

А. А. Локшин

Как выбраться из ЛАБИРИНТА?



МОСКВА – 2021

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

Л73

Локшин, Александр Александрович.

Л73 Как выбраться из лабиринта? / А. А. Локшин. – Москва : МАКС Пресс, 2021. – 28 с.

ISBN 978-5-317-06639-0

В книжке изложены некоторые наиболее простые методы выхода из лабиринтов, причем основное внимание уделено алгоритму Шарля Пьера Тремо (1882). Предложен ряд новых задач, в которых требуется восстановить маршрут по лабиринту, основываясь на специальных отметках, оставленных на полу лабиринта.

Для студентов младших курсов пединститутов, а также любознательных школьников.

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

ISBN 978-5-317-06639-0

© Локшин А. А., 2021

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2021

Содержание

Предисловие	4
1. Правило правой (левой) руки.....	5
2. Метод Тезея (нить Ариадны)	8
3. Как поступить, встретившись с собственным следом?	9
4. Метод Шарля Тремо (1859–1882).....	12
5. Задачи на восстановление маршрута	18
Литература.....	27

Предисловие

В этой маленькой книжке изложены некоторые методы выхода из лабиринтов, причем основное внимание уделено алгоритму Шарля Пьера Тremo (1882). Предложен также ряд задач, в которых требуется восстановить маршрут Путешественника, основываясь на специальных меловых отметках, оставленных им на полу лабиринта.

Изложение рассчитано на студентов младших курсов пединститутов, а также на любознательных школьников.

Автор
Москва, 2021

1. Правило правой (левой) руки

Чтобы не заблудиться в лабиринте подобно некоторым героям Марка Твена, желательно иметь базовые представления о правильных способах поведения внутри этих замысловатых помещений. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что план лабиринта неизвестен человеку, пытающемуся выбраться наружу.

Вот способ, дошедший до нас из глубокой древности.

Сразу же (это существенно!) при входе в лабиринт, нужно коснуться правой (или левой – это дело вкуса) рукой соответствующей стены, а затем, двигаясь вперед, все время не отрывать руку от стены (см. рис. 1 и 2).



Рис. 1



Рис. 2

Тогда, если у лабиринта есть выход, отличный от входа, вы обязательно до него доберетесь. Если же единственным выходом из лабиринта является его вход, вы обязательно вернетесь к месту своего входа в лабиринт.

Достоинства метода. Не требуется никакое дополнительное оборудование, не нужен даже фонарь (впрочем, это верно лишь с некоторыми оговорками).

Недостатки метода. Если у вас не было возможности сразу же при входе коснуться рукой стены лабиринта, но вы решили все же испробовать этот метод, находясь в некоторой удаленной от входа точке А, то этот метод не приведет ни к чему хорошему. Может случиться так, что вы будете все время совершать обход по внутреннему замкнутому маршруту, не подозревая об этом (см. рис. 3). Такой маршрут математики называют «циклом».

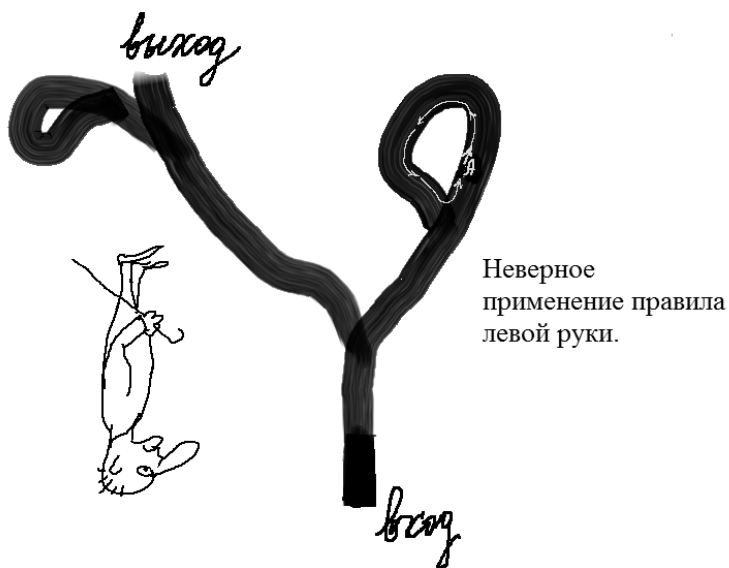


Рис. 3

Замечание о необходимости иметь фонарь. Если заранее известно, что лабиринт безопасен — в нем отсутствуют колодцы, куда можно провалиться, на его стенах не сидят ядовитые пауки и т.д., то без фонаря действительно можно обойтись. Однако, попадая в реальный, а не математический лабиринт, мы не можем быть уверены в отсутствии перечисленных неожиданностей.

Замечание. Говоря о каком-либо лабиринте, мы всегда будем предполагать, что он не распадается на отдельные, не связанные друг с другом части. Иными словами, мы предполагаем, что из любой внутренней точки лабиринта можно попасть в любую другую его точку, не выходя наружу. В математике такое свойство называется *связностью*.

2. Метод Тезея (нить Ариадны)

Все знают древнегреческий миф о Тезее, сразившемся с чудовищем внутри лабиринта и выбравшемся наружу благодаря нити, которую он тянул за собой (предварительно закрепив ее конец у входа в лабиринт); см. рис. 4.

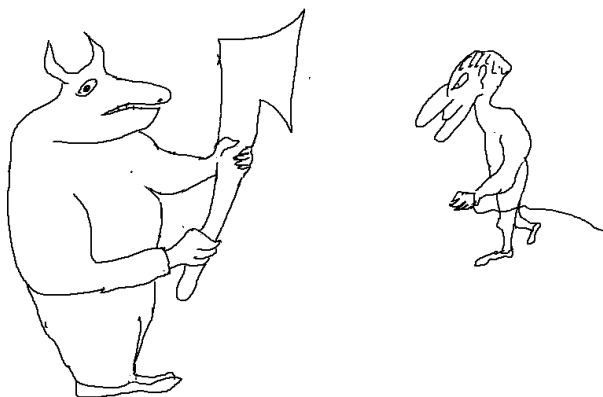


Рис. 4

(Эту нить, как известно, дала ему красавица Ариадна, сестра чудовища.)

Способ, которым воспользовался Тезей, дает практически стопроцентную гарантию возвращения из недр лабиринта. Человек, тянущий за собой нить, может позволить себе бессистемные блуждания по ответвлениям лабиринта, а затем, подбирая нить, вернуться назад. Главный недостаток этого метода в том, что:

А) он бесполезен, если требуется найти выход из лабиринта, отличный от входа;

Б) он бесполезен, если требуется пройти по всем ответвлениям (коридорам) лабиринта.

3. Как поступить, встретившись с собственным следом?

Задаче о том, как выбраться из лабиринта, не меньше двух с половиной тысяч лет. И долгое время (вплоть до второй половины 19 века) ничего лучшего, чем два изложенных выше способа, придумано не было.

Фактически нерешенной оставалась задача о том, как выбраться из лабиринта, отправляясь из его произвольной внутренней точки. Возможно, эта задача казалась людям просто-напросто неразрешимой?

Рассмотрим случай, когда Путешественник собирается выбраться из лабиринта, находясь в точке А одного из тупиковых ответвлений. Как следует действовать в этом случае, чтобы избежать бесконечного кружения по одному и тому же петлеобразному пути? (Начиная с этого момента мы предполагаем, что у Путешественника имеется с собой фонарь и кусок мела.)

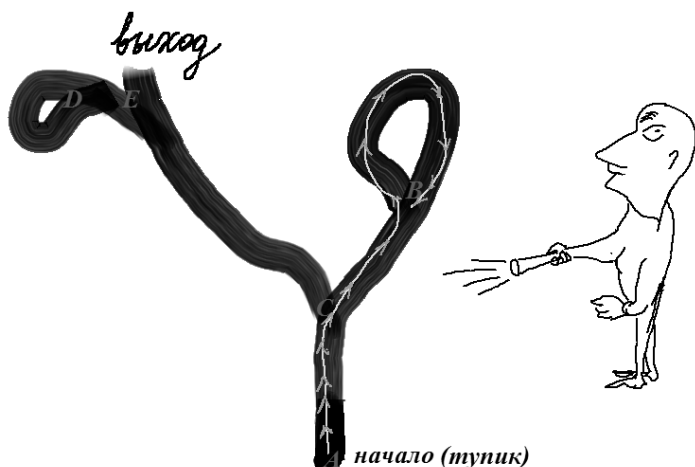


Рис. 5

Итак, будем считать, что находящийся в точке А и желающий выбраться из лабиринта Путешественник может стрелками отмечать на полу направление своего движения (см. рис. 5). Оказавшись в точке В, наш Путешественник может поступить трояко.

Способ действий № 1. Повернуть направо и пойти в направлении им же самым нарисованных стрелок. Очевидно, что это – наихудшее решение, приводящее к «хождению по кругу».

Способ действий № 2. Не сворачивая, продолжить свой путь, т.е. двигаться в направлении, противоположном тому, на которое указывают им же самым ранее нарисованные стрелки. Затем, дойдя до развилки в точке С, отправиться по тому коридору, в котором не был раньше (на полу отсутствуют стрелки).

Способ действий № 3. В точке В повернуть назад и идти против направления нарисованных ранее стрелок вплоть до развилки в точке С, а дальше (как и в предыдущем пункте) идти по не пройденному ранее коридору.

Итак, первый из предложенных вариантов действий, очевидно, должен быть отвергнут в силу своей бессмысленности.

Что касается способов № 2 и № 3, то они кажутся примерно равноправными, причем способ № 2 выглядит даже более привлекательно, так как скорее приводит к развилке в точке С.

Однако это впечатление обманчиво – способ № 2 (в отличие от способа № 3), вообще говоря, опасен (см. рис. 6).

Итак, Путешественник, двигаясь по коридорам лабиринта, вторично оказался в точке В, где увидел им же самым нарисованную стрелку. Если теперь он продолжит

свой путь в направлении, противоположном направлению стрелки, то вернется обратно в тупик, к началу своего маршрута.

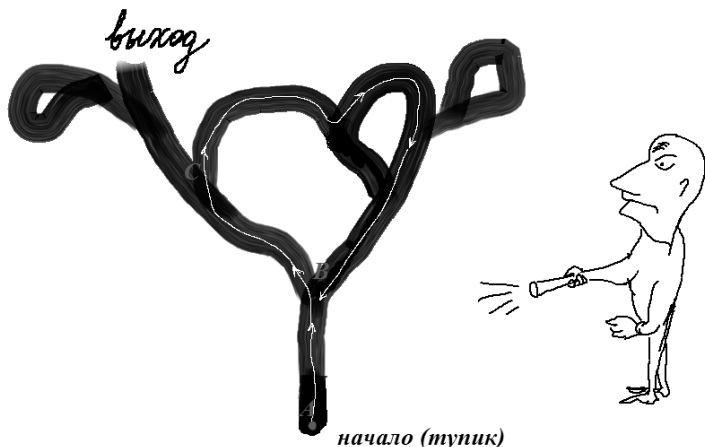


Рис. 6

Теперь Путешественнику, чтобы выбраться из лабиринта придется в третий раз проходить участок АВ. Но куда сворачивать на развилке (в точке В) – направо или налево? В обоих коридорах, возникающих на развилке, он видит свои собственные следы, оставленные ранее...

«Возможно, – предполагает Путешественник, – причина моей неудачи в том, что я каждый раз, видя перед собой два не пройденных ранее коридора, делал свой выбор между правым и левым коридором случайно. Наверно, необходимо было придерживаться какой-то определенной системы. Но какой именно?»

4. Метод Шарля Тремо (1859–1882)

Итак, мы видели, что выбраться из недр лабиринта, не имея четко сформулированного плана действий, проблематично.

Оказывается, однако, что выход из лабиринта можно найти, отправляясь из любой его внутренней точки. (При этом необходимы фонарь и кусок мела.)

Мы ограничимся случаем, когда все развилки на пути – двойные, т.е. коридор расщепляется на два; общий случай сводится к этому.

Замечание. Условимся также считать, что никакая развилка не является частью никакого коридора.

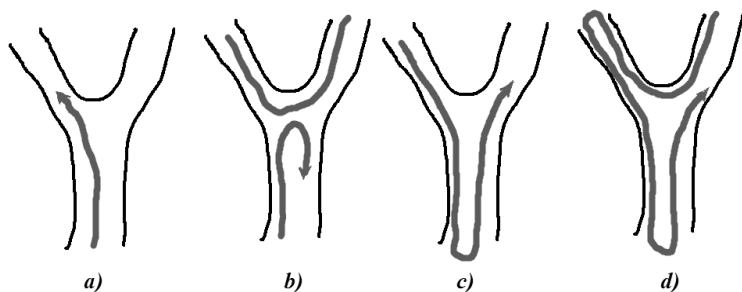


Рис. 7. Возможные ситуации при прохождении развилки по методу Тремо

Вот в чем заключается суть метода, предложенного в 1882 году французским инженером Ш. Тремо; см. https://en.wikipedia.org/wiki/Maze-solving_algorithm

Прежде всего, впервые заходя в любой коридор и впервые выходя из любого коридора (перед развилкой), на полу рисуем мелом кружочек. При повторном прохождении лю-

бого коридора превращаем свои кружочки в кресты. Если путь ведет в тупик, то возвращаемся и ставим крест на входе в тупиковый путь. Через крест уже никогда не переступаем. Далее:

а) если на развилке видим, что ни на одном из двух дальнейших путей (коридоров) не нарисованы кружочки, то выбираем любой из двух дальнейших путей;

б) если на развилке видим, что на обоих дальнейших путях (коридорах) имеется по одному кружочку, то в конце своего коридора (перед развилкой) рисуем на полу крест. После чего поворачиваем назад и превращаем свои собственные встречающиеся на пути кружочки в кресты;

с) если на пути встречается такая развилка, что только на одном из двух дальнейших путей стоит кружочек, то идем по другому (еще не пройденному) пути;

д) если идем по коридору вторично (превращая свои кружочки в кресты), причем на пути такая развилка, что вход в один из двух дальнейших коридоров преграждает крест, а на другом пути нарисован кружочек, то идем именно по этому второму пути, превращая кружочки в кресты.

Перейдем к примерам. На рис. 8 изображен меловой след от прохода (от входа в лабиринт к выходу), осуществленного по методу Тремо.

Задача 1. Изобразить непрерывной линией (указав стрелками направление движения) маршрут Путешественника, соответствующий пометкам на рис. 8.

Решение. См. рис. 9.

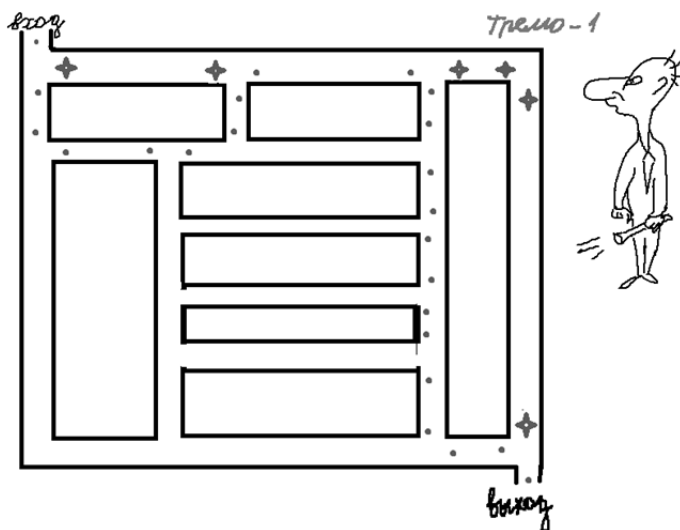


Рис. 8

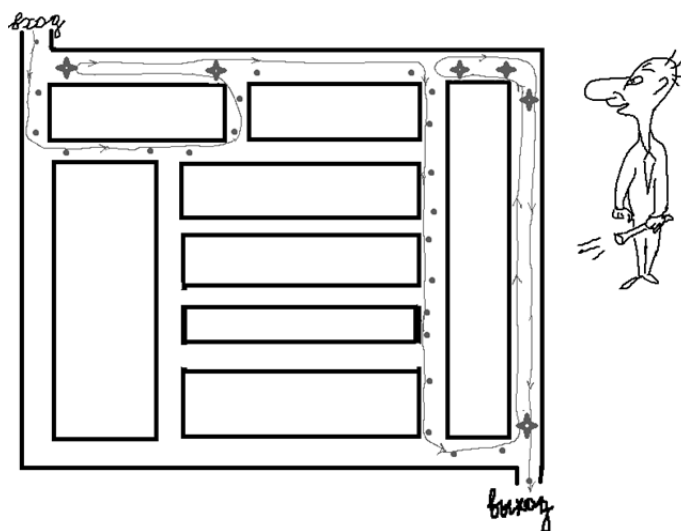


Рис. 9

Посмотрим теперь, что будет, если вход в лабиринт и выход из него совпадают, причем требуется добраться до цели, расположенной внутри лабиринта. Оказывается, что и в этом случае, действуя по алгоритму, предложенному Тремо, мы добьемся успеха. На рис.10 изображен меловой след, оставленный Путешественником на полу лабиринта после того, как он добрался от входа до цели, действуя по правилам Тремо.

Задача 2. Изобразить непрерывной линией (указав стрелками направление движения) маршрут Путешественника, соответствующий пометкам на рис. 10.

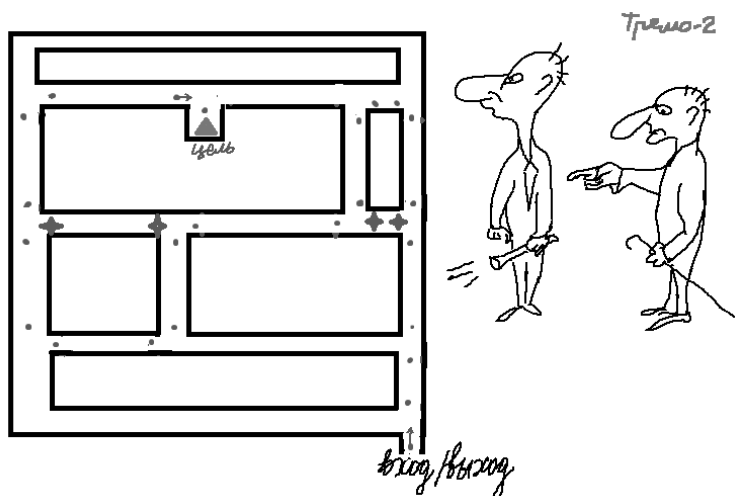


Рис. 10

Посмотрим теперь, как Путешественник, следуя правилам Тремо, будет возвращаться к входу, совпадающему с выходом из лабиринта.

На рис. 11 изображен меловой след, оставленный Путешественником в начале своего пути, еще до того, как он встретил собственный след на полу лабиринта.

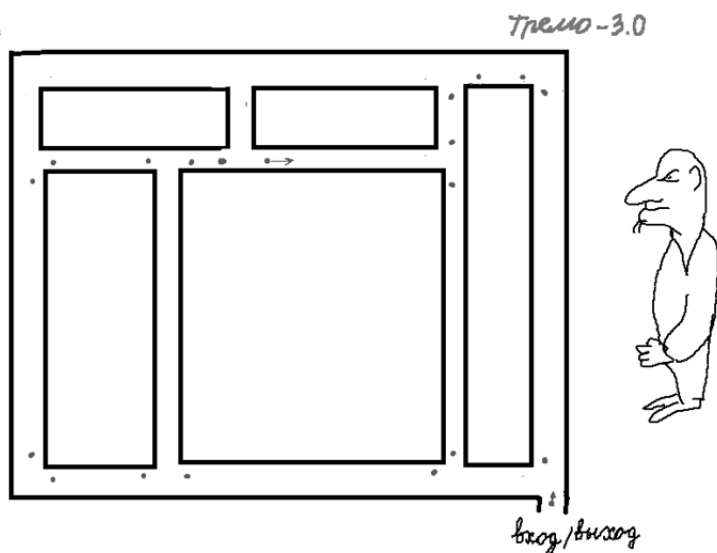
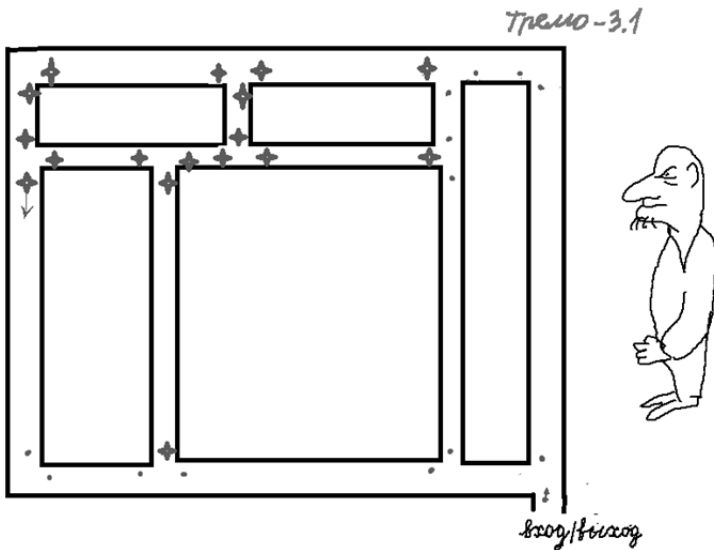


Рис. 11

Проследим теперь дальнейшие шаги Путешественника (см. рис. 12).



Из рис. 12 ясно, что к тому моменту, когда Путешественник вернется к входу/выходу, все коридоры лабиринта будут пройдены, причем дважды.

5. Задачи на восстановление маршрута

Метод Тремо (по крайней мере, в том виде, как он изложен в [1]) интересен тем, что по меловым следам, оставшимся после прохождения маршрута, восстановить сам маршрут непросто. В результате удается легко составить серию довольно трудных задач. Однако важно уметь записывать ответ в компактном виде, не вызывающем разночтений.

Этого можно добиться следующим образом, если заранее договориться рассматривать только лабиринты, представляющие собой сеть «переулков» между прямоугольными «кварталами». Расставим тогда числа в углах соответствующих прямоугольников так, как это показано на рис. 13. На этом рисунке изображено также начало (подчиняющегося правилам Тремо) прохождения маршрута по лабиринту.

Замечание. Мы будем придерживаться также следующих соглашений.

А) Если текущему положению Путешественника в лабиринте могут быть с равным успехом сопоставлены два разных числа (например, на рис. 13 левому кресту могут быть сопоставлены числа 7 и 11), то в числовой записи маршрута мы выбираем любое из этих двух чисел (за исключением случая, когда два повторяющихся числа обозначают поворот).

Б) Число, которое соответствует месту разворота на 180° , мы не повторяем (чтобы не возникло путаницы с поворотом на 90°), но подчеркиваем его.

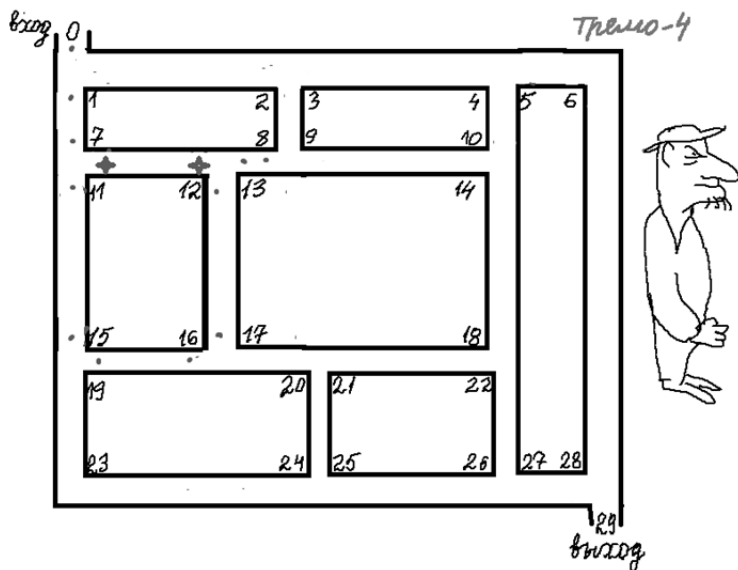


Рис. 13

Замечание. Используя введенные на рис. 13 координаты, изображенное на этом рисунке движение можно представить в виде числовой последовательности:

0, 1, 7, 11, 15, 15 (поворот на 90°), 16, 16 (поворот на 90°), 12, 12 (поворот на 90°), 7 (поворот на 180°), 12, 13, 8.

Замечание. Суть метода Тремо заключается в том, что он последовательно блокирует «лишние» коридоры (т.е. коридоры, пройденные дважды), не перекрывая при этом путь к выходу из связного лабиринта.

Попробуем разобраться в том, как работают правила Тремо.

Прежде всего, геометрически очевидно, что справедливо следующее

Утверждение. Пусть в связном лабиринте, имеющем (возможно, совпадающие) вход и выход, существует Коридор AB , разветвляющийся на обоих концах, но не имеющий ответвлений в своей внутренней части. Пусть, далее, внутри лабиринта существует непрерывный путь, проходящий мимо обоих концов A и B Коридора AB , но не заходящий внутрь Коридора. Тогда после удаления («замуровывания») Коридора AB лабиринт по-прежнему останется связным.

Замечание. Любой тупик может быть, очевидно, удален из связного лабиринта, причем связность лабиринта не нарушится.

Покажем теперь, опираясь на сформулированное Утверждение, что, подчиняясь правилам Тремо, Путешественник обязательно выберется из лабиринта. (Предполагается, что Путешественник вошел в лабиринт через вход.) Действительно, пусть A_1B_1 – первый коридор, пройденный Путешественником дважды (в противоположных направлениях). Как следует из сделанного Утверждения и правил Тремо, коридор A_1B_1 может быть полностью перекрыт («замурован»), причем лабиринт останется связным. Если при дальнейшем движении по правилам Тремо попадетс еще один пройденный дважды коридор A_2B_2 , то и он может быть «замурован» и снова лабиринт останется связным, и т.д. Так как количество коридоров в лабиринте конечно и ни один из них не будет пройден более, чем дважды, то маршрут Путешественника обязательно в какой-то момент закончится. Из правил Тремо и сохраняющейся связности лабиринта легко следует, что маршрут может закончиться только либо в точке входа, либо в точке выхода.

(Ни в какой внутренней точке лабиринта Путешественник не сможет «замуровать» сам себя.)

Замечание. Более тщательный анализ позволяет установить, что если выход и вход в лабиринт не совпадают, то Путешественник придет именно к выходу, а не вернется к входу.

Приведем набросок соответствующего доказательства, пользуясь методом «от противного». Нам будет удобно называть однократное (первичное или вторичное – неважно) прохождение любого коридора «шагом». Предположим, что, действуя по методу Тремо, Путешественник вышел из лабиринта через вход (не совпадающий с выходом). Сделаем один шаг назад, т.е. вернемся к тому моменту, когда Путешественника отделяет от точки входа ровно один коридор, по которому он может пройти, не нарушая правил Тремо. Обозначим точку, в которой находится Путешественник, через C , а точку входа в лабиринт – через D . *Следует подчеркнуть, что коридор CD , по которому Путешественник собирается пройти к входу, был уже пройден им однажды.* Заметим теперь, что, так как лабиринт после каждого шага Путешественника оставался связным, из точки C можно провести внутри лабиринта непрерывную кривую к точке выхода, которую обозначим через E . Теперь нужно рассмотреть две основные ситуации.

А) Путь CE ни в какой своей части еще не был пройден Путешественником ни разу. Но тогда по правилам Тремо Путешественник не может отправиться из точки C по коридору CD , и мы приходим к желаемому противоречию.

Б) Часть CE_1 пути CE уже ранее была (однократно!) пройдена Путешественником. Но точка E_1 не может быть концевой точкой непрерывного маршрута Путешественника, находящегося в точке C . Это значит, что в точке E_1 у лабиринта имеется развилка, а маршрут Путешественника делает петлю. Для простоты будем считать, что маршрут

Путешественника от точки E_1 , не образуя других петель, приходит в точку E_2 , лежащую между C и E_1 . Но тогда по правилам Тремо в точке E_2 Путешественник должен был повернуть назад (весь участок маршрута Путешественника E_1E_2 в результате окажется замурованным) и в точке E_1 отправиться к выходу D . Тем самым мы снова пришли к противоречию.

Замечание. Предположим теперь, что в связном лабиринте выход и вход совпадают. С помощью похожих рассуждений нетрудно показать, что Путешественник, прокладывая свой маршрут по правилам Тремо, перед тем как выйти из лабиринта, обязательно пройдет по каждому коридору дважды.

Замечание. Серия элементарных примеров, изображенных на рис. 14–18, может помочь читателю лучше представить себе общую ситуацию.

Задача. Придумать не содержащий тупиков связный лабиринт, при прохождении которого по методу Тремо трижды возникают фрагменты типа d) (см. рис. 7).

Указание. Взять три экземпляра рис. 18.

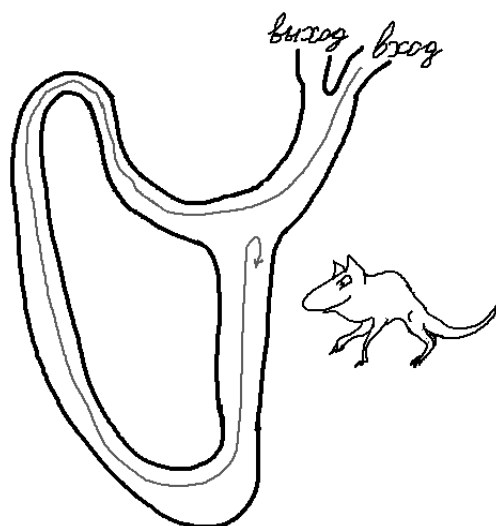


Рис 14

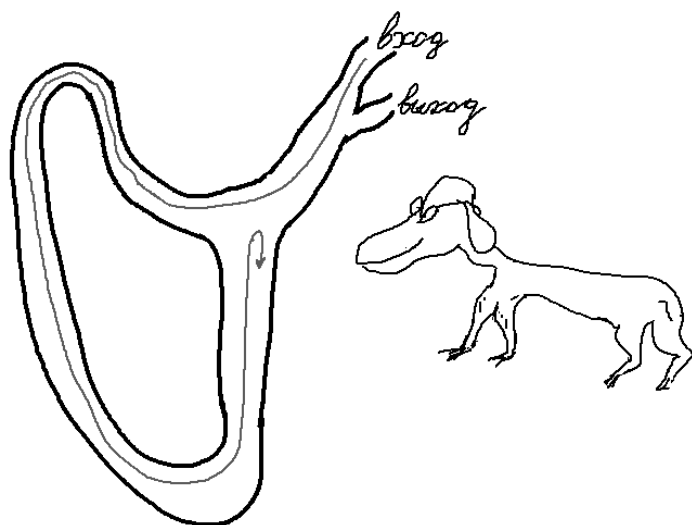


Рис. 15

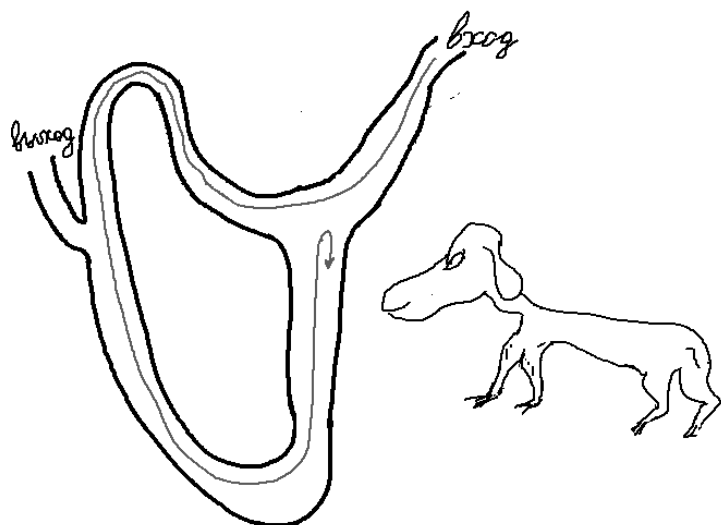


Рис. 16

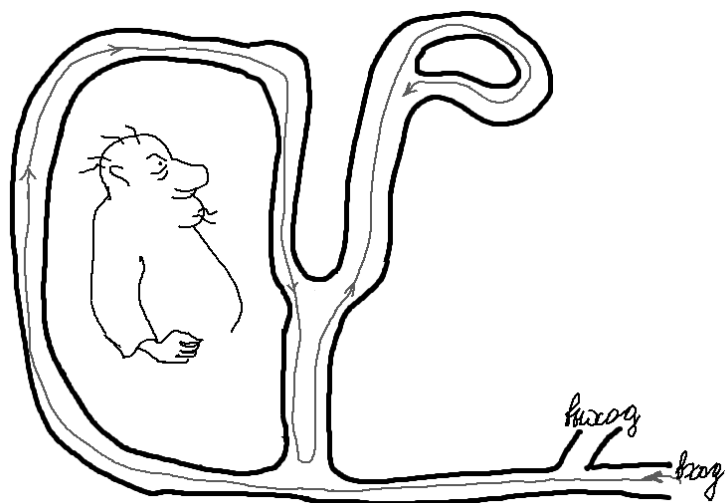


Рис. 17

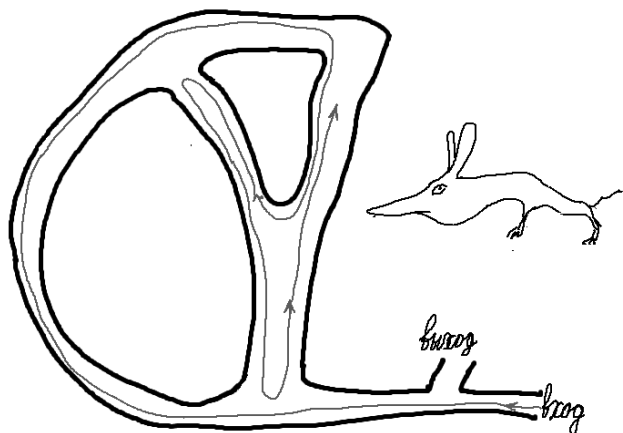


Рис. 18

Замечание. Выше уже было сказано о том, что, ограничиваясь рассмотрением «развилок» (раздвоением коридоров лабиринта), мы на самом деле не теряем общности. Покажем это на примере превращения одного перекрестка в две «развилки» при помощи небольшой (мысленной) деформации лабиринта; см. рис. 19. Таким образом, Путешественник, встретив на своем пути перекресток, может рассматривать его как две «развилки» и следовать изложенным выше правилам.

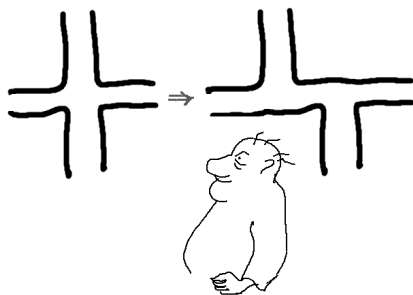


Рис. 19

Замечание. В настоящее время существует несколько модификаций алгоритма Тремо. Отметим, в частности, метод О. Оре обхода залов художественной выставки, позволяющий посетителю обойти все залы и гарантированно побывать в каждом из них ровно два раза [2, с. 38–40]. Последнее необходимо, чтобы рассмотреть все картины, развешанные на противоположных стенах залов. Следует упомянуть также интересный алгоритм выхода из лабиринта, основанный на использовании компаса; см. [1], [3].

Литература

1. https://ru.xcv.wiki/wiki/Maze_solving_algorithm
2. *Оре О.* Графы и их применение. – М.: МИР, 1965.
3. *Уолкер Дж.* Как пройти через лабиринт, не заблудившись / В мире науки, № 2, февраль 1986, с. 62–74. <http://vzms.org/Maze.htm>

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович

КАК ВЫБРАТЬСЯ
ИЗ ЛАБИРИНТА?

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н. С. Давыдова*
Обложка: *М. А. Еронина*

В издании использованы рисунки А. А. Локишина

Подписано в печать 22.06.2021 г.
Формат 84х108 1/16. Усл. печ. л. 2,94.
Тираж 25 экз. Изд. № 100.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/93. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.