , т. е.

$$\frac{1}{P(p)} \rightarrow y(t).$$

Тогда, согласно теореме свертывания, решением задачи Коши (7), (8') будет свертка функций  $\bar{f}(t)$  и  $y(t)$ , т. е.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) y(t-\tau) d\tau. \quad (13)$$

---

\* К этому же результату можно прийти и непосредственно, если представить  $\bar{x}(p)$  в виде

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2-1} \right)$$

и воспользоваться таблицей изображений (табл. 1).

**Пример 4.** Найти решение уравнения

$$x'' + k^2 x = f(t)$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Изображающим уравнением будет

$$(p^2 + k^2) \bar{x}(p) = \bar{f}(p),$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \bar{f}(p) \cdot \frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Найдем оригинал для изображения  $\frac{1}{p^2 + k^2}$ , пользуясь таблицей изображений (табл. 1).  
Имеем

$$\frac{k}{p^2 + k^2} \dot{\rightarrow} \sin kt,$$

откуда

$$\frac{1}{p^2 + k^2} \dot{\rightarrow} \frac{1}{k} \sin kt.$$

Поэтому искомым решением, согласно формуле (13), будет (ср. пример 1 п. 179) .

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau.$$

Для дальнейшего изучения основ операционного исчисления и его применения к интегрированию дифференциальных уравнений читатель может обратиться, например, к книгам [33, с. 472—490; 47; 122, с. 411—442; 149, т. II, с. 222—224, с. 267—269; 154, с. 302—318].

Для более глубокого изучения операционного исчисления и его приложений рекомендуем обратиться к книгам [48, 49, 96, 107, 157, 159, 160].

### § 36. НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n$ -ГО ПОРЯДКА, ПРОВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**182. Приведение однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной.** Так как однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами всегда интегрируется в элементарных функциях, коль скоро найдены все корни характеристического уравнения, то естественно поставить вопрос о возможности приведения линейного однород-



$$t = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx. \quad (2)$$

Всегда можно непосредственно по коэффициентам уравнения (1) узнать, приводится оно при помощи замены независимой переменной, т. е. при помощи подстановки вида (2), к уравнению с постоянными коэффициентами или нет. Убедимся в этом для уравнения второго порядка.

Сделаем в уравнении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3)$$

подстановку

$$t = c \int \sqrt{q(x)} dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} y_x' &= y_t' c \sqrt{q(x)}, \\ y_{x^2}'' &= y_{t^2}'' c^2 q(x) + y_t' \frac{cq'(x)}{2\sqrt{q(x)}}, \end{aligned}$$

то после выполнения подстановки получим

$$y_{t^2}'' c^2 q(x) + y_t' \frac{cq'(x)}{2\sqrt{q(x)}} + p(x) y_t' c \sqrt{q(x)} + q(x)y = 0$$

или

$$y_{t^2}'' + \frac{1}{c} \left( \frac{q'(x)}{2(q(x))^{3/2}} + \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} \right) y_t' + \frac{1}{c^2} y = 0.$$

Коэффициент при  $y_t'$  будет постоянным тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условию

$$\frac{q'(x)}{2(q(x))^{3/2}} + \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} = \text{const.}$$

Ниже рассматриваются два замечательных уравнения, приводимые к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной.

**183. Линейное уравнение Эйлера.** Пусть дано *линейное уравнение Эйлера*

$$D(y) \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (4)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — постоянные вещественные числа. Разрешая это уравнение относительно  $y^{(n)}$ , мы видим, что точка  $x=0$  является



особой точкой. Однако ясно, что все условия теоремы существования и единственности выполнены для каждого из интервалов  $(-\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ .

Построим общее решение уравнения Эйлера при положительных значениях  $x$ .\*

Сравнивая уравнение Эйлера с уравнением (1), мы видим, что у нас  $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$ . Поэтому, согласно (2),

$$t = c \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}} dx.$$

Беря  $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$  и опуская постоянную интегрирования, получаем подстановку

$$t = \ln x \quad \text{или} \quad x = e^t. \quad (5)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} y_{x'}' &= y_{t'}' t_{x'}' = y_{t'}' \frac{1}{x_{t'}'} = y_{t'}' e^{-t}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t} \\ y_{x^2}'' &= (y_{t^2}'' e^{-t} - y_{t'}' e^{-t}) e^{-t} = (y_{t^2}'' - y_{t'}') e^{-2t}, \\ y_{x^3}''' &= (y_{t^3}''' - 3y_{t^2}'' + 2y_{t'}') e^{-3t}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{x^n}^{(n)} &= (y_{t^n}^{(n)} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! y_{t'}') e^{-nt}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (6) видим, что производная  $k$ -го порядка от  $y$  по  $x$  выражается в виде произведения  $e^{-kt}$  на однородную линейную функцию от  $y_{t'}', y_{t^2}'', \dots, y_{t^n}^{(n)}$  с постоянными коэффициентами. Поэтому, подставляя (5) и (6) в (4) и замечая, что множители  $x^k = (e^t)^k$  взаимно уничтожаются с множителями  $e^{-kt}$ , мы получим однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Найдя общее решение этого уравнения и полагая в нем  $t = \ln x$ , мы получим общее решение уравнения Эйлера.

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0. \quad (7)$$

Полагая  $x = e^t$ , имеем  $y_{x'}' = y_{t'}' e^{-t}$ ,  $y_{x^2}'' = (y_{t^2}'' - y_{t'}') e^{-2t}$ . Подставляя в (7), получаем

---

\* Для построения общего решения при отрицательных значениях  $x$  достаточно заменить во всех выкладках  $x$  через  $-x$ .

$$e^{2t}(y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = 0$$

или

$$y''_{t^2} - 3y'_t + 2y = 0.$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

так что

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Следовательно, общим решением данного уравнения (7) будет

$$y = C_1 x + C_2 x^2. \quad (8)$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' - x y' + y = 0. \quad (9)$$

Подстановка  $x = e^t$  приводит это уравнение к виду

$$y''_{t^2} - 2y'_t + y = 0.$$

Далее, имеем:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Поэтому

$$y = e^t (C_1 + C_2 t)$$

или

$$y = x (C_1 + C_2 \ln x). \quad (10)$$

**Пример 3.** Возьмем уравнение

$$x^2 y'' - 3x y' + 5y = 0. \quad (11)$$

Полагая  $x = e^t$ , приходим к уравнению

$$y''_{t^2} - 4y'_t + 5y = 0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$  имеет комплексные сопряженные корни  $\lambda_1 = 2 + i$ ,  $\lambda_2 = 2 - i$ . Поэтому

$$y = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

или

$$y = x^2 (C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x). \quad (12)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Так как уравнение с постоянными коэффициентами, к которому приводится уравнение Эйлера, имеет частные решения вида  $e^{\lambda t}$  и  $t^m e^{\lambda t}$ , то уравнение Эйлера имеет частные решения вида  $x^\lambda$  и  $(\ln x)^m x^\lambda$ .

Отсюда вытекает следующий непосредственный способ интегрирования уравнения Эйлера.

Ищем решение в виде

$$y = x^\lambda. \quad (13)$$

Тогда

$$y^{(k)} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(k-1)) x^{\lambda-k} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Подставляя функцию (13) в левую часть уравнения Эйлера, получаем

$$D(x^\lambda) = P(\lambda)x^\lambda, \quad (14)$$

где

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-1)) + a_1\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-2)) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Из (14) ясно, что  $y = x^\lambda$  является частным решением уравнения Эйлера, тогда и только тогда, когда  $\lambda$  является корнем уравнения  $P(\lambda) = 0$  или

$$\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-1)) + a_1\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-2)) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения Эйлера.

Предположим, что все корни характеристического уравнения различны. Тогда уравнение Эйлера имеет  $n$  частных решений вида (13)

$$y_1 = x^{\lambda_1}, \quad y_2 = x^{\lambda_2}, \quad \dots, \quad y_n = x^{\lambda_n}. \quad (15)$$

Эти решения линейно независимы в интервале  $(0, \infty)$  (см. п. 160, пример 5). Если при этом все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  вещественны, то и решения (15) вещественны, так что общим решением уравнения Эйлера будет

$$y = \sum_{k=1}^n C_k x^{\lambda_k}.$$

Например, характеристическим уравнением для уравнения (7) будет

$$\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ . Следовательно, общее решение имеет вид (8).

Предположим теперь, что все корни характеристического уравнения по-прежнему различны, но среди них имеются комплексные. Тогда последние входят сопряженными парами. Найдём вещественные частные решения, соответствующие одной такой паре  $a \pm ib$ . Характеристическому числу  $a + ib$  соответствует комплексное решение

$$x^{a+ib} = x^a (\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)).$$

Поэтому функции

$$x^a \cos(b \ln x), \quad x^a \sin(b \ln x)$$

будут вещественными решениями. Они, очевидно, линейно независимы. Сопряжённое характеристическое число  $a - ib$  не порождает новых (т. е. линейно независимых с только что найденными) вещественных частных решений. В формуле общего решения паре характеристических чисел  $a \pm ib$  соответствует выражение вида

$$x^a (C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x)).$$

Например, для уравнения (11) характеристическим уравнением будет

$$\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ . Следовательно, общее решение имеет вид (12).

Пусть  $\lambda_1$  есть  $k$ -кратный корень характеристического уравнения, т. е.

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Дифференцируя тождество (14)  $m$  раз по  $\lambda$ , получаем

$$D(x^\lambda (\ln x)^m) = \sum_{v=0}^m C_m^v P^{(v)}(\lambda) x^\lambda (\ln x)^{m-v},$$

откуда ясно, что функции

$$x^{\lambda_1} (\ln x)^m \quad (m=0, 1, \dots, k-1) \quad (16)$$

являются частными решениями уравнения Эйлера, так что в случае кратных характеристических чисел наряду с решением вида  $x^{\lambda_1}$  уравнение Эйлера допускает и решения, содержащие  $\ln x$ .

Решения (16) линейно независимы в интервале  $(0, \infty)$  (см. п. 160, пример 5). Если при этом  $\lambda_1$  есть вещественный\* корень характеристического уравнения, то все решения (16) вещественны и в формуле общего решения этому корню будет соответствовать выражение

$$x^{\lambda_1} P_{k-1}(\ln x),$$

где  $P_{k-1}$  — полином  $(k-1)$ -й степени с произвольными коэффициентами.

Например, для уравнения (9) характеристическим уравнением будет

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Следовательно, общее решение имеет вид (10).

Нетрудно показать, что если  $a+ib$  и  $a-ib$  — комплексные характеристические числа кратности  $k$ , то в формуле общего решения им соответствует выражение

$$x^a (\cos(b \ln x) P_{k-1}(\ln x) + \sin(b \ln x) Q_{k-1}(\ln x)),$$

где  $P_{k-1}$  и  $Q_{k-1}$  — полиномы степени  $k-1$  с произвольными коэффициентами.

**З а м е ч а н и е 2.** Так как для уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью вида  $P_m(x)e^{\alpha x}$  можно найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, то то же самое имеет место для уравнения

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = P_m(\ln x) x^\alpha, \quad (17)$$

так что всякое уравнение вида (17) интегрируется в элементарных функциях.

**З а м е ч а н и е 3.** К уравнению Эйлера приводится уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = 0,$$

стоит только сделать подстановку  $ax+b=\tau$ . Полагая затем  $\tau=e^t$  или сразу  $ax+b=e^t$ , придем к уравнению с постоянными коэффициентами.

#### 184. Уравнение Чебышева. Рассмотрим уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (18)$$

Точки  $x=-1$  и  $x=1$  являются особыми точками этого уравнения. В каждом из интервалов  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, \infty)$  выполнены условия теоремы существования и единственности.

Построим общее решение уравнения (18) при значениях  $x$  в интервале  $(-1, 1)$ .

Формула (3) дает

$$t = c \int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}} dx.$$

Беря  $c = -\frac{1}{n}$  и опуская постоянную интегрирования, получаем подстановку

$$t = \arccos x \quad \text{или} \quad x = \cos t.$$

В силу этой подстановки имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_{x'}' &= y_{t'}' t_{x'}' = y_{t'}' \frac{1}{x_{t'}'} = -y_{t'}' \frac{1}{\sin t}, \\ y_{x^2}'' &= -\left( y_{t^2}'' \frac{1}{\sin t} - y_{t'}' \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) \left( -\frac{1}{\sin t} \right) = \\ &= y_{t^2}'' \frac{1}{\sin^2 t} - y_{t'}' \frac{\cos t}{\sin^3 t}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти значения  $y_{x'}$  и  $y_{x^2}''$  в уравнение (18) и заменяя  $x$  через  $\cos t$ , получим

$$y_{t^2}'' + n^2 y = 0.$$

Так как это уравнение имеет общее решение

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt,$$

то общим решением уравнения Чебышева будет

$$y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x.$$

Частное решение

$$y_1 = \cos n \arccos x \equiv T_n$$

при  $n$  — целом, большем 0, представляет собою полином  $n$ -й степени и\*, следовательно, не имеет особенностей в особых точках уравнения (18). Этот полином называется *полиномом Чебышева*.\*\*

\* В самом деле, приравнявая вещественные части в известной формуле Муавра получим

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \\ \cos n\varphi &= \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots + \\ &+ (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi + \dots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \varphi & (n \text{ четное}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos \varphi \sin^{n-1} \varphi & (n \text{ нечетное}) \end{cases} \end{aligned}$$

Полагая  $\varphi = \arccos x$  и замечая, что  $\sin \varphi$  входит в четных степенях, мы видим, что  $\cos n \arccos x$  есть полином  $n$ -й степени от  $x$ .

\*\* Полином Чебышева является частным случаем более общего полинома Якоби [138, т. III, ч. 2, с. 383—387].

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

#### § 37. ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШИМ ФОРМАМ

**185. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной при помощи замены искомой функции.** Для изучения свойств решений однородного линейного уравнения второго порядка и для нахождения решений часто бывает полезно предварительное приведение его к некоторым специальным формам.

Покажем, что уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

всегда можно преобразовать к виду, не содержащему первой производной, при помощи замены искомой функции.\*

Положим для этого (см. п. 158, замечание 3)

$$y = \alpha(x)z, \quad (2)$$

где  $z$  — новая искомая функция, а  $\alpha(x)$  — дважды дифференцируема в интервале непрерывности коэффициентов уравнения (1) и отлична от нуля в этом интервале. Подставляя (2) в (1), получаем

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' + p(x)(\alpha'(x)z + \alpha(x)z') + q(x)\alpha(x)z = 0$$

или

$$z'' + \left( \frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) \right) z' + \left( \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x) \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x) \right) z = 0. \quad (3)$$

Выберем  $\alpha(x)$  так, чтобы коэффициент при  $z'$  обратился в нуль

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0.$$

---

\* В следующем пункте мы докажем, что и при помощи замены независимой переменной можно избавиться в уравнении (1) от члена с первой производной.

В качестве  $\alpha(x)$  можно взять

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx}.$$

Тогда

$$\alpha'(x) = -\frac{p(x)}{2} e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx},$$

$$\alpha''(x) = \left( -\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} \right) e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx},$$

так что уравнение (3) примет вид

$$z'' + \left( -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x) \right) z = 0.$$

Таким образом, *однородная линейная замена искомой функции*

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z$$

*приводит уравнение (1) к виду*

$$z'' + Q(x)z = 0, \quad (4)$$

где

$$Q(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Функция  $Q(x)$  называется *инвариантом* уравнения (1).

Ясно, что если уравнение (4) интегрируется в квадратурах, то тем самым и уравнение (1) интегрируется в квадратурах. Например, это будет иметь место, если  $Q(x) = c$  или  $Q(x) = \frac{c}{(x-a)^2}$ , ибо в этих случаях

уравнение (1) приведет к уравнению с постоянными коэффициентами или к линейному уравнению Эйлера.

Заметим еще, что для уравнения с постоянными коэффициентами инвариант представляет собою взятый с противоположным знаком дискриминант характеристического уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (x > 0). \quad (5)$$

Здесь  $p(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$ , так что

$$Q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}. \quad (6)$$

Таким образом, уравнение Бесселя подстановкой

$$y = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

приводится к виду

$$z'' + \left(1 + \frac{a}{x^2}\right)z = 0,$$

где  $a = \frac{1}{4} - n^2$ . В частности, если  $n = \pm \frac{1}{2}$ , то соответствующее уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (7)$$

подстановкой  $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$  приводится к уравнению

$$z'' + z = 0. \quad (8)$$

Так как  $z_1 = \sin x$ ,  $z_2 = \cos x$  — фундаментальная система решений этого уравнения, то уравнение (7) будет иметь в интервале  $(0, \infty)$  фундаментальную систему решений

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}. \quad (9)$$

Второе из этих решений имеет в особой точке  $x=0$  ту особенность, что оно стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow 0$ .

Умножая решения (9) на  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ , получим так называемые *функции Бесселя*  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  и  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Общее решение уравнения (7) в области

$$0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty$$

имеет вид

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$



**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0. \quad (10)$$

Так как  $Q(x) = 1$ , то подстановка  $y = \frac{1}{x} z$  приводит уравнение (10) к уравнению (8). Поэтому фундаментальной системой решений уравнения (10) в каждом из интервалов  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$ , не содержащих особую точку  $x = 0$ , будет

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Первое из этих решений имеет конечное предельное значение при  $x \rightarrow 0$ , второе неограничено при  $x \rightarrow 0$ .

Общим решением уравнения (10) в каждой из областей

$$-\infty < x < 0, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty$$

и

$$0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty$$

будет

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

**З а м е ч а н и е.** Если два уравнения

$$y'' + p_1(x) y' + q_1(x) y = 0 \quad (11)$$

и

$$z'' + p_2(x) z' + q_2(x) z = 0 \quad (12)$$

имеют один и тот же инвариант  $Q(x)$ , то они приводятся друг к другу при помощи однородной линейной замены искомой функции  $y = uz$ , где  $u = u(x)$ .

В самом деле, уравнения (11) и (12) приводятся к одному и тому же уравнению

$$w'' + Q(x)w = 0$$

соответственно при помощи подстановок  $y = \alpha_1 w$  и  $z = \alpha_2 w$ , где

$$\alpha_i = e^{-\int \frac{p_i(x)}{2} dx} \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда следует, что

$$y = e^{\int \frac{p_2(x) - p_1(x)}{2} dx} z \quad \left( u = e^{\int \frac{p_2(x) - p_1(x)}{2} dx} \right). \quad (13)$$

Эта подстановка и приводит уравнение (11) к уравнению (12).

Обратно, если уравнения (11) и (12) приводятся друг к другу при помощи подстановки вида  $y = u(x)z$ , то их инварианты равны (почему?).

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение Бесселя (5) и уравнение

$$z'' + \frac{a}{x} z' + z = 0, \quad (14)$$

где  $a = \text{const} \neq 0$ . Покажем, что уравнение Бесселя (5) приводится подстановкой вида  $y = u(x)z$  к уравнению (14) при соответствующем выборе  $a$ .

Инвариант уравнения Бесселя (5) имеет вид (6). Подсчитывая инвариант уравнения (14), получим

$$Q_1(x) = 1 + \frac{-\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}}{x^2}.$$

Эти инварианты будут равны, если  $-\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} = \frac{1}{4} - n^2$ , откуда  $a_{1,2} = 1 \mp 2n$ .

Таким образом, уравнение Бесселя (5) можно привести подстановкой вида  $y = u(x)z$ , например, к уравнению

$$z'' + \frac{2n+1}{x} z' + z = 0. \quad (15)$$

Найдем теперь функцию  $u(x)$ . Имеем в силу (13)

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{2} \left( \frac{2n+1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx} = x^n.$$

Итак, подстановка

$$y = x^n z$$

приводит уравнение Бесселя (5) к уравнению (15).

**186. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной, при помощи замены независимой переменной.** Рассмотрим снова уравнение (1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Покажем, что существует замена независимой переменной

$$t = \psi(x), \quad (16)$$

приводящая уравнение (1) к виду, не содержащему первой производной. Относительно искомой функции  $\psi(x)$  будем предполагать, что она непрерывно дифференцируема в интервале непрерывности коэффициентов уравнения (1) и что ее первая производная отлична от нуля в этом интервале. Имеем

$$y_x' = y_t' \psi'(x), \quad y_{x^2}'' = y_{t^2}'' [\psi'(x)]^2 + y_t' \psi''(x).$$

где  $x = x(t)$  есть функция, определяемая из (16). Подставляя в уравнение (1), получим

$$[\psi'(x)]^2 y_{t^2}'' + (\psi''(x) + p(x)\psi'(x)) y_t' + q(x)y = 0.$$

Приравняем нулю коэффициент при  $y_t'$ :

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) = 0,$$

откуда

$$\psi'(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Полагая  $C=1$ , интегрируя и опуская произвольную постоянную интегрирования, найдем

$$\psi(x) = \int e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Таким образом, подстановка

$$t = \int e^{-\int p(x)dx} dx \quad (17)$$

приводит уравнение (1) к виду

$$y_{t^2}'' + q(x)e^{2\int p(x)dx} y = 0 \quad (x = x(t)),$$

не содержащему первой производной от искомой функции.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0.$$

Здесь подстановка (17) примет вид

$$t = \int e^{-\int \frac{1}{2x} dx} = 2\sqrt{x}.$$

Имеем

$$y_x' = y_t' \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_{x^2}'' = y_{t^2}'' \frac{1}{x} - \frac{1}{2} y_t' \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Поэтому рассматриваемое уравнение приведет к виду

$$y_{t^2}'' - y = 0.$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной  $x$ , получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что все решения конечны в особой точке  $x=0$ , т. е. имеют конечные пределы при  $x \rightarrow 0$ .

**187. Приведение к самосопряженному виду.** Однородное линейное уравнение второго порядка, в котором коэффициент при  $y'$  равен производной от коэффициента при  $y''$ , т. е. уравнение вида

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0 \quad (18)$$

или

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  — функции от  $x$ , называется *самосопряженным уравнением* второго порядка.

Покажем, что *всякое однородное линейное уравнение второго порядка*

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (19)$$

*коэффициенты которого непрерывны в интервале  $(a, b)$ , причем функция  $p_0(x)$  не обращается в нуль и непрерывно дифференцируема в  $(a, b)$ , всегда можно привести к самосопряженному виду умножением на некоторую функцию от  $x$ .*

В самом деле, умножим обе части уравнения (19) на некоторую функцию  $\mu = \mu(x)$ :

$$p_0(x)\mu(x)y'' + p_1(x)\mu(x)y' + p_2(x)\mu(x)y = 0.$$

Выберем  $\mu(x)$  так, чтобы

$$p_1(x)\mu(x) = (p_0(x)\mu(x))'.$$

Решая это дифференциальное уравнение относительно  $\mu(x)$ , имеем

$$p_0(x)\mu'(x) = (p_1(x) - p_0'(x))\mu(x),$$

откуда

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}. \quad (20)$$

Умножая обе части уравнения (19) на эту функцию  $\mu(x)$ , получим

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} y = 0. \quad (21)$$

Это — *самосопряженное уравнение*.

Обозначим

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} = p(x), \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} = q(x).$$

Тогда (21) примет вид

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$$

или

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны в  $(a, b)$ . Кроме того,  $p(x)$  непрерывно дифференцируема и положительна в  $(a, b)$ .\*

Очевидно, что уравнение

$$y'' + Q(x)y = 0 \tag{22}$$

является самосопряженным. Самосопряженное уравнение общего вида (18) всегда можно привести к виду (22) заменой независимой переменной

$$t = \int \frac{1}{p(x)} dx.$$

Выполняя эту замену в уравнении (18), получим

$$y''_t + p(x)q(x)y = 0 \quad (x = x(t)),$$

т. е. уравнение вида (22).

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{23}$$

Точки  $x = -1$  и  $x = 1$  являются особыми точками этого уравнения. Мы будем рассматривать уравнение Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ . Ясно, что это уравнение является самосопряженным, причем  $p(x) = 1-x^2 > 0$  в интервале  $(-1, 1)$  и (22) можно записать в виде

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0.$$

Самосопряженным будет и более общее уравнение

$$((1-x^2)y')' + \lambda y = 0,$$

где  $\lambda$  — параметр.

**Пример 2.** Пусть дано уравнение Бесселя (5)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Будем рассматривать его в интервале  $(0, \infty)$ . Это уравнение не самосопряженное. Приведем его к самосопряженному виду.

---

\* Приведение уравнения (19) к самосопряженному виду иногда дает возможность проинтегрировать его в конечном виде (см., например, [18]).

Пользуясь формулой (20), находим

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}.$$

Поэтому уравнение Бесселя в самосопряженной форме запишется так:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

или

$$(xy')' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0.$$

Здесь  $p(x) = x > 0$  в рассматриваемом интервале  $(0, \infty)$ .

**Пример 3.** Уравнение Чебышева (см. п. 184)

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

не является самосопряженным. Умножая обе части его на функцию

$$\mu(x) = \frac{1}{1-x^2} e^{\int \frac{-x}{1-x^2} dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

получим

$$\sqrt{1-x^2} y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

или

$$(\sqrt{1-x^2} y')' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0.$$

Здесь  $p(x) = \sqrt{1-x^2} > 0$  в интервале  $(-1, 1)$ .

Рассмотрим самосопряженное уравнение

$$(p(x)y')' + \lambda q(x)y = 0, \quad (24)$$

содержащее параметр  $\lambda$ . Предположим, что  $p(x)$  непрерывно дифференцируема и отлична от нуля в  $(a, b)$ , а  $q(x)$  непрерывна и положительна в  $(a, b)$ . Поставим следующую задачу Штурма — Лиувилля. Найти значения  $\lambda$ , при которых уравнение (24) имеет не нулевые решения, определенные внутри интервала  $(a, b)$  и удовлетворяющие краевым условиям

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (25)$$

С частным случаем этой задачи мы уже встречались в п. 175, где в примере 8 рассмотрено уравнение вида (24), в котором  $p(x) \equiv 1$ ,  $q(x) \equiv 1$ , а краевые условия заданы в точках  $x=0$  и  $x=\pi$ .

Так же, как и в указанном частном случае, те значения  $\lambda$ , при которых поставленная задача Штурма — Лиувилля имеет ненулевые решения, называются *характеристическими (собственными) числами*, а соответствующие им решения — *характеристическими (собственными) функциями задачи Штурма — Лиувилля*.

Покажем, что рассматриваемая задача Штурма — Лиувилля не имеет нулевого характеристического числа. Действительно, при  $\lambda=0$  уравнение (24) принимает вид

$$(p(x)y')' = 0.$$

Интегрируя его, имеем

$$p(x)y' = C_1, \quad y = C_1 \int_a^x \frac{dx}{p(x)} + C_2.$$

Удовлетворяя краевым условиям (25), получим

$$C_2 = 0, \quad C_1 \int_a^b \frac{dx}{p(x)} = 0,$$

откуда  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = 0$ , так что  $y \equiv 0$ , что и доказывает наше утверждение.

Можно доказать, что не существует отрицательных характеристических чисел [144, § 19]. Таким образом, поставленная задача Штурма — Лиувилля (24), (25) может иметь только положительные характеристические числа (так же, как и задача Штурма — Лиувилля, рассмотренная в примере 8 п. 175, где  $\lambda_n = n^2$ ,  $n > 0$ , целое). Но имеются ли они? Общая теория краевых задач дает на этот вопрос положительный ответ.

А именно можно доказать, что *характеристические числа существуют и образуют так же, как и в упомянутом выше частном случае, бесконечное дискретное множество, расположенное на положительной части оси  $O\lambda$ , образуя при этом монотонно возрастающую последовательность*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (\lambda_n > 0),$$

*сходящуюся к  $\infty$ , и что каждому характеристическому числу  $\lambda_n$  соответствует ровно одна характеристическая функция  $y_n$ , определенная с точностью до постоянного множителя и обращающаяся в нуль внутри  $(a, b)$  ровно  $n-1$  раз [144, § 24].*

Покажем, что характеристические функции, соответствующие неравным между собой характеристическим числам, ортогональны с весом (с весовой функцией)  $q(x)$  на интервале  $[a, b]$ , т. е.

$$\int_a^b q(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m).$$

При доказательстве этого утверждения мы существенно воспользуемся самосопряженностью рассматриваемого уравнения (24). Обратимся к тождествам

$$\begin{aligned}(p(x)y_n')' + \lambda_n q(x)y_n &= 0, \\ (p(x)y_m')' + \lambda_m q(x)y_m &= 0\end{aligned}$$

при  $a < x < b$ . Умножим обе части первого из них на  $y_m$ , второго — на  $y_n$ , вычтем почленно второе из первого и проинтегрируем по интервалу  $[a, b]$ . Будем иметь

$$\int_a^b (y_m(p(x)y_n')' - y_n(p(x)y_m')') dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q(x)y_n y_m dx.$$

Интегрируя левую часть по частям, имеем

$$\begin{aligned}y_m p(x)y_n' \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y_n' y_m' dx - y_n p(x)y_m' \Big|_a^b + \int_a^b p(x)y_m' y_n' dx = \\ = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b q(x)y_n y_m dx.\end{aligned}$$

Здесь левая часть в силу краевых условий (25) равна нулю. Так как  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , то отсюда и следует доказываемое соотношение ортогональности характеристических функций.

### § 38. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

**188. Построение общего решения однородного линейного уравнения второго порядка в случае, когда известно одно частное решение.** Пусть дано уравнение

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого непрерывны в некотором интервале  $(a, b)$ , и нам известно одно его ненулевое частное решение  $y_1$ . Тогда, согласно п. 169, подстановка

$$y = y_1 \int u dx, \quad (2)$$

где  $u$  — новая неизвестная функция, приведет данное уравнение к однородному линейному уравнению первого порядка и, следовательно, уравнение (1) интегрируется в квадратурах



Выведем формулу общего решения. Подставляя (2) в уравнение (1), имеем

$$\begin{array}{l|l} q(x) & y = y_1 \int u \, dx \\ p(x) & y' = y_1' \int u \, dx + y_1 u \\ 1 & y'' = y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' \end{array}$$


---


$$L(y_1) \int u \, dx + (2y_1' + p(x)y_1)u + y_1 u' = 0.$$

Отсюда, так как  $L(y_1) \equiv 0$ , получаем

$$y_1 u' + (2y_1' + p(x)y_1)u = 0$$

или

$$u' + \left( \frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) u = 0.$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, найдем

$$u = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx}.$$

Полагая  $C=1$  и подставляя полученное значение  $u$  в формулу (2), получим, что второе частное решение уравнения (1) дается формулой

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx. \quad (3)$$

Таким образом, фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1, y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx,$$

и искомым общим решением в области

$$a < x < b, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty$$

будет

$$y = y_1 \left( C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx \right).$$

Из сказанного следует, что для интегрирования однородного линейного уравнения второго порядка достаточно уметь найти только одно (ненулевое) частное решение его.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Это — уравнение Эйлера. Точка  $x=0$  — особая точка. Очевидно,  $y_1=x$  — частное решение, а тогда

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2}{x} dx}}{x^2} dx = x^2$$

(произвольную постоянную интегрирования опускаем), так что фундаментальной системой решений в каждом из интервалов  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  будет

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2.$$

Следовательно,

$$y = x(C_1 + C_2 x)$$

является общим решением в каждой из областей:

$$\begin{aligned} -\infty < x < 0, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty; \\ 0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что наличие особой точки  $x=0$  хотя и не помешало голоморфности в этой точке функций  $x$  и  $x^2$ , входящих в состав фундаментальной системы решений, но ограничивает произвол выбора (предельных) начальных значений искомой функции и ее производной в точке  $x=0$ . В самом деле, из формулы общего решения видно, что не существует решения  $y=y(x)$ , обладающего свойством

$$y(x) \rightarrow y_0 \neq 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0.$$

**Пример 2.** Найти фундаментальную систему решений и общее решение уравнения

$$y'' + xy' - y = 0.$$

Нетрудно догадаться, что  $y_1=x$  — частное решение этого уравнения. Вторым частным решением будет

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$x, \quad x \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx,$$

а общим решением во всем пространстве  $(x, y, y')$  будет

$$y = x \left( C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx \right).$$

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - (a^2(x) + a'(x))y = 0. \quad (4)$$

Это уравнение имеет частное решение

$$y_1 = e^{\int a(x) dx}.$$

Поэтому

$$y_2 = e^{\int a(x) dx} \int e^{-2 \int a(x) dx} dx.$$

Общим решением уравнения (4) будет

$$y = e^{\int a(x) dx} \left( C_1 + C_2 \int e^{-2 \int a(x) dx} dx \right).$$

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \quad (5)$$

Так же как и для уравнения Лежандра общего вида (см. п. 187, пример 1), точки  $x = -1$  и  $x = 1$  являются особыми точками данного уравнения.

Одно частное решение уравнения (5) можно угадать. Это будет  $y_1 = x$ . Тогда

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{(1-x^2)x^2} = x \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Следовательно,

$$y = x \left( C_1 + C_2 \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \right)$$

есть общее решение уравнения (5) в области

$$-1 < x < 1, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty.$$

Заметим, что только одно из линейно независимых частных решений  $y_1$  и  $y_2$  остается конечным, когда  $x$  стремится к особой точке  $x = -1$  или  $x = 1$ . Это — частное решение  $y_1$ .

Можно показать, что этим свойством обладает и уравнение Лежандра общего вида, приведенное в предыдущем пункте, в предположении, что  $\lambda$  — целое  $\lambda > 0$  [39, т. 2, с. 373, 374].

**З а м е ч а н и е.** Формула (3) полезна не только в тех случаях, когда мы знаем одно частное решение в виде элементарной функции. Например, при изучении аналитической структуры линейно независимых частных решений однородного линейного уравнения второго порядка эта формула дает возможность по заданной аналитической структуре одного из них установить аналитическую структуру другого (см. п. 191).

**189. Связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати.** Порядок уравнения

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6)$$

всегда можно понизить на единицу, если воспользоваться общим приемом понижения порядка уравнений, однородных относительно искомой функции и ее производных, изложенным в п. 98.

Введем новую неизвестную функцию  $z$ , положив

$$\frac{y'}{y} = z. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{array}{l|l} q(x) & y = y \\ p(x) & y' = yz \\ 1 & y'' = y(z^2 + z') \end{array} \quad \hline y(z^2 + z' + p(x)z + q(x)) = 0.$$

Сокращая на  $y$ , получим уравнение Риккати.

Таким образом, *подстановка (7) приводит любое однородное линейное уравнение второго порядка к уравнению Риккати.* В частности, уравнение вида

$$y'' + q(x)y = 0$$

приводится к каноническому уравнению Риккати

$$z' = -z^2 - q(x).$$

Обратно, всякое уравнение Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

*можно привести к однородному линейному уравнению второго порядка.* Действительно, положив в этом уравнении

$$y = -\frac{1}{P(x)}z,$$

получим, согласно п. 46, уравнение Риккати, которое подстановкой  $\frac{u'}{u} = z$  приводится к уравнению типа (6).

Таким образом, подстановка

$$y = -\frac{1}{P(x)} \frac{u'}{u} \quad (8)$$

приводит любое уравнение Риккати к однородному линейному уравнению второго порядка вида (6).

Установленная связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати имеет важное значение в том отношении, что она дает возможность заменить изучение свойств решений одного из этих уравнений изучением свойств решений другого.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение Эйри

$$y'' - xy = 0.$$

Найдем соответствующее уравнение Риккати. Полагая  $y' = yz$ ,  $z = z(x)$ , имеем

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z').$$

Подставляя в уравнение Эйри и сокращая на  $y$ , получим искомое уравнение Риккати

$$z' = -z^2 + x.$$

**Пример 2.** Дано уравнение Риккати

$$y' = x^2 + y^2.$$

Найдем соответствующее однородное линейное уравнение второго порядка. Положим, согласно формуле (8),

$$y = -\frac{u'}{u},$$

где  $u$  — новая неизвестная функция от  $x$ . Тогда после упрощений получим

$$u'' + x^2 u = 0.$$

Это уравнение не интегрируется ни в элементарных функциях, ни в квадратурах от элементарных функций (почему?).

### § 39. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ И ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

**190. Представление решений однородного линейного уравнения второго порядка в окрестности обыкновенной точки в виде степенных рядов.** В этом параграфе мы рассмотрим более подробно, чем это сделано в главе пятой, вопрос об аналитическом представлении решений однородных линейных уравнений в окрестности точки, в которой коэффици-

енты уравнения голоморфны,\* а также приведем начальные сведения относительно аналитического представления решений в окрестности так называемой регулярной особой точки, понятие о которой будет дано ниже. Здесь в качестве аналитического аппарата, представляющего решения, используются обобщенные степенные ряды и ряды несколько более общего вида.

В указанных случаях мы дадим конструктивный способ построения фундаментальной системы решений в окрестности заданной точки и соответствующего общего решения. Следуя терминологии, принятой в аналитической теории дифференциальных уравнений, будем называть точку  $x_0$  *обыкновенной*, если все коэффициенты уравнения голоморфны в этой точке; в противном случае точку  $x_0$  будем называть *особой* точкой дифференциального уравнения.

Рассмотрим сначала вопрос об аналитическом представлении решений в окрестности обыкновенной точки.

Пусть дано уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

в котором коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  голоморфны в точке  $x = x_0$ , так что

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k,$$

причем ряды справа сходятся в области  $|x-x_0| < \rho$ .

Тогда, согласно теореме Коши, доказанной в п. 151, существует единственное решение, голоморфное в точке  $x = x_0$  и принимающее в этой точке вместе с первой производной любые наперед заданные начальные значения  $y_0$  и  $y_0'$ , т. е. решение вида

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \quad (2)$$

причем ряд справа заведомо сходится в области  $|x-x_0| < \rho$ .

В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда коэффициенты уравнения (1) являются либо полиномами, либо отношениями полиномов.

В первом случае мы получаем решение в виде степенного ряда, сходящегося при всех значениях  $x$ , во втором случае радиус сходимости степенного ряда, представляющего решение, не меньше расстояния от точки  $x = x_0$  до ближайшей из точек, в которых знаменатели коэффици-

---

\* Мы говорим, что  $f(x)$  голоморфна в точке  $x_0$ , если она представима в некоторой окрестности  $|x-x_0| < \rho$  этой точки степенным рядом (см. п. 144).

ентов уравнения, рассматриваемые как функции комплексной переменной  $x$ , обращаются в нуль.

Коэффициенты  $c_k$  в формуле (2) определяются единственным образом, если заданы  $y_0$  и  $y_0'$ . Их можно определить методом неопределенных коэффициентов, подставляя ряд (2) в уравнение (1) и приравнявая нулю коэффициенты при всех степенях  $x - x_0$  в левой части полученного равенства.

Принципиальная возможность определения коэффициентов  $c_k$  этим способом обеспечена теоремой Коши для линейного уравнения  $n$ -го порядка, доказанной в п. 151 путем сведения его к линейной системе. Здесь мы проведем сами вычисления непосредственно для однородного линейного уравнения второго порядка (1).

Не умаляя общности, будем считать, что  $x_0 = 0$ , т. е. будем предполагать, что

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$y'' + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \cdot y' + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \cdot y = 0. \quad (1')$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0'. \quad (2')$$

Подставляя (2') в (1'), имеем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Перемножаем степенные ряды в двух последних слагаемых, пользуясь при этом известной формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \right) x^k.$$

Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k p_{k-n}(n+1)c_{n+1} \right) x^k + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k q_{k-n}c_n \right) x^k = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при  $x^k$ , имеем

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{n=0}^k p_{k-n}(n+1)c_{n+1} + \sum_{n=0}^k q_{k-n}c_n = 0.$$

Полагая  $k=0, 1, 2, \dots$ , получаем

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 c_2 + p_0 c_1 + q_0 c_0 &= 0, \\ 3 \cdot 2 c_3 + p_1 c_1 + p_0 2 c_2 + q_1 c_0 + q_0 c_1 &= 0, \\ \dots &\dots \\ k(k-1)c_k + \sum_{n=0}^{k-2} p_{k-n-2}(n+1)c_{n+1} + \sum_{n=0}^{k-2} q_{k-n-2}c_n &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Из этих уравнений, вследствие того что коэффициент при  $c_k$  заведомо отличен от нуля, мы можем выразить последовательно и притом единственным образом все коэффициенты  $c_k$  через коэффициенты разложений  $p(x)$  и  $q(x)$  и коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$ , которые остаются произвольными. Но  $c_0=y_0$ ,  $c_1=y_0'$ , так что мы снова видим, что можно строить решение однородного линейного уравнения второго порядка с любыми начальными значениями искомой функции и ее первой производной.

Полагая сначала  $c_0=c_0^{(1)}$ ,  $c_1=c_1^{(1)}$ , затем  $c_0=c_0^{(2)}$ ,  $c_1=c_1^{(2)}$  и выбирая при этом числа  $c_0^{(1)}$ ,  $c_1^{(1)}$ ,  $c_0^{(2)}$ ,  $c_1^{(2)}$  так, чтобы

$$\begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_0^{(2)} \\ c_1^{(1)} & c_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

мы получим два частных решения  $y_1$  и  $y_2$ . Эти частные решения образуют фундаментальную систему решений в интервале  $|x| < \rho$  (почему?). В частности, полагая сначала  $c_0=1$ ,  $c_1=0$ , а затем  $c_0=0$ ,  $c_1=1$ , мы получим фундаментальную систему решений, нормированную в точке  $x=0$ .

Так как знание фундаментальной системы решений  $y_1$ ,  $y_2$  дает возможность построить общее решение по известной формуле

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, то задача интегрирования уравнения (1) в окрестности обыкновенной точки  $x=0$  решена.



Таким образом, мы приходим к следующему способу интегрирования уравнения (1') при помощи степенных рядов.

Для того чтобы проинтегрировать однородное линейное уравнение (1') при помощи степенных рядов, нужно *подставить ряд (2') с неопределенными коэффициентами  $c_k$  в уравнение (1') и, приравнявая нулю коэффициенты при всех степенях  $x$  в левой части полученного равенства, найти значения этих коэффициентов. При этом коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$  останутся произвольными, так что мы получим сразу общее решение (в форме Коши).*

На деле, однако, оказывается удобнее строить сначала фундаментальную систему решений. Обычно строят фундаментальную систему решений  $y_1, y_2$ , нормированную в точке голоморфности  $x=0$ .

Для уравнения (1) в окрестности  $|x-x_0|<\rho$  точки голоморфности  $x_0$  обычно строят в виде степенных рядов фундаментальную систему решений  $y_1, y_2$ , нормированную в этой точке,

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} (x-x_0)^k, \\ y_2 &= x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} (x-x_0)^k, \end{aligned} \tag{3}$$

определяя коэффициенты  $c_k^{(1)}$  и  $c_k^{(2)}$  методом неопределенных коэффициентов (см. ниже пример 1), после чего получают общее решение в области

$$|x-x_0|<\rho, \quad |y|<\infty, \quad |y'|<\infty$$

по известной формуле.

Коэффициенты  $c_k^{(1)}$  и  $c_k^{(2)}$  можно также найти методом последовательного дифференцирования данного уравнения (1), представив фундаментальную систему решений, нормированную в точке  $x_0$ , в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_1^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \\ y_2 &= x-x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_2^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \end{aligned}$$

и находя  $y_1^{(k)}(x_0)$  ( $k \geq 2$ ) из тождества

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad (|x-x_0|<\rho)$$

Отметим в заключение, что, разыскивая решения в виде степенных рядов, мы иногда можем получить решения в виде полиномов, если хотя один из рядов (3) оборвется (см. ниже пример 3). Некоторые из таких полиномов обладают рядом замечательных свойств, входя в класс специальных функций (например, полиномы Чебышева и Лежандра).

$$y'' - xy = 0.$$
$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} x^k,$$

$$y_2 = x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} x^k.$$

Подставляя ряд для  $\psi_1$  в уравнение Эйри, получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k^{(1)}x^{k-2}-x\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(1)}x^k\right)=0.$$

$$x^0: \quad 2 \cdot 1 c_2^{(1)} = 0,$$

$$x^1: \quad 3 \cdot 2c_3^{(1)} - 1 = 0,$$

$$x^2: \quad 4 \cdot 3c_4^{(1)} = 0,$$

$$x^3: \quad 5 \cdot 4c_5^{(1)} - c_2^{(1)} = 0.$$

• • • • •

$$x^{k-2}: \quad k(k-1)c_k^{(1)} - c_{k-3}^{(1)} = 0.$$

$$c_2^{(1)}=0, \quad c_3^{(1)}=\frac{1}{3!}, \quad c_4^{(1)}=0, \quad c_5^{(1)}=0, \quad c_6^{(1)}=\frac{c_3^{(1)}}{6 \cdot 5}=\frac{1}{3! \cdot 5 \cdot 6}, \dots,$$

$$c_{3k}^{(1)} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1)3k}, \dots$$

$$y_1 = A_i(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k} + \dots$$

Аналогично найдем

$$y_2 = B_i(x) = x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k(3k+1)} + \dots$$

Функции  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$  называются *функциями Эйри*. Эти функции являются, как уже сказано выше, целыми функциями от  $x$ . В последние годы функции Эйри приобретают все большее теоретическое и прикладное значение [50; 138, т. III, ч. 2, с. 428—431; 163].

Общим решением уравнения Эйри во всем пространстве  $(x, y, y')$  будет

$$y = C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x).$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + xy' + y = 0.$$

Построим фундаментальную систему решений  $y_1, y_2$ , разыскивая первую функцию  $y_1$  с начальными условиями  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$  в виде

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_1^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Воспользуемся для нахождения  $y_1^{(k)}(0)$  ( $k \geq 2$ ) методом последовательного дифференцирования. Так как  $y_1$  есть решение данного уравнения, то имеет место тождество

$$y_1'' = -xy_1' - y_1.$$

Полагая в нем  $x=0$ , имеем

$$y_1''(0) = -y_1(0) = -1.$$

Дифференцируя тождество для  $y_1$ , получим

$$y_1''' = -2y_1' - xy_1''.$$

Полагая здесь  $x=0$ , находим

$$y_1'''(0) = 0.$$

Дифференцируя еще раз, имеем

$$y_1^{(4)} = -3y_1'' - xy_1'''.$$

Полагая  $x=0$ , получим

$$y_1^{(4)}(0) = 3.$$

Продолжая этот процесс, придем к тождеству

$$y_1^{(k)} = -(k-1)y_1^{(k-2)} - xy_1^{(k-1)}.$$

Полагая  $x=0$ , получим

$$y_1^{(k)}(0) = -(k-1)y_1^{(k-2)}(0).$$

Следовательно,

$$y_1^{(2m+1)}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} y_1^{(2m)}(0) &= -(2m-1)y_1^{(2m-2)}(0) = + (2m-1)(2m-3)y_1^{(2m-4)}(0) = \\ &= (-1)^m (2m-1)(2m-3) \dots 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \dots + (-1)^m \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}x^{2m} + \dots = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Так как первое решение оказалось элементарной функцией, то второе решение  $y_2$  можно найти в квадратурах, пользуясь формулой (3) п. 188. Получим

$$y_2 = e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Это решение, так же как и решение  $y_1$ , является целой функцией от  $x$ .  
Общим решением данного уравнения во всем пространстве будет

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( C_1 + C_2 \int e^{\frac{x^2}{2}} dx \right).$$

**Пример 3.** Дано уравнение

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0,$$

где  $a$  — некоторое вещественное число.

Построить в виде степенных рядов фундаментальную систему решений  $y_1$ ,  $y_2$ , нормированную в точке  $x=0$ .

Так как данное уравнение можно записать в виде

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{a^2}{1-x^2}y = 0,$$

то ясно, что точка  $x=0$  есть обыкновенная точка, т. е. точка голоморфности коэффициентов этого уравнения. Поэтому существует единственная фундаментальная система решений, нормированная в точке  $x=0$  и состоящая из функций, голоморфных в точке  $x=0$ , причем ряды, представляющие эту фундаментальную систему решений, заведомо сходятся при  $|x| < 1$  (почему?). Ниже мы увидим, что радиус сходимости этих рядов равен точно единице.

Найдем  $y_1$ . Имеем

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} x^k.$$

Подставляя в данное дифференциальное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k^{(1)}x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k^{(1)}x^k - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} kc_k^{(1)}x^k + a^2 \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)}x^k \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$a^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (a^2 - k^2)c_k^{(1)}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}^{(1)}x^k = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при всех степенях  $x$ , имеем

$$\begin{aligned}x^0: \quad a^2 + 2 \cdot 1 c_2^{(1)} &= 0, \quad c_2^{(1)} = -\frac{a^2}{2}, \\x^1: \quad 3 \cdot 2 c_3^{(1)} &= 0, \quad c_3^{(1)} = 0, \\&\dots \dots \dots \\x^k: \quad (a^2 - k^2) c_k^{(1)} + (k+2)(k+1) c_{k+2}^{(1)} &= 0 \quad (k \geq 2), \\c_{k+2}^{(1)} &= -\frac{(a^2 - k^2)}{(k+2)(k+1)} c_k^{(1)} \quad (k \geq 2).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}c_{2k+1} &= 0 \quad \text{при всех } k, \\c_4 &= -\frac{a^2 - 2^2}{4 \cdot 3} c_2^{(1)} = \frac{a^2(a^2 - 2^2)}{4!}, \quad c_6 = -\frac{a^2(a^2 - 2^2)(a^2 - 4^2)}{6!}, \dots, \\c_{2k} &= (-1)^k \frac{a^2(a^2 - 2^2) \dots (a^2 - (2k-2)^2)}{(2k)!} \quad (k \geq 1).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^2(a^2 - 2^2) \dots (a^2 - (2k-2)^2)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Если  $a$  есть четное число  $2m$ , то ряд справа обрывается, обращаясь в полином степени  $2m$ . Это решение не имеет особенностей в особых точках  $x = \pm 1$  данного уравнения.

Исследуя на сходимость ряд, представляющий  $y_1$  в случае  $a \neq 2m$ , по признаку Даламбера, убеждаемся, что он абсолютно сходится при  $|x| < 1$  и расходится при  $|x| > 1$ , так что радиус сходимости ряда, представляющего  $y_1$ , равен единице.

Второе решение  $y_2$  ищем в виде

$$y_2 = x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} x^k.$$

Находя коэффициенты  $c_k^{(2)}$  методом неопределенных коэффициентов, получим

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(a^2 - 1)(a^2 - 3^2) \dots (a^2 - (2k-1)^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Если  $a = 2m+1$ , то ряд обратится в полином степени  $2m+1$ . При  $a \neq 2m+1$  ряд имеет радиус сходимости, равный единице.

Из изложенного выше следует, что уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

где  $n$  — целое положительное число, имеет хоть одно решение в виде полинома, в чем мы уже убедились в п. 184 путем приведения уравнения Чебышева к уравнению с постоянными коэффициентами.

Заметим, что найденная выше фундаментальная система решений  $y_1, y_2$  выражается через элементарные функции  $\cos(\arccos x)$  и  $\sin(\arccos x)$ , ибо последние тоже образуют фундаментальную систему решений данного уравнения, в чем легко убедиться, приведя это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой  $x = \cos t$  (см. п. 184).

**З а м е ч а н и е 1.** Изложенный метод интегрирования применим и к линейным однородным уравнениям  $n$ -го порядка с той лишь разницей, что в этом случае вместо двух произвольных коэффициентов  $c_0$  и  $c_1$  мы будем иметь  $n$  произвольных коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ . Сходимость получающихся при этом степенных рядов гарантируется теоремой Коши п. 151. И в этом случае обычно строят фундаментальную систему решений, нормированную в точке голоморфности коэффициентов уравнения.

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть дано неоднородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Если коэффициенты  $p(x)$ ,  $q(x)$  и правая часть  $f(x)$  голоморфны в точке  $x_0$ ,  $|x - x_0| < \rho$ , то существует частное решение с любыми начальными значениями  $y_0, y_0'$  при  $x = x_0$ . Это решение можно искать в виде ряда по степеням  $x - x_0$ , сходимость которого в  $|x - x_0| < \rho$  обеспечена теоремой Коши п. 151.

Сказанное распространяется на неоднородное линейное уравнение  $n$ -го порядка.

**191. Представление решений в окрестности особой точки в виде обобщенных степенных рядов.** Если  $x = x_0$  есть особая точка уравнения (1), то в общем случае решение тоже не будет голоморфным ни в какой окрестности этой точки. Например, уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

имеет особую точку  $x = 0$ . Как показано в п. 185, это уравнение имеет следующие линейно независимые частные решения:

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Ни одно из этих частных решений не голоморфно ни в какой окрестности особой точки  $x = 0$ , т. е. не представимо в виде ряда по целым положительным степеням  $x$ . Но эти решения представимы в окрестности особой точки  $x = 0$  (при  $x > 0$ ) в виде рядов

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right),$$

$$y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)$$

или

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right),$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right),$$

которые отличаются от обычных степенных рядов лишь множителями вида  $x^p$ . Такие ряды называются обобщенными степенными рядами.

Вообще *обобщенным степенным рядом* по степеням разности  $x - x_0$ , называется ряд вида

$$(x - x_0)^p \sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h,$$

где показатель  $p$  есть некоторое постоянное число, а ряд

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h \quad (4)$$

есть сходящийся степенной ряд по степеням  $x - x_0$ , причем коэффициент  $c_0$  отличен от нуля.

Поставим вопрос: какой вид должны иметь коэффициенты уравнения (1) в окрестности особой точки  $x = x_0$ , чтобы хоть одно из его частных решений было представимо в окрестности этой особой точки в виде обобщенного степенного ряда по степеням  $x - x_0$ , т. е. в виде

$$y = (x - x_0)^p \sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h \quad (c_0 \neq 0). \quad (5)$$

Ответ на этот вопрос дается в аналитической теории дифференциальных уравнений. В частности, доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Для того чтобы уравнение (1) имело в окрестности особой точки  $x = x_0$  хоть одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда (5), достаточно, чтобы это уравнение имело вид

$$y'' + \frac{\sum_{h=0}^{\infty} p_h (x - x_0)^h}{x - x_0} y' + \frac{\sum_{h=0}^{\infty} q_h (x - x_0)^h}{(x - x_0)^2} y = 0, \quad (6)$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-x_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-x_0)^k \quad (7)$$

суть сходящиеся степенные ряды, причем коэффициенты  $p_0$ ,  $q_0$  и  $q_1$  не равны нулю одновременно, ибо в противном случае точка  $x=x_0$  неособая и существуют два линейно независимых решения, голоморфных в точке  $x=x_0$ . При этом, если ряды (7), входящие в коэффициенты уравнения (6) сходятся в области  $|x-x_0| < R$ , то и ряд (4), входящий в решение (5), заведомо сходится в той же области.

Доказательство этой теоремы дается в аналитической теории дифференциальных уравнений [34, с. 214—221; 131, т. I, с. 115—121; 138, т. III, ч. 2, с. 358—370; 144, с. 278—290], где особая точка  $x=x_0$  рассматриваемого вида называется *регулярной* особой точкой.\* Здесь мы ограничимся лишь указанием способа нахождения показателя  $\rho$  и коэффициентов  $c_k$ , считая  $c_0$  произвольным, но отличным от нуля.

Для упрощения выкладок будем считать, что  $x_0=0$ . Тогда

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k}{x^2}, \quad (8)$$

и уравнение (6) примет вид

$$y'' + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x} y' + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k}{x^2} y = 0$$

или

$$x^2 y'' + x \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k y' + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k y = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \quad (c_0 \neq 0), \quad (10)$$

ограничиваясь положительными значениями  $x$ .

---

\* Линейные уравнения с регулярными особыми точками имеют многочисленные приложения (см., например, [27]).



Подставляя (10) в (9), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1)c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{h=0}^{\infty} (\rho+k)c_k x^{\rho+h} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{h=0}^{\infty} c_k x^{\rho+h} = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на  $x^{\rho}$  и перемножая ряды, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1)c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k p_{k-n}(\rho+n)c_n \right) x^k + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k q_{k-n}c_n \right) x^k = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях  $x$ :

$$x^0: (\rho(\rho-1) + p_0 \rho + q_0) c_0 = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x^k: ((\rho+k)(\rho+k-1) + p_0(\rho+k) + q_0) c_k + \\ + \sum_{n=0}^{k-1} (p_{k-n}(\rho+n) + q_{k-n}) c_n = 0 \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как  $c_0 \neq 0$ , то коэффициент при  $c_0$  в (11) должен равняться нулю

$$\rho(\rho-1) + p_0 \rho + q_0 = 0. \quad (13)$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением* в особой точке  $x=0$ . Из него и определяются значения показателя  $\rho$ .

Коэффициенты определяющего уравнения  $p_0$  и  $q_0$  суть свободные члены числителей в разложениях  $p(x)$  и  $q(x)$ . Заметим, что их можно найти, не выполняя фактически разложения  $p(x)$  и  $q(x)$  в обобщенные степенные ряды (8), по формулам

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x p(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x), \quad (14)$$

в справедливости которых легко убедиться непосредственной проверкой. Аналогично могут быть найдены коэффициенты  $p_0$  и  $q_0$  определяющего уравнения (13) в любой особой точке  $x=x_0$ :

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) p(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 q(x).$$

Заметим еще, что коэффициент при  $c_k$  в (12) получается из левой части определяющего уравнения заменой  $\rho$  на  $\rho+k$ .

Обозначим корни определяющего уравнения через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $\rho_1$  и  $\rho_2$  вещественны и различны. Будем считать, что  $\rho_1 > \rho_2$ .

Покажем, что *всегда существует решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее «старшему» корню  $\rho_1$* .

Действительно, подставляя в равенство (12) вместо  $\rho$  корень  $\rho_1$ , мы видим, что коэффициент при  $c_k$

$$(\rho_1 + k)(\rho_1 + k - 1) + p_0(\rho_1 + k) + q_0$$

отличен от нуля, ибо  $\rho_1 + k$  не является корнем характеристического уравнения (так как второй корень  $\rho_2$  меньше  $\rho_1$ , и потому  $\rho_2 \neq \rho_1 + k$ ). Следовательно, из (12) мы можем определить последовательно все коэффициенты  $c_k$ . Получим  $c_k = c_k^{(1)}$ , причем  $c_0^{(1)} \neq 0$  произвольно, но отлично от нуля.

Подставляя в формулу (10) вместо  $\rho$  и  $c_k$  числа  $\rho_1$  и  $c_k^{(1)}$ , имеем

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0). \quad (15)$$

В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что степенной ряд, входящий в правую часть, сходится по крайней мере в области  $|x| < R$ , и, следовательно, формула (15) дает искомого решение уравнения (9).

Решение (15) является основным решением уравнения (9) в окрестности регулярной особой точки  $x=0$ . При решении вопроса о существовании второго частного решения в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего корню  $\rho_2$ , существенную роль играет разность корней определяющего уравнения, т. е. число  $s = \rho_1 - \rho_2$ .

*Если  $s$  не является целым положительным числом, то существует решение в виде обобщенного степенного ряда*

$$y_2 = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k \quad (c_0^{(2)} \neq 0), \quad (16)$$

*соответствующее второму корню  $\rho_2$ .*

В самом деле, разыскивая это решение, мы получим, что коэффициент при  $c_k^{(2)}$ ,

$$(\rho_2 + k)(\rho_2 + k - 1) + p_0(\rho_2 + k) + q_0,$$

не равен нулю, ибо  $\rho_2 + k$  не является корнем определяющего уравнения (почему?). Поэтому все  $c_k^{(2)}$  определяются, причем  $c_0^{(2)} \neq 0$  — произвольно.

Если  $s$  есть целое положительное число, то в общем случае существование решения вида (16) не гарантируется, ибо тогда коэффициент

при  $c_k^{(2)}$  будет равен нулю, так как  $\rho_2 + s = \rho_1$  — корень определяющего уравнения.

Если корни  $\rho_1$  и  $\rho_2$  различны, но комплексны:  $\rho_{1,2} = a \pm ib$ , то существуют решения в виде обобщенных степенных рядов, соответствующих каждому из корней (почему?). При этом под множителем  $x^{a+tb}$  понимается (см. с. 431, 4) выражение

$$x^{a+tb} = x^a (\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)).$$

Отделяя в комплексном решении

$$y = x^{a+tb} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0)$$

(где коэффициенты  $c_k$  — комплексные числа) вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых частных решения уравнения (9).

В случае кратных корней определяющего уравнения  $\rho_1 = \rho_2$  существует только одно решение в виде обобщенного степенного ряда.

Установим аналитический вид второго частного решения в случае, когда  $s$  есть целое положительное число или нуль. Для этого воспользуемся формулой, выражающей  $y_2$  через  $y_1$  и  $p(x)$  (см. п. 188, формула (3))

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx. \quad (17)$$

Заменим здесь  $y_1$  его аналитическим представлением в виде обобщенного степенного ряда

$$y_1 = x^{\rho_1} P_1(x), \quad (18)$$

где  $P_1(x)$  — ряд Тейлора со свободным членом, не равным нулю. Вообще будем обозначать через  $P_k(x)$  ряд Тейлора, свободный член которого отличен от нуля.

Так как

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1},$$

то

$$\begin{aligned} e^{-\int p(x) dx} &= e^{-\int \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1} dx} = e^{-p_0 \ln x} e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k} = \\ &= e^{\ln x^{-p_0}} e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k} = x^{-p_0} P_2(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} = \frac{x^{-p_0} P_2(x)}{x^{2\rho_1} P_1^2(x)} = x^{-(p_0+2\rho_1)} P_3(x). \quad (19)$$

Выразим  $p_0$  через корни определяющего уравнения (13). Имеем

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 - p_0,$$

откуда

$$p_0 = 1 - \rho_1 - \rho_2.$$

Следовательно,

$$\rho_0 + 2\rho_1 = 1 + \rho_1 - \rho_2 = 1 + s.$$

Подставляя в (19), получим

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} &= x^{-(1+s)} P_3(x) = \frac{P_3(x)}{x^{1+s}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x^{1+s}} = \\ &= \frac{a_0}{x^{1+s}} + \frac{a_1}{x^s} + \dots + \frac{a_s}{x} + a_{s+1} + a_{s+2} x + \dots \quad (a_0 \neq 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь мы существенно используем предположение о том, что  $s$  — целое неотрицательное, ибо в противном случае мы не получим члена  $\frac{a_s}{x}$  (почему?).

Введя (для симметрии) обозначения

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma_{-(1+s)}, \quad a_1 = \gamma_{-s}, \quad \dots, \quad a_s = \gamma_{-1}, \\ a_{s+1} &= \gamma_0, \quad a_{s+2} = \gamma_1, \quad \dots, \end{aligned}$$

перепишем (20) в виде

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} &= \frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}} + \frac{\gamma_{-s}}{x^s} + \dots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots \\ &\quad (\gamma_{-(1+s)} \neq 0). \end{aligned}$$

Подставляя (20) в формулу (17) и заменяя  $y_1$  его значением из (18), получим для  $y_2$  следующее выражение:

$$y_2 = x^{\rho_1} P_1(x) \int \left( \frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}} + \frac{\gamma_{-s}}{x^s} + \dots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots \right) dx =$$

$$= x^{\rho_1} P_1(x) \left( \frac{\gamma_{-(1+s)}}{-sx^s} + \frac{\gamma_{-s}}{(-s+1)x^{s-1}} + \dots + \right. \\ \left. + \gamma_{-1} \ln x + \gamma_0 x + \frac{\gamma_1}{2} x^2 + \dots \right).$$

Выделим член, содержащий  $\ln x$ , а из оставшихся в скобке членов вынесем за скобку  $x^{-s}$

$$y_2 = \gamma_{-1} x^{\rho_1} P_1(x) \ln x + x^{\rho_1-s} P_1(x) \times \\ \times \left( \frac{\gamma_{-(1+s)}}{-s} + \frac{\gamma_{-s}}{-s+1} x + \dots + \gamma_0 x^{1+s} + \dots \right).$$

Так как  $\rho_1 - s = \rho_2$ ,  $\gamma_{-(1+s)} \neq 0$ , то для  $y_2$  получаем окончательно выражение вида

$$y_2 = x^{\rho_2} P_4(x) + \gamma_{-1} y_1 \ln x. \quad (21)$$

Отсюда следует, что второе частное решение в рассматриваемом случае ( $s$  — целое неотрицательное) может, кроме обобщенного степенного ряда, содержать слагаемое, в которое входит  $\ln x$ . Это зависит от величины коэффициента  $\gamma_{-1}$ , который может оказаться отличным от нуля, причем если  $s=0$ , т. е.  $\rho_1 = \rho_2$ , то коэффициент  $\gamma_{-1}$  заведомо отличен от нуля, ибо в этом случае не равный нулю коэффициент  $\gamma_{-(1+s)}$  обращается в  $\gamma_{-1}$ , так что  $\gamma_{-1} \neq 0$ . Следовательно, *в случае кратных корней определяющего уравнения второе частное решение имеет вид*

$$y_2 = x^{\rho_1} P_4(x) + \gamma_{-1} y_1 \ln x, \quad (22)$$

где  $\gamma_{-1} \neq 0$ .

Заметим, что, разыскивая решения в виде обобщенных степенных рядов или рядов (21) более общего вида, мы, так же как и при интегрировании степенными рядами, можем иногда получить решение в элементарных функциях, если степенные ряды, входящие в решения, обрываются или представляют собою ряды Тейлора известных элементарных функций.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \quad (x > 0). \quad (23)$$

Точка  $x=0$  является регулярной особой точкой, ибо уравнение (23) можно переписать в виде

$$y'' + \frac{a_1}{x} y' + \frac{a_2}{x^2} y = 0.$$



отделением вещественной и мнимой частей

$$y_1 = x^a \cos(b \ln x), \quad y_2 = x^a \sin(b \ln x).$$

Если  $\rho_1 = \rho_2$ , то  $y_1 = x^{\rho_1}$ . Для нахождения  $y_2$  воспользуемся выкладками формулы (26), заметив, что в нашем случае  $a_1 + 2\rho_1 = 1$  (почему?). Получим

$$y_2 = x^{\rho_1} \int x^{-1} dx = x^{\rho_1} \ln x.$$

Как и следовало ожидать, второе решение содержит  $\ln x$ .

**Пример 2.** Найти два линейно независимых частных решения уравнения

$$x(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad (28)$$

в окрестности особой точки  $x=0$  при помощи обобщенных степенных рядов.

Прежде всего убедимся, что  $x=0$  есть регулярная особая точка. Деля обе части уравнения (28) на коэффициент при  $y''$ , имеем

$$y'' + \frac{1}{1-x} y' - \frac{1}{x(1-x)} y = 0.$$

Коэффициент при  $y'$  голоморфен в точке  $x=0$ , ибо

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1), \quad (29)$$

а коэффициент при  $y$  представим в виде

$$-\frac{1}{x(1-x)} = -\frac{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}{x} \quad (0 < |x| < 1). \quad (30)$$

Сравнивая разложения (29) и (30) с разложениями (8), видим, что  $x=0$  — регулярная особая точка.

Определяющим уравнением в особой точке  $x=0$  будет

$$\rho(\rho-1) = 0$$

(почему?). Его корни  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 0$  разнятся на целое положительное число.

Корню  $\rho_1 = 1$  соответствует решение вида

$$y_1 = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \quad (31)$$

где ряд справа сходится по крайней мере в области  $|x| < 1$  (почему?).

Подставляя (31) в (28), убеждаемся, что все  $c_k$ , кроме  $c_0$ , равны нулю. Поэтому в качестве  $y_1$  можно взять

$$y_1 = x.$$

Второе частное решение может содержать  $\ln x$ . Пользуясь формулой (17), находим

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x-1} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{x-1}{x^2} dx = x \ln x + 1.$$

Заметим, что  $x=1$  — тоже регулярная особая точка и можно построить два линейно независимых частных решения в окрестности этой особой точки.

В следующих двух пунктах мы рассматриваем два наиболее важных линейных уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, которые удастся проинтегрировать при помощи обобщенных степенных рядов, а также более общих рядов вида (21) или (22).\*

**192. Уравнение Бесселя.** Рассмотрим уравнение Бесселя [1; 79; 84; 93; 138, т. III, ч. 2; 144]

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (32)$$

или

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{-n^2 + x^2}{x^2} y = 0.$$

К интегрированию этого уравнения приводятся многие задачи астрономии, физики и техники.

Точка  $x=0$  является регулярной особой точкой уравнения Бесселя (почему?). Так же, как и в пп. 185 и 187, мы здесь рассматриваем уравнение Бесселя только для положительных значений  $x$ , т. е. для значений  $x$ , лежащих правее особой точки  $x=0$ . Легко видеть, что уравнение Бесселя есть частный случай рассмотренного выше уравнения (6), причем  $x_0=0$  и коэффициенты  $p_0=1$ ,  $q_0=-n^2$ ,  $q_1=0$  не равны нулю одновременно, так что  $x=0$  есть регулярная особая точка. Составим определяющее уравнение в этой особой точке

$$\rho(\rho-1) + p_0 \rho + q_0 = 0.$$

Так как здесь  $p_0=1$ ,  $q_0=-n^2$ , то определяющим уравнением будет

$$\rho(\rho-1) + \rho - n^2 = 0 \quad \text{или} \quad \rho^2 - n^2 = 0.$$

Если  $n \neq 0$ , то это уравнение будет иметь два различных корня:  $\rho_1=n$ ,  $\rho_2=-n$ . Будем считать, что  $n \geq 0$ . В нашем случае  $s=\rho_1-\rho_2=2n$ . Поэтому в силу предыдущего пункта мы можем утверждать следующее.

1. Если  $2n$  не равно целому положительному числу, т. е.  $2n \neq 2t$  и  $2n \neq 2t+1$ , так что  $n$  не является ни целым (положительным) числом,

---

\* К интегрированию этих уравнений приводится интегрирование многих однородных линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами [99].







Для этой цели и для дальнейшего изложения нам понадобится гамма-функция. Ее значения, как известно [138, т. III, ч. 2, с. 260—265], определяются формулой

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (41)$$

при  $\operatorname{Re} z > 0$  и формулой

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (42)$$

для  $\operatorname{Re} z < 0$ , если  $z$  — не целое отрицательное число, при котором  $\Gamma$  — функция вообще не определена и обращается в бесконечность. Функция, доставляемая формулой (42), совпадает с функцией  $\Gamma(z)$ , определяемой формулой (41) справа от мнимой оси, но она определена и слева от мнимой оси, кроме точек  $z=0, z=-1, z=-2, \dots$ , и дает так называемое аналитическое продолжение гамма-функции  $\Gamma(z)$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  на всю плоскость комплексной переменной  $z$ .

При положительных значениях  $z=a$  гамма-функция является интегралом Эйлера второго рода (см., например, 149, т. II, с. 169)

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (a > 0).$$

Гамма-функция обладает следующим основным свойством

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

В справедливости этого свойства для  $\Gamma(a)$  можно убедиться интегрированием по частям. Действительно, имеем

$$a \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = t^a e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt.$$

Так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

то, пользуясь указанным выше основным свойством гамма-функции, получаем, что если  $k$  — целое положительное число, то

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Отметим еще одно замечательное свойство гамма-функции, которое нам понадобится при дальнейшем изложении. Это свойство выражается так называемой *формулой дополнения* [138, т. III, ч. 2, с. 264]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Из нее, в частности, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Обратимся теперь к выбору  $c_0$ . Положим

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}.$$

Подставив это значение  $c_0$  в формулу (40) и воспользовавшись основным свойством гамма-функции, мы получим искомое первое частное решение уравнения Бесселя в виде

$$y_1 = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \quad (43)$$

Функция  $J_n(x)$  называется *функцией Бесселя первого рода  $n$ -го порядка*.

В частности, *функция Бесселя первого рода нулевого порядка*, т. е. первое частное решение уравнения

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad (44)$$

имеет вид

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

где ряд справа сходится при всех  $x$  и является, таким образом, голоморфной функцией в особой точке  $x=0$ .

Заметим, что  $J_n(0) = 0$  ( $n \geq 0$ ), так что решение  $J_n(x)$  остается конечным в особой точке  $x=0$ .

Функция Бесселя  $J_n(x)$  является основным решением уравнения Бесселя (32). Функции Бесселя  $J_n(x)$  обладают рядом замечательных свойств, вследствие чего именно эти решения уравнения Бесселя находят широкое применение в математическом анализе и в многочисленных приложениях, о которых сказано в начале этого пункта. Эти функции отно-

сятся к классу специальных функций. Подробное изучение их свойств дается в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Если будем искать второе частное решение уравнения (32), соответствующее показателю  $\rho_2 = -n$ , тоже в виде обобщенного степенного ряда, то вместо формул (35)–(37) мы будем иметь:

$$((-n+1)^2 - n^2) c_1 = 0, \quad (-2n+1) c_1 = 0;$$

$$c_{2k+1} = - \frac{c_{2k-1}}{(2k+1)(-2n+2k+1)}; \quad (45)$$

$$c_{2k} = - \frac{c_{2k-2}}{2^2 k(-n+k)}. \quad (46)$$

Из этих формул ясно, что если  $n \neq \frac{2m+1}{2}$  и  $n \neq m$ , т. е. если  $n$  не равно половине нечетного числа и не является целым числом, то все коэффициенты  $c_k$  опять выразятся единственным образом через произвольный коэффициент  $c_0$ .

Полагая в этом случае

$$c_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)},$$

мы получим второе частное решение уравнения Бесселя (32) в виде

$$y_2 = J_{-n}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \quad (47)$$

Заметим, что в отличие от решения  $y_1 = J_n(x)$ , это решение уже не будет конечным в особой точке  $x=0$  вследствие наличия множителя  $x^{-n}$ .

В случае  $n = \frac{2m+1}{2}$  мы встретим затруднение в определении коэффициента  $c_{2m+1}$ : формула (45) даст  $c_{2m+1} = \frac{0}{0}$ . Положив  $c_{2m+1} = 0$ , мы получим, что все  $c_{2k+1} = 0$  и, следовательно, второе частное решение будет иметь вид (47), так что в этом случае второе частное решение не будет содержать  $\ln x$ .

Таким образом, если  $n$  не равно целому числу, то функции  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя (32) в интервале  $(0, \infty)$ , а общим решением уравнения Бесселя в области

$$0 < x < \infty, \quad |y| < \infty, \quad |y'| < \infty$$

будет

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x).$$

Так как второе решение  $J_{-n}(x)$  обращается в точке  $x=0$  в бесконечность, то в приложениях, в случае когда по условию задачи требуется найти решение уравнения Бесселя, конечное в особой точке  $x=0$ , полагают  $C_2=0$ , ограничиваясь использованием только функций  $J_n(x)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $n$  является целым положительным числом. Здесь мы встретим затруднение при определении коэффициента  $c_{2n}$ . Формула (46) дает  $c_{2n} = \frac{c_0}{0} = \infty$ , так как  $c_0 \neq 0$ . Следовательно, второе частное решение должно содержать логарифмический член.

Заметим, что решение (47) имеет смысл и в случае целого  $n > 0$ , но оно уже не будет тогда линейно независимым с решением (43), а именно, если принять во внимание, что

$$\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \dots = \Gamma(-n+1) = \infty,$$

то нетрудно показать, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (48)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{1}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+n+1) k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Итак, второе частное решение уравнения Бесселя (32), в случае когда  $n$  есть целое положительное число, должно иметь аналитическую структуру (22), где  $\gamma_{-1} \neq 0$ , так что это решение фактически содержит  $\ln x$ .

Для построения этого решения рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - (n-\varepsilon)^2) y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1), \quad (32')$$

заменяв в рассматриваемом нами уравнении Бесселя (32)  $n$  на  $n-\varepsilon$ .

Уравнение (32') имеет два линейно независимых частных решения  $y_1 = J_{n-\varepsilon}(x)$  и  $y_2 = J_{-(n-\varepsilon)}(x)$ . Построим, пользуясь ими, частное решение

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}. \quad (49)$$

Если существует предел функции  $Y_{n-\varepsilon}(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то предельная функция

$$Y_n(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_{n-\varepsilon}(x) \quad (50)$$

будет решением уравнения Бесселя (32). Покажем, что указанный предел существует.

Заметим, что так как  $J_{-n}(x)$  и  $J_n(x)$  при  $n$  целом положительном связаны соотношением (48), то выражение (49) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представляет собою неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ , и наша задача состоит в том, чтобы раскрыть эту неопределенность.

С этой целью запишем  $Y_{n-\varepsilon}(x)$  в развернутом виде, заменив  $J_{-(n-\varepsilon)}(x)$  и  $J_{n-\varepsilon}(x)$  их выражениями, согласно формулам (47) и (43). Получим

$$\begin{aligned} Y_{n-\varepsilon}(x) = & (-1)^n \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+\varepsilon+2k} - \\ & - \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(n-\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left( \frac{x}{2} \right)^{n-\varepsilon+2k}. \end{aligned} \quad (51)$$

Преобразуем первую сумму, выделив из нее члены, в которых  $\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)$  обращается в бесконечность при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+\varepsilon+2k} = \\ & = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+\varepsilon+2k} + \\ & + (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+\varepsilon+2k} = \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n)! \Gamma(\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\varepsilon+2k}.$$

Подставляя это выражение в (51) и объединяя две последние суммы, имеем

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},$$

где

$$F_k(\varepsilon) = \frac{1}{(k+n)! \Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{k! \Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

. Найдем пределы выражений

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad \text{и} \quad \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (52)$$

Знаменатель первого из них представляет собою (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) неопределенность вида  $\infty \cdot 0$ . Чтобы ее раскрыть, преобразуем  $\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)$  (используя формулу дополнения) к следующему виду:

$$\Gamma(-n+\varepsilon+k+1) = \Gamma(1 - \underbrace{(n-\varepsilon-k)}_z) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin((n-\varepsilon-k)\pi) \cdot \Gamma(n-\varepsilon-k)}.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin((n-\varepsilon-k)\pi) \cdot \Gamma(n-\varepsilon-k)}{\pi \varepsilon},$$



и, пользуясь правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} = -\cos((n-k)\pi)\Gamma(n-k) =$$

$$= (-1)^{n-k+1}\Gamma(n-k) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Предел второго из выражений (52), вследствие того что  $F_k(0)=0$ , равен производной от функции  $F_k(\varepsilon)$  при  $\varepsilon=0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_k(\varepsilon) - F_k(0)}{\varepsilon} = F_k'(0).$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+n+1)\Gamma^2(k+1)} + \frac{\ln \frac{x}{2}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} -$$

$$- \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma^2(n+k+1)} + \frac{\ln \frac{x}{2}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left( 2 \ln \frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right).$$

Из доказанного следует, что предел (50) существует. Имеем

$$Y_n(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \times$$

$$\times \left( 2 \ln \frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2k}. \quad (53)$$

Эта функция называется *функцией Бесселя второго рода  $n$ -го порядка*. Она и дает искомое второе частное решение уравнения Бесселя в случае, когда  $n$  — целое положительное число. Это решение содержит  $\ln x$  и имеет как раз вид (21), где  $\gamma_{-1}=2$ ,  $y_1=J_n(x)$ . Решение  $y_2=Y_n(x)$ , очевидно, обращается в бесконечность в особой точке  $x=0$ .

Выражение (53) для  $Y_n(x)$  можно упростить, если воспользоваться следующей формулой для логарифмической производной от гамма-функции

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{1}{v+1} - \frac{1}{a+v} \right),$$

где  $C=0,5772157 \dots$  — постоянная Эйлера. Если  $a$  — целое положительное число, то

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{v=1}^{a-1} \frac{1}{v}$$

(почему?). Поэтому формула (53) примет вид

$$\begin{aligned} Y_n(x) = & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \left(2 \ln \frac{x}{2} + 2C - \sum_{v=1}^k \frac{1}{v} - \sum_{v=1}^{n+k} \frac{1}{v}\right), \\ & \left(\sum_{v=1}^0 \frac{1}{v} = 0\right). \end{aligned}$$

В некоторых вопросах оказывается удобнее вместо  $Y_n(x)$  брать функцию  $\frac{1}{\pi} Y_n(x)$ . Эта функция называется *функцией Вебера  $n$ -го порядка*.

Общее решение уравнения Бесселя, в случае когда  $n$  — целое положительное, может быть записано в виде

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

Рассмотрим уравнение Бесселя в случае нулевого значения  $n$ , т. е. уравнение (44).

Первым частным решением является указанная выше функция  $J_0(x)$ . Так как  $s=2n$ ,  $s=0$ , то второе частное решение заведомо содержит  $\ln x$ .

Для нахождения второго решения рассмотрим, как и в случае  $n$  — целого положительного, вспомогательное уравнение

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Построим его решение

$$Y_{-\varepsilon}(x) = \frac{J_{\varepsilon}(x) - J_{-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}.$$

Найдем предел функции  $Y_{-\varepsilon}(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
Y_{-\varepsilon}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon+2k} - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-\varepsilon+k+1) \varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon+2k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},
\end{aligned}$$

где

$$F_k(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(-\varepsilon+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_k(\varepsilon)}{\varepsilon} &= F'_k(0) = -\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+1)} \ln \frac{x}{2} - \\
&- \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+1)} \ln \frac{x}{2} = \\
&= \frac{2}{\Gamma(k+1)} \left( \ln \frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
Y_0(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_{-\varepsilon}(x) = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \ln \frac{x}{2} + C - \sum_{v=1}^k \frac{1}{v} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (54)
\end{aligned}$$

Функция  $Y_0(x)$  называется *функцией Бесселя второго рода нулевого порядка*. Это и есть второе частное решение уравнения (44) в окрестности особой точки  $x=0$ . Решение (54) имеет вид (22), причем  $\gamma_{-1}=2$ ,  $y_1=J_0(x)$ . Функция  $Y_0(x)$  в особой точке  $x=0$  обращается в бесконечность.

Иногда в качестве второго частного решения уравнения (44) берут  $\frac{1}{\pi} Y_0(x)$ . Эта функция называется *функцией Вебера нулевого порядка*.

Общее решение уравнения Бесселя (44) может быть записано так:

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$$

**З а м е ч а н и е.** Второе частное решение уравнения Бесселя (44) можно найти непосредственно методом неопределенных коэффициентов, приняв во внимание, что оно имеет аналитическую структуру

$$y_2 = \gamma_{-1} J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (\gamma_{-1} \neq 0),$$

вытекающую из общей формулы (22) для случая кратных корней определяющего уравнения. При этом, не умаляя общности, можно считать, что  $c_0 = 0$ , ибо в противном случае вместо  $y_2$  можно взять  $y_2 - c_0 J_0(x)$ . Кроме того, можно считать, что  $\gamma_{-1} = 1$  (почему?).

Итак, будем искать  $y_2$  в виде

$$y_2 = J_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k.$$

Подставив выражение для  $y_2$  в уравнение (44), после очевидных упрощений получим

$$2J_0'(x) + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях  $x$ . Имеем

$$\begin{aligned} x^0: \quad & 1 \cdot c_1 = 0, \\ x^1: \quad & -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 2c_2 = 0, \\ x^2: \quad & 3 \cdot 2c_3 + 3c_3 + c_1 = 0, \\ x^3: \quad & \frac{4}{(2!)^2} \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot 3c_4 + 4c_4 + c_2 = 0, \\ x^4: \quad & 5 \cdot 4c_5 + 5c_5 + c_3 = 0, \\ x^5: \quad & -\frac{2 \cdot 3}{(3!)^2} \cdot \frac{1}{2^5} + 6 \cdot 5c_6 + 6c_6 + c_4 = 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2^2}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right), \\ c_5 = 0, \quad c_6 = -\frac{1}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \dots \end{aligned}$$

Поэтому

$$y_2 = K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Функция  $K_0(x)$ , так же как и функция  $Y_0(x)$ , называется функцией Бесселя второго рода нулевого порядка.

Общее решение уравнения Бесселя (44) можно записать в виде

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x).$$

Вернемся теперь к уравнению Бесселя, рассмотренному в начале пункта

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \quad (55)$$

общее решение которого найдено в п. 186 при помощи приведения этого уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами. Проинтегрируем уравнение (55), пользуясь изложенным выше общим методом интегрирования уравнения Бесселя.

Так как здесь  $n = \frac{1}{2}$ , т. е.  $n > 0$  и не равно целому числу, то оба частных решения не содержат  $\ln x$  и получаются по формулам (43) и (47). Имеем

$$y_1 = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2} + 2k}, \\ y_2 = J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + 2k}.$$

Так как  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , то, используя указанное выше основное свойство гамма-функции, будем иметь

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}+2\right) &= \Gamma\left(\left(\frac{3}{2}+1\right)+1\right) = \left(\frac{3}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}+3\right) &= \Gamma\left(\left(\frac{3}{2}+2\right)+1\right) = \left(\frac{3}{2}+2\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+2\right) = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{\pi}, \\ &\vdots \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

## Поэтому

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{k! \, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1) \sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k! \, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1) \sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили вновь те же частные решения, что и в п. 186. В рассмотренном случае функции  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  и  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$  выразились через элементарные функции. Можно доказать, что функции Бесселя со значком, равным половине нечетного числа, выражаются через элементарные функции по формуле вида \*

$$J_{\frac{2m+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( P_m \left( \frac{1}{x} \right) \sin x + Q_m \left( \frac{1}{x} \right) \cos x \right),$$

где  $P_m$  и  $Q_m$  полиномы степени  $m$ .

\* Доказательство этого утверждения, основанное на использовании связи между производными от функции Бесселя первого рода различных порядков, см. в книге [138, т. III, ч. 2, с. 520—523].

Приведем в заключение два \* часто встречающихся в приложениях дифференциальных уравнения, приводящихся к уравнению Бесселя при помощи замены независимой переменной или однородной линейной замены искомой функции (которые, как известно, не нарушают ни линейности, ни однородности данного уравнения).

Первое из них отличается от уравнения Бесселя только коэффициентом при искомой функции и имеет вид

$$x^2 y'' + x y' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (k \neq 0) \quad (32')$$

( $x^2$  заменен на  $k^2 x^2$ ). Полагая

$$t = kx,$$

придем к уравнению Бесселя

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0,$$

где  $y = y(t)$ .

Если  $n$  не является целым положительным числом, то общее решение уравнения (32') имеет вид

$$y = C_1 J_n(kx) + C_2 J_{-n}(kx).$$

Следует отметить, что функции  $J_n(kx)$  обладают замечательным свойством — свойством ортогональности [138, т. III, ч. 2, с. 526—000]

$$\int_0^l x J_n(k_1 x) J_n(k_2 x) dx = 0. \quad \int_0^l x J_n^2(k_1 x) dx = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(k_1),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — различные положительные корни уравнения

$$J_n(xl) = 0.$$

Это свойство дает возможность разложить функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую определенным условиям, в ряд по функциям Бесселя.

Второе уравнение отличается от уравнения Бесселя только знаком коэффициента при  $y'$  и имеет вид

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Сделаем замену

$$y = xz, \quad z = z(x),$$

---

\* О других однородных линейных уравнениях второго порядка, приводящихся к уравнению Бесселя, общие решения которых, следовательно, выражаются через функции Бесселя, см., например, в книге [138, т. II, с. 135, 136].

получим уравнение Бесселя

$$x^2 z'' + x z' + (x^2 - (n^2 + 1)) z = 0.$$

Для изучения поведения функций Бесселя и нахождения новых аналитических представлений их иногда бывает полезно привести уравнение Бесселя к виду, не содержащему первой производной (см. п. 185), сопряженному виду (см. п. 187) или к уравнению, решения которого могут быть легко найдены специальными методами. Например, уравнение Бесселя (32) подстановкой

$$y = x^n z, \quad z = z(x)$$

приводится к уравнению вида

$$z'' + \frac{2n+1}{x} z' + z = 0.$$

Обращаем внимание читателя на связь между решениями уравнения Эйри

$$y'' = xy$$

и функциями Бесселя  $J_n$ . А именно функции

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} \right),$$

как нетрудно показать, образуют фундаментальную систему решений уравнения Эйри.

В конце настоящей главы мы еще вернемся к уравнению Бесселя в связи с изучением колебательного характера решений однородного линейного уравнения второго порядка и укажем одну приближенную (асимптотическую) формулу для вычисления  $J_n(x)$  при больших значениях  $x > 0$ .

До сих пор мы считали, что в уравнении Бесселя (32) число  $n$  фиксировано. Если рассматривать его как параметр, то представляет большой интерес изучение поведения функций Бесселя  $J_n(x)$  как функций параметра  $n$  при больших значениях последнего. Вопрос этот изучается в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.



**193. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение.** *Гипергеометрическим дифференциальным уравнением или уравнением Гаусса называется уравнение вида*

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x)y' + \alpha\beta y = 0, \quad (56)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — постоянные числа, которые мы будем предполагать вещественными и отличными от нуля. Кроме того, будем предполагать, что  $\gamma$  не целое число.

Точки  $x=0$  и  $x=1$  являются особыми точками уравнения Гаусса. Обе они регулярные, так как в окрестности этих точек коэффициенты уравнения Гаусса, записанного в нормальной форме

$$y'' + \frac{-\gamma(1+\alpha+\beta)x}{x(x-1)}y' + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y = 0, \quad (57)$$

можно представить в виде, указанном в теореме п. 191. Убедимся в этом для точки  $x=0$ . Действительно, замечая, что

$$\frac{1}{x-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{при } |x| < 1,$$

мы можем переписать уравнение (57) так:

$$y'' + \frac{(\gamma - (1+\alpha+\beta)x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k}{x} y' - \frac{\alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}}{x^2} y = 0. \quad (58)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (6) п. 191, причем здесь  $x_0=0$ ,  $p_0=\gamma$ ,  $q_0=0$ ,  $q_1=\alpha\beta$ , так что точка  $x=0$  есть регулярная особая точка уравнения Гаусса. Аналогично убеждаемся, что точка  $x=1$  — тоже регулярная особая точка.

Построим фундаментальную систему решений уравнения Гаусса в окрестности особой точки  $x=0$ .

Составим определяющее уравнение в особой точке  $x=0$

$$\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0.$$

Так как  $p_0=\gamma$ ,  $q_0=0$ ,\* то определяющим уравнением будет

---

\* Заметим, что для определения коэффициентов  $p_0$  и  $q_0$  не требуется фактическое представление уравнения Гаусса в виде (58), так как они легко находятся по формулам (14) п. 191. Имеем

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\gamma + (1+\alpha+\beta)x}{(x-1)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\alpha\beta}{(x-1)}.$$

$$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0.$$

Оно имеет, в силу сделанного выше предположения относительно  $\gamma$ , различные корни:  $\rho_1=0$  и  $\rho_2=1-\gamma$ , причем их разность не является целым числом. Поэтому, согласно п. 191, в окрестности особой точки  $x=0$  можно построить фундаментальную систему решений в виде обобщенных степенных рядов

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k,$$

$$y_2 = x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k,$$

первый из которых соответствует нулевому корню определяющего уравнения и является, следовательно, обычным степенным рядом, так что решение  $y_1$  голоморфно в окрестности особой точки  $x=0$ . Второе решение  $y_2$  заведомо не голоморфно в точке  $x=0$  (почему?). Построим сначала частное решение, соответствующее нулевому корню определяющего уравнения.

Итак, будем искать частное решение уравнения (56) в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0). \quad (59)$$

Подставляя (59) в (56), получим

$$\begin{aligned} & x(x-1) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \\ & + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x) \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю свободный член

$$-\gamma c_1 + \alpha\beta c_0 = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} c_0.$$

Полагая  $c_0=1$ , получим

$$c_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $x^k$ , найдем

$$k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} - \gamma(k+1)c_{k+1} + (1+\alpha+\beta)kc_k + \alpha\beta c_k = 0,$$

откуда

$$c_k(k(k+\alpha+\beta) + \alpha\beta) = c_{k+1}(k+1)(k+\gamma)$$

или

$$c_k(k+\alpha)(k+\beta) = c_{k+1}(k+1)(k+\gamma),$$

так что

$$c_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} c_k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)} c_1 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\alpha\beta}{2(\gamma+1)\gamma} = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)}, \\ c_3 &= \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(\gamma+2)} c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \dots, \\ c_k &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+(k-1))\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+(k-1))}{k! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+(k-1))}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+(k-1))\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+(k-1))}{k! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+(k-1))} x^k. \end{aligned} \quad (60)$$

Ряд справа называется *гипергеометрическим* рядом, так как при  $\alpha=1$ ,  $\beta=\gamma$  он превращается в геометрическую прогрессию

$$F(1, \beta, \beta, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \frac{1}{1-x}. \quad (61)$$

Согласно теореме п. 191, ряд (60) сходится при  $|x| < 1$ , так же как и ряд (61), и, следовательно, представляет в этом интервале решение уравнения (56).

Второе частное решение имеет вид

$$y = x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0).$$

Вместо того чтобы находить  $c_k$  методом неопределенных коэффициентов, воспользуемся построенным частным решением (60). Выделим из  $y$  множитель  $x^{1-\gamma}$ , сделав в уравнении Гаусса (56) замену искомой функции  $y$  по формуле

$$y = x^{1-\gamma} z, \quad (62)$$

где  $z = z(x)$  — новая неизвестная функция, представимая в окрестности точки  $x=0$  в виде ряда Тейлора (по степеням  $x$ ) со свободным членом, отличным от нуля. Получим для  $z = z(x)$  уравнение Гаусса

$$x(x-1)z'' + (- (2-\gamma) + (1 + (\alpha+1-\gamma) + (\beta+1-\gamma))x)z' + + (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)z = 0, \quad (63)$$

в котором роль параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  играют  $\alpha+1-\gamma$ ,  $\beta+1-\gamma$  и  $2-\gamma$ . Теперь в силу указанной аналитической структуры функции  $z = z(x)$  для нахождения  $y_2$  нам достаточно построить решение уравнения (63) в окрестности особой точки  $x=0$ , соответствующее нулевому корню определяющего уравнения. Это решение имеет вид

$$z_1 = F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \quad (|x| < 1). \quad (64)$$

Подставив (64) в (62), получим второе частное решение данного уравнения Гаусса в виде

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \quad (|x| < 1). \quad (65)$$

Таким образом, уравнение Гаусса (56) допускает в окрестности  $|x| < 1$  особой точки  $x=0$  следующую фундаментальную систему решений

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma; x), \\ y_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x). \end{aligned}$$

Общим решением уравнения Гаусса (56) в области

$$|x| < 1$$

будет

$$y = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) + + c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x) \quad (|x| < 1). \quad (66)$$

Напоминаем, что в формулах (60), (65) и (66), согласно сделанному предположению, число  $\gamma$  не равно ни целому числу, ни нулю. Если, в частности,  $\gamma=1$ , то первое частное решение (60) (как всегда) сохраняет смысл, в то время как второе частное решение обязательно должно со-

держат  $\ln x$ , ибо в этом случае оба корня определяющего уравнения будут одинаковые

$$\rho_1=0, \quad \rho_2=1-\gamma=0.$$

Пользуясь построенной фундаментальной системой решений уравнения Гаусса в окрестности особой точки  $x=0$ , можно легко построить фундаментальную систему решений этого уравнения и в окрестности особой точки  $x=1$ , которая тоже является регулярной особой точкой.

С этой целью переведем интересующую нас особую точку  $x=1$  в точку  $t=0$  и вместе с ней особую точку  $x=0$  в точку  $t=1$  при помощи линейной замены независимой переменной \*

$$x=1-t.$$

Выполняя эту подстановку в данном уравнении Гаусса (56), получим

$$t(t-1)y'' + (-(1+\alpha+\beta-\gamma) + (1+\alpha+\beta)x)y' + \alpha\beta y = 0.$$

Это — уравнение Гаусса с параметрами  $\alpha_1=\alpha$ ,  $\beta_1=\beta$ ,  $\gamma_1=1+\alpha+\beta-\gamma$ . Оно имеет в окрестности  $|t|<1$  особой точки  $t=0$  фундаментальную систему решений

$$\begin{aligned} y_3 &= F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; t), \\ y_4 &= t^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; t) \quad (|t|<1). \end{aligned} \quad (67)$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , т. е. полагая  $t=1-x$ , получим фундаментальную систему решений исходного уравнения Гаусса в окрестности  $|x-1|<1$  особой точки  $x=1$

$$\begin{aligned} y_3 &= F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x), \\ y_4 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x). \end{aligned}$$

Общим решением уравнения Гаусса (67) в области

$$|x-1|<1, \quad |y|<\infty, \quad |y'|<\infty$$

будет

$$\begin{aligned} y &= c_1 F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-x) + \\ &+ c_2 (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x). \end{aligned}$$

Более подробное и более глубокое изучение уравнения Гаусса дается в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

---

\* Геометрически проводим прямую на плоскости  $(x, t)$ , проходящую через точки  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ :  $\frac{x-1}{0-1} = \frac{t-0}{1-0}$ .

Среди большого числа уравнений, приводящихся к уравнению Гаусса, наиболее важными являются уравнение Лежандра и уравнение Чебышева, с которыми мы уже встречались выше (см. пп. 184, 187, пример 1, п. 188, пример 4).

Рассмотрим уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad (68)$$

или

$$((1-x^2)y')'+n(n+1)y=0.$$

Точки  $x=\pm 1$  являются регулярными особыми точками (почему?). Определяющим уравнением в особой точке  $x=1$  будет (см. (13))

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \quad \text{или} \quad \rho^2=0$$

(почему?). Здесь  $\rho_1=\rho_2=0$ . Поэтому одно решение в окрестности особой точки  $x=1$  будет обычным степенным рядом по степеням разности  $x-1$ , а второе обязательно содержит  $\ln(x-1)$ , так как корни определяющего уравнения в особой точке  $x=1$  кратные.

Аналогичные результаты получаются и для особой точки \*  $x=-1$ .

Сведем интегрирование уравнения Лежандра к интегрированию уравнения Гаусса. С этой целью переведем особые точки  $x=1$  и  $x=-1$  в точки  $t=0$  и  $t=1$  при помощи линейной замены независимой переменной \*\*

$$x=1-2t.$$

Выполняя в уравнении Лежандра (68) эту подстановку, получим

$$t(t-1)y''+(-1+2t)y'-n(n+1)y=0. \quad (69)$$

Мы пришли к уравнению Гаусса с параметрами  $\alpha=n+1$ ,  $\beta=-n$ ,  $\gamma=1$ .

Найдем частное решение уравнения Лежандра в окрестности особой точки  $x=1$ . Этой особой точке соответствует особая точка  $t=0$  уравнения (69). Определяющее уравнение в особой точке  $t=0$ ,

$$\rho(\rho-1)+\rho=0$$

имеет равные корни  $\rho_1=\rho_2=0$ . Следовательно, одно из частных решений уравнения (69) будет голоморфно в особой точке  $t=0$ , а второе заведомо содержит  $\ln t$ . Имеем

$$y_1=F(n+1, -n, 1; t). \quad (70)$$

\* Ср. пример 4 п. 188, где рассмотрено уравнение Лежандра в случае  $n=1$ .

\*\* Ср. сноску на с. 576.

Поэтому первым частным решением уравнения Лежандра в окрестности особой точки  $x=1$  будет

$$y=F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (71)$$

Если  $n$  — целое положительное число, то ряд (70) обрывается на  $n$ -й степени  $t$  (почему?). Поэтому решение (71) является в этом случае полиномом  $n$ -й степени от  $x$ :

$$P_n(x)=F\left(n+1, -n, 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Этот полином называется *полиномом Лежандра*  $n$ -й степени. В частности,

$$P_1(x)=x$$

является первым частным решением уравнения Лежандра

$$((1-x^2)y')'+2y=0$$

в окрестности особой точки  $x=1$ .

Вид второго частного решения уравнения Лежандра (68) во всех случаях может быть установлен при помощи формулы (17).

Укажем некоторые замечательные свойства полиномов Лежандра.

Прежде всего отметим, что для полиномов Лежандра справедлива следующая формула Родрига [138, т. III, ч. 2, с. 379]:

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots). \quad (72)$$

Из этой формулы следует, что  $P_n(1)=1$  при любом  $n$  (почему?). Формула Родрига дает возможность написать явное выражение полиномов Лежандра. Например,  $P_1(x)=x$ ,  $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ . Однако с ростом номера полинома вычисления по этой формуле усложняются. Поэтому целесообразнее воспользоваться следующим соотношением между последовательными полиномами Лежандра [138, т. III, ч. 2, с. 491]:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \\ (n=1, 2, \dots),$$

где  $P_1(x)=x$ , и по определению считают  $P_0(x)=1$ . Полагая здесь  $n=1$ , имеем

$$2P_2(x)-3x^2+1=0,$$

откуда снова находим, что  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ . Аналогично получаем  $P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ,  $P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$  и т. д.

Из формулы Родрига (72) следует, в силу теоремы Ролля, что полином Лежандра  $P_n(x)$  имеет  $n$  различных корней и что все они лежат внутри интервала  $(-1, 1)$ .\*

В самом деле, полином  $(x^2 - 1)^n$ , входящий в формулу Родрига, имеет корни  $\pm 1$  кратности  $n$ , между которыми, согласно теоремы Ролля, лежит хотя бы один корень его первой производной  $((x^2 - 1)^n)'$ . На деле этот корень ровно один ( $x = 0$ ), так как  $\pm 1$  являются корнями кратности  $n - 1$  этой производной, а общее число корней ее не превышает  $2n - 1$ .

Вторая производная  $((x^2 - 1)^n)''$  имеет корни  $\pm 1$  кратности  $n - 2$  и, в силу теоремы Ролля, ровно по одному корню внутри каждого из интервалов  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , ибо общее число корней ее не превышает  $2n - 2$ . Таким образом, вторая производная  $((x^2 - 1)^n)''$  имеет ровно два корня внутри интервала  $(-1, 1)$ .

Продолжая этот процесс, убедимся, что производная  $n$ -го порядка  $((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ , а вместе с ней и полином Лежандра  $P_n(x)$  имеет ровно  $n$  корней внутри интервала  $(-1, 1)$ .

Поставим следующую краевую задачу. Для уравнения

$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0, \quad (73)$$

где  $\lambda$  — параметр, найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых это уравнение имеет ненулевые решения, конечные внутри интервала  $(-1, 1)$  и на его концах. Такие значения  $\lambda$  называются характеристическими числами поставленной краевой задачи, а соответствующие им решения — характеристическими функциями этой задачи.

Из предыдущего ясно, что в качестве искомых значений параметра  $\lambda$  можно взять  $\lambda_n = n(n + 1)$ , где  $n$  — целое положительное число, а соответствующими им решениями дифференциального уравнения (73), которое обратится в уравнение Лежандра, будут полиномы Лежандра. Можно доказать, что других значений параметра  $\lambda$ , при которых существовало бы решение рассматриваемой задачи, нет.

Указанные значения  $\lambda = \lambda_n = n(n + 1)$  являются, таким образом, характеристическими числами, а соответствующие им полиномы Лежандра  $P_n(x)$  — характеристическими функциями поставленной краевой задачи.

---

\* Для полиномов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  это утверждение очевидно.



Полиномы Лежандра обладают свойством ортогональности на интервале  $[-1, 1]$ , т. е.

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно записать уравнение Лежандра в виде

$$((1-x^2)y')' + \lambda_n y = 0$$

и применить метод, которым мы пользовались в п. 187 для доказательства ортогональности характеристических функций рассмотренной там задачи Штурма — Лиувилля.

Свойство ортогональности полиномов Лежандра дает возможность разложить функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую определенным условиям в ряд по полиномам Лежандра [138, т. III, ч. 2, с. 383].

Заметим в заключение, что полиномы Лежандра являются частным случаем более общих полиномов Якоби, которые, так же как и полиномы Лежандра, соответствуют случаю, когда гипергеометрический ряд обрывается, обращаясь в полином [138, т. III, ч. 2, с. 383—385].

Рассмотрим уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Мы уже встречались с этим уравнением в п. 184, где показали, что оно интегрируется в элементарных функциях и в п. 190, где проинтегрировали его при помощи степенных рядов в окрестности особой точки  $x=0$ . Покажем теперь, что интегрирование уравнения Чебышева может быть сведено к интегрированию уравнения Гаусса, если строить решения в окрестности особых точек так же, как и для уравнения Лежандра, точки  $x=-1$  и  $x=1$  являются регулярными особыми точками уравнения Чебышева. Выполняя в уравнении Чебышева подстановку  $x=1-2t$ , получим

$$t(t-1)y'' + \left(t - \frac{1}{2}\right)y' - n^2y = 0. \quad (74)$$

Это — уравнение Гаусса с параметрами  $\alpha=n$ ,  $\beta=-n$ ,  $\gamma=\frac{1}{2}$ .

Таким образом, уравнение Чебышева, так же как и уравнение Лежандра, приводится к уравнению Гаусса.

Найдем частное решение уравнения Чебышева в окрестности особой точки  $x=1$ . Так как этой особой точке соответствует в силу подстановки точка  $t=0$ , то нам достаточно построить первое частное решение полу-

ченного уравнения Гаусса (74) в окрестности особой точки  $t=0$ . Этим решением будет

$$y_1 = F\left(n, -n, \frac{1}{2}; t\right).$$

Следовательно, искомым решением уравнения Чебышева будет

$$y = F\left(n, -n, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Это решение при  $n$  целом положительном представляет собою полином  $n$ -й степени относительно  $x$

$$T_n(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) = \cos n \arccos x,$$

т. е. полином Чебышева  $n$ -й степени, с которым мы уже встречались в п. 184.

Полиномы Чебышева представляют собою решения уравнения Чебышева, конечные в особых точках  $x=\pm 1$ . Тем самым они дают решение задачи Штурма — Лиувилля: найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых уравнение

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0$$

имеет ненулевые решения, конечные в особых точках  $x=\pm 1$ . Здесь  $\lambda = \lambda_n = n^2$  — характеристические числа, а  $y = y_n = T_n$  — характеристические функции.

В заключение отметим, что в аналитической теории дифференциальных уравнений изучается и вопрос о построении решений в окрестности особых точек, которые не являются регулярными. В частности, с большим успехом развиваются асимптотические методы (см., например, [25; 30; 31; 138, т. III, ч. 2]).

#### § 40. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**194. Колеблющиеся и неколеблющиеся решения.** В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о нулях ненулевых решений однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

причем нулями решения  $y=y(x)$  мы называем вещественные корни уравнения  $y(x)=0$ . Относительно коэффициентов уравнения (1) мы будем

предполагать, что они непрерывны на некотором интервале  $(a, b)$ , что гарантирует, согласно теореме Пикара, существование и единственность дважды непрерывно дифференцируемого решения с любыми начальными данными  $y_0, y_0', x_0 \in (a, b)$ , определенного во всем интервале  $(a, b)$ .

В отличие от ненулевых решений однородного линейного уравнения первого порядка (см. п. 32), ненулевое решение уравнения (1) может обращаться в нуль в интервале непрерывности коэффициентов, т. е. оно может иметь общую точку с осью  $Ox$ . Такие решения всегда существуют. Более того, существует бесчисленное множество решений, пересекающих ось  $Ox$  в любой заданной точке  $x_0$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно поставить в точке  $x_0$  начальные условия

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

где  $y_0'$  — любое заданное число, отличное от нуля, и воспользоваться теоремой Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши.

Но касаться оси  $Ox$  никакое ненулевое решение уравнения (1) не может (см. п. 130).

Поэтому решение уравнения (1) либо пересекает ось  $Ox$ , либо не имеет с ней ни одной общей точки. Отсюда следует, что ненулевое решение уравнения (1) при переходе через нуль обязательно меняет знак (при сделанном предположении относительно непрерывности коэффициентов уравнения). Поэтому чем больше нулей имеет решение, тем чаще оно меняет знак или, как говорят, тем сильнее оно колеблется.

Так, в задаче Штурма — Лиувилля, рассмотренной в п. 187, большему характеристическому числу соответствует сильнее колеблющаяся характеристическая функция, ибо характеристическая функция, соответствующая характеристическому числу  $\lambda_n$ , обращается в нуль внутри  $(a, b)$  ровно  $n-1$  раз. При этом, как бы велико не было характеристическое число, число нулей характеристической функции внутри  $(a, b)$  остается конечным. Ниже мы покажем, что этим свойством обладает любое решение однородного линейного уравнения (1) в предположении, что его коэффициенты непрерывны в  $(a, b)$ . Докажем сначала следующую теорему.

**Теорема.** *Все нули любого ненулевого решения  $y=y(x)$  уравнения (1), лежащие внутри интервала  $(a, b)$ , в котором коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны, изолированы. Это означает, что если  $x_0$  есть нуль решения  $y=y(x)$ , то существует такая окрестность  $(x_0-\delta, x_0+\delta)$  точки  $x_0$ , внутри которой нет ни одного нуля решения  $y=y(x)$ .*

В самом деле, в противном случае точка  $x_0$  была бы точкой сгущения нулей решения  $y=y(x)$ , так что существовала бы последовательность нулей  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , сходящаяся к  $x_0$ . Покажем, что  $y'(x_0) = 0$ . Имеем

$$y'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}.$$

Так как  $y'(x_0)$  существует, то для вычисления  $y'(x_0)$  достаточно устремить  $h$  к нулю по какому-нибудь одному закону. Положим  $h = x_n - x_0$ . Тогда

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

ибо

$$y(x_n) = y(x_0) = 0.$$

Итак, мы имели бы  $y(x_0) = 0$  и  $y'(x_0) = 0$ , причем  $x_0 \in (a, b)$ , а тогда в силу теоремы п. 130 решение  $y = y(x)$  — нулевое вопреки предположению. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что ненулевое решение уравнения (1) не может иметь бесконечного числа нулей на замкнутом интервале  $[\alpha, \beta]$ , лежащем внутри  $(a, b)$  (т. е. внутри интервала непрерывности коэффициентов уравнения (1)), и, следовательно, оно может менять знак внутри интервала  $[\alpha, \beta]$  только конечное число раз.

Прежде чем перейти к изучению колебательного характера решений уравнения (1) общего вида, рассмотрим следующие два однородных линейных уравнения второго порядка

$$y'' - k^2 y = 0, \quad y'' + k^2 y = 0 \quad (k \neq 0). \quad (2)$$

Из общих решений этих уравнений

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \\ y &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx = A \sin(kx + \varphi) \end{aligned}$$

видно, что всякое решение первого уравнения имеет не более одного нуля в любом интервале  $(a, b)$  (см. пример 7 п. 175), в то время как всякое решение второго уравнения, представляя собой гармоническое колебание с периодом  $T = \frac{2\pi}{k}$ , имеет по крайней мере два нуля во всяком интервале  $(a, b)$ , длина которого больше  $\frac{2\pi}{k}$ .

При изучении колебательного характера решений уравнения (1) с переменными коэффициентами достаточно ограничиться рассмотрением уравнения

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (3)$$

ибо, как доказано в п. 186, уравнение (1) приводится к уравнению вида (3) при помощи подстановки

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z,$$

где первый множитель не обращается в нуль внутри интервала  $(a, b)$ , в предположении, что коэффициент  $p(x)$  непрерывен в этом интервале, так что нули функций  $y$  и  $z$  совпадают.

Обратимся снова к уравнениям (2). Эти уравнения имеют постоянные коэффициенты, причем в первом из них коэффициент при искомой функции отрицательный, а во втором — положительный. Вообще для уравнения

$$y'' + qy = 0, \quad (4)$$

где  $q$  — вещественное число, колебательный характер решений определяется знаком  $q$ . Заметим, что если  $q = 0$ , то мы имеем уравнение

$$y'' = 0,$$

все решения которого, очевидно, неколеблущиеся, ибо интегральными кривыми являются только прямые линии. Следовательно, условие

$$q \leq 0 \quad (5)$$

является достаточным условием отсутствия колеблющихся решений уравнения (4).

Оказывается, что условие (5) распространяется и на случай, когда  $q$  есть функция от  $x$ . А именно имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Если  $q(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$  и удовлетворяет условию

$$q(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad a < x < b,$$

то всякое ненулевое решение уравнения (3) будет неколеблущимся в  $(a, b)$ .

Допустим противное. Пусть существует ненулевое решение  $y = y(x)$ , колеблющееся в интервале  $(a, b)$ , т. е. существуют два значения  $x_0$  и  $x_1$  из этого интервала такие, что  $y(x_0) = 0$  и  $y(x_1) = 0$ . Будем считать, что  $x_0$  — меньший корень, так что  $a < x_0 < x_1 < b$ . Предположим, что между  $x_0$  и  $x_1$  решение  $y = y(x)$  не обращается в нуль, т. е.  $x_0$  и  $x_1$  последние ненулевые нули решения  $y = y(x)$ . Такое предположение мы имеем право делать, ибо, как показано выше, множество нулей любого ненулевого решения уравнения (1) с непрерывными коэффициентами дискретно.

Не умаляя общности, будем считать, что  $y(x) > 0$  в интервале  $(x_0, x_1)$ . Тогда  $y'(x_0) > 0$ . В самом деле, так как  $y(x_0) = 0$  и  $y(x) > 0$

в  $(x_0, x_1)$ , то  $y'(x_0) \geq 0$ . Но  $y'(x_0) \neq 0$ .<sup>\*</sup> Поэтому  $y'(x_0) > 0$ . Аналогично убеждаемся, что  $y'(x_1) < 0$ . Но, переписав уравнение (3) в виде

$$y'' = -q(x)y,$$

мы заключаем, что

$$y''(x) = -q(x)y(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

так что  $y'(x)$  не убывает в интервале  $[x_0, x_1]$ , что противоречит неравенствам  $y'(x_0) > 0$ ,  $y'(x_1) < 0$ . Следовательно, наше предположение о существовании ненулевого решения  $y = y(x)$ , колеблющегося в интервале  $(a, b)$ , неверно.

**Пример 1.** Все решения уравнения Эйри

$$y'' - xy = 0$$

неколеблющиеся на всей положительной полуоси  $Ox$ , ибо  $q(x) = -x < 0$  при  $0 < x < \infty$ .

*Замечание 1.* Если  $q(x) \leq 0$  при всех значениях  $x$ , то все ненулевые решения уравнения (3) — неколеблющиеся в любом конечном интервале, так что всякая интегральная кривая пересекает ось  $Ox$  не больше одного раза.

*Замечание 2.* Доказанный признак неколебательности решений уравнений (3) является лишь достаточным.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение Эйлера

$$y'' + \frac{a^2}{x^2} y = 0 \quad (a \neq 0, x > 0). \quad (6)$$

Заметив, что его коэффициент при  $y$  положителен, исследуем колебательный характер решений. Найдем общее решение. Полагая  $x = e^t$ , приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y''_{t^2} - y_t + a^2 y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + a^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}.$$

Отсюда ясно, что колебательный характер решений рассматриваемого уравнения Эйлера зависит от соотношения между  $a^2$  и  $\frac{1}{4}$ .

---

<sup>\*</sup> Ибо, если  $y'(x_0) = 0$ , то мы имеем  $y(x_0) = 0$ ,  $y'(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , а тогда  $y(x) \equiv 0$  в  $(a, b)$  вопреки предположению.

При  $a^2 < \frac{1}{4}$  имеем

$$y_1 = x^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}.$$

Эти решения, очевидно, неколеблющиеся ни в каком интервале.

Если  $a^2 = \frac{1}{4}$ , то

$$y_1 = x^{1/2}, \quad y_2 = x^{1/2} \ln x.$$

Эти решения тоже неколеблющиеся.

При  $a^2 > \frac{1}{4}$  имеем

$$y_1 = x^{1/2} \cos \left( \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x \right), \quad y_2 = x^{1/2} \sin \left( \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x \right).$$

Ясно, что эти решения имеют бесчисленное множество нулей в интервале  $(1, \infty)$ .

Таким образом, рассматриваемое уравнение Эйлера либо имеет неколеблющиеся решения  $\left(a^2 \leq \frac{1}{4}\right)$ , либо его решения имеют бесчисленное множество нулей  $\left(a^2 > \frac{1}{4}\right)$  в интервале  $(1, \infty)$ .

В дальнейшем мы используем рассмотренное уравнение Эйлера (6) в качестве уравнения сравнения при изучении колебательного характера решений других уравнений.

**195. Теорема Штурма.** Сравним колебательный характер двух линейно независимых решений  $y_1$  и  $y_2$  одного и того же однородного линейного уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами.

Мы уже знаем, что  $y_1$  и  $y_2$  не могут иметь общих нулей в интервале  $(a, b)$ , ибо, как уже сказано в замечании к п. 162, в нуле  $x_0 \in (a, b)$  мы имели бы  $W(x_0) = 0$ , что противоречит линейной независимости  $y_1$  и  $y_2$ . Если одно из решений,  $y_1$ , является колеблющимся в  $(a, b)$ , то что можно сказать о нулях другого решения,  $y_2$ , линейно независимого с  $y_1$ ?

Рассматривая два линейно независимых решения второго из уравнений (2),  $y_1 = \cos kx$ ,  $y_2 = \sin kx$ , мы видим, что нули этих решений взаимно разделяют друг друга: между двумя последовательными нулями одного решения лежит один и только один нуль другого решения. Оказывается, что этим свойством обладают любые линейно независимые решения всякого однородного линейного уравнения второго порядка, имеющего колеблющиеся решения.

**Теорема Штурма.** Нули двух линейно независимых решений однородного линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \quad (7)$$

коэффициенты которого непрерывны в интервале  $(a, b)$ , взаимно разделяют друг друга.

Пусть  $y_1 = y_1(x)$  и  $y_2 = y_2(x)$  — линейно независимые решения уравнения (7). Предположим, что  $y_1 = y_1(x)$  имеет два нуля  $x_0$  и  $x_1$  внутри  $(a, b)$ , причем эти нули последовательные, т. е.  $y_1(x) \neq 0$  при  $x_0 < x < x_1$ . Докажем, что существует одна и только одна точка  $\bar{x}$ ,  $x_0 < \bar{x} < x_1$ , в которой  $y_2(\bar{x}) = 0$ .

Предположим противное. Пусть  $y_2(x) \neq 0$  для  $x_0 < x < x_1$ . Не умаляя общности, будем считать, что  $y_2(x) > 0$  для  $x_0 < x < x_1$ . На концах интервала  $[x_0, x_1]$  решение  $y_2(x)$  не обращается в нуль,  $y_2(x_0) \neq 0$  и  $y_2(x_1) \neq 0$ , ибо, как уже отмечено выше, линейно независимые частные решения не могут иметь общих нулей в интервале непрерывности коэффициентов.

Не нарушая общности, будем считать, что  $W(x) > 0$  в интервале  $[x_0, x_1]$ .

Напишем тождество

$$-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{W(x)}{y_2^2}.$$

Интегрируя это тождество по интервалу  $[x_0, x_1]$ , получаем

$$-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{y_2^2} dx.$$

Здесь левая часть равна нулю, а правая положительна, что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно. Итак, существует точка  $\bar{x}$ ,  $x_0 < \bar{x} < x_1$ , в которой  $y_2(\bar{x}) = 0$ .

При этом существует только одна такая точка, ибо в противном случае, меняя ролями  $y_1$  и  $y_2$ , мы нашли бы точку  $\bar{x}$ ,  $x_0 < \bar{x} < x_1$ , в которой  $y_1(\bar{x}) = 0$ , а это противоречит тому, что  $x_0$  и  $x_1$  — последовательные нули решения  $y_1 = y_1(x)$ . Теорема полностью доказана.

Из теоремы Штурма следует, что оба линейно независимых решения уравнения (7) являются колеблющимися в интервале  $(a, b)$ , если одно из них имеет в этом интервале более двух нулей.

**196. Теорема сравнения.** Выше мы рассматривали колебательный характер решений одного и того же дифференциального уравнения. Естественным образом поставить вопрос о сравнении колебательного характера решений двух различных дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, такие два уравнения:

$$y'' + y = 0; \quad z'' + 4z = 0.$$



Сравнивая их решения

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x; \quad z_1 = \cos 2x, \quad z_2 = \sin 2x,$$

видим, что между любыми двумя нулями любого из решений первого уравнения лежит хотя один нуль любого из решений второго уравнения, так что решения второго уравнения колеблются сильнее решений первого уравнения (ср. пример 8 п. 175).

Нетрудно убедиться, что такое же утверждение имеет место для любых двух уравнений вида

$$y'' + q_1 y = 0; \quad z'' + q_2 z = 0,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — положительные числа, причем  $q_2 > q_1$ . Обобщая этот результат на случай уравнений с переменными коэффициентами при  $y$ , приходим к следующей теореме.

**Теорема сравнения.** Если в уравнениях

$$y'' + q_1(x)y = 0; \quad z'' + q_2(x)z = 0 \quad (8)$$

функции  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  непрерывны в интервале  $(a, b)$  и  $q_2(x) \geq q_1(x)$  при  $a < x < b$ , то между каждыми двумя последовательными нулями любого решения  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  первого уравнения лежит хотя один нуль любого решения  $\bar{z} = \bar{z}(x)$  второго уравнения, если в интервале между этими нулями существуют точки, в которых  $q_2(x) > q_1(x)$ .

Пусть  $x_0$  и  $x_1$  — последовательные нули решения  $\bar{y} = \bar{y}(x)$ . Нужно доказать, что существует такое  $x^*$ ,  $x_0 < x^* < x_1$ , для которого  $\bar{z}(x^*) = 0$ .

Предположим противное, т. е.  $\bar{z}(x) \neq 0$  в интервале  $(x_0, x_1)$ . Не умаляя общности, будем считать, что  $\bar{y}(x) > 0$  и  $\bar{z}(x) > 0$  в интервале  $(x_0, x_1)$ . На концах этого интервала функция обращается в нуль, а значения функции  $\bar{z}(x)$  неотрицательны (почему?).

Напишем тождества

$$\bar{y}'' + q_1(x)\bar{y} = 0,$$

$$\bar{z}'' + q_2(x)\bar{z} = 0.$$

Умножая их соответственно на  $\bar{z}$  и  $\bar{y}$  и вычитая второе из первого, получим

$$\bar{y}''\bar{z} - \bar{z}''\bar{y} = (q_2(x) - q_1(x))\bar{y}\bar{z}$$

или

$$(\bar{y}'\bar{z} - \bar{z}'\bar{y}) = (q_2(x) - q_1(x))\bar{y}\bar{z}.$$

Интегрируя это тождество по интервалу  $[x_0, x_1]$  и принимая во внимание, что  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ , получаем

$$\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) - \bar{y}'(x_0)\bar{z}(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} (q_2(x) - q_1(x))\bar{y}\bar{z}dx. \quad (9)$$

Так как  $\bar{y}'(x_0) > 0$ ,  $\bar{y}'(x_1) < 0$  (см. доказательство теоремы п. 194),  $\bar{z}(x_0) \geq 0$ ,  $\bar{z}(x_1) \geq 0$ , то левая часть равенства (9) неположительна, в то время как правая положительна. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Сравнивая колебательный характер решений уравнений (8), говорят, что решения второго уравнения являются более колеблющимися, чем решения первого.

*З а м е ч а н и е.* Если  $x_0$  является общим нулем двух каких-либо частных решений  $\bar{y}(x)$  и  $\bar{z}(x)$  уравнений (8) и если в интервале между  $x_0$  и следующим за  $x_0$  нулем  $x_1$  решения  $\bar{y}(x)$  существуют точки, где  $q_2(x) > q_1(x)$ , а в остальных точках этого интервала  $q_2(x) \geq q_1(x)$ , то ближайший справа к  $x_0$  нуль  $x_1$  решения  $\bar{z}(x)$  расположен левее, чем  $x_1$ .

В самом деле, допустив, что  $\bar{z}(x)$  сохраняет знак в интервале  $(x_0, x_1)$ , мы увидим, что равенство (9), которое теперь примет вид

$$\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} (q_2(x) - q_1(x))\bar{y}\bar{z}dx,$$

будет снова противоречивым.

**Пример 1.** В примере 8 п. 175 мы показали, что функции

$$y_n = \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

являются решениями уравнений

$$y'' + n^2 y = 0,$$

удовлетворяющими краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Все функции (10) имеют общий нуль в точке  $x=0$ , в которой задано первое из краевых условий. Последующим нулем первого решения  $y_1 = \sin x$  является  $\pi$ . Последующий нуль  $\frac{\pi}{2}$  второго решения  $y_2 = \sin 2x$  лежит левее  $\pi$ . Последующий нуль  $\frac{\pi}{3}$  третьего решения  $y_3 = \sin 3x$  лежит левее  $\frac{\pi}{2}$  и т. д. С ростом  $q = n^2$  первые нули решений  $y_n$ , отличные от общего нуля, неограниченно приближаются к нему.

Обычно, в качестве одного из уравнений (8), берут уравнение с постоянным коэффициентом при  $y$

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (11)$$

Дадим в качестве примера оценку расстояния между последовательными колеблющимися решениями уравнения

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (12)$$

где  $q(x)$  непрерывна и положительна в интервале  $[a, b]$ , причем  $q(x) \neq \text{const}$ .

Обозначим через  $M$  и  $m$  наибольшее и наименьшее значения функции  $q(x)$  в интервале  $[a, b]$ . Имеем  $M > m > 0$ .

Так как расстояние между последовательными нулями решений уравнений (11) равно  $\frac{\pi}{k}$ , то, применяя теорему сравнения последовательно к уравнениям

$$y'' + my = 0, \quad z'' + q(x)z = 0$$

и

$$y'' + q(x)y = 0, \quad z'' + Mz = 0,$$

получаем, что расстояние между последовательными нулями решений уравнения (12) не больше, чем  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ , и не меньше, чем  $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ , т. е. нули

этих решений расположены не реже и не чаще, чем нули некоторых синусов.

Предположим, что в уравнении (12) коэффициент  $q(x)$  непрерывен в полубесконечном интервале  $(a, \infty)$  и положителен в нем, причем нижняя граница  $q(x)$  тоже положительна. Тогда расстояние между последовательными нулями любого решения не меньше, чем у некоторой синусоиды, и, следовательно, каждое решение имеет бесчисленное множество нулей в интервале  $(a, \infty)$ .

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (13)$$

в интервале  $0 < x < \infty$ . Покажем, что любое решение имеет в указанном интервале бесчисленное множество нулей, и дадим оценку расстояния между последовательными нулями функций Бесселя  $J_n(x)$ .

С этой целью приведем уравнение Бесселя (13) к виду, не содержащему члена с первой производной. Для этого положим

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}.$$

Данная подстановка, очевидно, не меняет колебательного характера решений.

Получим

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0. \quad (14)$$

Здесь, как нетрудно убедиться, коэффициент  $q(x) = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$  удовлетворяет указанным выше условиям в некотором интервале  $(a, \infty)$ , где  $a > 0$ . Поэтому любое решение уравнения (14), а вместе с ним и исходного уравнения Бесселя (13), имеет бесчисленное множество нулей в интервале  $(0, \infty)$ . Как расположены эти нули?

Чтобы ответить на этот вопрос, сравним колебательный характер решений уравнения (14) с колебательным характером решений уравнения

$$w'' + w = 0. \quad (15)$$

Очевидно, что этот колебательный характер существенно зависит от значения параметра  $n$ .\*

Если  $n^2 < \frac{1}{4}$ , то коэффициент при  $z$  будет больше 1 (т. е. коэффициента при  $w$  в уравнении (15)). При  $n^2 > \frac{1}{4}$  этот коэффициент будет меньше 1. Следовательно, при  $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{4}$  расстояние  $d$  между последовательными нулями функций Бесселя  $J_n(x)$  будет меньше, чем  $\pi$ , а при  $n > \frac{1}{2}$  и  $n < -\frac{1}{2}$  это расстояние больше, чем  $\pi$ .

При  $n = \pm \frac{1}{2}$  расстояние  $d$  между последовательными нулями функции Бесселя в точности равно  $\pi$ . Этот факт очевиден, ибо соответствующими функциями Бесселя являются

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Так как при  $x \rightarrow \infty$  коэффициент при  $z$  в уравнении (14) стремится к 1, то расстояние между последовательными нулями любой функции Бесселя стремится к  $\pi$ , когда  $x$  неограниченно возрастает, т. е. колебательный характер функций  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  приближается к колебательному характеру функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , являющихся решениями предельного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

---

\* Поведение функций Бесселя как функций параметра  $n$  изучается в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Этот результат вполне согласуется с асимптотической формулой \*

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \quad (x > 0), \quad (16)$$

дающей возможность вычислять значения функции  $J_n(x)$  при достаточно больших положительных значениях  $x$ . Для  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  и  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$  формула (16) является точной.

**Пример 3.** Изучить колебательный характер решений уравнения

$$y'' + xy = 0 \quad (17)$$

при изменении  $x$  в интервале  $0 < x < \infty$ .

Сравнивая это уравнение с уравнением

$$z'' + k^2 z = 0,$$

мы видим, что если  $x > k^2$ , то расстояние между последовательными нулями решений уравнения (17) меньше, чем  $\frac{\pi}{k}$ . Следовательно, при неограниченном возрастании  $x$  это расстояние будет стремиться к нулю, так что последовательные нули любого из решений уравнения (17) при неограниченном возрастании  $x$  будут неограниченно сближаться. Здесь (так же, как и в предыдущем примере) мы существенно воспользовались тем, что нижняя граница  $Q(x)$  в рассматриваемом интервале изменения  $x$  ( $x > k^2$ ) положительна.

Интересно отметить, что между решениями уравнения (17), имеющими указанный колебательный характер, и решениями уравнения Эйри

$$z'' - xz = 0,$$

все решения которого неколеблющиеся в интервале  $(0, \infty)$ , существует тесная связь. А именно, если  $z = z(x)$  — решение уравнения Эйри, то  $y = z(-x)$  — решение уравнения (17), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Вследствие этой связи иногда функции Эйри определяют как решения уравнения (17).

Рассмотрим случай, когда  $Q(x)$  непрерывна в полубесконечном интервале  $(a, \infty)$ , сохраняет в нем положительный знак и стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Мы уже встречались с такой ситуацией в примере 2 п. 194. Пользуясь рассмотренным там уравнением Эйлера как уравнением сравнения, докажем теперь следующую теорему.

**Теорема Кнезера.** Если в уравнении

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (18)$$

коэффициент  $q(x)$  удовлетворяет условиям

---

\* См. [138, т. III, ч. 2, с. 535]. Запись  $f(x) = O(\varphi(x))$  означает, что отношение  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  остается ограниченным при  $x \rightarrow \infty$ .

$$0 < q(x) \leq \frac{1}{4x^2} \quad (x \geq x_0),$$

то его решение не может иметь бесконечного числа нулей в интервале  $(x_0, \infty)$ . Если же

$$q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2} \quad (\alpha > 0, x \geq x_1),$$

то любое ненулевое решение имеет бесконечное множество нулей в интервале  $(x_1, \infty)$ .

Действительно, беря в качестве уравнений сравнения соответственно

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0 \quad (x \geq x_0)$$

и

$$y'' + \frac{1+\alpha}{4x^2} y = 0 \quad (\alpha > 0, x \geq x_1),$$

видим, что в первом случае  $a^2 = \frac{1}{4}$ , а во втором  $a^2 > \frac{1}{4}$ , откуда в силу результатов примера 2 и следует утверждение теоремы.

*З а м е ч а н и е.* Из теоремы Кнезера мы видим, что если  $q(x)$ , будучи положительной, стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$  достаточно быстро, то его решения не могут иметь бесконечного числа нулей в полубесконечном интервале вида  $(a, \infty)$ .

Рассмотрим случай уравнения (18), когда  $q(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение (18) принимает вид

$$y'' = 0. \quad (19)$$

Оно имеет фундаментальную систему решений  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = x$ . Поставим вопрос: обладает ли уравнение (18) фундаментальной системой решений, близкой в определенном смысле к фундаментальной системе решений предельного уравнения (19). Ответ на этот вопрос при условии, что  $q(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , достаточно быстро дает следующая теорема.

**Т е о р е м а Ш п е т а.** Если в уравнении (18) коэффициент  $q(x)$  непрерывен в интервале  $[0, \infty]$  и обладает свойством

$$q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right),$$

где  $k > 0$  ( $0 < x < \infty$ ), то это уравнение имеет фундаментальную систему решений  $y_1$ ,  $y_2$ , определенную в интервале  $[0, \infty)$  и обладающую свойствами \*

\* По поводу записи  $f(x) = O(\varphi(x))$  см. сноску на с. 592.



любую линейную функцию от  $x$ , после чего все  $u_k(x)$  ( $k \geq 1$ ) определяются последовательно при помощи квадратур.

Докажем, что существует фундаментальная система решений  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  уравнения (20), которая при  $\lambda = -1$  перейдет в интересующую нас фундаментальную систему решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  уравнения (18).

Построим сначала решение  $y_1(x, \lambda)$ . Желая, чтобы это решение обладало указанным в теореме свойством решения  $y_1(x)$ , положим  $u_0(x) = 1$ , т. е. будем искать  $y_1(x, \lambda)$  в виде

$$y_1(x, \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \lambda^n, \quad (22)$$

где функции  $u_n(x)$  выберем так, чтобы они были определены при всех  $x \geq 0$  и чтобы

$$u_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Имеем

$$u_1''(x) = q(x).$$

Для построения  $u_1(x)$  выберем квадратуры следующим образом: \*

$$u_1(x) = \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} q(t) dt. \quad (23)$$

Несобственный интеграл справа в силу предположений относительно  $q(x)$ , как мы покажем ниже, сходится. Следующие функции  $u_n(x)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) определим рекуррентными соотношениями

$$u_n(x) = \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} q(t) u_{n-1}(t) dt \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (24)$$

Докажем, что несобственные интегралы, входящие в формулы (23) и (24), сходятся.

Действительно, так как  $q(x)$  непрерывна в  $[0, \infty)$  и обладает свойством  $q(x) = O\left(\frac{1}{x^{h+2}}\right)$  при  $0 \leq x < \infty$ , то для  $q(x)$  имеет место оценка при  $0 \leq x < \infty$

$$|q(x)| < \frac{A}{(1+x)^{h+2}}, \quad (25)$$

---

\* При выборе квадратур мы должны обеспечить существование интегралов и позаботиться о том, чтобы функция  $u_1(x)$  обладала заданными свойствами.



где  $A$  — некоторое положительное число. Эта оценка гарантирует сходимость интересующих нас несобственных интегралов в «особой точке»  $\infty$  (почему?). Следовательно, все функции  $u_n(x)$  определены в интервале  $[0, \infty)$ .

Переходя к доказательству сходимости ряда (24), оценим коэффициенты этого ряда, т. е. функции  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Для  $u_1(x)$  имеем в интервале  $[0, \infty)$  оценку

$$\begin{aligned} |u_1(x)| &\leq \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A dt}{(1+t)^{k+2}} = A \int_x^\infty \frac{d\xi}{(k+1)(1+\xi)^{k+1}} = \\ &= \frac{A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+x)^k}. \end{aligned}$$

Далее имеем при  $0 \leq x < \infty$

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &< \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A}{(1+t)^{k+2}} \frac{A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+t)^k} dt = \\ &= \frac{A^2}{k(k+1)2k(2k+1)} \frac{1}{(1+x)^{2k}}. \end{aligned}$$

Продолжая, получим оценку: при  $0 \leq x < \infty$

$$|u_n(x)| \leq \frac{A^n}{k(k+1)2k(2k+1)\dots nk(nk+1)} \frac{1}{(1+x)^{nk}}.$$

Поэтому для общего члена ряда (22) будем иметь оценку при

$$\begin{aligned} |u_n(x)\lambda^n| &\leq \frac{(A|\lambda|)^n}{k(k+1)2k(2k+1)\dots nk(nk+1)} \frac{1}{(1+x)^{nk}} \\ &\quad (0 \leq x < \infty, \quad n=2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что ряд (22) абсолютно сходится при всех  $\lambda$  (в частности, и при  $\lambda=-1$ ) равномерно относительно  $x$  в  $[0, \infty)$ . Следовательно, его сумма  $y_1(x, \lambda)$  представляет собою решение уравнения (20), определенное в интервале  $[0, \infty)$ .

Покажем, что это решение обладает требуемым свойством. Так как нас интересует асимптотическое поведение разности  $y_1(x, \lambda)-1$  при  $x \rightarrow \infty$ , то оценим эту разность для  $0 \leq x < \infty$ . Так как ряд (22) сходится абсолютно при всех  $x \geq 0$ , то имеем

$$|y_1 - 1| < \frac{|\lambda|A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+x)^k} \left( 1 + \frac{|\lambda|A}{2k(2k+1)} \frac{1}{(1+x)^k} + \right. \\ \left. + \frac{|\lambda|^2 A^2}{2k(2k+1)3k(3k+1)} \frac{1}{(1+x)^{2k}} + \dots \right).$$

Вследствие того что сумма ряда, стоящего в скобках, стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , отношение

$$\frac{y_1(x, \lambda) - 1}{\frac{1}{x^k}}$$

остаётся ограниченным при  $x \rightarrow \infty$ , а это и означает, что  $y_1(x, \lambda)$  обладает свойством

$$y_1(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) (-1)^n$$

есть решение нашего уравнения (18), обладающее указанным в теореме асимптотическим свойством при  $x \rightarrow \infty$ .

Построим теперь решение  $y_2(x, \lambda)$ . Положим на этот раз  $u_0(x) = x$ , т. е. будем искать  $y_2(x, \lambda)$  в виде

$$y_2(x, \lambda) = x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \lambda^n. \quad (26)$$

Имеем

$$u_1''(x) = q(x)x.$$

В дальнейшем будем различать два случая:  $k > 1$  и  $0 < k \leq 1$ .

В случае  $k > 1$  будем выбирать квадратуры так же, как и при построении  $y_1(x, \lambda)$ . Будем иметь

$$u_1(x) = \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} q(t) t dt,$$

$$u_n(x) = \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} q(t) u_{n-1}(t) dt \quad (n=2, 3, \dots).$$

Несобственные интегралы вследствие оценки (26) для  $q(x)$  в нашем случае сходятся, ибо присутствие в  $u_1(x)$  множителя  $t$  компенсируется условием  $k > 1$  (почему?).

Оценивая  $u_1(x)$ ,  $u_n(x)$  ( $n=2, 3, \dots$ ) при  $0 \leq x < \infty$ , будем иметь

$$\begin{aligned} |u_1(x)| &< \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{Atdt}{(1+t)^{k+2}} < \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{Adt}{(1+t)^{k+1}} = \\ &= \frac{A}{(k-1)k} \frac{1}{(1+x)^{k-1}}, \\ |u_n(x)| &< \frac{A^n}{(k-1)k(2k-1)2k \dots (nk-1)nk} \frac{1}{(1+x)^{nk-1}} \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что ряд (26) сходится абсолютно при всех  $\lambda$  равномерно относительно  $x$  в  $[0, \infty)$ . Следовательно, его сумма  $y_2(x, \lambda)$  есть решение уравнения (20) в интервале  $[0, \infty)$ .

Оценивая разность  $y_2(x, \lambda) - x$ , убеждаемся, что  $y_2(x, \lambda)$  обладает свойством

$$y_2(x, \lambda) = x + O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right) \quad (k > 1).$$

Рассмотрим, наконец, случай  $0 < k \leq 1$ . Решение  $y_2(x, \lambda)$  по-прежнему ищем в виде (26). Но квадратуры при определении  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) будем выбирать несколько иначе, чтобы обеспечить сходимость несобственных интегралов.

Возьмем натуральное число  $m$  такое, что  $mk \leq 1$ , но  $(m+1)k > 1$ . Тогда первые  $m$  функций  $u_n(x)$  определим так:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= - \int_0^x d\xi \int_\xi^\infty q(t) dt, \\ u_l(x) &= - \int_0^x d\xi \int_\xi^\infty q(t) u_{l-1}(t) dt \quad (l=2, \dots, m), \end{aligned}$$

а следующие определим так же, как и при построении решения  $y_1(x, \lambda)$ :

$$y_{m+n}(x) = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty q(t) y_{m+n-1}(t) dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Оценим  $u_n(x)$ . Имеем

$$|u_1(x)| < \int_{-1}^x d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A dt}{(1+t)^{k+1}} dt = \frac{A}{k} \int_{-1}^x \frac{d\xi}{(1+\xi)^k} = \frac{A}{k(1-k)} (1+x)^{1-k},$$

$$|u_2(x)| < \int_{-1}^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A}{(1+t)^{k+2}} \frac{A(1+t)^{1-k}}{k(1-k)} dt =$$

$$= \frac{A^2}{k(1-k)2k(1-2k)} (1+x)^{1-2k},$$

. . . . .

$$|u_{m-1}(x)| < \frac{A^{m-1}(1+x)^{1-(m-1)k}}{k(1-k)2k(1-2k)\dots(m-1)k[1-(m-1)k]}$$

. . . . .

При оценке  $u_m(x)$  следует различать два случая:  $mk < 1$  и  $mk = 1$ . В случае  $mk < 1$  оценка  $u_m(x)$  проводится аналогично оценкам предыдущих функций и мы получим

$$|u_m(x)| < \frac{A^m}{k(1-k)2k(1-2k)\dots mk(1-mk)} (1+x)^{1-mk}. \quad (27)$$

Если же  $mk = 1$ , то

$$|u_m(x)| < \int_0^x d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A}{(1+t)^{k+2}} \frac{A^{m-1}(1+t)^k dt}{k(1-k)2k(1-2k)\dots(1-k)k} =$$

$$= \frac{A^m}{k(1-k)2k(1-2k)\dots(1-k)k} \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} =$$

$$= \frac{A^m}{k(1-k)2k(1-2k)\dots(1-k)k} \ln(1+x). \quad (28)$$

Для удобства получения оценок дальнейших функций  $u_{m+n}(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) заменим оценки (27) и (28) одной оценкой. С этой целью, пользуясь тем, что  $1-mk < k$ , выберем положительное число  $\delta$  так:

$$0 < 1-mk < \delta < k.$$

Так как, кроме того, при любом  $\delta > 0$  справедливо (так как  $(m+1)k > 1$ ) неравенство

$$\ln(1+x) < \frac{1}{\delta} (1+x)^{\delta}, *$$

то оценки (27) и (28) можно заменить одной общей оценкой при  $0 \leq x < \infty$

$$|u_m(x)| < B(1+x)^{\delta}, \quad B > 0.$$

Теперь имеем оценки: при  $0 \leq x < \infty$

$$\begin{aligned} |u_{m+1}(x)| &< AB \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{k+2-\delta}} = \\ &= AB \frac{1}{(k-\delta)(k-\delta+1)} \frac{1}{(1+x)^{k-\delta}}, \\ |u_{m+n}(x)| &< \frac{A^n B}{(k-\delta)(k-\delta+1) \dots (nk-\delta)(nk-\delta+1)} \frac{1}{(1+x)^{nk-\delta}}. \end{aligned}$$

Вследствие найденных оценок остаток ряда (26) после  $m$ -го члена, а вместе с ним и сам ряд (26) сходится при всех  $\lambda$  равномерно относительно  $x$  в интервале  $0 \leq x < \infty$  (почему?) и представляет собою искомое второе решение  $y_2(x, \lambda)$  уравнения (20) при  $0 < k \leq 1$ , определенное при  $0 \leq x < \infty$ .

Таким образом, мы построили решение  $y_2(x, \lambda)$ , определенное в интервале  $[0, \infty)$  при любом положительном значении  $k$ .

Из оценок функций  $u_n(x)$  следует, что  $y_2(x, \lambda)$  обладает требуемым асимптотическим поведением при  $x \rightarrow \infty$ .

Действительно, в случае  $k > 1$  мы это уже показали выше. Если  $0 < k < 1$ , то разность  $y_2(x, \lambda) - x$  имеет порядок функции  $u_1(x)$ , так что

$$y_2(x, \lambda) - x = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

В случае  $k = 1$  имеем  $m = 1$  и для определения порядка  $u_1(x)$  мы можем воспользоваться оценкой (28) при  $m = 1$ .\*\* В результате получим, что

$$y_2(x, \lambda) - x = O(\ln x).$$

---

\* Справедливость этого неравенства становится очевидной, если переписать его в виде  $\ln(1+x)^{\delta} < (1+x)^{\delta}$ .

\*\* Или оценить  $u_1(x)$  для случая  $k = 1$  непосредственно. Имеем

$$|u_1(x)| < \int_0^x d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A(1+t)}{(1+t)^3} dt = \int_0^x \frac{A}{1+\xi} d\xi = A \ln(1+x).$$

Полагая в найденном решении  $y_2(x, \lambda)$  параметр  $\lambda$  равным  $-1$ , мы получаем решение  $y_2(x)$  уравнения (18), обладающее указанным в теореме асимптотическим характером поведения при  $x \rightarrow \infty$ . Теорема полностью доказана.

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{1}{x^k} y = 0. \quad (29)$$

Здесь  $q(x) = \frac{1}{x^k} = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$ ;  $k=2$ . Поэтому, согласно теореме Шпета, существует фундаментальная система решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , имеющих конечные предельные значения в особой точке  $x=0$  и обладающие свойством

$$y_1(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad y_2(x) = x + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при  $x \rightarrow \infty$ . Эти решения можно найти методом, указанным в проведенном доказательстве теоремы Шпета.\*

Найдем указанную фундаментальную систему решений, пользуясь известной (см. п. 189) связью между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати. Приведем уравнение (29) к уравнению Риккати, положив  $y' = yz$ ,  $z = z(x)$ . Получим

$$z' = -z^2 - \frac{1}{x^k}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем [103, с. 88—90]

$$z = -\frac{1}{x^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{x} + C_1 \right) + \frac{1}{x}.$$

Возвращаясь к искомой функции  $y$ , имеем

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{x} + C_1 \right),$$

откуда

$$y = C_2 x \sin \left( \frac{1}{x} + C_1 \right).$$

Записав это общее решение в виде

$$y = x \left( A_1 \sin \frac{1}{x} + A_2 \cos \frac{1}{x} \right),$$

закключаем, что рассматриваемое уравнение (29) имеет фундаментальную систему решений

$$y_1 = x \cos \frac{1}{x}, \quad y_2 = x \sin \frac{1}{x}.$$

---

\* Или методом, указанным в книге [103, с. 210].

Эта фундаментальная система решений обладает указанными выше свойствами. А именно существуют предельные значения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  в особой точке  $x=0$  (они равны нулю).

Далее, разлагая  $\sin \frac{1}{x}$  и  $\cos \frac{1}{x}$  в ряды по степеням  $\frac{1}{x}$ , имеем

$$y_1 = x \left( 1 - \frac{1}{2! x^2} + \dots \right) = x - \frac{1}{2! x} + \dots = x + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y_2 = x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{3! x^3} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3! x^2} + \dots = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Отметим в заключение настоящего параграфа, что изучение колебательного характера решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка дает нам некоторое представление о качественном поведении этих решений, которое не всегда удастся усмотреть из аналитического представления решений. Более того, исследование колебательного характера решений даже не предполагает знания аналитической структуры решений, как показывает пример 2.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

#### § 41. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

**197. Предварительные замечания.** В настоящей главе мы рассмотрим один специальный класс нормальных систем дифференциальных уравнений — л и н е й н ы е системы дифференциальных уравнений. Это системы вида (см. п. 101)

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Решения линейных систем обладают некоторыми замечательными свойствами, которые дают возможность изучить структуру общего решения этих систем (и даже в некоторых частных случаях получить общее решение в элементарных функциях или в квадратурах), а также исследовать вопросы аналитической теории, качественной теории и теории устойчивости решений (движений), теории колебаний и других разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений более полно, чем это сделано для нормальных систем общего вида.

Интерес к разработке проблем теории линейных систем, так же как линейных уравнений  $n$ -го порядка и систем линейных уравнений высшего порядка, является следствием многочисленных приложений этих систем (см. начало п. 157).

Вместе с тем изучение нормальных систем общего вида и решение связанных с ними вопросов прикладного характера во многих случаях удастся свести к рассмотрению соответствующих л и н е й н ы х систем уравнений.

При изложении общей теории линейных систем мы будем заниматься главным образом изучением с т р у к т у р ы о б щ е г о р е ш е н и я этих систем.

Будем предполагать, что в системе (1) коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ) и функции  $f_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) непрерывны в интервале  $(a, b)$ . Тогда, согласно теореме Пикара п. 126 система (1) имеет единственное решение



$$y_k = y_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_k = y_k^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где  $x = x_0$  — любая точка из интервала  $(a, b)$ , а начальные значения искомых функций, т. е. числа  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  можно выбирать произвольно. Это решение будет определено во всем интервале  $(a, b)$ , т. е. во всем интервале непрерывности функций  $p_{kl}(x)$  и  $f_k(x)$ .

Существование общего решения системы (1) при наших предположениях относительно  $p_{kl}(x)$  и  $f_k(x)$  следует из теоремы п. 136. Особых решений линейная система (1) не имеет. Всякое решение этой системы является частным решением.

Если все функции  $f_k(x) \equiv 0$  в  $(a, b)$ , то система (1) как мы уже сказали в п. 127, называется однородной. В этом случае система (1) принимает вид

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Если же в системе (1) не все функции  $f_k(x)$  тождественно равны нулю, то такая система называется неоднородной.

Прежде чем перейти к изучению структуры общего решения линейных систем покажем, что линейная система, подобно линейному уравнению  $n$ -го порядка, обладает двумя общими свойствами, а именно свойствами инвариантности относительно любого преобразования независимой переменной и относительно линейного преобразования искомых функций (см. п. 158).

1. *Линейная система (1) остается линейной при любой замене независимой переменной*

$$x = \varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  — любая функция от  $t$ , определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале  $(\alpha, \beta)$ , причем  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  во всем интервале  $(\alpha, \beta)$ .\*

Действительно, имеем

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_k}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Поэтому система (1) примет вид

\* См. сноску на с. 87.

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{l=1}^n \tilde{p}_{kl}(t) y_l + \tilde{f}_k(t) \quad (k=1, \dots, n),$$

где

$$\tilde{p}_{kl}(t) = p_{kl}(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \tilde{f}_k(t) = f_k(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Заметим, что коэффициенты  $\tilde{p}_{kl}(t)$  и функции  $\tilde{f}_k(t)$  непрерывны в интервале  $(\alpha, \beta)$ . Кроме того, ясно, что однородная система преобразуется в однородную.

Заменой независимой переменной, так же как и в случае линейного уравнения  $n$ -го порядка, можно привести данную линейную систему к более удобному виду (см., например, п. 215).

2. *Линейная система (1) остается линейной при любом неособенном линейном преобразовании неизвестных функций*

$$z_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} y_k, \quad (3)$$

где коэффициенты преобразования  $\alpha_{ik}(x)$  суть непрерывно дифференцируемые в интервале  $(a, b)$  функции от  $x$ .

В самом деле, так как преобразование (3) неособенное, то существует единственное обратное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik}(x) z_k \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где  $\beta_{ik}(x)$  непрерывно дифференцируемы в  $(a, b)$ . Преобразование (4) является также неособенным, а его коэффициенты  $\beta_{ik}(x)$  можно найти, пользуясь известным правилом Крамера. При этом коэффициенты  $\beta_{ik}(x)$  выразятся через коэффициенты  $\alpha_{ik}(x)$  по формулам

$$\beta_{ik}(x) = \frac{D_{ki}(x)}{D(A)} \quad (i, k=1, 2, \dots, n),$$

где  $D_{ki}(x)$  — алгебраическое дополнение элемента  $\alpha_{ki}(x)$  определителя  $D(A)$ .

Найдем теперь вид преобразованной системы. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dx} &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}' y_k + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} y_k' = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}' \sum_{m=1}^n \beta_{km}(x) z_m + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \left( \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}' \sum_{m=1}^n \beta_{km}(x) z_m + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \left( \sum_{l=1}^n p_{kl} \sum_{m=1}^n \beta_{lm}(x) z_m + f_k(x) \right)$$

или

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{m=1}^n \tilde{p}_{im}(x) z_m + \tilde{f}_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{im}(x) &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}' \beta_{km}(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \sum_{l=1}^n p_{kl} \beta_{lm}(x) \quad (i, m=1, 2, \dots, n), \\ \tilde{f}_i(x) &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(x) f_k(x) \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты преобразованной системы (5) непрерывны в  $(a, b)$  и что однородная система преобразуется в однородную.

Общая теория линейных систем во многом аналогична общей теории линейного уравнения  $n$ -го порядка. В частности, как мы покажем в п. 210, построение общего решения неоднородной системы приводится к построению общего решения однородной системы.

Поэтому мы займемся сначала выяснением структуры общего решения однородной системы.

**198. Свойства решений однородной системы.** Наша окончательная задача состоит в нахождении всех вещественных решений системы (2). Однако для решения этой задачи так же, как и в случае однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка, иногда оказывается выгодно сначала найти некоторые комплексные решения. Введем понятие о комплексном решении однородной системы (2).

Рассмотрим совокупность комплексных функций от вещественной переменной

$$y_k(x) = u_k(x) + i v_k(x). \quad (6)$$

Здесь  $u_k(x), v_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) суть вещественные функции от вещественной переменной  $x$ .

Будем называть совокупность функций (6) *комплексным решением* однородной системы (2) в интервале  $(a, b)$ , если эти функции обращают все уравнения системы (2) в тождество для  $a < x < b$ , т. е.

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k=1, \dots, n)$$

или

$$\frac{du_k}{dx} + i \frac{dv_k}{dx} \equiv \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) u_l + i \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) v_l \quad (7)$$

$$(k=1, \dots, n; \quad a < x < b).$$

Так как два комплексных выражения равны между собою тогда и только тогда, когда равны соответственно их вещественные и мнимые части, то, приравнивая в тождествах (7) вещественные и мнимые части, видим, что если система (2) имеет комплексное решение (6), то она имеет два вещественных решения

$$u_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$v_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

т. е. вещественные и мнимые части функций, составляющих комплексное решение (6) однородной линейной системы (2), образуют два вещественных решения этой системы.

Решения однородной линейной системы (2) обладают следующими характерными свойствами, аналогичными свойствам решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка.

1. Если

$$y_k = \varphi_k(x) \quad (k=1, \dots, n) \quad (8)$$

есть решение однородной линейной системы (2), то

$$y_k = C \varphi_k(x) \quad (k=1, \dots, n), \quad (9)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, тоже будет решением этой системы, т. е. умножая все функции, составляющие решение однородной линейной системы, на одну и ту же постоянную, мы снова получаем решение.

Действительно, подставляя функции (9) в систему (2), имеем

$$(C \varphi_k(x))' = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) C \varphi_l(x) \quad (k=1, \dots, n). \quad (10)$$

Сокращая на  $C$ , мы получим тождество, так как функции (8) составляют решение системы (2). Поэтому равенства (10) выполняются тождественно, что и требовалось доказать.

2. Пусть дано  $t$  решений системы (2)

$$\left. \begin{array}{l} y_{1k} \quad (k=1, 2, \dots, n), \\ y_{2k} \quad (k=1, 2, \dots, n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{mk} \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (11)$$

Здесь первый индекс обозначает номер решения, а второй — номер функции.

Докажем, что *линейная комбинация решений (11) с любыми постоянными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , т. е. совокупность функций\**

$$y_k = \sum_{i=1}^m C_i y_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

тоже будет решением системы (2).

В самом деле, подставляя (12) в (2), имеем

$$\left( \sum_{i=1}^m C_i y_{ik} \right)' = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) \left( \sum_{i=1}^m C_i y_{il} \right) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

или

$$\sum_{i=1}^m C_i y_{ik}' = \sum_{i=1}^m C_i \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_{il} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Так как имеют место тождества

$$y_{ik}' = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_{il} \quad (k=1, 2, \dots, n; \quad i=1, 2, \dots, m), \quad (15)$$

являющиеся результатом подстановки  $i$ -го решения в систему (2), то равенства (14), а следовательно, и равенства (13) выполняются тождественно, что и доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что нам известно  $n$  частных решений однородной системы (2). Поставим основной вопрос: при каком условии линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_n$  даст общее решение однородной системы. Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем понятие о линейной независимости систем функций.

**199. Понятие о линейной независимости систем функций.** Рассмотрим  $m$  систем функций:

$$\left. \begin{array}{l} y_{1k} \quad (k=1, \dots, n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{mk} \quad (k=1, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (16)$$

---

\* Первая функция —  $y_1$  является линейной комбинацией первых функций каждого из решений (11);  $y_2$  — комбинацией вторых функций,  $\dots$ ,  $y_n$  — комбинацией  $n$ -х функций, причем постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_m$  для всех комбинаций берутся одни и те же.

Эти системы называются *линейно независимыми* в интервале  $(a, b)$ , если не существует чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , не равных одновременно нулю, при которых для всего интервала  $(a, b)$  выполнялись бы соотношения:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

т. е. если никакие линейные комбинации функций каждого столбца таблицы (16), с одними и теми же для всех столбцов постоянными коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , не равны нулю в интервале  $(a, b)$  или, что то же, если ни одна строка таблицы (16) не является в интервале  $(a, b)$  линейной комбинацией всех остальных строк. В противном случае системы (16) называются *линейно зависимыми* в  $(a, b)$ .

В частности, две системы функций

$$\begin{aligned} y_{1k} & \quad (k=1, \dots, n), \\ y_{2k} & \quad (k=1, \dots, n) \end{aligned}$$

будут линейно независимыми в интервале  $(a, b)$ , если не существует соотношения вида:

$$\frac{y_{2k}}{y_{1k}} = p \quad (a < x < b; \quad k=1, \dots, n) \quad (18)$$

при  $p \neq 0$ ; при этом имеется в виду, что все отношения, входящие в (18), определены во всех точках интервала  $(a, b)$ .

Очевидно, что *если одна из систем функций (16) состоит из функций, тождественно равных нулю в интервале  $(a, b)$ , то эти системы функций линейно зависимы в  $(a, b)$ .*

В самом деле, пусть, например,

$$y_{11} \equiv 0, \quad y_{12} \equiv 0, \quad \dots, \quad y_{1n} \equiv 0 \quad \text{в } (a, b).$$

Тогда при любом  $\alpha_1 \neq 0$  и при  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  будут выполняться соотношения (17) в интервале  $(a, b)$ , а это и означает, что системы функций (16) линейно зависимы в  $(a, b)$ .

**Пример 1.** Системы функций

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= e^{3x}, & y_{12} &= e^{3x}, & y_{13} &= e^{3x}, \\ y_{21} &= e^{6x}, & y_{22} &= -2e^{6x}, & y_{23} &= e^{6x} \end{aligned} \right\}$$

линейно независимы в  $(-\infty, \infty)$ .

**Пример 2.** Предположим, что  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  попарно различные числа (вещественные или комплексные). Тогда система функций



Введем в рассмотрение определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *определителем Вронского* для систем функций (20) или *вронскианом* этих систем функций.

**Т е о р е м а.** Если  $n$  систем функций (20) линейно зависимы в интервале  $(a, b)$ , то  $W(x) \equiv 0$  в  $(a, b)$ .

В самом деле, мы имеем соотношения

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_{ik} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n; \ a < x < b), \quad (21)$$

где не все  $\alpha_i$  равны нулю.

Рассматривая систему (21) как однородную линейную систему алгебраических уравнений относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , мы видим, что она имеет ненулевое решение, а тогда, как известно из алгебры, определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель как раз и является вронскианом, так что последний должен обращаться в нуль во всех точках интервала  $(a, b)$ .

**201. Необходимое и достаточное условие линейной независимости  $n$  решений однородной линейной системы  $n$  уравнений.** Пусть теперь каждая из систем функций (20) является решением системы (2), так что мы имеем  $n$  решений:

$$\left. \begin{array}{l} y_{1k} \quad (k=1, \dots, n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{nk} \quad (k=1, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (22)$$

**Т е о р е м а.** Если  $n$  решений (22) линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , в котором определены и непрерывны  $p_{kl}(x)$ , то их вронскиан не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.

Предположим обратное. Пусть  $W(x_0) = 0$ , причем  $a < x_0 < b$ . Составим систему  $n$  уравнений

$$\sum_{i=1}^n C_i (y_{ik})_0 = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

где  $(f)_0 = f(x_0)$ . Определитель системы (23) равен нулю, так как он равен  $W(x_0)$ . Поэтому система (23) имеет ненулевое решение

$$C_1 = C_1^{(0)}, \quad C_2 = C_2^{(0)}, \quad \dots, \quad C_n = C_n^{(0)}.$$



Воспользовавшись формулой (12) при  $m=n$ , построим теперь решение

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Так как  $C_i^{(0)}$  удовлетворяют системе (23), то ясно, что решение (24) имеет нулевые начальные значения в точке  $x=x_0$ :

$$y_1=0, \quad y_2=0, \quad \dots, \quad y_n=0 \quad \text{при} \quad x=x_0.$$

Но тогда в силу теоремы единственности решение (24) является нулевым,  $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0, \dots, y_n \equiv 0$  (см. п. 127), так что имеем тождества

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik} \equiv 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где не все  $C_i^{(0)}$  равны нулю, т. е. решения (22) линейно зависимы в интервале  $(a, b)$ , вопреки предположению. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы предыдущего пункта следует, что для того, чтобы  $n$  решений системы (2) были линейно независимы в интервале  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался в нуль ни в одной точке этого интервала.

Однако для установления линейной независимости  $n$  решений системы (2) достаточно убедиться, что  $W(x)$  отличен от нуля хотя в одной точке интервала  $(a, b)$ . Это вытекает из следующих двух замечательных свойств вронскиана  $n$  решений системы (2).

1. Если  $W(x)$  обращается в нуль хотя в одной точке интервала  $(a, b)$ , т. е. интервала непрерывности коэффициентов системы (2), то  $W(x)$  равен нулю во всех точках этого интервала.

2. Если  $W(x)$  не равен нулю хотя в одной точке интервала  $(a, b)$ , то он не обращается в нуль ни в одной точке интервала  $(a, b)$ .

Доказательство этих свойств аналогично доказательству соответствующих свойств вронскиана решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка (см. п. 162).

Таким образом, для линейной независимости  $n$  решений системы (2) в интервале  $(a, b)$  \* необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля хотя в одной точке этого интервала.

**202. Формула Остроградского — Лиувилля — Якоби.** Указанные выше свойства вронскиана решений однородной системы (2) легко получаются из следующей замечательной формулы, выражающей (с точностью до постоянного множителя) вронскиан решений через диагональные коэффициенты системы:

---

\* Где  $(a, b)$  — интервал непрерывности коэффициентов системы (2).

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n p_{kk}(x) dx}, \quad (25)$$

где  $x=x_0$  есть любая точка из интервала  $(a, b)$  (см. п. 163).

Для доказательства этой формулы вычислим производную от вронскиана, дифференцируя по столбцам. Так как в этом случае производная от определителя  $n$ -го порядка равна сумме  $n$  определителей, получающихся из него поочередной заменой элементов 1-го, 2-го, ...,  $n$ -го столбца их производными

$$W'(x) = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k-1} & y_{1k}' & y_{1k+1} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k-1} & y_{2k}' & y_{2k+1} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk-1} & y_{nk}' & y_{nk+1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

то, заменяя справа производные  $y_{1k}'$ ,  $y_{2k}'$ , ...,  $y_{nk}'$  их значениями из тождеств (15) при  $m=n$ , получаем

$$\sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k-1} & \sum_{l=1}^n p_{kl} y_{1l} & y_{1k+1} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k-1} & \sum_{l=1}^n p_{kl} y_{2l} & y_{2k+1} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nk-1} & \sum_{l=1}^n p_{kl} y_{nl} & y_{nk+1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель, стоящий под знаком суммы, на сумму  $n$  определителей. Все получающиеся определители будут равны нулю, кроме определителя, соответствующего  $l=k$  (ибо каждый из них будет иметь два пропорциональных столбца). Определитель же, соответствующий  $l=k$ , равен  $p_{kk}(x) W(x)$ . Поэтому

$$W'(x) = \sum_{k=1}^n p_{kk}(x) W(x),$$

откуда и следует формула (25).

**203. Понятие о фундаментальной системе решений.** Совокупность  $n$  решений однородной системы (2), определенных и линейно независимых в интервале  $(a, b)$ , называется *фундаментальной системой решений* в этом интервале. Из п. 201 следует, что *система  $n$  решений будет фундаментальной системой решений в интервале  $(a, b)$  тогда и только тогда,*

когда вронскиан этих решений отличен от нуля хоть в одной точке интервала  $(a, b)$ .

**204. Теорема о существовании фундаментальной системы решений.** Если коэффициенты системы (2) непрерывны в интервале  $(a, b)$ , то существует фундаментальная система решений, определенных и непрерывных в этом интервале.

Действительно, возьмем точку  $x=x_0$  из  $(a, b)$  и построим методом Пикара  $n$  решений (22)

$$\left. \begin{array}{l} y_{1k} \quad (k=1, \dots, n), \\ y_{2k} \quad (k=1, \dots, n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{nk} \quad (k=1, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (26)$$

со следующими начальными значениями в этой точке:

$$\left. \begin{array}{l} y_{11}=1, \quad y_{12}=0, \quad \dots, \quad y_{1n}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0, \\ y_{21}=0, \quad y_{22}=1, \quad \dots, \quad y_{2n}=0 \quad \text{при} \quad x=x_0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{n1}=0, \quad y_{n2}=0, \quad \dots, \quad y_{nn}=1 \quad \text{при} \quad x=x_0. \end{array} \right\}$$

Вронскиан решений (26) в точке  $x=x_0$  равен единице. Следовательно, система решений (26) — фундаментальная.

Так как при доказательстве теоремы вместо чисел 1 и 0 можно взять любые  $n^2$  чисел, определитель из которых не нуль, то ясно, что существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений.

Построенная фундаментальная система (26) называется *нормированной* в точке  $x=x_0$ . Из теоремы существования и единственности следует, что для каждой точки  $x=x_0$  из  $(a, b)$  существует одна и только одна нормированная в этой точке фундаментальная система решений.

Возникает вопрос: существует ли связь между различными фундаментальными системами, в частности, можно ли любую фундаментальную систему выразить через нормированную. Ответ на этот вопрос мы даем в п. 231.

*Замечание.* Если коэффициенты системы (2) голоморфны в области  $|x-x_0| < \rho$  ( $0 < \rho \leq \infty$ ), то, применяя теорему Коши п. 148, так же, как и выше, убеждаемся, что существует фундаментальная система решений, голоморфных по крайней мере в этой области.\*

---

\* Понятие регулярной особой точки однородного линейного уравнения распространяется на однородную линейную систему [см. 90; 138, т. III, ч. 2; 28].

**205. Построение общего решения.** Так же, как и в случае однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка, знание фундаментальной системы решений дает возможность построить общее решение системы (2).

**Основная теорема.** Если (26) есть фундаментальная система решений однородной линейной системы (2) в интервале  $(a, b)$ , то формулы

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik}^* \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (27)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, дают общее решение системы в области

$$a < x < b, \quad |y_k| < \infty \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

т. е. во всей области задания системы (2).

Действительно система (27) разрешима относительно произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в области (28), ибо (27) есть линейная система, причем ее определитель, будучи равным  $W(x)$ , отличен от нуля, так как (26) есть фундаментальная система решений.

Кроме того, по второму свойству решений однородной линейной системы совокупность функций (27) является решением системы (2) при всех значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Поэтому, согласно определению общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений, данному в п. 107, совокупность функций (27) является общим решением системы (2) в области (28).

Формула (27) содержит в себе все решения системы (2).

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \quad y_2 = y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \quad (29)$$

где  $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  — любая точка области (28), нужно подставить начальные данные в систему (27). Будем иметь

$$y_k^{(0)} = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik}^{(0)} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (30)$$

Разрешая эту систему относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (что возможно, ибо определитель ее, будучи равным  $W(x_0)$ , отличен от нуля), получим:

$$C_1 = C_1^{(0)}, \quad C_2 = C_2^{(0)}, \quad \dots, \quad C_n = C_n^{(0)}.$$

Подставив эти значения  $C_1, C_2, \dots, C_n$  в общее решение (27), найдем

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik}. \quad (31)$$

Это и есть искомое решение. Других решений с теми же начальными условиями (29) нет.

Из формулы (31) мы видим, что всякое частное решение однородной линейной системы (2) (а следовательно, и вообще всякое решение этой системы) представляет собою линейную комбинацию с постоянными коэффициентами из частных решений, составляющих фундаментальную систему решений.

Постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , определяемые из системы (30), являются линейными функциями от начальных значений  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  искомых функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Эти функции будут наиболее простыми, если фундаментальная система решений нормирована в точке  $x=x_0$  (в которой заданы начальные значения решения).

В самом деле, в этом случае система (30) принимает вид

$$y_k^{(0)} = C_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Поэтому, пользуясь формулой общего решения (27), получаем, что решение с начальными условиями (29) дается формулой

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_i^{(0)} y_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Эту формулу можно рассматривать и как общее решение системы (2) в форме Коши, если считать начальные значения  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  произвольными.

Доказанная теорема и дает ответ на вопрос, поставленный в конце п. 198. *Чтобы линейная комбинация  $n$  решений однородной системы (2) с произвольными постоянными коэффициентами  $C_1, C_2, \dots, C_n$  давала ее общее решение, необходимо и достаточно, чтобы эти решения были линейно независимы, т. е. чтобы они составляли фундаментальную систему решений.*

**206. Число линейно независимых решений однородной линейной системы  $n$  уравнений. Первые интегралы.** Однородная система (2) не может иметь более чем  $n$  линейно независимых частных решений.

Действительно, пусть мы имеем  $n+1$  частных решений:

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n, n+1). \quad (32)$$

Рассмотрим первые  $n$  решений. Если они линейно зависимы, то и все наши  $n+1$  решений линейно зависимы. Если же решения  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) линейно независимы, то, согласно основной теореме, имеем

$$y_{n+1, k} = \sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

или

$$C_1^{(0)} y_{1k} + C_2^{(0)} y_{2k} + \dots + C_n^{(0)} y_{nk} + C_{n+1}^{(0)} y_{n+1, k} = 0$$

$$(C_{n+1}^{(0)} = -1; \quad k = 1, 2, \dots, n),$$

так что  $n+1$  частных решений (32) снова оказываются линейно зависимыми.

Разрешая систему (27)

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

относительно  $C_i$ , мы получим  $n$  первых интегралов однородной системы (2) в виде

$$\sum_{k=1}^n y_k \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $W_{ki}(x)$  — алгебраическое дополнение элемента  $y_{ki}(x)$  вронскиана  $W(x)$ .

Заметим, что все  $n$  интегралов

$$\sum_{k=1}^n y_k \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

являются линейными функциями от искомых функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

**207. Понятие о сопряженной (присоединенной) системе.** Система

$$\frac{dz_k}{dx} = - \sum_{i=1}^n p_{ik}(x) z_h, \quad (33)$$

матрица коэффициентов которой

$$\left\| \begin{array}{cccc} -p_{11}(x) & -p_{21}(x) & \dots & -p_{n1}(x) \\ -p_{12}(x) & -p_{22}(x) & \dots & -p_{n2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_{1n}(x) & -p_{2n}(x) & \dots & -p_{nn}(x) \end{array} \right\|$$

получается из матрицы коэффициентов системы (2)

$$\left\| \begin{array}{ccc} p_{11}(x) & p_{12}(x) & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & p_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & p_{nn}(x) \end{array} \right\|$$

транспонированием\* и переменной знака, называется *сопряженной* с системой (2) или *присоединенной* к системе (2). Ясно, что, обратно, система (2) является сопряженной с системой (33), так что системы (2) и (33) взаимно сопряжены.

Покажем, что задача интегрирования системы (2) равносильна задаче интегрирования сопряженной с нею системы (33).

С этой целью убедимся сначала в том, что два любых частных решения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $z_1, z_2, \dots, z_n$  систем (2) и (33) связаны соотношением

$$\sum_{k=1}^n y_k z_k = C, \quad (34)$$

где  $C$  — постоянная. В самом деле, вычисляя производную по  $x$  от левой части, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n y_k z_k &= \sum_{k=1}^n z_k \frac{dy_k}{dx} + \sum_{k=1}^n y_k \frac{dz_k}{dx} = \\ &= \sum_{k=1}^n z_k \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l - \sum_{k=1}^n y_k \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) z_l = \\ &= \sum_{k=1}^n z_k \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l - \sum_{l=1}^n y_l \sum_{k=1}^n p_{kl}(x) z_k = \\ &= \sum_{k=1}^n z_k \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l - \sum_{k=1}^n z_k \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда и вытекает соотношение (34).

Таким образом, знание одного частного решения  $z_1, z_2, \dots, z_n$  системы (33) дает возможность получать без интегрирования один первый интеграл (34) системы (2), причем его левая часть есть линейная функция от искоемых функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Если известна фундаментальная система решений системы (33)

---

\* Т. е. заменой строк столбцами.

$$\left. \begin{array}{l} z_{1k}(x) \quad (k=1, \dots, n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_{nk}(x) \quad (k=1, \dots, n), \end{array} \right\}$$

то, подставляя поочередно эти решения в соотношение (34), мы получим  $n$  независимых первых интегралов системы (2):

$$\sum_{l=1}^n z_{kl} y_l = C_l,$$

т. е. имеем общий интеграл системы (2).

Система называется *самосопряженной*, если она совпадает с сопряженной с нею системой. Коэффициенты самосопряженной системы должны удовлетворять условию

$$p_{kl} = -p_{lk} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, диагональные коэффициенты самосопряженной системы равны нулю. Из соотношения (34) следует, что *всякие два частных решения*  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$  и  $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$  *самосопряженной системы подчинены условию*

$$\sum_{k=1}^n y_{1k} y_{2k} = \text{const.}$$

В частности, для *всякого частного решения*  $y_1, y_2, \dots, y_n$  *самосопряженной системы имеем*

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 = \text{const.} \quad (35)$$

Отсюда следует, что *всякое частное решение самосопряженной системы ограничено во всем интервале*  $(a, b)$  *непрерывности коэффициентов, т. е.*

$$|y_k(x)| \leq M \quad \text{при} \quad a < x < b \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $M$  — положительная постоянная.

Кроме того, отсюда следует, что *порядок самосопряженной системы всегда можно понизить на единицу*, ибо она имеет первый интеграл (35).

В частности, самосопряженная система двух уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = p(x)z, \\ \frac{dz}{dx} = -p(x)y \end{array} \right\}$$



допускает первый интеграл  $y^2 + z^2 = C_1^2$  и всегда интегрируется в квадратурах.

Можно доказать, что интегрирование самосопряженной системы трех уравнений приводится к интегрированию уравнения Риккати, а интегрирование самосопряженной системы четырех уравнений приводится к интегрированию двух уравнений Риккати [39, с. 430, 431].

**208. Построение однородной линейной системы уравнений, имеющей заданную фундаментальную систему решений.** Построим однородную линейную систему  $n$  уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (36)$$

имеющую фундаментальную систему решений:

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

(ср. п. 168).

Подставляя поочередно решения (37) в  $k$ -е уравнение системы (36) ( $k=1, 2, \dots, n$ ), получим

$$\frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_{il} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда определятся все  $p_{kl}(x)$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ) и притом единственным образом (почему?). Таким образом, фундаментальной системе решений (37) соответствует одна однородная линейная система вида (36). Эту систему можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_k}{dx} & \frac{dy_{1k}}{dx} & \frac{dy_{2k}}{dx} & \dots & \frac{dy_{nk}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_2 & y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(почему?).

**Пример.** Построить однородную линейную систему двух уравнений, имеющую следующую фундаментальную систему решений:

$$\left. \begin{array}{ll} y_1 = 1+x, & z_1 = x, \\ y_2 = 2, & z_2 = x. \end{array} \right\}$$

Так как  $W(x) = x(x-1)$ , то мы ограничимся интервалом  $(0, 1)$ .

Искомой системой будет:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 & 0 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & 1 & 1 \\ y & 1+x & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

Перепишывая ее в нормальной форме, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x-1} y - \frac{2}{x(x-1)} z, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} z. \end{aligned} \right\}$$

Точки  $x=0$  и  $x=1$ , в которых  $W(x)$  обращается в нуль, являются особыми точками системы.

## § 42. НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

**209. Структура общего решения неоднородной системы.** Рассмотрим теперь неоднородную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Предположим, что нам известно некоторое частное решение этой системы

$$y_k = y_k^{(1)} \quad (k=1, \dots, n),$$

так что мы имеем тождества

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l^{(1)} + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Введем новые неизвестные функции  $z_1, z_2, \dots, z_n$  по формулам

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Подставляя функции (3) в неоднородную систему (1), получим

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l^{(1)} + \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) z_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, в силу тождеств (2), получаем для функций  $z_1, z_2, \dots, z_n$  следующую однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) z_l \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Эта система называется *однородной системой, соответствующей неоднородной системе (1)*.

Общее решение однородной системы (4) дается формулой

$$z_k = \sum_{i=1}^n C_i z_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $\{z_{ik}\}$  — некоторая фундаментальная система решений этой однородной системы.

Подставляя (5) в (3), получаем

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^n C_i z_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Все решения системы (1) содержатся в формуле (6). Эта формула представляет собою общее решение системы (1) в области

$$a < x < b, \quad |y_k| < \infty \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

т. е. во всей области задания системы (1) (почему?).

Таким образом, для нахождения общего решения неоднородной системы (1) достаточно найти одно какое-либо частное решение этой системы и прибавить к нему общее решение соответствующей однородной системы (4).

## 210. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Общий прием нахождения частного решения, а вместе с тем и построения общего решения неоднородной системы в случае, когда мы умеем проинтегрировать соответствующую однородную систему, дается следующей теоремой.

**Теорема** (ср. п. 171). Если известна фундаментальная система решений однородной системы (4), то общее решение неоднородной системы (1) может быть найдено при помощи квадратур.

Для доказательства этой теоремы применим метод вариации произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы (1) в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

где  $\{z_{ik}\}$  — фундаментальная система решений однородной системы (4), а  $C_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от  $x$ . Выберем эти функции так, чтобы формула (8) давала решение системы (1).

Подставляя (7) в (1), получаем

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{ih}' = \sum_{l=1}^n p_{hl}(x) \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{il} + f_h(x) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

или

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{ih}' = \sum_{i=1}^n C_i(x) \sum_{l=1}^n p_{hl}(x) z_{il} + f_h(x) \\ (k=1, 2, \dots, n).$$

Переписав эти равенства в виде

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^n C_i(x) \left( z_{ih}' - \sum_{l=1}^n p_{hl}(x) z_{il} \right) = f_h(x) \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

и приняв во внимание, что  $\{z_{ik}\}$  — фундаментальная система решений однородной системы (4), мы приходим к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка для определения  $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ):

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_{ik} = f_h(x) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Эта система разрешима относительно  $C_i'(x)$  (ибо ее определитель, будучи равным  $W(x)$ , отличен от нуля во всем интервале  $(a, b)$ ). Получим

$$C_i'(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Интегрируя, находим

$$C_i(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(x) \frac{W_{ki}(x)}{W(x)} dx + C_i \quad (i=1, 2, \dots, n).*$$

---

\* Мы взяли определенный интеграл с переменным верхним пределом. Можно было брать и неопределенный интеграл.

Подставляя эти значения  $C_i(x)$  в формулу (6), найдем решение системы (1) в виде

$$y = \sum_{i=1}^n z_{ik} \sum_{s=1}^n \int_{x_0}^x f_s(x) \frac{W_{si}(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^n C_i z_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Полагая здесь  $C_1=C_2=\dots=C_n=0$ , получаем решение

$$y_k^{(1)} = \sum_{i=1}^n z_{ik} \sum_{s=1}^n \int_{x_0}^x f_s(x) \frac{W_{si}(x)}{W(x)} dx \quad (k=1, 2, \dots, n),^*$$

так что (10) можно записать в виде (6) и, следовательно, решение, определяемое формулой (10), является общим решением неоднородной системы (1) в области (7). Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что проблема интегрирования неоднородной линейной системы сводится к проблеме построения фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Поэтому особый интерес представляют такие линейные системы уравнений, у которых фундаментальная система решений соответствующей однородной системы находится в элементарных функциях. К числу таких систем относятся прежде всего системы с постоянными коэффициентами, изучению которых посвящена глава десятая.

---

\* Заметим, что это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке  $x=x_0$ .

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 43. МЕТОД ЭЙЛЕРА

**211. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы в случае различных корней характеристического уравнения.** В этой главе мы будем изучать линейные системы уравнений.

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl}y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{kl}$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ) — постоянные вещественные числа, а  $f_k(x)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — функции от  $x$ , непрерывные в интервале  $(a, b)$ .

Применяя общую теорию линейных систем уравнений, изложенную в предыдущей главе, мы покажем, что *система (1) всегда может быть проинтегрирована в конечном виде, т. е. либо в элементарных функциях, либо в квадратурах.*

Так как интегрирование неоднородной линейной системы приводится к интегрированию соответствующей однородной системы, то рассмотрим сначала вопрос о построении общего решения однородной системы

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl}y_l \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

В силу теоремы п. 205 для построения общего решения системы (2) достаточно найти хоть одну фундаментальную систему решений.

Применяя теорему п. 204, мы видим, что существует фундаментальная система решений, определенных и непрерывных в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Более того, согласно замечанию п. 204, существует фундаментальная система решений, состоящая из целых функций.

Мы покажем, что *фундаментальная система решений может быть построена из элементарных целых функций.*

По аналогии с однородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами будем искать частное решение системы (2) в виде

$$y_k = \gamma_k e^{\lambda x} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  и  $\lambda$  — некоторые постоянные числа, причем числа  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  не равны нулю одновременно, ибо в противном случае мы получили бы очевидное нулевое решение, которое не может входить в состав фундаментальной системы решений, и, следовательно, не может быть использовано для построения общего решения.

Следует обратить особое внимание на то, что число  $\lambda$  мы берем одно и то же для всех функций, составляющих решение.

Подставляя функции (3) в систему (2), имеем

$$\lambda \gamma_k e^{\lambda x} = \sum_{l=1}^n a_{kl} \gamma_l e^{\lambda x} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Сокращая на  $e^{\lambda x}$ , получим линейную алгебраическую систему для определения чисел  $\gamma_k$

$$\lambda \gamma_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} \gamma_l \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Здесь мы существенно воспользовались тем, что число  $\lambda$  в формуле (3) одно и то же для всех функций  $y_k$ .

Переносим в системе (4) все члены вправо и используя известный символ Кронеккера  $\delta_{kl}$ ,\* запишем эту систему в виде

$$\sum_{l=1}^n (a_{kl} - \delta_{kl} \lambda) \gamma_l = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Нас интересует ненулевое решение этой системы, ибо в противном случае решение (3) будет нулевым. Система (5) имеет ненулевое решение лишь при условии, что ее определитель равен нулю

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* системы (2), его корни — *характеристическими числами*, а определитель  $\Delta(\lambda)$  —

---

\*  $\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$





Поэтому одно из уравнений системы (7) есть следствие остальных и эта система имеет ненулевое решение, определенное с точностью до произвольного множителя пропорциональности  $A_i$ :

$$\gamma_{ih} = A_i m_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Например, в качестве  $\gamma_{ih}$  можно взять алгебраические дополнения элементов любой строки определителя  $\Delta(\lambda_i)$ , если не все они равны нулю. В самом деле, так как сумма произведений элементов какой-либо строки определителя  $\Delta(\lambda_i)$  на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, а сумма произведений элементов строки на их алгебраические дополнения равна самому определителю  $\Delta(\lambda_i)$ , т. е. снова равна нулю, то ясно, что, заменив в системе (7) неизвестные  $\gamma_k$  взятыми алгебраическими дополнениями, мы получим тождества.

Фиксируя в формулах (9) множитель  $A_i$ , мы получим определенное решение системы (7), соответствующее характеристическому числу  $\lambda_i$ .

Подставляя теперь в (3) вместо  $\lambda$  последовательно характеристические числа  $\lambda_i$ , а вместо  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — соответствующие им решения системы (7), определяемые формулами (9) при фиксированных множителях  $A_i$ , получим  $n$  решений системы (2):

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \gamma_{11} e^{\lambda_1 x}, & y_{12} &= \gamma_{12} e^{\lambda_1 x}, & \dots, & & y_{1n} &= \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x}; \\ y_{21} &= \gamma_{21} e^{\lambda_2 x}, & y_{22} &= \gamma_{22} e^{\lambda_2 x}, & \dots, & & y_{2n} &= \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x}; \\ &\dots & & & & & & \\ y_{n1} &= \gamma_{n1} e^{\lambda_n x}, & y_{n2} &= \gamma_{n2} e^{\lambda_n x}, & \dots, & & y_{nn} &= \gamma_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$  (см. п. 199, пример 2).

Если при этом все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  вещественны, то все решения (10) тоже будут вещественными.

Таким образом, в случае различных вещественных корней характеристического уравнения система (2) имеет  $n$  вещественных линейно независимых частных решений вида (9), так что последние образуют фундаментальную систему решений.

Поэтому в силу теоремы п. 205 формулы

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{21} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \gamma_{n1} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 &= C_1 \gamma_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \gamma_{n2} e^{\lambda_n x}, \\ &\dots \\ y_n &= C_1 \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{aligned} \right\} -$$

дают общее решение системы (2) в области

$$|x| < \infty, \quad |y_1| < \infty, \quad |y_2| < \infty, \dots, \quad |y_n| < \infty. \quad (11)$$

Если характеристические числа различны, но среди них есть комплексные, то последние входят сопряженными парами (почему?). Пусть  $a+ib$  и  $a-ib$  — простые корни характеристического уравнения. Корню  $a+ib$  соответствует, согласно формуле (3), решение

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x}, \quad \dots, \quad y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x}.$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — комплексные числа. Полагая

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \quad \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

получаем решение

$$\begin{aligned} y_1 &= (\gamma_{11} + i\gamma_{21}) e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22}) e^{(a+ib)x}, \\ &\dots, \quad y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n}) e^{(a+ib)x}. \end{aligned}$$

Это решение комплексное. Отделяя в нем вещественные и мнимые части, мы получим, согласно п. 198, два вещественных решения:

$$\left. \begin{aligned} y_{1k} &= e^{ax} (\gamma_{1k} \cos bx - \gamma_{2k} \sin bx), \\ y_{2k} &= e^{ax} (\gamma_{1k} \sin bx + \gamma_{2k} \cos bx). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

при  $k=1, 2, \dots, n$ . Эти решения, очевидно, линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Нетрудно убедиться, что сопряженный корень  $a-ib$  не порождает новых вещественных линейно независимых частных решений.

Таким образом, если все характеристические числа — различные и вещественные, то мы получаем соответствующие им вещественные линейно независимые частные решения в виде (10). Если же все характеристические числа — различные, но среди них есть комплексные, то последние обязательно входят сопряженными парами и каждой паре таких характеристических чисел соответствуют два линейно независимых частных решения вида (12). Всего мы получим  $n$  вещественных частных решений. Все эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ .

В самом деле, предположим обратное. Тогда, написав соответствующую систему соотношений между этими решениями и перейдя в ней от тригонометрических функций к показательным, мы получили бы, что системы функций вида (10), где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — различные числа, оказались бы линейно зависимыми, что противоречит утверждению примера 2 п. 199.

Общее решение системы (2) в области (11) представляет собою линейные комбинации построенных  $n$  вещественных линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами.

**Пример 1.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} &= 4y + 5z. \end{aligned} \right\}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0,$$

находим  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 9$ , так что характеристические числа различны и вещественны.

Составляем систему для определения чисел  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , соответствующих характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$ . Матрица коэффициентов этой системы получается из матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

заменой  $\lambda$  на  $\lambda_1 = 1$ , так что искомая система будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 &= 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь, как и следовало ожидать, второе уравнение является следствием первого (оно даже совпадает с первым уравнением) и его можно было и не выписывать. Полагая  $\gamma_1 = 1$ , находим  $\gamma_2 = -1$ .

Таким образом, характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$  соответствует решение

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x.$$

Аналогично, решая систему, соответствующую характеристическому числу  $\lambda_2 = 9$ :

$$\left. \begin{aligned} -4\gamma_1 + 4\gamma_2 &= 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

находим  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1$ , так что этому характеристическому числу соответствует решение:

$$y_2 = e^{9x}, \quad z_2 = e^{9x}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^x, & z_1 &= -e^x, \\ y_2 &= e^{9x}, & z_2 &= e^{9x}. \end{aligned} \right\}$$

Беря линейную комбинацию (по столбцам!), получаем общее решение:

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z &= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \end{aligned} \right\}$$

**Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

имеет комплексные сопряженные корни  $\lambda_1 = 2+i$ ,  $\lambda_2 = 2-i$ . Найдем решение, соответствующее  $\lambda_1$ . Это решение имеет вид

$$y = \gamma_1 e^{(2+i)x}, \quad z = \gamma_2 e^{(2+i)x}.$$

Числа  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  ищем из системы

$$\left. \begin{aligned} -i\gamma_1 - \gamma_2 &= 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Полагая  $\gamma_1 = 1$ , находим  $\gamma_2 = -i$ , так что искомым решением будет

$$y = e^{(2+i)x}, \quad z = -ie^{(2+i)x}.$$

Это решение комплексное. Отделяя в нем вещественные и мнимые части, получим два вещественных решения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos x, & z_1 &= e^{2x} \sin x, \\ y_2 &= e^{2x} \sin x, & z_2 &= -e^{2x} \cos x. \end{aligned} \right\}$$

Эти решения составляют фундаментальную систему решений, так что общим решением будет

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z &= e^{2x} (C_1 \sin x - C_2 \cos x). \end{aligned} \right\}$$

**Пример 3.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет различные и притом вещественные корни  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=3$ ,  $\lambda_3=6$ , так что фундаментальная система решений имеет вид (10).

Найдем сначала частное решение вида

$$y_{11} = \gamma_{11}e^{2x}, \quad y_{12} = \gamma_{12}e^{2x}, \quad y_{13} = \gamma_{13}e^{2x}, \quad (13)$$

соответствующие характеристическому числу  $\lambda_1=2$ . В качестве чисел  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_{1n}$  можно взять алгебраические дополнения элементов первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

который получается из характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  заменой  $\lambda$  на  $\lambda_1=2$ . Получаем

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \gamma_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \gamma_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

или (деля на 2)

$$\gamma_{11}=1, \quad \gamma_{12}=0, \quad \gamma_{13}=-1.$$

Подставляя эти значения  $\gamma_{1k}$  в (13) получим:

$$y_{11} = e^{2x}, \quad y_{12} = 0, \quad y_{13} = -e^{2x}.$$

Аналогично найдем, что в качестве чисел  $\gamma_{2k}$ ,  $\gamma_{3k}$ , соответствующих характеристическим числам  $\lambda_2=3$ ,  $\lambda_3=6$ , можно взять  $\gamma_{21}=1$ ,  $\gamma_{22}=1$ ,  $\gamma_{23}=1$ ;  $\gamma_{31}=1$ ,  $\gamma_{32}=-2$ ,  $\gamma_{33}=1$ .

Фундаментальной системой решений будет:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= e^{2x}, & y_{12} &= 0, & y_{13} &= -e^{2x}, \\ y_{21} &= e^{3x}, & y_{22} &= e^{3x}, & y_{23} &= e^{3x}, \\ y_{31} &= e^{6x}, & y_{32} &= -2e^{6x}, & y_{33} &= e^{6x}, \end{aligned} \right\}$$

так что общее решение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 &= C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}. \end{aligned} \right\}$$

**212. Случай наличия кратных корней характеристического уравнения.** Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то изложенный выше способ построения фундаментальной системы решений, очевидно, не применим.

Однако и в этом случае удается построить фундаментальную систему решений в элементарных функциях.

Заметим, что если  $\lambda_1$  есть простое характеристическое число, то независимо от того, будут среди остальных характеристических чисел встречаться кратные или нет, ему всегда соответствует одно частное решение вида

$$y_k = \gamma_k e^{\lambda_1 x} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — некоторые постоянные числа, определяемые точностью до постоянного множителя.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти частные решения, соответствующие кратному характеристическому числу.

При этом, так же как и для линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка, оказывается, что *одному характеристическому числу кратности  $k$  соответствует ровно  $k$  линейно независимых частных решений*. Это утверждение следует из доказываемой ниже теоремы, устанавливающей аналитическую структуру семейства решений, соответствующих характеристическому числу кратности  $k$ .

*Т е о р е м а. Если  $\lambda_1$  есть характеристическое число кратности  $k$ , то ему соответствует решение вида*

$$y_m = P_m(x) e^{\lambda_1 x} \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

где  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  суть полиномы от  $x$  степени не выше, чем  $k-1$ , имеющие в совокупности  $k$  произвольных коэффициентов.

*В частности, может случиться, что все эти полиномы вырождаются в постоянные числа. В таком случае  $k$ -кратному характеристическому числу  $\lambda_1$  будет соответствовать решение вида*

$$y_m = \gamma_m e^{\lambda_1 x} \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Однако здесь  $k$  из коэффициентов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  являются произвольными, в то время как для простого характеристического числа произвольным является только один из них.

Следуя Э. Гурса [39, с. 420—422], мы докажем здесь эту теорему методом полной математической индукции,\* опираясь на то, что при  $k=1$  утверждение теоремы справедливо (почему?).

Не умаляя общности, мы можем считать, что  $\lambda_1=0$ , ибо этого всегда можно добиться введением новых искомых функций.

В самом деле, пусть  $\lambda_1 \neq 0$ . Положив в системе (5)

$$y_k = \eta_k e^{\lambda_1 x} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

---

\* Непосредственное доказательство этой теоремы, основанное на использовании теории элементарных делителей матрицы коэффициентов системы (2), см. в п. 234.



$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , связанные с искомыми функциями  $y_1, y_2, \dots, y_n$  соотношениями

$$y_1 = Y_1, \quad y_2 = \alpha_2 Y_1 + Y_2, \quad \dots, \quad y_n = \alpha_n Y_1 + Y_n. \quad (19)$$

Найдем систему дифференциальных уравнений для функций  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .  
Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= (a_{11} + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n) Y_1 + a_{12}Y_2 + \dots + a_{1n}Y_n, \\ \frac{dY_2}{dx} &= (a_{21} + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n) Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots + a_{2n}Y_n - \alpha_2 \frac{dY_1}{dx}, \\ &\vdots \\ \frac{dY_n}{dx} &= (a_{n1} + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n) Y_1 + a_{n2}Y_2 + \dots + a_{nn}Y_n - \alpha_n \frac{dY_1}{dx}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь все коэффициенты при  $Y_1$  равны нулю вследствие (18). Поэтому, заменив во всех уравнениях, начиная со второго,  $\frac{dY_1}{dx}$  ее значение из первого уравнения, получим искомую систему дифференциальных уравнений для функций  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= a_{12}Y_2 + \dots + a_{1n}Y_n, \\ \frac{dY_2}{dx} &= (a_{22} - \alpha_2 a_{12}) Y_2 + \dots + (a_{2n} - \alpha_2 a_{1n}) Y_n, \\ &\vdots \\ \frac{dY_n}{dx} &= (a_{n2} - \alpha_n a_{12}) Y_2 + \dots + (a_{nn} - \alpha_n a_{1n}) Y_n. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \alpha_2 a_{12} - \lambda & a_{2n} - \alpha_2 a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} - \alpha_n a_{12} & a_{nn} - \alpha_n a_{1n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Легко убедиться, что  $\Delta_1(\lambda) = \Delta(\lambda)$ . В самом деле, прибавив ко всем строкам определителя  $\Delta_1(\lambda)$ , начиная со второй, элементы первой строки, умноженные соответственно на  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ , и вычтя из первого столбца полученного определителя элементы остальных столбцов, умноженные



соответственно на  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ , мы получим определитель  $\Delta(\lambda)$ , если принять во внимание (18).

С другой стороны ясно, что  $\Delta_1(\lambda) = -\lambda\Delta_2(\lambda)$ , где  $\Delta_2(\lambda)$  — характеристический полином для системы, составленной из всех уравнений системы (20), начиная со второго. Таким образом,  $\Delta(\lambda) = -\lambda\Delta_2(\lambda)$ . Поэтому  $\lambda=0$  является корнем кратности  $k-1$  уравнения  $\Delta_2(\lambda)=0$ .

Этому корню соответствует решение указанной выше системы дифференциальных уравнений для функций  $Y_2, \dots, Y_n$  в виде

$$Y_2 = P_2^{(1)}, \dots, Y_n = P_n^{(1)}, \quad (21)$$

где  $P_2^{(1)}, \dots, P_n^{(1)}$  — полиномы степени не выше, чем  $k-2$ , причем среди всех коэффициентов этих полиномов ровно  $k-1$  коэффициентов являются произвольными.

Подставляя решение (21) в правую часть первого из уравнений системы (20) и интегрируя, найдем  $Y_1$  в виде полинома  $P_1^{(1)}$  степени не выше, чем  $k-1$ , содержащего одну новую произвольную постоянную.

Обратимся, наконец, к формулам (19). Заменив в них  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  на  $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_n^{(1)}$ , мы найдем решение системы (2) в виде (17), чем и завершается доказательство теоремы.

Вопрос о том, какова фактически степень полиномов  $P_m^{(1)}$ , мы выясним в п. 234. В частности, мы установим там, когда эти полиномы достигают максимальной степени  $k-1$  и когда приводятся к постоянным числам.

На практике нет необходимости в преобразовании характеристического числа  $\lambda_1$  к нулевому характеристическому числу.

*Решение, соответствующее характеристическому числу  $\lambda_1$ , нужно искать в виде (15), считая  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  полиномами  $(k-1)$ -й степени с неопределенными коэффициентами и подставляя (15) в (2), выразить все коэффициенты через  $k$  из них, которые остаются произвольными.*

Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим  $k$  линейно независимых решений, соответствующих характеристическому числу  $\lambda_1$ . Все эти частные решения будут составлены из произведений показательной функции  $e^{\lambda_1 x}$  на полиномы от  $x$ , степени которых не превышают  $k-1$ . Если же полиномы в формулах (15) вырождаются в постоянные числа, то мы получим  $k$  линейно независимых частных решений такого же вида, как и в случае простого корня характеристического уравнения.

Если  $\lambda_1$  — вещественное характеристическое число, то построенные выше  $k$  линейно независимых решений будут вещественными.

Если же система (2) имеет комплексное характеристическое число  $a+ib$  кратности  $k$ , то оно имеет сопряженное характеристическое число  $a-ib$  той же кратности.

Построив  $k$  линейно независимых комплексных решений, соответствующих характеристическому числу  $a+ib$ , и отделив в них вещественные и мнимые части, мы получим  $2k$  вещественных линейно независимых частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному характеристическому числу соответствует одно частное решение, каждой паре простых сопряженных комплексных характеристических чисел соответствует два вещественных линейно независимых решения, вещественному характеристическому числу кратности  $k$  соответствует  $k$  вещественных линейно независимых частных решений, а каждой паре сопряженных комплексных характеристических чисел кратности  $k$  соответствует  $2k$  вещественных линейно независимых частных решений. Всего получается  $n$  вещественных решений. Все эти решения линейно независимы в интервале  $(-\infty, \infty)$ , так что они образуют фундаментальную систему решений. Взяв линейные комбинации решений этой фундаментальной системы (по столбцам) с одними и теми же произвольными постоянными  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , мы получим общее решение системы (2) в области (11). При этом в самом общем случае решение системы (2) состоит из функций, являющихся линейными комбинациями (с произвольными постоянными коэффициентами) экспонент, полиномов и тригонометрических функций вида  $\cos bx, \sin bx$ .

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4y - z, \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

имеет один двукратный корень  $\lambda_{1,2} = 3$ . Поэтому существует решение вида

$$y = (A_1x + A_2)e^{3x}, \quad z = (B_1x + B_2)e^{3x}.$$

Подставляя его в систему (22) и сокращая на  $e^{3x}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} 3(A_1x + A_2) + A_1 &= 4(A_1x + A_2) - (B_1x + B_2), \\ 3(B_1x + B_2) + B_1 &= A_1x + A_2 + 2(B_1x + B_2) \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (-A_1 + B_1)x + A_1 - A_2 + B_2 &= 0, \\ (B_1 - A_1)x + B_1 + B_2 - A_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов  $A_1, A_2, B_1, B_2$ :

$$-A_1 + B_1 = 0, \quad A_1 - A_2 + B_2 = 0, \quad B_1 - A_1 = 0, \quad B_1 + B_2 - A_2 = 0.$$

Среди этих уравнений независимых лишь два

$$B_1 - A_1 = 0, \quad A_1 - A_2 + B_2 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 - A_1,$$

причем, как и следовало ожидать, два коэффициента ( $A_1$  и  $A_2$ ) остаются произвольными.

Таким образом, система (22) имеет решение

$$y = (A_1 x + A_2) e^{3x}, \quad z = (A_1 x + A_2 - A_1) e^{3x}, \quad (23)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные постоянные. Это решение является общим решением рассматриваемой системы (22).

Полагая в (23) поочередно  $A_1 = 1, A_2 = 0$  и  $A_1 = 0, A_2 = 1$ , получим одну из фундаментальных систем решений\*

$$y_1 = x e^{3x}, \quad z_1 = (x - 1) e^{3x};$$

$$y_2 = e^{3x}, \quad z_2 = e^{3x}.$$

**Пример 2.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_2 + y_3. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad -\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

имеет один простой корень  $\lambda_1 = 0$  и один двукратный  $\lambda_2, \lambda_3 = 1$ .

Простому корню  $\lambda_1 = 0$  соответствует решение

$$y_{11} = \gamma_1, \quad y_{12} = \gamma_2, \quad y_{13} = \gamma_3,$$

---

\* Заметим, что второе решение может быть получено из первого дифференцированием коэффициентов при  $e^{3x}$  (см. п. 234).

где в качестве  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  можно взять алгебраические дополнения первой строки матрицы

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получаем  $\gamma_1=2, \gamma_2=-1, \gamma_3=1$ , так что имеем

$$y_{11}=2, \quad y_{12}=-1, \quad y_{13}=1.$$

Двукратному корню  $\lambda_{2,3}=1$  соответствует решение вида

$$y_1=(A_1x+A_2)e^x, \quad y_2=(B_1x+B_2)e^x, \quad y_3=(C_1x+C_2)e^x.$$

Определяя коэффициенты  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  тем же методом, что и в предыдущем примере, найдем

$$B_1=0, \quad C_1=A_1, \quad B_2=A_1, \quad C_2=A_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — произвольные. Поэтому \*

$$y_1=(A_1x+A_2)e^x, \quad y_2=A_2e^x, \quad y_3=(A_1x+A_2)e^x.$$

Корню  $\lambda_{2,3}=1$  соответствуют два линейно независимых частных решения \*\*

$$\begin{aligned} &xe^x, \quad e^x, \quad xe^x; \\ &e^x, \quad 0, \quad e^x. \end{aligned}$$

В качестве фундаментальной системы решений можно взять

$$\begin{aligned} &2, \quad -1, \quad 1; \\ &xe^x, \quad e^x, \quad xe^x; \\ &e^x, \quad 0, \quad e^x, \end{aligned}$$

а соответствующим ей общим решением будет \*\*\*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2C_1 + (C_2x + C_3)e^x, \\ y_2 &= -C_1 + C_2e^x, \\ y_3 &= C_1 + (C_2x + C_3)e^x. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

\* Совпадение  $y_1$  и  $y_3$  не случайно, ибо из самой системы (24) ясно, что  $y_1 - y_3 = \text{const.}$

\*\* См. сноску на с. 638.

\*\*\* См. первую сноску на с. 641.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2, \lambda_3 = -2$ . Простому корню  $\lambda_1 = 1$  соответствует решение (с точностью до постоянного множителя)

$$y_{11} = e^x, \quad y_{12} = e^x, \quad y_{13} = e^x.$$

Найдем решения, соответствующие двукратному корню  $\lambda_2, \lambda_3 = -2$ . Имеем

$$y_1 = (A_1x + A_2)e^{-2x}, \quad y_2 = (B_1x + B_2)e^{-2x}, \quad y_3 = (C_1x + C_2)e^{-2x}.$$

Подставляя эти значения  $y_1, y_2, y_3$  в систему (25), найдем, что

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0, \quad C_2 = -(A_2 + B_2),$$

где  $A_2$  и  $B_2$  — произвольные. Поэтому

$$y_1 = A_2 e^{-2x}, \quad y_2 = B_2 e^{-2x}, \quad y_3 = -(A_2 + B_2) e^{-2x}.$$

Здесь полиномы, о которых шла речь в теореме, обратились в постоянные числа.

Корню  $\lambda_2, \lambda_3 = -2$  соответствуют два линейно независимых частных решения

$$\begin{aligned} y_{21} &= e^{-2x}, & y_{22} &= 0, & y_{23} &= -e^{-2x}; \\ y_{31} &= 0, & y_{32} &= e^{-2x}, & y_{33} &= -e^{-2x}. \end{aligned}$$

Фундаментальной системой решений будет

$$\begin{aligned} e^x, & \quad e^x, & e^x; \\ e^{-2x}, & \quad 0, & -e^{-2x}; \\ 0, & \quad e^{-2x}, & -e^{-2x}. \end{aligned}$$

Несмотря на то что среди характеристических чисел есть кратное, мы получили фундаментальную систему решений в том же виде, что и в случае, когда все характеристические числа простые.

Общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 &= C_1 e^x + C_3 e^{-2x}, \\ y_3 &= C_1 e^x - C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Из этих примеров видно, что метод Эйлера не позволяет в случае наличия кратных характеристических чисел выяснить до конца структуру фундаментальной системы решений.

Структура фундаментальной системы решений будет дополнена в следующей главе, где рассматривается другой способ построения фундаментальной системы решений, причем в отличие от метода Эйлера строится сразу вся фундаментальная система решений.

**213. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.** Указанный в предыдущем пункте аналитический вид общего решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами дает возможность сделать некоторые заключения об устойчивости нулевого решения, определяемого этой системой.\*

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl}x_l \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

где  $a_{kl}$  — вещественные числа, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — неизвестные функции от времени  $t$ . Эта система имеет нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \dots, \quad x_n \equiv 0. \quad (27)$$

Следующая теорема устанавливает достаточный признак асимптотической устойчивости решения (27).

**Т е о р е м а.** *Если все характеристические числа системы (26) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение (27) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова (при  $t \rightarrow \infty$ ).*

В самом деле, экспоненты, входящие в состав общего решения, имеют вид  $e^{mt}$ , где  $m < 0$ , а произвольные постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$  являются линейными функциями начальных значений  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  искомым функций  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (см. п. 205). Поэтому по любому  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $\delta > 0$  так, что из неравенств

$$|x_k^0| < \delta \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

будут следовать неравенства

$$|x_k(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

при всех  $t \geq t_0$ , так что нулевое решение (27) устойчиво.

Кроме того, присутствие экспонент указанного вида обеспечит выполнение условий

$$x_k(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (30)$$

что и доказывает теорему.\*\*

\* Относительно устойчивости нулевого решения однородной линейной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами см. п. 141.

\*\* Более подробное доказательство см., например, в книге [109, с. 134—139].

Заметим, что условия будут выполняться при любых возмущениях  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  (почему?), так что *нулевое решение (27) устойчиво в целом* (см. п. 133).

Можно доказать, что указанное в теореме достаточное условие асимптотической устойчивости является и необходимым.

На деле использование указанного критерия асимптотической устойчивости наталкивается на большие трудности, связанные с нахождением характеристических чисел. Заметим, однако, что в фактическом нахождении характеристических чисел нет необходимости, ибо нас интересуют лишь знаки вещественных частей их. При этом можно воспользоваться приводимой ниже теоремой Рауса — Гурвица, устанавливающей критерий отрицательности вещественных частей всех корней полинома с вещественными коэффициентами непосредственно по коэффициентам этого полинома.

Пусть дано приведенное уравнение  $n$ -й степени с вещественными коэффициентами

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0.$$

Составим квадратную матрицу  $n$ -го порядка [109, с. 194, 195], главная диагональ которой состоит из коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , а строка с номером  $k$  является отрезком последовательности

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, \underbrace{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1, 0, 0, \dots, 0}_{n-2 \text{ раз}}, \quad (31)$$

в котором элемент  $a_k$  находится на  $k$ -м месте, так что эта матрица имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc} a_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{array} \right\|. \quad (32)$$

Рассмотрим определители

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1},$$

главные диагонали которых составлены из отрезков главной диагонали матрицы (32).

**Теорема Рауса — Гурвица.\*** Для того чтобы все корни уравнения (26) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства  $\Delta_k > 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), т. е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Полином с вещественными коэффициентами, все корни которого имеют отрицательные вещественные части, называют *полиномом Гурвица*.

Рассмотрим случаи  $n=2$  и  $n=3$ .

Для уравнения второй степени

$$y^2 + a_1 y + a_2 = 0 \quad (33)$$

последовательность (31) примет вид

$$0, \quad a_2, \quad a_1, \quad 1.$$

Поэтому матрицей (32) будет

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\Delta_1 = a_1$ ,  $\Delta_2 = a_1 a_2$ . Для того чтобы корни уравнения (33) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

так что дело сводится просто к положительности коэффициентов уравнения (33).

Для уравнения третьей степени

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \quad (34)$$

имеем

$$0, \quad 0, \quad a_3, \quad a_2, \quad a_1, \quad 1, \quad 0;$$

---

\* Доказательство этой теоремы читатель найдет, например, в книгах [32, 89, 153].



$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{array} \right\|; \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (34) должны удовлетворять условиям

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{array} \right\} \quad (35)$$

где  $a$  — параметр. Выберем этот параметр так, чтобы нулевое решение  $x=0, y=0$ , определяемое системой (35), было асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + (-a+1)\lambda - a + 2 = 0. \quad (36)$$

Подчиним параметр  $a$  условиям

$$a_1 = -a+1 > 0, \quad a_2 = -a+2 > 0.$$

Оба эти условия будут выполнены, если  $a < 1$ . При таком выборе параметра  $a$  оба корня характеристического уравнения (36) будут иметь отрицательные вещественные части и нулевое решение будет асимптотически устойчиво. При этом оно будет устойчиво в целом.

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y - 5z, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + y + 6z, \\ \frac{dz}{dt} = 8x - 3y - 9z. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -5 \\ -6 & 1-\lambda & 6 \\ 8 & -3 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

Здесь  $a_1=4>0$ ,  $a_1a_2-a_3=4\cdot 5-2>0$ ,  $a_3=2>0$ . Следовательно, все характеристические числа имеют отрицательные вещественные части.\* Поэтому нулевое решение системы (37) асимптотически устойчиво. Более того, оно устойчиво в целом.

Следующая теорема дает достаточный признак неасимптотической устойчивости.

**Т е о р е м а.** Если среди корней характеристического уравнения нет таких, у которых вещественная часть положительна, но имеются корни с нулевой вещественной частью, причем каждому кратному корню с нулевой вещественной частью (если такие имеются) соответствует семейство решений вида (14), в котором экспоненциальные множители обращаются в единицу, а полиномы — в вещественные числа, то нулевое решение (27) системы (26) неасимптотически устойчиво.

В самом деле, в этом случае из вида общего решения следует, что по любому  $\epsilon>0$  можно выбрать  $\delta>0$  так, что из неравенств (28) будут следовать неравенства (29) при всех  $t\geq t_0$ . Но условия (30) не будут выполняться. Поэтому нулевое решение (27) будет устойчиво, но неасимптотически.

**Пример 3.** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dz}{dt} &= -z. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda^2+1)(1+\lambda)=0$$

имеет корни  $\lambda_1=-1$ ,  $\lambda_{2,3}=\pm i$ . Поэтому нулевое решение устойчиво, но неасимптотически.

**Пример 4.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{dz}{dt} &= -z. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

\* На деле все характеристические числа просто отрицательны:  $\lambda_1=-2$ ,  $\lambda_{2,3}=-1$ .

Здесь характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2(1+\lambda) = 0$$

имеет один отрицательный корень  $\lambda_1 = -1$  и двукратный нулевой корень.

Разыскивая семейство решений, соответствующих нулевому корню, имеем

$$x = A_1 t + A_2, \quad y = B_1 t + B_2, \quad z = C_1 t + C_2.$$

Подставляя в систему (38), получим

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = -C_1 t - C_2,$$

откуда  $A_1 = B_1 = C_1 = C_2 = 0$ . Следовательно,

$$x = A_2, \quad y = B_2, \quad z = 0,$$

где  $A_2$  и  $B_2$  — произвольны. Таким образом, нулевое решение системы (38) неасимптотически устойчиво.

Это легко видеть и непосредственно из формулы общего решения в форме Коши

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 e^{-t}.$$

В самом деле, очевидно, что нулевое решение устойчиво ( $\delta = \varepsilon$ ). Асимптотической устойчивости нет.

Выше мы указали достаточные признаки устойчивости нулевого решения системы (26), различая при этом устойчивость асимптотическую и неасимптотическую.

Дадим теперь достаточный признак неустойчивости нулевого решения системы (26).

**Т е о р е м а.** *Если хоть одно из характеристических чисел системы (26) имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение (27) этой системы неустойчиво*

В самом деле, в состав общего решения будут входить экспоненты вида  $e^{mt}$ , где  $m > 0$ , вследствие чего не будет иметь места ограниченность всех возмущенных решений, соответствующих достаточно малым возмущениям  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  (почему?), откуда и следует утверждение теоремы.

**Пример 5.** Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Так как первый из них положителен, то нулевое решение  $x=0$ ,  $y=0$  неустойчиво.

Покажем, что имеет место условная устойчивость. С этой целью построим общее решение в форме Коши.

Разыскивая фундаментальную систему решений методом Эйлера, найдем

$$\begin{aligned} x_1 &= -4e^{2t}, & y_1 &= e^{2t}; \\ x_2 &= e^{-t}, & y_2 &= -e^{-t}. \end{aligned}$$

Поэтому общим решением будет

$$\begin{aligned} x &= -4C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Полагая  $t=0$ ,  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -4C_1 + C_2, \\ y_0 &= C_1 - C_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $C_1 = \frac{x_0 + y_0}{-3}$ ,  $C_2 = \frac{-x_0 - 4y_0}{3}$ . Поэтому общим решением в форме Коши будет

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3} (x_0 + y_0) e^{2t} - \frac{1}{3} (x_0 + 4y_0) e^{-t}, \\ y &= -\frac{1}{3} (x_0 + y_0) e^{2t} + \frac{1}{3} (x_0 + 4y_0) e^{-t}. \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы

$$x_0 + y_0 = 0,$$

то получим семейство возмущенных движений вида

$$\left. \begin{aligned} x &= -y_0 e^{-t}, \\ y &= y_0 e^{-t}, \end{aligned} \right\}$$

откуда ясно, что по любому  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta > 0$  такое, что из неравенства

$$|y_0| < \delta$$

будут следовать неравенства

$$|x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon$$

при всех  $t > 0$  (достаточно взять  $\delta = \frac{3}{5} \varepsilon$ ). Следовательно, невозмущенное движение условно устойчиво [103, задача 1271].

**214. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в случае автономной системы.** Рассмотрим систему

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, n). \quad (39)$$

Предположим, что

$$X_k(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Тогда система (39) допускает нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, \dots, x_n \equiv 0. \quad (40)$$

Пусть, кроме того, функции  $X_k$  голоморфны в точке  $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$ , т. е.

$$X_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l + \sum_{m_1+\dots+m_n=2}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n}^{(k)} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где

$$a_{kl} = \left. \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \right|_{x_1=x_2=\dots=x_n=0}, \quad (41)$$

а ряды справа сходятся в некоторой области

$$|x_1| \leq r, \quad |x_2| \leq r, \quad \dots, \quad |x_n| \leq r.$$

Тогда систему (39) можно записать в виде

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l + f_k(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1+\dots+m_n=2}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n}^{(k)} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \\ (|x_1| \leq r, \quad |x_2| \leq r, \quad \dots, \quad |x_n| \leq r).$$

Если в правых частях системы отбросить все нелинейные члены, то получим линейную систему

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (42)$$

Эта система называется *системой первого приближения для системы (39)*. Она, очевидно, тоже допускает нулевое решение (40).

Возникает вопрос, можно ли судить об устойчивости нулевого решения нелинейной системы (39) по устойчивости нулевого решения системы первого приближения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема Ляпунова.** 1) Если все характеристические числа системы первого приближения (42) имеют отрицательные вещественные части, так что нулевое решение (40) этой системы асимптотически устойчиво, то нулевое решение нелинейной системы (39) тоже асимптотически устойчиво;

2) если хоть одно из характеристических чисел системы первого приближения (42) имеет положительную вещественную часть, так что нулевое решение этой системы неустойчиво, то нулевое решение нелинейной системы (39) тоже неустойчиво;

3) если среди характеристических чисел системы первого приближения нет таких, вещественные части которых положительны, но имеются характеристические числа с нулевыми вещественными частями, так что нулевое решение (40) этой системы или неасимптотически устойчиво или неустойчиво, то нулевое решение нелинейной системы (39) может быть как устойчиво, так и неустойчиво в зависимости от выбора  $f_k$ .

**Пример 1.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin(x+y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sin(x-y). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Правые части обращаются в нуль в точке  $x=0$ ,  $y=0$ , так что система (43) допускает нулевое решение  $x=0$ ,  $y=0$ . Кроме того, правые части системы (43), очевидно, голоморфны в точке  $x=0$ ,  $y=0$ .

Система первого приближения имеет вид \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x-y, \\ \frac{dy}{dt} &= x-y. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическими числами будут  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ . Так как их вещественные части отрицательны, то нулевое решение рассматриваемой нелинейной системы (43) асимптотически устойчиво.

---

\* Коэффициенты этой системы могут быть найдены по формулам (41), где  $x_1 = x=0$ ,  $x_2 = y=0$ . Но в этом нет необходимости, ибо  $\sin u \sim u$  при  $u \rightarrow 0$ .

**Пример 2.** Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^{3x+4y} - 1, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y + x^2 + y^2. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Эта система допускает нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$ . Правые части голоморфны в точке  $x=0$ ,  $y=0$ . Системой первого приближения будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y \end{aligned} \right\}$$

(почему?). Она имеет характеристические числа  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=-1$ . Так как одно из характеристических чисел положительно, то нулевое решение данной нелинейной системы (44) неустойчиво.

**Пример 3.** Система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + 2y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2x^3 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

допускает нулевое решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$ .

Система первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

имеет характеристические числа  $\lambda_{1,2} = \pm i$  с нулевой вещественной частью. Нулевое решение системы первого приближения (46) неасимптотически устойчиво. Оно будет неасимптотически устойчивым и для нелинейной системы (45) (почему?).

Заметим, что точка равновесия  $x=0$ ,  $y=0$  является центром и для системы первого приближения (46) и для нелинейной системы (45).

**Пример 4.** Для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2 y, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

допускающей нулевое решение  $x=0, y=0$ , система первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

так же, как и в предыдущем примере, имеет чисто мнимые характеристические числа  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , так что нулевое решение этой системы неасимптотически устойчиво. Нулевое решение нелинейной системы (47) неустойчиво, ибо точка равновесия  $x=0, y=0$  системы (48) является фокусом, причем из самой системы (48) видно, что он неустойчивый (почему?).

Примеры 3 и 4 подтверждают утверждение 3) теоремы Ляпунова [103, задачи 1401, 1403]. В этом случае об устойчивости нулевого решения нелинейной системы нельзя судить по первому приближению.

**215. Приведение однородной линейной системы к системе с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной.\*** Рассмотрим систему

$$\frac{dy_k}{dx} = p_{k1}(x)y_1 + p_{k2}(x)y_2 + \dots + p_{kn}(x)y_n \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Введем вместо  $x$  новую независимую переменную  $t$  по формуле

$$t = \psi(x)$$

Тогда получим систему

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{1}{\psi'(x)} [p_{k1}(x)y_1 + p_{k2}(x)y_2 + \dots + p_{kn}(x)y_n] \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Предположим, что коэффициенты этой системы постоянны, т. е.

$$\frac{p_{kl}(x)}{\psi'(x)} = a_{kl} \quad (k, l=1, 2, \dots, n).$$

Тогда  $p_{kl}(x)$  имеют вид

$$p_{kl}(x) = a_{kl} \psi'(x),$$

т. е.  $p_{kl}(x)$  представляют собою произведения постоянных чисел на одну и ту же функцию от  $x$ .

Обратно, если коэффициенты  $p_{kl}(x)$  обладают этим свойством, т. е. если

$$p_{kl}(x) = a_{kl} \cdot \Phi(x), \quad (16)$$

---

\* См. сноску на с. 514.



то, положив

$$t = \psi(x) = \int \varphi(x) dx,$$

мы получим систему с постоянными коэффициентами  $a_{kl}$ .

**Пример 1.** Пусть дана система:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ x \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_3, \\ x \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь условие (16) выполнено, причем  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ . Поэтому подстановка

$$t = \int \varphi(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad (x > 0)$$

или

$$x = e^t$$

приводит данную систему к системе с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + y_2. \end{aligned} \right\}$$

Интегрируя эту систему, получаем (см. п. 217, пример):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y_2 &= C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y_3 &= -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому общим решением системы (17) будет:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{C_1}{x} + C_2 x^2, \\ y_2 &= C_2 x^2 + \frac{C_3}{x}, \\ y_3 &= -\frac{C_1 + C_3}{x} + C_2 x^2. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда видно, что решения системы (17) могут иметь особенность только в точке  $x=0$ , которая является единственной особой точкой этой системы. (В точке  $x=0$  не выполнены условия теоремы существования). Наряду с такими решениями существует целое семейство решений  $y_1=Cx^2$ ,  $y_2=Cx^2$ ,  $y_3=Cx^2$ , голоморфных в окрестности особой точки  $x=0$ . Заметим, однако, что среди них (и вообще) нет решений, в которых функции  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$  стремились бы к пределам, не равным одновременно нулю, когда  $x$  стремится к особой точке  $x=0$ .

**216. Интегрирование неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.** Рассмотрим теперь неоднородную линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl}y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Так как соответствующая однородная система всегда интегрируется в элементарных функциях, то, применяя метод вариации произвольных постоянных, мы всегда можем получить общее решение неоднородной системы (18) по крайней мере в квадратурах, а иногда и в элементарных функциях.

**З а м е ч а н и е.** Если в системе (18) функции  $f_k(x)$  представляют собою произведения показательной функции (с вещественным или комплексным показателем) на полином от  $x$ , то для построения общего решения этой системы можно вместо применения метода вариации произвольных постоянных найти частное решение методом неопределенных коэффициентов [119, с. 185—188] и прибавить его к общему решению соответствующей однородной системы. Тогда, согласно п. 209, мы и получим общее решение системы (18).

#### § 44. ДРУГИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**217. Интегрирование линейной системы с постоянными коэффициентами при помощи приведения ее к уравнению  $n$ -го порядка (метод исключения).** Применим к системе

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl}y_l + f_k(x) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

общий способ приведения нормальной системы  $n$  уравнений к одному уравнению  $n$ -го порядка, изложенный в п. 114. Тогда мы получим либо одно линейное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, либо несколько таких уравнений более низких порядков, причем

сумма порядков всегда равна  $n$ . Найдя общее решение каждого из этих уравнений, мы получим общее решение системы (1) уже без дальнейших квадратур.

**Пример.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Дифференцируя первое уравнение и пользуясь вторым и третьим, получаем

$$y_1'' = 2y_1 + y_2 + y_3.$$

Но  $y_2 + y_3 = y_1'$ . Поэтому

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0. \quad (3)$$

Исключим  $y_3$ . Из первого уравнения системы имеем

$$y_3 = y_1' - y_2.$$

Подставляя во второе уравнение, получаем

$$y_2' = y_1' - y_2 + y_1$$

или

$$y_2' + y_2 = y_1' + y_1. \quad (4)$$

Таким образом система (2) приводится к двум линейным уравнениям (3) и (4) с неизвестными функциями  $y_1$  и  $y_2$  второго и первого порядка.

Интегрируя уравнение (3), находим

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Подставляя это значение  $y_1$  в (4), получаем

$$y_2' + y_2 = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x},$$

или

$$y_2' + y_2 = 3C_2 e^{2x},$$

откуда

$$y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Теперь находим  $y_3$ :

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1' - y_2 = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x} - C_2 e^{2x} = \\ &= -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Общее решение системы (2) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 &= C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_3 &= -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{aligned} \right\}$$

**218. Метод Даламбера.** Мы показали в п. 112, что знание  $k$  ( $k < n$ ) независимых первых интегралов нормальной системы  $n$ -го порядка дает возможность понизить порядок этой системы на  $k$  единиц. Если же мы знаем  $n$  независимых первых интегралов, то мы имеем общий интеграл.

Приемы нахождения первых интегралов, рассмотренные нами в пп. 109, 117, не дают возможности найти первые интегралы любой нормальной системы. Для линейной системы с постоянными коэффициентами Даламбер указал общий метод нахождения первых интегралов.

Рассмотрим этот метод в случае линейной системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Умножим второе уравнение на некоторое число  $k$  и сложим почленно с первым. Получим

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11}+ka_{21})y + (a_{12}+ka_{22})z + f_1(x) + kf_2(x)$$

или

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11}+ka_{21}) \left( y + \frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}} z \right) + f_1(x) + kf_2(x). \quad (6)$$

Выберем  $k$  так, чтобы

$$\frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}} = k$$

или

$$a_{12}+ka_{22} = k(a_{11}+ka_{21}). \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) можно переписать в виде

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11}+ka_{21})(y+kz) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Это есть линейное уравнение первого порядка с искомой функцией  $y+kz$ . Интегрируя его, найдем

$$y+kz = e^{(a_{11}+ka_{21})x} \left( C + \int (f_1(x) + kf_2(x)) e^{-(a_{11}+ka_{21})x} dx \right). \quad (8)$$

Если корни уравнения (7) различные и вещественные, то, обозначив их через  $k_1$  и  $k_2$ , будем иметь два первых интеграла в неявной форме.\*

$$\left. \begin{aligned} y+k_1z &= e^{(a_{11}+k_1a_{21})x} \left( C_1 + \int (f_1(x) + k_1f_2(x)) e^{-(a_{11}+k_1a_{21})x} dx \right); \\ y+k_2z &= e^{(a_{11}+k_2a_{21})x} \left( C_2 + \int (f_1(x) + k_2f_2(x)) e^{-(a_{11}+k_2a_{21})x} dx \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Разрешая систему (9) относительно  $C_1$  и  $C_2$ , найдем общий интеграл системы (5), а разрешая относительно  $y$  и  $z$ , найдем общее решение этой системы.

Если корни уравнения (7) кратные:  $k_1=k_2$ , то формула (8) дает только один первый интеграл:

$$y+k_1z = e^{(a_{11}+k_1a_{21})x} \left( C_1 + \int (f_1(x) + k_1f_2(x)) e^{-(a_{11}+k_1a_{21})x} dx \right).$$

Подставляя значение  $y$ , найденное отсюда, во второе уравнение системы (5), получим одно линейное уравнение первого порядка с неизвестной функцией  $z$ .

**Пример 1.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} y' &= 5y + 4z, \\ z' &= 4y + 5z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Составляем уравнение для  $k$ :

$$4 + 5k = k(5 + 4k).$$

Отсюда  $k_{1,2} = \pm 1$ . Поэтому первыми интегралами будут:

$$\left. \begin{aligned} y+z &= C_1 e^{9x}, \\ y-z &= C_2 e^x. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Разрешая систему (11) относительно  $y$  и  $z$ , получим общее решение системы (10).

**Пример 2.** Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y + 4z + \cos x, \\ \frac{dz}{dx} &= -y - 2z + \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

---

\* Т. е. в виде, не разрешенном относительно произвольных постоянных.

Здесь мы имеем

$$4-2k=k(2-k), \quad k^2-4k+4=0.$$

Это уравнение имеет двукратный корень  $k_{1,2}=2$ . Поэтому метод Даламбера дает возможность найти только один первый интеграл.

Умножая второе из уравнений (12) на 2 и складывая почленно с первым, получаем

$$\frac{d(y+2z)}{dx} = \cos x + 2 \sin x.$$

Отсюда находим первый интеграл системы (12)

$$y+2z = \sin x - 2 \cos x + C_1.$$

Используя этот первый интеграл, мы можем переписать второе из уравнений (12) в виде

$$\frac{dz}{dx} = 2 \cos x - C_1.$$

Отсюда

$$z = 2 \sin x - C_1 x + C_2. \quad (13)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y &= \sin x - 2 \cos x + C_1 - 2z = \sin x + C_1 - 4 \sin x + 2C_1 x - 2C_2 = \\ &= -3 \sin x - 2 \cos x + C_1(1+2x) - 2C_2. \end{aligned}$$

Общее решение системы (12) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y &= -3 \sin x - 2 \cos x + C_1(1+2x) - 2C_2, \\ z &= 2 \sin x - C_1 x + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

**219. Операционный метод решения задачи Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами.** Ограничимся для простоты изложения случаем системы двух уравнений. Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $a_{kl}$  — вещественные числа, а  $f_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) — непрерывны при  $t \geq 0$  и принадлежат классу рассматриваемых нами оригиналов (см. п. 180, формула (2)). Найдем решение  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  системы (15), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (16)$$

Найдем сначала изображение искомого решения. Так как

$$\begin{aligned}\bar{x}'(p) &= p\bar{x}(p) - x_0, & f_1(t) &\leftrightarrow \bar{f}_1(p); \\ \bar{y}'(p) &= p\bar{y}(p) - y_0, & f_2(t) &\leftrightarrow \bar{f}_2(p),\end{aligned}$$

то, взяв изображения обеих частей уравнений системы (15), получим

$$\left. \begin{aligned}p\bar{x}(p) - x_0 &= a_{11}\bar{x}(p) + a_{12}\bar{y}(p) + \bar{f}_1(p), \\ p\bar{y}(p) - y_0 &= a_{21}\bar{x}(p) + a_{22}\bar{y}(p) + \bar{f}_2(p)\end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned}(a_{11} - p)\bar{x}(p) + a_{12}\bar{y}(p) &= -\bar{f}_1(p) - x_0, \\ a_{21}\bar{x}(p) + (a_{22} - p)\bar{y}(p) &= -\bar{f}_2(p) - y_0.\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эта система называется *изображающей системой* для задачи Коши (15), (16) или *операторной системой*, соответствующей этой задаче. Система (17) является линейной алгебраической системой относительно изображений  $\bar{x}(p)$  и  $\bar{y}(p)$ . Заметим, что определитель этой системы является характеристическим определителем системы (15). Обозначая его через  $\Delta(p)$  и разрешая систему (17) относительно  $\bar{x}(p)$  и  $\bar{y}(p)$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned}\bar{x}(p) &= \frac{-(\bar{f}_1(p) + x_0)(a_{22} - p) + (\bar{f}_2(p) + y_0)a_{12}}{\Delta(p)}, \\ \bar{y}(p) &= \frac{-(\bar{f}_2(p) + y_0)(a_{11} - p) + (\bar{f}_1(p) + x_0)a_{21}}{\Delta(p)}.\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Восстанавливая по найденным изображениям их оригиналы, получим искомое решение  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

Изображающая система (17) и выражения (18) для изображений  $\bar{x}(p)$  и  $\bar{y}(p)$  принимают наиболее простой вид, если начальные значения искомого решения нулевые ( $x_0 = y_0 = 0$ ). В этом случае вместо (17) и (18) будем соответственно иметь

$$\left. \begin{aligned}(a_{11} - p)\bar{x}(p) + a_{12}\bar{y}(p) &= -\bar{f}_1(p), \\ a_{21}\bar{x}(p) + (a_{22} - p)\bar{y}(p) &= -\bar{f}_2(p)\end{aligned} \right\}$$

и

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(p) &= \frac{-\bar{f}_1(p)(a_{22}-p) + \bar{f}_2(p)a_{12}}{\Delta(p)}, \\ \bar{y}(p) &= \frac{-\bar{f}_2(p)(a_{11}-p) + \bar{f}_1(p)a_{21}}{\Delta(p)}. \end{aligned} \right\}$$

**Пример 1.** Найти решение  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 4y + e^{-t}; \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

Изображающей системой будет

$$\begin{aligned} (-1-p)\bar{x}(p) - 2\bar{y}(p) &= -\frac{2}{p+1} + 2, \\ 3\bar{x}(p) + (4-p)\bar{y}(p) &= -\frac{1}{p+1} - 1, \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно  $\bar{x}(p)$  и  $\bar{y}(p)$ , будем иметь

$$\bar{x}(p) = -2 \cdot \frac{1}{p+1}, \quad \bar{y}(p) = \frac{1}{p+1};$$

откуда

$$x = -2e^{-t}, \quad y = e^{-t}.$$

**Пример 2.** Найти решение  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + t + 1, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + t - 1, \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее (нулевым) начальным условиям

$$x(0) = y(0) = 0.$$



Изображающая система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -p\bar{x}(p) + \bar{y}(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}, \\ -\bar{x}(p) - p\bar{y}(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \bar{y}(p) = -\frac{1}{p^2}.$$

Следовательно,

$$x=t, \quad y=-t.$$

#### § 45. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫШЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**220. Метод исключения.** Используя общий метод сведения любой канонической системы к уравнению более высокого порядка (см. п. 114), мы, вообще говоря, всегда можем свести линейную систему, содержащую производные выше первого порядка, к одному линейному уравнению более высокого порядка. Найдя решение этого уравнения, мы получим решение заданной системы уже без дальнейших квадратур.

**Пример.** Проинтегрировать систему (см. пример п. 114)

$$\left. \begin{aligned} y'' + k^2 z &= 0, \\ z'' + k^2 y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта система приводится к одному уравнению четвертого порядка

$$y^{(4)} - k^4 y = 0.$$

Отсюда

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx.$$

Поэтому

$$z = -\frac{1}{k^2} y'' = -C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx} + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx.$$

**221. Метод Даламбера.** Метод Даламбера, изложенный в п. 218, распространяется и на линейные системы уравнений, содержащие производные выше первого порядка.

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ \frac{d^n z}{dx^n} &= a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Умножая второе уравнение на  $k$ , складывая почленно с первым уравнением и выбирая  $k$  из условия

$$a_{12} + ka_{22} = k(a_{11} + ka_{21}),$$

получаем

$$\frac{d^n(y + kz)}{dx^n} = (a_{11} + ka_{21})(y + kz) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Это есть линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами относительно  $y + kz$ . Интегрируя его, найдем

$$y + kz = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Если корни уравнения (6) различные, то мы имеем

$$\left. \begin{aligned} y + k_1 z &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y + k_2 z &= \varphi_2(x, C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{2n}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Разрешая (2) относительно  $y$  и  $z$ , получим общее решение системы (1).

## МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**222. Предварительные замечания.** Рассмотрим однородную линейную систему

Предположим, что коэффициенты  $p_{kl}(x)$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ) непрерывны в интервале  $(a, b)$ . Тогда система (1) имеет (см. п. 204) фундаментальную систему решений, которую можно записать в виде следующей таблицы:

или

где каждая из функций определена и непрерывна в  $(a, b)$ .

В таблице (2) каждая из функций находится на заданном месте, определяемом двумя индексами, из которых первый означает номер строки (номер решения), а второй — номер столбца (номер искомой функции), и мы должны рассматривать таблицу (2) как единое целое, не переставляя функций, входящих в ее состав. Такого рода таблицы называются *матрицами*.

В двух предыдущих главах мы строили фундаментальную систему решений, находя последовательно отдельные решения, из которых она состоит. Возникает вопрос, нельзя ли, рассматривая фундаментальную систему решений как матрицу, дать способ нахождения всей фундаментальной системы сразу и изучить ее возможную аналитическую структуру в зависимости от аналитической структуры коэффициентов системы.

Исключительные заслуги в выяснении аналитической структуры фундаментальной системы решений при помощи матричного метода принадлежат выдающемуся советскому математику И. А. Лаппо-Данилевскому, который разработал теорию функций от матриц и применил ее к исследованию однородных линейных систем дифференциальных уравнений [32, 54, 90].

В настоящей главе мы даем понятие о матричном методе интегрирования однородных линейных систем и применяем его для выяснения аналитической структуры фундаментальной системы решений однородной линейной системы с постоянными и периодическими коэффициентами.

Для удобства читателя напомним сначала некоторые сведения из теории матриц, которые нам понадобятся при дальнейшем изложении.

**223. Понятие о матрице.** Квадратной матрицей  $n$ -го порядка (всюду, где не оговорено противное, только такие матрицы мы и будем рассматривать!) называется таблица

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Величины

$$a_{ik} = \{A\}_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

называемые *элементами* матрицы  $A$ , суть числа или функции, расположенные в строго определенном порядке. Этот порядок указывается двумя индексами, первый из которых означает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент матрицы.

Под матрицей  $\|a\|$  мы будем понимать матрицу, все элементы которой равны  $a$ . В частности,  $O = \|0\|$  — матрица, все элементы которой равны нулю. Она называется *нулевой матрицей*.

Совокупность элементов  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образует *главную диагональ* матрицы  $A$ , а их сумма

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sigma(A) = Tr(A) = Sp(A)$$

называется *следом* этой матрицы.

Матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

называется *диагональной* матрицей. Отметим, два частных случая диагональной матрицы. Матрица  $[0, 0, \dots, 0]$  является, очевидно, нулевой матрицей. Матрица  $[1, 1, \dots, 1]$  является наиболее важным частным случаем диагональной матрицы. Эта матрица называется *единичной* матрицей и обозначается через  $I$  или  $E$ :

$$I=E=[1, 1, \dots, 1]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Единичную матрицу можно записать в виде \*

$$I \equiv \|\delta_{ik}\|.$$

Мы будем рассматривать число  $a$  как диагональную матрицу (любого порядка), у которой все диагональные элементы равны числу  $a$ :

$$a=[a, a, \dots, a].$$

В частности, число 1 можно рассматривать как единичную матрицу:

$$1=[1, 1, \dots, 1].$$

Если матрица  $A$  порядка  $n$  имеет вид

$$A=\begin{vmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ O & & A_s \end{vmatrix},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_s$  ( $s < n$ ) — квадратные матрицы порядков  $k_1, k_2, \dots, k_s$  ( $k_1+k_2+\dots+k_s=n$ ), главные диагонали которых составляют главную диагональ матрицы  $A$ , а все элементы матрицы  $A$ , не принадлежащие матрицам  $A_1, A_2, \dots, A_s$ , равны нулю, то матрица  $A$  называется *квазидиагональной матрицей* и обозначается так:

$$A=[A_1, A_2, \dots, A_s].$$

Наряду с квазидиагональной матрицей  $A$  будем рассматривать ее порядковую структуру  $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ . Например, матрица

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=[A_1, A_2]$$

есть квазидиагональная матрица третьего порядка структуры  $\{2, 1\}$ .

\* См. сноску на с. 626.

Матрица  $A$  называется *симметричной*, если

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Если

$$a_{ik} = -a_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

то матрица  $A$  называется *кососимметричной*. Элементы главной диагонали кососимметричной матрицы, очевидно, равны нулю.

Матрица  $A$ , у которой все элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю, т. е.  $a_{ik} = 0$  при  $k > i$ , называется *треугольной*. Она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратные матрицы являются наиболее важным частным случаем прямоугольных матриц. Под *прямоугольной матрицей* размера  $m \times n$  понимают матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащую  $m$  строк и  $n$  столбцов. Таким образом, квадратная матрица  $n$ -го порядка есть прямоугольная матрица размера  $n \times n$ .

Матрица размера  $n \times 1$ , т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

называется *одностолбцовой матрицей* или *столбцом*. Такую матрицу можно рассматривать как квадратную матрицу  $n$ -го порядка, все элементы которой, за исключением элементов некоторого столбца, равны нулю, так что, например,

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\| \Bigg\}_n$$

Аналогично матрица размера  $1 \times n$  называется *однострочечной матрицей* или строкой. Она имеет вид

$$\|a_1, a_2, \dots, a_n\|.$$

$n$ -мерный вектор с компонентами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  естественно рассматривать как одностолбцовую матрицу (*вектор-столбец*) или как однострочечную матрицу (*вектор-строка*).

Матрицу, составленную из абсолютных величин элементов матрицы  $A$ , будем обозначать через  $|A|$ , так что

$$|A| = \| |a_{ik}| \|.$$

Определитель

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем матрицы  $A$* . Очевидно, что

$$D(\underbrace{[a, a, \dots, a]}_n) = a^n$$

и что

$$D(I) = D(E) = 1.$$

Матрица  $A$  называется *неособенной*, если  $D(A) \neq 0$ .

Если  $D(A) = 0$ , то матрица  $A$  называется *особенной*.

**224. Алгебраические операции над матрицами.** Мы будем предполагать, что все рассматриваемые ниже квадратные матрицы имеют один и тот же порядок  $n$ .

Две матрицы  $A$  и  $B$  считаются *равными*, если соответствующие элементы их равны между собой:

$$A = B, \text{ если } \{A\}_{ik} = \{B\}_{ik} \text{ или } a_{ik} = b_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Если  $a_{ik} \leq b_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n)$ , то пишут  $A \leq B$ .

Если  $A \leq B$  и хоть один элемент матрицы  $A$  строго меньше соответствующего элемента матрицы  $B$ , то пишут  $A < B$ .

Будем называть *суммой*  $A+B$  матриц  $A$  и  $B$  такую матрицу, все элементы которой суть суммы соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$\{A+B\}_{ik} = \{A\}_{ik} + \{B\}_{ik} \quad (i, k=1, \dots, n).$$

Легко видеть, что операция сложения матриц подчинена коммутативному (переместительному) и ассоциативному (сочетательному) законам:

$$A+B=B+A, \quad (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C.$$

*Произведением*  $AB$  матриц  $A$  и  $B$  называется такая матрица, что

$$\{AB\}_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lk} \quad (i, k=1, \dots, n), \quad (3)$$

т. е. элемент, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца матрицы  $AB$ , равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $k$ -го столбца матрицы  $B$ .

Как видим, матрицы умножаются по одному из законов умножения определителей. Поэтому определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$D(AB) = D(A)D(B).$$

Следует обратить особое внимание на то, что в общем случае

$$AB \neq BA.$$

Указанное отсутствие коммутативного закона для умножения матриц существенно отличает алгебру матриц от алгебры (вещественных или комплексных) чисел.

Заметим, однако, что в некоторых случаях имеет место равенство

$$AB = BA.$$

В таких случаях говорят, что матрицы  $A$  и  $B$  *коммутируют*.

В частности, единичная матрица  $n$ -го порядка коммутирует с любой матрицей  $n$ -го порядка

$$IA = AI,$$

ибо

$$\{IA\}_{ik} = \{A\}_{ik} = \{AI\}_{ik} \quad (i, k=1, \dots, n).$$

Умножение диагональных матриц одного и того же порядка сводится к умножению соответствующих диагональных элементов этих матриц:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad B = [b_1, b_2, \dots, b_n]; \\ AB = [a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n].$$



Очевидно, что диагональные матрицы одного и того же порядка коммутируют \*

$$AB=BA.$$

Если матрицы  $A$  и  $B$  квазидиагональные, имеют одну и ту же структуру  $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ , так что

$$A=[A_1, A_2, \dots, A_s], \quad B=[B_1, B_2, \dots, B_s],$$

где матрицы  $A_i$  и  $B_i$  имеют порядок  $k_i$  ( $i=1, \dots, s$ ), то

$$AB=[A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_sB_s].$$

Таким образом, умножение квазидиагональных матриц одной и той же структуры сводится к умножению соответствующих матриц  $A_i$  и  $B_i$  ( $i=1, \dots, s$ ).

Легко убедиться в справедливости ассоциативного закона умножения и дистрибутивного (распределительного) закона умножения относительно сложения:

$$(AB)C=A(BC)=ABC,$$

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Определим *произведения матрицы  $A$  на число  $\lambda$  и числа  $\lambda$  на матрицу  $A$* , рассматривая число  $\lambda$  как диагональную матрицу  $\lambda=[\lambda, \lambda, \dots, \lambda]$  того же порядка, что и  $A$ :

$$\{A\lambda\}_{ik}=\{A[\lambda, \lambda, \dots, \lambda]\}_{ik}=\sum_{l=1}^n \{A\}_{il} \{[\lambda, \lambda, \dots, \lambda]\}_{lk}=\{A\}_{ik} \lambda,$$

$$\{\lambda A\}_{ik}=\sum_{l=1}^n \{[\lambda, \lambda, \dots, \lambda]\}_{il} \{A\}_{lk}=\lambda \{A\}_{ik} \quad (i, k=1, \dots, n).$$

Отсюда ясно, что

$$A\lambda=\lambda A,$$

т. е. *число коммутирует с любой матрицей*.

Обращаем особое внимание читателя на то, что для умножения матрицы  $A$  на число мы должны все элементы матрицы  $A$  умножить на это число, в то время как для умножения определителя на число достаточно умножить на это число все элементы только одного какого-нибудь ряда определителя (столбца или строки).

---

\* В самом деле,  $AB=[a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n]=[b_1a_1, b_2a_2, \dots, b_na_n]=BA$ .

Определим теперь *произведение матрицы  $A$  на одностолбцовую матрицу*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

используя данное выше определение последней. Имеем

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

так что в результате умножения матрицы  $n$ -го порядка на одностолбцовую матрицу размера  $n \times 1$  мы получаем одностолбцовую матрицу размера  $n \times 1$ . Иными словами, умножая матрицу  $n$ -го порядка на  $n$ -мерный вектор, мы получаем  $n$ -мерный вектор.

С операцией умножения матрицы  $A$  на одностолбцовую матрицу мы встречаемся, например, всякий раз, когда нам нужно записать однородное линейное преобразование  $n$  переменных в матричной форме. Пусть мы имеем преобразование

$$y_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}x_l \quad (k=1, \dots, n). \quad (4)$$

Тогда в матричной форме можно записать это преобразование так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов преобразования (4).

Если ввести для столбцов (векторов) в формуле (5) обозначения

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то преобразование (4) можно записать в матрично-векторной форме

$$y = Ax. \quad (6)$$

В § 48 настоящей главы мы используем операцию умножения матрицы  $n$ -го порядка на одностолбцовую матрицу размера  $n \times 1$  (вектор-столбец) при записи линейной системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка в матрично-векторной форме.

Рассмотрим операции, связанные с понятием степени матрицы.

*Целая положительная степень матрицы  $A$*  определяется рекуррентным соотношением

$$A^m = A^{m-1}A \quad (m \geq 1).$$

Под нулевой степенью матрицы  $A$  понимают единичную матрицу того же порядка, что и  $A$ , т. е., по определению, полагают

$$A^0 = I.$$

При этом пользуясь указанным выше правилом умножения диагональных и квазидиагональных матриц (одинаковой структуры), нетрудно убедиться, что *степени диагональных и квазидиагональных матриц вычисляются по формулам:*

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad A^m = [a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m];$$

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_s], \quad A^m = [A_1^m, A_2^m, \dots, A_s^m].$$

Пусть  $A$  — неособенная матрица. Тогда существует единственная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$AX = I.$$

Эта матрица называется *обратной матрицей по отношению к матрице  $A$*  и обозначается через  $A^{-1}$ , так что

$$AA^{-1} = I.$$

Обозначим элементы матрицы  $A^{-1}$  через  $a_{ik}^{-1}$  и покажем, что они выражаются единственным образом через элементы  $a_{ik}$  матрицы  $A$ . Из (3) имеем

$$\sum_{i=1}^n a_{il} a_{ik}^{-1} = \delta_{ik}.$$

Фиксируя здесь  $k$  ( $k=1, \dots, n$ ), получаем неоднородную линейную систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными  $a_{lk}^{-1}$  ( $l=1, \dots, n$ ), являющимися элементами  $k$ -го столбца матрицы  $A^{-1}$ . Так как определитель этой системы, будучи равным  $D(A)$ , отличен от нуля, ибо матрица  $A$  неособенная, то указанная система имеет единственное решение, которое можно найти, пользуясь известным правилом Крамера [89, 145]. Получим

$$a_{lk}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_{ik} D_{il}}{D(A)} = \frac{D_{kl}}{D(A)} \quad (k, l=1, \dots, n),$$

где  $D_{il}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{il}$  в определителе  $D(A)$ .

Заметим, что матрица  $A^{-1}$  является также решением уравнения

$$XA = I,$$

так что

$$A^{-1}A = I. \quad (7)$$

Выше мы показали, что неособенное линейное преобразование (4) может быть записано в виде (6), где  $A$  — матрица коэффициентов этого преобразования. Пользуясь обратной матрицей  $A^{-1}$ , мы можем записать обратное преобразование в виде

$$x = A^{-1}y.$$

Для этого достаточно умножить обе части равенства (6) слева на  $A^{-1}$  и принять во внимание (7).

Очевидно, что

$$D(A^{-1}) = [D(A)]^{-1}.$$

Нетрудно убедиться, что обратные матрицы для диагональных и квазидиагональных матриц находятся по формулам:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad A^{-1} = [a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}];$$

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_s], \quad A^{-1} = [A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1}].$$

Если  $A$  и  $B$  — неособенные матрицы, то \*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

т. е. матрица, обратная произведению матриц  $A$  и  $B$ , равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке.

Целая отрицательная степень неособенной матрицы определяется равенством

$$A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

Целая отрицательная степень диагональных и квазидиагональных матриц вычисляется по формулам:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad A^{-m} = [a_1^{-m}, a_2^{-m}, \dots, a_n^{-m}];$$

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_s], \quad A^{-m} = [A_1^{-m}, A_2^{-m}, \dots, A_s^{-m}].$$

Рассмотрим еще операцию транспонирования матриц. Матрица, полученная из  $A$  перестановкой строк и столбцов, называется *транспонированной матрицей по отношению к матрице  $A$* . Обозначая ее через  $A^*$ , имеем

$$\{A^*\}_{ik} = \{A\}_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Если  $A$  симметрична, то  $A^* = A$ .

Если  $A$  кососимметрична, то  $A^* = -A$ .

Нетрудно показать, что операция транспонирования подчинена закону

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

**225. Характеристические числа матрицы. Элементарные делители матрицы.** Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

элементы которой суть вещественные числа.

---

\* Ибо  $AB(B^{-1}A^{-1}) = I$ .

Составим матрицу

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Эта матрица называется *характеристической матрицей* для матрицы  $A$ .  
Определитель характеристической матрицы

$$D(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

называется *характеристическим определителем* или *характеристическим полиномом* матрицы  $A$ , являющимся полиномом  $n$ -й степени от  $\lambda$ . Уравнение

$$D(A - \lambda I) = 0$$

называется *характеристическим уравнением* матрицы  $A$ , а его корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — *характеристическими числами* матрицы  $A$ .

Дадим понятие об элементарных делителях матрицы  $A$ . Пусть  $\lambda_1$  — характеристическое число кратности  $k$  ( $k \geq 1$ ). Тогда характеристический определитель  $D(A - \lambda I)$  делится (без остатка) на  $(\lambda - \lambda_1)^k$ . Рассмотрим всевозможные определители  $(n-1)$ -го порядка, получающиеся из характеристического определителя вычеркиванием одной строки и одного столбца. Предположим, что все они делятся на  $(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$ , но хоть один из них не делится на  $(\lambda - \lambda_1)^{k_1+1}$ . Пусть  $(\lambda - \lambda_1)^{k_2}$  — наивысшая степень разности  $(\lambda - \lambda_1)$ , на которую делятся все определители  $(n-2)$ -го порядка, получающиеся из  $D(A - \lambda I)$  вычеркиванием двух строк и двух столбцов. Продолжая рассматривать определители более низких порядков, получающиеся из характеристического определителя вычеркиванием одинакового числа строк и столбцов, мы дойдем до определителей порядка  $n-m$ , каждый из которых делится на  $(\lambda - \lambda_1)^{k_m}$ , но хоть один из них не делится на  $(\lambda - \lambda_1)^{k_m+1}$  и хоть один определитель порядка  $n-m-1$  уже не делится на  $\lambda - \lambda_1$ . Можно доказать [145], что

$$k > k_1 > k_2 > \dots > k_m > 0. \quad (8)$$

Рассмотрим числа  $l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}$ , определяемые равенствами

$$l_1 = k - k_1, \quad l_2 = k_1 - k_2, \quad \dots, \quad l_m = k_{m-1} - k_m, \quad l_{m+1} = k_m.$$

Все эти числа не меньше 1, а их сумма равна  $k$ , т. е. кратности характеристического числа  $\lambda_1$ .

Составим выражения

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_1}, (\lambda - \lambda_1)^{l_2}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{l_{m+1}}.$$

Эти выражения, очевидно, являются делителями характеристического определителя  $D(A - \lambda I)$ . Они называются *элементарными делителями* матрицы  $A$ , соответствующими характеристическому числу  $\lambda_1$ . Отметим, что сумма показателей всех элементарных делителей, соответствующих данному характеристическому числу, равна его кратности. Матрица  $A$  может иметь элементарный делитель  $\lambda - \lambda_1$ . Такой элементарный делитель называется *простым*. Элементарный делитель вида  $(\lambda - \lambda_1)^{l_\mu}$  ( $l_\mu > 1$ ) называется *непростым*.

Очевидно, что если  $\lambda_1$  — простое характеристическое число, то ему соответствует только один и притом простой элементарный делитель  $\lambda - \lambda_1$ , ибо в этом случае  $k \equiv 1$  и хоть один из определителей  $(n-1)$ -го порядка уже делится на  $\lambda - \lambda_1$  (почему?), так что «цепочка» (8) обрывается на первом члене, и мы получаем элементарный делитель  $\lambda - \lambda_1$ .

В случае  $k > 1$  могут иметь место различные комбинации элементарных делителей. В частности, матрица  $A$  может иметь только один элементарный делитель, соответствующий характеристическому числу  $\lambda_1$ , и тогда он равен  $(\lambda - \lambda_1)^k$ . Это тот случай, когда «цепочка» (8) обрывается на первом члене. Наибольшее возможное число элементарных делителей равно  $k$ . В этом случае все они простые

$$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_1.$$

Это будет иметь место тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A - \lambda_1 I$  равен  $n - k$  (почему?).

Если матрица  $A$  имеет несколько различных характеристических чисел, то, построив элементарные делители, соответствующие каждому из них, получим *совокупность всех элементарных делителей матрицы  $A$* , которую запишем в виде

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s},$$

где среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  могут быть и равные, а  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$  — целые числа ( $\rho_i \geq 1$ ), причем сумма их равна порядку матрицы  $A$

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n.$$

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix},$$

$$D(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)^3 = 0,$$

так что матрица имеет одно трехкратное характеристическое число  $\lambda_1 = 2$ . Общим наибольшим делителем определителей второго порядка является  $\lambda - 2$ . Один из элементов матрицы  $A$ , а именно  $a_{21} = 1$ , не делится на  $\lambda - 2$ . Поэтому

$$k = 3, \quad k_1 = 1; \quad l_1 = 2, \quad l_2 = 1$$

и элементарными делителями матрицы  $A$  будут

$$(\lambda - 2)^2, \quad \lambda - 2.$$

Здесь матрица  $A$  имеет один непростой и один простой элементарный делитель.

**Пример 2.** Пусть дана матрица

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$D(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)^3 = 0.$$

Здесь снова  $\lambda_1 = 2$  — трехкратное характеристическое число. Но

$$k = 3, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 1; \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 1.$$

Поэтому матрица  $A$  имеет простые элементарные делители

$$\lambda - 2, \quad \lambda - 2, \quad \lambda - 2.$$

**Пример 3.** Для матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

имеем

$$D(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)^2 = 0.$$



Так же, как и в предыдущих примерах,  $\lambda_1 = 2$  — трехкратное характеристическое число. Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

не делится на  $\lambda - 2$ . Поэтому матрица  $A$  имеет только один (непростой) элементарный делитель

$$(\lambda - 2)^3.$$

**Пример 4.** Рассмотрим матрицу порядка  $\rho$  ( $\rho > 1$ )

$$I_\rho(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Матрица  $I_\rho(a)$  имеет одно характеристическое число  $\lambda_1 = a$  кратности  $\rho$ , ибо

$$D(I_\rho(a) - \lambda) = (a - \lambda)^\rho = 0.$$

При этом определитель порядка  $\rho - 1$ , полученный из  $D(I_\rho(a) - \lambda)$  вычеркиванием первой строки и последнего столбца, будучи равным единице, не делится на  $\lambda - a$ . Поэтому матрица  $I_\rho(a)$  имеет только один неправильный элементарный делитель

$$(\lambda - a)^\rho.$$

Заметим, что пример 3 есть частный случай настоящего примера.

**Пример 5.** Найти элементарные делители матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Так как все характеристические числа простые, то элементарными делителями матрицы  $A$  будут

$$\lambda - 2, \quad \lambda - 3, \quad \lambda - 6.$$

**Пример 6.** Найти элементарные делители матрицы

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = -2.$$

Характеристическому числу  $\lambda_1 = 1$  соответствует простой элементарный делитель  $\lambda - 1$ . Найдем элементарные делители, соответствующие двукратному характеристическому числу  $\lambda_2, \lambda_3 = -2$ . Так как все определители второго порядка делятся на  $\lambda + 2$ , а элементы матрицы  $A$  не делятся на  $\lambda + 2$ , то искомые элементарные делители простые:  $\lambda + 2, \lambda + 2$ . Таким образом, элементарными делителями матрицы  $A$  будут

$$\lambda - 1, \quad \lambda + 2, \quad \lambda + 2.$$

Все они простые.

**Пример 7.** Найти элементарные делители матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3 = 1.$$

Элементарными делителями будут

$$\lambda, \quad (\lambda - 1)^2.$$

**Пример 8.** Элементарными делителями диагональной матрицы

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

будут

$$\lambda - a_1, \lambda - a_2, \dots, \lambda - a_n.$$

**Пример 9.** Рассмотрим квазидиагональную матрицу вида

$$A \equiv [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)],$$

где под  $I_1(\lambda_m)$  мы подразумеваем число  $\lambda_m$ , а среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  могут быть и равные.

Эта матрица имеет характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  кратности  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ . Элементарными делителями матрицы  $A$  будут

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, \quad (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \quad \dots, \quad (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s}.$$

**226. Преобразование подобия. Приведение матрицы к каноническому виду.** Две матрицы  $A$  и  $B$  называются *подобными*, если существует такая неособенная матрица  $S$ , что

$$B = SAS^{-1}.$$

Преобразование  $SAS^{-1}$ , при помощи которого здесь из матрицы  $A$  получается матрица  $B$ , называется *преобразованием подобия с матрицей подобия  $S$* .

Отметим некоторые замечательные свойства преобразования подобия.

Покажем прежде всего, что *преобразование подобия не изменяет величины характеристического определителя*.

В самом деле, мы имеем

$$\begin{aligned} D(SAS^{-1} - \lambda I) &= D(SAS^{-1} - S\lambda S^{-1}) = D[S(A - \lambda I)S^{-1}] = \\ &= D(S)D(A - \lambda I)D(S^{-1}) = D(A - \lambda I), \end{aligned}$$

т. е.

$$D(SAS^{-1} - \lambda I) = D(A - \lambda I).$$

Из доказанного свойства преобразования подобия следует, что *все коэффициенты характеристического полинома остаются неизменными при преобразовании подобия*. Два из них представляют наибольший интерес. Это — свободный член, равный, очевидно,  $D(A)$ , и коэффициент при  $\lambda^{n-1}$ , равный  $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}$ , так что *определитель и след матрицы  $A$  не изменяются при преобразовании подобия*.

Так как характеристический полином матрицы есть инвариант преобразования подобия, то *подобные матрицы имеют одни и те же характеристические числа и притом одной и той же кратности*.

Более того, можно доказать, что *подобные матрицы имеют одни и те же элементарные делители*.

Рассмотрим операции нахождения матриц, подобных сумме и произведению двух матриц.

Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — две матрицы. Тогда

$$S(A_1 + A_2)S^{-1} = SA_1S^{-1} + SA_2S^{-1},$$

т. е. *матрица, подобная сумме двух матриц, равна сумме матриц, подобных данным матрицам*.

Это свойство имеет место и для суммы любого конечного числа матриц:

$$S \sum_{v=1}^m A_v S^{-1} = \sum_{v=1}^m S A_v S^{-1}. \quad (9)$$

Легко видеть, что

$$S(A_1 A_2)S^{-1} = (SA_1S^{-1})(SA_2S^{-1}),$$

т. е. *матрица, подобная произведению, равна произведению подобных матриц*.

В частности,

$$SA^2S^{-1} = (SAS^{-1})^2,$$

т. е. матрица, подобная квадрату, равна квадрату подобной матрицы.

Нетрудно убедиться, что это свойство распространяется на любую целую положительную степень матрицы

$$SA^mS^{-1} = (SAS^{-1})^m \quad (m > 0, \text{ целое}). \quad (10)$$

Пользуясь свойствами (9) и (10), нетрудно показать, что для полинома от матрицы

$$F(A) = c_0A^m + c_1A^{m-1} + \dots + c_{m-1}A + c_m$$

имеем

$$SF(A)S^{-1} = F(SAS^{-1}), \quad (10')$$

т. е. матрица, подобная полиному от матрицы  $A$ , равна тому же полиному от матрицы, подобной матрице  $A$ .

Преобразование подобия дает возможность привести матрицу к наиболее простому — каноническому виду.

**Т е о р е м а.\*** Если матрица  $A$  имеет элементарные делители

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s},$$

причем  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n$ , а среди характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  матрицы  $A$  могут быть и равные, то существует такая неособенная матрица  $S$ , что

$$A = S^{-1}BS,$$

где

$$B = [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)].$$

Матрица  $B$  называется каноническим видом или канонической формой Жордана матрицы  $A$ , а формула

$$A = S^{-1}[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]S$$

— каноническим представлением матрицы  $A$ .

В частности, если все элементарные делители матрицы  $A$  — простые

$$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n,$$

где среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  могут быть и одинаковые, то каноническим

---

\* Доказательство см., например, в книге [138, т. III, ч. 1, с. 106—112; ч. 2, добавление].

видом матрицы  $A$  будет чисто диагональная матрица

$$B = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

а ее каноническим представлением является

$$A = S^{-1} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] S.$$

Обращаем особое внимание читателя на то, что *структура канонического вида матрицы определяется не кратностью самих характеристических чисел, а кратностью соответствующих им элементарных делителей.*

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Эта матрица имеет (см. п. 225, пример 5) характеристические числа  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=3$ ,  $\lambda_3=6$ . Им соответствуют простые элементарные делители  $\lambda-2$ ,  $\lambda-3$ ,  $\lambda-6$ . Поэтому каноническим видом матрицы  $A$  будет матрица

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = [2, 3, 6].$$

**Пример 2.** Матрица

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

имеет (см. п. 225, пример 6) характеристические числа  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_{2,3}=-2$ , из которых одно простое и одно двукратное. Но элементарные делители, соответствующие кратному корню, простые:  $\lambda-1$ ,  $\lambda+2$ ,  $\lambda+2$ . Поэтому матрица  $A$  имеет простые элементарные делители  $\lambda-1$ ,  $\lambda+2$ ,  $\lambda+2$ , вследствие чего матрица  $A$  имеет так же, как и в предыдущем примере, чисто диагональный канонический вид

$$B = [1, -2, -2].$$

**Пример 3.** Найти канонический вид матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь (см. п. 225, пример 7)  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_{2,3}=1$ , так что так же, как и в предыдущем примере, одно характеристическое число простое и одно двукратное. Но кратному характеристическому числу 1 соответствует непростой элементарный делитель  $(\lambda-1)^2$ . Поэтому каноническим видом матрицы  $A$  будет квазидиагональная матрица

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [0, I_2(1)].$$

**227. Дифференцирование и интегрирование матриц.** Рассмотрим матрицу

$$Z(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

элементы которой являются функциями от  $x$ .

Предположим, что каждый элемент матрицы  $Z(x)$  имеет производную в точке  $x=x_0$ . Тогда определим *производную от матрицы  $Z(x)$  в точке  $x=x_0$*  при помощи равенства

$$\frac{dZ(x_0)}{dx} = \left\| \frac{dz_{ik}(x_0)}{dx} \right\|,$$

так что *дифференцирование матрицы* сводится к дифференцированию всех ее элементов.

*Обычные правила дифференцирования функций справедливы и для дифференцирования матриц.*

Если  $A$  — постоянная матрица, то

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= 0, \\ \frac{d(AZ)}{dx} &= A \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d(\alpha Z)}{dx} = \alpha \frac{dZ}{dx},^* \\ \frac{d(Z_1 + Z_2)}{dx} &= \frac{dZ_1}{dx} + \frac{dZ_2}{dx}, \\ \frac{d(Z_1 Z_2)}{dx} &= \frac{dZ_1}{dx} Z_2 + Z_1 \frac{dZ_2}{dx}, \end{aligned} \quad (11)$$

причем в формуле (11) нельзя переставлять сомножители.

Производная от целой положительной степени матрицы  $Z(x)$  вычисляется путем последовательного применения последнего правила. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ^2}{dx} &= \frac{d(ZZ)}{dx} = \frac{dZ}{dx} Z + Z \frac{dZ}{dx}, \\ \frac{dZ^3}{dx} &= \frac{d(Z^2 Z)}{dx} = \frac{dZ^2}{dx} Z + Z^2 \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dx} Z^2 + Z \frac{dZ}{dx} Z + Z^2 \frac{dZ}{dx}. \end{aligned} \right\}$$

\* Здесь  $\alpha$  — любое число, вещественное или комплексное.

Продолжая, найдем

$$\frac{dZ^m}{dx} = \sum_{k=0}^{m-1} Z^k \frac{dZ}{dx} Z^{m-k-1}.$$

Эта довольно громоздкая формула упрощается, если матрица  $Z(x)$  коммутирует со своей производной, т. е. если \*

$$Z \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dx} Z. \quad (12)$$

В этом случае мы получаем правило, аналогичное обычному правилу дифференцирования сложной степенной функции

$$\frac{dZ^m}{dx} = mZ^{m-1} \frac{dZ}{dx}.$$

Для вычисления производной от обратной матрицы  $Z^{-1}(x)$  продифференцируем тождество

$$Z(x)Z^{-1}(x) = I.$$

Получаем

$$\frac{dZ}{dx} Z^{-1} + Z \frac{dZ^{-1}}{dx} = 0.$$

Откуда

$$Z \frac{dZ^{-1}}{dx} = - \frac{dZ}{dx} Z^{-1}$$

или

$$\frac{dZ^{-1}}{dx} = -Z^{-1} \frac{dZ}{dx} Z^{-1}.$$

Из этой формулы видно, что  $\frac{dZ^{-1}}{dx}$  существует во всех точках, где существует  $\frac{dZ}{dx}$  и где  $D(Z) \neq 0$ . Если выполнено условие (12), то

$$Z^{-1} \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dx} Z^{-1},$$

а тогда

$$\frac{dZ^{-1}}{dx} = -Z^{-2} \frac{dZ}{dx}.$$

---

\* О структуре матриц, обладающих свойством (12), см. [20].

Операция *интегрирования матрицы* определяется как операция, обратная дифференцированию

или

$$\int Z(x) dx = \left\| \int z_{ih}(x) dx \right\|$$

$$\int_{x_0}^x Z(x) dx = \left\| \int_{x_0}^x z_{ih}(x) dx \right\|.$$

Легко убедиться, что

$$\int_{x_0}^x A dx = A(x - x_0),$$

$$\int_{x_0}^x AZ(x) dx = A \int_{x_0}^x Z(x) dx,$$

$$\int_{x_0}^x (Z_1(x) + Z_2(x)) dx = \int_{x_0}^x Z_1(x) dx + \int_{x_0}^x Z_2(x) dx.$$

**228. Понятие о матричном степенном ряде.** Под степенным рядом от матрицы понимают символ

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_\nu Z^\nu + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu Z^\nu, \quad (13)$$

где  $Z$  — матрица порядка  $n$ , а  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$  — числа вещественные или комплексные. Один матричный степенной ряд (13) равносильно  $n^2$  обычным скалярным степенным рядам с вещественными или комплексными членами

$$a_0 \delta_{ih} + a_1 \{Z\}_{ih} + a_2 \{Z^2\}_{ih} + \dots + a_\nu \{Z^\nu\}_{ih} + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \{Z^\nu\}_{ih}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=i, \\ 0 & \text{при } k \neq i. \end{cases}$$

Сумма

$$F_\mu(Z) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_\nu Z^\nu$$



называется *частной суммой* ряда (13). Если существует конечный предел частной суммы при  $\mu \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} F_\mu(Z) = F(Z),$$

т. е. если по всякому  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N = N(\varepsilon, Z)$ , зависящий от выбранных  $\varepsilon$  и  $Z$ , что при  $\mu > N$  выполняется неравенство

$$|F_\mu(Z) - F(Z)| < \|\varepsilon\|, \quad (14)$$

то говорят, что матричный ряд (13) *сходится*, а матрицу  $F(Z)$  называют *суммой* ряда. Выполнение матричного неравенства (14) равносильно тому, что имеют место следующие  $n^2$  обычных неравенств

$$|\{F_\mu(Z)\}_{ik} - \{F(Z)\}_{ik}| < \varepsilon \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Из (14) и (15) вытекает, что сходимость одного матричного ряда равносильна сходимости  $n^2$  соответствующих ему рядов.

Введем в рассмотрение ряд

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_v \xi^v + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \xi^v = F(\xi), \quad (16)$$

где  $\xi$  — комплексная переменная.

Этот ряд называется *скалярным рядом, соответствующим матричному ряду* (13).

**Т е о р е м а.** Если скалярный ряд (16) сходится в области

$$|\xi| < n\rho,$$

где  $n$  — порядок матрицы  $Z$ , то матричный ряд (13) сходится в области

$$|Z| < \|\rho\|. \quad (17)$$

Для доказательства возьмем любое число  $\rho'$ , удовлетворяющее неравенству  $0 < \rho' < \rho$ . Тогда, замечая, что

$$\|\rho\|^2 = \|n\rho^2\|, \quad \|\rho\|^3 = \|n^2\rho^3\|, \quad \dots, \quad \|\rho\|^v = \|n^{v-1}\rho^v\|,$$

видим, что если

$$|Z| < \|\rho'\|,$$

то.

$$|Z^v| \leq |Z|^v < \|\rho'\|^v = \|n^{v-1}\rho^v\|,$$

и для общего члена ряда (13) получаем оценку

$$|a_v Z^v| = |a_v| |Z^v| \leq \| |a_v| n^{v-1} \rho'^v \| = \frac{1}{n} \| |a_v| (n\rho')^v \|.$$

Но, согласно условию теоремы, ряд

$$\frac{1}{n} \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| (n\rho')^v$$

сходится. Поэтому все  $n^2$  рядов

$$a_0 \delta_{ik} + a_1 \{Z\}_{ik} + a_2 \{Z^2\}_{ik} + \dots + a_v \{Z^v\}_{ik} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \{a_v Z^v\}_{ik},$$

соответствующие одному матричному ряду (13), сходятся. Следовательно, матричный ряд (13) сходится и притом в области (17), ибо  $\rho'$  можно взять сколь угодно близким к  $\rho$ .

Если, в частности, ряд (16) сходится при всех конечных значениях  $\xi$ , то ряд (13) сходится для любой конечной матрицы  $Z$ .

Наиболее важным примером такого ряда является ряд

$$I + Z + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^v}{v!} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{Z^v}{v!} = e^Z, \quad (18)$$

сумму которого мы, по определению, принимаем за экспоненциальную функцию от матрицы  $Z$ . Этот матричный ряд (18) равносильен  $n^2$  обычным скалярным степенным рядам с вещественными или комплексными членами:

$$\delta_{ik} + \{Z\}_{ik} + \frac{1}{2!} \{Z^2\}_{ik} + \dots + \frac{1}{v!} \{Z^v\}_{ik} + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \{Z^v\}_{ik}.$$

Если матрица  $A$  коммутирует с матрицей  $B$ , то нетрудно показать, что

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

Если  $Z$  есть чисто диагональная матрица

$$Z = [\hat{a}_1, a_2, \dots, a_n],$$

то, вследствие того что

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]^v = [a_1^v, a_2^v, \dots, a_n^v],$$

получаем

$$e^{[a_1, a_2, \dots, a_n]} = [e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}],$$

т. е. экспоненциальная функция от диагональной матрицы представляет собою диагональную матрицу, ненулевыми элементами которой являются соответствующие экспоненциальные функции.

Если  $Z$  есть квазидиагональная матрица

$$Z = [A_1, A_2, \dots, A_s],$$

то, вследствие того что

$$[A_1, A_2, \dots, A_s]^v = [A_1^v, A_2^v, \dots, A_s^v],$$

получаем

$$e^{[A_1, A_2, \dots, A_s]} = [e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_s}].$$

Предположим, что матрица  $Z$  является дифференцируемой функцией от  $x$ . Определим тогда *производную от функции  $e^Z$* , как результат почленного дифференцирования ряда (18):

$$\begin{aligned} \frac{d(e^Z)}{dx} &= \frac{d}{dx} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{Z^v}{v!} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{dZ^v}{dx} = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \sum_{h=0}^{v-1} Z^h \frac{dZ}{dx} Z^{v-h-1}. \end{aligned}$$

Предположим, что матрица  $Z$  коммутирует со своей производной, т. е. выполнено условие (12). Тогда

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{Z^{v-1}}{(v-1)!} \frac{dZ}{dx} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{Z^v}{v!} \frac{dZ}{dx} = e^Z \frac{dZ}{dx}.$$

Итак, если матрица  $Z(x)$  коммутирует со своей производной, то

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = e^Z \frac{dZ}{dx}.$$

В частности, если  $Z = Ax$ , где  $A$  — постоянная матрица, то

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx} = e^{Ax} A = A e^{Ax}.$$

Заметим, что свойство преобразования подобия, выражаемое формулой (10') п. 226, распространяется на сумму матричного степенного ряда. Пусть

$$F(Z) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v Z^v \quad (|Z| < \|\rho\|).$$

Тогда

$$\begin{aligned} SF(Z)S^{-1} &= S \left( \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v Z^v \right) S^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v SZ^v S^{-1} = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v (SZS^{-1})^v = F(SZS^{-1}), \end{aligned}$$

т. е. подобная матрица от функции данной матрицы равна той же функции от подобной матрицы.

В частности, имеем

$$Se^Z S^{-1} = e^{SZS^{-1}}.$$

В заключение настоящего параграфа дадим еще определение *логарифмической функции от матрицы*  $Z$ , которую будем обозначать через  $\ln Z$ . Будем определять эту функцию как решение уравнения

$$e^x = Z.$$

Если при этом матрица  $Z$  — чисто диагональная:

$$Z = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

то нетрудно убедиться, что  $\ln Z$  представляет собою (тоже чисто диагональную!) матрицу вида

$$\ln Z = [\ln a_1, \ln a_2, \dots, \ln a_n].$$

В самом деле, мы имеем

$$e^{[\ln a_1, \ln a_2, \dots, \ln a_n]} = [e^{\ln a_1}, e^{\ln a_2}, \dots, e^{\ln a_n}] = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

На этом мы заканчиваем изложение основных сведений из теории матриц и переходим к рассмотрению вопроса о применении матричного метода к интегрированию однородных линейных систем дифференциальных уравнений.

### § 47. ЗАПИСЬ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

**229. Построение матричного уравнения, равносильного однородной линейной системе.** Рассмотрим систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) y_l \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где коэффициенты  $p_{lk}(x)$  непрерывны в некотором интервале  $(a, b)$ .

Обращаем особое внимание читателя на то, что здесь для удобства дальнейших выкладок мы в отличие от ранее применявшейся записи системы (см., например, п. 222) изменяем порядок индексов у коэффициентов. Теперь первый индекс коэффициента  $p_{lk}(x)$  совпадает с номером искомой функции  $y_l$ , а второй указывает на номер уравнения.

Пусть

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

есть фундаментальная система решений. Подставляя последовательно каждое из решений (2) в систему (1), получим  $n^2$  тождеств

$$\frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) y_{il} \quad (i, k=1, 2, \dots, n).$$

Естественно попытаться заменить эти  $n^2$  тождеств одним матричным тождеством. С этой целью введем в рассмотрение две матрицы:

$$Y(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}, \quad P(x) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}.$$

где  $Y$  — матрица фундаментальной системы решений системы (1), а  $P$  — матрица, полученная транспонированием матрицы коэффициентов этой системы. Тогда ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{dy_{ik}}{dx} &= \left\{ \frac{dY}{dx} \right\}_{ik}, \\ \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) y_{il} &= \sum_{l=1}^n \{P\}_{lk} \{Y\}_{il} = \sum_{l=1}^n \{Y\}_{il} \{P\}_{lk} = \{YP\}_{ik} \\ &\quad (i, k=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

так что тождества можно переписать в виде

$$\left\{ \frac{dY}{dx} \right\}_{ik} \equiv \{YP\}_{ik} \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

или в виде одного матричного тождества

$$\frac{dY}{dx} \equiv YP, \quad (3)$$

т. е. матрица фундаментальной системы решений системы (1) является *решением уравнения*

$$\frac{dY}{dx} = YP. \quad (4)$$

Это уравнение называется *матричным уравнением, соответствующим системе (1)*.

В дальнейшем матрицу  $Y$ , обращающую уравнение (4) в тождество (3), будем называть *интегральной матрицей* уравнения (4) в интервале  $(a, b)$ , если ее определитель  $D(Y) \neq 0$  для всех значений  $x$  из этого интервала. Ясно, что всякая интегральная матрица уравнения (4) является матрицей некоторой фундаментальной системы решений однородной линейной системы (1).

Таким образом, задача интегрирования системы (1) равносильна нахождению интегральной матрицы уравнения (4). Вопрос о существовании и структуре фундаментальной системы решений системы (1) равносильен вопросу о существовании и структуре интегральной матрицы уравнения (4).

Матрица начальных значений решений, составляющих фундаментальную систему, называется *начальным значением* соответствующей ей интегральной матрицы  $Y$ . Будем обозначать начальное значение интегральной матрицы  $Y$  через  $Y_0$ , так что

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in (a, b). \quad (5)$$

Из формулы (25) п. 202 следует, что для определителя интегральной матрицы  $Y$  имеет место формула

$$D(Y) = (DY_0) e^{\int_{x_0}^x \sigma(P) dx},$$

где

$$\sigma(P) = \sum_{h=1}^n p_{hh}(x)$$

есть *след* матрицы  $P$ .

Точка  $x=x_0$  называется *неособой точкой* матричного уравнения (4), если она является неособой точкой соответствующей ему системы (1). В противном случае точка  $x=x_0$  называется *особой точкой* уравнения (4).

Вопрос о существовании интегральной матрицы с начальным значением в неособой точке решается легко. А именно из теоремы о существовании фундаментальной системы решений однородной линейной системы вытекает, что если  $P(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ ,\* то существует единственная интегральная матрица  $Y(x)$ , удовлетворяющая начальному условию (5), определенная и непрерывно дифференцируемая во всем интервале  $(a, b)$ , причем за  $Y_0$  можно брать любую постоянную матрицу, лишь бы  $D(Y_0) \neq 0$ .

Если, кроме того, предположить, что  $P(x)$  голоморфна в точке  $x_0$ ,\*\* то существует единственная интегральная матрица, голоморфная в этой точке, причем ряды, представляющие элементы интегральной матрицы в окрестности точки  $x_0$ , заведомо сходятся в той же области, что и ряды, представляющие элементы матрицы  $P(x)$ , и удовлетворяющая начальному условию (5), где  $Y_0$  — произвольная постоянная матрица с  $D(Y_0) \neq 0$ .

Интегральная матрица  $Y$ , обращающаяся в единичную матрицу  $I$  в точке  $x=x_0$ , лежащей в интервале  $(a, b)$ , т. е. интегральная матрица, удовлетворяющая начальному условию

$$Y(x_0) = I,$$

называется *нормированной в точке  $x=x_0$* .

Поведение интегральной матрицы (с начальным значением в неособой точке) в окрестности особой точки уравнения (4), а также аналитическая структура интегральной матрицы в окрестности особой точки являются основными вопросами аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений.

**З а м е ч а н и е.** Однородную линейную систему вида

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

можно записать в матричной форме так:

$$\frac{dY}{dx} = PY, \quad (7)$$

\* Матрица  $P(x)$  называется *непрерывной* в интервале  $(a, b)$ , если все элементы ее суть функции от  $x$ , непрерывные в этом интервале.

\*\* Матрица  $P(x)$  называется *голоморфной* в точке  $x=x_0$ , если все ее элементы голоморфны в этой точке.

где  $P$  — матрица коэффициентов системы (6), а  $Y$  — матрица фундаментальной системы решений, в которой решения расположены по столбцам.

Матричное уравнение (7) можно получить из уравнения (4), транспонируя обе части его. Получим

$$\frac{dY^*}{dx} = (YP)^* = P^*Y^*,$$

т. е.

$$\frac{dY^*}{dx} = P^*Y^*,$$

где в матрице  $Y^*$  решения расположены по столбцам, а  $P^*$  — матрица коэффициентов системы (7), которую мы выше обозначили через  $P$ . Заменяв  $Y^*$  через  $Y$ , мы и получим уравнение (7).

**230. Два общих свойства матричного уравнения, соответствующего однородной линейной системе** (ср. пп. 32 и 197). Отметим два общих свойства матричного уравнения (4).

1. Уравнение (4) остается линейным при любой замене независимой переменной

$$x = \varphi(t) \quad (t_1 < t < t_2),$$

где  $\varphi(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, причем  $\varphi(t_1) = a$ ,  $\varphi(t_2) = b$  и  $\varphi'(t) \neq 0$  в  $(t_1, t_2)$ .

В самом деле, мы имеем

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Поэтому, подставляя  $x = \varphi(t)$  в уравнение (4), получим

$$\frac{dY}{dt} = YP[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

или

$$\frac{dY}{dt} = YP_1,$$

где

$$P_1 = P(\varphi(t))\varphi'(t).$$

2. Уравнение (4) остается линейным, если вместо интегральной матрицы  $Y$  ввести новую интегральную матрицу  $Z$  при помощи подстановки

$$Y = ZQ, \quad (8)$$

где  $Q$  — неособенная\* дифференцируемая матрица.

---

\* Матрица  $A$  называется неособенной, если  $D(A) \neq 0$ .



Действительно, так как

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} Q + Z \frac{dQ}{dx},$$

то, выполняя в уравнении (4) подстановку (8), будем иметь

$$\frac{dZ}{dx} Q + Z \frac{dQ}{dx} = ZQP,$$

откуда

$$\frac{dZ}{dx} = ZQPQ^{-1} - Z \frac{dQ}{dx} Q^{-1}$$

или

$$\frac{dZ}{dx} = ZB,$$

где

$$B = QPQ^{-1} - \frac{dQ}{dx} Q^{-1}.$$

Если, в частности,  $Q(x) = S = \text{const}$ , причем  $D(S) \neq 0$ , то

$$B = SPS^{-1},$$

так что подстановка

$$Y = ZS \quad (D(S) \neq 0)$$

приводит к уравнению, в котором матрица  $P$  заменяется подобной матрицей  $SPS^{-1}$  с матрицей подобия  $S$ :

$$\frac{dZ}{dx} = Z(SPS^{-1}).$$

**231. Основные свойства интегральной матрицы.** Прежде чем рассмотреть вопрос о построении решения уравнения (4), докажем два общих свойства интегральных матриц этого уравнения, аналогичных свойствам решений однородного линейного уравнения первого порядка.

1. Если  $Y_1$  — интегральная матрица уравнения (4), то матрица

$$Y = CY_1, \tag{9}$$

где  $C$  — любая постоянная неособенная матрица, также является интегральной матрицей этого уравнения.

Действительно, дифференцируя  $CY_1$ , имеем

$$\frac{d(CY_1)}{dx} = C \frac{dY_1}{dx}.$$

Но  $\frac{dY_1}{dx} \equiv Y_1 P$ . Поэтому

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv CY_1 P$$

или

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv (CY_1) P.$$

Кроме того,  $D(CY_1) = D(C)$ ,  $D(Y_1) \neq 0$ . Следовательно,  $Y = CY_1$  есть интегральная матрица уравнения (4).

2. Если  $Y_1$  — интегральная матрица уравнения (4), определенная в интервале  $(a, b)$ ,\* то все интегральные матрицы, определенные в этом интервале, содержатся в формуле (9).

В самом деле, пусть  $\tilde{Y}(x)$  — интегральная матрица уравнения (4), удовлетворяющая начальному условию

$$\tilde{Y}(x_0) = \tilde{Y}_0.$$

Полагая в (9)  $x = x_0$  и  $Y = \tilde{Y}_0$ , получим уравнение

$$\tilde{Y}_0 = CY_1(x_0),$$

откуда

$$C = \tilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0).$$

Подставляя найденное значение матрицы  $C$  в формулу (9), получим интегральную матрицу

$$Y = \tilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0) Y_1.$$

Так как эта интегральная матрица имеет то же начальное значение, что и матрица  $\tilde{Y}$ , то в силу теоремы единственности обе эти интегральные матрицы совпадают, и мы получаем

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 Y_1^{-1}(x_0) Y_1.$$

---

\* Т. е. в интервале непрерывности матрицы  $P(x)$ .

Таким образом, любая интегральная матрица получается из (9), при соответствующем выборе матрицы  $C$ .

Если, в частности, интегральная матрица  $Y_1$ , нормирована в точке  $x=x_0$ , то любая интегральная матрица  $Y$  выражается через  $Y_1$  по формуле

$$Y = Y(x_0) Y_1.$$

Из сказанного вытекает, что между различными фундаментальными системами решений однородной линейной системы существует связь и эта связь выражается формулой (9), где  $D(C) \neq 0$ . Согласно этой формуле, все фундаментальные системы решений могут быть получены из одной, например, из нормированной фундаментальной системы. Таким образом, мы получаем положительный ответ на вопрос, поставленный в конце п. 204.

Из доказанного свойства вытекает, что для интегрирования уравнения (4) достаточно найти хоть одну интегральную матрицу. Например, как чаще всего и делают, достаточно найти нормированную интегральную матрицу.

**232. Случай Лаппо-Данилевского.** Отметим один частный случай, в котором задача построения интегральной матрицы решается легко.

*Предположим, что матрица  $P$  коммутирует со своим интегралом:*

$$P \cdot \int_{x_0}^x P dx = \int_{x_0}^x P dx \cdot P. \quad (10)$$

*В этом случае за интегральную матрицу можно взять*

$$Y_1 = e^{\int_{x_0}^x P dx} \quad (11)$$

Действительно, дифференцируя (11),\* получаем

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\int_{x_0}^x P dx} = e^{\int_{x_0}^x P dx} P^* = Y_1 P \quad \text{или} \quad \frac{dY_1}{dx} = Y_1 P,$$

т. е. матрица (11) является интегральной матрицей уравнения (4).

---

\* Здесь, дифференцируя экспоненциальную функцию от матрицы  $\int_{x_0}^x P dx$ , мы воспользовались формулой  $(e^z)' = e^z \cdot z'$  п. 228, на что имели право, ибо эта матрица, в силу условия (10), коммутирует со своей производной.

Заметим, что матрица (11) нормирована в точке  $x=x_0$ .

Условие (10), в частности, очевидно, выполнено, если  $P=A=\text{const}$ , т. е. когда мы имеем однородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dY}{dx} = YA, \quad (12)$$

а его интегральной матрицей будет

$$Y_1 = e^{A(x-x_0)}$$

или (полагая  $x_0=0$ )

$$Y_1 = e^{Ax}. \quad (13)$$

Все интегральные матрицы уравнения (12) содержатся в формуле

$$Y = Ce^{Ax},$$

где  $C$  — произвольная постоянная неособенная матрица.

В п. 234 мы займемся специальным рассмотрением случая  $P=A=\text{const}$  и выясним структуру интегральной матрицы (13).

**233. Сопряженное (присоединенное) матричное уравнение.** Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_h}{dx} = - \sum_{l=1}^n p_{hl}(x) z_l, \quad (14)$$

сопряженная с системой (1) (см. п. 207), может быть записана в матричном виде так:

$$\frac{dZ}{dx} = -ZP^*, \quad (15)$$

где

$$Z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix},$$

а  $P^*$  — транспонированная матрица по отношению к матрице  $P$ .

Выполняя над обеими частями уравнения (15) операцию транспонирования, получим

$$\frac{dZ^*}{dx} = -PZ^*, \quad (16)$$

где

$$Z^* = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{n1} \\ z_{12} & z_{22} & & z_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{1n} & z_{2n} & & z_{nn} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Уравнение (16) называется *сопряженным* с уравнением (15) или *присоединенным* к уравнению (15).

Обращаем особое внимание читателя на одну особенность интегральной матрицы (17) сопряженного уравнения (16): в ней решения расположены по столбцам, а не по строкам, как в интегральной матрице  $Y$ .

Нетрудно убедиться, что интегральные матрицы уравнения (4) и сопряженного уравнения (16) связаны соотношением

$$YZ^* \equiv C = \text{const}. \quad (18)$$

Действительно, имеем

$$\frac{d(YZ^*)}{dx} = \frac{dY}{dx} Z^* + Y \frac{dZ^*}{dx} = YPZ^* - YPZ^* \equiv 0.$$

Следовательно,

$$YZ^* = C. \quad (19)$$

Из равенства (19) вытекает, что

$$Z^* = Y^{-1} C.$$

Отсюда, в частности, следует, что если  $Y$  есть интегральная матрица уравнения (4), то  $Y^{-1}$  будет интегральной матрицей сопряженного уравнения (16). При этом надо только не забывать, что в матрице  $Y^{-1}$  решения расположены по столбцам.

Таким образом, мы вновь (ср. п. 207) убеждаемся, что задача интегрирования системы (1) равносильна задаче интегрирования сопряженной системы (14).

Если система (1) самосопряженная, т. е.  $p_{ih} = -p_{hi}$ , то сопряженное уравнение (16) примет вид

$$\frac{dZ^*}{dx} = P^* Z^* \quad (20)$$

и ясно, что в качестве интегральной матрицы  $Z^*$  можно взять  $Y$ .

Действительно, если  $Y$  есть интегральная матрица уравнения (4), то мы имеем тождество

$$\frac{dY}{dx} \equiv YP.$$

Транспонируя обе части этого тождества, получаем

$$\frac{dY^*}{dx} = P^*Y^*,$$

т. е.  $Y^*$  есть интегральная матрица уравнения (20).

Подставляя  $Z^* = Y^*$  в тождество (18), получим

$$YY^* = C$$

или

$$\sum_{l=1}^n y_{il} y_{kl} \equiv c_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, в частности, при  $i=k$  снова получаем (ср. п. 207), что всякое решение самосопряженной системы обладает свойством

$$y_{i1}^2 + y_{i2}^2 + \dots + y_{in}^2 = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

#### § 48. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**234. Структура фундаментальной системы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Группы решений** [97, с. 95—97; 152, с. 57—72]. Рассмотрим систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{lk} y_l \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $a_{ik}$  — вещественные числа. Эта система равносильна матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = YA, \quad (2)$$

причем

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Интегральной матрицей уравнения (2) будет (см. п. 232 формула (13))

$$Y_1 = e^{Ax}. \quad (3)$$

Изучим структуру этой интегральной матрицы в зависимости от матрицы  $A$ . Тем самым мы изучим структуру фундаментальной системы решений системы (1) в зависимости от ее коэффициентов. Как увидим из дальнейшего, эта структура существенно зависит от характеристикских чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и элементарных делителей матрицы  $A$ . Знание их дает возможность привести матрицу  $A$  к каноническому виду.

Предположим сначала, что матрица  $A$  имеет простые элементарные делители  $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n$  и, следовательно, она имеет каноническое представление

$$A = S^{-1} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] S,$$

где среди характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  могут быть и одинаковые. Тогда

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{Ax} = e^{S^{-1} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] S x} = e^{S^{-1} [\lambda_1 x, \lambda_2 x, \dots, \lambda_n x] S} = \\ &= S^{-1} e^{[\lambda_1 x, \lambda_2 x, \dots, \lambda_n x]} S = S^{-1} [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] S. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножая интегральную матрицу (4) слева на  $S$  (отчего, согласно п. 231, она не перестает быть интегральной, но уже не будет нормированной в точке  $x=0$ ). получаем

$$Y = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] S.$$

Пусть

$$S = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} & \gamma_{12} e^{\lambda_1 x} & \dots & \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_2 x} & \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_n x} & \gamma_{n2} e^{\lambda_n x} & \dots & \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае простых элементарных делителей, независимо от того, являются все характеристические числа простыми или среди них имеются кратные, фундаментальная система имеет ту же структуру, что и в случае простых корней характеристического уравнения.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть матрица  $A$  имеет элементарные делители

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s},$$

где среди характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  могут быть и одинаковые;  $1 \leq \rho_m \leq n$ , причем  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n$ , и, следовательно, каноническим представлением матрицы  $A$  будет

$$A = S^{-1} [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)] S.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{Ax} = e^{S^{-1} [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)] Sx} = \\ &= e^{S^{-1} [I_{\rho_1}(\lambda_1)x, I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)x] S} = \\ &= S^{-1} e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1)x, I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)x]} S = \\ &= S^{-1} e^{[e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}]} S \end{aligned}$$

или

$$Y_1 = S^{-1} [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}] S.$$

Умножая эту интегральную матрицу слева на  $S$ , получаем интегральную матрицу

$$Y = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}] S. \quad (5)$$

Вычислим матрицу  $e^{I_{\rho}(\lambda)x}$ . Имеем

$$e^{I_{\rho}(\lambda)x} = e^{[\lambda + I_{\rho}(0)]x} = e^{\lambda x + I_{\rho}(0)x} = e^{\lambda x} e^{I_{\rho}(0)x} \quad (6)$$

Далее

$$e^{I_{\rho}(0)x} = I_{\rho} + I_{\rho}(0)x + \frac{1}{2!} (I_{\rho}(0))^2 x^2 + \dots + \frac{1}{\nu!} (I_{\rho}(0))^{\nu} x^{\nu} + \dots$$

(Здесь  $I_{\rho}$  — единичная матрица порядка  $\rho$ ).

Но

$$(I_{\rho}(0))^2 = I_{\rho}^{(2)}(0),$$



где

$$I_{\rho}^{(2)}(0) = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

и вообще при  $\nu < \rho$  будем иметь

$$(I_{\rho}(0))^{\nu} = I_{\rho}^{(\nu)}(0),$$

где

$$I_{\rho}^{(\nu)}(0) = \left\{ \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \underbrace{0 \dots 0}_{\nu} \end{array} \right\| \right\}.$$

Вообще

$$(I_{\rho}(0))^{\nu} = \begin{cases} I_{\rho}^{(\nu)}(0), & \text{если } \nu < \rho, \\ 0, & \text{если } \nu \geq \rho. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} e^{I(0)x} &= I_{\rho} + I_{\rho}(0)x + \frac{1}{2!} I_{\rho}^{(2)}(0)x^2 + \dots + \frac{1}{(\rho-1)!} I_{\rho}^{(\rho-1)}(0)x^{\rho-1} = \\ &= \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & \frac{x^{\rho-2}}{(\rho-2)!} & \frac{x^{\rho-3}}{(\rho-3)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание (6), получаем

$$e^{I_{\rho}(\lambda)x} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x e^{\lambda x} & e^{\lambda x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & e^{\lambda x} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!} e^{\lambda x} & \frac{x^{\rho-2}}{(\rho-2)!} e^{\lambda x} & \frac{x^{\rho-3}}{(\rho-3)!} e^{\lambda x} & \dots & \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & e^{\lambda x} \end{array} \right\|.$$

Вследствие этого решения, составляющие интегральную матрицу (5), разобьются на  $s$  групп, содержащих соответственно  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$  решений, причем  $\mu$ -я группа имеет следующий вид

$$\left. \begin{array}{l} P_{1,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x) e^{\lambda_\mu x}, P_{2,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x) e^{\lambda_\mu x}, \dots, P_{n,\mu}^{(\rho_\mu-1)}(x) e^{\lambda_\mu x}, \\ P_{1,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x) e^{\lambda_\mu x}, P_{2,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x) e^{\lambda_\mu x}, \dots, P_{n,\mu}^{(\rho_\mu-2)}(x) e^{\lambda_\mu x}, \\ \dots \dots \dots \\ P_{1,\mu}'(x) e^{\lambda_\mu x}, P_{2,\mu}'(x) e^{\lambda_\mu x}, \dots, P_{n,\mu}'(x) e^{\lambda_\mu x}, \\ P_{1,\mu}(x) e^{\lambda_\mu x}, P_{2,\mu}(x) e^{\lambda_\mu x}, \dots, P_{n,\mu}(x) e^{\lambda_\mu x}. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Все решения этой группы получены из последнего решения последовательным дифференцированием коэффициентов при  $e^{\lambda_\mu x}$ . Эти коэффициенты представляют собою полиномы степени не выше, чем  $\rho_\mu - 1$ , где  $\rho_\mu$  — степень элементарного делителя, соответствующего характеристическому числу  $\lambda_\mu$ .

Напоминаем еще раз, что здесь среди характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  могут быть и одинаковые.

Из доказанного легко получить вид решений, соответствующих характеристическому числу  $\lambda_1$  кратности  $k$  [97, с. 96, 97].

Если характеристическому числу  $\lambda_1$  соответствует только один элементарный делитель  $(\lambda - \lambda_1)^k$ , то мы получаем одну группу решений вида (7), где следует положить  $\lambda_\mu = \lambda_1$ . Эта группа содержит  $k$  решений. Этот случай имеет место, когда хоть один из определителей  $(n-1)$ -го порядка, составленных из характеристического определителя, не делится на  $\lambda - \lambda_1$ , т. е. хоть один из этих определителей не обращается в нуль при  $\lambda = \lambda_1$ .

Если же характеристическому числу  $\lambda_1$  соответствует несколько элементарных делителей:

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_1}, (\lambda - \lambda_1)^{l_2}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{l_{m+1}},$$

причем  $l_1 + l_2 + \dots + l_{m+1} = k$ , то ему соответствует  $m+1$  групп решений вида (7), причем каждая группа содержит соответственно  $l_1, l_2, \dots, l_{m+1}$  решений.

Этот случай будет иметь место всякий раз, когда характеристическое число  $\lambda_1$  обращает в нуль все определители, составленные из характеристического определителя до порядка  $n-m$ , не обращая в нуль по крайней мере одного из определителей порядка  $n-m-1$ .

*В частности, если все элементарные делители, соответствующие характеристическому числу  $\lambda_1$ , простые:  $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_1$  ( $k$  элементарных делителей), то мы получаем  $k$  решений такого же типа, как и в случае простого корня характеристического уравнения.*

Во всех случаях характеристическому числу  $\lambda_1$  кратности  $k$  будет таким образом соответствовать  $k$  линейно независимых решений, образующих одну или несколько (но не больше чем  $k$ ) групп вида (7).

Докажем теперь теорему п. 212 о решении, соответствующем характеристическому числу кратности  $k$ .

Пусть  $\lambda_1$  — характеристическое число кратности  $k$ . Построим, согласно предыдущему,  $k$  линейно независимых решений, соответствующих этому характеристическому числу. Возьмем линейную комбинацию этих решений с  $k$  произвольными постоянными  $C_1, C_2, \dots, C_k$ .

Тогда мы и получим решение вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x},$$

где  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  суть полиномы степени не выше, чем  $k-1$ , имеющие в совокупности  $k$  произвольных коэффициентов, что и требовалось доказать.

**235. Приведение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду.** В предыдущем пункте, рассматривая вопрос о структуре фундаментальной системы решений однородной линейной системы (1), мы брали в качестве интегральной матрицы уравнения (2) матрицу (3), заменяли в ней матрицу  $A$  ее каноническим представлением и умножали затем полученную интегральную матрицу слева на  $S$ .

Но можно поступить иначе. Мы уже знаем (см. п. 230), что подстановка

$$Y = ZS \quad (D(S) \neq 0) \quad (8)$$

приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{dZ}{dx} = ZB,$$

где  $B = SAS^{-1}$ . Выберем матрицу  $S$  так, чтобы  $B$  имела канонический вид

$$B = [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)],$$

так что

$$A = S^{-1} [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)] S.$$

Тогда подстановка (8) приведет уравнение (2) к виду

$$\frac{dZ}{dx} = Z [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]. \quad (9)$$

Полученное уравнение (9) называется *уравнением канонического вида, соответствующим данному уравнению (2)*. За интегральную матрицу уравнения (9) можно взять

$$Z = e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]x}$$

или

$$Z = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}].$$

Подставляя это значение  $Z$  в формулу (8), мы получим интегральную матрицу уравнения (2) или, что то же, фундаментальную систему решений системы (1) в виде

$$Y = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}] S,$$

т. е. снова в виде (5).

Система дифференциальных уравнений, соответствующая матричному уравнению (9), называется *каноническим видом системы (1)*.

Перейдем от матричного уравнения (9) к соответствующей ему системе дифференциальных уравнений. Для этого вспомним, что при переходе от системы к матричному уравнению мы транспонировали матрицу коэффициентов системы. Поэтому при переходе от матричного уравнения (9) к соответствующей системе мы должны транспонировать матрицу  $[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]$ . Если еще принять во внимание структуру этой матрицы, то нетрудно убедиться, что мы получим однородную линейную систему  $n$  уравнений, которая разбивается на  $s$  групп, т. е. на столько групп, сколько различных элементарных делителей имеет матрица  $A$ , причем число уравнений, содержащихся в каждой группе, равно степени элементарного делителя, соответствующего этой группе. В каждой группе уравнений диагональные коэффициенты равны соответствующему характеристическому числу, коэффициенты, стоящие на параллельной верхней диагонали, равны единице, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, каноническим видом системы (1) будет:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + z_2, \\
 \frac{dz_2}{dx} &= \lambda_1 z_2 + z_3, \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_{\rho_1-1}}{dx} &= \lambda_1 z_{\rho_1-1} + z_{\rho_1}, \\
 \frac{dz_{\rho_1}}{dx} &= \lambda_1 z_{\rho_1}, \\
 \frac{dz_{\rho_1+1}}{dx} &= \lambda_2 z_{\rho_1+1} + z_{\rho_1+2}, \\
 \frac{dz_{\rho_1+2}}{dx} &= \lambda_2 z_{\rho_1+2} + z_{\rho_1+3}, \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_{\rho_1+\rho_2-1}}{dx} &= \lambda_2 z_{\rho_1+\rho_2-1} + z_{\rho_1+\rho_2}, \\
 \frac{dz_{\rho_1+\rho_2}}{dx} &= \lambda_2 z_{\rho_1+\rho_2}, \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_{n-\rho_s+1}}{dx} &= \lambda_s z_{n-\rho_s+1} + z_{n-\rho_s+2}, \\
 \frac{dz_{n-\rho_s+2}}{dx} &= \lambda_s z_{n-\rho_s+2} + z_{n-\rho_s+3}, \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_{n-1}}{dx} &= \lambda_s z_{n-1} + z_n, \\
 \frac{dz_n}{dx} &= \lambda_s z_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если, в частности, все характеристические числа системы (1) различные или среди них имеются кратные, но все элементарные делители простые, то соответствующее каноническое матричное уравнение (9) примет вид

$$\frac{dZ}{dx} = Z [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

следовательно, система (1) может быть преобразована к чисто диагональному каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= \lambda_2 z_2, \\ &\dots \\ \frac{dz_n}{dx} &= \lambda_n z_n, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где среди чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  могут быть и одинаковые.

Таким образом, мы доказали, что *всякая однородная линейная система (1) может быть приведена к каноническому виду (10) или (11), т. е. к чисто диагональному виду или к квазидиагональному, в зависимости от того, будут все элементарные делители матрицы простыми или среди них имеются кратные.*

Каноническая система (10) (и тем более (11)) обладает существенным преимуществом перед системой общего вида (1). В самом деле, мы всегда легко можем построить общее решение канонической системы, интегрируя последовательно уравнения каждой группы, начиная с последнего. В этом состоит практическая ценность приведения системы к каноническому виду.

Но возможность приведения системы к каноническому виду имеет более глубокое принципиальное теоретическое значение. Она позволяет при рассмотрении многих вопросов теории дифференциальных уравнений, связанных с рассмотрением линейных систем, например, при изучении устойчивости решений (движений) и при рассмотрении вопросов качественной и (аналитической) теории дифференциальных уравнений в случае, когда первое приближение представляет собою линейную систему с постоянными коэффициентами, ограничиться исследованием этих вопросов лишь для систем канонического вида, что, во-первых, облегчает исследование, и, во-вторых, дает нам уверенность в том, что, изучив тот или иной вопрос для всевозможных канонических систем данного порядка, мы тем самым охватываем все возможные случаи систем этого порядка.

Например, при изучении вопросов, связанных с системой второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{21}z, \\ \frac{dz}{dx} &= a_{12}y + a_{22}z, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

достаточно ограничиться рассмотрением систем трех видов:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \lambda_1 y, \\ \frac{dz}{dx} = \lambda_2 z; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \lambda_1 y, \\ \frac{dz}{dx} = \lambda_1 z; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \lambda_1 y + z, \\ \frac{dz}{dx} = \lambda_1 z. \end{array} \right\}$$

Поэтому фундаментальная система решений системы (12) имеет одну из трех структур:

$$\left\| \begin{array}{cc} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{array} \right\| S, \quad \left\| \begin{array}{cc} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 x} \end{array} \right\| S, \quad \left\| \begin{array}{cc} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ x e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} \end{array} \right\| S.$$

**Пример 1.** Привести к каноническому виду и найти общее решение системы

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Перепишем эту систему, полагая  $y = y_1$ ,  $z = y_2$ , в виде

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Здесь

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{array} \right\|, \quad D(A - \lambda I) = \left\| \begin{array}{cc} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{array} \right\| = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9.$$

Следовательно, система (14), а тогда и данная система (13), приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} = 9z_2. \end{array} \right\}$$

Фундаментальной системой решений системы (14) будет

$$Y = \left\| \begin{array}{cc} e^x & 0 \\ 0 & e^{9x} \end{array} \right\| S. \quad (15)$$

Найдем  $S$ . Имеем

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = S^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} S, \quad S \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} S.$$

Пусть

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}.$$

$$5s_{11} + 4s_{12} = s_{11}, \quad 5s_{21} + 4s_{22} = 9s_{21},$$

$$s_{12} = -s_{11}, \quad s_{22} = s_{21}.$$

Полагая  $s_{11} = s_{21} = 1$ , найдем  $s_{12} = -1$ ,  $s_{22} = 1$ , так что

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя найденное значение  $S$  в формулу (15), получим

$$Y = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{9x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^x \\ e^{9x} & e^{9x} \end{vmatrix}.$$

Общим решением системы (13) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z &= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \end{aligned} \right\}$$

**Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Характеристическими числами будут (см. п. 212, пример 3),  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 6$ . Поэтому система (16) приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= 2z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= 3z_2, \\ \frac{dz_3}{dx} &= 6z_3. \end{aligned} \right\}$$



Фундаментальной системой решений системы (16) будет

$$Y = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{8x} \end{vmatrix} S.$$

**Пример 3.** Дана система:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эта система имеет одно простое характеристическое число  $\lambda_1 = 1$  и одно двукратное характеристическое число  $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ . Но элементарные делители, соответствующие кратному корню, простые:  $\lambda + 2, \lambda + 2$ . Поэтому система (17) приводится к чисто диагональному каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= -2z_2, \\ \frac{dz_3}{dx} &= -2z_3. \end{aligned} \right\}$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$Y = \begin{vmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{vmatrix} S.$$

**Пример 4.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_2 + y_3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь также одно характеристическое число простое:  $\lambda_1 = 0$ , а другое двукратное:  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Но элементарный делитель, соответствующий кратному корню, не простой:

$(\lambda-1)^2$ . Поэтому система (18) приводится не к чисто диагональному виду, а к квази-диагональному:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= 0, \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_2 + z_3, \\ \frac{dz_3}{dx} &= z_3. \end{aligned} \right\}$$

Фундаментальной системой решений будет

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & xe^x & e^x \end{vmatrix} S.$$

**Пример 5.** В п. 141 мы, рассматривая вопрос о поведении интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad-bc \neq 0) \quad (19)$$

в окрестности особой точки  $(0, 0)$ , приводили это уравнение при помощи неособенного линейного преобразования к простейшим формам. Это равносильно приведению соответствующей системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx+dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax+by \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

к каноническому виду, т. е. к одной из трех систем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_1 \eta, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_2 \xi; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_1 \eta, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_1 \eta + \xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому уравнение (19) приводится к одной из трех простейших форм \*

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} \left( \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \right), \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta + \xi}{\lambda_1 \xi} \quad (21)$$

и остается изучить характер поведения интегральных кривых в зависимости от вида характеристических чисел, что и сделано в п. 141. Заметим, что если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , случаю

\* Первое из уравнений (21) может иметь комплексный вид. Нетрудно преобразовать уравнение (19) к вещественным простейшим формам [119, с. 188—190].

простых элементарных делителей  $\lambda - \lambda_1$ ,  $\lambda - \lambda_1$  матрицы коэффициентов системы (20) соответствует дикритический узел, а случаю кратного элементарного делителя  $(\lambda - \lambda_1)^2$  — вырожденный узел.

**236. Вид фундаментальной системы решений однородной линейной системы с периодическими коэффициентами.** Рассмотрим систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) y_l \quad (k=1, \dots, n), \quad (22)$$

коэффициенты которой суть непрерывные  $\omega$ -периодические ( $\omega > 0$ ) функции, т. е.

$$p_{lk}(x + \omega) = p_{lk}(x) \quad (l, k=1, \dots, n).$$

Записывая систему (22) в матричной форме, имеем

$$\frac{dY}{dx} = YP, \quad (23)$$

где  $P(x)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая матрица, т. е.

$$P(x + \omega) = P(x).$$

Нетрудно убедиться, что если  $Y(x)$  — интегральная матрица уравнения (23), то  $Y(x + \omega)$  тоже будет интегральной матрицей этого уравнения.

Действительно, заменяя в уравнении (23) независимую переменную  $x$  на  $x + \omega$ , имеем

$$\frac{dY(x + \omega)}{d(x + \omega)} = Y(x + \omega) P(x + \omega)$$

или

$$\frac{dY(x + \omega)}{dx} = Y(x + \omega) P(x),$$

т. е.  $Y(x + \omega)$  — интегральная матрица уравнения (23).

Матрицы  $Y(x + \omega)$  и  $Y(x)$ , будучи интегральными матрицами одного и того же уравнения, связаны соотношением вида

$$Y(x + \omega) = CY(x), \quad D(C) \neq 0,$$

т. е. при увеличении  $x$  на период  $\omega$  матрицы  $P(x)$ , интегральная матрица умножается слева на неособенную постоянную матрицу  $C$ .

Построим элементарную матрицу, обладающую этим же свойством. В качестве такой матрицы можно взять экспоненциальную матрицу

$$e^{Bx}, \quad (24)$$

выбрав постоянную матрицу  $B$  соответствующим образом. В самом деле, заменяя в матрице (24)  $x$  на  $x+\omega$ , имеем

$$e^{B(x+\omega)} = e^{Bx} e^{B\omega} = e^{B\omega} e^{Bx}.$$

Отсюда ясно, что нужно выбрать  $B$  так, чтобы

$$e^{B\omega} = C,$$

для чего достаточно положить

$$B\omega = \ln C,$$

откуда

$$B = \frac{1}{\omega} \ln C. \quad (25)$$

Покажем, что матрица

$$Y_0(x) = e^{-Bx} Y(x), \quad (26)$$

где  $Y(x)$  — интегральная матрица уравнения (23), а  $B$  — матрица, определяемая равенством (25), является неособенной непрерывной  $\omega$ -периодической матрицей.

Действительно, очевидно, что  $D(Y_0) \neq 0$  и матрица  $Y_0(x)$  непрерывна. Кроме того,

$$\begin{aligned} Y_0(x+\omega) &= e^{-B(x+\omega)} Y(x+\omega) = e^{-Bx} e^{-B\omega} C Y(x) = \\ &= e^{-Bx} C^{-1} C Y(x) = Y_0(x), \end{aligned}$$

т. е.  $Y_0(x)$   $\omega$ -периодична.

Теперь из формулы (26) имеем

$$Y(x) = e^{Bx} Y_0(x). \quad (27)$$

Эта формула и дает вид интегральной матрицы уравнения (23).

Таким образом, интегральная матрица уравнения (23) представима в виде произведения матрицы  $e^{Bx}$  (приобретающей постоянный множитель  $C$  после увеличения  $x$  на период  $\omega$  матрицы  $P(x)$ ) на неособенную непрерывную  $\omega$ -периодическую матрицу.

**237. Понятие о приводимых системах.** Пусть дана однородная линейная система

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n p_{lk}(t) x_l \quad (k=1, \dots, n), \quad (28)$$

$$\frac{dX}{dt} = XP. \quad (29)$$

Система (28) называется *приводимой*, если существует такая матрица  $Z$  типа Ляпунова, что подстановка

$$Y = XZ$$

$$\frac{dY}{dt} = YB,$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= z_{11}(t)x_1 + z_{21}(t)x_2 + \dots + z_{n1}(t)x_n, \\ y_2 &= z_{12}(t)x_1 + z_{22}(t)x_2 + \dots + z_{n2}(t)x_n, \\ &\vdots \\ y_n &= z_{1n}(t)x_1 + z_{2n}(t)x_2 + \dots + z_{nn}(t)x_n, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \dots + b_{n1}y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} &= b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{n2}y_n, \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + \dots + b_{nn}y_n \end{aligned} \right\}$$

с постоянными коэффициентами  $b_{lk}$ .

Понятие приводимой системы было введено А. М. Ляпуновым [97]. Ляпунов выяснил роль приводимых систем при исследовании устойчивости решений нелинейных систем уравнений, первое приближение которых явно содержит время.

В качестве примера приводимой системы А. М. Ляпунов указал лишь на систему, коэффициенты которых являются периодическими функциями с одним периодом  $\omega > 0$ .

Общая теория приводимых систем была построена в 1946 г. Н. П. Еругиным [61]. В частности, им была доказана следующая теорема, дающая необходимое и достаточное условие приводимости.

**Теорема.** Для того чтобы система

$$\frac{dX}{dt} = XP \quad (30)$$

была приводима к системе

$$\frac{dY}{dt} = YB$$

с постоянной матрицей  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы интегральная матрица системы (30) имела структуру

$$X = e^{Bt} Z, \quad (31)$$

где  $B$  — постоянная матрица, а  $Z$  — матрица типа Ляпунова.

Эта теорема позволяет легко доказать теорему Ляпунова о приводимости однородной линейной системы (22) с периодическими коэффициентами.

В самом деле, интегральная матрица (27) системы (22) имеет как раз вид (31) и, следовательно, система (22) приводима.

## § 49. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МАТРИЧНО-ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

238. Матрично-векторная запись линейной системы и ее решение. Задача Коши. Пусть дана линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k=1, \dots, n). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение матрицу  $P(x)$  коэффициентов системы (1) и две *вектор-функции* — вектор-столбцы

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда, определив производную  $\frac{dy}{dx}$  равенством

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

можно записать систему (1) в следующем *матрично-векторном виде*

$$\frac{dy}{dx} = Py + f. \quad (2)$$

При этом однородная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k=1, \dots, n) \quad (3')$$

запишется так:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y. \quad (3)$$

Решением уравнения (2) в интервале  $(a, b)$  называется *вектор-функция* — вектор-столбец —  $y=y(x)$ , обращающая уравнение (2) в тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv P(x)y(x) + f(x) \quad (a < x < b).$$

В частности,  $y=y(x)$  — решение однородного уравнения (3) в  $(a, b)$ , если

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv P(x)y(x) \quad (a < x < b). \quad (4)$$

Предположим, что  $P(x)$  и  $f(x)$  непрерывны в  $(a, b)$ , тогда, в силу теоремы Пикара п. 126, уравнение (2) имеет единственное решение  $y=y(x)$ , удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

где

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

есть *начальный* вектор, причем

$$y_k^{(0)} = y_k(x_0) \quad (k = 1, \dots, n).$$

При этом начальный вектор  $y_0$  можно задавать произвольно и решение  $y=y(x)$  задачи Коши (2), (5) заведомо определено при всех  $x \in (a, b)$ .

В частности, единственным решением однородного уравнения (3), удовлетворяющим нулевому начальному условию

$$y(x_0) = 0,$$

будет нулевой вектор-столбец

$$y(x) \equiv 0.$$

**239. Два общих свойства матрично-векторного уравнения, соответствующего линейной системе.** Покажем, что уравнение (2) инвариантно относительно любой замены независимой переменной и линейной замены искомой вектор-функции (вектора-столбца).

1. Уравнение (2) остается линейным при любой замене независимой переменной

$$x = \varphi(t) \quad (\alpha < t < \beta), \quad (6)$$

где  $\varphi(t)$  — непрерывно дифференцируема в  $(\alpha, \beta)$ , причем  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и  $\varphi'(t) \neq 0$  при  $t \in (\alpha, \beta)$ .



В самом деле, так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)},$$

то подстановка (6) приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\varphi'(t)} P(\varphi(t)) y + \frac{1}{\varphi'(t)} f(\varphi(t)),$$

т. е. мы снова получаем линейное уравнение.

Отметим, что подстановка (6) не нарушает ни линейности, ни однородности уравнения (3).

2. Уравнение (2) остается линейным при любом неособенном линейном преобразовании искомой вектор-функции

$$z(x) = A(x) y(x),$$

где  $z$  — новая искомая вектор-функция, а  $A(x)$  непрерывно дифференцируемая в  $(a, b)$  матрица с  $D(A) \neq 0$  в  $(a, b)$ .

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dA}{dx} y + A \frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dx} y + A(Py + f) = \\ &= \frac{dA}{dx} A^{-1} z + APA^{-1} z + Af, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{dz}{dx} = P_1(x) z + f_1,$$

где

$$P_1(x) = \frac{dA}{dx} A^{-1} + APA^{-1}, \quad f_1 = Af.$$

Заметим, что однородное уравнение (3) останется однородным.

Таким образом, мы вновь установили два общих свойства линейных систем, доказанные в п. 197.

**240. Основные свойства решений однородного матрично-векторного уравнения.** Рассмотрим однородное уравнение (3)

$$\frac{dy}{dx} = P(x) y.$$

Покажем, что его решения обладают двумя замечательными свойствами.

1. Если  $y(x)$  — решение уравнения (3), то  $Cy(x)$ , где  $C$  — произвольная постоянная, тоже является решением уравнения (3).

В самом деле, мы имеем

$$(Cy(x))' = Cy'(x) \equiv CP(x)y(x) = P(x)(Cy(x)),$$

т. е.

$$(Cy(x))' \equiv P(x)(Cy(x)),$$

а это и означает, что  $Cy(x)$  — решение уравнения (3).

2. Если  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  — решения уравнения (3), то их линейная комбинация с любыми постоянными коэффициентами  $C_1, \dots, C_m$ , т. е.

$$y = \sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}(x) \quad (7)$$

тоже будет решением уравнения (3).

Действительно,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}(x) \right)' &= \sum_{i=1}^m C_i (y^{(i)}(x))' \equiv \sum_{i=1}^m C_i (P(x) y^{(i)}(x)) = \\ &= P(x) \sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}(x), \end{aligned}$$

т. е.

$$\left( \sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}(x) \right)' \equiv P(x) \left( \sum_{i=1}^m C_i y^{(i)}(x) \right),$$

а это и означает, что (7) является решением уравнения (3).

Таким образом, мы вновь установили свойства решений однородной линейной системы, доказанные в п. 198.

**241. Линейно независимые решения и построение общего решения однородного матрично-векторного уравнения.** Решения

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x) \quad (8)$$

называются *линейно независимыми* в интервале  $(a, b)$ , если тождества

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i(x) \equiv 0$$

выполняются в  $(a, b)$  только в очевидном случае, т. е. когда все  $\alpha_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ). В противном случае решения (8) называются *линейно зависимыми* в  $(a, b)$ .

Если имеется  $n$  решений,  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то они будут линейно независимыми в  $(a, b)$ , в силу теоремы п. 201, тогда и только тогда, когда определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в  $(a, b)$ . Здесь решения расположены по столбцам.

Совокупность  $n$  линейно независимых решений уравнения (3) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения или, что то же, однородной системы (3').

При сделанном выше предположении относительно непрерывности матрицы  $P(x)$  фундаментальная система решений, как показано в п. 204, существует.

Если вектора

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

образуют фундаментальную систему решений в  $(a, b)$ , то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами,

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y_i$$

является, как показано в п. 205, общим решением уравнения (3) или, что то же, однородной линейной системы (3') в области

$$D: \quad a < x < b, \quad |y_k| < +\infty \quad (k=1, \dots, n).$$

Обращаем внимание читателя на то, что здесь для построения общего решения по фундаментальной системе решений

$$\begin{array}{ccccccc} y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \dots, & y_{nn} \end{array}$$

берутся в отличие от п. 205 линейные комбинации не по столбцам, а по строкам.

**242. Формула Коши для неоднородной линейной системы.** Пусть дана неоднородная линейная система (1)

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}y_l + f_k(x) \quad (k=1, \dots, n)$$

или, что то же, соответствующее ей матрично-векторное уравнение (2)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x).$$

Предположим, что  $P(x)$  и  $f(x)$  непрерывны в  $(a, b)$ . Найдем решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0$$

Рассмотрим наряду с уравнением (2) уравнение в матричной форме

$$\frac{dZ}{dx} = P(x)Z, \quad (9)$$

соответствующее однородной линейной системе

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)z_l \quad (k=1, \dots, n).$$

Пусть  $Z(x)$  есть интегральная матрица уравнения (9), нормированная в точке  $x=x_0 \in (a, b)$ , так что  $Z(x_0) = I$ .

Будем искать решение уравнения (2) с начальным условием (5) в виде

$$y = ZC(x), \quad (10)$$

где  $C(x)$  — непрерывно дифференцируемая в  $(a, b)$  вектор-функция (вектор-столбец), подлежащая определению, причем  $C(x_0) = y_0$ , ибо  $Z(x_0) = I$ .

Подставляя (10) в (2), имеем

$$\frac{dZ}{dx} C(x) + Z \frac{dC(x)}{dx} = P(x)ZC(x) + f(x).$$

Здесь первые слагаемые в левой и правой частях взаимно уничтожаются, ибо  $Z$  — интегральная матрица уравнения (9). Поэтому

$$Z \frac{dC(x)}{dx} = f(x),$$

откуда

$$\frac{dC(x)}{dx} = Z^{-1} f(x).$$

Следовательно,

$$C(x) = \int_{x_0}^x Z^{-1}(t) f(t) dt + C.$$

Так как  $C(x_0) = y_0$ , то  $C = y_0$  и мы получаем

$$C(x) = \int_{x_0}^x Z^{-1}(t) f(t) dt + y_0.$$

Подставим это выражение для  $C(x)$  в формулу (10). Получим

$$y = Z \left( y_0 + \int_{x_0}^x Z^{-1}(t) f(t) dt \right)$$

или (раскрывая скобки и вводя  $Z(t)$  под знак интеграла)

$$y = Zy_0 + \int_{x_0}^x Z(x) Z^{-1}(t) f(t) dt. \quad (11)$$

Эта формула называется *формулой Коши* для неоднородной линейной системы (1). Если  $y_0$  произвольно, то формула (11) дает общее решение неоднородной линейной системы (1) в форме Коши.

В частности, для неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n a_{kl} y_l + f_k(x) \quad (k=1, \dots, n)$$

или, что то же, для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f,$$

вследствие того что

$$Z(x) = e^{A(x-x_0)},$$

формула Коши (11) принимает вид

$$y = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} f(t) dt.$$

В частности, при  $x_0=0$  имеем

$$y = e^{Ax} y_0 + \int_0^x e^{A(x-t)} f(t) dt. \quad (12)$$

Заметим, что второе слагаемое в формуле (12) дает частное решение

$$y_1 = \int_0^x e^{A(x-t)} f(t) dt$$

с начальным условием

$$y_1(0) = 0,$$

т. е. решение неоднородной линейной системы (1) с нулевыми начальными значениями искомых функций при  $x=0$ .

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

### ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

#### § 50. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

243. Связь между однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка и соответствующей ему системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме. В настоящей главе мы даем понятие об уравнениях с частными производными первого порядка. При этом мы ограничиваемся изложением простейших сведений из этой теории, ставя себе целью лишь показать связь линейного уравнения с частными производными первого порядка с системой обыкновенных дифференциальных уравнений и дать методы построения общего решения и решения задачи Коши, основанные на этой связи.

Согласно сказанному во введении, уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид (см. введение, с. 6):

$$\Phi \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0. \quad (1)$$

*Решением* этого уравнения называется функция

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

определенная и непрерывная вместе с частными производными в некоторой области изменения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и обращающая уравнение (1) в тождество (в этой области). При этом предполагается, что значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых определена функция (2), и значения, принимаемые этой функцией и ее частными производными, лежат в области определения функции  $\Phi$ .

Если в уравнении (1) функция  $\Phi$  зависит линейно от частных производных от искомых функций, то оно называется *линейным* уравнением. Линейное уравнение можно записать в виде

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда правая часть уравнения (3) равна тождественно нулю, а коэффициенты  $X_1, X_2, \dots, X_n$  не зависят от искомой функции  $u$ , так что мы имеем

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Такое уравнение называется *однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка*.

Ясно, что уравнение (4) имеет решение вида

$$u = c \quad (c = \text{const}).$$

В дальнейшем такое решение будем называть *очевидным* решением. Ниже мы докажем, что уравнение (4) (при некоторых предположениях относительно коэффициентов) имеет бесчисленное множество решений, отличных от очевидных.

С этой целью наряду с уравнением (4) мы будем рассматривать следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта система называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными (4)*.

Докажем две теоремы, устанавливающие связь между уравнением (4) и системой (5).

При этом относительно коэффициентов  $X_1, X_2, \dots, X_n$  уравнения (4) будем предполагать, что они определены и непрерывны вместе с частными производными по  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в некоторой окрестности заданной точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  и что в этой точке они не обращаются одновременно в нуль, так что точка  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  является *неособой* точкой системы (5). Будем, например, считать, что

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0.$$



При сделанном предположении система (5) имеет ровно  $n-1$  независимых интегралов, определенных и непрерывных вместе с частными производными в некоторой окрестности точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

Это следует из того, что система (5) равносильна следующей нормальной системе  $n-1$  уравнений

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \quad (6)$$

для которой выполняются условия теоремы о существовании интегралов нормальной системы (см. п. 138).

**Теорема 1.** *Всякий интеграл системы (5) является (неочевидным) решением уравнения (4).*

В самом деле, пусть  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть интеграл системы (5), определенный в некоторой окрестности точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ . Тогда полный дифференциал функции  $\psi$  тождественно равен нулю в силу системы (5) или системы (6), т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

где дифференциалы  $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$  нужно заменить их значениями из системы (6), а именно

$$dx_1 = \frac{X_1}{X_n} dx_n, dx_2 = \frac{X_2}{X_n} dx_n, \dots, dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n,$$

так что мы будем иметь тождество

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n \equiv 0$$

или (сокращая на  $dx_n$  и умножая на  $X_n$ )

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Это тождество и означает, что функция  $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является решением уравнения (4).

**Теорема 2.** *Всякое (неочевидное) решение уравнения (4) является интегралом системы (5).*

Действительно, пусть  $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (неочевидное) решение уравнения (4). Тогда

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (7)$$

Вычисляя полный дифференциал функции  $\psi$  в силу системы (5) или, что то же, в силу системы (6), имеем

$$\begin{aligned} d\psi \Big|_{(5)} &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \right) \Big|_{(6)} = \\ &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \left( X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n} dx_n, \end{aligned}$$

откуда вследствие тождества (7) будет  $d\psi|_{(5)} \equiv 0$ , т. е.  $\psi$  есть интеграл системы (5).

**Пример.** Уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

соответствует система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}.$$

Эта система имеет интегралы

$$\psi_1 = xz, \quad \psi_2 = x \sqrt{y}.$$

Следовательно, функции

$$u_1 = xz, \quad u_2 = x \sqrt{y}$$

являются решениями уравнения (8).

**244. Построение общего решения однородного линейного уравнения.**  
Пусть

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (9)$$

суть независимые интегралы системы (5). Тогда функция

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (10)$$

где  $\Phi$  — любая функция, имеющая непрерывные производные по  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  (в том числе и  $\Phi = \text{const}$ ) будет решением уравнения (4).

В самом деле, подставляя функцию (10) в уравнение (4) и принимая во внимание, что функции (9) являются решениями уравнения (4), получаем тождество

$$\begin{aligned} & X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \\ &= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left( X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

а это и означает, что функция (10) есть решение уравнения (4).

Формулу (10) будем называть *общим решением* уравнения (4).

Обращаем внимание читателя на то, что в отличие от обыкновенных уравнений, общее решение (10) уравнения (4) с частными производными содержит не произвольные постоянные, но уже произвольную функцию.

Таким образом, *задача построения общего решения уравнения (4) равносильна задаче нахождения  $n-1$  независимых интегралов соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме (5).*

Рассмотрим случай двух независимых переменных. В этом случае, обозначая искомую функцию через  $z$ , а независимые переменные через  $x$  и  $y$ , мы вместо уравнения (4), будем иметь

$$X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Соответствующая система (5) обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме вырождается в одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Если  $\psi(x, y)$  есть интеграл этого уравнения, то

$$z = \Phi(\psi(x, y)),$$

где  $\Phi(\psi)$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от  $\psi$ , будет общим решением уравнения (11).

Если рассматривать  $x$ ,  $y$  и  $z$  как прямоугольные координаты точки трехмерного пространства, то решению  $z=z(x, y)$  уравнения (11) соответствует некоторая поверхность. Эта поверхность называется *интегральной поверхностью* уравнения (11).

**Пример 1.** Дано уравнение

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (12)$$

Составляем соответствующую систему обыкновенных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

и, интегрируя, находим:

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1},$$

так что

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \dots, \quad \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}.$$

Поэтому общим решением уравнения (12) будет

$$u = \Phi \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right),$$

где  $\Phi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от отношений  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}$ , т. е.  $u$  есть произвольная непрерывно дифференцируемая однородная функция нулевой степени от  $n$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Например, решениями уравнения (12) будут функции:

$$u_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad u_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \dots, \quad u_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}, \quad u_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \dots + \frac{x_n}{x_1},$$

$$u_{n+1} = \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2, \quad u_{n+2} = \sin \frac{x_2}{x_1}, \quad u_{n+3} = e^{\frac{x_2}{x_1}} \quad \text{и т. п.}$$

Мы получили, таким образом, обращение известной теоремы Эйлера об однородных функциях нулевой степени [149, 150].

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$(z-y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x-z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y-z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (14)$$

Функции

$$\psi_1 = x+y+z; \quad \psi_2 = x^2+y^2+z^2$$

(см. п. 117, пример 1) являются независимыми интегралами системы (14). Поэтому общим решением уравнения (13) будет

$$u = \Phi(\dot{x+y+z}, \quad x^2+y^2+z^2),$$

где  $\Phi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция двух независимых переменных. Например, решениями уравнения (13) будут функции:

$$u_1 = x+y+z, \quad u_2 = x^2+y^2+z^2, \quad u_3 = (x+y+z)^2 \text{ и т. п.}$$

**Пример 3.** Дано уравнение

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \quad \psi = x^2 + y^2.$$

Поэтому общее решение имеет вид

$$z = \Phi(\psi), \quad z = \Phi(x^2 + y^2) \quad (16)$$

и представляет собою, как известно, семейство поверхностей вращения с осью вращения  $Oz$ . Таким образом, уравнение (15) есть ни что иное, как дифференциальное уравнение всех поверхностей вращения с осью вращения  $Oz$ . Интегральными поверхностями уравнения (15) являются поверхности вращения (16). В частности, при  $\Phi(\psi) = \psi$  получаем параболоид вращения

$$z = x^2 + y^2,$$

при  $\Phi(\psi) = \sqrt{R^2 - \psi}$  будем иметь сферическую поверхность

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

при  $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$  получится конус

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

при  $\Phi(\psi) = c = \text{const}$  будем иметь плоскость

$$z = C.$$

**245. Решение Задачи Коши для однородного линейного уравнения.** Задача Коши для уравнения (4) ставится так. Среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (17)$$

которое удовлетворяет *начальным условиям*:

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}$$

или

$$u(x_1, \dots, x_n) |_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (18)$$

где  $\varphi$  — заданная (непрерывно дифференцируемая) функция от  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , т. е. при фиксированном значении одного из аргументов решение (17) обращается в заданную функцию остальных аргументов.

В случае, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных, т. е. когда мы имеем уравнение (11), задача Коши состоит в том, чтобы найти решение

$$z = f(x, y), \quad (19)$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$z = \varphi(y) \text{ при } x = x_0, \quad (20)$$

где  $\varphi(y)$  — заданная функция от  $y$ . Геометрически это означает, что среди всех интегральных поверхностей, определяемых уравнением (11), ищется интегральная поверхность (19), которая проходит через заданную кривую (20), лежащую в плоскости  $x = x_0$ , параллельной плоскости  $yOz$ .

Обращаем внимание читателя на отличие постановки задачи Коши для уравнения с частными производными от постановки задачи Коши для обыкновенного уравнения. В то время как для обыкновенного уравнения первого порядка задача Коши состояла в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку, для уравнения с частными производными (11) задача Коши состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую.

Мы уже знаем, что общее решение уравнения (4) дается формулой (10),

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

Сравнивая эту формулу с условием (18), мы видим, что решение задачи Коши сводится к определению вида функции  $\Phi$  так, чтобы

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) |_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (21)$$

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \bar{\psi}_2, \\ \vdots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \bar{\psi}_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

то равенство (21) переписется так:

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (23)$$

Система (22) разрешима относительно  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , по крайней мере, в некоторой окрестности точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ , если  $X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0$ , что мы и предполагаем. Разрешая систему (22) относительно  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}). \end{aligned} \right\}$$

Если теперь в качестве  $\Phi$  взять функцию

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \\ \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})],$$

то условие (23) будет выполнено. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) &= \varphi(\omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1})) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).\end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$u = (\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}))$$

дает искомое решение задачи Коши. Здесь функция  $\varphi$  есть та самая функция, которая участвует в начальных условиях (18).

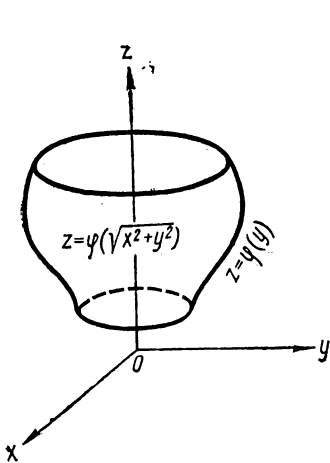
Таким образом, мы приходим к следующему правилу решения задачи Коши:



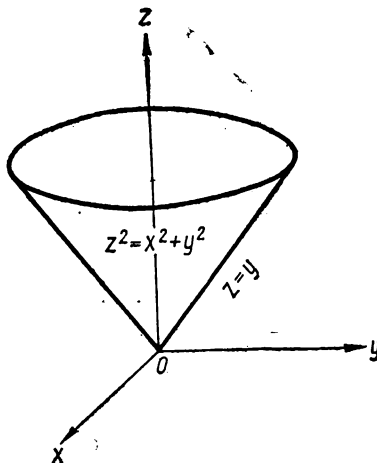


Имеем

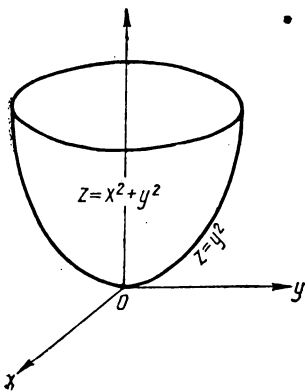
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \quad \psi = x^2 + y^2, \quad y^2 = \bar{\psi}, \quad y = \sqrt{\bar{\psi}}, \quad z = \varphi(\sqrt{\bar{\psi}}).$$



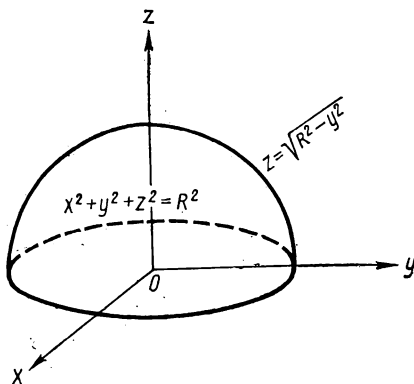
Р и с. 55



Р и с. 56



Р и с. 57



Р и с. 58

Поэтому искомым решением будет

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Мы получили поверхность вращения с осью вращения  $Oz$ , проходящую через кривую (26), или, что то же, поверхность, образованную вращением кривой (26), вокруг оси  $Oz$  (рис. 55).

В частности, если  $\varphi(y)=y$ , то  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  или  $z^2=x^2+y^2$  — конус, полученный вращением прямой  $z=y$  вокруг оси  $Oz$  (рис. 56).

При  $\varphi(y)=y^2$  имеем  $z=x^2+y^2$  — параболоид, полученный вращением параболы  $z=y^2$  вокруг оси  $Oz$  (рис. 57).

Если  $\varphi(y)=\sqrt{R^2-y^2}$ , то  $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$  или  $x^2+y^2+z^2=R^2$ ,  $z\geq 0$ , полусфера, проходящая через полуокружность  $z=\sqrt{R^2-y^2}$  (рис. 58).

## § 51. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

**246. Построение общего решения неоднородного линейного уравнения.** Уравнение вида

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (1)$$

будем называть *неоднородным линейным уравнением с частными производными первого порядка*. Это уравнение называют также *квазилинейным*. Отличие уравнения (1) от уравнения предыдущего параграфа заключается в том, что коэффициенты  $X_k$  могут зависеть от  $u$ , и, кроме того, имеется свободный член  $R$ . К этому же типу мы относим уравнение, у которого  $R \equiv 0$ , но хоть один из  $X_k$  непременно зависит от  $u$ .

Относительно функций  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $R$  будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$ , причем  $X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0$ .

Будем искать решение уравнения (1) в неявном виде

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad (2)$$

где функция  $V$  имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причем

$$\frac{\partial V(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})}{\partial u} \neq 0$$

по крайней мере в некоторой области изменения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, u$  с тем, чтобы в этой области была гарантирована разрешимость уравнения (2) относительно искомой функции  $u$ .

Считая, что в равенстве (2) функция  $u$  есть функция от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определяемая этим равенством, продифференцируем это равенство пол-



Приравнивая функцию (5) нулю, мы получим, согласно (2), решение данного уравнения (1) в следующем ( неявном ) виде:

$$\Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (6)$$

Будем называть это решение *общим решением* уравнения (1).

Таким образом, для нахождения общего решения уравнения (1) нужно составить соответствующую ему систему обыкновенных уравнений (4), найти  $n$  независимых интегралов этой системы и приравнять нулю произвольную дифференцируемую функцию этих интегралов. Полученное равенство (6) и представляет собою общее решение уравнения (1) в неявном виде. Разрешая его относительно  $u$  (если это возможно в элементарных функциях), найдем общее решение в явном виде.

**Пример 1.** Дано уравнение

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \quad (m \neq 0). \quad (7)$$

Составляем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}.$$

Находим ее интегралы:

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \dots, \quad \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}, \quad \psi_n = \frac{u}{x_1^m}.$$

Общим решением уравнения (7) будет

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}\right) = 0.$$

Разрешая относительно  $\frac{u}{x_1^m}$ , получим

$$\frac{u}{x_1^m} = f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

откуда

$$u = x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right);$$

где  $f$  — произвольная функция, так что решение данного уравнения является произвольная однородная непрерывно дифференцируемая функция степени  $m \neq 0$ . Объединяя этот

результат с результатом примера 1 п. 232, мы получаем обращение теоремы Эйлера об однородных функциях любой степени  $m$ .

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$(1 + \sqrt{z-x-y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2. \quad (8)$$

Составляем систему (7):

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Ее интегралами будут (см. п. 117, пример 2)

$$\psi_1 = z - 2y, \quad \psi_2 = 2\sqrt{z-x-y} + y.$$

Поэтому общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\Phi(z - 2y, 2\sqrt{z-x-y} + y) = 0, \quad (9)$$

где  $\Phi$  — произвольная (непрерывно дифференцируемая) функция.

Нетрудно проверить, что функция

$$z = x + y$$

тоже является решением уравнения (8). Однако это решение не содержится в формуле (9). Такое решение называется *специальным* [140, с. 347, 348]. Таким образом, *уравнения с частными производными, так же как и обыкновенные уравнения, могут иметь решения, не содержащиеся в общем решении.*

**247. Решение задачи Коши для неоднородного линейного уравнения.**  
Задача Коши для неоднородного уравнения (1) ставится так же, как и для однородного уравнения. Требуется среди всех решений уравнения (1) найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10)$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \quad (11)$$

где  $\varphi$  — заданная (непрерывно дифференцируемая) функция от  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ .

Покажем, как найти решение задачи Коши, зная общее решение

$$\Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (12)$$

Дело сводится, так же как и при решении задачи Коши для однородного уравнения, к определению вида функции  $\Phi$ . Переписывая начальные условия (11) в виде

$$u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}$$

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (13)$$
[illegible]
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ x_2 &= \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ u &= \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n). \end{aligned} \right\}$$
$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \\ - \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)),$$
$$\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = 0 \quad (15)$$

1) нужно составить соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и найти *n* независимых интегралов;



Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет интегралы

$$\psi_1 = z - 2y, \quad \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y.$$

Полагая в этих интегралах  $y = 0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} z &= \bar{\psi}_1, \\ 2\sqrt{z - x} &= \bar{\psi}_2. \end{aligned} \right\}$$

Разрешая эту систему относительно  $x$  и  $z$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{\psi}_1 - \frac{\bar{\psi}_2^2}{4}, \\ z &= \bar{\psi}_1. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому, согласно формуле (18), решением поставленной задачи Коши будет

$$\psi_1 - 2\left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0, \quad 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$$

или (заменяя  $\psi_1$  и  $\psi_2$  их выражениями)

$$2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0.$$

**Пример 2.** Возьмем то же уравнение (8)

$$1 + \sqrt{z - x - y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2,$$

и найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$z = x \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (19)$$

Пользуясь выкладками предыдущего примера, находим, что искомым решением будет

$$\psi_1 - \left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \psi_2 = 0,$$

т. е.

$$2\sqrt{z - x - y} + y = 0$$

или

$$z = \frac{y^2}{4} + x + y.$$

Решение  $z = x + y$  тоже удовлетворяет начальным условиям (19). Таким образом, поставленная задача Коши имеет не единственное решение.



## § 52. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**248. Система двух уравнений с частными производными. Условия совместности.** В двух предшествующих параграфах мы показали, что интегрирование линейного уравнения с частными производными первого порядка сводится к нахождению интегралов соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь **нелинейное уравнение**

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (1)$$

где  $z = z(x, y)$  — искомая функция от независимых переменных  $x$  и  $y$ ,  $p$  и  $q$  — ее частные производные соответственно по  $x$  и по  $y$ , а  $F$  — **нелинейная** функция от  $p$  и  $q$ , заданная в некоторой окрестности начальной точки  $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ .

Оказывается, что задача интегрирования **одного уравнения (1)** может быть значительно облегчена, если наряду с уравнением рассматривать **другое уравнение**

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \quad (2)$$

выбрав его подходящим образом. При этом естественно выбирать уравнение (2) так, чтобы уравнения (1) и (2) были совместны, т. е. чтобы они обладали хоть одним общим для них решением.

Предположим, что система

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

разрешима в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$  относительно  $p$  и  $q$ , так что

$$\left. \begin{aligned} p &= A(x, y, z), \\ q &= B(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем  $A(x, y, z)$  и  $B(x, y, z)$  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Найдем необходимые условия совместности системы (3). Предположим, что существует функция  $z = z(x, y)$ , удовлетворяющая уравнениям системы (3) и имеющая непрерывные частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Подставляя  $z = z(x, y)$  в систему (3), получим тождества. Дифференцируя их соответственно по  $y$  и по  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad (z = z(x, y)).$$

Это и есть необходимое условие совместности системы (3).

Для того чтобы система (3) не только была совместна, но и допускала хотя бы одно параметрическое семейство решений, необходимо, чтобы равенство

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad (4)$$

выполнялось тождественно относительно  $x, y, z$  в рассматриваемой области.

Можно доказать [140, с. 357—359], что это условие является не только необходимым, но и достаточным для существования такого семейства решений, вследствие чего его называют *условием полной интегрируемости системы (3)*.

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1 \equiv A, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y \equiv B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Покажем, что она вполне интегрируема. Проверая условие (4), имеем

$$4xy + 2x(-2y) = 0 + 0 \cdot (2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1).$$

Так как равенство выполняется тождественно относительно  $x, y, z$ , то система (5) вполне интегрируема. Найдем однопараметрическое семейство решений.

Для этого, считая в первом из уравнений (5) фиксированным и интегрируя это уравнение как линейное относительно  $z$  ( $z = z(x)$ ), найдем

$$z = e^{x^2} (c(y) + \int (2x^2 + 2xy^2 - 1) e^{-x^2} dx)$$

или

$$z = c(y) e^{x^2} - y^2 - x, \quad (6)$$

где  $c(y)$  — любая функция от  $y$ , которую мы будем считать непрерывно дифференцируемой и выберем так, чтобы функция (6) удовлетворяла и второму из уравнений (5).

Дифференцируя (6) по  $y$ , имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c'(y) e^{x^2} - 2y.$$

Поэтому для определения  $c(y)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c'(y) e^{x^2} - 2y = -2y$$

или

$$c'(y) = 0,$$

откуда

$$c(y) = C \equiv \text{const.}$$

Следовательно, искомым однопараметрическим семейством решений будет

$$z = C e^{x^2} - y^2 - x.$$

#### 249. Уравнение Пфаффа. Рассмотрим уравнение Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \quad (7)$$

Это уравнение симметрично относительно переменных  $x, y, z$ , так что любую из них можно считать искомой функцией. Если коэффициенты  $P, Q$  и  $R$  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начальной точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и не обращаются в этой точке одновременно в нуль, то в качестве искомой функции берут ту из переменных, коэффициент при дифференциале которой отличен от нуля в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть, например,

$$R(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \quad (8)$$

Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$dz = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy. \quad (9)$$

Найдем условие, при котором уравнение (9) допускает однопараметрическое семейство решений — однопараметрическое семейство интегральных поверхностей. Так как на любой интегральной поверхности  $z = z(x, y)$  должно выполняться *основное соотношение*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

то вдоль них имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy.$$

откуда вследствие независимости  $dx$  и  $dy$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{P}{R} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{Q}{R} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, уравнение Пфаффа (7) при условии (8) равносильно системе (10).

Потребуем, чтобы правые части системы (10) удовлетворяли условию полной интегрируемости этой системы, т. е. тождественному выполнению условия (4), которое в нашем случае примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{R^2} \frac{\partial R}{\partial y} + \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} \right) \left( -\frac{Q}{R} \right) = \\ & = -\frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} + \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} \right) \left( -\frac{P}{R} \right) \end{aligned}$$

или

$$P \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0. \quad (11)$$

Это условие называется *условием полной интегрируемости уравнения Пфаффа*. Его можно записать символически так:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \equiv 0.$$

При выполнении условия (11) или при выполнении (8) интегрирование уравнения Пфаффа сводится к интегрированию соответствующей ему системы (10), в результате чего получим однопараметрическое семейство решений уравнения Пфаффа.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$(2x^2 + 2xz + 2xy^2 + 1)dx - 2ydy - dz = 0. \quad (12)$$

Здесь  $R \equiv -1 \neq 0$ , так что условие (8) выполнено и нам остается проверить условие полной интегрируемости (11). Имеем

$$(2x^2 + 2xz - 2xy^2 - 1)(0 - 0) + (-2y)(2x - 0) + (-1)(0 - 4xy) \equiv 0,$$

так что уравнение (12) вполне интегрируемо.

Найдем однопараметрическое семейство решений уравнения (12). Принимая  $z$  за искомую функцию, заменим уравнение (12) соответствующей системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y. \end{aligned} \right\}$$

Эта система имеет, как показано в примере п. 248, семейство решений

$$z = Ce^{x^2} - y^2 - x,$$

которое и будет искомым однопараметрическим семейством решений рассматриваемого уравнения Пфаффа.

**250. Полный интеграл нелинейного уравнения. Метод Лагранжа — Шарпи.** Рассмотрим нелинейное уравнение общего вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (13)$$

Поставим задачу: найти двупараметрическое семейство решений, заданное в виде

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \quad (14)$$

или в виде, разрешенном относительно  $z$ ,

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad (15)$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные. Соотношение (14) или (15) называется *полным интегралом* уравнения (13).

Исключая параметры  $a$  и  $b$  из системы

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} P = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0$$

или из системы

$$z = \varphi(x, y, a, b),$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

мы получим уравнение, равносильное уравнению (13).

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение •

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2 \quad (R=\text{const}). \quad (16)$$

Покажем, что

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2 \quad (17)$$

есть полный интеграл уравнения (16). Исключая из (17) параметры  $a$  и  $b$ , при помощи системы

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2+z^2 &= R^2, \\ 2(x-a)+2zp &= 0, \\ 2(y-b)+2zq &= 0 \end{aligned}$$

придем к уравнению (16). Следовательно, (17) есть полный интеграл уравнения (16).

**Пример 2.** Для уравнения

$$z = px + qy + pq \quad (18)$$

полным интегралом будет

$$z = ax + by + ab. \quad (19)$$

Рассмотрим *метод Лагранжа — Шарпи* нахождения полного интеграла уравнения (13). Построим по заданной функции  $F$  такую функцию  $\Phi$ , чтобы система уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q) &= a \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

была разрешима относительно  $p$  и  $q$  и чтобы полученная система

$$\left. \begin{aligned} p &= A(x, y, z, a), \\ q &= B(x, y, z, a) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

была вполне интегрируема. Так как в результате интегрирования последней системы появится своя произвольная постоянная, то мы получим двупараметрическое семейство решений уравнения (13), которое и будет полным интегралом уравнения.

Предположим, что  $F$  и  $\Phi$  непрерывно дифференцируемы в окрестности начальной точки  $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ , причем эта точка удовлетворяет уравнениям (18) и в ней

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \neq 0.$$

Тогда система (20) разрешима относительно  $p$  и  $q$  в окрестности этой точки, т. е. определяет функции (21), где

$$A(x_0, y_0, z_0, a) = p_0, \quad B(x_0, y_0, z_0, a) = q_0.$$

Запишем для системы (19) условие полной интегрируемости, которое примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p, \quad (22)$$

где

$$p = A(x, y, z, a), \quad q = B(x, y, z, a).$$

Найдем входящие в (22) частные производные от  $p$  и  $q$  при помощи неявного дифференцирования системы (20).

Дифференцируя (20) по  $z$ , считая  $p$  и  $q$  функциями от  $x, y, z$ , определяемыми этой системой, имеем:

$$F_z' + F_p' \frac{\partial p}{\partial z} + F_q' \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$\Phi_z' + \Phi_p' \frac{\partial p}{\partial z} + \Phi_q' \frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\begin{vmatrix} F_z' & F_q' \\ \Phi_z' & \Phi_q' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p' & F_q' \\ \Phi_p' & \Phi_q' \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{\begin{vmatrix} F_p' & F_z' \\ \Phi_p' & \Phi_z' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p' & F_q' \\ \Phi_p' & \Phi_q' \end{vmatrix}}.$$

Аналогично, дифференцируя (20) сначала по  $x$ , потом по  $y$ , получим две системы уравнений, из которых найдем, что

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} F_p' & F_x' \\ \Phi_p' & \Phi_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p' & F_q' \\ \Phi_p' & \Phi_q' \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} F_y' & F_q' \\ \Phi_y' & \Phi_q' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p' & F_q' \\ \Phi_p' & \Phi_q' \end{vmatrix}}.$$

Подставляя найденные значения  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial p}{\partial y}$  в условие (22) и освобождаясь от знаменателя, получаем условие

$$\begin{vmatrix} F_p' & F_x' + F_z' p \\ \Phi_p' & \Phi_x' + \Phi_z' p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q' & F_y' + F_z' q \\ \Phi_q' & \Phi_y' + \Phi_z' q \end{vmatrix} = 0,$$

которое должно выполняться тождественно по отношению к  $x, y, z$ . Из этого условия следует, что функция  $\Phi$  должна удовлетворять о д н о

родному линейному уравнению с частными производными первого порядка

$$F_p' \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_q' \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (F_p' p + F_q' q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ - (F_x' + F_z' p) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (F_y' + F_z' q) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Введя для краткости обозначения

$$F_x' \equiv X, \quad F_y' \equiv Y, \quad F_z' \equiv Z, \quad F_p' \equiv P, \quad F_q' \equiv Q,$$

перепишем предыдущее уравнение в виде

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ - (X + Zp) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + Zq) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \quad (23)$$

Составляя систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующую уравнению (23), имеем

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + Zp)} = \frac{dq}{-(Y + Zq)}. \quad (24)$$

Нам достаточно найти только один первый интеграл этой системы вида  $\Phi = a$ , где  $a$  — произвольная постоянная, причем функция  $\Phi$  должна удовлетворять поставленным выше условиям.

На практике нужно сразу составлять систему (24), ибо функции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $P$ ,  $Q$  нам известны. Далее, найдя первый интеграл этой системы, следует построить систему (20), перейти к системе (21) и проинтегрировать последнюю, в результате чего и получим полный интеграл уравнения (13).

**Пример 3.** Рассмотрим снова уравнение (18)

$$z = px + qy + pq.$$

Здесь  $X = -p$ ,  $Y = -q$ ,  $Z = 1$ ,  $P = -x - q$ ,  $Q = -y - p$ . Поэтому, составляя систему (24), находим

$$\frac{dx}{-x-q} = \frac{dy}{-y-p} = \frac{dz}{-px-qy-2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Нам нужно найти только один первый интеграл. Этим интегралом, например, будет



$$p = a,$$

причем система (20) примет вид

$$z = xp + yq + pq,$$

$$p = a.$$

Она, очевидно, разрешима относительно  $p$  и  $q$ :

$$p = a,$$

$$q = \frac{z - ax}{y + a}. \quad (25)$$

Эта система вполне интегрируема, ибо

$$0 + 0 \cdot \frac{z - ax}{y + a} = -\frac{a}{y + a} + \frac{1}{y + a} \cdot a.$$

Интегрируя (25), имеем

$$z = ax + C(y), \quad C'(y) = \frac{z - ax}{y + a}, \quad C'(y) = \frac{C(y)}{y + a},$$

$$C(y) = (y + a)b, \quad z = ax + by + ab,$$

т. е. получили полный интеграл (19).

На этом мы заканчиваем изложение начальных сведений из теории уравнений с частными производными первого порядка, которые непосредственно примыкают к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.\*

Обстоятельное и строгое изложение теории уравнений с частными производными первого порядка читатель найдет в книгах [119, 120, 138, 140] и в известном справочнике [70].

---

\* Более полное изложение начальных сведений из теории уравнений с частными производными первого порядка см. в книгах [37, 162].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Е. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1939.
2. Андреев А. Ф. Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.—«Вестн. Ленингр. гос. ун-та». Сер. «Математика», 1955, № 8.
3. Андреев А. Ф. Метод Фроммера и одно его приложение.— «Вестн. Ленингр. гос. ун-та». Сер. «Математика», 1960, № 19.
4. Андреев А. Ф. О методе Фроммера исследования особой точки дифференциального уравнения первого порядка.—«Вестн. Ленингр. гос. ун-та». Сер. «Математика», 1962, № 1.
5. Андреев А. Ф. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае.— «Прикл. мат. и мех.», 1953, т. 17, вып. 3.
6. Андреев А. Ф. Теорема единственности для нормальной области Фроммера второго типа.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 6.
7. Андреев А. Ф., Богданов Ю. С. О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.— «Усп. мат. наук», 1958, т. 13, вып. 3.
8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., «Наука», 1965.
9. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1971.
10. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., «Наука», 1965.
11. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1971.
12. Барбашин Е. А. О построении функций Ляпунова.— «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 12.
13. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.
14. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., «Наука», 1969.
15. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., изд-во иностр. лит., 1954.
16. Беляева Т. Б., Залгаллер В. А. Об изложении теории огибающих. (Метод. заметка).— «Усп. мат. наук», 1963, т. 18, вып. 5.
17. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.

18. Беркович Л. М., Розов Н. Х., Эйшинский А. М. О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях второго порядка и о некоторых уравнениях второго порядка, интегрируемых в конечном виде. «Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz.», 1968, № 230—241.

19. Богданов Ю. С. О простейшем неполном дифференциальном уравнении.— «Докл. АН БССР», 1961, т. 5, № 10.

20. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н. О матрицах коммутирующих со своей производной.— «Изв. высш. учебн. заведений. Математика». 1959, № 4.

21. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.

22. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. С., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1969.

23. Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. М., «Наука», 1971.

24. Былов Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., «Наука», 1966.

25. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.

26. Валеев К. Г. Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами.— «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1969, т. 3, № 6.

27. Валеев К. Г. О линейных дифференциальных уравнениях с регулярной особой точкой.— «Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин», 1967, № 279.

28. Валеев К. Г. О построении решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки.— «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1963, № 3.

29. Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. М., Гостехиздат, 1933.

30. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. В сб. «Пятая летняя мат. школа июнь — июль 1967». Киев, «Наукова думка», 1968.

31. Гаврилов Н. И. Методы теории дифференциальных уравнений. М., «Высш. школа», 1971.

32. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.

33. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.

34. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

35. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Мир», 1971.

36. Гребенча М. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Учпедгиз, 1937.

37. Гудыменко Ф. С. Дифференциальные уравнения. Изд-во Киев. Гос. ун-та. 1958.

38. Гудыменко Ф. С., Павлюк И. А., Волкова В. О. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Киев, «Вища школа», 1972.
39. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1936.
40. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
41. Гюнтер Н. М. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Курс лекций (литографир.). Изд. Петрогр. ун-та, 1914/15 учебный год.
42. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. Изд. Ленингр. гос. ун-та, 1941.
43. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
44. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
45. Демидович Б. П. Ограниченные решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений.— «Тр. третьего всесоюзн. мат. съезда». Т. 1. М., Физматгиз, 1956.
46. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1962.
47. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования. М., «Мир», 1972.
48. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М., «Вышш. школа», 1951.
49. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Вышш. школа», 1966.
50. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— «Усп. мат. наук», 1952, т. 7, вып. 6.
51. Дубошин Н. Г. Основы теории устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1952.
52. Еругин Н. П. Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде.— «Прикл. мат. и мех.», 1950, т. 9, вып. 3.
53. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, «Наука и техника», 1972.
54. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, изд-во АН БССР, 1963.
55. Еругин Н. П. Обзор работ советских математиков по теории устойчивости движения.— В кн.: Александр Михайлович Ляпунов. М.—Л., «Наука», 1953.
56. Еругин Н. П. Ограниченные решения.— В кн.: История отечественной математики. Т. 4, кн. 1. Киев, «Наукова думка», 1970.
57. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом.— «Прикл. мат. и мех.», 1950, т. 14, вып. 5.

58. *Еругин Н. П.* О продолжении решений дифференциальных уравнений.— «Прикл. мат. и мех.», 1951, т. 15, вып. 1.
59. *Еругин Н. П.* Первый метод Ляпунова.— В кн.: *Механика в СССР за 50 лет.* М., «Наука», 1968.
60. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую.— «Прикл. мат. и мех.», 1952, т. 16, вып. 6.
61. *Еругин Н. П.* Приводимые системы.— «Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова». Т. 13. Л., 1946.
62. *Еругин Н. П.* Работы Казанской школы.— В кн.: *История отечественной математики.* Т. 4, кн. 1. Киев, «Наукова думка», 1970.
63. *Еругин Н. П.* Теоремы о неустойчивости.— «Прикл. мат. и мех.», 1952, т. 16, вып. 3.
64. *Еругин Н. П.* Теория устойчивости движения.— В кн.: *История отечественной математики.* Т. 4, кн. 1. Киев, «Наукова думка», 1970.
65. *Жаутыков О. А.* Счетные системы дифференциальных уравнений и их применения.— «Дифференц. уравнения», 1965, т. 1, № 2.
66. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л., «Судостроение», 1962.
67. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1957.
68. *Иосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений.— В сб. пер.: *Математика.* Т. 9, вып. 5. М., «Мир», 1955.
69. *Калинин С. В.* Устойчивость периодических движений в критических случаях. Изд-во Моск. гос. ун-та, 1972.
70. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., «Наука», 1966.
71. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.
72. *Касьянков П. П.* О некоторых задачах теории фокусировки электронных лучей.— «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 5.
73. *Киселев А. И., Краснов М. А., Макаренко Т. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Высш. школа», 1965.
74. *Ковалев Б. А.* Об одном достаточном условии существования центра.— «Науч. зап. Одесск. политехн. ин-та». Т. 46, 1962.
75. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
76. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
77. *Кондратеня С. Г., Яблонский А. И.* О подвижных особенностях системы двух дифференциальных уравнений.— «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 6.

78. Кондратеня С. Г., Яблонский А. И. Об особых точках решений системы дифференциальных уравнений второго порядка.— «Дифференц. уравнения», 1970, т. 5, № 11.
79. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Выш. школа», 1970.
80. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
81. Красовский Н. Н. Об одной задаче устойчивости движения в целом.— «Докл. АН СССР», 1953, т. 88.
82. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
83. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М., Гостехиздат, 1950.
84. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. М., Гостехиздат, 1935.
85. Куклес И. С. О методе Фроммера исследования особой точки.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, № 3.
86. Куклес И. С. О необходимых и достаточных условиях наличия центра.— «Докл. АН СССР», 1944, т. 12, № 4.
87. Куклес И. С. О некоторых случаях отличия фокуса от центра.— «Докл. АН СССР», 1944, т. 12, № 5.
88. Куклес И. С., Хасанова М. Поведение характеристик одного дифференциального уравнения.— «Уч. зап. Тадж. ун-та», 1970, т. 1, № 1.
89. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1970.
90. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1957.
91. Ла-Салль Ж., Лефшетц С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.
92. Латышева К. Я., Терещенко Н. И. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. (Метод Фробениуса — Латышевой). Киев, изд-во ин-та мат. АН УССР, 1970.
93. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.
94. Лефшетц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., изд-во иностр. лит., 1961.
95. Лукашевич Н. А. Интегральные кривые одного уравнения.— «Дифференц. уравнения», 1965, т. 1, № 1.
96. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М., Гостехиздат, 1951.
97. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
98. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Выш. школа», 1966.
99. Манжаловский В. П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1959.

100. *Массера Х. Л.* К теории устойчивости.— В сб. пер. Математика. Т. 1, вып. 4. М., «Мир», 1957.
101. *Массера Х. Л.* Линейные дифференциальные и функциональные пространства. М., «Мир», 1970.
102. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения. Минск, «Вышэйш. школа», 1968.
103. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, «Вышэйш. школа», 1970.
104. Математический практикум. Под ред. Г. Н. Положего. М., Физматгиз, 1960.
105. *Матросов В. М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями.— «Дифференц. уравнения», 1967, т. 3, № 3, 5.
106. *Матросов В. М.* Развитие метода функции Ляпунова.— «Тр. Казан. авиац. ин-та», 1968, вып. 97.
107. *Микусинский Я.* Операционное исчисление. М., «Наука», 1956.
108. *Михлин С. Г., Смолицкий К. Л.* Приближенные методы решений дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
109. *Младов А. Г.* Системы дифференциальных уравнений и устойчивость по А. М. Ляпунову. М., «Высш. школа», 1966.
110. *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.
111. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
112. *Немыцкий В. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет (1917—1957). Т. I. М., Физматгиз, 1959.
113. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1949.
114. *Новиков О. Я., Егоров В. М.* Качественное исследование системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей.— «Сб. тр. по физ.-мат. наукам», изд-во Куйбышев. пед. ин-та, 1969.
115. *Павлюк И. А.* Асимптотические методы интегрирования неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Изд-во Киев. ун-та, 1970.
116. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М., «Наука», 1971.
117. *Перов А. И.* Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ .— «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, № 3.
118. *Персидский К. П.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений.— «Докл. АН КазССР», 1950, т. 97, вып. 4.
119. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1970.
120. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1967.
121. *Пизо Ш., Заманский М.* Курс математики. Алгебра и анализ. М., «Наука», 1971.

122. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1970.
123. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.—Л., Физматгиз, 1964.
124. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.
125. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений. Минск, «Вышэйш. школа», 1973.
126. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1970.
127. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
128. Рейзинь Л. Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, «Зинатне», 1971.
129. Розо М. Нелинейные колебания в теории устойчивости. М., «Наука», 1971.
130. Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М., «Наука», 1968.
131. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.; Изд-во иностр. лит., т. 1, 1953; т. 2, 1954.
132. Сахарников Н. А. Об условиях Фроммера существования центра.— «Прикл. мат. и мех.», 1948, вып. 5.
133. Сахарников Н. А. Об условиях существования центра и фокуса.— «Прикл. мат. и мех.», 1950, вып. 5.
134. Сахарников Н. А. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае.— «Прикл. мат. и мех.», 1950, вып. 6.
135. Сибирский К. С. Инварианты линейных представлений группы вращения плоскости и проблема центра.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3.
136. Сливинский В. Е. Об одном применении обобщенной теории функций комплексного переменного.— «Докл. АН СССР», 1950, т. 74, № 5.
137. Смирнов В. И. Обзор научного творчества А. М. Ляпунова.— В кн.: Александр Михайлович Ляпунов. М.—Л., «Наука», 1953.
138. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.—Л., «Наука», т. I, 1969; т. II, 1967; т. III, 1969; т. IV, 1957.
139. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1927.
140. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
141. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра.— «Мат. сб.», 1948, т. 22, вып. 2; 1952, т. 31, вып. 3.
142. Толстов Г. П. Курс математического анализа. М., Физматгиз, т. 1, 2, 1957.
143. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1957.



144. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
145. Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, «Вышэйш. школа», 1968.
146. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1966.
147. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1970.
148. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. Киев, «Наукова думка», 1972.
149. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. I. М., Гостехиздат, 1956; т. II. М., «Наука», 1968.
150. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. М., «Наука», 1969.
151. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
152. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.
153. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
154. Шахно К. У. Элементы теории функций комплексных переменных и операционного исчисления. Л., Изд-во Северо-запад. политехн. ин-та, 1961.
155. Шварц Л. Анализ. Т. 2. М., «Мир», 1972.
156. Шестаков А. А., Пхакадзе А. В. О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.— «Мат. сб.», 1959, т. 49, вып. 1; 1961, т. 53, вып. 4.
157. Шостак Р. Е. Операционное исчисление. М., «Выш. школа», 1973.
158. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев, изд-во АН УССР, 1960.
159. Штокало И. З. Операционное исчисление. Киев, «Наукова думка», 1972.
160. Штокало И. З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Киев, «Наукова думка», 1961.
161. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.
162. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.
163. Яковлева Г. Д. Таблица функций Эйри и их производных. М., «Наука», 1969.
164. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с линейными коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
165. Bendixson I. Sur les courbes definies par les equations differentielles. I. de Math., t. 7 (1881), t. 8 (1882).
166. Braner F., Nohel I. A. Problems and solutions in ordinary differential equations. New York, 1968.

167. *Collatz L.* Differentialgleichungen. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Stuttgart, 1969.
168. *Cole R. H.* Theory of ordinary differential equations. New York, 1968.
169. *Frommer M.* Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. Math. Ann., Bd. 99 (1928).
170. *Gask H.* Ordinary differential equations. Cambridge, 1968.
171. *Gregorliri.* Dynamicke systémy s regulární pravou stranou. I. Pokroky mat., fis. a astron., 1958, 3, № 2.
172. *Gurel O., Lapidus L.* A guide to the generation of Liapunov functions. Ind. and Eng. Chem. 1969, 61, № 3.
173. *Hahn W.* Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Berlin. 1959.
174. *Halanay A.* Differential equations stability of oscillation time large. Academic Press, London, 1966.
175. *Hale I. K.* Ordinary differential equations. New York, 1969.
176. *Hegemier G. A.* On linear ordinary differential equations with exponential coefficients. Quart. Appl. Math. 1968, 26, № 3.
177. *Lapwood E. R.* Ordinary differential equations. Oxford. Pergamon Press, 1968.
178. *Lavrentjev M. A.* Sur une equation différentielle du premier ordre. Math. Zeitschrift. Bd. 23, 1925.
179. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zeitschrift. Bd. 32, 1930.
180. *Peyovith T.* Sur les semi-invariants des équations différentielles linéaires. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 53, 1925, Paris.
181. *Platt O.* Separation of variables. Amer. Math. Monthly. 1968, 75, № 8.
182. *Quinet I.* Cours élémentaire de mathématiques supérieures. Les équations différentielles et leurs applications. Paris, Dunod, 1968.
183. *Sánchez D. A.* Ordinary differential equations and stability theory. An introduction. San Francisco, 1968.
184. *Timothy L. K., Bona B. E.* State space analysis: an introduction. New York, 1968.
185. *Tricomi F. G.* Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1968.
186. United States-Japan seminar on differential and functional equations, New York, 1967.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В настоящем указателе цифры обозначают страницы.  
Применено сокращение: д. у.— дифференциальное уравнение

Амплитуда колебания 491

Асимптотическая формула для функций  
Бесселя 592

Вековой член 497

Гамма-функция 558

Геометрическое истолкование д. у. первого порядка 26

— — нормальной системы д. у. 213

Гипергеометрический ряд 574

Гипергеометрическое д. у. 572

Голоморфная функция 371

Голоморфное решение задачи Коши 370  
существование и единственность см.

Теорема Коши

Голоморфность решения задачи Коши  
относительно параметров 398

Граничная (краевая) задача 181

Движение:

асимптотически устойчивое 313, 641, 649  
возмущенное 312  
невозмущенное 312

неустойчивое 313, 646, 649

определяемое нормальной системой  
д. у. 214

— уравнением второго порядка 176

условно-устойчивое 313

устойчивое 312, 645, 649

Дискриминантная кривая 50, 148

Дифференцируемость решения нормальной системы д. у.:  
по начальным данным 317  
по параметрам 331

Единственность решения задачи Коши 32,  
138, 178

Задача Коши:

для канонической системы д. у. 245

для линейного неоднородного уравнения с частными производными первого порядка 736

— — однородного уравнения с частными производными первого порядка 729

для нормальной системы д. у. 216

- для уравнения  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной 177
- — первого порядка, не разрешенного относительно производной 138
  - — — — разрешенного относительно производной 31
  - — — — — — — особые случаи 33
- Задача о траекториях на плоскости 167
- Изогональные траектории** 167
- Инвариант однородного линейного уравнения второго порядка** 522
- Интеграл:**
- нормальной системы д. у. 223, 224
  - системы д. у. в симметрической форме 251
  - уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной 53, 58
- Интегральная кривая** 26, 138, 178, 213
- матрица 689
  - — нормированная 690
  - поверхность 727
- Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка:**
- при помощи обобщенных степенных рядов 545
  - — степенных рядов 536
  - матричного д. у. 697
- Интегрируемые комбинации** 227
- Интегрирующий множитель** 124, 131, 208
- Канонический вид линейной однородной системы с постоянными коэффициентами** 704
- — матрицы с постоянными элементами 663
- Квадратура** 20
- Колебание:**
- вынужденное 490, 495
  - гармоническое 481
  - затухающее 494
  - свободное 490
- Колеблующееся в интервале решение** 582
- Комплексная функция:**
- вещественной переменной 429
  - — производная 429
  - комплексной переменной 242
- Комплексное решение:**
- линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка 431
  - линейной однородной системы д. у. 606
- Константа Липшица** 261
- Краевая (граничная) задача** 181
- Линейная неоднородная система** 621
- — — с постоянными коэффициентами 625
  - — — однородная система 603
  - — — с постоянными коэффициентами 625
  - система, метод исключения 653
  - — — Даламбера 655
- Линейно зависимые системы функций** 609, 611
- — функции 433, 437
- Линейно независимые решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка** 438
- — — линейной однородной системы 611
  - — системы функций 609, 611
  - — функции 433, 434

Линейное неоднородное уравнение:

второго порядка с постоянными коэффициентами 485

$n$ -го порядка 424, 453

— — с постоянными коэффициентами 421

с частными производными первого порядка 722

— однородное уравнение:

второго порядка с постоянными коэффициентами 472

$n$ -го порядка 425, 429

— — с постоянными коэффициентами 463

Эйлера 515

с частными производными первого порядка 723

— уравнение первого порядка 90

Линейные системы, содержащие производные порядка выше первого 660

Линейный дифференциальный оператор 425

Ломаные Эйлера 405

**Мажоранта** 371

Мажорантная система д. у. 379

Мажорантный ряд 372

Матричное д. у. 688

Матричный метод интегрирования линейных однородных систем 714

— — — — — с постоянными коэффициентами 697

Матрица:

алгебраические операции над матрицами 666

диагональная 663

дифференцирование 681

единичная 664

интегрирование 683

канонический вид с постоянными элементами 663

квазидиагональная 664

логарифмическая функция от матрицы 687

матричный степенной ряд 683

неособенная 666

нулевая 663

обратная 670

определитель матрицы 666

особенная 666

преобразование подобия 677

приведение матрицы с постоянными элементами к каноническому виду 679

след матрицы 663

типа Ляпунова 712

транспонированная 683

характеристическая 673

характеристические числа матрицы 672

характеристический полином 673

характеристическое уравнение матрицы 673

экспоненциальная функция от матрицы 686

элементарные делители матрицы 673

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 92, 455, 622, 653

— Даламбера 655, 660

— интегрирующего множителя 131

— исключения 653, 660

— Коши интегрирования неоднородного линейного уравнения  $n$ -го порядка 459

— мажорант (метод Коши) 371

— неопределенных коэффициентов 481

- последовательных приближений Пикара 266
- Эйлера интегрирования линейного уравнения первого порядка 95
- — — линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами 464
- — — линейной однородной системы с постоянными коэффициентами 625

**Начальное значение интегральной матрицы** 689

**Начальные данные решения (движения):**  
определяемого нормальной системой д. у. 216, 217

- уравнением второго порядка 178
- канонической системы д. у. 245
- уравнения  $n$ -го порядка 177
- первого порядка 32
- с частными производными первого порядка 729

**Независимые интегралы (первые интегралы) нормальной системы д. у.** 224  
существование  $n$  независимых интегралов нормальной системы  $n$  уравнений 227, 337

**Неколеблющееся (в интервале) решение** 582

**Неоднородная линейная система см. Линейная неоднородная система**

**Неоднородное линейное уравнение  $n$ -го порядка см. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка**

**Неособенное линейное преобразование** 348

**Неполные уравнения:**  
 $n$ -го порядка 189, 197, 200

первого порядка 63, 150

**Непрерывная зависимость решения задачи Коши:**

- от начальных данных 305
- от параметров 296

**Неустойчивость решения (движения)** 313, 646, 649

**Нормальная система д. у.** 210

**Нормальные системы двух уравнений, имеющие заданную траекторию** 246

**Нормированная интегральная матрица** 690

— фундаментальная система решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка 443

— — — линейной однородной системы д. у. 614

**Нулевые начальные условия** 192, 290, 295.

**Нули решения линейного однородного уравнения второго порядка** 583

**Обобщенное однородное уравнение:**

- $n$ -го порядка 204
- первого порядка 157

**Обобщенный степенной ряд** 546

**Общее решение** 39

в параметрической форме 42, 141, 186, 255

в форме Коши 41, 185, 221

линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка 453

— — — с частными производными первого порядка 733

— однородного уравнения  $n$ -го порядка 443

— — — с частными производными первого порядка 725

- линейной неоднородной системы 621
  - однородной системы 615
- нормальной системы 219
  - — существование 332
- уравнения  $n$ -го порядка 184
  - первого порядка 39, 140
- Общий вид интеграла нормальной системы 223
  - интеграл нормальной системы 224
  - — системы д. у. в симметрической форме 252
  - — уравнения  $n$ -го порядка 185
  - — — первого порядка 42, 139
- Огибающая семейства интегральных кривых уравнения первого порядка как особое решение 49, 149
- Однородная функция 75
  - линейная система см. Линейная однородная система
  - — — с постоянными коэффициентами см. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами
- Однородное линейное уравнение  $n$ -го порядка см. Линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка
  - — — — с постоянными коэффициентами см. Линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами
  - уравнение первого порядка 75
- Операторный метод интегрирования линейных уравнений 509
- Определитель Вандермонда 465
  - Вронского для  $n$  функций 437
  - для  $n$  систем функций 611
  - Якоби 225
- Определяющее уравнение в заданной регулярной особой точке 548
- Ортогональные траектории 167
- Особая линия 341
  - точка 342, 537
  - матричного уравнения 690
  - нормальной системы д. у. 342
  - системы д. у. в симметрической форме 345
  - уравнения первого порядка 339
    - с дробно-линейной правой частью 346
- Особое решение:
  - нормальной системы д. у. 222
  - уравнения  $n$ -го порядка 186
    - первого порядка 44
    - — — нахождение особого решения по виду уравнения 46
    - — — — — общему решению (общему интегралу) 49
- Параметрическая форма общего решения 42, 141, 186, 255
- Параметрическое представление д. у. 158
- Первые интегралы:
  - линейной однородной системы 616
  - нормальной системы д. у. 224
  - системы д. у. в симметрической форме 255
  - уравнения  $n$ -го порядка 187
- Поведение интегральных кривых уравнения с дробно-линейной правой частью в окрестности особой точки 346
  - траекторий линейной однородной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами в окрестности точки равновесия 347

## Поле направлений:

определяемое нормальной системой  
д. у. 213

— уравнением первого порядка 27, 138

## Полином Лежандра 578

— Чебышева 520, 581

## Понижение порядка:

линейного однородного уравнения при  
помощи известных частных решений  
450, 531

нормальной системы д. у. при помощи  
известных первых интегралов 235

уравнений специального вида см. Урав-  
нения, допускающие понижение по-  
рядка

уравнения при помощи известных пер-  
вых интегралов 187

## Порядок нормальной системы д. у. 210

— дифференциального уравнения 15

## Постоянная Эйлера 565

Построение линейного однородного урав-  
нения по заданной фундаментальной  
системе решений 447

— линейной однородной системы по за-  
данной фундаментальной системе реше-  
ний 620

## Преобразование подобия 677

Приведение канонической системы к нор-  
мальной системе и к одному уравнению  
245

— линейного однородного уравнения  
второго порядка к специальным фор-  
мам 521

— линейного однородного уравнения  
к уравнению с постоянными коэффици-  
ентами 513

— линейной однородной системы к систе-  
ме с постоянными коэффициентами 651

— — — с постоянными коэффициен-  
тами к каноническому виду 702

— матрицы с постоянными элементами  
к каноническому виду 679

— нормальной системы  $n$  уравнений  
к одному уравнению  $n$ -го порядка 239

— уравнения  $n$ -го порядка к нормальной  
системе  $n$  уравнений 237

## Приводимые системы 712

Присоединенная система д. у. 617

Присоединенное матричное д. у. 695

Проблема центра и фокуса 366

Продолжение решения 283

Произведение матриц 667

Промежуточный интеграл 187

## Разделение переменных 71

Регулярная особая точка однородного  
линейного уравнения второго порядка  
547

## Резонанс 497

Решение нормальной системы 211

общее 219

особое 222

частное 221

— уравнения  $n$ -го порядка 174

общее 184

особое 186

частное 186

— уравнения первого порядка 24, 137

общее 39, 42, 140

особое 44, 141

частное 43, 141



Самосопряженная линейная система д. у.  
619

Самосопряженное линейное д. у. второго  
порядка 527

Связь между линейным однородным д. у.  
второго порядка и уравнением Риккати  
535

— системы обыкновенных д. у. в симмет-  
рической форме с линейным однород-  
ным д. у. с частными производными  
первого порядка 723

Седло 351, 359

Система д. у.:

автономная 211, 215

в симметрической форме 249

каноническая 245

линейная 603

— неоднородная 621

— однородная 604

— — с периодическими коэффициен-  
тами 710

— с постоянными коэффициентами 625

самосопряженная 619, 696

— уравнений, удовлетворяющая услови-  
ям Коши — Римана 242

Сопряженная (присоединенная) линейная  
система д. у. 617

Сопряженное (присоединенное) матрич-  
ное д. у. 695

Состояние покоя 214, 343

Стационарная система д. у. 211

Теорема Арцеля 399

— Еругина о необходимом и достаточ-  
ном условии приводимости системы 713

— Коши для линейного уравнения  $n$ -го  
порядка 396

— — — линейной системы д. у. 385

— — — нормальной системы д. у. 370

— — — уравнения  $n$ -го порядка 394

— Пеано 35, 402

— Пикара для линейного уравнения  $n$ -го  
порядка 294

— — — линейной системы д. у. 286

— — — нормальной системы д. у. 260

— — — уравнения  $n$ -го порядка 292

— сравнения 587

— Штурма 586

— равновесия (покоя) 343

Траектория движения 214

Узел 351, 358

вырожденный 356, 361

дикритический 357, 362

неустойчивый 358, 361, 362

устойчивый 358, 361, 362

Укороченная система 367

Уравнение Бернулли 100

— Бесселя 522, 556, 570, 590

— в полных дифференциалах 118

— в точных производных 207

— Гаусса 572, 576

— Дарбу 102

— Лагранжа 161

- Лежандра 528, 577
- Клеро 164
- $n$ -го порядка обыкновенное 174
- первого порядка обыкновенное 23
- — — с частными производными 13, 723
- приводящееся к однородному 81
- Риккати общего вида 108, 110
- — специальное 117
- с разделяющимися переменными 70
- Чебышева 519, 528, 543, 577, 580
- Эйлера (линейное) 585
- Якоби 103
- Уравнения, допускающие понижение порядка 159
- Усиливающая функция, усиливающий ряд 372
- Условие Липшица 261
- Условия Коши — Римана 243
- Устойчивость решения (движения) 309, 645, 649
  - асимптотическая 313, 641, 649
  - условная 313
- в целом 317, 642
  
- Фаза, начальная фаза 211, 215
- Фазовая плоскость 214
- Фазовое пространство 214
- Фокус 353, 360
- Формула Коши 461, 719
- Остроградского — Лиувилля 440
- Остроградского — Лиувилля — Якоби 512
- Фундаментальная система решений:
  - линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка 441
  - — — — с постоянными коэффициентами 441
  - линейной однородной системы  $n$  уравнений 613
  - — — — с постоянными коэффициентами 628
  - — — — с периодическими коэффициентами 710
- Функции Бесселя второго рода 564, 566
- — первого рода 559
- Вебера 565, 566
- комплексная функция вещественной переменной 429
- комплексной переменной 242
  
- Характеристика 672
- Характеристическое уравнение для линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами 464
- — для линейной однородной системы  $n$  уравнений с постоянными коэффициентами 626
- — для уравнения с дробно-линейной правой частью 349

Характеристические числа:

матрицы 672

линейного однородного уравнения  $n$ -го  
порядка с постоянными коэффициен-  
тами 464

линейной однородной системы  $n$  урав-  
нений с постоянными коэффициента-  
ми 626

уравнения с дробно-линейной правой  
частью 349

Характеристический полином 673

Целая функция 389

Центр 353, 361

Центрофокус 369

Частное решение:

нормальной системы д. у. 221

уравнения  $n$ -го порядка 186

— первого порядка 43, 141

Элементарные делители матрицы 673

Якобиан 225

**Матвеев Н. М.**

М33      Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 4-е, испр. и доп. Минск, «Вышэйш. школа», 1974.

768 с. с ил.

Учебник для механико-математических факультетов университетов по курсу дифференциальных уравнений.

В книге даются основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, излагаются наиболее важные методы интегрирования, доказываются теоремы существования решений и исследуются свойства последних.

Может использоваться в педагогических институтах и технических вузах, особенно будет полезна студентам-заочникам и лицам, самостоятельно изучающим теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

М  $\frac{0223—176}{М304 (05) — 74}$  19—73

517.2

*Матвеев Николай Михайлович*

**МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

Редактор Т. К. М а й б о р о д а  
Обложка В. М. Б а т у р ы  
Худож. редактор Г. И. В а ж н о в  
Техн. редактор Г. М. Р о м а н ч у к  
Корректор В. А. К о з л о в а

АТ 11639. Сдано в набор 29/X 1973 г. Подписано к печати  
27/XI 1974 г. Бумага 70×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> типогр. № 3. Печ. л. 48 (56,16).  
Уч.-изд. л. 44,63. Зак. 588. Тираж 5000 экз. Цена 1 руб. 69 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного ко-  
митета Совета Министров БССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы  
по математике, физике и энергетике. 220600. Минск,  
ул. Кирова, 24.

Ордена Трудового Красного Знамени типография изда-  
тельства ЦК КП Белоруссии, Минск, Ленинский пр., 79.

**1 р. 69 к.**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»**