

Г. ЛЕБЕГ

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

УЧПЕДГИЗ
1938

Г. ЛЕБЕГ

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

Перевод под редакцией А. Н. КОЛМОГОРОВА

Допущено Всесоюзным Комитетом по делам высшей школы в качестве пособия для Физико-Математических факультетов Педагогических институтов.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА * 1938

Книга посвящена основным вопросам преподавания элементарной математики: понятиям длины, площади, объема; рассматриваются также более общие вопросы об измеримых величинах, о производной и интеграле, причем рассуждения ведутся для пространства n измерений. Педагогические соображения автора обладают свежестью и глубиной и способны оказывать значительное воспитывающее действие на педагога, которому они адресованы. Книга местами довольно трудна, что объясняется не столько сложностью материала, сколько манерой изложения автора.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловие редактора	3
Введение	13
I. Сравнение совокупностей; целые числа	15
II. Длины; числа	22
III. Площади	49
IV. Объемы	84
V. Длины кривых; площади поверхностей	112
VI. Измеримые величины	152
VII. Интегрирование и дифференцирование	166
VIII. Заключение	201

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

1. В начальной и средней школах, так же как и в историческом процессе развития человеческих знаний, *число* выступает в двух основных функциях: натуральное (целое положительное) число — как орудие *счета* предметов, рациональное и действительное число — как орудие *измерения величин*. С этой точки зрения нет столь глубокого различия между рациональными и иррациональными действительными числами. Из педагогических соображений надолго задерживаются на рациональных числах, так как их легко записать в форме дробей; однако, то употребление, которое им с самого начала придается, должно было бы сразу привести к действительным числам во всей их общности¹⁾.

Конечно, практические измерения производятся всегда лишь с конечной степенью точности, и для того чтобы прийти к положительному утверждению иррациональности какого-либо отношения (например диагонали квадрата к его стороне), надо подняться на более высокую ступень абстракции, чем та, которая соответствует наивному приближенному измерению величин. Однако, уже на первых шагах наивного измерения, возможность выразить отношение двух величин отношением двух целых чисел является случайным обстоятельством: при заданной точности это можно сделать очень многими, примерно равноценными способами. Так, измеряя отношение длины окружности к диаметру, с точностью до $\frac{1}{10\,000}$, мы могли бы колебаться между выражениями:

$$\frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{688}{219},$$

лишь более точные измерения показали бы нам, что второе из этих выражений много лучше, чем два других.

Часто стараются создать иллюзию непосредственного перехода от целых чисел к дробным обращением к примерам, вроде деления четырех яблок между тремя лицами. При этом умалчивают, что операция

$$(4 \text{ яблока}) : 3 = 1\frac{1}{3} \text{ яблока}$$

¹⁾ Во всем дальнейшем, в соответствии с содержанием книги Лебега, мы оставляем в стороне вопрос об отрицательных числах, вопрос гораздо более легкий и с педагогической, и с философской стороны, чем вопрос о действительных числах, хотя бы и только положительных.

О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
50	15 снизу	$\frac{N_i}{100}$	$\frac{N_i}{100^2}$	тип.
179	4 сверху	$\Delta_v - \Delta'' = \Delta, \Delta'_v - \Delta'' = \Delta',$ где Δ	$\Delta_v - \Delta'' = \Delta, \Delta'_v - \Delta'' = \Delta',$ где Δ	изд-ва
179	8 "	Для Δ	Для Δ	тип.
179	8 "	$f(\Delta)$	$f(\Delta)$	изд-ва
179	11 "	$BV(\Delta) \leq BVK_{a_k}(\Delta),$	$BV(\Delta) \leq BVK_{a_k}(\Delta)$	изд-ва
181	3 "	$\int \varphi(P) dV$	$\int_{\Delta} \varphi(P) dV$	изд-ва
202	1 "	мой ;	; мой	тип.
202	2 снизу	и науки	из науки	тип.

Г. Лебег. Об измерении величин.

осмысленна лишь в том случае, если все четыре яблока одинаковой величины. „Одно яблоко“ выступает здесь неизбежно как единица меры объема или веса. Считать можно самые разнородные предметы: два чемодана и арбуз могут составлять *три предмета*, взятые с собой в дорогу; но два чемодана и поларбуза не составляют $2\frac{1}{2}$ предмета, — употребление дробных чисел предполагает однородность как самих предметов так и их частей, т. е. по существу всегда связано с измерением величины.

В полном соответствии со сказанным выше находится то обстоятельство, что натуральные числа и после создания более широкой концепции действительного числа сохраняют всю свою самостоятельность. Им посвящена обширная наука — теория чисел — со своими своеобразными проблемами. Рациональные же числа, оставаясь важным частным случаем действительных чисел, не дали повода к образованию отдельной ветви математики, которая изучала бы их самих по себе¹⁾. Лишь вопросы приближения иррациональных чисел при помощи рациональных до настоящего времени представляют собой живую область математических исследований.

Между тем очень распространено мнение, что наиболее „научным“ подходом к введению рациональных чисел является подход со стороны произвольного расширения области целых чисел для достижения неограниченной осуществимости действия деления. Многие считают при этом, что полная строгость возможна только, если вновь вводимые „пары чисел“ пишутся в необычной форме (a, b) , а не в виде обыкновенных вульгарных дробей $\frac{a}{b}$. Что касается последнего обстоятельства, мнимой необходимости особого обозначения „пар“ в виде (a, b) , то это просто результат недомыслия. Сама же концепция расширения области чисел с точки зрения неограниченной осуществимости действий очень почтенна и является лишь частным случаем одного из основных способов образования новых понятий в современной алгебре. Однако она становится вполне убедительной только после доказательства *единственности* предлагаемого метода расширения. Действительно, можно доказать²⁾, что минимальное алгебраическое тело, содержащее целые числа, изоморфно телу рациональных чисел. Вся эта концепция слишком абстрактна не только для того, чтобы в явном виде преподаваться в средней школе, но и для того, чтобы служить опорой для учителя в этом преподавании. Кроме того, надо ясно понимать, что с этой, чисто алгебраической, точки зрения следующим этапом за введением рациональных чисел является отнюдь не введение действительных чисел,

¹⁾ В другом, чисто алгебраическом ряду развития, о котором будет сказано далее, система рациональных чисел является лишь частным случаем общего понятия *алгебраического тела* и включается в более обширное тело алгебраических чисел.

²⁾ Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, § 12.

а создание над рациональными числами алгебраически замкнутого тела, т. е. введение алгебраических чисел. С точки зрения чистой алгебры нет никаких оснований считать число $\sqrt{+2}$ более простым, чем число $\sqrt{-2}$, а число π вообще излишне.

В действительности, конечно, никто и не пытается излагать в школе идеи современной абстрактной алгебры. Но часто учащимся сообщают ошибочное утверждение, что подлинно научное построение рациональных чисел *не должно* иметь ничего общего с измерением величин. Часто говорят, что правила действий над дробями есть лишь „удобные соглашения“, сохраняющие неизменными законы действий.

Одной из основных задач книги Лебега является показать, что подход к построению рациональных и действительных чисел с точки зрения измерения величин несколько не менее научен, чем, например, введение рациональных чисел в виде „пар“. Для школы же он имеет несомненные преимущества. Первым преимуществом является соответствие этого подхода историческому развитию математики и имеющемуся у учащихся повседневному опыту. Вторым же — то обстоятельство, что он приводит с необходимостью к введению действительных чисел. Действительные числа появляются при этом в гораздо более осязаемой форме десятичных дробей, чем „дедекиндовские сечения“¹⁾ в системе рациональных чисел (которые сами суть не что иное, как „пары“ целых чисел).

Поэтому вполне прав Лебег, когда он, в предлагаемых теперь русскому читателю очерках, после натуральных чисел переходит сразу к происхождению и логической природе действительных чисел. Прав он и тогда, когда утверждает, что с педагогической стороны, для школы, существует одна нераздельная задача — привести к возможно более ясному пониманию концепции действительного числа²⁾. Мне хочется особенно подчеркнуть здесь важность этой общей установки, так как в изложении самого Лебега она связана с по меньшей мере спорным, а вернее просто неприемлемым, предложением совсем изгнать из школы изучение простых дробей.

2. В чем же основной интерес книги Лебега? Мне кажется в следующем: у математиков существует склонность, уже владея закончен-

1) С общей точки зрения введения непрерывности в любых порядковых типах дедекиндовские сечения имеют неоспоримое преимущество. Но даже в курсе анализа в университетах обращение к определению действительного числа бесконечной десятичной дробью кажется наиболее целесообразным. Оно позволяет с очень небольшой затратой труда внести в изложение анализа полную ясность, не откладывая „строгое обоснование теории действительных чисел“ до каких-то дополнительных курсов, как это у нас часто делают.

2) Введение комплексных чисел в последнем классе средней школы осуществляется уже без большого труда, если с действительными числами достигнута достаточная ясность.

ной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ¹⁾ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т. д.). Поэтому, на разных ступенях обучения с разной степенью смелости, неизменно проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с *введением* чисел, и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег.

Что общепринятая система с педагогической стороны дефектна— видно хотя бы из тех трудностей, которые затем возникают при усвоении учащимися независимости смысла геометрических и физических формул от выбора единиц измерения и понятия „размерности“ геометрических и физических формул.

Дело, однако, не в отдельных дефектах, а в том, что отрыв в школьном преподавании математических понятий от их происхождения приводит к полной беспринципности и логической дефектности курса. Лебег вполне прав, когда утверждает, что, например, старые учебники, считавшие понятие площади чем-то ясным и само собой разумеющимся, стояли выше, чем некоторые современные, которые предлагают „условиться“ называть площадью круга такой-то предел. Создание на почве выкристаллизовавшихся из практики понятий формальных определений на своем месте имеет смысл, но только тогда, когда это будут общие определения общих понятий. Имеет смысл дать формальное определение площади вообще, вывести из этого определения общие свойства площадей и доказать, что в применении к кругу общее определение дает определенный результат. Но совершенно бессмысленно „уславливаться“, что понимать под площадью отдельных фигур, так как из таких „соглашений“, естественно, ничего нельзя вывести.

Поднимаясь к современным исследованиям о понятии длины кривой, площади поверхности и интеграла, Лебег показывает, как уже в чисто научной области забвение реального происхождения понятий может сбить с пути исследователя. На примере своих собственных

¹⁾ „Алгебра“, преподающаяся в средней школе, с ее приближенным извлечением корней, логарифмами и т. д., едва ли не в большей степени является первой главой анализа (или введения в анализ), чем, собственно, чистой алгебры. Если современным алгебраистам удастся убедить всех в необходимости понимать слово „алгебра“ в удобном им и логически вполне обоснованном, но совершенно не соответствующем школьной традиции, смысле, то придется поднять вопрос о переименовании того предмета, который сейчас преподается в средней школе под названием алгебры.

открытий Лебег старается показать, как тесно они связаны с анализом реальных процессов измерения. Таким образом, в центре внимания на протяжении всей книги Лебега стоит борьба за возвращение математическим понятиям их первоначального материального содержания. В этой борьбе я и вижу основной интерес книги Лебега.

Отмечу здесь же¹⁾, что, на мой взгляд, позиция Лебега страдает двумя дефектами. Лебег, мне кажется, недооценивает самостоятельности математики, того, что математика изучает материальный мир с особой точки зрения, что ее непосредственным объектом являются пространственные формы и количественные отношения реального мира²⁾. Сами эти формы и отношения являются той реальностью, которая изучается математикой. Отказывая в реальности числам, этим формам и отношениям, Лебег, казалось бы, ведет борьбу с платонизмом и его особым миром „идей“. В действительности это недиалектическое упрощение основного, совершенно правильного тезиса о том, что математика изучает тот же самый материальный мир, естественно приводит Лебега ко второй ошибке, прямо противоположного свойства, и, вопреки его собственным исходным тенденциям, в конечном счете — к объявлению предметом изучения математики лишь „метафизически“ осуществимых бесконечных последовательностей символов (§ 55). Результат поистине неожиданный!

Точка зрения Лебега на измерение величин, на целые и действительные числа и его трактовка упомянутого выше вопроса о размерности величин станут достаточно ясными читателю, прочитавшему главы I, II, III, IV и VI. Менее подготовленному читателю можно посоветовать прочесть именно эти главы (пропустив V) и затем (пропустив VII) сразу заключение (VIII).

С другой стороны, можно представить себе читателя (более подготовленного), которого интересуют по преимуществу главы V, VI и VII (глава VI входит, таким образом, в обе группы). Здесь та же основная тенденция,—выяснение реального происхождения математических понятий,—проведена на материале понятий длины кривой, площади поверхности и интеграла, принадлежащих в своем полном объеме дифференциальной геометрии и анализу.

Особенно остро стоит вопрос о понятии площади поверхности. В элементарной геометрии, кроме площадей цилиндра и конуса, для которых общая проблема может быть обойдена разворачиванием на плоскость, „вычисляется“ площадь поверхности шара. Вычисление это однако, не имеет определенного логического смысла, пока само понятие площади поверхности не определено. Далеко не всем известно, что дело вовсе не в затруднительности привести такое определение

1) См. подробнее § 3 и 4 моего предисловия.

2). Ф. Э н г е л ь с, Анти-Дюринг.

в школьном учебнике, а в том, что корректное элементарно-геометрическое определение площади поверхности, пригодное хотя бы в простейших случаях, вообще было найдено лишь к концу XIX века и излагается лишь в специальных мемуарах. В учебниках анализа и дифференциальной геометрии площадь поверхности *определяется* интегралом

$$J = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx \cdot dy.$$

Обычные „доказательства“ того, что этот интеграл действительно выражает площадь поверхности, не выдерживают критики по той простой причине, что нельзя *доказать* равенство интеграла площади поверхности, не определив сначала, что такое площадь. Это обстоятельство является уже подлинным скандалом для общепринятого изложения дифференциальной геометрии. Надо надеяться, что книга Лебега окажет влияние на содержание соответствующих глав университетских учебников.

Было бы ошибкой думать, что читатель получит из изложения Лебега окончательные, правильные ответы на все философские и педагогические вопросы, возникающие в связи с измерением величин, теорией действительных чисел, определением длины кривой, площади поверхности и интеграла. Критике философских и педагогических установок Лебега посвящены два следующих параграфа моего предисловия. Но, во всяком случае, Лебег доставляет читателю богатый материал для того, чтобы самому разобраться во всех этих вопросах.

Кончая обзор конкретного содержания книги Лебега, укажу еще что в ней рассыпано не мало отдельных остроумных замечаний и оригинальных способов доказательств (например доказательство независимости определения площади от выбора системы координат в § 29). Поэтому можно думать, что удовольствие от непосредственного общения с таким первоклассным математическим умом, каким является Лебег, с лихвой искупит для достаточно подготовленного читателя некоторую растрепанность изложения, переходящего прихотливым и внезапным образом от непринужденной, пространной болтовни к необычайной краткости формулировок. В частности, все формулировки с бесконечно-малыми и пределами, будучи по существу точными, рассчитаны на читателя, который самостоятельно умеет переводить их на язык ϵ и δ .

Все сказанное делает понятным, что книга Лебега не должна рассматриваться как учебное пособие при прохождении какого-либо определенного курса, а является лишь интересным материалом для знакомства с идеями одного из замечательных математиков современности и для дальнейших самостоятельных размышлений читателя.

3. Лебег всячески старается отгородиться от философии вообще, а в особенности от „метафизики“. Беру слово „метафизика“ в кавычках, так как Лебег употребляет его без большого разбора. Как это

обычно бывает, такое отгораживание является лишь своеобразным способом настойчивого проведения и отстаивания вполне определенной философской позиции.

Положительной стороной этой позиции является признание Лебегом материалистического положения о неразрывности теории и практики, познания и деятельности. Положение это принимается Лебегом как в его историческом аспекте (все развитие математики определяется предъявляемыми к ней требованиями практики), так и в логическом аспекте (математические предложения являются концентратом нашего опыта, относящегося к действительному миру, руководящим нашей дальнейшей практической деятельностью, а не относятся к особому миру идеальных математических сущностей, или не являются продуктом свободного творчества нашего духа).

Отсюда вполне последовательно вытекает у Лебега борьба с условностью математических определений, с теориями, основывающимися на математике на „произвольных соглашениях“. Ни в какой мере не отрицая законности и важности аксиоматического метода, Лебег прямо заявляет, что он не принимает „свободы определений“, что, по его мнению бывают хорошие и плохие определения. Хорошими, по Лебегу, являются те определения, которые правильно отражают большой запас опыта, относящегося к действительному, материальному миру. Лебег настаивает при этом, что нельзя продуктивно заниматься математикой, забыв о ее происхождении: анализ первичных данных опыта вновь и вновь оказывается необходимым для продуктивного направления дальнейших исследований. Особенно интересно у Лебега стремление действительно перестроить формальное изложение математики так, чтобы оно соответствовало естественному развитию реального, прикладного смысла понятий. Эта тенденция несомненно вполне соединима с полной строгостью формального изложения, не принимающего других допущений, кроме явно сформулированных аксиом. Последнее обстоятельство недостаточно оттенено в книге Лебега: обобщение данных опыта у него нигде не доводится до построения действительно исчерпывающей аксиоматики.

Но за всеми этими несомненно материалистическими высказываниями у Лебега стоит скептицизм субъективного идеалиста, каким он все же является. Забывая, что продуктивная практика может быть основана лишь на действительном познании внешнего мира, он заявляет, что для него математика есть только прикладная наука, что она не имеет никакого собственного предмета изучения, а лишь суммирует приемы, при помощи которых мы систематизируем наши наблюдения.

Даже в целых числах Лебег отказывается видеть что-либо большее, чем просто слова (символы). Слова пять, fünf, fünf, cinq не предполагают, по Лебегу, за собой никакого общего *предмета*, к которому они относятся. Число, отличное от обозначающего его слова, кажется Лебегу

гланственной мистической сущностью, интересной лишь для „метафизики“, в которой математик совершенно не нуждается. Правильно начиная с того, что понятие числа возникает из операции счета и что числа отражают действительные свойства пересчитываемых групп предметов, Лебег уже совершенно неправильно продолжает: „для того чтобы считать, употребляют некоторое собрание слов или фразу (один, два, три, четыре, пять, ...); слова этой фразы и называются числами“.

Точно так же действительные числа, в форме бесконечных десятичных дробей, возникают, по Лебегу, из операции измерения и являются не чем иным, как символами, которыми мы обозначаем результат измерения. Но здесь уже сам Лебег замечает непоследовательность своей точки зрения. Оказывается, несмотря на все усилия, „метафизику“ не удалось изгнать: „геометрическое измерение начинается физически, но заканчивается лишь матафизически“ (§ 55).

Так, неизбежно, чистый эмпиризм впадает в матафизику худшего сорта: чистота его принципов все равно безнадежно утеряна, а вместо убедительной и увлекательной идеи действительного числа получен лишь жалкий суррогат в виде бесконечной строчки, состоящей из лишенных смысла значков!

Впрочем, на общем фоне основной тенденции книги — воспринимать математику как действительное познание внешнего мира — все это воспринимается как нарочитый маскарад. Зачем было бы возиться с выяснением действительного происхождения математических понятий, если в результате будут получены не настоящие общие понятия, однозначно отвечающие своему назначению, а символические конструкции совершенно случайного характера?

4. Основной положительной педагогической идеей Лебега (не говоря уже о единстве теории и практики) является возможность полного единства преподавания математики на разных ступенях обучения: одни и те же понятия, и в основном в одной и той же форме, сначала воспринимаются наглядно на примерах, потом формулируются более отчетливо и, наконец, подвергаются тонкому логическому анализу.

В применении к действительным числам для такого единого изложения наиболее подходит точка зрения бесконечных десятичных дробей. В начальной школе учащиеся знакомятся с операцией измерения, получают из нее конечные десятичные дроби и изучают арифметические действия над десятичными дробями. На примере периодических дробей, возникающих при делении, уже забрасывается первая идея о том, что число может выражаться также и бесконечной дробью. В средней школе подробнее разбирается вопрос о точности измерений, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками прямой и бесконечными десятичными дробями, формулируется общее понятие действительного числа, доказываются существование иррациональных чисел. В последнем классе средней школы, или в высшей школе

проводится строгое логическое изложение, следующее тем же самым общим линиям¹⁾.

Номинализм Лебега, т. е. нежелание видеть в абстрактных математических понятиях ничего кроме *слов*, вместе с утрированным практицизмом приводит его, как уже указывалось, к рискованному предположению изгнать из школы простые дроби: если десятичные дроби являются не способом записи чисел, а самими числами, то, конечно, введение простых дробей лишь осложняет дело.

По аналогичным соображениям Лебег совершает и другую важную методологическую ошибку. Ему хорошо известно, что соотношения между длинами, площадями и объемами, которыми интересуются в геометрии, не зависят от выбора единиц измерения. Тем не менее он настаивает на том, что геометрические величины суть не что иное, как *числа*, отнесенные к геометрическим фигурам (глава VI). Лебег не только *не хочет*, из соображений „экономии мышления“, рассмотреть геометрические величины сами по себе, до измерения определенной единицей меры, но и *не может* этого сделать. В самом деле, выделяя (абстрагируя) *общее*, имеющееся у всех равновеликих между собой плоских фигур, мы получаем понятие *площади* в чистом виде. Но для того чтобы обозначить различные площади определенными символами, надо выбрать единицу меры. А без отнесения каждому предмету определенного символа сами предметы для Лебега не существуют (так как они и являются для Лебега лишь самыми этими символами).

Получается курьезное положение с самим заглавием книги: книга посвящена измерению величин, действительные числа появляются в результате измерения величин; в конце же концов оказывается, что сами величины суть не что иное, как отнесенные к известным объектам действительные числа. Концепция главы VI формально корректна: можно ввести сначала действительные числа, как последовательность десятичных знаков, не упоминая ничего об измерении величин, а после этого определить величины, как это сделано в главе VI. Но это коренным образом противоречит задаче, которую поставил себе автор.

Мне представляется единственно удачным выходом сопоставить те общие свойства длин, площадей и объемов, которые позволяют выра-

1) Для понимания многих мест книги Лебега интересно знать следующее. Французская средняя школа имеет шесть классов. В шестом (младшем), пятом и четвертом классах заканчивается арифметика (изучаемая в начальной школе); начиная с четвертого класса и до первого (старшего), изучается алгебра; параллельно проходятся геометрия и тригонометрия. Желая поступить в высшие технические школы и на физико-математические факультеты после первого класса проходят еще „класс математики“, программы которого содержат ряд вопросов нашего университетского курса. Окончание класса математики соответствует степени бакалавра (получается по специальному экзамену). По окончании университета сдаются экзамены на степень лиценциата (licence).

жать их при выбранной единице меры числами, и называть „системой величин“ всякую совокупность объектов, обладающую этими свойствами. Но это уже не что иное, как аксиоматический метод, который не должен казаться скомпрометированным своей связью с конвенционализмом (учением об условности математических определений). Действительно, когда Г и л ь б е р т в „Основаниях геометрии“ предлагает называть „пространством“ любую совокупность объектов и отношений удовлетворяющую его аксиомам, то вместе с Лебегом следует протестовать, если из определения Гильберта делают заключение о произвольности выбора объекта изучения в математике. Однако то же самое определение Гильберта можно воспринимать совсем противоположным образом. Можно утверждать, что система аксиом, лежащих в основе геометрии, является замечательным, концентрированным выражением результата наших усилий, направленных к познанию действительности. Успех, заключающийся в ее создании, тем более замечателен, что она не только отражает с очень большой точностью свойства окружающего нас пространства при обычной интерпретации ее основных понятий (точек, прямых, плоскостей и т. д.), но также хорошо приспособлена и для выражения совсем других закономерностей внешнего мира, при других ее интерпретациях. Таким образом, абстрактная (аксиоматизированная) геометрия *больше* связана с действительностью, чем геометрия в ее традиционной форме. Аксиоматический метод может и должен являться методом выделения и закрепления для дальнейшего отчетливого изучения тех общих форм (количественных и пространственных) действительного мира, изучение которых составляет предмет математики с точки зрения диалектического материализма. Тогда естественно будет преодолен разрыв между аксиоматизированной абстрактной математикой и живым чувством действительности, на котором так настаивает Лебег.

5. Русский перевод снабжен некоторым количеством чертежей (в подлиннике чертежи совершенно отсутствуют). В остальном к тексту Лебега присоединено лишь несколько кратких примечаний.

А. Колмогоров.

ВВЕДЕНИЕ.

Я приношу свою благодарность профессору Феру (Fehr), согласившемуся поместить в своем журнале¹⁾ статьи, более элементарные, чем обычно в нем печатают, и не имеющие другого права на гостеприимство кроме того, что имеют отношение к математическому преподаванию. Я особенно обязан ему потому, что эти статьи слишком велики сравнительно с их научным содержанием; ведь в них излагаются не столько факты, сколько мнения, требующие, во избежание недоразумений, аргументации в свою пользу. Вот каким образом мне пришла в голову мысль написать эти статьи.

С 1910 года я занимаюсь в обеих Ecoles normales supérieures как мужской, так и женской, подготовкой будущих преподавателей средней школы. Один из моментов этой подготовки состоит в изучении программ средней школы; я имел, таким образом, повод задуматься над этими программами и увидеть места, вызывающие обычно затруднения у молодых учителей. Я был поражен, как часто повторяются одни и те же особенности и недостатки. Знакомство с учебниками и с докладами испытательных комиссий, с одной стороны, дало мне возможность быть в курсе всех тенденций современного преподавания, а с другой,—я мог судить о результатах преподавания за последние тридцать лет по принимаемым мной экзаменам на степень бакалавра или при поступлении в высшие школы. Вот почему нет ничего удивительного в том, что мне пришла в голову мысль написать статьи педагогического характера, которым я с опаской даю такое название, обычно достаточное, чтобы отогнать от себя математиков.

На страницах „Математического преподавания“ я

¹⁾ Примеч. пер. Настоящая книга является собранием статей, помещенных в журнале „L'Enseignement mathématique“ („Математическое преподавание“) за 1931—1935 годы (т. 31—34).

займусь рассмотрением *измерения величин*. Нет темы более важной: измерение величин является исходным пунктом всех приложений математики. Так как прикладная математика предшествовала, очевидно, чистой, или логике математики, то обычно думают, что начало измерения площадей и объемов лежит у самых истоков геометрии; с другой стороны, измерение доставляет число, т. е. предмет изучения анализа. Таким образом, об измерении величин говорят как в начальной и средней, так и в высшей школах. Мне кажется, что сопоставление того, что делается на этих трех ступенях обучения, явится хорошим образцом, который лучше послужит делу формирования будущих учителей, чем то, что от них сейчас требуется: словесное щегольство отдельными уроками.

В своих статьях я буду стараться давать по возможности более простое и конкретное изложение, без ущерба для логической строгости. Эта тенденция может показаться несколько архаичной в эпоху, когда абстракция укоренилась даже в прикладных науках. Однако не нужно забывать, что те, которым мы обязаны отвлеченной научной мыслью, могли, пребывая в абстракции, заниматься тем не менее полезными вещами именно потому, что они имели особенно заостренным чувство действительности. Это чувство как раз и нужно стараться пробудить у молодежи. Только тогда, когда научаются в абстрактном видеть конкретное, а в общей теории — по настоящему полезные частные случаи, переход к абстракции может принести нужные плоды.

В первых двух статьях, играющих роль предварительных, я займусь целыми числами; потом числами обобщенными, необходимыми для измерения величин. Переходя затем собственно к теме, я займусь площадями, объемами и величинами вообще.

I.

СРАВНЕНИЕ СОВОКУПНОСТЕЙ; ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

1. Если маленькому ребенку предложить взять себе и двум сестрам по конфете, то сначала он позаботится о себе, затем отнесет конфету одной из своих сестер, затем вернется взять еще одну конфету, чтобы отнести и ее. В более старшем возрасте он будет избегать хождения взад и вперед; он возьмет сразу три конфеты, говоря: для меня, для Луизы и для Ренэ.

Естественно предположить (и наблюдения над некоторыми первобытными племенами как будто подтверждают вводимую гипотезу), что аналогичным путем, сравнивая две коллекции предметов, люди научились *считать*, т. е. сравнивать две совокупности с одной и той же, типовой совокупностью, совокупностью слов некоторой фразы. Эти слова были названы *числами*. При счете или перечислении мы мысленно связываем каждый новый объект рассматриваемой совокупности с каждым из следующих друг за другом слов нашей числовой фразы (или последовательности); последнее произнесенное число указывает на число предметов в совокупности.

Это число рассматривается как итог экспериментальной операции перечисления, так как оно является полным отчетом о ней. Одного экспериментального результата достаточно для избежания других экспериментов: правила четырех действий избавляют нас от необходимости совершать операцию перечисления для таких совокупностей, которые мы можем образовать, исходя из исчисленных уже совокупностей. При изложении этих правил констатируется ряд фактов, которые обычно называют теоремами; однако то, что выдается за доказательство этих теорем, является в действительности лишь их экспериментальной проверкой (например теорема: произведение не зависит от порядка сомножителей). Все эти факты сводятся к одному основному: число, отнесенное к совокупности, не зависит от порядка,

в котором расположены во время счета предметы совокупности.

2. Быть может, не бесполезно будет подчеркнуть, чем приведенное мной изложение отличается от изложений, обычно встречаемых в курсах арифметики¹⁾. Возьмем курс Ж. Таннери (J. Tannery). Конечно, я нахожу в нем описание операции счета и доказательства, сводящиеся к описанию экспериментов; несмотря на это, экспериментальное число является здесь не чем иным, как использованием, как приложением метафизической сущности, которую в некотором роде определяет следующая фраза рассматриваемой книги: „идея целого числа вытекает с помощью абстракции из идеи совокупности различных предметов; она независима от природы предметов... “Часто говорят: „независима от природы и от порядка этих предметов“.

Таким образом, число представляют как весьма таинственное существо, но чаще всего тут же спешат прибавить, что нет ничего яснее и проще. „Уж много спорили и еще долго будут спорить,— пишет П. Бутру (P. Bourguin) в § 2 „Principes de l'Analyse mathématique“²⁾,— о происхождении и логическом значении понятия числа. Хорошо еще, что это понятие принадлежит к числу тех, которые не нуждаются в определениях и комментариях. Начиная с той отдаленной эпохи, когда человечество научилось считать, число стало одним из тех основных данных, над которым работает наша мысль, столь очевидным и привычным для нашего ума, что, желая его проанализировать, мы лишь затемняем его. Вот почему арифметика могла быть воздвигнута на словесных и неполных определениях, не переставая от этого быть во все времена наукой, совершенной *par excellence*“.

Тому факту, что арифметика вообще могла быть создана, проще дать, по моему мнению, объяснение, нежели говорить вместе с П. Бутру, что он вообще необъясним; это потому, что мы обладаем полным определением числа: описанием доставляющей его операции. Но людям понадобилось присовокупить к этому опытному опреде-

1) Я оставляю в стороне то обстоятельство, что обычно, в принятых изложениях, число с самого же начала выступает со своей количественной стороны, в то время как я исхожу из числа порядкового. У меня число становится количественным лишь тогда, когда высказывается утверждение, что полученный результат не зависит от порядка, в котором был произведен счет предметов.

2) Примеч. пер. в „Принципы математического анализа“.

лению мистику и метафизику. Преподавание не занимается больше мистикой; оно равнодушно к ней, представляя каждому свободу судить, например, приносит ли число 13 счастье или несчастье. Однако, то ли из уважения к традиции, то ли из боязни казаться примитивным, преподавание считается с метафизикой, в то же время не пользуясь ей. Вот почему тот факт, что понятия метафизики темны, мало влияет на успехи арифметики. Установив это, я низко кланяюсь метафизике, но так как она требует досуга, а мы загружены работой, я остаюсь равнодушным к ней и с полным правом отношу арифметику к опытным наукам.

3. Но что станется в таком случае с „математической достоверностью“, столь привлекавшей к себе внимание философов всех времен, если осталась лишь „прикладная математика“. Ее авторитет падает, и она становится лишь наименее сомнительной из всех наших достоверностей. Арифметика, которую люди в их стремлении к абсолюту сделали „наукой, совершенной *par excellence*“, становится лишь наименее несовершенной из наших наук. Она по-человечески совершенна, так как на практике не обманывает нас никогда. Не отсюда ли происходит ее превосходство?

Но прежде всего как происходит то, что мы так часто ошибаемся, если уверены, что применяем опытные результаты? Это потому, что границы такого результата не всегда хорошо известны. Когда мы говорим: натертая стеклянная палочка притягивает к себе маленькие кусочки бумаги, то мы предполагаем выполненным ряд подразумеваемых и мало известных условий: предполагается уже известным, что такое стекло, бумага, что имеют в виду под словом „тереть“; предполагаются данными время, расстояния, массы, атмосферные условия и т. д.

Что же касается арифметики, то она пользуется лишь небольшим числом опытов, каждый из которых был огромное число раз повторен человеком с тех пор, как люди существуют. Таким образом, мы знаем совершенно точно, в каких случаях арифметика применима, в каких нет. В последнем случае мы и не пытаемся делать это. Мы так привыкли применять арифметику лишь тогда, когда она применима, что забываем о существовании таких случаев, когда она неприменима.

Мы утверждаем, например, что два и два будет четыре. Я наливаю две жидкости в один стакан и две жидкости —

в другой; затем сливаю все в один сосуд. Будет ли он содержать четыре жидкости? „Это недобросовестно, ответьте вы: это не арифметический вопрос“. Я сажаю в клетку пару животных, затем еще пару; сколько животных будет в клетке? „Ваша недобросовестность, скажете вы, еще более вопиющая, так как ответ зависит от породы животных: может случиться, что один зверь пожрет другого; нужно также знать, должно ли производить учет немедленно или через год, в течение которого животные могут издохнуть или дать приплод. В сущности, вы говорите о совокупностях, про которые неизвестно, неизменны ли они, сохраняет ли каждый предмет совокупности свою индивидуальность и нет ли предметов, исчезающих и вновь появляющихся“.

Но что означает сказанное вами, если не то, что возможность применения арифметики требует выполнения известных условий. Что же касается правила распознавания, приложима ли она, которое вы мне дали, то оно, конечно, практически превосходно, но не имеет никакой теоретической ценности. Ваше правило сводится к утверждению, что арифметика применима тогда, когда она применима. Вот почему нельзя доказать, что два и два будет четыре, что тем не менее является непреложной истиной, так как ее применение никогда нас не обманывало.

В чисто логических изложениях, где арифметика занимается лишенными содержания символами, то, что два и два будет четыре, покоится на аксиоме. Я не буду касаться здесь подобного рода изложений, однако замечу, что хотя их математическое значение и велико, хотя они нас многому и научают, они мне кажутся обреченными на полную неудачу, если бы мы смотрели на них как на средство выяснить понятие числа, не обращаясь к опыту. Действительно, в этих логических играх мы должны иметь дело с совокупностью символов (будут ли они реализованными или только мыслимыми, это неважно), и вот тогда-то и выступают все наши познания, приобретенные опытом, касающиеся совокупностей, т. е. чисел.

4. Философия так сильно затрудняла преподавание математики, что, во избежание недоразумений, я счел нужным дать эти объяснения, несмотря на то, что они отвлекли меня от моей собственно педагогической темы. Возвращаясь к ней, замечу, что обычное предостережение о недопустимости смешения числа с символом, его изображающим, для нас не имеет никакого смысла. По ознаком-

лении с тем, что значит считать, будет уместным перейти к понятию последовательности чисел, т. е. к изложению десятичного исчисления¹⁾). Не важно, что существуют другие способы называть числа; это должно смущать нас не больше, чем тот факт, что слова различны по-французски и по-английски. Мы выходим из положения путем перевода одного языка на другой, хотя полного соответствия между ними нет. Напротив того, соответствие двух систем исчисления может быть установлено вполне точно. Вот почему мы можем пользоваться любой из них. Возможно, что если бы люди имели одиннадцать пальцев, была бы принята одиннадцатиричная система. Но *мы находимся в исключительно счастливом положении: мы располагаем универсальным языком, письменной десятичной нумерацией. Используем же это обстоятельство.*

Общее мое требование состоит в том, чтобы как в старших классах средней школы, так и в начальной школе пользовались одними и теми же приемами, от которых в настоящее время считают долгом отречься и которые стараются презирать. Наряду с другими преимуществами это показало бы ученикам, что единственной целью изучения арифметики в конце курса средней школы является полное разъяснение, вплоть до четких формулировок и сознательного понимания, того, что до сих пор воспринималось без достаточного сознания и анализа. В настоящее же время лишь наиболее одаренные ученики, являющиеся исключением, не нуждающиеся ни в поддержке, ни в руководстве, о которых преподавателю нечего и беспокоиться, хорошо понимают это обстоятельство. Для остальных эта ревизия арифметики — явление новое, совершенно новое, с которым знакомятся для экзаменов и которое часто имеет лишь смутную связь с настоящими вычислениями.

5. Что можно возразить против предложенного здесь способа изложения? Ему воспротивится прежде всего наша привычка метафизически мыслить: „не правда ли, это — богохульство называть символом число, которое когда-то было главной сущностью вещей?“ — вот опасение, выражаемое в той или иной форме. Например, скажут: конечно, совершенно безразлично, употребить ли англий-

¹⁾ Это можно сделать, не прибегая к теоремам о числах. Заметим к тому же, что все народы и племена, имеющие представление о числе, употребляют десятичное исчисление в той или иной, иногда зачаточной форме.

ское слово *chair* или французское *chaise*, так как оба они обозначают один и тот же предмет; однако, что является аналогом предмета „стул“ в употреблении символов 101 в двоичной системе исчисления и 5 в десятичной? Так как нет стула, спрятанного под пятеркой, то, конечно, можно выкрутиться, сделав словесный пируэт, и говорить о метафизической сущности пятерки, долженствующей заменить физическую природу стула. Однако это будет не чем иным, как отказом от ответа.

Чтобы ответить, нужно заметить, что только для имен существительных с вполне конкретным содержанием делается дословный перевод с одного языка на другой; во всех же остальных случаях нужно переводить по смыслу. Поэтому не слово „число“ нам придется объяснить, а фразы, где это слово фигурирует; например „две совокупности обладают одним и тем же числом“ или „две совокупности не обладают одним и тем же числом.“ А это и есть как раз то, что мы излагали в начале главы при описании процесса исчисления совокупности, уничтожая, таким образом, повод к каким бы то ни было метафизическим страхам. В то же время описание процесса счета показало, что выбор последовательности чисел (слов или символов) имело теоретически второстепенное значение; это есть не что иное, как выбор языка из всех тех, которые существуют или которые можно себе представить. Но не остановившись на каком-либо определенном языке, нельзя выражать своих мыслей.

В средней школе, где одной из целей, если не самой главной, является оправдание правил счета, я предлагаю выбрать с самого начала десятичную систему исчисления. На более высоких ступенях обучения, где собственно вычисления отходят на второй план, подобный выбор не сможет быть оправдан, так как здесь арифметика имеет, главным образом, в виду обобщение различных операций, но не десятичной нумерации, которая как таковая никогда не могла служить примером подражания. Здесь нужно довольствоваться случайными нумерациями, какими, например, пользуются, когда говорят: пусть a , b , c — три данных числа, d — произведение a на частное от деления b на c и т. д. Если же я в средней школе пользуюсь постоянно десятичной системой исчисления, то делаю это из педагогических соображений: ради экономии времени и ввиду того, что число, записанное в этой системе, является конкретным объектом, о котором молодым умам

легче рассуждать. Однако я далек от мысли преувеличивать значение этой нумерации¹⁾). Я не буду чувствовать себя вероотступником, если, обращаясь к ученикам, окончившим среднюю школу, буду придерживаться более абстрактного изложения: числа суть символы, для которых установлены две операции — сложение и умножение²⁾).

6. Прошу меня извинить за слишком долгую задержку на целых числах, но я пользуюсь случаем, чтобы подробно изложить мое отношение к метафизике, которую я всячески стараюсь изгнать из преподавания (в той мере, в какой это позволяет нам язык и наши привычки мышления, предоставляя тем не менее каждому свободу присовокупить метафизику и мистику к полученному образованию), и объяснить, почему я постоянно употребляю десятичную нумерацию.

Это постоянное употребление кажется мне настолько естественным, настолько педагогичным, что скорее, может быть, следует поставить вопрос, почему обычно слишком мало используется десятичная нумерация. Прежде всего это происходит потому, что греки, наши учителя, ею не пользовались. Грекам мешала, с одной стороны, метафизика, а с другой (и особенно), тот факт, что у них имелась лишь несовершенная, несколько похожая на нашу десятичную, но очень ограниченная система нумерации. настолько ограниченная, что Архимед вынужден был значительно расширить ее в тех вычислениях, которые он производил в своем замечательном „Псаммите“ („Исчисление песчинок“). Из этого сочинения видно, что отсутствие представления о неограниченной нумерации чрезвычайно препятствовало уяснению полного объема понятия числа.

Десятичное исчисление не есть греческое наследие. Вот почему все, относящееся к этому исчислению, механически соединено, а не органически слито с греческой математикой. *Наше преподавание недостаточно учитывает исторический факт, быть может, один из важнейших фактов истории науки: изобретение десятичной нумерации.*

1) Можно обратиться, например, к § IV заключительного прибавления второго издания моей книги „Leçons sur l'intégration“.

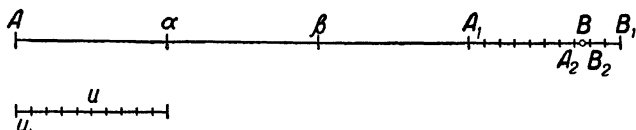
2) Замечу по поводу этого определения, что если это „богохульство“ — низвести число из категории сущности до категории символа, то этим „богохульством“ занимаются все математики. Таким образом, не следует ставить его в вину исключительно моему изложению.

II.

ДЛИНЫ; ЧИСЛА.

7. Я начну опять с краткого резюме дальнейшего изложения. Я выбираю его в соответствии с традиционной манерой преподносить геометрию, в которой движение используется для исследования пространства. Эта манера, наверно, менее всего отступает от попыток, направленных нашими предками на овладение экспериментальными истинами, положенными в основу геометрии.

В этом изложении, указав сначала, чем была вызвана необходимость сравнивать между собой разные расстояния и определять слова „расстояния равные или неравные“, я опишу приемы сравнения. Пусть требуется сравнить AB с отрезком U , принятым за единицу (черт. 1). Станем откладывать U на полупрямой AB , начиная с A ; мы получим отрезки $A\alpha$, $\alpha\beta$ и т. д. Пусть A_1 — последняя перед переходом за B точка, полученная таким путем. Если A_1 совпадает с B и мы пришли в A_1 в результате троекратного прикладывания U , то мы скажем, что длина AB , выраженная в единицах U , равна 3. Если же A_1 не совпадает с B , то мы скажем, что длина AB больше 3 и меньше 4. Мы этим выражаем, что B всегда является одной из точек отрезка A_1B_1 , с началом в A_1 и равного U , но не совпадает с B_1 .



Черт. 1

Разделим U на десять равных частей¹⁾, т. е. возьмем отрезок U_1 , относительно которого мера U равна 10, и

¹⁾ Относительно существования U_1 см. замечание § 34.

повторим все операции; мы придем к отрезку A_2B_2 , содержащемуся в A_1B_1 , причем длина AA_2 , выраженная в единицах U_1 , будет заключаться между 30 и 39. Пусть она равна, например, 37; мы скажем, что длина AB , выраженная в единицах U_1 , по крайней мере, равна 37-и меньше 38.

Точно так же, переходя от отрезка U_1 к отрезку U_2 , получаем, например: 376 и 377, затем 3760 и 3761, затем 37 602 и 37 603 и т. д.

Мы становимся перед необходимостью придумать символ, который может быть назван числом и который, являясь отчетом о бесконечной последовательности операций, может быть назван ее результатом. В этом мы легко преуспеваем, замечая, что на каждой ступени измерения получаются два целых числа: 37 и 38, 37 602 и 37 603, которые отличаются друг от друга как раз на единицу. Следовательно, достаточно знать последовательность нижних целых чисел, полученных на каждой ступени.

Последовательность 3, 37, 376, 3760, 37 602... такова, что каждое число получается приписыванием цифры с правой стороны предшествующего числа. В таком случае знание одного какого-нибудь числа последовательности дает нам все числа, ему предшествующие, если, конечно, известно, на какой ступени получено данное число, так как иначе знание числа 37 поставит нас перед следующей альтернативой:

- 1) 37 получено на 1-й ступени;
- 2) 37 получено на 2-й ступени, а 3 на 1-й;
- 3) 37 получено на 3-й ступени, 3 на 2-й, 0 на 1-й;
- 4) 37 получено на 4-й ступени, 3 на 3-й, 0 на 2-й, 0 на 1-й и т. д.

Таким образом, мы придем к обычному обозначению чисел. В этом обозначении нули, расположенные с левой стороны полученного на 1-й ступени целого числа (могущего быть также нулем), не имеют никакого значения; по аналогии, если случается, что все цифры, расположенные справа от некоторой цифры, суть нули, естественно условиться их опускать, сохраняя тем не менее те из нулей, которые окажутся до запятой. В этом случае говорят, что имеют точное десятичное число.

8. Заметим на будущее, что от понятия целого числа мы сразу перешли к самому общему понятию числа, не имея надобности в использовании, или, если хотите, в выделении понятия точного десятичного, а также ра-

ционального числа. Мы вводим термин точного десятичного числа, чтобы лучше отметить, что этого числа мы до сих пор еще не употребляли. Точно так же мы перейдем сразу от операций над целыми числами к операциям над обобщенными числами; но сначала выясним, *может ли быть названа числом всякая бесконечная последовательность цифр, продолженная вправо и содержащая запятую*, т. е. может ли такая последовательность произойти от сравнения надлежащего отрезка AB с единицей U . Если, зная эту последовательность, мы попытаемся построить AB на полупрямой AX , исходя из точки A , то получим последовательно отрезки A_1B_1, A_2B_2, \dots , вложенные один в другой. Из геометрических аксиом, высказанных или подразумеваемых, следует, что имеется общая всем этим отрезкам точка B (аксиома непрерывности) и притом единственная (аксиома Архимеда). Мы получаем, таким образом, вполне определенный отрезок AB , но длина AB лишь в том случае выразится последовательностью цифр, из которой мы исходим, если B не совпадает ни с одной из точек B_i . Очевидно, что это совпадение будет иметь место тогда и только тогда, когда все цифры последовательности, начиная с некоторой, будут девятками¹⁾. Подобные последовательности мы исключаем из рассмотрения; все же остальные суть числа.

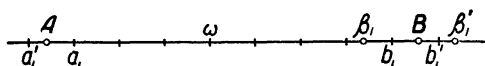
Предшествующее рассуждение приводит к более общему результату: отрезок AB , лежащий на данной прямой AX с данным началом A , вполне определен, если известно, что его конечная точка B принадлежит бесконечной последовательности отрезков $\alpha_i \beta_i$, расположенных на AX и вложенных один в другой так, что, каково бы ни было n , длина некоторого заранее фиксированного отрезка U становится больше n , если за единицу взять отрезок $\alpha_i \beta_i$ с достаточно большим индексом.

Когда эти условия выполнены, говорят, что длина $A\alpha_i$ (или $A\beta_i$) есть приближенное значение по недостатку (или по избытку) длины AB и что обе последовательности значений как угодно близко подходят друг к другу. Таким образом, число определено, если для него известны две такие последовательности приближенных значений.

1) Примеч. пер. е в. Например, последовательность 57,9999... будет по нашему построению соответствовать отрезку AB длиной в 58 единиц: Так как в качестве меры этого отрезка уже имеется число, изображаемое последовательностью 58,0000..., то, очевидно, излишне было бы вводить еще особое число 57,9999...

К тому же легко видеть, что p -й десятичный знак этого числа является p -м десятичным знаком тех его приближенных по избытку значений, индекс которых достаточно велик.

Это обстоятельство позволит нам обобщить процесс измерения. Заметим сначала, что если мы применим описанный прием сравнения AB с U , откладывая отрезки, начиная не с A , а с B , то получим прежний результат, так как существует перемещение, переводящее \overline{AB} в \overline{BA} . Вообще отрезки U и U_i можно откладывать, начиная с любой точки ω прямой AB (черт. 2).



Черт. 2

Отложим неограниченное число раз отрезков U , затем U_1 , затем U_2 и т.д. в обоих направлениях от точки ω ; мы получим полную шкалу T , которая может служить для измерения AB . Предположим для этого, что $a_i b_i$ — самый большой отрезок, составленный из отрезков U_i шкалы T , содержащийся в AB , и что $a_i' b_i'$ — отрезок, содержащий одним U_i больше с каждого конца.

Параллельное перенесение, которое переводит a_i в A , переводит b_i в β_i , расположенное на Ab_i и, следовательно, на AB ; параллельное перенесение, переводящее a_i' в A , переводит b_i' в β_i' , расположенное за b_i' и, следовательно, за B . Таким образом, получаемые длины $a_i b_i$ и $a_i' b_i'$ являются двумя приближенными, соответственно по недостатку и по избытку, значениями AB .

Но больше того, $\beta_i \beta_i'$ образован из $2U_i$; если взять $\beta_i \beta_i'$ за единицу, то длина U_{i-1} будет 5, а длина U $5 \cdot 10^{i-1}$. Таким образом, находимые нами приближенные значения дают неограниченную степень точности.

Действия. Здесь, как и в случае целых чисел, действия над обобщенными числами освобождают нас от необходимости производить некоторые эксперименты, так как эти действия дают возможность вывести искомые результаты этих экспериментов из предшествующих экспериментов.

9. Сложение. Мы знаем, что называется отрезком — суммой двух отрезков; можно задаться целью, зная длины двух отрезков, найти длину их суммы.

Пусть AB — сумма отрезков $A\omega$ и ωB (черт. 2); пусть (AB) , (ωA) , (ωB) — их три длины. Чтобы оценить (AB) , производим вышеописанные операции, начиная с точки ω . Отрезок $a_i\omega$ содержит U_i целое число раз; число $(\omega A)_i$ получается из (ωA) отбрасыванием в последнем как запятой, так и десятичных знаков, начиная с i -го; то же справедливо и для ωb_i . Следовательно, $a_i b_i$ содержит U_i

$$d = (\omega A)_i + (\omega B)_i$$

раз, а $a_i' b_i'$ содержит его

$$e_i = (\omega A)_i + (\omega B)_i + 2$$

раза. Значит, отнесенные к единице U длины $a_i b_i$ и $a_i' b_i'$ суть числа, получаемые отделением запятыми i цифр справа у d_i и e_i . Отсюда правило, дающее (AB) , т.е. правило сложения двух чисел и, в частности, двух десятичных чисел.

Из свойств сложения отметим лишь следующее, выражаемое отношением

$$x + y = y + x.$$

Это равенство легко выводится либо из геометрического определения счета, либо из правила счета.

10. Умножение¹⁾. Пусть дана длина отрезка AB , выраженная в единицах U , например $37,425\dots$, и пусть длина U в единицах V равна $4,632\dots$. Какова длина AB в единицах V ?

Заметим, что $4,632$ есть также длина отрезка U_1 , содержащегося 10^1 раз в U , относительно единицы V_1 , содержащейся 10^1 раз в V . AB же содержит 3742 раза отрезок U_2 и сам содержится в отрезке, образованном из 3743 U_2 . U_2 в свою очередь содержит 463 отрезка V_4 и сам содержится в отрезке, состоящем из 464 таких отрезков. Значит, AB содержит отрезок AB_2 , образованный из $3742 \cdot 463$ V_4 , и сам содержится в отрезке AB'_2 , образованном из $3743 \cdot 464$ V_4 . Зная же длины AB_2 и AB'_2 , выраженные в единице V_4 , мы выведем длины, выраженные в единице V , если отделим запятой четыре цифры

¹⁾ Мы предполагаем, что умножение целых чисел уже было определено путем, аналогичным тому, которому будет следовать наше настоящее изложение. Всякий вопрос, который приводит к умножению, является проблемой перемены единиц или объекта: 5 мешков по 300 яблочек; 2,75 м материи по 28,45 франков за 1 м.

справа. Итак, мы нашли приближенные по недостатку и по избытку значения длины AB в единице V .

Нам остается только показать, что наш метод дает бесконечно близкие значения. Но отрезок $B_2B'_2$ в силу предположений, сделанных относительно умножения целых чисел, содержит $3742 + 463 + 1$ отрезков V_4 , т. е. его длина в единицах V_2 будет:

$$37,42 + 4,63 + 0,01 < 37,425 \dots + 4,632 \dots + 0,01.$$

Значит она меньше, чем

$$N = (37 + 1) + (4 + 1) + 1.$$

Используя подобным же образом первые три десятичных знака обоих данных чисел, мы пришли бы к интервалу $B_3B'_3$, длина которого, выраженная в единицах V_3 , меньше того же самого числа N , и т. д.

Каково бы ни было это число N , всегда можно найти целую степень десяти, например 10^h , которая будет больше N ; у нас $h = 2$. Так как $B_iB'_i$ содержит меньше, чем N , отрезков V_i , то он их содержит подавно меньше, чем 10^h ; другими словами, V для $i > h$ содержит больше, чем 10^{i-h} отрезков, равных $B_iB'_i$, и найденные приближенные значения для длины AB , выраженные в единицах V , являются, значит, неограниченно приближенными.

Отсюда правило: *искомое число, называемое произведением двух данных чисел, имеет в качестве цифры k -го ранга цифру того же k -го ранга числа, получающегося, если при i достаточно большом упразднить в двух данных числах как запятую, так и цифры за пределами i -го десятичного знака, увеличить каждое из полученных таким путем целых чисел на единицу, перемножить эти увеличенные целые числа и затем в полученном произведении отделить запятой $2i$ цифр справа¹⁾.*

Свойства умножения в существенном сводятся к свойствам, выраженным равенствами:

$$\begin{aligned} xy &= yx, \\ (x + y)z &= xz + yz; \end{aligned}$$

1) Я должен напомнить, что настоящее изложение рассчитано на учителей; относительно предосторожностей, которые нужно соблюдать для учеников, см. § 17.

оба эти свойства немедленно выводятся из предшествующего правила. Второе свойство к тому же следует можно сказать безо всяких рассуждений, из геометрического определения умножения. Про первое свойство нельзя сказать того же.

Конечно, мы будем полагать

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

11. Вычитание; деление. Можно определить эти действия либо геометрически — это имеет то преиму-

щество, что сразу обнаруживается возможность вычитания $a - b$, если $b < a$, и деления $\frac{a}{b}$, если $b \neq 0$, а так-

же единственность решения, — либо алгебраически как обратные действия. Мы придем к правилам, дающим последовательные цифры результата; они совершенно аналогичны правилам, дающим цифры суммы или произведения, но теперь мы вместо двух значений, приближенных по избытку, пользуемся для a приближенным значением по избытку, а для b — по недостатку.

Что касается свойств вычитания и деления, то достаточно будет остановиться на свойстве, выраженном равенством $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, откуда следует, что

$$\frac{a}{\frac{c}{b}} = \frac{ab}{c} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{c}{a}}{b} = \frac{c}{ab}.$$

Обозначим через S_T длину отрезка S , выраженную в единицах T ; определим последовательно T , U и S , исходя из V и a , b , c , через

$$a = S_U, \quad b = U_V, \quad c = T_V;$$

тогда

$$S_T = S_U \cdot U_T = S_U \cdot \frac{U_V}{T_V} = a \cdot \frac{b}{c}$$

и

$$S_T = \frac{S_V}{T_V} = \frac{S_U \cdot U_V}{T_V} = \frac{ab}{c},$$

что и доказывает рассматриваемое равенство.

Таким путем мы оправдали все правила действий над *обобщенными* числами; правила, относящиеся к точным десятичным числам или дробям, являются частными случаями.

12. Прежде чем установить важность этого замечания, мне хочется подчеркнуть, что намеченное мной изложение нуждается в следующей важной оговорке: число имеет конкретное значение, лишь когда единичный отрезок U зафиксирован; в этом случае оно является результатом сравнения с U отрезка, который может быть восстановлен по величине, исходя из данного числа. Отсюда следует, что совершенно не было *a priori* очевидным, что если из двух чисел x и y x было большее при единице U , то оно будет также большим при всякой другой единице; что если числа

$$z_1, z_2, \dots, z'_1, z'_2, \dots$$

составляли две последовательности значений, неограниченно приближающихся к числу z при единице U , то то же будет при всякой другой единице; что если имеем отношение

$$u = s + t$$

при единице U , то оно сохранится и при всякой другой единице и т. д. Лишь потому, что сравнение цифр x и y позволяет установить, какое из них больше, лишь потому, что цифры числа z определены цифрами z_i и z'_i , а цифры чисел s и t определяют цифры u и т. д., все эти случаи независимы от выбора U , и можно говорить, например, *о произведении двух чисел*, а не только *о произведении двух чисел при единице U* .

Таким образом, можно рассматривать действия над числами без того, чтобы опираться на какое-либо определенное конкретное их истолкование.

Это весьма существенное обстоятельство, являющееся основой анализа, соответствует следующему геометрическому факту: если существует однородное соотношение между длинами нескольких отрезков, выраженных в единице U , то это отношение сохраняется при замене U любой другой единицей. Отсюда вытекает то, что можно назвать однородностью формул геометрии одного измерения. Я ограничиваюсь этим указанием, так как дело идет о вопросе, выходящем за пределы моей темы. Я возвра-

шаюсь к ней, анализируя далее предложенный способ изложения.

13. Читая эти строки, некоторые скажут: но ведь это то, что всегда делается. Я с этим тотчас же соглашаюсь, так как факты подтверждают, что так в самом деле всегда делается на практике. Что же касается теории, то в ней придерживаются совсем других точек зрения, и для нее предшествующее изложение является поистине революционным. Вот что практикуется, например, во французском преподавании, мало отличающемся в этом отношении от преподавания в других странах.

В начальной школе и в первых классах средней школы детей учат, что такое числа, не претендуя на ученые определения, заставляя овладевать навыками в обращении с числами, сначала целыми однозначными, затем двузначными, затем любыми целыми. Знакомясь далее с метрической системой, дети узнают об употреблении запятой и привыкают обращаться с десятичными числами. На этой стадии обучения числа по-настоящему являются только отчетом о практике счета или измерения, о которых я говорил выше; метафизику сюда пока не впутывают.

С другой стороны, учеников учат обращению с дробями; при изучении дробей или при делении, например, 1 на 3, или при извлечении квадратного корня дети встречаются с числами, которые могут быть написаны лишь с помощью бесконечной последовательности цифр. При этом остерегаются слишком привлекать к этому обстоятельству их внимание и говорить, что это ужасно и может привести в замешательство, — и дети и не испуганы, и не смущены.

Дело идет настолько гладко, что начинают считать, что ученики уже овладели понятием числа и что можно переходить к операциям над любыми числами. Тогда переходят в геометрии к квадрату гипотенузы и к вычислению диагонали $a\sqrt{2}$ квадрата; в алгебре же вводят правила, относящиеся к знакам¹⁾, предполагая известными действия над положительными числами.

В таком состоянии, когда пользуются несколько неточными и чисто экспериментального происхождения поня-

1) Замечу мимоходом, что если определить действия над положительными и отрицательными числами тем же способом, как мы это делали для положительных чисел, лишь заменяя ненаправленные отрезки векторами, то правила, касающиеся знаков, потеряют свой искусственный характер.

тиями, преподавание находится вплоть до первой части бакалаврства, до конца первого класса. Но уже в следующем классе, в классе математики, предназначенном для учеников, желающих продвинуться дальше в их научном образовании, начинается ревизия математических понятий и подведение под эти понятия более прочного основания. В своей критике и в своих замечаниях я буду касаться исключительно изложений, предлагаемых именно в этом случае.

14. В классе математики возвращаются к понятию целого числа, затем к понятию дроби, затем к точному десятичному числу, рассматриваемому как частный случай дроби. Определения действий, продиктованные опытом, перелаживаются на чисто логический язык. Логически все это прекрасно увязано, и я мог бы лишь повторить то замечание, которое, в сущности говоря, уже раньше было сделано: если речь идет об оправдании способов вычисления над числами целыми и десятичными, то это слишком большое отклонение, имеющее, кроме того, тот педагогический недостаток, что оно слишком отлично по форме от первоначально полученных знаний, чтобы ученики поняли, что дело касается просто окончательного разъяснения того, что они уже знают из начального обучения. Но главным предметом моей критики является то, что говорят, или, вернее, то, чего не говорят относительно иррациональных чисел.

Как в старших, так и в младших классах средней школы об иррациональных числах говорят только мимоходом. Обращаются к тому, что уже до того было ясно учащимся, и учат их формулировать это словесно, но не пытаются уточнить понятия числа, рационального или иррационального, которое осталось для них более чем смутным; правда, рациональными и иррациональными числами учащимся приходилось очень часто пользоваться в течение четырех лет, однако им никогда об этих числах ничего не говорилось. С числом встречаются всюду, но также всюду о нем избегают говорить начистоту. В арифметике, касаясь измерения величин, сравнивают длины, но ограничиваются лишь случаями соизмеримости. Все прочие случаи или опускают, или производят с ними фокусы с большей или меньшей ловкостью. Когда же дело касается приближенных значений, то начинается настоящее плутовство; так как упоминалось лишь о рациональных числах, то разрешается говорить о приближенных зна-

чениях лишь к этим последним, хотя эти приближения гораздо менее интересны, чем приближения к другим числам. Но эти другие числа как бы не существуют вовсе. Тогда дело решают просто: *начинают говорить о приближенных значениях, которые ни к чему не приближаются.*

Напомним, как это делается. Сначала совершают подмену, не особенно серьезную, но в данном случае очень полезную: смешивают между собой два смысла выражения „приближенное значение“. Обычно в математике *приближенное* с точностью до ε значение по недостатку означает величину, меньшую интересующего нас числа и отличающуюся от него самое большее на ε . Здесь же приближенное с точностью до $1/10$ по недостатку значение означает самое большое целое число десятых долей, содержащееся в точном числе. А так как в интересующем нас случае это точное число является всегда не чем иным, как корнем простого алгебраического уравнения $f(\xi) = 0$, то можно определить приближенное с точ-

ностью до $1/10$ значение $\frac{x}{10}$ по различию знака $f\left(\frac{x}{10}\right)$ и $f\left(\frac{x+1}{10}\right)$, не упоминая ничего о ξ . Говорят просто:

частное от деления A на B с точностью до $1/10$ по недостатку равно $\frac{x}{10}$, если x — самое большое из целых чисел, при котором разность $10A - Bx$ положительна или нуль;

корень квадратный из A с точностью до $1/10$ по недостатку равен $\frac{x}{10}$, если x — самое большое из целых чисел, при котором разность $10^2 \cdot A - x^2$ положительна или нуль.

Нужно особо обратить внимание на огромную разницу между двумя рассмотренными случаями: в первом из них — число ξ существует (я этим хочу сказать, что оно рационально, что о нем мы имеем право говорить); во втором — оно не существует. Таким образом, $\frac{x}{10}$ есть

в первом случае приближенная величина точного частного ξ от деления A на B , взятая по недостатку с точ-

ностью до $\frac{1}{10}$, приближенная в том смысле, в каком в математике вообще употребляется слово „приближенная величина“; во втором же случае $\frac{x}{10}$ не является при-

ближенной величиной \sqrt{A} , поскольку эта последняя не существует. Как же мы можем надеяться, что ученики не сделают в одном и другом случаях аналогичных грамматических преобразований, законных в одном случае и незаконных в другом?

В конце концов во втором случае не остается ничего другого как заявить, например, что $\frac{x}{10}$ потому явля-

ется приближенным значением квадратного корня из двух ($\sqrt{2}$), взятым с точностью до $\frac{1}{10}$ по недостатку, что мы получаем его на второй ступени измерения диагонали квадрата, построенного на единице длины. Таким образом, совершенно неизбежно, что ученики будут допускать грамматическое преобразование или, если хотите, смешение, которого надеялись избежать с помощью словесных предосторожностей: частное с точностью до $\frac{1}{10}$, квадратный корень с точностью до $\frac{1}{10}$, вместо „приближенные значения частного и корня“ с точностью до $\frac{1}{10}$.

Тут мы имеем дело с настоящим лицемерием, столь обычным в преподавании математики: учитель словесно принимает все нужные предосторожности, действительные, если они имеют смысл, который он им придает, но который *несомненно* не будет понят учениками. К несчастью, экзамены и конкурсы часто способствуют этому небольшому мошенничеству. Учителя должны натаскать своих учеников на хорошие ответы на незначительные разрозненные вопросы; они дают ученикам образцы таких ответов, которые часто являются настоящими шедеврами, неуязвимыми для критики. Чтобы в этом преуспеть, учителя изолируют вопрос от математики в целом, создавая для него специальный безукоризненный язык, не заботясь о связи с совокупностью других вопросов. Математика перестает быть зданием, она становится кучей. Я подчеркиваю эти обстоятельства, хотя они хорошо известны всем учителям, часто охотно иронизирующим: „обычай требует быть точным в таких-то местах курса и чувствовать себя вполне свободным в других“. К этим

точным местам хорошие ученики относятся также в достаточной мере скептически вместо того, чтобы быть энтузиастами. Много таланта тратится на усовершенствование деталей, в то время как нужно было бы сейчас попытаться заняться переделкой в целом.

Таким образом, вычисления в классе математики с точностью до $\frac{1}{10}$, казалось бы, неизбежно требуют определения числа, как последовательности цифр; однако это определение не вводится, равно как и никакое другое; из затруднительного положения выходят иногда с помощью разных уверток, как это было при определении квадратного корня с точностью до $\frac{1}{10}$, иногда же считая сделанным то, что на самом деле не было сделано.

Отметим все же одно единственное достижение, полученное в результате ревизии арифметики. Я уже упоминал, что иногда в младших классах в результате вычислений некоторых частных или корней приходится сталкиваться с числами, которые имеют бесконечно много цифр. Сейчас это явление становится в некотором роде официальным: *вполне*, когда последовательность цифр периодическая, так как изучаются десятичные периодические числа, и *почти* — для остальных последовательностей, так как доказывается, что квадратный корень целого числа не может быть дробью. Однако это довольно-таки незначительный успех; ревизия математики, которую пытаются предпринять в классе математики, как мне кажется, абсолютно не достигает своей цели, так как она не выясняет главного: понятия числа. Пусть, впрочем, не надеются найти в другом месте то, чего нет в ревизии арифметики: в алгебре и геометрии лишь вскользь затрагивают понятие несоизмеримых чисел, предполагая их и действия над ними уже известными.

15. Этот пробел настолько чувствителен, что в классе математики и в университете посвящают, наконец-то, одну лекцию определению иррационального числа, несмотря на то, что программы этого не требуют. Эта лекция кажется необычной и как бы попавшей не на свое место. Чаще всего пользуются методом сечений; касаются немного действий, но не настолько, чтобы дойти до нахождения цифр результата. Впрочем, избегают говорить о выражении иррациональных чисел в системе десятичной нумерации. Таким образом, в конце концов лишь для тех, кто продолжает свое образование за пределами сред-

ней школы, становится возможным рассмотрение понятия числа начистоту. Правда, и здесь число не дается в той элементарной форме последовательности цифр, в которой оно впервые появилось и в которой оно всеми обычно встречается. Стараются дать как можно более абстрактное определение: число есть разбиение на два класса, обладающих такими-то и такими свойствами, всех рациональных чисел, т. е. всех пар тех метафизических сущностей, которые называются целыми числами.

Понимают, что в классе математики нельзя давать подобного определения. Но не нужно обманывать себя: даже студенты университета поймут что-либо в нем лишь тогда, когда они придадут ему вполне конкретный смысл и представят себе точки на прямой по ту и другую стороны одни от других. Но тогда, в таком толковании, определение иррациональных чисел делается вполне приемлемым и для учеников класса математики. Оно сводится к показу, что каждому сечению соответствует вполне определенный отрезок; а это доказывается ученикам класса математики не один раз, а раз семь или восемь. Всякий раз, когда сравнивают пропорциональные величины, переход от случая соизмеримости к случаю несоизмеримости совершается при помощи этого утверждения: при сравнении дуг круга и центральных углов, площадей прямоугольников с одинаковыми основаниями и высот этих прямоугольников, объемов прямых призм с одинаковыми основаниями и высот этих призм, пространств, проходимых в равномерном движении, и времени, необходимого для такого прохождения, и т. д. То же утверждение высказывается еще, когда говорят об отношении двух однородных величин, придерживаясь доктрины, мне непонятной, согласно которой нужно делать различие между отношением и числом, его измеряющим. В таком случае нужно было бы дать определение равенства и неравенства двух отношений и пришлось бы говорить, например, так:

отношение $\frac{S_1}{S_2}$ двух отрезков равно или превосходит от-

ношение $\frac{s_1}{s_2}$, если при любом целом p , при разбиении

S_2 и s_2 на p равных частей, S_1 будет содержать, по крайней мере, столько же частей, полученных от разбиения S_2 , сколько частей содержит s_1 от разбиения s_2 . Но такое

определение есть не что иное, как сравнение двух сечений. Тем же утверждением пользуются при определении числа π . Словом, тысячу раз следуют изложению, от которого отказываются в тот момент, когда оно было бы весьма уместным для определения иррациональностей. А между тем вполне возможно это сделать и даже было бы экономно ввести такое определение.

Этого, однако, еще мало; мы должны ввести еще и действия над иррациональными числами. Некогда возможность этих действий и даже самый их смысл вытекал из „общности анализа“; в пору моей молодости мы переходили „к пределу“. Я думаю, что для наших учащихся средней школы здесь не произошло никаких изменений, что все и поныне сводится к употреблению некоторых магических слов, когда речь идет о переходе от действий над соизмеримыми числами к действиям над любыми числами. Чтобы прекратить подобное положение, недостаточно привести определения по методу сечений; нужно было бы дать полное изложение вопроса, перед которым обычно в страхе отступают, заявляя не без основания, что оно превосходило бы тот уровень, на который можно рассчитывать в классе математики, и требовало бы слишком много времени.

16. Изложение, которое я предлагаю, не оставляет места ни одному из этих возражений, а также никаким другим, если отбросить раз навсегда все те возражения, которые связаны с метафизикой или с употреблением десятичной нумерации. Оставаясь одним и тем же, начиная с первых ступеней обучения и до порога высшего образования, это изложение должно все время сообразоваться с возрастом учащихся: самым молодым оно не столько доказывает, сколько сообщает, как, впрочем, это делается и сейчас; более старшим можно дать больше доказательств или даже доказать все, что может быть доказано, если бы это сочли необходимым, — такой способ обучения, впрочем, не согласуется с моей точкой зрения. Во всяком случае то, что будет доказываться, предстанет перед всеми как логическое оправдание фактов, уже известных, уже принятых и уже использованных.

Дойдя до высшей ступени обучения, учащиеся достигнут зрелости, требующейся для того, чтобы воспринять более полный анализ приема, употреблявшегося до сих пор для определения чисел. Теперь они могут уже понять, что в этом приеме является слишком частным и

случайным. В самом деле, чтобы определить иррациональное число, недостаточно еще отнести его к слишком редкой шкале целых чисел, а нужно сначала построить новые числа (образуя так называемое всюду плотное множество). В моем изложении этим множеством будет множество десятичных чисел. Выбор множества десятичных чисел можно считать слишком случайным, вследствие чего оно в классическом изложении поглощается более обширным множеством соизмеримых чисел. Наконец, получив нужное нам для сравнения всюду плотное множество, мы сможем определить интересующие нас числа по их местам относительно чисел, уже определенных. А это опять метод сечений.

17. К перечисленным преимуществам нужно присоединить еще одно, значительное в настоящее время, когда облегчение программы является насущной необходимостью. Оно состоит в том, что можно упразднить две главы из арифметики — главу о дробях и главу о десятичных числах, откуда как следствие будут вытекать также и другие сокращения. Я настаивал несколько раз на том обстоятельстве, что я переходил непосредственно от целого числа к любому числу. Сейчас наступил подходящий момент уточнить то, что я под этим подразумеваю. Я не хочу сказать, что считаю неудобным говорить, например, об умножении десятичных чисел несколькими минутами раньше, чем об умножении любых чисел; совершенно наоборот, я вижу в этом всеми признанные преимущества, состоящие в возможности давать более сжатые и ясные доказательства и более легко их обосновывать. Я хотел лишь сказать, что считаю бесполезным создавать отдельно полную теорию десятичных чисел. Когда, например, мне нужно говорить об умножении не перед учителями, а перед учениками, я даю сначала общее определение умножения, о котором упоминалось выше, затем я прилагаю его к случаю, когда оба сомножителя — числа десятичные, и лишь потом к общему случаю. Таким образом, я буду иметь оперативное правило для точных десятичных чисел несколькими минутами раньше общего правила; но *доказательство свойств умножения я дам сразу для общего случая.*

Если не принимать во внимание различия в словах, то точные десятичные и соизмеримые числа станут для нас не чем иным, как частными случаями. Таким образом, нам не придется ни слова говорить о теории дробей,

так как дробь $\frac{a}{b}$ будет не чем иным, как числом, являющимся точным частным от деления a на b , и все действия над дробями

$$a : \frac{c}{b} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}, \dots$$

будут лишь частными случаями действий над числами. Точно так же не придется ни слова говорить о теории дробей и в классе математики, так как в этом больше не будет надобности ни для образования понятия числа, ни для правил действий. Совершенно очевидно, что не придется говорить и о превращении обыкновенных дробей в десятичные, ни о периодических десятичных числах.

Но следует ли упоминать о дробях на первой ступени обучения, в шестом и пятом классах средней школы? Нет, так как это не является необходимым для теории и ни для чего не служит на практике; я думаю, все согласятся со мной, что действия над двадцать вторыми и тридцать седьмыми долями являются мучением, которому мы подвергаем двенадцатилетних мальчиков из чистого садизма, безо всякой надобности, могущей сыграть роль смягчающего обстоятельства. Конечно, при желании можно найти какие-нибудь „применения“ дробей, указав, что некоторые механики при нанесении нарезок винта в своих вычислениях употребляют дроби. Но ни один из десяти таких механиков никак не связывает практику своего ремесла со школьным обучением, и если бы такая связь, в виде исключения, и была установлена, можно смело утверждать, что это скорее винт заставил осмыслить дроби, чем дроби помогли осмыслить винт.

Может показаться, что реформа, которую я предлагаю, в младших классах сведется просто к замене слова „дробь“ другим, например, „отношение“, так как, естественно, нельзя не заниматься свойствами

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

и не доказывать соответствующих правил, относящихся к вычислению отношений двух чисел (любых, а не только обязательно целых). Однако реформа была бы надежнее, если бы согласились, чтобы дети больше не изучали двух нумераций, нумерацию n -х частей для соизмеримых чи-

сел и нумерацию десятичную, если бы им позволили находиться 0,428 там, где ответ должен быть $\frac{3}{7}$.

Правда, a , деленное на b , или a на b , читается еще как a b -х частей, когда a и b суть целые числа, однако подобный оборот речи не больше обязывает нас к разворачиванию всей теории дробей, чем выражение „*quatre-vingt-douze*“¹⁾ к принятию двадцатиричной системы счисления.

18. Я предчувствую протест всех учителей. Они будут протестовать по той причине, что дроби доставляют бесчисленные упражнения их юным питомцам; отойдя от первого испуга, они увидят, что в упражнениях никогда недостатка не будет. Жалоба другой части учительства больше смущает меня, и, сказать правду, я сам ее разделяю: „упразднить теорию дробей в классе математики — это упразднить прекраснейшую главу, может быть, единственную среди остающихся в элементарном преподавании, которая дается не только ради приложений, а импонирует чувству чистой красоты“.

Вспомним наши возражения в спорах с представителями других профессий: что хотя обучение не лишается своего интереса, если оно не имеет практического применения, но оно рискует потерять интерес для учеников; что, наоборот, так как все специальности могут с успехом содействовать развитию культуры и так как все они требуют длительной технической подготовки, то преподавание должно выбирать по возможности то, что может оказаться практически более полезным; что, конечно, учитель должен пользоваться случаем подводить учеников к восприятию красоты, но что красота не есть предмет преподавания; что, претендуя на обучение красоте, лишь уродуют вкус и развивают снобизм. Все эти рассуждения имеют силу не только для других, но и для нас; вот почему мы уже не раз видели на разных ступенях обучения, как исчезают из программ очень красивые вещи, уступая место другим, непосредственно более полезным. Чтобы привести пример, за давностью не вызывающий больше никаких споров, вспомним неопределенный анализ и теорию непрерывных дробей, изъятые из преподавания не без сожаления учительства. Однако, разве не естественно,

¹⁾ П р и м е ч . п е р е в. Здесь непереводимая на русский язык особенность французского языка: выражение „*quatre-vingt-douze*“, означающее девяносто два, буквально есть: „четыре раза по двадцать плюс двенадцать“.

чтобы эти теории, очень интересные с точки зрения математической, но слишком специальные и не имеющие никакого практического значения, излагались лишь избранному кругу студентов?

Заметим вообще, что если все законченные точные вычисления, единственные, которые допускались древними, и сохранили все свое математическое значение, если они должны быть известны и должны изучаться современными математиками, то их практическое значение значительно уменьшилось, а порой и совершенно исчезло. Повсюду эти так называемые точные вычисления были развенчаны, уступили место приближенным вычислениям и зачастую рассматриваются лишь потому, что приводят к более простым способам приближенных вычислений. В программах лицензиата больше не гонятся, как раньше, бесконечно приумножать случаи, когда можно точно проинтегрировать дифференциальное уравнение или точно взять квадратуру, стараются как можно скорее пройти мимо техники точных вычислений, которая стала дисгармонировать с другими главами анализа, где изучают интегралы и квадратуры, не прибегая к явным и точным выражениям. Точно так же в наших классах математики больше не занимаются алгебраическим решением уравнений.

Понятие точного исчисления меняется при переходе от одного из этих вопросов к другому, но в каждом вопросе слово „точный“ употребляется как способ устранения пользования бесконечностью. Однако понятие бесконечности принято на практике; понятие предела не имеет мистического характера, так как два достаточно близких состояния практически тождественны. Математик, обязанный, по примеру греков, избегать употребления пределов, должен был создать новые методы, новые арифметики и новые алгебры, где операции определены лишь для тех выражений, которые могут быть рассматриваемы как точные, или, лучше сказать, как существующие. Все понимают, что между чистой и прикладной математиками существует разлад. Чем преподавание элементарнее, тем более точка зрения прикладной математики должна быть принята во внимание; но было бы прискорбно для успеха математики, если бы в ней не было преподавания, рассчитанного исключительно на математиков, в котором была бы принята другая точка зрения.

Когда классифицируют точные выражения в порядке их сложности, то обычно впереди выражений, содержа-

щих квадратуры, впереди выражений, где фигурируют символы элементарных функций, даже перед теми, где фигурируют алгебраические радикалы, ставят выражение $\frac{a}{b}$,

самое простое из всех точных выражений, единственное по-настоящему точное выражение для греков, для которых соизмеримые числа были единственно достижимыми, единственно свободными в их глазах от всякой идеи бесконечности.

Ясно, что пережитки этих покрытых давностью идей заставляют и нас цепляться за соизмеримые числа; мы дорожим ими как реликвиями исчезнувшей науки. Не лучше ли будет признать, что изучению соизмеримых чисел нет больше места в классе математики; что не будет никакого скандала, если в этом классе будет упразднена глава о дробях. Скандал в другом месте; его нечего бояться на будущее, так как он уже существует: скандално то, что в некоторых странах, например во Франции, можно закончить специальное математическое образование, не слышав ничего об этих новых арифметиках и алгебрах, в которых изучение дробей, рассматриваемых как множество пар чисел, является лишь простым частным случаем и которые составляют одну из наиболее живых отраслей современной математики.

19. Предлагаемые мной изменения состоят, следовательно, в замене в арифметике глав о дробях и десятичных числах, о периодических десятичных дробях, о приближенных вычислениях одной единственной главой об измерении длин и действиях над числами.

Эта глава будет также в некотором смысле первой главой геометрии, и, стало быть, в геометрии появится основание говорить о расстоянии между двумя точками. В настоящее время в первой части курса геометрии не говорят о числе-расстоянии; о нем упоминают лишь в третьей части после того, как во второй был затронут вопрос об измерении углов и дуг. И говорят о нем с некоторым умолчанием также вследствие употребления числа во всей его общности; говорят гораздо больше об отношении расстояний, чем о расстояниях, а число-расстояние появляется явно лишь тогда, когда перемножают крест на крест члены отношения между расстояниями. В этот момент предполагаются известными и числа-расстояния и действия над этими числами. Откуда происходит этот традиционный порядок? Мы можем ограничиться лишь догадками.

Известно, что хотя практика измерения длин очень давняя, но необходимость ее уточнения сказалась лишь спустя много времени после того, как астрономия потребовала точных измерений углов. Градуирование окружности является, быть может, первым средством уточнения; учителя должны были бы еще в самом начале говорить своим ученикам об этом превосходном инструменте, и практическое измерение углов и дуг могло бы, таким образом, принять научный характер гораздо раньше, чем то же произойдет для длин. Поэтому естественно и необходимо говорить в геометрии об измерении дуг и углов. Что же касается расстояния, то его всегда относили к понятиям первичным и о нем говорили тогда, когда им пользовались, т. е. с момента теоремы Фалеса. Но здесь и кроется скандал несоизмеримости. Нужно было предупредить затруднения, избежать числа. Вот почему иногда поступали, как я только что говорил, вводя понятие того, что будут называть равенством или неравенством двух отношений, т. е. пользуясь способами, которые в точности совпадают со способами, дающими возможность судить о равенстве или неравенстве двух чисел, данных каждое как сечение; но при этом стараются этого не замечать и избегают говорить о тех числах, которые сравнивают. При этом претендуют на то, что числами вообще не занимались, что отношение длин есть совсем другое, чем число, которое его измеряет. По крайней мере, если речь идет не о том, что четыре может так же хорошо быть числом кроликов, как и отношением двух длин и еще многим другим, то я не понимаю — я уже об этом говорил — ни смысла, ни интереса различия между этими случаями. Я вижу в нем лишь желание избежать введения одного слова; я представляю себе того, кто сказал бы: я не нуждаюсь в понятии шляпы, чтобы говорить о круглом предмете, который у вас на голове, с кожей изнутри и с лентой снаружи.

Я не боюсь показать своего полного непонимания необходимости такого различия, за которое многие крепко держатся и которое мне кажется просто смешным, так как, сопоставляя честно наши образы мыслей, мы найдем лучшие способы понимания друг друга, а следовательно, и преподавания.

20. Если описанный сейчас способ изложения пока что не обнаружил ни одного из своих преимуществ, то во всяком случае он мне кажется вполне удовлетворительным

с точки зрения логической, и теорема Фалеса о равенстве двух отношений, не являющихся числами, доказана вполне строго. Но, когда мы в данном отношении между расстояниями освобождаемся от знаменателей, то внезапно переходим к равенству двух отношений, являющихся числами. Таким образом, мы совершим огромную логическую ошибку, если, по крайней мере, не свяжем отношений-чисел с отношениями-нечислами. Эту ошибку редко совершают в той утрированной форме, о которой я говорю, хотя и здесь можно было бы привести примеры. Но часто близки к ней и не поднимаются до вывода, который, по моему, напрашивается и состоит в том, что, доколе отношение выступает как число, именно таковым единственно его и нужно рассматривать в преподавании. Его другой формы — формы метафизической сущности — я решительно не понимаю.

Этой ошибки никогда не совершали раньше, когда из отношения $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ между отрезками выводили равенство $AB \cdot GH = CD \cdot EF$ между площадями; по крайней мере, были в состоянии привести рассуждения, не заключающие ошибки. Но благодаря применению правила Декарта (Descartes) отказались интерпретировать всякое произведение чисел-длин как площадь; мы должны условиться прилагать его также к отношению двух чисел-длин; все эти числа, отношения, произведения и т. д. суть ничего больше, как числа. Но, конечно, как я уже упоминал, когда говорят о 4, то нужно знать, есть ли 4 число кроликов, отношение длин, произведение длин и т. д. Что касается нас, то, так как в предварительной главе мы определили меру AB , отнесенную к единице CD , нам больше не придется давать определения для отношения $\frac{AB}{CD}$. Это отношение было уже определено: это есть число, записанное в десятичной системе исчисления.

21. Посмотрим же, как будут выглядеть доказательства. Обычным способом мы докажем геометрическую теорему Фалеса: если параллельные прямые или плоскости определяют равные между собой отрезки на одной секущей, то на всякой другой секущей они также определяют равные между собой отрезки.

Если так, то пусть параллельные элементы определяют на одной секущей отрезки AB и CD , а на другой — от-

резки $A'B'$ и $C'D'$. Мы уже знаем, что если AB содержит один, два, три ... раз CD , то $A'B'$ содержит столько же раз $C'D'$; сравним вообще меру AB , выраженную в единице $U=CD$, с мерой $A'B'$, выраженной в единице $U'=C'D'$.

Согласно предшествующему мы получаем ту же самую приближенную по недостатку величину на первых ступенях обоих процессов измерения; т. е. оба искомых числа-меры имеют одну и ту же целую часть. На вторых ступенях нужно использовать единицы U_1 U'_1 , содержащиеся десять раз соответственно в U и в U' . Если же предположить U_1 отложенным десять раз на AB и если через девять точек разбиения провести элементы, параллельные данным, то они разделят $A'B'$ на десять равных между собой отрезков, т. е. на десять U'_1 . Таким образом, между U_1 и U'_1 устанавливается с помощью параллельных элементов такое же соотношение, как и между U и U' , и мы получаем на вторых ступенях операции измерения то же приближенное по недостатку значение. Другими словами, первая десятичная цифра будет одинаковой для обоих искомых чисел-мер. Продолжая так далее, приходим к равенству $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Таким образом, доказательство принимает самую естественную, какую, казалось бы, можно пожелать, форму: надо доказать, что оба числа равны между собой; эти числа были определены цифра за цифрой; применяя определение, мы констатируем, что они тождественны между собой цифра за цифрой. Прием доказательства будет одним и тем же для всех случаев.

Как же обстоит дело с пропорциональностью центральных углов и соответствующих дуг? После того как мы изложили приемы измерения углов и дуг¹⁾, после того

¹⁾ Мы пользуемся десятичной нумерацией даже в случае градусов, минут и секунд. В этом случае придется взять в качестве основной единицы шестидесятичную секунду; минуты и градусы будут в таком случае лишь группами единиц. Нужно заметить, что в вопросе измерения углов и дуг двоичная система исчисления была бы до некоторой степени более показательной. Постараемся это объяснить.

Операция измерения предполагает единицу U выбранной; она постулирует существование вспомогательных единиц U_1, U_2, \dots ($U = 10U_1$, $U_1 = 10U_2, \dots$); она принимает конкретную форму лишь в случае, если умеют построить U_1, U_2, \dots . Я прошел мимо этих затруднений, так как для учеников класса математики не важно, будет ли принято одной аксиомой больше или меньше; следовательно, можно допустить существование U_i и можно обойтись без их построения, так как нас в дан-

как доказали что равным центральным углам соответствуют равные дуги, мы для сравнения $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}}$ с $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$ возьмем

\widehat{COD} за единицу угла и \widehat{CD} за единицу дуги и измерим \widehat{AOB} и \widehat{AB} . Полученные значения на соответствующих ступенях обеих операций измерения будут равны, откуда и вытекает требуемое заключение.

Пусть потребуется еще сравнить два промежутка AB и CD , пройденные в равномерном движении, со временем, употребленным на их прохождение от момента τ_1 до момента τ_2 и от τ_3 до τ_4 . Мы измерим AB единицей длины CD , а продолжительность времени (τ_1, τ_2) единицей времени (τ_3, τ_4) ; на каждой ступени операций измерения мы получим одни и те же результаты, откуда и следует пропорциональность промежутков и времен.

22. Впоследствии мы увидим, что я постоянно употребляю подобные приемы; сейчас уместно отметить кажущееся противоречие между этими приемами и теми, которые за последние тридцать лет появились в преподавании второй части курса геометрии, так как эти последние стремятся по возможности избежать употребление числа.

Когда я был ребенком, мне доказывали, что равным центральным углам соответствуют равные дуги, потом переходили к измерению углов и дуг, потом устанавливали законность теорем вроде следующей: мера вписанного

ный момент интересует не столько реальная выполнимость, сколько возможность этих операций.

При более строгих требованиях нужно было бы доказывать теорему Фалеса в той форме, в какой она приведена в тексте (равным отрезкам одной секущей соответствуют с помощью параллельных элементов равные отрезки на другой секущей), провести подробно построение U_1 , исходя из U (следовательно, обосновать существование U_1), и только после этого можно было бы говорить об измерении длины.

В случае углов (или дуг), зная U , мы не можем построить U_1 , но мы можем построить v_1, v_2, \dots ($U = 2v_1, v_1 = 2v_2, \dots$). Таким образом, можно выразить операции сравнения угла с U, v_1, v_2, \dots с помощью знаков двоичной системы исчисления. Каждой из последовательности знаков этой системы соответствует определенная последовательность знаков в десятичной системе исчисления, и обратно; таким образом, в двоичной системе исчисления U_1 будет выражено двоичными знаками 0, 000 1100 1100 1100..., что доказывает его существование и дает теоретическое построение.

угла равна половине меры дуги, заключенной между его сторонами. В настоящее время изменены как порядок теорем, так и их формулировка. Теперь доказываются теоремы вроде следующей: вписанный угол равен половине центрального угла, соответствующего дуге, заключенной между сторонами данного угла; переходят к соответствию между равными центральными углами и равными дугами; затем приходят к измерению дуг и углов.

Мы обязаны этим изменением, если я не ошибаюсь, Адамару (Hadamard), заметившему, что имеется не больше основания вводить меру в равенства дуг и углов во второй части курса геометрии, чем в равенства длин или углов, рассматриваемых в первой части. Совершенно правильное замечание, имеющее целью вернуть теоремам их истинное содержание, прибегая в их доказательствах лишь к тому, что существенно необходимо. Имели все основания исправить неточности языка, вследствие которых понятие меры, кажется, вкралось в теоремы и доказательства, в которых ей совершенно не было места; но новые порядки плохо прививались, и многие учителя продолжают держаться старого.

Эта перемена порядка даже определенно вредна, когда пишут, как мне приходилось наблюдать: „Теперь, когда мы видим, что оценка вписанных углов, внутренних или внешних к кругу, выводится из оценки центральных углов, мы будем изучать центральные углы“. Этот переход, претендующий на остроумие и естественность, противоречит здравому смыслу. Дети практически знакомы с транспортиром: в этой главе желают оправдать пользование транспортиром. Показывают, что он приводит к мере центральных углов, затем к мере прочих углов; этим объясняют старую форму теорем, повторяя, неудачную. К тому же в высшей степени правдоподобно, что в ходе истории ученые античного мира очутились в положении, похожем на положение наших учеников; градуирование окружности должно было предшествовать всякой теории, и узаконение этого употребления должно было привести к теории меры различных углов. Но что бы там ни было, мы видим что новый порядок изложения не имеет никакого значения, так как он меняет лишь словесные формулировки теорем, а доказательства остаются теми же, что и раньше. Мы не умаляем достигнутых успехов, так как вводим число во всей его общности лишь там, где оно необходимо — об этом я уже упоминал и больше

к этому возвращаться не буду — а именно, при сравнении между собой дуг и углов.

Ошибка, которую делали, состояла в том, что вводили число, взятое во всей его общности там, где целого числа было достаточно; например, при оценке отношения центрального угла к соответствующему вписанному (отношения, равного двум) применяли два общих числа: меры двух углов при одной и той же произвольной единице. Не только заменяли одну операцию измерения двумя, что было бы не столько ошибкой, сколько простой неловкостью, простым несоблюдением принципа экономии, но вводили совершенно различные операции: первая есть операция конечная, состоящая лишь из одной ступени, употребляющая лишь понятие целого числа; обе другие — суть операции неопределенные, состоящие из бесконечного множества ступеней, нуждающиеся в самом общем понятии числа.

23. Казалось бы, кроме того, что принцип экономии всегда требует прямой оценки отношений, а не при помощи вычисления отношения между числовыми мерами сравниваемых величин; однако, на практике все длины измеряют метрами, углы градусами и т. д., т. е. употребляют вспомогательные единицы, и, казалось бы, от этого происходит лишь одно неудобство: приходится производить два измерения вместо одного.

Иногда это происходит вследствие того, что непосредственное сравнение длин и углов затруднительно или даже практически невозможно, но иногда также и по другой причине.

Когда в геометрии нам надо сравнить между собой, например, 2 длины, то только об этих длинах и будет разговор. Наоборот, когда на практике мы сталкиваемся со 100 длинами, то мы должны быть готовы к их попарному сравнению всеми возможными способами; следовательно, измеряя каждую новую длину, относя ее всякий раз к одной и той же единице меры, мы поступаем правильно, следуя принципу экономии. Одно единственное измерение для каждой длины, сделанное с точностью, которой располагают, лучше всего дает отношения этой длины ко всякой другой. Этим и объясняется, что на практике сравнения никогда или почти никогда не делают непосредственно, а всегда при посредстве шкалы эталона. Точно так же поступают и в геометрии; точность здесь должна быть неограниченной; но предполо-

жить, что длина (L) была измерена, это значит предположить (я уже упоминал об этом), что ее сравнили со всюду плотным множеством длин l так, что результат измерения в точности определяет все отношения $\frac{L}{l}$ и, следовательно, также и отношение L ко всякой другой длине. Таким образом, всякое сравнение делается с помощью шкалы эталона; мы видели, например, что все совокупности предметов сравнивают с типовой, казалось бы с самой неинтересной из всех совокупностей, так как она является лишь совокупностью условных слов; что расстояния сравнивают со шкалой, неограниченно подразделенной на метры, дециметры, и т. д.

Этот прием будет встречаться постоянно, и я не буду больше останавливаться на нем.

III. ПЛОЩАДИ.

Как и раньше, я начну с изложения плана дальнейшего; чтобы избежать недоразумений, я точно определю те более или менее серьезные облегчения, которые, на мой взгляд, допускает мое изложение и которые можно было бы получить, упраздняя, например, доказательства некоторых пунктов, чтобы приблизиться к уровню средних учеников класса математики. Таким образом, я никоим образом не провозглашаю его как изложение, которое должно быть принято в этом классе; один лишь опыт позволит судить, в какой мере оно могло бы быть приемлемо. Я кладу его только в основу, исходя из которой мы будем вести обсуждение вопроса.

24. Понятие площади. Предположим, что мы имеем в нашем распоряжении равные квадратные плиты, которыми хотим выстлать различные комнаты. Одну из комнат мы сможем покрыть 100 плитами, использованными надлежащим образом, причем не исключена возможность, что некоторые из плит придется делить на части; другая потребует 150 плит. Мы говорим, что площадь первой комнаты меньше второй, или точнее, что первая комната имеет площадь в 100 плит, а вторая — в 150 плит. Подобно тому, как сравнение произвольного отрезка с единичным привело к понятию длины и числа, так и этот практический вопрос и другие ему аналогичные должны, очевидно, привести к каким-то математическим понятиям.

Чтобы оценить длины различных отрезков AB , расположенных на прямой, мы построили на ней (§ 8) в обе стороны от точки ω шкалу из единиц U , затем шкалу из единиц U_1 и т. д. И это-то сравнение AB с полной, таким образом полученной шкалой T с неограниченно малыми интервалами и позволяло определить и оценить длину AB . Мы поступим точно так же.

Пусть нам дан квадрат C , расположенный в рассматриваемой плоскости, и пусть ωx и ωy — прямые, совпадающие с двумя из его сторон. Проведем параллельно ωx прямые на расстояниях, кратных стороне квадрата C ; то же сделаем относительно ωy . Мы покроем плоскость сеткой R , состоящей из квадратов, равных C , которые назовем квадратами U . Разделим стороны этих квадратов на 10 равных частей, через точки деления проведем прямые, параллельные ωx и ωy ; мы получим сетку R_1 , состоящую из квадратов, которые мы назовем U_1 . Подобным же образом переходят к сетке R_2 из квадратов U_2 и т. д. Совокупность всех сетей образует то, что мы назовем полной сетью T , выведенной из C . Путем сравнения с T мы и будем определять и оценивать площадь.

Пусть имеется область D ¹⁾. Сосчитаем количество квадратов U_i , целиком состоящих из точек D ; пусть их будет n_i . Так как квадрат U_i содержит 100 квадратов U_{i+1} , то мы имеем:

$$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \leq \dots;$$

все эти числа будем считать самое большее равными площади D . Сосчитаем, сколько имеется квадратов U_i , по крайней мере, одна точка которых принадлежит D ; пусть их будет N_i . Очевидно, что $N_i \geq n_i$ и по той же причине, что и выше,

$$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \geq \dots;$$

все эти числа $\frac{N_i}{100}$, по крайней мере, равные предшеств-

¹⁾ В элементарной геометрии понятие области не имеет определенного значения; оно станет вполне ясным, если ограничиться семейством многоугольных областей или областями, из которых каждая ограничена конечным числом отрезков прямой, круговых дуг и т. д. Однако, умышленно и для того чтобы лучше подчеркнуть, что определение остается одним и тем же для всех этих семейств областей, слову область оставили всю его расплывчатую общность.

С точки зрения строгой логической употребления этого слова должно было потребовать от нас доказательств употребляемых нами свойств этих областей, например, свойств, относящихся к их границам. Но здесь опять-таки дело касается свойств, которые совершенно очевидны для тех частного вида простых областей, которые нас будут занимать. По твердо установившемуся обычаю эти свойства принимаются в элементарных курсах без доказательства.

вующим числом $\frac{n_i}{100^i}$, будем считать по меньшей мере равными площади D .

Когда эти две последовательности являются последовательностями неограниченно сближающихся значений, т. е. когда $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ стремится к нулю при i , неограниченно возрастающем, говорят, что число, определенное этими двумя последовательностями, есть площадь D , выраженная в единицах U .

Как и в случае длин, это определение дает практический прием для нахождения определяемого числа. В обоих случаях мы не можем построить полной шкалы T , но можем, по крайней мере, нанести первые деления шкал R, R_1, R_2 , например, в единицах U, U_1, U_2 . Когда дело касается длин, то эти шкалы наносят на линейку, которую прикладывают затем к измеряемому отрезку, и тотчас же прочитывают числа $n, n_1, n_2; N, N_1, N_2$. В случае же площадей сети наносят на транспарант, который прилагают затем к изучаемой области, и точно так же прочитывают: $n, n_1, n_2; N, N_1, N_2$.

25. Мы поясним это определение, прилагая его к прямоугольнику $OACB$ со сторонами OA и OB , соответственно параллельными ωx и ωy ; принимая по обыкновению сторону y квадрата U за единицу длины, обозначим длины OA и OB через a и b . Стороны квадрата U_i , параллельные ωy , отметят на OA шкалу отрезков $\frac{y}{10^i}$; a_i из этих отрезков лежат на OA всеми своими точками, в то время как A_i из них принадлежат OA , по крайней мере, некоторыми точками. Из § 8 мы знаем, что $\frac{a_i}{10^i}$ и $\frac{A_i}{10^i}$ суть приближенные, соответственно по недостатку и по избытку, значения a . К тому же мы имеем:

$$A_i \leq a_i + 2.$$

Меняя роли OA и OB , ωx и ωy , мы получим аналогично, что

$$\frac{b_i}{10^i} \leq b \leq \frac{B_i}{10^i}.$$

Но n_i квадратов U_i , все точки которых принадлежат $OACB$, суть как раз те, которые проектируются на OA

и OB соответственно в рассматриваемые a_i и b_i отрезков; таким образом имеем: $n_i = a_i b_i$; а N_i квадратов U_i , по крайней мере, некоторые точки которых принадлежат $OACB$, суть те, которые проектируются на OA и OB соответственно в рассматриваемые A_i и B_i отрезков; мы имеем, следовательно: $N_i = A_i \cdot B_i$. Оба числа

$$\frac{n_i}{100^i} = \frac{a_i}{10^i} \cdot \frac{b_i}{10^i} \quad \text{и} \quad \frac{N_i}{100^i} = \frac{A_i}{10^i} \cdot \frac{B_i}{10^i},$$

порожденные квадратами U_i , заключают, следовательно, между собой произведение ab , и мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{N_i - n_i}{100^i} &= \frac{A_i B_i - a_i b_i}{100^i} \leq \frac{(a_i + 2)(b_i + 2) - a_i b_i}{100^i} = \\ &= \frac{2}{10^i} \left[\frac{a_i}{10^i} + \frac{b_i}{10^i} + \frac{2}{10^i} \right] < \frac{2}{10^i} (a + b + 1). \end{aligned}$$

Значит, обе последовательности $\frac{N_i}{100^i}$ и $\frac{n_i}{100^i}$ являются неограниченно сближающимися; они определяют величину ab . Прямоугольник $OACB$ имеет площадь, равную ab , выраженную в единицах U .

Таким образом, мы доказали, что всякий прямоугольник со сторонами, параллельными ox и oy , имеет площадь, мы оценили эту площадь; из полученного выражения следует, что два прямоугольника, полученные один из другого путем параллельного перенесения, имеют одну и ту же площадь, что площадь прямоугольника со сторонами, параллельными ox и oy , образованного соединением двух других, имеет в качестве площади сумму площадей обоих прямоугольников.

Для того чтобы наше математическое понятие площади было согласовано с практическим и могло быть практически использовано для любого многоугольника, очевидно необходимо, чтобы мы доказали, что всякий многоугольник имеет площадь, чтобы мы оценили эту площадь, чтобы мы показали, что два многоугольника, полученные один из другого с помощью любого перемещения, имеют одну и ту же площадь, и что многоугольник, образованный соединением двух других многоугольников, обладает площадью, равной сумме площадей этих многоугольников.

26. *Всякий многоугольник обладает площадью.* Пусть дан многоугольник P , пусть N_i и n_i — числа, относящиеся к этому многоугольнику и порожденные квадратами U_i ; нужно оценить разность $N_i - n_i$. Это число равно числу квадратов U_i , учтенных в числе N_i и не учтенных в числе n_i , т. е. числу квадратов U_i , содержащих одновременно точки из P и точки, не принадлежащие к P . Каждый такой квадрат содержит также граничные точки (или точки контура) P ; этот контур состоит из конечного числа отрезков; таким образом, мы докажем, что

$\frac{N_i - n_i}{100^i}$ стремится к нулю при неограниченно возраста-

ющем i , если нам удастся показать, что $\frac{\mu_i}{100^i}$ стремится к нулю, где μ_i — число квадратов U_i , содержащих точки произвольного отрезка AB . Последнее же обстоятельство легко установить.

Предположим сначала, что AB не параллельно ни ωx , ни ωy (черт. 3). Пусть λ — прямоугольник со сторонами,

параллельными ωx и ωy и пусть его стороны, параллельные ωy , отсекают на прямой AB отрезок $a\beta$, содержащий в себе отрезок AB . Квадраты U_i , содержащие точки отрезка AB , находятся среди тех, которые содержат, точки λ ; если таких квадратов будет N_i ,

то число $\frac{\mu_i}{100^i}$ не превосхо-

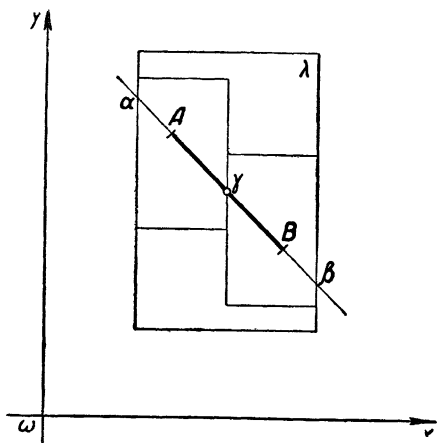
дит $\frac{N_i}{100^i}$, т. е. приближен-

ного по избытку значения площади λ , которое при i , достаточно большом, превос-

ходит эту площадь сколь угодно мало. Если, следовательно, a и b суть стороны λ , то при i , достаточно

большом, $\frac{\mu_i}{100^i}$ превышает ab сколь угодно мало.

Пусть γ — середина отрезка $a\beta$; повторим рассуждения, с одной стороны, для $a\gamma$, с другой, — для $\gamma\beta$; заме-



Черт. 3.

ним фигуру, состоящую из λ и $\alpha\beta$, подобными ей фигурами: λ_1 и $\alpha\gamma$, λ_2 и $\gamma\beta$, причем стороны λ_1 и λ_2 будут равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Так как для того, чтобы квадрат U_i содержал точки $\alpha\beta$, необходимо, чтобы он содержал точки $\alpha\gamma$ или точки $\gamma\beta$, то очевидно, что при i , достаточно большом, $\frac{\mu_i}{100^i}$ превосходит сколь угодно мало

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Новое разбиение даст аналогично $\frac{ab}{2^2}$, затем $\frac{ab}{2^3}$ и т. д.

Следовательно, $\frac{\mu_i}{100^i}$ при i , достаточно большом, может быть сколь угодно малым.

Если AB параллельно ωx и ωy , то λ нужно заменить прямоугольником с основанием AB и с произвольно малой высотой.

27. Если разделить многоугольник P на многоугольники P_1, P_2, \dots, P_m , то будем иметь:

$$\text{площадь } P = \text{площади } P_1 + \text{площадь } P_2 + \dots + \\ + \text{площадь } P_m.$$

Действительно, n_i квадратов U_i , содержащихся в P , либо целиком входят в какой-нибудь из многоугольников P_k (пусть, например, в P_k вошло n_k^i квадратов), либо содержат точки контура P_k (пусть число таких квадратов будет μ_i). Очевидно, имеем:

$$n_i = n_1^i + n_2^i + \dots + n_m^i + \mu_i.$$

При i , неограниченно возрастающем, $\frac{n_i}{100^i}$ и $\frac{n_k^i}{100^i}$ неограниченно близко подходят к площадям P и P_k , в то время как $\frac{\mu_i}{100^i}$ стремится к нулю; откуда и получается приведенное равенство.

Из него непосредственно следует, что в случае многоугольника P , содержащего в себе многоугольники $P_1,$

P_2, \dots, P_m , попарно не перекрывающиеся и не заполняющие всего P целиком,

площадь $P >$ площади $P_1 + \dots +$ площадь P_m ;

в случае же многоугольника P , образованного совокупностью многоугольников P_k , из которых некоторые могут попарно перекрываться,

площадь $P <$ площади $P_1 + \dots +$ площадь P_m .

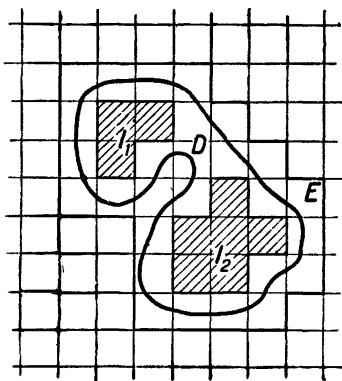
28. В классе перед учениками, прежде чем перейти к случаю других областей, следует разобрать до конца случай *многоугольников*; здесь же, обращаясь к учителям, во избежание иначе неминуемых повторений, я сразу приведу необходимое и достаточное условие существования *у области D* площади.

Мы уже видели, что для этого нужно, чтобы число $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ при i , неограниченно возрастающем, стремилось

к нулю. $\frac{N_i}{100^i}$ есть площадь многоугольника E , образованного N_i учтенными квадратами U_i , причем E покрывает D ;

$\frac{n_i}{100^i}$ есть сумма площадей многоугольников I , образованных n_i (внутренними к D) квадратами U_i , причем I покрывается D (черт. 4).

Итак, чтобы область D обладала площадью, нужно, чтобы она могла быть покрыта многоугольником E и сама покрывала бы попарно неперекрывающиеся многоугольники I при условии, что площадь E сколь угодно мало превосходит сумму площадей I .



Черт. 4

Обратное предложение

также справедливо. В самом деле, при i , достаточно большом, N_i' квадратов U_i , содержащих хотя бы по одной точке многоугольника E , имеют сумму площадей, сколь угодно мало отличающуюся от площади E , а n_i' квадратов, содержащихся целиком в прямоугольниках I , имеют сумму площадей, сколь угодно мало отличающуюся от суммы

площадей прямоугольников I . Иначе говоря, число $\frac{N_i' - n_i'}{100^i}$

будет, при достаточно большом i , сколь угодно мало отличаться от разности площадей E и I , а следовательно, само будет сколь угодно малым. Обозначая через N_i и n_i введенные выше числа, относящиеся к самой области D , имеем, очевидно:

$$N_i' \geq N_i \geq n_i \geq n_i'.$$

Поэтому

$$\frac{N_i - n_i}{100^i} \leq \frac{N_i' - n_i'}{100^i},$$

т. е. $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ есть сколь угодно малая величина. Более

того, площадь D заключена между площадями E и I .

Совершенно очевидно, что это предложение может быть употреблено для обобщения теорем предшествующего параграфа, равно как и для доказательства того, что область, образованная несколькими областями, имеет площадь, коль скоро площадью обладают эти последние. Благодаря же этому мы сможем придать последующему параграфу большую общность.

29. Два равных многоугольника обладают равными площадями. Вообще, если D есть обладающая площадью область и если Δ равно D , то Δ также обладает площадью; эта последняя равна площади D . Мы разобьем наше доказательство на несколько частей, предполагая сначала, что D — многоугольники, и делая дополнительные допущения о природе движений, переводящих D в Δ .

а) *Многоугольник Δ получается из D путем параллельного переноса.* Область D покрывается N_i квадратами U_i и содержит n_i таких же квадратов; параллельный перенос переводит квадраты U_i в квадраты V_i с теми же площадями (§ 25); следовательно, Δ покрывается N_i квадратами V_i и содержит n_i таких же квадратов; таким образом, имеем:

$$\frac{n_i}{100^i} \leq \Delta \leq \frac{N_i}{100^i},$$

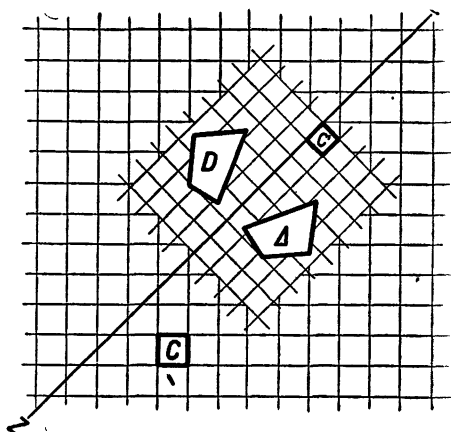
что показывает, что Δ и D обладают одинаковыми площадями.

б) *Многоугольник Δ получается из D при помощи зеркального отображения относительно оси ZZ' .* Пусть

C' — квадрат, одна сторона которого совпадает с ZZ' (черт. 5). Исходя из C' , построим сетку T' подобно тому, как в § 24 строили сетку T , исходя из C ; последовательные квадраты сетки T' обозначим через U' , U'_1 , U'_2, \dots . Пусть N'_i обозначает число квадратов U'_i , содержащих точки D , n'_i — число квадратов U'_i , не содержащих никаких других точек, кроме точек D . Все эти квадраты U'_i обладают одинаковыми площадями (§ 29а); так как в C' содержится 100^i квадратов U'_i , то, согласно § 27, все они имеют площадь, равную $\frac{S}{100^i}$, где S — площадь C' .

Следовательно, мы имеем:

$$\frac{n'_i}{100^i} S \leq \text{площадь } D \leq \frac{N'_i}{100^i} S;$$



Черт. 5

при i , неограниченно возрастающем, разность между двумя крайними членами стремится к нулю, так как, согласно § 26, $\frac{N'_i - n'_i}{100^i}$ стремится к нулю.

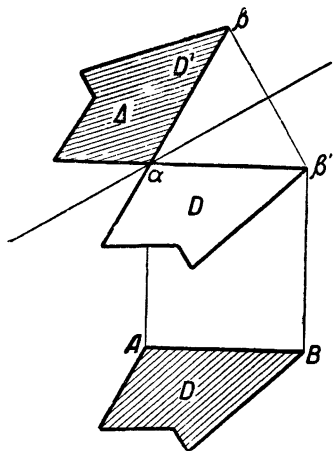
Но так как D и Δ расположены симметрично по отношению к оси ZZ' , то числа N'_i и n'_i пригодны и для Δ , и площадь Δ также удовлетворяет предшествующему неравенству. Следовательно, Δ и D обладают одинаковыми площадями.

с) Многоугольник Δ равен многоугольнику D . Пусть A и α , B и β — две пары соответствующих точек D и Δ . Параллельный перенос $A\alpha$ переводит B в β' ; зеркальное отображение относительно медиатриссы к $\beta\beta'$ ¹⁾ переводит D в D' так, что A попадает в α , а B в β . Тогда D' либо совпадает с Δ (черт. 6), либо D' симметрично Δ относительно $\alpha\beta$ (черт. 7). В обоих случаях переход от D к Δ совершается при помощи ряда преобразований, оста-

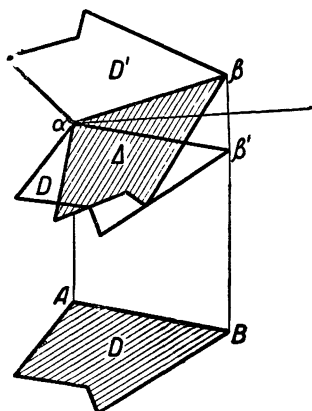
¹⁾ Примеч. перев. Медиатриссой называется перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину.

втяющих площадь инвариантной; таким образом, D и Δ обладают равными площадями.

d) D — область, обладающая площадью. Пусть E и I — два многоугольника, один покрывающий D , другой покрываемый D , причем площади их отличаются друг



Черт. 6



Черт. 7

от друга меньше, чем на ϵ . Перемещение, переводящее D в Δ , переводит E и I в многоугольники с теми же площадями, один из которых покрывает Δ , а другой покрывается ею. Но разность ϵ между этими площадями произвольно мала; значит, Δ обладает площадью; эта последняя отличается от площади E меньше, чем на ϵ ; значит, D и Δ обладают одинаковыми площадями.

Только что полученный результат можно также сформулировать так: площадь области не зависит от данных, характеризующих положение единичного квадрата C , а зависит от данных, характеризующих его величину; это значит, что, так как мы условились за единицу длины считать сторону C , площадь зависит лишь от единицы длины.

В самом деле, пусть мы имеем два равных квадрата C и C' ; пусть T и T' — две сетки, порождаемые соответственно каждым из них. Чтобы оценить площадь области D , исходя из C' , нужно, например, сосчитать числа N_i и n_i , относящиеся к D и T' . Эти числа будут также относиться к Δ и T , если Δ есть то, во что превращается D после перемещения, переводящего C' в C ; поэтому, если D обладает площадью относительно C' , то Δ обладает

площадью относительно C , и обе эти площади равны между собой. А так как Δ и D равны между собой, то, значит, D обладает площадью также относительно C , причем эта площадь равна площади Δ относительно C . Следовательно, D обладает площадью относительно C и относительно C' , и обе эти площади равны между собой.

Обе предшествующие теоремы могут быть соединены в одну: относительное перемещение области и сетки T не оказывает никакого влияния ни на существование площади области, ни на ее величину.

30. Исследуем теперь влияние изменения единицы длины, т. е. замены квадрата C не равным ему квадратом C' , на существование и величину площади области D , т. е. рассмотрим вопрос, аналогичный тому, который в § 10 привел нас к умножению.

Предположим, что при единице C числа, относящиеся к квадратам U_i , суть N_i и n_i . Значит, граница D может быть покрыта многоугольниками (квадратами U_i), общая площадь которых, выраженная в новых единицах длины, равна $(N_i - n_i) \cdot \frac{S}{100^i}$, если через S обозначена но-

вая площадь C . Согласно же предположению, что D обладает площадью относительно единицы C , $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ стре-

мится к нулю при i , неограниченно возрастающем; значит, D обладает площадью также относительно C' , и эта площадь A' , заключенная, каково бы ни было i , между $N_i \cdot \frac{S}{100^i}$ и $n_i \cdot \frac{S}{100^i}$, равна площади A области D относи-

тельно единицы C , умноженной на S , т. е. $A' = AS$. Если c — новая длина стороны C , то можно записать:

$$A' = Ac^2.$$

Замена единицы длины влечет за собой необходимость умножения всех площадей на квадрат длины прежней единицы длины, выраженной в новых единицах.

Это предложение, характеризующее влияние преобразования подобия одной из двух областей D и C на сравнение D с C , может быть изложено в обратной форме. Действительно, зафиксируем C и заменим область D подобной ей областью D' ; пусть k будет коэффициентом подобия. Если мы обозначим C , подвергнутое преобра-

зованию с коэффициентом подобия k , через C' , то числа N_i и n_i , связанные, с одной стороны, с единицей C и областью D , а, с другой, — с единицей C' и областью D' , остаются одними и теми же. Значит, D' обладает площадью относительно C' , равной площади, скажем A , области D относительно C ; следовательно, площадь D' относительно C существует и равна Ak^2 , где k^2 — площадь C' , так как сторона C' равна k .

Итак, *преобразование подобия с коэффициентом подобия k превращает область D с площадью A в область D' с площадью Ak^2 .*

31. Только что доказанные свойства площадей вполне согласуются с теми, которые нам известны из практики, и, главным образом, наличие этого согласования вселяет в нас надежду, что мы правильно выразили математически житейское понятие площади. Если, однако, существовали бы другие, отличные от наших, способы отнесения к областям чисел, обладающих доказанными нами в предшествующих параграфах свойствами чисел, названных нами площадями, то это означало бы, что имеется несколько возможностей переводить на математический язык практическое понятие площади, и мы могли бы опасаться, что выбранный нами способ не является наилучшим. Так что, если даже рассматривать математику как опытную науку, важно доказать, что исследуемые нами площади вполне определяются следующими условиями:

α) *Всякой области некоторого семейства областей, включающего в себя все многоугольники, соответствует положительное число, называемое ее площадью.*

β) *Всякой области, образованной соединением двух неперекрывающихся областей, соответствует площадь, являющаяся суммой площадей этих двух областей.*

γ) *Двум равным областям соответствуют равные площади.*

Кроме того, мы увидим также, что

δ) *Эти числа-площади вполне определяются численно, когда известна площадь одной из этих областей.*

В самом деле, возьмем любой квадрат C ; пусть k^2 — число, соответствующее C . Тогда, если D — любая область, принадлежащая семейству, и если N_i и n_i — числа, отнесенные к D и к сетке T , построенной, исходя из C , то площадь D будет заключена между $N_i \cdot \frac{k^2}{100^i}$ и $n_i \cdot \frac{k^2}{100^i}$

и будет такова, и что наш прием позволит отнести ее к области D , когда за квадрат с единичной площадью берут квадрат, полученный из C преобразованием подобия в отношении $1:k$. К тому же число k известно; если, в самом деле, σ_0 — известная площадь области D_0 и если σ — площадь, которую наш прием позволяет отнести к D_0 с помощью сетки T (т. е. если σ — предел последовательностей чисел $\frac{N_i}{100^i}$ и $\frac{n_i}{100^i}$), то мы имеем:

$$1/k^2 = \frac{\sigma_0}{\sigma} \quad ^1).$$

Свойства $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ составляют аксиоматическое определение площади, освобожденное от того, что было, повидимому, слишком специфическим, а именно от употребления для определения площади сетки T . Сетка T в концепции площади играет ту же роль, что десятичное исчисление в концепции общего понятия числа.

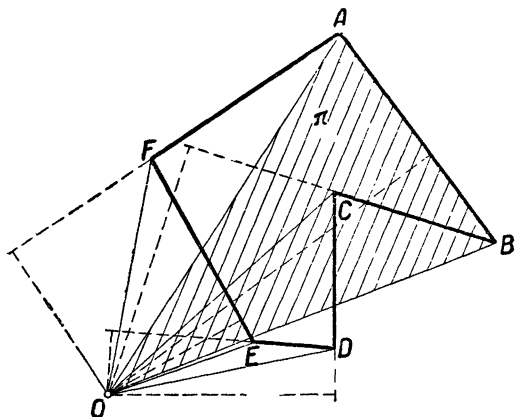
32. Особенно часто пользуются следующим свойством, которое моментально вытекает из $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$: *два многоугольника, которые могут быть разложены на равные многоугольники, т. е. два многоугольника, которые происходят от двух различных размещений многоугольных частей, имеют одну и ту же площадь.*

Мы доказали это свойство даже для случая двух областей, полученных в результате двух различных размещений частей произвольной формы, лишь бы только эти части обладали каждой площадью; следовательно, мы можем сейчас вернуться к классическому изложению. Мы можем самым законным и обычным путем найти площадь параллелограмма, затем треугольника, а следовательно,

¹⁾ По правде говоря, это доказательство предполагает, что D принадлежит одновременно как к семейству областей, для которых применим наш прием, изложенный в предшествующих параграфах, так и к семейству тех областей, к которым доказательство этого параграфа предполагает отнесенным число, удовлетворяющее условиям $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$. Но дело заключается в том, что надо доказать, что условия $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ достаточны для определения площадей областей D , рассмотренных ранее; мы должны, следовательно, заниматься лишь семейством этих областей или семейством, более ограниченным.

Если, наоборот, мы возьмем более обширное семейство, условия $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ могли бы еще удовлетвориться; но, как я выше доказал, мы не будем иметь предложения $\delta)$. Другими словами, свойства $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ будут уже недостаточными для характеристики площади с точностью до изменения единицы площади.

и площадь любого многоугольника, так как всякий многоугольник разлагается на треугольники. Полученные результаты можно резюмировать в следующей классической теореме.



Черт. 8

Пусть $ABCD\dots$ — плоский многоугольник π и пусть O — какая-то точка его плоскости (черт. 8); площадь многоугольника равна

$$\frac{1}{2} \left[\pm AB \cdot \text{расстояние}(O, AB) \pm \right. \\ \left. \pm BC \cdot \text{расстояние}(O, BC) \pm \dots \right]^{1)};$$

выбор знака $+$ или $-$ перед членом при PQ зависит от того, будет ли точка O с той же стороны от отрезка PQ , что и часть многоугольника π , прилежащая к PQ , или с другой.

Чтобы доказать эту теорему, считая площадь треугольника уже определенной, заметим, что стороны треугольников $AOB, OBC\dots$, которые мы назовем треугольниками T_i , выделяют на плоскости частичные многоугольники, обозначаемые нами, равно как и их площади, через P_1, P_2, \dots , и что каждый треугольник T_i образован некоторыми P_i . Таким образом, только что приведенное

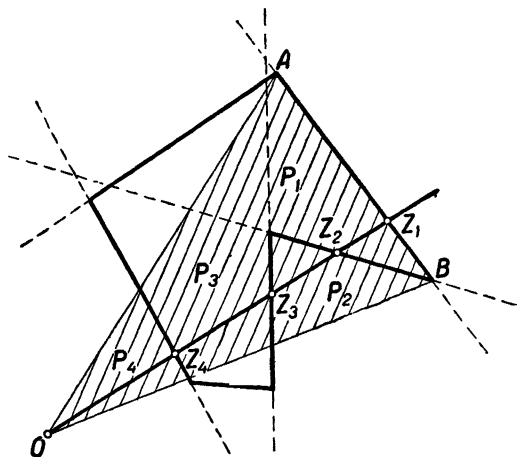
¹⁾ Примеч. перев. Расстояние (O, AB) означает расстояние точки O от прямой AB .

выражение площади, являющееся суммой площадей этих треугольников, снабженных знаком $+$ или $-$, будет иметь вид:

$$\pm (P_a + P_b + \dots) \pm (P'_a + P'_b + \dots) \pm \dots$$

Достаточно будет показать, что после приведения подобных членов останутся лишь P , внутренние по отношению к многоугольнику π , причем каждый из них с коэффициентом $+1$.

Пусть мы имеем полупрямую, выходящую из точки O и не проходящую ни через одну из вершин A, B, C, \dots (черт.9)¹⁾; пробежим ее в обратном направлении, и пусть Z_1, Z_2 будут точки последовательных пересечений с контуром π . Введем такие обозначения, чтобы при входе в π в точке Z_1 мы входили бы в T^1 и в P^1 ; чтобы при выходе из π в точке Z_2 мы переходили бы из P^1 в P^2 и входили бы в T^2 , не выходя к тому же из T^1 ; чтобы при входе в π через Z_3 мы переходили бы из P^2 в P^3 и входили бы в T^3 , не выходя к тому же ни из T^1 , ни из T^2 и т.д.. P_i , содержащие точки рассматриваемой полупрямой, входят в сумму лишь следующим образом:



Черт. 9

$$+(P^1 + P^2 + P^3 + \dots) - (P^2 + P^3 + \dots) + (P^3 + \dots) - \dots = \\ = P^1 + P^3 + \dots,$$

что и доказывает теорему.

33. Имея это изложение, которое в дальнейшем будет дополнено рассмотрением класса областей, более широкого, чем многоугольные, можно будет лучше оценить

¹⁾ Примеч. перев. На чертеже 9 заштрихован треугольник T_1 ; остальные треугольники T_i не обозначены. В приведенном рассуждении P^k (с индексами вверх) обозначают те же площади, что и P_i (с индексами вниз), но занумерованные в другом порядке.

силу классических рассуждений. Обычно полагают математическое понятие площади установленным самой практикой; что же касается аксиом α), β), γ), то ими пользуются чаще всего неявным образом; поэтому единственным значительным изменением, внесенным нами, можно считать доказательство α), β), γ); за исключением второстепенных моментов, нет никаких расхождений между классическим изложением и предложенным здесь, логически более полным.

Что в конце концов дает нам классическое изложение? Оно дает оценку площадей, определенных при помощи α), β), γ), δ). В действительности δ) используется лишь кажущимся образом. При некоторых предосторожностях можно было бы показать, что уже условия α), β), γ) определяют площадь с точностью до выбора единицы меры, т. е. предложение δ) может быть доказано.

Можно также сказать, что классическое изложение позволяет вычислять площади, если таковые существуют, и что достаточно было бы удостовериться, что полученные числа удовлетворяют свойствам α), β), γ), чтобы иметь возможность излагать теорию площадей, не прибегая к помощи новых аксиом. Это то, что проделывали различные геометры [Ш у р (Schur), Ж е р а р (Gerard) и др.¹⁾], придавая таким путем классическому изложению логическую силу, эквивалентную той, которой обладает предложенное здесь изложение. Приведем, лишь слегка изменив по форме, образцы методов названных авторов²⁾.

Каждому многоугольнику $ABC \dots$ отнесем число

$$\frac{1}{2} [\pm AB \cdot \text{расстояние } (O, AB) \pm \\ \pm BC \cdot \text{расстояние } (O, BC) \pm \dots],$$

где O — выбранная в плоскости точка, а знаки берутся согласно вышесказанному. Покажем сначала, что это число в действительности не зависит от выбора O .

¹⁾ В качестве библиографии можно указать на Hilbert, Grundlagen der Geometrie и Enriques, Questioni riguardanti la Geometria elementari. Примеч. пер. в. Обе книги имеются в русском переводе (вторая со старого издания).

²⁾ Заметим, что фраза α), которая выше была несколько раз названа предложением или аксиомой, хотя на самом деле была не чем иным, как указанием на наименование, становится теперь настоящей теоремой и даже главной: *каким бы путем ни разбить многоугольник P на отдельные треугольники T_i , сумма площадей T_i этих треугольников будет всегда одной и той же.*

Если через ω_1 обозначить точку на AB , расположенную между A и B (черт 10), то нашему рассмотрению представится прямой угол $x_1\omega_1y_1$, первая сторона которого ω_1x_1 совпадает с ωB , а вторая направлена во внутреннюю, прилегающую к AB область многоугольника. Мы знаем, что если перенести этот угол в $x_2\omega_2y_2$ так, чтобы ω_1 совпала с ω_2 на прямой BC и чтобы ω_1x_1 пошло по направлению ω_2C , то ω_2y_2 будет направлена опять-таки во внутреннюю, прилегающую к BC область многоугольника, и т. д. Словом, достаточно произвести измерение векторов AB, BC , учитывая последовательные направления ωx , а также векторов HO, KO , расстояний сторон от точки O , учитывая последовательные расположения ωy , чтобы предшествующее выражение превратилось в следующее:

$$\frac{1}{2} (\overline{AB} \cdot \overline{HO} + \overline{BC} \cdot \overline{KO} + \dots).$$

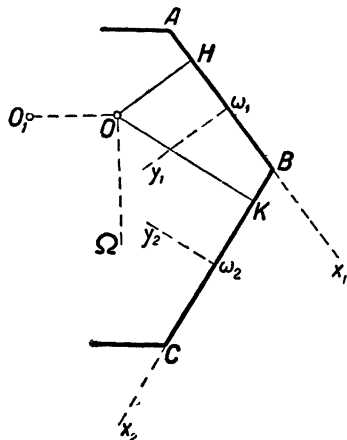
Если вместо точки O взять точку O_1 , то это число замечается следующим:

$$\frac{1}{2} \left\{ \overline{AB} \cdot \left[\overline{HO} + \overline{OO_1} \cdot \cos(OO_1, \omega_1 y_1) \right] + \right. \\ \left. + \overline{BC} \cdot \left[\overline{KO} + \overline{OO_1} \cdot \cos(OO_1, \omega_2 y_2) \right] + \dots \right\},$$

отличающимся от прежнего на

$$\frac{OO_1}{2} \cdot \left[\overline{AB} \cdot \cos(O\Omega, \omega_1 x_1) + \overline{BC} \cdot \cos(O\Omega, \omega_2 x_2) + \dots \right],$$

где $O\Omega$ — направление, получаемое из OO_1 , когда осуществляют вращение, переводящее $\omega_1 y_1$ в $\omega_1 x_1$, $\omega_2 y_2$ в $\omega_2 x_2$ и т. д. Выражение в скобках, как мера проекции контура многоугольника на ось $O\Omega$, оказывается равным нулю; следовательно, число, соответствующее многоугольнику, не зависит от выбора точки O . Сейчас мы увидим, что оно всегда положительно.



Черт. 10

Установим сначала, что это число удовлетворяет свойству β), а для этого сложим два числа, отнесенных к двум неперекрывающимся многоугольникам P_1 и P_2 , которые при их соединении дают многоугольник P ; пусть оба эти числа определены при посредстве одной и той же точки O . Так как мы не изменяем числа, отнесенного к многоугольнику $ABC\dots$, вставляя вершину Z , расположенную на AB между A и B , т. е. заменяя

$$AB \cdot \text{расстояние } (O, AB)$$

через

$$AZ \cdot \text{расстояние } (O, AZ) + ZB \cdot \text{расстояние } (O, ZB),$$

то можно предположить, что P_1 и P_2 прилежат друг к другу вдоль всей длины некоторых сторон. Тогда, если AB считать одной из этих сторон, произведения

$$AB \cdot \text{расстояние } (O, AB),$$

соответствующие P_1 и P_2 , будут числами, противоположными по знаку, так как P_1 и P_2 расположены с разных сторон от AB .

С другой стороны, если, например, KL есть сторона P_1 , не принадлежащая к P_2 , то произведения

$$KL \cdot \text{расстояние } (O, KL),$$

соответствующие P и P_1 , явятся числами, одинаковыми по знаку, так как P и P_1 расположены с одной стороны от KL .

Таким образом, приведя подобные члены в сумме полученных при помощи точки O выражений для чисел, соответствующих P_1 и P_2 , мы получим (с помощью той же точки O) выражение для числа, соответствующего P .

Доказав таким путем β), мы замечаем, что число, соответствующее многоугольнику, будет суммой чисел, соответствующих треугольникам любого разбиения P на треугольники; это число, следовательно, будет положительным и будет удовлетворять условию γ), если число, соответствующее треугольнику, будет положительным и независимым от расположения треугольника в плоскости. Вычисляя же число, соответствующее треугольнику ABC , беря O в A , мы находим его равным произведению

$$\frac{1}{2} BC \text{ на высоту, проведенную из } A.$$

На этом доказательство заканчивается. Обычно его представляют в следующем виде: берут фиксированную

точку O ; доказывают свойство β); затем, способом, в точности совпадающим с принятым выше, сводят вычисление числа, соответствующего P , к сложению чисел, соответствующих треугольникам; проверяют непосредственно тот факт, что в треугольнике все три произведения его сторон на соответствующие высоты равны между собой и что, каково бы ни было положение точки O относительно треугольника, число, соответствующее этому треугольнику, всегда равно половине такого произведения. Это как раз те утверждения, которые мы заменили более компактными, но менее элементарными рассуждениями, пользующимися переходом от O к O_1 . Доказательство сводится, таким образом, к следующему: гипотезы α), β), γ) вытекают из бесчисленных способов вычисления площадей; среди них мы выбрали один вполне определенный; этим путем мы удовлетворяем главной части условия α): каждой области мы относим вполне определенное число. Затем мы проверяем тот факт, что это число удовлетворяет условиям β) и γ) и к тому же является положительным.

34. В общем наши рассуждения совпадают с теми, которыми мы пользовались, применяя наш первый метод, за исключением того, что мы не оттенили, какими именно из различных свойств конкретной площади мы пользуемся в наших математических построениях; мы, таким образом, не сформулировали явно свойств α), β), γ). На деле, когда переводят на математический язык какое-нибудь конкретное понятие, всегда придерживаются того порядка, которому мы следовали; начинают с использования *всего*, чему научил нас относительно этого понятия опыт; построив затем первое математическое определение, задаются целью его усовершенствовать, оставляя в нем лишь то, что было разумно использовано. Аксиоматика устанавливается напоследок, когда все главное уже рассмотрено; но тогда она точно устанавливает силу полученного результата, строит на нем обобщения и т. д.

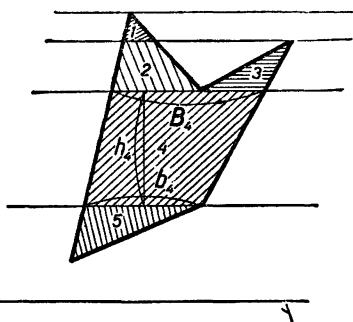
Таким образом, за исключением деталей изложения, оба наших метода совпадают, и поэтому нельзя упрекнуть второй метод в применении способа проверки¹⁾ без того, чтобы тот же упрек не был направлен и на первый ме-

¹⁾ Этот способ присущ всем доказательствам существования объекта E : допуская временно существования E , производят в этом предположении построение E , а затем доказывают, что наше построение дает результат, удовлетворяющий всем требуемым условиям.

тод. Нельзя упрекнуть первый метод в искусственности употребления сетки T без того, чтобы не упрекнуть второй метод за точку O . Единственным глубоким различием является то, что первый метод, использующий общее определение площади, имеет более обширные применения, в то время как второй, употребляющий способ оценки, пригодный лишь для многоугольников, более ограничен в своем применении; но зато он обладает изяществом законченных приемов и выделяет из всех прочих областей многоугольные, подобно тому как обычно выделяют соизмеримые числа, о чем мы уже упоминали в предшествующей главе.

35. Пользуясь этими примечаниями, мы можем теперь построить новые изложения теории площадей; приводим единственное, стоящее того, чтобы о нем здесь упомянуть. В сущности говоря, во втором приеме мы применили формулу интеграции в полярных координатах, а в первом — формулу интеграции в прямоугольных прямоугольных координатах. Можно также, используя приемы землемеров, получить законченный метод, применимый лишь к многоугольникам. Мы будем поступать следующим образом.

а) Если направление ω выбрано, то мы отнесем всякому многоугольнику P число



Черт. 11

$$\frac{1}{2}(B_1 + b_1) h_1 + \\ + \frac{1}{2}(B_2 + b_2) h_2 + \dots,$$

где $B_1, b_1; B_2, b_2, \dots$ — длины оснований трапеций, на которые разбит треугольник при помощи линий, проведенных через вершины P параллельно ω , а h_1, h_2, \dots — соответствующие этим трапециям высоты (черт. 11).

В приведенном выражении мы рассматриваем в качестве трапеции треугольник, одна сторона которого параллельна ω ; для подобной трапеции одно из двух оснований имеет нулевую длину.

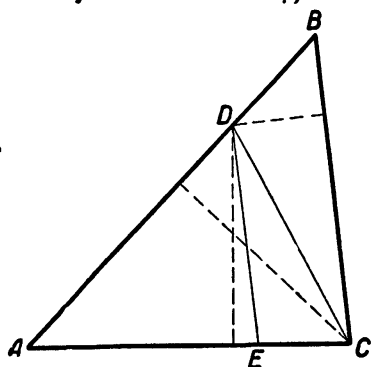
б) Пусть основание трапеции (или треугольника) T параллельно ω ; разделим T с помощью секущей, встречаю-

щей его основания (а не их продолжения), на T_1 и T_2 ; согласно приведенному выражению число (T) , соответствующее T , является суммой чисел (T_1) и (T_2) , соответствующих T_1 и T_2 ; это частный случай свойства β).

Другим частным случаем является тот, когда T разбито на T_1 и T_2 прямой, параллельной основаниям; благодаря предшествующему случаю можно предполагать, что T есть треугольник ABC с основанием BC , параллельным ω ; пусть DE — секущая (черт. 12). Число (T) выразится так:

$$\frac{1}{2} BC \cdot \text{расстояние } (A, BC),$$

или, как легко доказать,



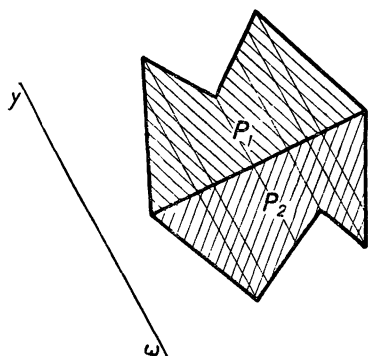
Черт. 12

$$\frac{1}{2} AB \cdot \text{расстояние } (C, AB). \text{ Теперь имеем:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot \text{расстояние } (C, AB) &= \frac{1}{2} AD \cdot \text{расстояние } (C, AD) + \\ &+ \frac{1}{2} DB \cdot \text{расстояние } (C, DB) = \frac{1}{2} AC \cdot \text{расстояние } (D, AC) + \\ &+ \frac{1}{2} BC \cdot \text{расстояние } (D, BC) = \\ &= \left[\frac{1}{2} AE \cdot \text{расстояние } (D, AE) + \frac{1}{2} EC \cdot \text{расстояние } (D, EC) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} BC \cdot \text{расстояние } (D, BC) = \frac{1}{2} AE \cdot \text{расстояние } (D, AE) + \\ &+ \left[\frac{1}{2} DE \cdot \text{расстояние } (C, DE) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} BC \cdot \text{расстояние } (D, BC) \right] = (T_1) + (T_2). \end{aligned}$$

Пусть имеем теперь общий случай многоугольника P , разделенного на два прилежащих многоугольника P_1 и P_2 . Чтобы определить числа (P) , (P_1) , (P_2) , соответствующие этим многоугольникам, можно использовать, на основании только что сказанного, разбиение, произведенное всеми

параллельными к ω линиями, проходящими через вершины этих трех многоугольников, в то время как первоначальное определение площади каждого из наших многоугольников использует лишь некоторые из этих параллельных. Представив, таким образом, числа (P) , (P_1) , (P_2) в виде суммы площадей, рассмотрим те слагаемые этой суммы, которые



Черт. 13

получаются от учета трапеций, ограниченных двумя последовательными параллельными ω линиями (черт. 13). Трапеции, учитываемые при определении числа (P) , разделены способом, рассмотренным в первом частном случае, внутренними сторонами многоугольников P_1 и P_2 на отдельные трапеции, из которых одни учитываются при вычислении (P_1) , а другие — при вычислении (P_2) . Итак, по первому частному случаю имеем:

$$(P) = (P_1) + (P_2).$$

γ) Чтобы доказать предложение γ), достаточно будет оценить число, соответствующее треугольнику ABC ; мы умеем находить это число в том случае, если одна из сторон треугольника параллельна ω . Исключим этот случай, и пусть прямая, параллельная ω , проходящая через вершину C , делит наш треугольник на два треугольника ACD , BCD . В таком случае имеем:

$$(ABC) = \frac{1}{2} CD \cdot \text{расстояние}(A, CD) + \frac{1}{2} CD \cdot \text{расстояние}(B, CD)$$

$$= \frac{1}{2} AD \cdot \text{расстояние}(C, AD) + \frac{1}{2} BD \cdot \text{расстояние}(C, BD)$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot \text{расстояние}(C, AB).$$

36. Следует ли вводить в преподавание одно из трех рассмотренных нами изложений, безупречных с точки зрения логической, или же какой-нибудь другой аналогичный прием? Я уже говорил, что первое изложение будет, без сомнения, слишком ученым и сложным для средних учеников, и один лишь опыт сможет о нем судить; два других будут для них более доступными. Однако

ученики могут плохо понять пользу доказательств α), β), γ), явившихся после того, как этими теоремами долго пользовались: быть может, они вообразят, что всегда можно подвергнуть сомнению то, что уже было доказано, и получают, таким образом, неправильное представление о логических рассуждениях. Во всяком случае, являясь фактом, что второе изложение всем хорошо известно, что оно было введено в учебники и что, однако, оно не привилось в преподавании. Значит, учителя не видят ничего предосудительного в явном или неявном допущении α), β), γ); я также нахожу вместе с ними, что в этом нет ничего предосудительного. Важно только не высказывать никаких неточных суждений о значении принимаемого изложения, а для этого нужно хорошо с ним познакомиться и тщательно сопоставить то, что делают, с тем, что нужно сделать, чтобы иметь возможность все доказать. Пренебрегая этими сопоставлениями, многие допустили любопытные ошибки.

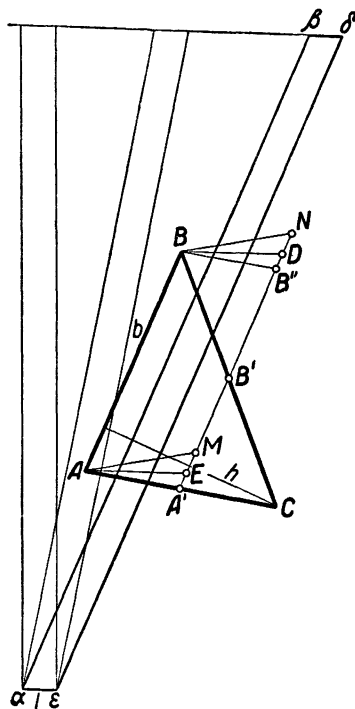
Думали, например, что классические приемы преобразования всякого прямоугольника R в прямоугольник p , одно из измерений которого равно единице, достаточны для разрешения проблемы площадей для прямоугольников; принимали при этом за площадь R второе измерение прямоугольника p . Конечно, это является известным способом определять площадь; но совершенно не очевидно, что другие приемы, помимо классических, не приведут к другому прямоугольнику p , связанному с тем же прямоугольником R , и, значит, к другой площади.

37. Поясним вышесказанное, рассматривая случай конечной эквивалентности. Два многоугольника называются конечно-эквивалентными¹⁾, если каждый из них можно разбить на одно и то же конечное число попарно равных треугольников. Покажем, что всякий треугольник эквивалентен некоторому прямоугольнику p , откуда будет следовать, что всякий многоугольник эквивалентен прямоугольнику p , образованному конечным числом прямоугольников p , соответствующих треугольникам, на которые разбит многоугольник.

Пусть же имеем треугольник ABC (черт. 14) и пусть A' , B' — середины сторон CA и CB . Повернем на 180° вокруг B' треугольник $A'B'C$ до положения $B''B'B$; мы пре-

¹⁾ П р и м е ч . п е р е в. Вместо „конечно-эквивалентные“ говорят так же „эквивалентные по разложению“ или просто „эквивалентные“.

вратим ABC в параллелограм $ABB''A'$; пусть M — любая точка $A'B''$. Если мы подвергнем треугольник $AA'M$ параллельному переносу AB , то получим параллелограм $ABNM$, который можно подвергнуть тем же операциям, и т. д. Следовательно, так как можно также поменять ролями A и B , то $ABB''A'$ может быть превращен в любой параллелограм с одним и тем же основанием AB и с одной и той же соответствующей высотой.



Черт. 14

Среди этих параллелограммов $ABDE$ найдутся такие, для которых AE будет кратным данной длины l . Если, например, $AE = 3l$, то, деля AE на три равные части и проводя через точки деления параллельные к AB , мы разделим $ABDE$ на три равных параллелограмма, которые, иначе расположенные, дадут нам параллелограм $\alpha\beta\delta\epsilon$, где $\alpha\beta$ равно утроенному AB , а $\alpha\epsilon$ равно l . Продолжая над $\alpha\beta\delta\epsilon$ те же операции, что и над $ABB''A'$, причем $\alpha\epsilon$ будет теперь играть роль AB , мы приходим безразлично к какому параллелограмму с основанием $\alpha\epsilon$, параллельное основание которого расположено на $\beta\delta$; в частности, можно прийти к прямоугольнику.

Если было взято $l = 1$, то мы превратили треугольник ABC в прямоугольник p , одна сторона которого равна 1. Посмотрим, чему равна другая сторона. $ABB''A'$ имеет в качестве основания AB , а в качестве соответственной высоты половину высоты ABC , проведенной из C . При переходе от $ABB''A'$ к $ABMN$, AB вместе с соответственной высотой остались неизменными, но другое основание и другая высота претерпели изменение. Однако, если заметить, что произведение основания на соответствующую высоту одинаково для обоих

оснований параллелограмма, то, значит, это произведение инвариантно при переходе от $ABB''A'$ к $ABMN$ и при всех дальнейших преобразованиях. Отсюда следует, что если b — основание ABC , h — соответствующая высота, то для всех полученных параллелограммов произведение основания на высоту равно $\frac{1}{2}bh$. Вторая сторона прямоугольника p равна, следовательно, $\frac{1}{2}bh$.

Вообще, если нам дан многоугольник P , то мы умеем, разбивая P на треугольники и превращая каждый треугольник в прямоугольник p , превратить P в эквивалентный ему прямоугольник, одно из измерений которого равно 1, а другое — сумме $\sum \frac{1}{2}bh$, взятой по различным рассматриваемым треугольникам.

Будет ли эта теория площадей законченной? Нет, так как еще не доказано, что полученная площадь является единственной, т. е. не зависящей от произведенного разбиения на треугольники. Считать ее законченной значило бы прежде всего совершить ошибку, аналогичную той, за которую мы так часто упрекаем наших учеников, когда, например, они заключают, что число разлагается на первоначальные множители единственным способом, в то время как они обнаружили это обстоятельство, употребляя лишь один частный прием разложения.

Поясним наше утверждение. Мы уже видели, что два многоугольника могут быть превращены один в другой с помощью нашего приема лишь в том случае, когда числа, которые мы отнесли к ним, будут одинаковы. Но больше того, мы знаем, что в случае двух параллелограммов это условие достаточно; отсюда следует, что оно достаточно также в случае двух любых многоугольников. Исходя из этого, можно показать, что *если возможно удовлетворить условиям α), β), γ), то числа-площади будут найдены с точностью до множителя, т. е. будет доказано условие δ).*

Таким образом эта четвертая теория площадей вполне равноценна классической теории¹⁾; как и последняя,

¹⁾ Более изящная, чем эта последняя, она, с другой стороны, обладает тем недостатком, что не может быть распространена на объемы, так как Дэн (Dehn) показал, что два многогранника с одинаковыми объемами, вообще говоря, могут не быть эквивалентными в вышеопределенном смысле (конечной эквивалентности).

она опирается на α), β), γ), доказывает δ) и дает определение площадей в случае многоугольников.

Чтобы завершить эту четвертую теорию, нужно доказать α), β), γ), например, одним из трех вышеуказанных приемов. Так как мы занимаемся лишь многоугольниками, то особенно отметим два последних приема. Из „Оснований геометрии“ Гильберта видно, насколько простую форму можно тогда придать второму приему. Аналогично можно воспользоваться и третьим. Если упрощения возможны, так это потому, что теперь еще отчетливее, чем раньше, все сводится к тому, чтобы показать, что рассматриваемое нами число является и точно определенным. Если это обстоятельство справедливо, то из него вытекают β) и γ): β) — потому, что число определяется разбиением многоугольника, а γ) — потому, что число определено для треугольника независимо от его положения.

38. Таким образом теорию можно считать законченной, если доказать, что *нельзя разбить многоугольник на конечное число кусков-многоугольников так, чтобы эти куски, иначе расположенные, давали бы лишь многоугольник, лежащий внутри первого*. Это свойство является геометрической основой теории площадей. В случае многоугольников теория будет состоять из трех частей:

- 1) всякий многоугольник эквивалентен прямоугольнику, одна сторона которого равна данному отрезку;
- 2) два таких прямоугольника не эквивалентны, если их вторые стороны не равны;
- 3) измерение вторых сторон.

Третья часть состоит из измерения длин; ее можно даже считать введением в понятие числа вообще; обе другие предполагают лишь понятия целого числа, и по этой причине можно признать, что они — чисто геометрического происхождения. Но если мы доказали первую часть при помощи чисто геометрического рассуждения, то приведенные доказательства второй части ссылаются на третью часть, следовательно, пользуются общим понятием числа.

До сих пор никто не смог доказать второй части, т. е. не был доказан геометрический факт, составляющий основу теории площадей многоугольников в методе конечной эквивалентности, не прибегая к общему понятию числа; и можно сказать, что лишь понятие площа-

ди, полученное другим путем, оправдало в конце концов метод эквивалентностей.

39. Благодаря повседневному опыту мы так привыкаем к этому геометрическому факту, что нам трудно свыкнуться с мыслью о необходимости его доказательства. В самом деле, разве вопрос не касается попросту места, занимаемого областью независимо от ее положения в пространстве и от расположения ее частей? Это *место* и есть площадь, и число, о котором мы говорили, будет не чем иным, как мерой площади; мерой, которую не нужно смешивать с площадью.

Несмотря на тривиальность слова *место*, мы легко узнаем здесь метафизическое представление, аналогичное тому, которое было в вопросе о целых числах и которое я в свое время критиковал. Целое число было тем общим, что имели все совокупности, выведенные из одной совокупности переменной порядка и природы составляющих ее предметов; площадь будет тем, что является общим для всех областей, полученных из одной области переменной положения и размещения ее частей. Целое метафизическое число имело десятичное выражение; метафизическая площадь имела бы меру: это было бы метафизическое число, могущее быть записанным в десятичной системе.

А когда спрашивают себя, что такое не целое метафизическое число, то замечают, до какой степени нагромождаются друг на друга сущности; но так как все это для математики не нужно, то обычно явно не высказывают этих метафизических представлений о числе. Между тем для многих площадь осталась чем-то отличным от числа, которое ее измеряет; для меня употребление слова меры в выражении „мера площадей“ имеет тот же смысл, что и в выражении „мера длин“: оно мне напоминает, что должна быть выбрана единица, чтобы иметь возможность говорить о площади или о длине, которые суть числа. Это как раз те числа, которые единственно полезны для математики; каждому предоставляется право присовокупить к этим математическим понятиям понятия метафизические; однако эти последние не должны быть допущены в преподавании. Они не должны допускаться и тогда, когда вопрос идет об установлении логической ценности какой-нибудь теории; заблуждения относительно площади прямоугольников, о которых я говорил, проистекали, без сомнения, от того, что, даже заботясь о логической строгости доказательства суще-

ствования площади, сохраняли остатки представлений о том, что понятие площади есть понятие первичное, существование которого не может быть доказано.

Было время, когда занимающий нас вопрос разрешался одной аксиомой, пригодной на все случаи жизни: *целое больше части*, которую применяли и к длинам, и к площадям и к объемам. Каким образом мы обошлись без нее?

В случае длин: относящиеся к движению аксиомы, на которые мы опирались, предполагали, в частности, что если переместить AB вдоль содержащей его прямой так, чтобы A попало между первоначальными положениями A и B , то B должно попасть вне этих положений. В этом и заключалась аксиома: *целое больше части*, которую, значит, мы еще раз приняли в такой формулировке.

Для площадей: три указанных нами метода устанавливают отсутствие эквивалентности двух прямоугольников $1, h$ и $1, h'$ из факта неэквивалентности длин h и h' . Аксиома, относящаяся к площадям, была выведена из аксиомы, относящейся к длинам; в наших доказательствах мы столкнулись с числами не целыми, так как рассуждали о сторонах различных прямоугольников и так как число употребляется для выделения различных отрезков. Конечно, можно было бы замаскировать это употребление; однако от этого еще не получилось бы чисто геометрического доказательства, которого, как я упоминал, никто еще до сих пор не дал, а после приведенных объяснений, без сомнения, покажется мало вероятным, чтобы его кто-либо когда-нибудь и дал, так как, чтобы быть по-настоящему отличным от предшествующих, доказательство не должно было бы пользоваться аксиомой, относящейся к длинам.

40. Теперь, когда мы хорошо познакомились с настоящим значением классической теории, когда мы ясно видим те трудности, которые нужно преодолеть, чтобы ее завершить, и обстоятельства педагогического характера, препятствующие введению строго логического изложения, мы будем в состоянии принять некоторые улучшения в деле преподавания.

Я предложил бы всего два усовершенствования. Одно из них имеет второстепенное значение; оно состоит в предложении обходиться без теоремы о пропорциональности между площадями прямоугольников, имеющих одну

общую сторону, и длинами других сторон, и получать непосредственно площадь прямоугольника, как в § 25, т. е. как это делается на первой ступени обучения и в интегральном исчислении. Это было бы быстрее и естественнее и позволило бы избежать ненужных длиннот, если принять вместе с нами, что отношение площадей есть не что иное, как отношение чисел: применяемый при этом метод был бы таким, что способные ученики смогли бы, право, до него сами додуматься. И тогда не пришлось бы испытывать соблазна ссылаться на широковедающую теорему о величинах, пропорциональных многим другим величинам, которая, быть может, и понятна некоторым, только не ученикам и не мне. Впоследствии я займусь этой теоремой в связи с общей проблемой измерения величин.

Второе улучшение будет значительнее; оно состоит в том, что мы не будем считать площадь первичным понятием, а дадим ей определение § 24. Это определение можно было бы упростить, так как мы не будем опираться на него в своих доказательствах; мы только будем утверждать, что оно позволяет доказать предложения § 26—29, которые мы сформулируем. Затем мы снова вступим на классический путь. Такой образ действий отчасти уже присущ некоторым учителям; с ним мы встречаемся, например, в учебнике геометрии Клода Гишара (Claude Guichard).

41. Чтобы ясно представить себе значение этого изменения, рассмотрим сначала подробно площади областей, ограниченных дугами и отрезками прямой.

Площадь круга. Пусть p_k — правильный вписанный в круг C k -угольник, а P_k — правильный k -угольник, описанный около того же круга. Числа n_i и N_i , соответствующие кругу, заключены между числами n'_i и $N^{i''}$, соответствующими p_k и P_k , каковы бы ни были k и i .

При i , неограниченно возрастающем, $\frac{n'_i}{100^i}$ и $\frac{N^{i''}}{100^i}$ стре-

мятся к площадям p_k и P_k , первое возрастаая, второе

убывая; значит, числа $\frac{n_i}{100^i}$ и $\frac{N_i}{100^i}$ заключаются между

площадью p_k и площадью P_k . Согласно же § 30,

$$\frac{\text{площадь } P_k}{\text{площадь } p_k} = \left(\frac{\text{радиус } C}{\text{апогема } p_k} \right)^2 = \frac{R^2}{a_k^2};$$

следовательно,

$$\text{площадь } P_k - \text{площадь } p_k = \text{площади } p_k \cdot \left(\frac{R^2}{a_k^2} - 1 \right),$$

т. е. величине, стремящейся, очевидно, к нулю вместе с $\frac{1}{k}$. Итак, круг имеет площадь; эта площадь есть

предел площадей p_k и P_k .

В то же самое время мы показали, что площадь квадратов U_i , необходимых для покрытия дуги круга, стремится к нулю при возрастании i ; следовательно, всякая замкнутая область, ограниченная отрезками прямой и дугами круга, обладает площадью.

Площадь сектора. Пусть $\alpha = 4235,43 \dots$ — центральный угол сектора, выраженный, например, в шестидесятиричных секундах. Если мы обозначим площадь круга через S , то, так как этот круг содержит $360 \cdot 60 \cdot 60$ равных секторов с углом в одну секунду, площадь s каждого из них равна

$$\frac{S}{360 \cdot 60 \cdot 60},$$

а площадь рассматриваемого сектора заключена между $4235s$ и $4236s$. Сектор с углом в $0,1$ секунды имеет площадь $s \cdot 0,1$, так как каждый такой сектор содержится десять раз в секторе с площадью s ; следовательно, сектор с углом, равным α , имеет площадь, заключенную между $4235,4 \cdot s$ и $4235,5 \cdot s$, и т. д.

Мы узнаем в этом тот способ рассуждения, который я уже неоднократно развивал, и мы видим, что это — метод начального обучения. Я не буду возвращаться к ненужным здесь подробностям, связанным с употреблением десятичного исчисления.

Получив площадь сектора и распространив свойства α), β), γ), δ) на области, ограниченные прямыми и дугами круга, мы можем считать теорию площадей этих областей законченной¹⁾.

¹⁾ Здесь было бы естественно вычислить площадь S круга; согласно § 30, она имеет выражение вида πR^2 . Но связь между числом π и длиной окружности сможет быть установлена лишь после рассмотрения длин кривых.

42. Сравним теперь это изложение с тем, которое имеется в учебниках. Конечно, между ними различие невелико, но вместе с тем оно касается существенного пункта: дело в том, что здесь мы не принимаем *произвольного* определения площади круга, хотя и вполне естественного, но с точки зрения логической чисто произвольного.

В самом деле, все учебники за последние лет двадцать пять придерживаются следующего способа изложения: по определению, будем называть площадью круга предел площадей p_k . Сказав это, некоторые учебники *доказывают* существование этого предела, другие, что не имеет большого значения, просто *принимают* это.

Раньше, например, в пору моего детства, простосердечно говорили, что, так как многоугольники p_k отличаются все меньше и меньше от круга, то площадь круга есть предел площадей p_k . О площади, рассматриваемой как первичное понятие, рассуждали одинаково хорошо как в случае круга, так и в случае многоугольников, и опирались при этом на несформулированные и молчаливо предполагаемые свойства этих площадей. Конечно, с точки зрения логической это было недостаточно; однако оказывалось, что ничего неприемлемого не говорилось, тогда как нынешнее изложение совершает, по моему, большой грех, если не против логики, то, что еще хуже, против здравого смысла. Заодно обнаруживают наивное легкоеверие во всемогущество слова, заставляющее надеяться, что затруднение будет побеждено искусством речи. Как будто бы настоящий прогресс может быть достигнут столь дешевой ценой!

В самом деле, как поступают в настоящее время? Площадь круга есть предел p_k . Это есть произвольное определение, название, которое может быть заменено всяким другим. Отсюда следует, что недостаточно еще принять это, а не другое, название, чтобы число, названное, таким образом, площадью круга, поспешило благоразумно войти в семейство тех чисел, для которых справедливы свойства α), β), γ), δ). В результате этого из известной площади круга нельзя логически вывести площадь сектора; верить в это и пускаться в мнимые рассуждения, значит глубоко заблуждаться. Площадь сектора равна

$S \cdot \frac{\alpha}{360 \cdot 60 \cdot 60}$, по определению. Из площади сектора, при-

нятой, таким образом, по определению, нельзя вывести путем рассуждения площади сегмента; опять-таки определением является то, что площадь сегмента равна разности между площадью сектора и площадью треугольника.

Если бы предел p_k был назван „тарарабумбией“ круга, то вряд ли кто-нибудь позволил бы себе вывести из нее величину тарарабумбий сектора и сегмента; но делать это разрешают себе, когда вместо слова тарарабумбия употребили слово площадь! Это тягчайшее преступление против здравого смысла. Однако, иные находят оправдание в том, что они сами этой ошибки не совершают, но лишь делают ставку на то смещение, которое не замедлят совершить учащиеся, уподобляя эту новую площадь тем площадям, с которыми они привыкли иметь дело. Каждому, впрочем, предоставляется возможность выбирать между заблуждением и лицемерием.

Пусть не надеются, к тому же, выйти из затруднительного положения, повторяя три раза, по случаю круга, сектора и сегмента, вещие слова *по определению*, так как определенные таким путем площади ни к чему не пригодны. С их помощью нельзя разрешить ни одного вопроса, ни одной проблемы без того, чтобы не натолкнуться на предложения α), β), γ), δ), пользоваться которыми будет незаконно; так, например, не мог бы быть рассмотрен классический вопрос о луночках Гиппократа.

Итак, в силу необходимости, прежде чем вычислять площади, нужно владеть понятием площади, понятием, необходимо требующим свойств α), β), γ), δ) для всех областей, которыми будут заниматься. Метод времени моего детства, который, не формулируя, пользовался, в сущности говоря, этими свойствами одинаковым образом для всех областей, был лучше метода современных учебников, делающих злополучное различие между теми или иными областями. Чтобы сделать старый метод вполне приемлемым, достаточно было бы освободить его от идеи предельной области, утверждая, что площадь круга заключена между площадями вписанных и описанных многоугольников p_k и P_k . Этот метод согласовался бы с тем, который я здесь защищаю. Само собой разумеется, что нужно было бы доказать или принять существование площади для области, ограниченной прямыми и кругами, в зависимости от того, будет ли доказано или принято существование площади для многоугольников.

Очевидно, можно было бы ограничиться заявлением,

что определение площадей круга, сектора и сегмента вводится избранным нами способом, потому что с этими и только с этими определениями можно получить предложения $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$; но это значило бы сознаться, что дело идет не о произвольных определениях, а наоборот, что именно эти названия, а не другие, выбраны в результате исследования; но в этом случае мы отказались бы от того, чтобы дать идею этих исследований, тогда как соображения § 24 вполне достаточны, чтобы заставить о них догадываться.

43. На этом мы покончим с вопросом о площадях плоских фигур; однако, чтобы показать гибкость приведенного приема, рассмотрим случай плоских областей, ограниченных отрезками прямой и дугами конических сечений, областей, которые иногда встречаются в элементарной геометрии. Спросим себя, обладают ли подобные области площадью в случае, если они ограничены? Другими словами, может ли конечная дуга конического сечения быть покрыта многоугольниками, сумма площадей которых произвольно мала?

Если дело касается дуги эллипса, то мы воспользуемся теоремой об ортогональных проекциях. Пусть D — некоторая область, d — ортогональная проекция D ; возьмем в плоскости D сеть T , образованную прямыми, параллельными линии пересечения XX' плоскостей D и d ; угол между плоскостями пусть будет ϑ . Проекцией квадрата U_i является прямоугольник u_i , сторона которого, параллельная XX' , равна $\frac{1}{10^i}$, а сторона, перпендикулярная к XX' ,

равна $\frac{\cos \vartheta}{10^i}$; площадь u_i равна $\frac{\cos \vartheta}{100^i}$. Так как D со-

держит n_i квадратов U_i и само содержится в N_i аналогичных квадратов, то d содержится в многоугольнике,

образованном N_i прямоугольниками u_i с площадью $\frac{N_i \cos \vartheta}{100^i}$

и содержит многоугольник с площадью $\frac{n_i \cos \vartheta}{100^i}$. Следова-

тельно, если D обладает площадью, то ею обладает и d , и мы имеем:

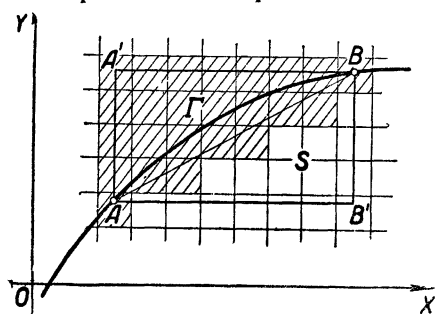
$$\text{площадь } d = \text{площади } D \cdot \cos \vartheta.$$

Если дело касается дуги гиперболы или параболы, то можно аналогичным образом употребить соотношение между площадями двух многоугольников d и D , являющихся коническими проекциями один другого:

$$\text{площадь } d \leq \text{площади } D \cdot K;$$

в этом соотношении коэффициент K может быть выбран одним и тем же для всех пар d, D , расположенных в двух ограниченных областях, соответствующих друг другу при помощи конической проекции. Но гораздо проще и важнее доказать, что *всякая выпуклая и ограниченная дуга может быть покрыта многоугольниками, сумма площадей которых произвольно мала.*

Пусть мы имеем подобную дугу: разобьем ее на части так, чтобы каждая из них встречала не более, чем в одной точке, линии, параллельные двум взаимно перпендикулярным направлениям OX, OY . Возможность такого разбиения очевидна; однако строгое доказательство было бы затруднительно, не вследствие слова „выпуклый“, но оттого, что слова „кривая, дуга кривой“ не имеют в элементарной геометрии точного определения. Но что бы там ни было, мы будем



Черт. 15

вести наши рассуждения именно с такой частью дуги; доказательство будет справедливо для дуг, образованных конечным числом этих частичных дуг.

Пусть, следовательно, мы имеем дугу Γ , покрытую целиком прямоугольником $AA'B'B'$ со сторонами, параллельными OX ,

OY , две противоположные вершины которого являются концами A и B дуги Γ (черт. 15); пусть S — площадь этого прямоугольника. Вследствие своей выпуклости Γ должна находиться целиком либо в треугольнике $AA'B$, либо в треугольнике ABB' ; предположим, что она находится в $AA'B$.

Треугольник $AA'B$ можно покрыть прямоугольниками со сторонами, параллельными OX и OY , сумма площадей которых превосходит площадь $AA'B$ сколь угодно мало.

Значит, можно предположить, что эта сумма меньше $\frac{2}{3}S$.

Сохраним лишь те прямоугольники, которые содержат в себе точки Γ ; заменим каждый из них меньшим прямоугольником с параллельными сторонами, содержащим все точки Γ ; после этих изменений мы получим прямоуголь-

ники с общей площадью меньшей, чем $\frac{2}{3}S$, и содержа-

щие соответственно дуги $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, сумма которых равна Γ . Если те же рассуждения приложить к $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, то можно покрыть Γ прямоугольниками с общей площадью, меньшей $\left(\frac{2}{3}\right)^2 S$, и т. д. Теорема доказана. Итак, эле-

ментарная теория площадей, которую мы развернули, приложима, в частности, ко всем ограниченным областям, ограниченными конечным числом отрезков прямых и дугами выпуклых кривых.

Рассуждения, подобные предыдущему, подготовят и, быть может, осветят те рассуждения, к которым придется прибегнуть, когда дело коснется определенного интеграла. Ученики легко поймут, что при переходе от элементарной геометрии к анализу ничего не изменилось, кроме языка, более геометрического раньше, более аналитического потом. И, быть может, они лучше почувствуют достигнутый прогресс: математика всегда исходит из конкретного, язык ее также конкретен и чаще всего имеет геометрический характер. Все это возбуждает воображение, может быть, даже слишком возбуждает, так как действительность чрезвычайно богата; слишком обильные замечания заставляют напрягать внимание. Поэтому первые, всегда подробные рассуждения имеют лишь весьма ограниченное значение. Постепенно каждый вопрос выделяется из остальных, в них научаются распознавать наиболее существенное, рассуждения становятся более общими, язык же — более аналитическим и абстрактным. Эта абстракция не лишена содержания; совсем наоборот, язык делается абстрактным для того, чтобы легче прилагаться к более широкой действительности.

IV.

ОБЪЕМЫ.

Глава, относящаяся к площадям, была составлена таким образом, чтобы из нее, параграф за параграфом, можно было вывести теорию объемов, вводя лишь небольшие, почти всегда очевидные изменения, сводящиеся часто к простой замене слов. Таким образом, мы получаем теории, относящиеся к объемам, соответствующие тем, которые я в свое время назвал первой, второй и третьей теориями площадей; о распространении на объемы четвертой теории, опирающейся на эквивалентность, определенную через разложения, не может быть и речи, так как Дэн доказал, что два многогранника с одинаковыми объемами, вообще говоря, могут не быть эквивалентными.

Я не буду излагать всех трех теорий применительно к объемам, а ограничусь лишь указаниями на менее очевидные изменения, которые нужно внести в предшествующую главу. К тому же я не буду переводить *как было бы возможно*, параграф за параграфом, первую теорию; я ее сокращаю, используя результаты, полученные для площадей.

44. С помощью сетки T , состоящей из кубов, мы сможем определить объем подобно тому, как в § 24 была определена площадь; затем мы заменим, слово за слово, § 25 следующими рассуждениями.

Пусть $\phi x y z$ — прямоугольный триэдр с тремя прямыми углами, образованными тремя ребрами куба сетки T , и рассмотрим прямую призму или прямой цилиндр, высота которого параллельна ϕz ; предположим, что перпендикулярное сечение цилиндра имеет площадь B и что длина высоты равна H .

Плоскости граней кубов T , параллельные $\phi x y$, отмечают на высоте полную шкалу T_z , образованную отрезками U_z , длиной 1, отрезками $U_{1,z}$, длиной $\frac{1}{10}$, отрезками $U_{2,z}$ длиной $\frac{1}{10^2}$, и т. д. Плоскости граней кубов T ,

параллельные ωz , отмечают на перпендикулярном сечении цилиндра полную сеть T_{xy} , образованную квадратами U_{xy} со стороной 1, квадратами $U_{1,xy}$ со стороной $\frac{1}{10}$, и т. д.

Полученная шкала и сеть позволяют измерять длину высоты и площадь перпендикулярного сечения; пусть

$$n_{i,z}, N_{i,z}, n_{i,xy}, N_{i,xy}$$

являются числами, соответствующими отрезкам $U_{i,z}$ и квадратам $U_{i,xy}$. Мы знаем, что

$$\frac{N_{i,xy} - n_{i,xy}}{100^i} \quad \text{и} \quad \frac{N_{i,z} - n_{i,z}}{10^i}$$

стремятся к нулю, при i , неограниченно возрастающем, и что $\frac{n_{i,xy}}{100^i}$ и $\frac{n_{i,z}}{10^i}$ стремятся к B и H .

Так как n_i и N_i суть числа, соответствующие рассматриваемому цилиндру и полученные с помощью кубов U_i сетки T , то имеем:

$$n_i = n_{i,z} \cdot n_{i,xy}; \quad N_i = N_{i,z} \cdot N_{i,xy};$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{N_i - n_i}{1000^i} &= \frac{N_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{N_{i,xy}}{100^i} - \frac{n_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{n_{i,xy}}{100^i} = \frac{N_{i,z} - n_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{N_{i,xy}}{100^i} + \\ &+ \frac{n_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{N_{i,xy} - n_{i,xy}}{100^i}, \end{aligned}$$

т.е. мы получили выражение, стремящееся к нулю. Итак, цилиндр имеет объем. Приближенные значения этого объема суть числа:

$$\frac{n_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{n_{i,xy}}{100^i} \quad \text{и} \quad \frac{N_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{N_{i,xy}}{100^i},$$

которые заключают между собой число BH ; следовательно, объем равен BH .

45. Этот объем остается инвариантным при таком относительном перемещении T и цилиндра, при котором ωz остается само себе параллельным; или, само собой разумеется, при перемещении, при котором остаются неизменными направление ωx или направление ωy .

Обобщим этот результат, показав, что если у тела S имеется объем, то и после перемещения относительно

сетки T , при котором ωz остается параллельным самому себе, объем тела S существует и остается равным первоначальному. Пусть S' — новое положение S относительно T , Γ'_i и Δ'_i — новые, перенесенные вместе с телом S , положения Γ_i и Δ_i , где Γ_i и Δ_i — фигуры, образованные соответственно n_i и N_i кубами U_i сетки T , причем Γ_i содержится в S , а Δ_i содержит S .

Каждый куб U_i тела Γ_i или Δ_i превращается рассмотренным перемещением в куб U'_i того же объема; следовательно, для достаточно большого j кубы U_j , содержащиеся в U'_i , обладают объемами, сумма которых на сколь угодно малую величину меньше $\frac{1}{1000^j}$, а сумма

объемов кубов, объемлющих U'_i , на сколь угодно малую величину больше того же числа. Отсюда следует, что при достаточно больших j , кубы U_j дают для S' величину $\frac{n'_j}{1000^j}$, большую всякого числа, взятого меньшим

$\frac{n_i}{1000^i}$, и величину $\frac{N'_j}{1000^j}$, меньшую всякого числа, взятого большим $\frac{N_i}{1000^i}$. Итак, при достаточно больших j , имеем:

$$\frac{N'_j - n'_j}{1000^j} \leq \frac{N_i - n_i}{1000^i} + \varepsilon$$

при любом малом ε ; другими словами, S' обладает объемом, и этот объем, будучи общим пределом $\frac{n'_j}{1000^j}$ и

$\frac{n_i}{1000^i}$, будет служить объемом также для S .

Пусть теперь S и S' — два равных тела и предположим, что S обладает объемом; обозначим через $\omega\zeta$ и $\omega\zeta_1$ оси, связанные с S и принимающие положение $\omega'\zeta'$, $\omega'\zeta'_1$, когда S переходит в S' ; мы предположим $\omega\zeta$ совпадающим с $\omega\zeta$ и $\omega'\zeta'_1$ параллельным $\omega\zeta$ и одного с ним направления.

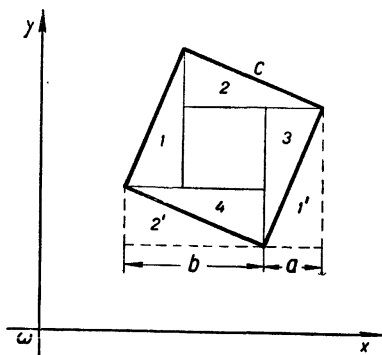
Подвергнем S сначала вращению вокруг оси $\omega\zeta$, приводящему $\omega\zeta_1$ в плоскость ωxz , затем вращению вокруг ωu , приводящему $\omega\zeta_1$ в $\omega\zeta$, наконец, перемещению, оставляющему $\omega\zeta$ параллельным самому себе, приводящему $\omega\zeta_1$ в $\omega'\zeta'_1$. Тогда S придет в положение S' с помощью трех

перемещений, каждое из которых оставляет объем инвариантным; следовательно, C' обладает объемом, равным объему C .

46. Этот результат есть не что иное, как свойство γ для объемов; и так как свойства β) и γ), а также замена единицы измерения изучаются для объемов аналогичным образом, как для площадей, то теорию объемов в одном направлении можно считать законченной; только неизвестно еще, к каким телам она приложима и находятся ли, например, среди этих тел все многогранники.

Всякий многогранник обладает объемом и, вообще, всякое замкнутое тело, граница которого состоит из плоских областей и частей боковых поверхностей цилиндров, перпендикулярные сечения которых имеют площадь, обладает объемом. В самом деле, мы видели, что цилиндр, перпендикулярное сечение которого имело площадь, обладал объемом, когда его образующие были параллельны ωz ; следовательно, по § 45, он обладает тем же объемом в любом положении; другими словами, общая поверхность такого цилиндра может быть заключена в кубы U_i , сумма объемов которых произвольно мала при i , достаточно большом; тем более то же явление имеет место для плоской области, вырезанной в основании, или для какой-либо части, вырезанной в боковой поверхности цилиндра. Отсюда и вытекает доказательство сформулированной теоремы.

47. Итак, нам остается лишь научиться вычислять объемы различных многогранников. Прежде чем к этому приступить, дадим другой вариант первого метода, вариант, который, впрочем, приложим и к изучению площадей. Предположим, что, говоря о площадях, мы изложили § 24—28; вместо § 29 мы будем теперь рассуждать иначе. Мы видели, что площадь прямоугольника с сторонами, параллельными ωx и ωy , равна произведению его сторон; откуда, как и раньше, следует, что перпендикулярное перенесение не изменяет площади. Изучим влияние вращения на



Черт. 16

квадрат со стороной c . Разделим квадрат в его новом положении прямыми, параллельными ωx и ωy , на четыре равных прямоугольных треугольника и на малый квадрат (черт. 16); если a , b — стороны треугольника, причем $a < b$, то сторона малого квадрата будет равна $b - a$. Произведя параллельное перенесение двух из треугольников, получим, кроме малого квадрата с площадью $(b - a)^2$, два прямоугольника с площадью ab каждый. Следовательно, согласно § 27, мы получаем многоугольник с площадью равной $(b - a)^2 + 2ab = a^2 + b^2 = c^2$.

Итак, площадь квадрата не зависит от его положения; отсюда следует, что если область s обладает площадью,

к которой отнесены числа n_i и N_i , то $\frac{n_i}{100^i}$ и $\frac{N_i}{100^i}$ и

после перемещения попрежнему представляют площади двух многоугольников, из которых один содержится в s , а другой содержит s . Таким образом, перемещение не влияет ни на существование площади, ни на ее величину.

Возвращаясь к объемам, предположим, что мы провели шаг за шагом параллель с площадями; мы придем к аналогу § 29. Тогда мы скажем: объем куба не изменяется ни при каком перемещении; так как такое перемещение является результатом перемещений, при которых одна из плоскостей $\omega x y$, $\omega y z$, $\omega z x$ скользит сама по себе, то достаточно будет предположить, что $\omega x y$ скользит сама по себе.

Пусть $n_{i,xy}$, $N_{i,xy}$, $n_{i,z}$, $N_{i,z}$ — числа, соответствующие этому кубу (§ 44) до перемещения; после перемещения числа $n_{i,z}$ и $N_{i,z}$ останутся прежними, а $n_{i,xy}$, $N_{i,xy}$ превратятся в $n'_{i,xy}$, $N'_{i,xy}$. Так что теперь объем куба будет заключен между

$$\frac{n_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{n'_{i,xy}}{100^i} \text{ и } \frac{N_{i,z}}{10^i} \cdot \frac{N'_{i,xy}}{100^i};$$

вторые множители этих произведений стремятся, на основании выводов, сделанных для площадей, к площади основания куба, которая не зависит от перемещения.

Установив, таким образом, инвариантность объема куба, мы можем заключить, что перемещение не влияет ни на существование, ни на величину объемов.

48. Итак, мы привели несколько способов изложения первого метода, все, по существу, одинаково длинные, когда их излагают подробно. Можно придумать еще мно-

го других способов. К тому же все они требуют вычисления объемов; это вычисление можно провести с помощью классических приемов. Я даю здесь четыре упрощения или замечания. Первое касается быстроты вычисления объема прямой призмы (§ 44).

После этого уже обычным путем выводят, что объем призмы с параллельными основаниями равен произведению перпендикулярного сечения на ребро. Затем, обходя мытарства с различными параллелепипедами, замечают, что две теоремы о проекциях отрезков и площадей дают:

$$\frac{\text{площадь перпендикулярного сечения}}{\text{площадь основания}} = \frac{\text{высота}}{\text{ребро}},$$

откуда следует, что объем равен произведению площади основания на высоту. Это упрощение применяется многими учителями; другое не столь распространено; к тому же оно опирается на соображения § 44.

С помощью симметрии, прямой или косой, относительно плоскости P тело C , обладающее объемом, преобразуется в тело C' , имеющее такой же объем. Так как сетку T можно брать в любом положении относительно C , то поместим грани кубов U_i в плоскости P . Симметрия переводит кубы U_i в параллелепипеды Π_i , основания которых, параллельные P , равны основаниям кубов U_i , а высоты равны высотам U_i ; следовательно, Π_i имеет тот же объем, что и U_i . Из этого следует, что если n_i и N_i суть числа, относящиеся к C , то C' содержит параллелепипеды Π_i с общим объемом $\frac{n_i}{1000^i}$ и содержится в па-

раллелепипедах Π_i с общим объемом $\frac{N_i}{1000^i}$. Вспомогательная теорема этим доказана.

Возвращаемся к классическому методу. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр; рассмотрим треугольную призму $ABCDEF$, ограниченную плоскостями ABC , DAB , DAC , плоскостью $CBEF$, проходящей через CB и параллельной DA , и плоскостью DEF , параллельной ABC . Эта призма образована тремя тетраэдрами: $ABCD$, $EBDC$ и $EFCD$. Любые два из этих тетраэдров могут быть переведены один в другой косой симметрией; например, имеющие общую грань симметричны относительно этой грани. Значит, они обладают одинаковыми объемами, равными

трети произведения основания ABC на высоту, проведенную из D .

49. Вычисление объемов многогранников этим фактически заканчивается¹⁾. Мое четвертое замечание, весьма второстепенное, относится к объему усеченной пирамиды. Обобщим рассмотренное нами тело, взяв два треугольника abc , def с параллельными сторонами одного и того же направления и тело S , ограниченное этими треугольниками и плоскостями $abde$, $bcef$, $cafd$. Если def равен abc , то мы имеем призму, если def или abc сведен к одной точке, то имеем тетраэдр; во всех этих трех случаях объемы суть HB , $\frac{HB}{3}$, $\frac{Hb}{3}$, где B — основание

в плоскости abc , b — основание в плоскости def и H — высота. Первый из этих объемов может быть записан как Hb , или $H\left(\frac{B}{5} + \frac{4b}{5}\right)$ и также рядом других способов. Чтобы два других объема имели тоже несколько выражений, нужно ввести другую площадь, помимо основания тетраэдра.

Пусть b_m — сечение нашего тела плоскостью, равноотстоящей от abc и def . В случае призмы мы имеем $b_m = B = b$; в случае же тетраэдра либо $4b_m = B$, $b = 0$, либо $4b_m = b$, $B = 0$. Таким образом, три объема будут представлены одной и той же формулой:

$$H(\lambda B + \mu b + \nu b_m),$$

где мы имеем:

$$\text{в случае призмы} \quad \lambda + \mu + \nu = 1;$$

$$\text{в случае тетраэдра, когда } b = 0, \quad \lambda + \nu \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3};$$

$$\text{в случае тетраэдра, когда } B = 0, \quad \mu + \nu \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$\lambda = \mu = \frac{1}{6}, \nu = \frac{2}{3},$$

что дает нам формулу:

$$\frac{H}{6} (B + b + 4b_m).$$

¹⁾ Следовало бы, однако, еще доказать это, показав, что всякий многогранник (выпуклый или нет) состоит из конечного числа тетраэдров.

Совершенно очевидно то преимущество, которое нам дает общая формула, в которую B, b, b_m входят линейно: она будет продолжать применяться к телам, получаемым путем соединения нескольких тел или отбрасывания таковых, словом путем образования нечто вроде алгебраической суммы тел, для которых она применима и которые имеют одни и те же плоскости оснований.

Например, эта формула применима к тетраэдру $BCDE$, имеющему две вершины в abc , две в def , так как такой тетраэдр получается из призмы $ABCDEF$ отбрасыванием двух тетраэдров $ABCD$ и $BFCD$. Или еще, формула применима ко всякому ранее рассмотренному телу S , так как S состоит из трех тетраэдров $abcd, ebcd, efcd$. В частности, она применима к усеченной треугольной пирамиде, значит, и к любой усеченной пирамиде, так как эта последняя образована соединением усеченных треугольных пирамид. Если мы обозначим через D, d, δ расстояния от вершины пирамиды до плоскостей B, b, b_m , то будем иметь:

$$\frac{D}{\sqrt{B}} = \frac{\delta}{\sqrt{b_m}} = \frac{d}{\sqrt{b}} = \frac{D - \delta}{\sqrt{B} - \sqrt{b_m}} = \frac{\delta - d}{\sqrt{b_m} - \sqrt{b}}.$$

Так как два последних числителя равны, то

$$\sqrt{B} - \sqrt{b_m} = \sqrt{b_m} - \sqrt{b},$$

$$\sqrt{b_m} = \frac{1}{2}(\sqrt{B} + \sqrt{b}),$$

$$b_m = \frac{1}{4}(B + b + 2\sqrt{Bb}),$$

и мы получим для объема выражение:

$$\frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Этот способ получения объема усеченной пирамиды и менее естественен, и менее быстр, чем способ, состоящий в нахождении разности двух пирамид, однако он подчеркивает значение нашей формулы трех горизонтальных плоскостей, формулы, к которой нам еще придется вернуться.

50. Мне больше нечего прибавить по поводу первого метода, приложенного к многогранникам; я перехожу, следовательно, ко второму и к третьему, состоящим, напоминаю, в использовании сначала классических при-

емов оценки объемов, удовлетворяющих условиям α), β), γ) (причем предполагается, что этим условиям возможно удовлетворить), и в доказательстве на этом основании свойства δ); затем в установлении, что полученные числа в самом деле удовлетворяют α), β), γ). Само собой разумеется, что через α), β), γ), δ) я обозначаю теоремы теории площадей, заменив слова „площади“ и „области“ словами „объемы“ и „тела“.

Для площадей доказательство состояло в использовании формул, которые в случае многоугольников вытекают во втором методе из формулы квадратуры в полярных координатах, а в третьем методе — из формулы квадратуры в прямоугольных координатах. Теперь, для многогранников, доказательство будет опираться на формулы кубатур в пространственных полярных координатах, полуполярных, или в прямоугольных; откуда и получатся все три приема. В первом из них, классическом, я укажу только на некоторые изменения в изложении, аналогичные тем, какими я пользовался в § 33, так как они опираются на теорему о проекциях для площадей, которой обычно редко пользуются в школах, несмотря на ее удобство.

Мы знаем, что для ориентирования плоскости можно задать угол в этой плоскости; если мы имеем две ориентированные плоскости, то углом между этими плоскостями мы называем угол между вторыми осями ϕ у, ϕ у' обоих прямых углов, их ориентирующих и проведенных таким образом, что их первые оси совпадают с линией пересечения обеих плоскостей. Ясно, что в зависимости от того, будет ли косинус этого угла положительным или отрицательным, мы имеем или не имеем соответствия между данной ориентировкой одной из плоскостей и ориентировкой той же плоскости, полученной при проектировании угла, который ориентирует другую плоскость. Абсолютная величина этого косинуса есть как раз то число, которое мы имели в теореме о проекции плоскости, рассмотренной в § 43.

Но мы сейчас придадим площадям знаки; для этого в плоскости, ориентированной углом ϕ ХУ, рассмотрим область той же ориентации, что и угол ϕ ху. В зависимости от того, будет или не будет соответствия между ориентировками углов ϕ ХУ и ϕ ху, мы наделим площадь Δ знаком $+$ или $-$. Заметим, что мы будем заниматься лишь областями, обладающими площадями. Тогда, проектируя Δ при помощи ортогональной проекции на плос-

кость, ориентированную данной проекцией угла ωx , мы получаем формулу проекции:

площадь проекции $\Delta = \text{площади } \Delta \cdot \cos(\text{угла проекции})$.

Рассмотрим многогранник Π и пусть ωxuz есть прямоугольный триэдр, который движется так, что ω не выходит за пределы Π . Если мы поместим ω на одной из граней так, чтобы ωz была нормальна к этой грани и направлена внутрь Π , то ωx определит ориентировку грани. Теорема о проекциях будет читаться: *сумма площадей ортогональных проекций ориентированных граней равна нулю*.

Пусть $F + F' + \dots + F^{(k)}$ — эта сумма; проведем проекции ребер многогранника; тогда каждая проекция грани изобразится многоугольником p ; предполагая, что площади P этих многоугольников имеют те же знаки, что и площади проекций соответствующих граней, напомним нашу сумму в виде:

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_k) + (P'_1 + P'_2 + \dots + P'_k) + \dots$$

В этой сумме один и тот же многоугольник p сможет встречаться несколько раз, давая то положительные, то отрицательные члены; теорема утверждает, что p дает столько же положительных, сколько и отрицательных членов.

В самом деле, проведем к плоскости проекций H перпендикуляр, проходящий через точку Ω , внутреннюю по отношению к p ; совместим с этим перпендикуляром ось ΩZ триэдра ΩXYZ , одинаковой с ωxuz ориентации, грань ΩXY которого определяет ориентацию H ; поместим к тому же ωxuz так, чтобы ω попала в одну из точек поверхности Π , проектирующихся в точку Ω , причем ωz есть нормаль к грани поверхности и направлена внутрь. Наконец, заставим ΩXYZ вращаться вокруг ΩZ , а ωxuz — вокруг ωz до тех пор, пока ΩX не станет параллельной ωx и одного с ним направления. Тогда косинус угла между H и плоскостью грани, ориентированной углом ωx , будет либо положительным, либо отрицательным, т. е. p входит в проекцию этой грани либо со знаком плюс, либо со знаком минус, в зависимости от того, будет ли угол $(\Omega Y, \omega y)$ острым или тупым; ибо этот угол есть также угол между ΩZ и ωz , а ωz к тому же направлено внутрь, в зависимости от того, будем ли мы, пробегая ΩZ в положительном направлении, входить или выходить из многогранника при проходе через упомянутую выше точку проекции Ω . Но совершенно очевидно, что, пробегая ось ΩZ

целиком, мы встретим столько же точек входа, сколько и выхода; таким образом теорема доказана.

Ее применение к интересующему нас вопросу непосредственно видно. Пусть O — какая-либо точка; как и в § 33, можно показать, что многогранник Π является алгебраической суммой пирамид с вершиной в O , основаниями которых являются различные грани Π . Применяя найденную для объема пирамиды формулу, мы отнесем Π следующую сумму:

$$\sum \frac{1}{3} \Phi_i \cdot \overline{H_i O},$$

где Φ_i — площадь (положительная) грани φ_i , H_i — основание перпендикуляра, опущенного из O на φ_i , и $\overline{H_i O}$ измерено в направлении, принимаемом ωz , если поместить ωxuz в положение, которое дает ориентацию φ_i .

Остается только доказать, что это число положительно и удовлетворяет условиям β) и γ); это моментально следует (§ 33) из того факта, что оно не зависит от выбора O . В самом деле, заменим O через O' ; тогда сумма перейдет в следующую:

$$\frac{OO'}{3} \sum \Phi_i \cos(\overline{OO'}, \overline{HO}) = \frac{OO'}{3} \sum \Phi_i \cos(\varphi_i, OXY),$$

причем триэдр $OXYO'$ взят прямоугольным с той же ориентацией, что и ωxuz . Согласно нашей теореме о проекциях, сумма в правой части равенства равна нулю, что и доказывает инвариантность числа, соответствующего Π .

51. Оба других приема должны пользоваться выражениями объема любого многогранника, выведенными из формул кубатур в полуполярных или обыкновенных координатах. Обе эти формулы допускают интеграцию по z и двойную интеграцию по x, y , причем обе интеграции можно производить в любом порядке. Это приводит либо к разбиению многогранника на усеченные призмы, если плоскости, параллельные oz , провести через ребра, либо к его разбиению на пласты, если плоскости, параллельные oxy , проведены через вершины.

Рассмотрим первое разбиение. Нам нужно оценить объем каждой усеченной призмы с помощью двойного интеграла, взятого по перпендикулярному сечению приз-

мы, вычисленного с помощью полярных координат, если были взяты полуполярные пространственные координаты, и с помощью обыкновенных координат, если были взяты декартовы пространственные координаты. Это приводит к образованию на перпендикулярном сечении разбиений соответственно § 33 и 35. Таким образом, мы можем рассматривать многогранник, в первом случае, как алгебраическую сумму усеченных треугольных призм с образующими, параллельными oz , и общим ребром, совпадающим с oz , а во втором, — как сумму усеченных призм с образующими, параллельными oz , перпендикулярные сечения которых являются трапециями с основаниями, параллельными ou , могущими в частном случае оказаться треугольниками.

Весь этот анализ имел своей единственной целью получить нужное разбиение; само собой разумеется, что в элементарном изложении мы не будем говорить ни об интеграле, ни о происхождении разбиения, которое здесь нужно принять без всяких предварительных объяснений. Таким образом, мы скажем: разобьем любой многогранник таким-то и таким путем на алгебраическую сумму усеченных треугольных или трапециевидных призм и найдем алгебраическую сумму их объемов; при этом мы произвольно будем считать, что эти объемы задаются, например, формулой трех горизонтальных плоскостей; эта сумма и будет числом, которое мы должны отнести к многограннику.

Само собой разумеется, что нужно будет доказать свойства α), β), γ); я не буду останавливаться на этих доказательствах, которые читатель легко сам придумает как в одном, так в другом из рассмотренных нами случаев, и перейду к случаю разбиения на пласты.

Если применить полярные координаты, то вычисление объема одного из таких пластов не дает элементарных результатов, так как придется разбивать слой с помощью гиперболических параболоидов; но обыкновенные координаты приведут к элементарным выражениям. Отнесем каждой боковой грани пласта усеченную призму с трапециевидным или треугольным основанием, образованную теми точками прямых, проектирующих на uoz точки грани, которые лежат между гранью и плоскостью uoz . Многогранник является алгебраической суммой этих усеченных призм, откуда мы еще раз получим выра-

жение объема любого многогранника, который, как можно показать, будет удовлетворять свойствам α), β), γ).

52. Итак, мы обрисовали в общих чертах три изложения, заменяющих для объемов изложение § 35, данное для площадей; последнему из них мы дадим форму, более близкую к § 35.

Разобьем данный многогранник на пласты плоскостями, проведенными через вершины параллельно ox ; каждый из этих пластов является телом, ограниченным двумя многоугольниками, расположенными в двух, параллельных к ox , плоскостях, так называемых плоскостях оснований, и трапециями (могущими в частном случае оказаться треугольниками), основания которых находятся соответственно в обеих плоскостях оснований. Дальнейшее разбиение показало, что каждый пласт можно представить как алгебраическую сумму усеченных призм с образующими, параллельными ox , одно основание которых является боковой гранью (трапецией или треугольником) рассматриваемого пласта. Разбиение каждого усеченного трапецоида диагональной плоскостью сводит исследование к рассмотрению лишь усеченных треугольных призм; каждая из них разбивается на три тетраэдра (по свойству треугольных призм), и окончательно можно рассматривать пласт как алгебраическую сумму тетраэдров, четыре вершины которых находятся в обеих плоскостях оснований. Обратно к тому же, всякая алгебраическая сумма таких тетраэдров может принять форму тел, которые мы называли пластами. Пласты, следовательно, являются самым общим видом многогранников, для которых соображения § 49 оправдывают формулу трех горизонтальных плоскостей. Теперь, руководясь предшествующим анализом, но, не ссылаясь на него, покажем, что условия α), β), γ), совместны.

Разделим всякий данный многогранник на пласты плоскостями, параллельными ox ; обозначим высоту пласта через H_i , площади двух многоугольников оснований через B_i и b_i и площадь сечения, равноотстоящего от плоскостей оснований, через β_i ; в силу условия мы отнесем многограннику число $\sum \frac{H_i}{6}(B_i + b_i + 4\beta_i)$. Остается доказать свойства β) и γ).

Аналогично с § 35 сначала рассматривают частные случаи β): случай пласта-суммы двух пластов, имеющих

общие плоскости оснований, и случай пласта-суммы двух пластов, имеющих общий многоугольник основания и расположенных с обеих его сторон. Лишь этот второй случай требует объяснения; доказательство будет заключаться в простом алгебраическом подсчете, коль скоро мы научимся вычислять площадь сечения пласта (H, B, b, b_m) плоскостью, параллельной плоскостям оснований и отстоящей от этих плоскостей на L и l ,

$(H = L + l)$. В случае, когда $b = 0, b_m = \frac{B}{4}$, площадь сечения равна $\left(\frac{l}{H}\right)^2 B$; если $B = 0, b_m = \frac{b}{4}$, она равна $\left(\frac{L}{H}\right)^2 b$; если $B = b = b_m$, она равна B . Пласт же, буду-

чи алгебраической суммой тетраэдров, четыре вершины которых находятся в плоскостях основания, является вследствие этого (§ 49) алгебраической суммой тетраэдров и треугольных призм, подходящих к одному из этих трех частных случаев.

Таким образом, сечение любого пласта будет задаваться выражением $\lambda B + \mu b + \nu b_m$, если λ, μ, ν выбраны так, что эта формула пригодна во всех трех рассмотренных частных случаях:

$$\lambda + \frac{\nu}{4} = \left(\frac{l}{H}\right)^2; \mu + \frac{\nu}{4} = \left(\frac{L}{H}\right)^2; \lambda + \mu + \nu = 1,$$

откуда имеем формулу:

$$\frac{1}{H^2} \left[l(l-L)B + L(L-l)b + 4Llb_m \right],$$

исходя из которой, можно свести проверку к алгебраическим подсчетам.

Проверка β) в общем случае из нее вытекает, как и в § 35. Точно так же проверка γ) сводится к вычислению числа, отнесенного к тетраэдру, опять как в § 35.

53. Итак, мы имеем окончательно, помимо других, три изложения, совершенно аналогичных изложениям для случая площадей. Заметим еще раз, что я не считаю, что эти изложения должны быть приняты в школе; но проведенное нами исследование, по-моему, можно рекомендовать вниманию будущих учителей как пример сближения отдаленных глав математики, какими являются элементарная геометрия и интегральное исчис-

ление. Это исследование позволит им лучше овладеть преподаванием, которым им придется заниматься; следовало бы требовать его от них, если бы у нас больше заботились о подготовке учителей, вместо того, чтобы заниматься почти исключительно их набором.

Что же касается практических выводов для преподавания, которые можно сделать из этого исследования, то о них я уже упоминал в § 40: следует избежать некоторых традиционных длиннот и, в особенности, осмелиться заявить, что объем имеет определение, и это определение дать. Само собой разумеется, что это будет определение, соответствующее первому изложению, быть может, подслащенное в случае надобности. С его помощью можно будет оценить объемы круглых тел, не навлекая на себя серьезных упреков § 42.

Изложение определения объемов круглых тел может быть дано следующим образом: мы приписали объем телам с поверхностью, перпендикулярной из плоских и цилиндрических частей, перпендикулярные сечения которых принадлежат к семейству плоских кривых, каждая из которых может быть заключена в квадраты со сколь угодно малой суммой площадей; с помощью этих плоских кривых мы создадим два новых семейства поверхностей, каждая из которых может быть заключена в многогранники, сумма объемов которых произвольно мала; телам, ограниченным подобными поверхностями, наше определение позволяет отнести объем.

Пусть Γ — одна из таких кривых; ее можно заключить в квадраты C_i , общая площадь которых меньше ε :

$$\sum (\text{площадь } C_i) < \varepsilon.$$

Рассмотрим часть конической поверхности, ограниченной Γ и точкой S на конусе, с вершиной S и с направляющей Γ ; пусть H — расстояние точки S от плоскости, в которой находится Γ . Эта часть поверхности заключена в пирамиды с вершиной S и основаниями C_i . Сумма их объемов

$$\frac{H}{3} \sum (\text{площадь } C_i) < \frac{\varepsilon H}{3}.$$

Итак, рассматриваемая коническая поверхность обладает желаемым свойством.

Повернем Γ вокруг какой-нибудь оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей Γ ; можно предположить,

что эта ось не пересекает C_i и что эти последние имеют стороны, параллельные оси; пусть тогда h_i — сторона C_i , а R_i — расстояние ее середины до оси. C_i образуют цилиндрическое тело, в основании которого лежит круговое кольцо, откуда сумма объемов этих тел будет:

$$\begin{aligned} \sum h_i \pi \left[\left(R_i + \frac{h_i}{2} \right)^2 - \left(R_i - \frac{h_i}{2} \right)^2 \right] &= 2\pi \sum R_i h_i^2 = \\ &= 2\pi \sum \left[R_i \cdot \left(\text{площадь } C_i \right) \right] < 2\pi R \varepsilon, \end{aligned}$$

если R взято самым большим из всех R_i .

Мы сможем сделать следующее заключение: *полученное нами тело вращения обладает объемом*. Отсюда можно вывести классические объемы элементарных геометрических фигур; само собой разумеется, что придется несколько изменить обычную форму изложения для того, чтобы теоремы не опирались больше на понятие площади кривых поверхностей, так как это понятие еще не было нами введено. Но это является единственным изменением, которое нужно будет внести, и доказательство приобретет значение, полностью недостающее ему в обычном изложении.

54. В этой главе мы пока что касались лишь техники; когда вопрос заходил о замечаниях и исследованиях, я мог отсылать к соответствующим параграфам главы о площадях. Однако возникает одно возражение, относящееся как к квадратурам, так и к кубатурам, в котором нужно разобраться: *так как дело касается лишь определения и получения чисел, то не следует ли дать больший простор вычислениям?*

В главе I я уже говорил, что целые числа суть не что иное, как материальные символы, придуманные для того, чтобы обозначать результат физической операции счета, и что было ребячеством бояться показывать и писать эти символы. В главе II я говорил, что и любые числа являются также лишь символами, обозначающими результаты физических опытов, конечно, геометрически схематизированных, но так, что можно почти наверное сказать, что схема коснулась не самой операции, а лишь предметов, которые подлежат счету: вместо того чтобы прикладывать деревянный метр к стене, которую нужно измерить, мы прикладывали единичный отрезок к измеряемому отрезку. Я уже говорил, что не нужно,

бояться писать эти числа; нужно вводить их в вычисления вместо того, чтобы ограничиваться алгебраическими обозначениями предполагаемых, но до конца не доведенных вычислений. Далее, в главах III и IV, я говорил, что площади и объемы являются теми же числами, теми же символами, но употребленными как результаты других операций, операций взятия квадратур и кубатур. Почему я в этих главах так много *рассуждал* о числах, вместо того, чтобы писать их и по настоящему вычислять? Не противоречил ли я таким поведением самому себе? Почему я не вычислял чисел n_i и N_i , о которых говорил?

Теоретически двух вычислений было бы достаточно, чтобы получить всю теорию площадей многоугольников и объемов многогранников: вычисления площади треугольника, взятого в любом положении относительно сетки T квадратов, служащей для определения площадей, и вычисления объема тетраэдра, взятого в любом положении относительно пространственной сетки T . В самом деле, из факта существования площади треугольника следовало бы, что отрезки прямой могут быть использованы для установления границ областей, имеющих площадь, и что, таким образом, всякий многоугольник обладает площадью; это положение было темой § 26. Как и в § 27, из этого положения вытекало бы и то, что площадь многоугольника, образованного несколькими другими многоугольниками, равна сумме площадей составляющих многоугольников. Затем § 29, где мы доказывали, что два равных многоугольника обладают одинаковой площадью, был бы заменен утверждением, что площадь, вычисленная для треугольника, взятого в любом положении, независима от этого положения.

В этом последнем пункте мы будем иметь значительное упрощение; в обоих других никакого упрощения не будет, так как придется давать ученикам одни и те же объяснения, будем ли мы основываться на вычислениях площадей прямоугольников, как мы это делали, или треугольников. Далее, оценки площадей были бы получены азными способами; но классические приемы, употребленные нами, весьма просты, тогда как фактическое вычисление чисел n_i и N_i , если предположить его математически возможным, педагогически было бы совершенно невозможным. Разберемся в этом.

В § 25 я мог бы дать вычисление площади прямоугольника, стороны которого параллельны сторонам квадра-

тов сетки T , более числовым путем, более похожим на те приемы, изложения которых рекомендовались в главах I и II. Я мог бы сказать: пусть нам требуется вычислить числа n_i и N_i для прямоугольника, расположенного согласно сказанному, две противоположные вершины которого имеют в качестве координат $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{5}, \sqrt{7})$, т. е. $(1,41 \dots; 1,73 \dots)$, $(2,23 \dots; 2,64 \dots)$. Точки квадрата U_1 , которые учитываются числом n_1 , имеют абсциссы, заключенные между 1,5 и 2,2, и ординаты, заключенные между 1,8 и 2,6; очевидно, что число таких квадратов $n_1 = 7 \cdot 8$. Точно так же точки квадратов, учитываемых числом N_1 , имеют абсциссы и ординаты, заключенные между 1,4 и 2,3, 1,7 и 2,7; откуда $N_1 = 9 \cdot 10$.

Для младших учеников такой способ представления чисел, быть может, будет более приемлемым, чем данный в § 25: но для таких учеников не может быть и речи о логически законченном изложении теории площадей; вот почему я предпочел изложение § 25, которое мне позволило говорить в § 44 об объемах цилиндров, в то время как более числовое изложение дало бы возможность говорить лишь о некоторых прямоугольных параллелепипедах.

В самом деле, как только мы отходим от простого случая прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов, расположенных специально относительно сетки T , вычисление n_i и N_i становится невозможным, по крайней мере, практически, даже если обратиться к студентам, заканчивающим свое образование в университете. Пусть попробуют вычислить n_i и N_i для треугольника, две вершины которого находятся в указанных точках, а третья имеет координаты $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$. Придется тогда вычислять, например, абсциссы точек пересечения периметра этого треугольника с прямыми, совпадающими со сторонами квадратов U_i , учитывая все десятичные знаки этих чисел. Совершенно ясно, что мы никогда не придем к вычислению n_i и N_i , а получим лишь значения, достаточно приближенные к этим числам, чтобы быть подставленными вместо них. Ясно также, что в ходе этих приближений снова выступит площадь специальных прямоугольников, рассмотренных в § 25, что для вычисления упомянутых абсцисс нужно будет разделить всякий треугольник на два посредством прямой, параллельной ox ,

словом, что мы снова вернемся к рассуждениям, эквивалентным только что примененным.

55. Тот факт, что нужно рассуждать относительно n_i и N_i , а не вычислять их, можно сопоставить со следующим важным наблюдением. Несмотря на все наши усилия, приложенные к устранению метафизики из математических рассуждений, нам, однако, не удалось иметь дело исключительно с конкретным. Выше я говорил, что операции геометрических измерений были лишь физическими операциями, приложенными к схематизированным предметам; все это справедливо постольку, поскольку речь идет об употребляемом нами процессе измерения, но при его применении имеется существенная разница между случаями физическим и геометрическим: этот последний нуждается в повторении операции измерения неограниченное число раз. Геометрическое измерение начинается физически, но заканчивается лишь метафизически!

Совершенно бесполезно пытаться устранить это затруднение, так как оно коренится в понятии точки. Это понятие можно постичь лишь усилием ума, включающим предельный переход, т. е. мысленно охватить неограниченный ряд операций. Всякое геометрическое измерение принуждено иметь дело с таким же повторением. Чтобы от него избавиться, нужно было бы запретить говорить о точках, а значит, и вообще о числах в общем смысле слова; следовало бы прибегнуть, например, к той арифметике чисел трех цифр, о которой несколько раз говорил Клейн (Klein) и которую никто никогда не построил: арифметику, в которой числа из трех цифр не будут употребляться для написания приближенных значений подразумеваемых чисел, но в которой *в самом деле* будут существовать лишь числа, состоящие из трех цифр.

Мы вынуждены обойтись без этой арифметики по той причине, что ее не существует. Впрочем, в таком случае нам потребовалась бы также арифметика чисел четырех цифр, пяти цифр и т. д., чтобы быть в состоянии описывать все более и более точные физические измерения; прием, к которому люди пришли и который пользуется числами, состоящими из бесконечной последовательности цифр, кажется более естественным и в то же время более простым. Из этого можно вывести заключение, что целью наших геометрических измерений являются не числа, получаемые на первой или второй стадии измерения, а

число, к которому можно прийти лишь путем воображаемой операции. Все n_i и N_i не имеют сами по себе никакого значения для нас; они лишь инструменты, используемые для достижения нашей цели; можно заменить их другими, более удобными, если таковые нам представятся. Мы имеем полное право не вычислять их и утверждать, что число-мера является результатом наших операций измерения, несмотря на то, что оно, вообще говоря, не дает нам чисел n_i и N_i . Эти последние имеют лишь случайные значения; производя измерение с другим относительным положением области и сетки T , мы придем к другим числам n_i и N_i ; точно так же два экспериментатора, пришедшие к одному и тому же значению физической константы, не обязаны были для этого получать одни и те же экспериментальные числа во время своих измерений.

56. Чтобы уточнить вышесказанное и чтобы избежать недоразумений, я задержался на одном из возможных смыслов вопроса: „не следует ли больше использовать возможность вычислений?“ Обычно этому вопросу придают другой смысл: „не следует ли получать площадь треугольника и объем тетраэдра из рассмотрения близких к ним областей, не обязательно состоящих из U_i , площади или объемы которых вычисляются по формулам, дающим суммы квадратов или кубов целых чисел?“ Это хорошо известный метод, употребляемый некоторыми учителями на занятиях в классе; можно сказать, что в случае треугольника он лишь усложняет дело, что в случае тетраэдра он обладает тем преимуществом, что избавляет от необходимости сравнивать два тетраэдра, позволяя вести рассуждения лишь об одном тетраэдре. Но он несколько не освобождает нас от тонких пунктов доказательств, больше всего затрудняющих учеников; я говорю о построении близких областей и о переходе к пределу. Этот метод более соответствовал бы указанному здесь полному изложению, чем обычному; при полном же изложении не будет никаких неудобств в том, что объем тетраэдра получится с помощью суммирования.

Я затруднился бы повторить свои слова, если бы дело касалось курса преподавания в младших классах: вычислять — это действовать, и поэтому вычисления нравятся детям больше, чем рассуждения; они охотно подчиняются правилам вычислений, подобно правилам любой игры. Для математика вычислять — это рассуждать, это еще глубже

анализировать геометрические факты; для ученика младших классов вычислять — это предоставлять заботу рассуждать символам вместо него, это забыть о всяких геометрических фактах, чтобы видеть лишь символы. Когда какой-нибудь вопрос, например объем тетраэдра, требует вычислений и рассуждений, ученик уверен в безукоризненности своего ответа, если он написал на доске две или три строчки необходимых равенств; совершенно неважно, по его мнению, что рассуждения заменены бессвязной болтовней.

Если, как мне кажется, преподавание математики в средней школе имеет целью формирование интеллекта, а не приобретение техники и математических познаний, то вычисления не должны играть в нем значительной роли. На более высоких ступенях обучения, когда преподавание будет иметь дело с молодыми людьми, настолько вовлеченными в непосредственные рассуждения над геометрическими, механическими и физическими фактами, что ничто уже не сможет эти факты замаскировать, вычисления смогут получить больше места.

57. Не стоило бы приводить эти замечания, если бы я имел в виду лишь малозначительный вопрос: каким способом следует лучше вычислять объем тетраэдра? Но не так давно один инспектор начального обучения во Франции поставил вопрос: не следовало ли бы вычислять площади и объемы, пользуясь формулами интегрального исчисления?

Насколько я понимаю, его идея состоит в следующем: нужно вычислять обычным способом площадь прямоугольника, объем прямоугольного параллелепипеда, рассматривая площадь и объем как понятия первичные или достаточно выясненные сходством с мощением комнаты плитами и возведением кирпичной стены; затем нужно доказать (что уже относится к программе бакалаврства во Франции), что площадь, ограниченная осью x , ординатами a и X и дугой кривой $y = f(x)$ $[a < X, f(x)$ не-

прерывна и положительна], есть функция X , производ-

ная которой есть $f(X)$; можно доказать аналогичное свойство для объемов, если считать $f(x)$ площадью сечения плоскостью с абсциссой x ; эти теоремы и при-

ложить к площади треугольника и круга, к объемам пирамиды, цилиндра, конуса и сферы.

Посмотрим, не уменьшит ли, с точки зрения принципов § 18, эта погоня за непосредственной выгодой образовательной ценности курса математики. И вообще, многим ли из детей пятнадцати- и шестнадцатилетнего возраста, получающим среднее образование, придется впоследствии вычислять площади или объемы? Можно допустить, что все они несколько раз в жизни будут иметь случай интересоваться количеством кусков обоев для стены или квадратных метров ковра для комнаты. Но вряд ли найдется один на сто, который будет заниматься вещами более сложными, чем прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды, изучаемые на первой ступени обучения. И не найдется ни одного на тысячу, на обязанности которого будет придумать новую формулу квадратуры или кубатуры, а не только пользоваться формулами, установленными до него.

Таким образом, единственной непосредственной выгодой будет то, что использование приемов интегрального исчисления начнется уже со средней ступени обучения, потому что ученики, образующие меньшинство, правда, значительное, должны будут в дальнейшем ходе их обучения ознакомиться с этим исчислением.

58. Но изучение площадей и объемов имеет еще и другое, более важное, значение, требующее своего рассмотрения: оно помогает понять, каким образом люди, преследуя практические цели, создали геометрию и в какой мере последняя оправдала потраченные на нее усилия; оно показывает, как очищаются грубые первоначальные понятия, отделяясь от смежных понятий, как они уточняются, когда выдвигается на первое место то, что их характеризует, и как таким путем приходят к выражению понятий в точных логических терминах, т. е. создают настоящее математическое понятие.

Без сомнения, мы сами не думаем об этих вещах, когда ведем такое преподавание¹⁾; но если оно не оправдывается своей практической выгодой, если оно сохраняется не просто в силу рутины, то значит, оно навязывается нам не чем иным, как этим общекультурным интересом. И оно навязывается нам постольку,

¹⁾ Примеч. пер. е в. Очевидно, автор имеет в виду изложение, намеченное в параграфах, предшествующих § 56.

поскольку без него мы не установили бы никакой связи между двумя основными понятиями математики: точкой и числом.

Сверх определения числа, т. е. результата измерения длины, нужно рассмотреть и другие меры для того, чтобы дать почувствовать ту необычайную точность, которую вносит число в области, где оно применяется; число, которое одно только дает физику уверенность и достоверность. В то же время мы смогли бы дать лучше почувствовать, что это могущество числа не есть некоторое мистическое свойство которым, оно обладает, что оно проистекает исключительно из тех усилий, которые анализ направляет на изучаемое понятие для того, чтобы придать ему точность числа; что недостаточно поспешно упомянуть о числе, не определенном вовсе или плохо определенном, чтобы внести ясность в тот или другой вопрос; что число приходит напоследок, являясь в некотором роде показателем достигнутого прогресса.

Нет сомнения, что наши ученики, сообразуясь каждый со своим интеллектуальным уровнем, отнесутся весьма по-разному к этим поводам усвоить более тонкую культуру мысли и что никто из них не будет в состоянии объяснить те преимущества, которые он извлек из изучения площадей и объемов. Но нужно быть довольным, если некоторые из них будут настолько вовлечены в изучение этого вопроса, что при других обстоятельствах смогут провести аналогичные рассуждения; нас не должен удивлять тот факт, что безусловно найдутся ученики, способные к таким рассуждениям. Возьмем среднего ученика из класса математики, прошедшего обычный курс обучения без того, чтобы ему упомянули о свойствах α), β), γ), δ). Покажите ему, что эти свойства характеризуют площади, например, при помощи приемов § 31 или § 35; ученик заинтересуется доказательствами, новыми для него, но он вам скажет, что доказываемое обстоятельство было ему уже хорошо известно. Говоря это, он, конечно, ошибается; но его ответ во всяком случае показывает, что он бессознательно пришел к истине; нет ничего удивительного в том, что он при подходящем случае будет стремиться приобрести аналогичные истины.

Обычное изложение, формулируются ли в нем явно свойства α) β), γ), δ) или нет, опирается настолько очевидно на эти свойства, что они, по меньшей мере, бессознательно, запечатлеваются в сознании учеников.

Я боюсь, что это значительное преимущество исчезнет совершенно, если ввести изложение, основанное на интегралах. И не потому, чтобы обычное изложение говорило о происхождении понятий больше, чем это последнее, если не считать нескольких слов о мощении плитами и о кирпичной кладке, но потому, что оно позволяет лучше обращаться с понятиями в их наиболее элементарной форме. Когда мы говорим о переносе треугольников и тетраэдров, о разбиении тел на части, соответственно равные или эквивалентные, — вот когда мы осваиваемся со свойствами α), β), γ), δ). При изложении же, основанном на интегралах, все это исчезнет; самое большее, что останется, так это заполнение прямоугольников квадратами и прямоугольных параллелепипедов кубами, чего недостаточно, чтобы по-настоящему полчить представление о важности упомянутых характеристических свойств.

59. Прибавьте к этому, что, как я уже говорил, все внимание учеников будет захвачено вычислениями в ущерб рассуждениям. Можно уже сейчас в этом удостовериться: возьмите того же среднего ученика, который так хорошо использовал обычное изложение площадей и объемов, и попросите его воспроизвести данное ему доказательство классической теоремы о производной от площади некоторых областей¹⁾. Это будет нечто ужасное.

Но что в этом удивительного? Понадобились века, чтобы увидеть в понятиях интеграла и производной, которыми располагали под видом площади и касательной с самой глубокой древности, два обратных понятия, а мы хотим, чтобы худший ученик класса математики, совершенно лишенный математического гения, понял бы это сразу и вполне, на основании произнесенных перед ним слов, как будто одни слова могут служить фундаментом всего здания. Нужно иметь слишком высокое представление о преподавании, и я удивляюсь, что генеральный инспектор может иметь подобные иллюзии. Здесь не место анализировать затруднения, с которыми встретились наши предки; заметим только, что, по край-

1) Полная формулировка этой теоремы по необходимости должна быть длинной; этого тем не менее недостаточно, чтобы оправдать ту фразу, которую прежде находили в официальных французских программах: *производная площади кривой, рассматриваемой как функция абсциссы*.

ней мере, в одном пункте наши юные питомцы находят-ся в точности в состоянии умов людей XVII века: для них понятие функции совпадает с понятием ее выражения. Скорее даже для наших учеников имеются два рода функций: *настоящие*, те, которые встречаются в задачах (например, $ax^2 + bx + c$, $\frac{3x-2}{7-6x^2}$ и т. д.; они „име-

ют выражения“), и функции *теоретических рассуждений* [например $f(x)$], общее обозначение, которое принимает точное значение в приложениях, где оно становится, например, $3 \cos x - 2$]. Эти последние настолько неправдоподобны, что их рисуют, чтобы придать им хоть какую-либо реальность, механическое существование, как сказали бы раньше. И этот рисунок настолько педагогически необходим, что в курсах механики, где мы вынуждены говорить о функциях, не являющихся определенными выражениями, во второй половине XIX века было принято наводить изложение множеством чертежей и настаивать на графических приемах получения кривых, изображающих изменение пройденного пути, скорости, ускорения и т. д.

Точно так же в рассуждениях о производных некоторых площадей наших учеников больше всего смущает то, что здесь рассматривают плохую функцию $f(x)$, воплощенную в кривую, и что собираются находить еще худшую, ни во что не воплощенную, совершенно для них не существующую функцию, площадь¹⁾. Для учеников это рассуждение слишком абстрактно; наоборот, для нас нет ничего более конкретного. Для большей ясности мы пользуемся вспомогательным чертежом, конечно, неправильным, имеющим на деле силу лишь для тех, которые способны видеть, вычислять и рассуждать в одно и то же время. Но многие оказываются неспособными расчленять свое внимание на три части, и для них то свойство, которое мы хотим положить в основу теории площадей и объемов, остается темным и туманным.

60. Быть может, бесполезно, заканчивая, указать на одну тонкость в рассуждениях, встречаемую в приложениях интегрального исчисления к вопросу о кубатурах, на которую некоторые авторы учебников не обращают должного внимания.

¹⁾ Фраза, приведенная в предшествующей сноске, вероятно, не вносит недостающей ясности.

Чтобы облегчить вычисление приращения площади, получаемого в результате перемещения ординаты от абсциссы x до абсциссы $x+h$, часто допускают, что функция $f(x)$, определяющая граничную кривую, все время возрастает или все время убывает от x к $x+h$. Это ограничение нас не стесняет, так как оно удовлетворяется для всех практических случаев и в особенности потому, что ученики считают его само собой выполняющимся при достаточно малых h . Однако, если на непрерывную функцию $f(x)$ и не наложить никаких ограничений, рассуждения нисколько не усложнятся.

Но предположим, что дело идет о кубатуре. Пусть мы имеем тело, сечения которого плоскостями, параллельными uoz , имеют площадь $A(x)$, являющуюся непрерывной функцией абсциссы x секущей плоскости, и пусть мы желаем вычислить объем части тела, заключенной между плоскостями с абсциссами x и $x+h$. Эта часть заключена в цилиндре с высотой h , перпендикулярное сечение которого является совокупностью проекций на uoz сечений тела плоскостями, параллельными uoz , и имеющими абсциссы, заключенные между x и $x+h$; она содержит аналогичный цилиндр, перпендикулярное сечение которого является общей частью указанных проекций. Требуется доказать, что оба этих перпендикулярных сечения обладают площадями, стремящимися к $A(x)$, когда h стремится к 0; это отнюдь не очевидно и может быть доказано лишь в случае точного определения, что подразумевают под понятием тела. Но если нужны уточнения и будут сделаны, доказательство еще не станет непосредственным, даже если предположить наличие развернутого в начале этой главы изложения; это значит, что в случае простого и быстрого изложения мы можем быть строгими лишь за счет общности. Таким образом, если, вопреки обыкновенно мной наблюдаемому, желают быть строгими, нужно вводить ограничения. Самым естественным будет предположение, что из двух параллельных uoz сечений одно содержит другое в своей проекции; но тот, кто видит хотя бы необходимость такого ограничения, чтобы поставить вне сомнения существование простых свойств объема, не ставит ли под сомнение само существование этого объема?

61. В этом последнем параграфе мне придется несколько отступить от темы, чтобы остановиться на возражении против вычисления площади треугольника или

объема тетраэдра с помощью сумм квадратов или кубов: эти суммы получаются слишком искусственным путем, который заучивается учениками наизусть, но ничего им не дает. Это, конечно, правильно. Однако возражение имеет в виду исключительно обычно принятый способ изложения; его можно устранить, если стать ближе к историческим фактам.

В XVII веке математики находили, в частности при вычислении площадей и объемов, суммы членов u_1, u_2, \dots , данных как функции их индексов, и это подготовило почву и сделало возможным изобретение исчисления бесконечно-малых. Приемы, которые они употребляли, весьма различны по виду, но в конце концов становится ясным, что все они сводятся к следующему замечанию. Нужно вычислить суммы:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad s_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p; \quad (1)$$

значит, $s_p - s_{p-1} = u_p$ для всякого значения p , большего единицы. Предположим же, что мы нашли, неважно как, такую функцию от p σ_p , что для всякого $p > 1$ будем иметь:

$$\sigma_p - \sigma_{p-1} = u_p; \quad (2)$$

тогда

$$\begin{aligned} s &= u_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + \dots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \\ &= \sigma_n - \sigma_1 + u_1. \end{aligned}$$

Вычисление сумм (1) сводится, следовательно, к отысканию функции σ_p , удовлетворяющей равенству (2).

Уточним нашу мысль: мы хотим найти *выражение* σ_p , алгебраическое или тригонометрическое относительно p , которое удовлетворяло бы (2) при данном u_p . Таким образом, мы находимся в положении рабочего, которого спрашивают, имеет ли он подходящий для данной работы инструмент, и который в ответ на это начинает обзирать свой ящик с инструментами. Этот обзор его не затруднит и не отнимет много времени, если он знает, чего можно ожидать от каждого инструмента, и если он хотя бы раз уже сделал учет возможностей, таящихся в его наборе инструментов.

Последуем примеру нашего рабочего и спросим себя, каковы u_p , которые мы получим по формуле (2), если на место σ_p будем подставлять различные, зависящие от p , выражения, которые мы умеем строить. Тогда мы про-

изведем учет всех тех суммирований, которые мы сможем выполнить.

Мы не станем показывать, как, исходя из σ_p , полиномов от p , мы получаем полиномы u_p (откуда, в частности, вытекают процессы суммирования, необходимые для получения площади треугольника или объема тетраэдра), как, исходя из $\sigma_p = Aa^p$, мы приходим к геометрическим прогрессиям, а из $\sigma_p = A \cos(px + h)$ — к суммированию тригонометрических выражений, и т. д.

Мне кажется, что это небольшое изменение в изложении существенно меняет все его значение. Во-первых, вычисления здесь выступают как вспомогательное средство здравого смысла и рассуждения, как нечто направляемое ими, а не как замещающее их благодаря какой-то таинственной силе. Во-вторых, это изложение поможет нашим ученикам понять, каким образом люди XVII века были подготовлены к пониманию и к открытию приемов вычисления неопределенных интегралов, а также к установлению связи между интегрированием и дифференцированием, т. е. предельными операциями вычисления соответственно σ , исходя из u , и u , исходя из σ .

V.

ДЛИНЫ КРИВЫХ. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

62. Учебники элементарной геометрии ограничиваются вычислением предела периметров некоторых вписанных и описанных около круга многоугольников, предела площадей поверхностей призм и пирамид, вписанных в цилиндр или конус вращения, и площадей некоторых поверхностей, приближающихся к сферической поверхности. Не дается никакого общего определения, так что возражения § 42 и 53 могут быть сделаны, например, уже по поводу вычислений площадей самых простых поверхностей, образованных частями сфер, цилиндров и конусов, коль скоро они не совпадают в точности с поверхностями, рассмотренными в учебниках, и не подходят под явно или неявно сделанное условное определение. Таким образом, всю эту часть школьного курса можно считать почти несуществующей, и если все эти условные определения до сих пор сохранились, так это потому, что понятия длины кривой и площади поверхности являются одними из самых старых, и что измерение длин и площадей очень много изучалось геометриями и способствовало открытию исчисления бесконечно-малых.

Практическая важность этих понятий, историческая роль, которую они сыграли в деле развития науки, заставляют нас, таким образом, сохранить эту главу, которая, однако, должна быть составлена заново, а не только исправлена, как это было с предшествующими главами. Содержание этих последних было закреплено традицией, и мы занимались лишь установлением способов доказательства и изложения; сейчас же должно быть определено само содержание главы. Содержание преподавания зависит от задач, стоящих на каждой ступени обучения, и от экзаменационных программ. Поэтому было бы невозможно здесь (в этой книге) дать изложение, непосредственно пригодное, например, для средней школы.

Вместо этого нам предстоит определить те основные факты, которые явятся предметом изучения как в средней, так и в высшей школах.

Что касается специально высшей школы, то во многих курсах высшей математики вычисление длин и площадей дается с помощью простых и двойных интегралов в прямолинейных и полярных координатах, но при этом нарочито избегают определений, т. е. того, что является действительно геометричным. Случается, что во Франции, в некоторых учебниках, ограничиваются заявлением: мы называем длиной кривой, данной в прямоугольных координатах выражениями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, функцию $s(t)$, определенную отношением:

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

и на этом все кончается!

Итак, не заботясь о разграничении того, что следует излагать в средней школе и что нужно оставить для университета, я рассмотрю этот вопрос, ограничиваясь, главным образом, разъяснением понятий.

§3. Сначала краткий исторический обзор поможет нам избежать некоторых трудностей и заставит признать необходимость некоторых предосторожностей. Для древних понятия длины, площади, объема были первичными понятиями, ясными сами по себе, не требующими логических определений. Аксиомы, почти все неявно выраженные, употребляемые ими при вычислениях, не являлись в их глазах определениями этих понятий. Их интересовало всегда *место*, занимаемое линией, поверхностью или телом в пространстве. Затруднение начиналось лишь тогда, когда требовалось измерить это место, отнести к нему число; оно заключалось только в существовании несоизмеримостей. Отсюда и берут свое начало отвращения к числам, усилия, прилагаемые, чтобы как можно позже начать ими пользоваться, и необыкновенно искусственные приемы, о которых мы уже говорили, например, в § 14 и 20. Коши (Cauchy) первый дал логическое определение понятий длины, площади, объема; он сделал это случайно и до некоторой степени сам того не желая.

В двух предшествующих главах мы видели, как можно истолковать понятия площади области и объема тела, освобождая эти понятия от их метафизического смысла, рассматривая площади и объемы как числа и строя эти числа с помощью неограниченно повторяющихся опера-

ций, которые выше рассматривались как доставляющие приближенные меры площадей и объемов. При этом мы опирались на аксиомы и на неявно выраженные постулаты, являясь выражением или доказательством которых дает искомые логические определения. Мы знаем, что Коши аналогичным приемом построил определенный интеграл от непрерывных функций и таким путем доказал существование примитивных функций. Этим способом Коши не только логически определял площадь плоской области, объем тела, но так как он давал логическое определение и выражениям

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt \text{ и } \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

то он открыл способ определения длины, о котором я говорил в § 62, и наметил аналогичное определение для площади.

С точки зрения логической вопрос исчерпывающе разобран; подведем итоги достигнутому.

Часто говорят, что Декарт — следовало бы, по крайней мере, упоминать также и Ферма (Fermat) — свел геометрию к алгебре; между тем это не совсем верно, поскольку приходилось апеллировать к геометрическим понятиям: длинам, площадям, объемам. Лишь после Коши была по-настоящему установлена связь между геометрическими понятиями и операциями исчисления. Только после этого геометрия вполне свелась к алгебре, т. е., так как число вытекает из измерения длины (глава II), *геометрии плоскости и пространства были приведены к геометрии прямой.*

Чтобы прийти к так называемой *арифметизации* геометрии, оставалось лишь дать общее понятие числа, исходя из целых чисел, ничего не упоминая об измерении, т. е. ничего не говоря об операциях, совершаемых на прямой, а употребляя, например, сечения. Здесь используется лишний раз прием Коши, состоящий в том, что берут за определение числа сами операции, позволяющие найти приближенные его значения. В самом деле, задание сечения есть не что иное (об этом уже говорилось), как изложение в абстрактных терминах результата измерения длины.

64. Ну вот, таким образом, мы добрались до самой абстрактной, чисто логической формы изложения путем постоянного употребления своего рода опрокидывания

понятий, употребленных в свое время и Коши. И, однако, ни геометр, заинтересовавшийся геометрическими связями, существующими между линиями, поверхностями и телами, с одной стороны, и их длинами, площадями и объемами, с другой, ни физик, пожелавший узнать, почему физические длины, площади и объемы должны уподобляться таким-то интегралам, а не другим, не чувствуют себя удовлетворенными. Требуется дальнейшее изучение.

Первые результаты, относящиеся к кривым и поверхностям, были получены в предположении, что кривая есть ломаная с бесконечным множеством звеньев, а поверхность — многогранная поверхность с бесконечным множеством граней. Когда говорят о приближенной к кривой ломаной, то первое, что нам приходит в голову, это вписанные и описанные около этой кривой линии. По Пеано (Peano), постулаты, введенные Архимедом, эквивалентны следующему определению: длина дуги плоской выпуклой кривой равна общей величине верхнего предела длин ломаных вписанных и нижнего предела ломаных описанных. Таким образом, Архимед пользовался на равных правах прямой и точкой, этими одинаково первобытными элементами геометрии древних; он рассматривал кривую с точки зрения принципа двойственности: как носительницу точек и как огибающую прямых.

Мы знаем, что постепенно понятие прямой стало понятием второстепенным и что лишь с введением координат прямой (наподобие точечных) и с установлением принципа двойственности прямая частично вновь приобрела свое самостоятельное значение. В интересующем нас вопросе эта эволюция совершилась тогда, когда понятие кривой расширилось в понятие траектории: кривая попрежнему рассматривается как место точек, но не обязательно является огибающей прямых; берутся попрежнему вписанные многоугольники, но игнорируются описанные. Словом, при исследовании длин пришли к рассмотрению лишь вписанных ломаных, забывая при этом, что эти последние были выбраны исключительно ради их простоты и никакими особыми качествами, отличающими их от других приближенных ломаных, не обладают. Математики согласились на том, что длина кривой (площадь поверхности) есть предел длины вписанной ломаной (площади вписанной многогранной поверхности), если каждый из элементов стремится к нулю. И когда более глубокое изучение этих определений вы-

звало затруднения, математики очутились в беспомощном положении.

В вопросах о кривых этим (более глубоким) изучением особенно усиленно занимались Л. Шеффер (L. Scheffer) и К. Жордан (C. Jordan)¹⁾; предел, употребляемый для определения длины, всегда в известном смысле существует, но он может оказаться бесконечным: имеются кривые, ни одна дуга которых; как бы мала она ни была, не имеет конечной длины, или, если угодно, имеет бесконечную длину. Результат парадоксальный, противоречащий обычному употреблению слова „мал“, который именно вследствие этого заставил уточнить и разграничить некоторые, до этого времени смешиваемые, понятия; но все же этот результат не явился катастрофой, подобно той, какой, по мнению пифагорейских геометров (для которых числа исчерпывались дробями), было аналогичное открытие отрезка, не имевшего в их глазах длины. В самом деле, так как затруднения, если вообще таковые имеются, никогда не представлялись в случае простых кривых, то всегда можно было, следуя не особенно рекомендуемому, но часто употребляемому приему, объявить, что кривые, не имеющие длины, не настоящие кривые, поставить их, по крайней мере, временно, *вне математики*, т. е. отложить их изучение на более позднее время, в то время как поставить вне математики диагональ квадрата было невозможно.

Для поверхностей пришли к еще более удручающему результату. Шварц (Schwarz) в поисках максимального объема тела при данной площади его поверхности имел случай задуматься над понятием площади поверхности; в своем письме к Дженочки (Genocchi) он показал, что площади многогранных поверхностей, вписанных в данную поверхность, могут не иметь никакого предела; причем это явление можно наблюдать в случае даже самых простых поверхностей, например, цилиндра вращения. Пример Шварца так естественно приходит на ум при исследовании этого вопроса, что Пеано получил его, со своей стороны, почти одновременно, а затем многие геометры переоткрывали его и сообщали об этом в своих работах.

Покажем, в чем он состоит: разделим боковую поверхность цилиндра вращения плоскостями перпендику-

¹⁾ Исследования Жордана привели его к установлению одного из основных понятий в анализе: функции с ограниченным изменением.

лярных сечений на m равных частей; в окружность каждого сечения впишем правильный выпуклый n -угольник и проведем по толстоскости через ось цилиндра и вершины одного из многоугольников, поворачивая эти вершины многоугольника на угол $\frac{\pi}{n}$ при переходе от одного

перпендикулярного сечения к следующему. Рассмотрим затем вписанную многогранную поверхность, образованную равнобедренными треугольниками, основания которых являются сторонами этих многоугольников, а вершины суть вершины многоугольников, вписанных в соседние перпендикулярные сечения. Ясно, что полученная поверхность может быть сделана при n , неограниченно возрастающем, сколь угодно близкой к цилиндру; ясно также, что предел площади этой многогранной поверхности зависит от предела $\frac{n}{m}$. Таким образом, можно добиться

того, чтобы не существовало предела этой площади или чтобы он существовал, но имел произвольную величину.

65. Таким образом, геометрическое определение площади поверхности рушится; правда, катастрофой это еще не было, так как все соглашались с тем, что, по крайней мере, для простых поверхностей площадь может быть выражена следующим образом:

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy.$$

При наличии же аналитического определения оставалось лишь дать его геометрическую интерпретацию, которой более того уже отчасти владели. Еще до примера Шварца, показавшего полную невозможность сохранения принятого определения, затруднения с этим определением давали себя чувствовать всем пытавшимся основать на нем действительно строгое изложение. Некоторые даже хотели ограничить семейство вписанных многогранников с тем, чтобы получить возможность доказать существование предела для их площадей. Так, например, можно взять за определение, что площадь поверхности является пределом площадей вписанных в эту поверхность многогранных поверхностей, когда их грани бесконечно уменьшаются по всем направлениям так, что углы этих граней не стремятся к нулю. Предлагалось также вместо ограничения, налагаемого на углы граней, потребовать, чтобы

углы, образованные гранями с поверхностью, стремились к нулю.

Однако эти ограничения весьма искусственны; совершенно не очевидно, что при других простых ограничениях мы не получим другого предела; и совершенно неизвестно, какой из этих пределов лучше всего соответствует физическому понятию площади. К тому же математики задались целью найти определение площади, имеющей область применения, примерно схожую с той, ко-
торой обладало определение длины, изучавшееся Шэффером и Жорданом. Начали выдумывать, особенно это относится к Пеано и Эрмиту (Heimite), другие определения, но настолько удаленные от первоначальных, что площадь перестала в них фигурировать даже в виде предела площадей многогранников.

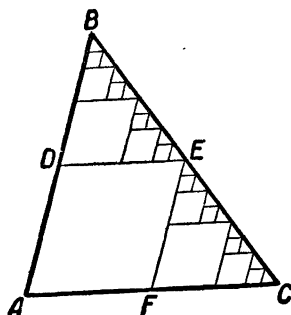
Мы сейчас покажем, что в действительности налицо были все математические факты, достаточные для установления связи между физическим понятием площади и аналитическим ее выражением и, с другой стороны, способные в случае надобности удовлетворить потребностям геометров в общности выводов. Это было понято лишь впоследствии.

6. Если бы математики не были гипнотизированы словом „вписанные“, если бы они не забыли, что *вписанные* были выбраны лишь как одно из средств *приближения* к поверхности, то они заметили бы, что встреченные затруднения для площадей существуют также и для кривых; между тем их больше всего смущало различие между кривыми и поверхностями. Я позволю себе здесь призвать на помощь мои воспоминания.

Как я уже говорил, во Франции в мои школьные годы при определении длин, площадей и объемов допускался переход к пределу. Вскоре в учебники закрались сомнения, так как те студенты, которые в курсе анализа Эрмита познакомились с выражением Шварца, стали в свою очередь учителями. К тому же многое располагало тогда к критическому пересмотру понятий: исследования в области функций действительного переменного и в области теории множеств, с которыми стали считаться, преподавание Таннери, выражавшее у многих его учеников стремление к полному пониманию основных понятий или, по крайней мере, к точности словесной формулировки этих понятий. Тогда начали сомневаться, зачастую не отдавая себе отчета, в чем в сущности сомневаются,

спутали, например, с рассуждением о пределах определения площади круга с помощью площадей многоугольников, содержащихся в круге и/или объемлющих его (§ 42). Но во всяком случае прежде, в мои школьные годы, и учителя и ученики были вполне довольны рассуждениями, основанными на переходе к пределу.

Однако эти рассуждения перестали меня удовлетворять, когда пятнадцати лет от роду я узнал от товарищей, что в треугольнике одна сторона равна сумме двух других и что $\pi = 2$. В самом деле, пусть ABC — данный треугольник (черт. 17), пусть D, E, F — середины BA, BC, CA ; ломаная линия $BDEFC$ имеет тогда длину, равную $AB + AC$; проделывая те же построения для треугольников DBE и FEC , получаем ломаную линию той же длины, состоящую из восьми звеньев, и т. д. Эти ломаные линии имеют BC своим пределом; таким образом, предел их длин, т. е. их общая длина $AB + AC$ равна BC . Аналогично проводится рассуждение и для π .



Черт. 17

Ничем, абсолютно ничем это рассуждение не отличается от тех, которые нам преподносили при вычислении длины и площади круга, поверхностей и объемов цилиндра, конуса и сферы. Приведенное доказательство было для меня весьма поучительным. Впрочем, всякий парадокс всегда очень поучителен; критический разбор парадоксов, исправление ошибочных рассуждений должно, по моему, быть нормальным и часто повторяемым упражнением в средней школе.

Вышеприведенный пример показывает, что в вопросах, касающихся длины, площади и объема, нельзя переходить к пределу без достаточного на то основания, и уже один этот пример, подобно примеру Шварца, способен возбудить все подозрения.

67. Рассмотрим ближе этот пример; наши ломаные линии, имеющие вид зубьев пилы, стремящихся к BC , имеют в качестве меры $AB + AC$, т. е. число, безразлично какое, но превышающее BC . Если же нам дана последовательность ломаных линий, стремящихся к кривой C , длины которых имеют пределом L , то, оперируя с каж-

дым звеном этих ломаных, как с BC , мы получаем новые ломаные, пределом длин которых будет любое данное нами число, превышающее L . Обозначим через L_0 нижнюю грань всех возможных пределов L ; тогда, по предыдущему, *предел L длин ломаных линий, стремящихся к кривой C , может быть любым числом, большим или равным L_0* . Вот почему, когда мне понадобилось определение длины и площади, которое имело бы широкое применение, я предложил взять L_0 в качестве длины и аналогичное число в качестве площади; я до некоторой степени был принужден к этому, так как L_0 является единственным среди всех пределов длин числом, отличающимся, по крайней мере, с первого взгляда, от других. Достаточно установить множество пределов длин, чтобы найти это число, которое есть полный отчет о результате поисков этих пределов.

Я не буду рассматривать здесь определения в их общем виде, которые появляются лишь после того, как физические понятия длины и площади увязаны с аналитическими определениями. Ввиду того, что мы преследуем здесь педагогические цели, этой последней связью мы и займемся.

68. Длину материальной кривой находят из опыта. Для того чтобы можно было определить число из опыта, нужно, чтобы при малом изменении данных величин оно само мало изменялось, так как нам всегда известны не точные значения данных величин, а лишь приближения к ним; значит, число должно каким-то образом определяться данными величинами непрерывно.

Постараемся уточнить нашу мысль. Экспериментальные определения создаются в результате некоторых технических операций, которые (если дело касается понятий, могущих привести, по их уточнению, к геометрическим понятиям), требуют употребления приборов, измерения таких-то расстояний, таких-то углов и т. д.; при этом необходимо, чтобы малым погрешностям в положении инструментов и в измерении соответствовали лишь малые изменения результата. Геометрическое определение получится тогда из техники после придания употребленным техническим операциям абсолютной геометрической точности. Если геометрическое определение не дает числа, изменяющегося непрерывно вместе с данными величинами, то это значит, что это определение не согласовано с опытными приемами измерения;

быть может, в некоторых случаях оно и даст точное отражение практического понятия, однако это нужно еще показать. Мы получили плохое определение.

Рассмотрим с этой точки зрения классическое определение длины; оно берет вписанный в кривую многоугольник и неограниченно увеличивает число его сторон, т. е. получает все возрастающее множество точек на кривой. Если же попробовать практически применить подобный процесс к кривой или отрезку BC , то получатся ломаные линии наподобие зубьев пилы с вершинами, приближающимися к кривой или к BC . С увеличением числа точек возрастает совершаемая погрешность; конечно, на практике имеются ограничения числа вершин многоугольников, переданные, быть может, только по традиции, основанные на определении верхнего предела ошибки, которая может оказаться налицо в положении этих вершин. Таким образом, классическое определение будет плохим определением, т. е. оно не будет в состоянии дать правильного отражения техники и обнаружить связь между теорией и практикой; чтобы получить хорошее определение, нам нужно подробнее рассмотреть экспериментальную технику.

Трудность этого заключается в том, что физики не умеют, по крайней мере, непосредственно, осуществлять точное измерение длин кривых, и в том, что техника осталась по-прежнему грубой. С точными измерениями мы встречаемся лишь в геодезии, но и там дело касается лишь длин отрезков; измерение дорог является как будто бы тем, что может быть поставлено по точности на второе место. Рассмотрим работу землемера, измеряющего дорогу; мы скажем, что он поступает неправильно, если он будет прикладывать концы своей цепи к разным краям дороги. Почему? Вполне очевидно, что на этот вопрос мы бы ответили, что нужно измерять не полосу, каковы является дорога, но кривую ось дороги. Какова эта ось и как ее найти? Если взять, например, середины перпендикуляров к обоим краям, то тогда дело идет об операции, при которой предварительно предполагают, что из практики известно направление дороги; процесс измерения будет основан на практическом знакомстве с дорогой по ее положению и направлению. Каким бы путем мы ни старались определить, какой метод работы землемера будет наилучшим, мы неизбежно приходим к тому же заключению.

Посмотрим, как поступает геодезист при измерении отрезка BC ? Сначала он прилагает все усилия, чтобы как можно точнее определить положение точек B и C ; затем, если он захочет разделить BC точкой D , то, согласовывая направления BD и DC , он удостоверится, что точка D находится на линии BC . Таким образом, если не считать точек B и C , геодезисты как раз и задаются целью получать положение точек на отрезке установлением таких направлений, чтобы BC не явилось пределом ломаной наподобие зубьев пилы.

Итак, запомним, что практические измерения кривой основываются на знании ее точек и ее касательных и что при этом пользуются многоугольниками, вершины которых стремятся к точкам кривой, а стороны — к касательным к кривой. Мы найдем практический способ измерения кривой, если докажем, что длины этих ломаных, близких как по положению, так и по направлению, стремятся к пределу при неограниченном приближении; длина определится тогда логически, как значение этого предела.

Это доказательство вполне очевидно, как и аналогичное, относящееся к площадям, откуда и получаются определения длин и площадей, которые мы и примем. Итак, мы возвратились к первоначальной концепции Архимеда, рассматривавшего кривые и поверхности с точки зрения принципа двойственности, и к определениям § 65, предложенным до того, как мы узнали, что имеются (близкие многоугольники (или многогранники), длины (или площади) которых не стремятся ни к какому пределу. Определяемая нами длина бесконечно мало изменяется при таком же малом изменении измеряемой кривой по положению и по направлению. Положение точек кривой и направления ее касательных как раз и являются теми данными, от которых длина кривых зависит непрерывным образом.

69. Соображения, приведшие нас к этим выводам, отличны от тех, которыми обычно руководствуются геометры; более того, кажется, что идеи, которые нами руководили, находятся в противоречии с общепринятыми; мы считаем, что всякое определение подчинено условию, что имеются хорошие и плохие определения, в то время как обычно говорят, не запинаясь: „определения свободны“. Я никогда не мог понять этой фразы; я не знаю, ни о какой свободе здесь идет речь, ни в каком смысле употребляется термин „определение“. Если это слово употреблено в смысле „наименования“, то, действительно,

каждый свободен вводить свой собственный язык, рискуя даже иногда остаться непонятым. Если оно употреблено в смысле „установления“ и претендует на то, что каждый волен сделать предметом своих размышлений все, что угодно, то приведенная фраза тоже справедлива, но при этом есть опасение остаться со своими размышлениями в полном одиночестве, без пользы для развития науки. Что бы там ни было, для нас, смотрящих на математику, как на прикладную науку, определения не свободны; по крайней мере, некоторые не свободны, а именно те, которые должны уточнять практические понятия. Для этих последних условие непротиворечивости, подразумеваемое даже сторонниками „свободы“ определений, не является единственным условием, требующим выполнения; наоборот, оно станет единственным, если считать, что математика есть не что иное, как логика.

Путь, по которому шли геометры для установления определений § 68, совершенно отличен от пройденного нами. Они совсем не заботились о согласовании физических измерений с определениями, сделанными с помощью двух классических интегралов; уверенные в существовании этого согласования, по крайней мере, в простых случаях, они и не искали ему основания, но занимались числом-длиной, связанным с кривой линией и являющимся функцией кривой, числом площадью, связанным с поверхностью и являющимся функцией поверхности. Естественно, что для этого нового рода функций, для этого нового рода зависимостей стали исследовать, чем здесь будет понятие непрерывности.

Для простоты рассмотрим плоскую кривую $y=f(x)$; пусть этой кривой соответствует какое-то число. Может случиться, что некоторые из таких чисел мало изменяются, коль скоро $f(x)$ изменяется равномерно мало. Например, если $|f-f_1| < \varepsilon$ при любом x , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx \right| < \varepsilon |b-a|;$$

значит, $\int_a^b f(x) dx$ есть одно из таких чисел. Другие

числа, например $\int_a^b \sqrt{f^2(x) + f'^2(x)} dx,$

мало изменяются, коль скоро обе функции $f(x)$ и $f'(x)$ изменяются равномерно мало; осуществления лишь одного условия было бы недостаточно. В других случаях достаточным окажется равномерно малое изменение трех функций: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. Таким путем геометры были приведены к необходимости различать для новых функций, называемых функционалами, разные типы непрерывности, получивших название непрерывности порядка 0, порядка 1, порядка 2 и т. д.

Длина кривой, площадь поверхности, определяемые интегралами, содержащими лишь первые производные, являются представителями одного и того же типа функционалов, имеющих непрерывность порядка 1, а не порядка 0. Этот-то основной важности факт и объяснял неудачу старых определений площади и успех определения, основанного на вписанных многогранниках с гранями, мало наклоненными к касательным плоскостям поверхности. В то же самое время это указывало на бесполезность рассмотрения *вписанных* многогранников; достаточно иметь *близкие* многогранники; словом, пришли к определению предшествующего параграфа.

Многие из встреченных ранее фактов получают теперь свое объяснение: длина может быть определена с помощью вписанных многоугольников по методу Шеффера и Жордана, площадь же, по замечанию Шварца, аналогичным путем определена быть не может. В самом деле, если C — кривая с непрерывно изменяющейся касательной, если P — вписанный в C многоугольник и если AB — одна из сторон P , то AB образует с касательными к C в точках дуги AB углы, меньшие самого большого угла, образованного между собой касательными в точках дуги AB (по теореме о конечных приращениях, если кривая плоская; по следствию из этой теоремы, если кривая пространственная); таким образом, P неограниченно приближается к C как по положению, так и по направлению, если число вершин P возрастает неограниченно на каждой дуге C .

Наоборот, если мы к каждой части поверхности будем увеличивать число вершин вписанного в эту поверхность многогранника, то мы приблизим многогранник к поверхности лишь по положению, а не по направлению. Между тем, если гранями многогранника являются треугольники и если мы заставим углы этих граней не спускаться ниже какого-то определенного предела, то, увеличивая число вершин, мы обеспечим приближение как по положению,

так и по направлению; это легко может быть проверено. Так объясняется определение площади, упомянутое в § 65.

Мы отметили также, что, желая измерить BC , геодезист старается как можно лучше определить положения точек B и C , т. е. старается получить лучше выделить отрезок BC из близких к нему отрезков, но это и значит, что главным для него является установление направления. В самом деле, для того чтобы $f(x)$ и $f_1(x)$ весьма мало отличались друг от друга в точке (a, b) , равно как $f'(x)$ и $f'_1(x)$, достаточно, чтобы было выполнено второе условие [близость $f'(x)$ и $f'_1(x)$] и чтобы $f(a)$ отличалось весьма мало от $f_1(a)$.

Все подтверждает наше убеждение, что физические понятия длины и площади тесно связаны с кривыми, как геометрическим местом точек и огибающими прямых, и с поверхностями, как геометрическим местом точек и огибающими плоскостей. После того как мы детально разобрались в этих понятиях, мы можем приступить к их изложению.

70. Мы начнем первое изложение с некоторых практических задач, приведших к измерениям длин и позволяющих понять, каким образом люди были приведены к таким физическим понятиям, как длина забора, которым обнесено поле, вес металла, из которого сделаны перила лестницы, число возов с булыжником для мощения дороги. К этим задачам мы прибавим несколько замечаний о практических способах измерений и в заключение дадим логическое определение. Кривые, о которых будет идти речь, обладают касательными, изменяющимися непрерывным образом вместе с точкой прикосновения; для такой кривой мы скажем, что ломаная приближена по положению с точностью до ε и по направлению с точностью до η , если между точками кривой и точками ломаной можно установить такое взаимно однозначное и непрерывное соответствие, что расстояние между двумя соответствующими точками будет меньше ε и что касательные в этих двух соответствующих точках образуют между собой угол, меньший η . Под углом между касательными мы подразумеваем угол между направленными касательными; под касательной в точке ломаной мы подразумеваем сторону, проходящую через эту точку, а в случае вершины — каждую из двух сторон, проходящих через эту точку. Мы называем *длиной кривой* предел, к которому стремятся

длины ломаных, приближающихся к кривой, когда ε и η стремятся одновременно к нулю.

Это определение требует доказательства существования предела. Прежде чем дать доказательство, я замечу, что та строгость в выражениях, которой я придерживаюсь, не только бесполезна, но и вредна, если вопрос идет об изложении для учащихся младшего возраста. В этом случае следовало бы подсластить предшествующее определение, давая лишь представление (не формулируя его словами) о понятии ломаной, близкой по положению и по направлению, и принять, подчеркнув это, существование предела на веру. Затем следует приложить определение в окружности. Заметим при этом, что правильные вписанные многоугольники (или, если угодно, правильные описанные многоугольники, или те и другие вместе) являются близкими по положению и по направлению; так как между площадью A такого многоугольника и длиной L его периметра существует соотношение

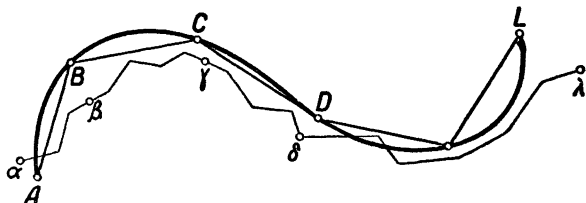
$$A = \frac{1}{2} L \cdot \text{апофему},$$

то отсюда можно вывести, что

$$\text{площадь круга} = \frac{R}{2} \cdot \text{длину окружности}.$$

Тут нет существенного изменения по сравнению с тем, что обычно делается; более полные исследования нужно отложить до того времени, когда ученики созреют интеллектуально и смогут уделять математике больше времени.

71. После этого замечания докажем существование пре-



Черт. 18

дела. Пусть $ABC \dots L$ ломаная P , вписанная в кривую Γ , начинающаяся в точке A и кончающаяся в точке L (черт. 18). Γ разделена на дуги AB , BC, \dots ; пусть η — максимум угла, образованного двумя касательными к Γ в двух точках

одной и той же частичной дуги AB, BC, \dots . Угол η_0 стремится к нулю, когда вписанная ломаная изменяется, приближаясь к Γ .

Рассмотрим близкую к Γ ломаную Π и пусть $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ — точки этой ломаной, соответствующие A, B, \dots, L . Возьмем частичную дугу Γ , например CD , и соответствующую часть $\gamma\delta$ многоугольника Π ; $\gamma\delta$ будет ломаной линией. Каждая ее сторона образует с некоторыми касательными к дуге CD угол, меньший η , если Π приближен по положению с точностью до ε и по направлению с точностью до η ; значит, она образует с хордой CD угол, меньший $\eta + \eta_0$. Пусть P и Π настолько приближены к Γ , что $\eta + \eta_0$ стал меньше $\frac{\pi}{3}$. Тогда проекции

сторон $\gamma\delta$ на CD все одного направления, и так как точки γ и δ проектируются в точки C и D с точностью до ε , то мы имеем:

$$CD - 2\varepsilon \leq \text{длина } \gamma\delta \leq \frac{CD + 2\varepsilon}{\cos(\eta + \eta_0)} < \frac{CD}{\cos(\eta + \eta_0)} + 4\varepsilon,$$

откуда

$$\text{длина } P - 2n\varepsilon \leq \text{длина } \Pi < \frac{\text{длина } P}{\cos(\eta + \eta_0)} + 4n\varepsilon,$$

если n — число сторон P . Числа n , η_0 и длина P независимы от ε и η ; значит, длины Π ограничены, а длины, соответствующие одним и тем же ε и η , заключены между предшествующими пределами, разность которых равна выражению

$$\text{длина } P \cdot \left[\frac{1}{\cos(\eta + \eta_0)} - 1 \right] + 6n\varepsilon,$$

т. е. величине, имеющей в качестве предела, при ε и η , стремящихся к нулю, выражение

$$\text{длина } P \cdot \left[\frac{1}{\cos \eta_0} - 1 \right],$$

зависящее лишь от P . Подбирая P так, чтобы скобка была мала, получим для этого выражения значение, сколько угодно близкое к нулю, так как ломаные P сами являются ломаными Π (§ 69), следовательно, длина P ограничена.

Итак, длины ломаных Π сколь угодно близки между собой, если ε и η достаточно малы; другими словами, предел длин Π существует и является также пределом длин P .

72. Оправдав таким образом определение, мы, следуя классическим традициям, переводим его на язык интегрального исчисления. Предположим, что Γ определена в прямоугольных координатах через $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где все три функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в рассматриваемом интервале (t_0, T) непрерывны вместе со своими первыми производными; сверх того предположим, что $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ все одновременно в нуль не обращаются. Тогда в интервале (t_0, T) будем иметь:

$$|x'(t)| < M, \quad |y'(t)| < M, \quad |z'(t)| < M$$

и

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} > l,$$

где l и M — два положительных, соответствующим образом подобранных числа.

Длина ломаной P , вершины которой даны точками $t_0, t_1, \dots, t_n = T$, выражается формулой

$$l(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

которая иначе может быть записана так:

$$l(P) = \sum (t_{i+1} - t_i) \sqrt{x'(a_i)^2 + y'(b_i)^2 + z'(c_i)^2},$$

где a_i, b_i, c_i соответствующим образом подобраны в интервалах (t_i, t_{i+1}) . Разность же

$$l(P) = \sum (t_{i+1} - t_i) \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}$$

можно записать так:

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \cdot \frac{[x'(a_i)^2 - x'(t_i)^2] + [y'(b_i)^2 - y'(t_i)^2] + [z'(c_i)^2 - z'(t_i)^2]}{\sqrt{x'(a_i)^2 + y'(b_i)^2 + z'(c_i)^2} + \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}}.$$

Если $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ изменяются в каждом интервале (t_i, t_{i+1}) самое большее на ε , то каждая скобка числителя предшествующего выражения будет меньше $2M\varepsilon$; знаме-

натель же больше $2l$; следовательно, рассматриваемая разность мажорирована следующей величиной:

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \cdot \frac{6M\varepsilon}{2l} = (T - t_0) \frac{3M\varepsilon}{l},$$

которая стремится к нулю вместе с ε . Предел $l(p)$ равен, следовательно, пределу

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2},$$

т. е.

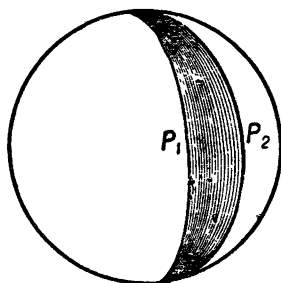
$$\int_{t_0}^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

73. Таким образом единственными, внесенными в случае длин изменениями являются формулировка определения и доказательство его логической приемлемости. Этого достаточно для лучшей подготовки изучения площадей кривых поверхностей, в котором должно появиться новое затруднение, так сказать, обобщение уже встреченного нами при изучении площадей плоских областей, в результате которого мы могли приписать площадь лишь некоторым плоским областям. Имея поверхность Γ , обладающую в каждой точке касательной плоскостью, изменяющейся непрерывно вместе с точками касания, мы говорим, что многогранник Π приближен по положению и по направлению с точностью до ε и до η , если между Γ и Π можно установить такое точечное взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие, что расстояние между двумя соответствующими точками Γ и Π будет меньше ε , а угол между двумя касательными плоскостями, проходящими через эти точки, будет меньше η . Под плоскостью, касательной в точке Π , мы подразумеваем плоскость или плоскости граней Π , к которым эта точка принадлежит.

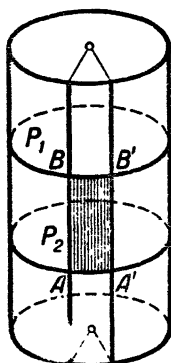
Если дана часть Δ поверхности Γ и если дано, что площадь соответствующей части Π стремится к пределу A , когда Π изменяется так, что ε и η стремятся к нулю, то говорят, что Δ обладает *площадью*, равной числу A .

Для учеников младших классов можно упростить формулировку этого определения и, занимаясь поверхностями Γ и областями Δ , принимать на веру существо-

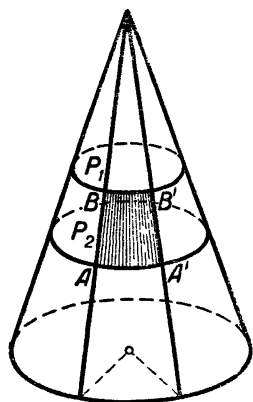
вание многогранников Π и предела A . Затем можно перейти к приложениям к боковой поверхности цилиндра и конуса вращения, сферы, шарового пояса или доли шарового пояса¹⁾).



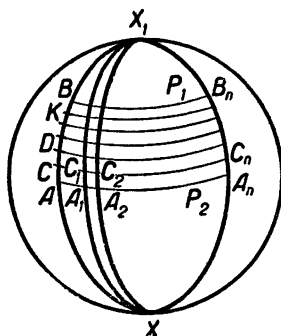
Черт. 19



Черт. 20



Черт. 21



Черт. 22

Для цилиндра или конуса вращения достаточно заметить, что вписанные в них правильные пирамиды приближены по положению и по направлению. В случае сфе-

¹⁾ Примеч. перев. Под долей сферы надо подразумевать часть поверхности сферы, заключенной между двумя большими полуокругами, имеющими общий диаметр (черт. 19). По аналогии мы образуем долю цилиндра, конуса и шарового пояса (черт. 20 — 21).

рических областей, например для доли поверхности шарового пояса, образованной дугой круга AB , вращающейся вокруг своего диаметра XX' , замечаем, что если AB разделить на m равных частей точками C, D, \dots, K (черт. 22) и рассмотреть окружности, образованные точками A, C, D, \dots, K, B , и на этих окружностях нанести точки $A_1, A_2, \dots, A_n; C_1, C_2, \dots, C_n; \dots; B_1, B_2, \dots, B_n$, в которых они встречаются полуплоскости, проходящие через XX' и делящие долю поверхности шарового пояса на n равных частей, то мы получим вершины многогранника Π , близкого по положению и по направлению к рассматриваемой поверхности сферы. Грани этого многогранника, для которого ϵ и η стремятся к 0 при m и n , неограниченно возрастающих по любому закону, будут трапециями вроде $C_i C_{i+1} D_{i+1} D_i$, которые в частном случае могут оказаться треугольниками. Когда же n достаточно велико, мы имеем число, сколь угодно близко подходящее к сумме площадей, образованных сторонами AC, \dots, KB ; откуда и вытекают классические вычисления.

Так как глава об объемах предшествует главе о площадях не плоских областей, то мы можем вернуться к ранее употреблявшемуся методу и сказать так: пусть требуется найти площадь доли пояса, вырезанного из цилиндрической или конической поверхности двумя плоскостями P_1, P_2 , перпендикулярными к оси, или из сферической поверхности какими нибудь двумя параллельными плоскостями P_1 и P_2 . Разобьем этот пояс на n равных поясов плоскостями, проходящими через его ось; тогда частичный пояс обозначится через $ABB'A'$. В случае цилиндра или конуса AB и $A'B'$ суть два равных отрезка двух образующих, и мы можем провести через них касательные плоскости, которые пересекутся по прямой, пересекаемой в свою очередь плоскостями P_1 и P_2 в точках α и β . Мы заменим малый пояс $ABB'A'$ двумя прямоугольниками или трапециями $AB\beta\alpha, \alpha\beta B'A'$. Полученная таким путем поверхность многогранника, при неограниченно возрастающем n , будет неограниченно приближаться по положению и по направлению к поверхности пояса, если установить между рассматриваемой поверхностью пояса и поверхностью многогранника соответствие при помощи радиусов параллельных кругов конуса или цилиндра. В случае сферы, придется снова разделить пояс $ABB'A'$ плоскостями, параллельными P_1 и P_2 и делящими AB на n равных дуг. Если $CDEF$ — один из частичных

поясов, полученных таким путем, то нужно провести плоскости, касательные к сфере в точках C, D, E, F , затем из центра O сферы спроектировать этот частичный пояс на касательные плоскости, беря за проекцию точки сферы M ближайшую к O точку встречи луча проекции с касательными плоскостями. Мы получим тогда многогранную поверхность, которая, при неограниченно возрастающем n , неограниченно приближается по положению и по направлению к поверхности сферического пояса.

Итак, во всех этих трех случаях, если O — точка на оси цилиндра или конуса или центр сферы, точки отрезков, соединяющих O с точками многогранной поверхности, образуют тело, состоящее из пирамид, объем которого v связан с площадью s многогранной поверхности и с расстоянием R точки O от касательных плоскостей к цилиндру, конусу или сфере формулой

$$v = \frac{1}{3} s \cdot R.$$

При n , неограниченно возрастающем, v стремится к объему V тела, образованного точками прямых, соединяющих O с точками доли рассматриваемой поверхности; следовательно, поверхность S этой доли выразится формулой

$$V = \frac{1}{3} SR.$$

74. В этой формуле V является числом, которое мы научились вычислять; это вычисление может представиться в разных формах сообразно тому, что будет говориться об объемах, но по существу оно остается всегда одним и тем же. Педагогически это дает то преимущество, что эффективное вычисление V (а, значит, и объема сферы) будет выполняться лишь после рассмотрения только что упомянутых тел; вычисление объема, образованного вращающимся треугольником, явится тогда вполне естественным, и к тому же к нему сведутся исследования того, что часто называют странным термином „вращающиеся объемы“.

Если немного сократить эту часть курса, в особенности если освободить память наших учеников, не заставляя их выучивать наизусть формулы, нужные лишь к экзаменам, и если разрешить ученикам не знать, как

не знают все математики, что такое сферический сегмент и сферическое кольцо, то, быть может, нашлось бы время для рассмотрения площади сферического треугольника, и следовательно, площади частей сферы, ограниченных дугами кругов как больших, так и малых.

Приходится с грустью констатировать, что, заканчивая цикл обучения, дающего право преподавать в средней школе, молодые люди могут ничего не слышать о великолепной теореме Альберта Жирара. Если их знакомят с ней, то они восхищаются изяществом результата и поражаются, что им раньше ничего не говорили о свойстве, знание которого необходимо для лучшего понимания постулата Евклида. Если рассмотреть сначала вопрос об объемах, как это делается в предложенном здесь изложении, то в обычное доказательство теоремы Жирара можно внести небольшие изменения.

Рассмотрим три диаметральных плоскости сферы, не проходящие через один диаметр; они разделяют сферу на восемь *сферических триэдров*, имеющих в качестве оснований восемь сферических треугольников. Объемы этих триэдров могут быть получены с помощью тел, сходных с теми, объем которых в предшествующем параграфе нами обозначался через v ; эти тела состояли из пирамид с вершинами в O , плоскости оснований которых являются касательными к сфере. Мы имели для этих тел:

$$v = \frac{1}{3} sR; \text{ следовательно, между площадью сферического}$$

треугольника S и объемом V соответствующего сферического триэдра существует соотношение $V = \frac{1}{3} SR$.

Значит, два сферических треугольника, симметричных относительно центра сферы, обладают одной и той же площадью, так как два соответствующих симметричных триэдра являются пределом двух многогранных тел, симметричных и, следовательно, имеющих один и тот же объем. Таким образом, мы имеем четыре, вообще говоря, различных объема сферических триэдров V, V_1, V_2, V_3 и четыре, вообще говоря, различных площади S, S_1, S_2, S_3 .

Замечая, что триэдры, попарно группируясь, образуют *сферические диэдры*, мы имеем, обозначая через A, B, C три двугранных угла триэдра, вырезающих в сфере тело объема V , следующие соотношения:

$$V + V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{B}{2\pi}, \quad V + V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{C}{2\pi},$$

$$V_2 + V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\pi - A}{2\pi},$$

откуда

$$V = \frac{1}{3} R^3 (A + B + C - \pi),$$

$$S = R^2 (A + B + C - \pi).$$

75. Вернемся к логическому обоснованию определения. Предлагаемое изложение сильно отличается от изложения § 71, так как теперь учитывается и природа поверхности Γ , несущей на себе область Δ , и природа границы Δ . Так как соблюдение необходимых предосторожностей и формулировка нужных нам допущений легче всего осуществляются при пользовании языком анализа, мы дадим изложение, которое ближе всего подходит к курсу интегрального исчисления.

Пусть поверхность Γ задана в прямоугольных координатах тремя функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Мы предположим функции x , y , z вместе с их первыми частными производными непрерывными, а параметрическое представление не особым ни в одной точке, т. е. выражение

$$(x'_u u'v - x'_v y'_u)^2 + (y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (z'_u x'_v - z'_v x'_u)^2$$

не равным нулю ни в одной точке. При этих условиях Γ всюду обладает касательной плоскостью, непрерывно изменяющейся вместе с точкой прикосновения.

Будем предполагать, что область Δ (черт. 23) получена в результате изменения положения точки, заданной прямоугольными координатами u, v в области δ (черт. 24), принадлежащей к семейству тех областей, к которым мы научились относить площадь, т. е. ограниченных контуром δ , могущим быть заключенным в многоугольники со сколь угодно малой суммой площадей (§ 28). Разобьем плоскость (u, v) на квадраты линиями, параллельными осям и равноотстоящими друг от друга; пусть h — расстояние между двумя соседними параллельными линиями. Разделим каждый квадрат диагональю, параллельной $u + v = 0$; пусть abc — треугольник, полученный таким

путем. Каждой точке m треугольника abc соответствует точка M поверхности Γ ; все эти точки образуют на Γ криволинейный треугольник ABC . Кроме того, поставим точке m в соответствие точку M' , данную координатами:

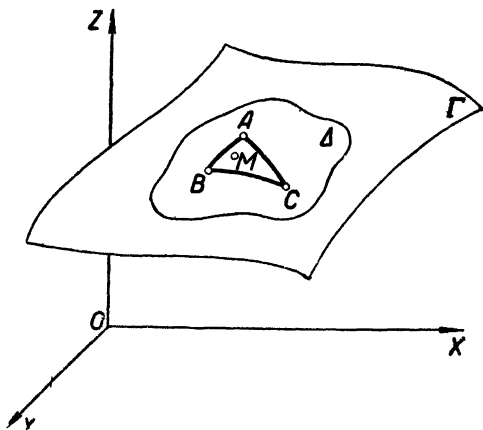
$$x = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad y = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \\ z = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma},$$

если координаты u и v точки m заданы соотношениями:

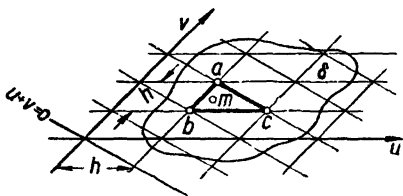
$$u = \frac{\alpha u_a + \beta u_b + \gamma u_c}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad v = \frac{\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Точка M' описывает прямолинейный треугольник ABC , когда m чертит треугольник abc ; очевидно, что соответствие между M и M' однозначно и непрерывно в обоих случаях. Таким образом, точки M' образуют многогранную поверхность P , вписанную в Γ и состоящую из треугольников.

Области Δ соответствует на P область Δ' , состоящая из треугольников ABC и из их частей. Таким образом, Δ' не является в полном смысле этого слова многогранной поверхностью; слегка изменяя Δ' , можно получить поверхность, многогранную в точном смысле этого слова; однако будет лучше, если мы расширим смысл этого слова и получен-



Черт. 23



Черт. 24

ное образование рассмотрим как *поверхность* (т. е. место точек, находящихся в непрерывном соответствии с плоской областью), состоящую из частей плоскостей.

Эти части плоскостей обязаны обладать площадью для того, чтобы можно было говорить о площади многогранной поверхности, определенной как сумма площадей этих плоских частей. В отношении Δ' это условие, конечно, выполняется, так как соответствие между abc и прямолинейным треугольником ABC устанавливается с помощью преобразования, переводящего каждый многоугольник плоскости abc с площадью S в многоугольник плоскости ABC с площадью

$$S \cdot \frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } abc},$$

откуда тотчас же следует, как в § 43, что каждой части abc с площадью S соответствует часть ABC , обладающая площадью, равной

$$S \cdot \frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } abc}.$$

Покажем теперь, что числа ε и η , характеризующие степень приближения по положению и по направлению P к Γ (или Δ' к Δ), стремятся вместе с h к нулю. Когда m перемещается в abc , u и v изменяются самое большее на h ; следовательно, x , y , z изменяются не больше, чем на величину $q(h)$, стремящуюся к нулю вместе с h . Таким образом, расстояние точки M криволинейного треугольника ABC от точки A и расстояние точки M' прямолинейного треугольника ABC от точки A равны самое большее $\sqrt{3} \cdot q(h)$; расстояние MM' не превосходит $2\sqrt{3} \cdot q(h)$ и стремится к нулю вместе с h .

Если в пределах abc частные производные x'_u, x'_v, \dots, z'_v в δ ограничены сверху постоянным числом K и изменяются меньше, чем на $q_1(h)$, то каждое из трех выражений вида $x'_u y'_v - x'_v y'_u$ изменяется самое большее на $4Kq_1(h) + 2q_1(h)^2 = q_2(h)$, когда производные берутся для той или иной точки в abc , причем точки могут меняться не только от одного выражения к другому, но в каждом выражении от одной производной к другой. Поэтому различные плоскости, заданные уравнением

$$X(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + Y(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + Z(x'_u y'_v - x'_v y'_u) = \text{const.}$$

образуют между собой углы V такие, что

$$\cos V = \frac{S(y'_u z'_v - y'_v z'_u)(y'_u z'_v - y'_v z'_u)}{\sqrt{S(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 \cdot S(y'_u z'_v - y'_v z'_v)^2}},$$

откуда

$$\sin^2 V = \frac{S[(y'_u z'_v - y'_v z'_u)(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - (y'_u z'_v - y'_v z'_u)(z'_u x'_v - z'_v x'_u)]^2}{S(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 \cdot S(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2}$$

Так как в этом выражении, являющемся правильной дробью, знаменатель превосходит любое постоянное число, а каждая из трех скобок числителя мажорирована $4 \cdot 2K^2 \cdot q_2(h) + 2q_2(h)^2$, то верхняя граница η угла V стремится к нулю вместе с h . Среди рассмотренных плоскостей находятся, с одной стороны, все плоскости, касательные к Γ в точках криволинейного треугольника ABC , а, с другой, плоскость ABC , уравнение которой имеет вид:

$$0 = \begin{vmatrix} X - x(u_0, v_0) & Y - y(u_0, v_0) & Z - z(u_0, v_0) \\ x(u_0 \pm h, v_0) - x(u_0, v_0) & y(u_0 \pm h, v_0) - y(u_0, v_0) & z(u_0 \pm h, v_0) - z(u_0, v_0) \\ x(u_0, v_0 \pm h) - x(u_0, v_0) & y(u_0, v_0 \pm h) - y(u_0, v_0) & z(u_0, v_0 \pm h) - z(u_0, v_0) \end{vmatrix},$$

если ab и ac соответственно параллельны осям $v=0$, $u=0$ и a имеет координаты (u_0, v_0) , а b и c имеют, следовательно, координаты $(u_0 \pm h, v_0)$ и $(u_0, v_0 \pm h)$. После преобразования двух последних строчек детерминанта по теореме о конечных приращениях получим уравнение в выше рассмотренной форме.

Итак, нами доказано существование многогранника, неограниченно приближенного по положению и по направлению и имеющего площадь.

76. Нам остается показать, что площадь части D такого многоугольника Π , соответствующей области Δ , стремится к пределу, когда числа ε и η , относящиеся к π , стремятся к нулю. Рассмотрим один из частного вида многогранников, полученных в предшествующем параграфе, хотя бы P , и пусть ε_0 и η_0 — соответствующие ему числа.

Сделанная нами оценка для ε_0 очень грубая, ее можно значительно уточнить. Беря вышеуказанные координаты для точек a , b , c , получаем:

$$x_M = x_A + \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} (x_B - x_A) + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} (x_C - x_A) =$$

$$= x_A \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_u \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_v,$$

где x'_u и x'_v взяты соответственно для некоторой точки отрезка ab и некоторой точки отрезка ac . Мы имеем также:

$$\begin{aligned} x_M &= x \left(u_0 \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot h, v_0 \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot h \right) = \\ &= x_A \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_u \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_v, \end{aligned}$$

где x'_u и x'_v взяты уже для некоторой точки треугольника abc . Откуда

$$\left| x_M - x_{M'} \right| = h \left| \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \delta(x'_u) + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \delta(x'_v) \right|,$$

где $\delta(x'_u)$ и $\delta(x'_v)$ не превосходят верхней границы $\lambda(h)$ изменения одной из шести частных производных x'_u, \dots, z'_v , когда изменения u и v не превышают h . Так как множители при $\delta(x'_u)$ и $\delta(x'_v)$ по модулю не превосходят единицы, то

$$\left| x_M - x_{M'} \right| \leq 2h\lambda(h); \quad MM' \leq 2\sqrt{3} h\lambda(h) = \varepsilon_0.$$

Таким образом, ε_0 бесконечно мало не только вместе с h , но даже относительно h , так как $\lambda(h)$ стремится к нулю вместе с h . Это замечание, позволяющее повторить рассуждения § 72, весьма существенно.

Предположим сначала, что δ образована некоторым числом квадратов, принадлежащих сетке квадратов со стороной H , и что квадраты со стороной h происходят от подразделения квадратов H . Тогда Δ' будет состоять лишь из целых треугольников ABC . Каждому такому треугольнику будет соответствовать на Π область R , образованная целыми гранями и частями граней Π . Плоскость одной такой грани или части грани, ориентированная по принятому на Γ направлению, образует с плоскостью ABC , ориентированной таким же образом, угол не больший, чем $\eta + \eta_0$, так как эти плоскости образуют с одной и той же ориентированной плоскостью, касательной к Γ , углы, не превосходящие η и η_0 . Если $\eta + \eta_0$ меньше прямого угла, то ортогональные проекции на ABC этих граней и их частей не будут перекрываться; они

покрывают весь ABC , за исключением, быть может, некоторых точек, отстоящих от наружного края ABC меньше, чем на $\varepsilon + \varepsilon_0$; они содержатся в треугольнике ABC , увеличенном точками, отстоящими меньше, чем на $\varepsilon + \varepsilon_0$ от области внутри ABC . Следовательно, в R можно найти такую многоугольную область R_1 , что

площадь $R_1 >$ площади $ABC - (\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{периметр } ABC$,

а на Π можно найти некоторую многоугольную область R_2 , содержащую R и удовлетворяющую неравенству

$$\text{площадь } R_2 \leq \frac{\text{площади } ABC + (\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{периметр } ABC + \omega}{\cos(\eta + \eta_0)}$$

при любом малом $\omega > 0$.

Применим эти неравенства к каждой области R . Заметим при этом, что даже если бы мы сомневались в существовании площади R , то во всяком случае мы знаем, по предположению, что область D , образованная соединением нескольких R , обладает площадью; мы находим:

площадь $D \geq$ площади $\Delta' - 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{сумму длин сторон } \Delta$,

$$\text{площадь } D \leq \frac{\text{площади } \Delta' + 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{сумму длин сторон } \Delta}{\cos(\eta + \eta_0)}.$$

Когда ε и η стремятся к нулю, разность этих пределов стремится к

$$2\varepsilon_0 \cdot \text{сумму длин сторон } \Delta \cdot \left(\frac{1}{\cos \eta_0} + 1 \right).$$

Это выражение зависит только от P и стремится, как мы это сейчас покажем, к нулю вместе с h . В самом деле, если δ содержится в квадрате со стороной pH , то имеется самое большее $2 \left(\frac{pH}{h} \right)^2$ треугольников abc . Сто-

рона такого треугольника дает дугу поверхности Γ ; если ab и ac параллельны $v=0$ и $u=0$, то дуги AB и AC имеют длину, равную самое большее $K\sqrt{3}h$, так как K мажорирует 6 частных производных x'_u, \dots, z'_v ; сторона bc дает дугу BC с длиной, равной самое большее $K\sqrt{6}h$, так как производные от x, y, z по направлению bc равны самое большее $K\sqrt{2}$. Итак, периметр прямолинейного

треугольника ABC равен самое большее $4K \sqrt{3} h$; это позволяет мажорировать предшествующее выражение величиной

$$2\varepsilon_0 \cdot 2 \left(\frac{pH}{h} \right)^2 \cdot 4K \sqrt{3} \cdot h \left(\frac{1}{\cos \eta_0} + 1 \right),$$

стремящейся вместе с h к нулю.

Таким образом, существование предела площадей D , т. е. площади Δ , доказано в предположении, сделанном относительно δ . Мы распространим этот результат на более широкий класс областей δ ; но сначала постараемся найти выражение площади Δ .

77. Площадь ABC равна

$$\frac{1}{2} \sqrt{[(Y_B - Y_A)(Z_C - Z_A) - (Y_C - Y_A)(Z_B - Z_A)]^2 + [Z, X]^2 + [X, Y]^2},$$

где две последние скобки выводятся из первой при помощи круговой перестановки. По примененному уже преобразованию это напишется в виде:

$$\frac{1}{2} h^2 \sqrt{(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (z'_u x'_v - z'_v x'_u)^2 + (x'_u y'_v - x'_v y'_u)^2},$$

при условии, что все частные производные взяты для подходящих точек abc . Отнеся же все производные к точке a , можно записать это выражение так:

$$\text{площадь } abc \cdot \left\{ \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right]_a^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right]_a^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]_a^2} + \theta \left[8K^2 q_2(h) + h q_2(h)^2 \right] \sqrt{3} \right\},$$

где θ заключено между -1 и $+1$.

Когда h стремится к нулю, сумма членов при θ стремится к нулю, так как сумма площадей abc равна конечной площади δ , а сумма всех остальных членов, по самому определению, имеет пределом

$$\text{площадь } \Delta = \int_{\delta} \int \sqrt{\left\{ \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}} du dv.$$

Однако это установлено лишь для частного вида областей δ , которые мы назовем суммами квадратов. Предполагая единственно, что δ обладает площадью, заключим δ в сумму квадратов δ_2 и возьмем внутри δ_2 сумму квад-

ратов δ_1 ; мы умеем сделать это так, чтобы разность:

$$\text{площадь } \delta_2 - \text{площадь } \delta_1$$

была сколь угодно малой.

Величинам $\delta, \delta_1, \delta_2$ соответствуют на Π части D, D_1, D_2 ; на $\Gamma - \Delta, \Delta_1, \Delta_2$; на $P - \Delta', \Delta'_1, \Delta'_2$; по предположению, \bar{D} обладает площадью; $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta', \Delta'_1, \Delta'_2$ обладают площадями; мы не знаем, имеют ли площади D_1 и D_2 . В § 76 было тщательно отмечено, с какого момента можно утверждать, что D обладает площадью, а именно: когда от неравенств, содержащих *площади* R_1 и R_2 , мы переходим к неравенству относительно *площади* D . Рассуждая теперь о D_1 и D_2 , мы сможем заключить, что \bar{D}_1 , изображающая многоугольную область, взятую на Π и содержащую D_1 , удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \text{площадь } \bar{D}_1 &> \text{площади } \Delta'_1 - 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{общую длину сторон } \Delta'_1 \\ \text{и что } \underline{D}_2, \text{ изображающая многоугольную область, взятую} \\ \text{на } \Pi \text{ и содержащуюся в } D_2, \text{ удовлетворяет неравенству} \\ \text{площадь } \underline{D}_2 &< \frac{\text{площади } \Delta'_2 + 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \cdot \text{общую длину сторон } \Delta'_2}{\cos(\eta + \eta_0)} \end{aligned}$$

А так как D является в одно и то же время областью \bar{D}_1 и областью \underline{D}_2 , то площадь D удовлетворяет обоим вышеприведенным неравенствам.

Таким образом, мы получили два предела, между которыми заключено число — *площадь* D ; оба эти предела зависят не только от D , но также и от выбора P, δ_1 и δ_2 . Когда D изменяется так, что ε и η стремятся к нулю, разность между этими пределами стремится к выражению

$$\frac{\text{площадь } \Delta'_2}{\cos \eta_0} - \text{площадь } \Delta'_1 + \zeta,$$

где ζ стремится к нулю вместе с h . Если, следовательно, заставить h стремиться к нулю, то разность пределов стремится к:

$$\text{площадь } \Delta_2 - \text{площадь } \Delta_1 = \text{площади } (\Delta_2 - \Delta_1).$$

Область $\Delta_2 - \Delta_1$ соответствует разности $\delta_2 - \delta_1$, являющейся суммой квадратов, и, значит, мы имеем:

$$\text{площадь } (\Delta_2 - \Delta_1) = \int \int_{\delta_2 - \delta_1} \sqrt{\left\{ \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}} \cdot du \cdot dv,$$

выражение, мажорированное величиной

$$2K^2 \sqrt{3} \cdot \text{площадь } (\delta_2 - \delta_1);$$

а так как эта последняя площадь может быть сделана сколь угодно малой, то мы видим, что *площадь D* изменяется в сколь угодно близких пределах, коль скоро ϵ и η взяты достаточно малыми. Итак, *площадь D* стремится к пределу, т. е. площадь Δ существует. К тому же при указанном выборе обе первые части предшествующих неравенств имеют один и тот же предел, откуда следует, что выражение *площади* Δ через интеграл годится для всех областей δ , обладающих площадью.

78. Первое изложение, которое я хотел привести, на этом заканчивается. Многие найдут его слишком длинным и уже достаточно сложным, хотя оно и приводит лишь к определению очень малой общности. Его можно несколько сократить, если не стараться выявить все нужные предосторожности, и упростить, рассматривая немного менее обширные классы поверхностей и областей. Но изменения будут незначительными.

К тому же это изложение, длинное и сложное, удовлетворительное с точки зрения логической, не выдерживает критики с точки зрения физической и, если можно так выразиться, человеческой. В самом деле, оно оправдывает лишь приемы измерения, основанные на приближенных многоугольниках или многогранниках, и никоим образом не оправдывает практические применения понятий длины и поверхности. Чтобы показать, что знание длины дороги позволит вычислить число возов с булыжником, нужных для ее мощения, следует указать, каким образом эта длина используется для приближенного вычисления поверхности дороги, зная которую, мы будем иметь и объем булыжника и число возов. Чтобы показать, что знание площади купола позволит вычислить вес меди, нужной для его покрытия, следует указать, каким образом эта поверхность используется для приближенного вычисления объема меди, по которому мы найдем и вес меди. Таким образом, предшествующее изложение нужно дополнить рядом параграфов; но эти параграфы в своей совокупности составят самостоятельное изложение теории длин и площадей, более короткое и удовлетворительное, как мы это сейчас увидим.

В этом нет ничего удивительного; в § 68 я говорил, что „физики не умеют, по крайней мере, непосредствен-

но, осуществлять точно измерение длин кривых". При косвенных измерениях, на которые я там намекал, прибегают к взвешиванию нити или пластинки, материальных образов кривой и поверхности, подлежащих измерению; следовательно, длину или площадь определяют с помощью приема, согласованного с применениями, которые из него хотят сделать и которые вследствие этого можно считать оправданными. Если перевести этот новый прием измерения на логический язык, мы получим хорошее определение, так как оно будет согласовано с физической операцией взвешивания и со всеми приложениями. Это определение будет лучше предшествующего, так как оно связано с практическим приемом измерения, наиболее часто употребляемым и наилучшим образом увязанным со всеми приложениями.

В актив первого изложения можно записать лишь одно значительное преимущество: оно оправдывает употребление тех же слов „длина“ и „площадь“ для дуг кривых и частей поверхностей, как и для отрезков прямой и плоских областей. Но оно нам более привычно и, без сомнения, в этом кроется разгадка живучести и победы над вторым, более простым, изложением, подсказанным сначала приемами вычисления Борхарда (Borchardt), приемами, принятыми затем Минковским (Minkowski) в качестве эффективных определений.

79. Предположим, что требуется 300 возов булыжника для покрытия дороги слоем в 10 см; если затем середина дороги будет повреждена и если пожелают тем же слоем вымостить центральную полосу в полширины дороги, то можно прикинуть, что для этого понадобится приблизительно 150 возов. Так как число возов зависит от объемов цилиндров, занимаемых уложенным булыжником, цилиндров с высотой в 10 см и с перпендикулярным сечением, каковым является сама дорога и затем ее центральная полоса, то наша оценка будет равносильна допущению следующего равенства:

$$\frac{S}{D} = \frac{S'}{D'},$$

где S и S' — площади дороги и ее центральной полосы, а ширина D дороги равна удвоенной ширине D' полосы.

Если бы мы имели, что $D = 3D'$, то нужно было бы сделать аналогичное предположение. Все такие предположения практически вполне достаточно согласованы

с опытом. Если, следовательно, поверхность L соответствует ширине, равной единице, то общая величина отношений будет L , и мы будем иметь:

$$S = LD, \quad S' = LD' \quad \text{и т. д.}$$

Если дорога прямолинейна и имеет длину l , то поверхности с площадью S, S', \dots будут прямоугольниками, одна сторона которых равна l , а другая D, D', \dots ; следовательно, мы имеем $L = l$. Вот почему число L было названо длиной дороги. Равенства, о которых мы говорили, являются лишь приближенными; значит, приведенные объяснения не имеют точного логического значения. Постараемся превратить их в математические определения.

Рассмотрим плоскую кривую Γ , в каждой точке которой существует касательная, непрерывно изменяющаяся вместе с точкой прикосновения; мы будем перемещать отрезок длиной $D = 2r$ так, чтобы его середина описывала Γ , а сам он в каждый момент времени оставался бы нормальным к Γ . Допустим, что кривая Γ такова, что для достаточно малых r подвижный отрезок не проходит два раза через одну и ту же точку, и назовем $A(r)$ площадь, образуемую движением этого отрезка, допустив,

что $A(r)$ существует; предел $\frac{A(r)}{2r}$ при $r = 0$, если он

существует, называется длиной Γ . Можно доказать в очень широких предположениях существование этого предела.

Если кривая Γ не удовлетворяет предшествующим условиям, но если она состоит из нескольких соединенных своими концами кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, каждая из которых удовлетворяет условиям, как это наблюдается, например, в случае ломаных линий, то через $A(r)$ обозначим сумму аналогичных площадей, соответствующих $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, и применим то же определение. Это все равно, что сказать, что длина Γ есть сумма длин $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$. В частности, длина ломаной линии есть сумма длин, в обычном смысле слова, ее сторон.

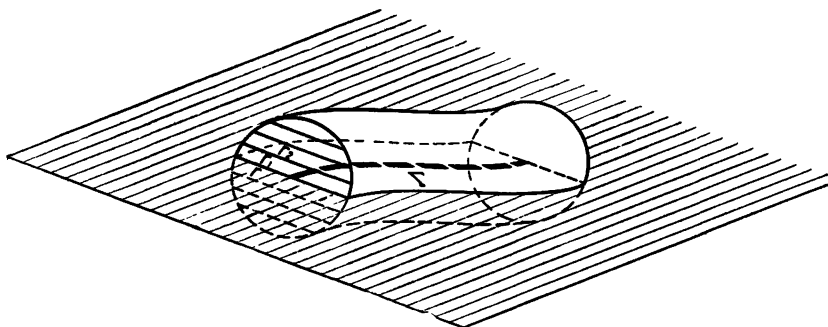
Применим это определение к дуге круга радиуса R , соответствующий центральный угол которой равен α . Площадь $A(r)$ будет площадью области, полученной, если от сектора радиуса $R + r$ с углом α отнять сектор радиуса $R - r$ с таким же углом; следовательно, по § 41:

$$\frac{A(r)}{2r} = \frac{\frac{1}{2}\alpha(R+r)^2 - \frac{1}{2}\alpha(R-r)^2}{2r} = \frac{2\alpha Rr}{2r} = \alpha R.$$

Таким образом, дуга круга обладает длиной, выражаемой формулой

$$L = \alpha R.$$

80. В элементарной геометрии можно ограничиться рассмотрением плоских кривых; если же, однако, захотят рассмотреть пространственную кривую Γ , то для



Черт 25

определения ее длины нужно предположить, что она удовлетворяет условиям, аналогичным тем, которые были введены выше, и заменить подвижный отрезок длины $D=2r$ подвижным кругом радиуса r , центр которого описывает кривую Γ и плоскость которого остается перпендикулярной к Γ . Под $V(r)$ мы будем подразумевать объем, полученный в результате движения этого круга, и назовем длиной кривой предел, если он существует,

отношения $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ при $r=0$. Как и раньше, это определение можно распространить на кривые, обладающие несколькими угловыми точками, и вывести, что длина пространственной ломаной, согласно этому определению, равна сумме длин, в обычном смысле слова, ее звеньев.

Далее, можно утверждать, что это определение применимо и в более общих случаях, и более того, что если Γ — плоская кривая, то оба определения дают одно и то же число. Вот как можно доказать связь, существующую между двумя определениями.

Пусть мы имеем плоскую кривую Γ , для которой отношение $\frac{A(r)}{2r}$ стремится к L , когда r стремится к нулю.

Разобьем тело, получаемое в результате движения подвижного круга радиуса r , на пласты плоскостями, параллельными плоскости кривой Γ и отстоящими друг от друга на расстоянии h (черт. 25). Если две плоскости, ограничивающие один пласт, пересекают подвижный круг по хордам длиной $2r_1$ и $2r_2$, то этот пласт будет заключен в цилиндре с высотой h и с площадью основания $A(r_1)$ и сам будет заключать в себе цилиндр той же высоты с площадью основания $A(r_2)$. Если r_1 и r_2 оба меньше, чем r , то мы имеем:

$$A(r_1) = 2(L + \varepsilon_1) r_1, \quad A(r_2) = 2(L + \varepsilon_2) r_2,$$

где ε_1 и ε_2 по модулю меньше числа ε , стремящегося к нулю вместе с r . Объемы цилиндров получаются от умножения этих выражений на h ; следовательно, имеем:

$$(L - \varepsilon) \sum 2r_2 h < V(r) < (L + \varepsilon) \cdot \sum 2r_1 h.$$

Обе же крайние суммы подходят, при h , стремящемся к нулю, сколь угодно близко к площади πr^2 подвижного круга, одна по недостатку, другая по избытку. Следовательно,

$$(L - \varepsilon) \pi r^2 < V(r) < (L + \varepsilon) \pi r^2,$$

где ε стремится к нулю вместе с r . Последнее неравенство доказывает тождественность обоих определений¹⁾.

Согласованность обоих определений можно доказать также и косвенным путем, показав, что каждое из определений этого параграфа согласовано с определением, данным для общего случая с помощью вписанных многоугольников; но я не буду на этом задерживаться.

81. Проведя необходимые приготовления, аналогичные тем, которые нами проделывались в случае дуги кривой, мы определим площадь поверхности как предел (предполагаемый существующим) при $r = 0$ отно-

¹⁾ Если пожелать доказать тождественность лишь для окружности то можно воспользоваться теоремой Гульдена (Guldin) или даже, только ее частным случаем, касающимся тел, образуемых плоской областью, имеющей ось симметрии и вращающейся вокруг прямой, лежащей в ее плоскости, не пересекающей ее и параллельной оси симметрии.

шения $\frac{V(r)}{2r}$, где $V(r)$ обозначает предполагаемый суще-

ствующим объем тела, состоящего из отрезков длины $2r$, нормальных к поверхности, серединами которых являются все точки области рассматриваемой поверхности. Это определение можно распространить на поверхности, обладающие несколькими линиями, состоящими из угловых точек, и, базируясь на этом, заключить, что плоская область обладает площадью по новому определению в том и только в том случае, если она обладает ей по определению главы III, и что оба эти определения согласуются друг с другом, а также, что площадь многогранной поверхности равна сумме площадей ее граней.

Это определение можно легко применить к доле цилиндра или конуса вращения и к доле шарового пояса. Все это настолько просто и очевидно, настолько напоминает вычисления, относящиеся к окружности, что мне больше нечего к этому прибавить.

82. Эти определения могут быть применены и в курсе интегрального исчисления после некоторых уточнений, если таковые будут необходимы, причем не следует бояться вводить дополнительные предположения, которые позволят упростить изложение. Например, пусть Γ — пространственная кривая, заданная в прямоугольных координатах функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, непрерывными в (t_0, t_1) вместе со своими производными первого и второго порядков. Легко показать, что

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \frac{-x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad 0$$

и

$$\frac{x' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \frac{y' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \frac{-\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

суть направляющие косинусы двух взаимно перпендикулярных нормалей к Γ в точке, данной прямоугольными координатами x , y , z ¹⁾. Итак, $V(r)$ есть объем тела, являющегося местом точек

1) Здесь все время предполагается что, $z' \neq 0$. Если бы это условие не было выполнено, то нужно было бы разделить Γ на дуги, на каждой из которых одна из производных x' , y' , z' не обращалась бы в нуль. Мы допустили существование x' , y' , z' для того, чтобы иметь возможность дифференцировать эти направляющие косинусы.

$$X = x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} u + \frac{x' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} v,$$

$$Y = y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} u + \frac{y' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} v,$$

$$Z = z - \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} v,$$

когда точка с прямоугольными координатами (u, v) описывает круг радиуса r с центром в начале координат. Следовательно, мы имеем:

$$V(r) = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, t)} \right| du dv dt.$$

Чтобы иметь предел отношения $\frac{V(r)}{\pi r^2}$, когда r стремится

к нулю, достаточно найти главную часть бесконечно малого $V(r)$. Функциональный же определитель, стоящий под знаком интеграла, является многочленом по отношению к u, v , каждый член которого $c(t) u^\alpha v^\beta$ имеет вид:

$$\int c(t) dt \cdot \int \int u^\alpha v^\beta du dv,$$

где второй множитель есть одночлен относительно r , степени $\alpha + \beta + 2$. Таким образом, достаточно взять члены функционального определителя с самыми низшими степенями u, v , что дает:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(r)}{\pi r^2} = \int_{t_0}^{t_1} \left| \begin{array}{cc} x' & \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ y' & -\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{array} \cdot \frac{\frac{x' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}}{\frac{y' z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}} \right| dt =$$

$$\left| \begin{array}{cc} x' & \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ y' & -\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ z' & 0 \end{array} \cdot -\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right| dt =$$

$$= \int_{t_0} V \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Еще пример: пусть Γ — поверхность, заданная в прямоугольных координатах функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, непрерывными вместе со своими частными производными, первого и второго порядков в некоторой области плоскости u, v . Пусть, далее, область δ , лежащая внутри этой области плоскости u, v , обладает площадью. Для области Δ поверхности Γ , соответствующей δ , точки тела, подлежащего рассмотрению, даны тремя формулами вида:

$$X = x + \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}}$$

где ρ изменяется от $-r$ до $+r$.

Функциональный определитель от X, Y, Z относительно u, v, ρ , который нужно проинтегрировать, чтобы получить функцию $V(r)$, может быть сведен к своей главной части при отыскании предела $\frac{V(r)}{2r}$, откуда

$$\begin{aligned} \text{площадь } \Delta &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(r)}{2r} = \\ &= \iint_{\delta} \left| \begin{array}{ccc} x'_u & x'_v & \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \\ y'_u & y'_v & \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \\ z'_u & z'_v & \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \end{array} \right| \left| \frac{du dv}{\sqrt{S \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2}} \right| = \\ &= \iint_{\delta} \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2} du dv. \end{aligned}$$

83. На этом мы заканчиваем наше второе изложение. Нужно отметить, что оно проще и короче первого и в то же время оно, если и не более полно, то, по крайней мере, более приспособлено к приложениям. Если

смотреть на математику как на чисто логическую науку, то нам нечем будет руководствоваться при поисках определений площади и длины, так как эти определения свободны. Если же смотреть на математику, как на прикладную науку, то соприкосновение с техническими приемами приведет нас к двум (поскольку имеются две техники измерения площадей) хорошим определениям. Согласованность вычислений § 72 и 82, 77 и 82 объясняет согласованность этих техник и указывает на наличие одного единственного физического понятия длины и одного единственного понятия площади¹⁾.

Но можно было бы занять позицию, в некотором роде промежуточную, и сказать, что, конечно, математика основана на опыте, но что она должна быть чисто логической. Логическое же рассуждение прямо опирается на свойства и лишь косвенным образом на построение; построения длины и площади, проведенные в предшествующих параграфах, как отражение техники измерения, могут быть с успехом заменены *описательными* определениями, состоящими в формулировании свойств, приписанных длине и площади, подсказанных физическими наблюдениями. Разве, впрочем, мы этого не делали в двух предшествующих главах при определении площади плоских областей и объемов с помощью свойств α), β), γ)?

Тогда мы заметим, что хотя определенные нами длина и площадь и обладают еще свойствами α), β), γ), но что этих свойств уже недостаточно, чтобы их охарактеризовать; другими словами, что мы не имеем больше свойства δ), которое может быть выражено следующим образом: искомое число определено, с точностью до постоянного множителя, при помощи свойств α), β), γ). Действительно, предположим, что мы относим кривой или поверхности кривую — индикатрису главных нормалей (или бинормалей) или поверхность — индикатрису нормалей; длина этой кривой или площадь этой поверхности, рассмотренные как соответствующие первоначальной кривой или поверхности, еще удовлетворяют α), β), γ). Сделанное наблюдение приводит нас к высказыванию еще нового условия:

е) Если кривая (или поверхность) Π стремится равномерно как по положению, так и по направлению к фик-

¹⁾ Примеч. пер. в. Вторая из этих техник, сводящая измерение площадей к объемам, изложена в § 69, первая же сводит измерение площади поверхностей к измерению площади плоских областей.

сированной кривой (или поверхности) Γ , причем Π и Γ принадлежат к классу кривых, обладающих длиной (или поверхностями, обладающих площадью), то длина (или площадь) Π стремится к длине (или к площади) Γ .

Свойства α), β), γ), ϵ) достаточны, чтобы выполнялось свойство δ), если иметь в виду, что каждый отрезок (или многоугольник) принадлежит к числу кривых, обладающих длиной (или поверхностями, обладающих площадью). В самом деле, тогда отсюда выведется длина всякой ломаной линии (или площадь всякой многогранной поверхности), а ϵ) затем приведет к определению нашего первого положения, к которому мы пришли, в сущности говоря, тем же путем.

Это показывает, что как с точки зрения логической, так и с точки зрения критики понятий, определения, принятые в первом изложении, обладают нескрытыми нами преимуществами, которыми не следует пренебрегать, если дело касается более серьезного преподавания, чем элементы интегрального исчисления.

VI.

ИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

84. Программа первого класса средней школы, так называемого шестого класса, содержит параграф: измерение величин, понятие дроби. Программа последнего класса той же школы, так называемого класса математики, предусматривает тот же пункт: измерение величин. Казалось бы, что точки зрения в обоих классах должны быть различными как вследствие различия в возрасте учеников, так и потому, что в шестом классе следовало бы рассматривать практические понятия, а в классе математики — абстрактные.

Предмет обучения в шестом классе не встречает никаких затруднений: разрезая на части хлебные лепешки, детям разъясняют, что такое треть, четверть, три пятых; детям все это весьма понятно, и обычно они проявляют большой интерес к этой части курса. Что же касается класса математики, то, наоборот, трудности там настолько велики, что зачастую приходится просто напросто либо пропускать эту главу, либо становиться на ту же самую до-логическую точку зрения, что и в шестом классе.

Тем не менее несомненно, что эта глава давно считается очень важной, и к ней обычно отсылают, когда переходят, например, от сравнения объемов двух прямоугольных параллелепипедов, имеющих два общих ребра, к сравнению двух любых прямоугольных параллелепипедов. Она должна была, следовательно, преодолеть все логические трудности, чтобы дать возможность перейти к приложениям. Эта глава была включена в арифметику, потому что в ней содержится понятие числа, которое относили к арифметике; но если мы хотим придать главе об измерении величин чисто логический характер, то это отнесение необходимо также и потому, что арифметика есть самая основная и самая чисто логическая из частей математики. Но тогда возникает задача логического опре-

деления величин. На практике учителя не дают никакого определения; они лишь приводят примеры величин (поверхности, объемы, веса, количества теплоты) и примеры понятий, не являющихся величинами (скорость, температура, потенциал и т. д.).

Ясно, что такой образ действия, известный в преподавании новых языков под именем „прямого метода“, предполагает понятие величины ранее полученным из повседневной практики, из знакомства с физическим миром, по здравому смыслу, и может претендовать лишь на ознакомление с названием. Так что когда, например, в главе об объемах отсылают к главе о величинах, чтобы в ней найти пояснения общего характера, то неизбежно совершают порочный круг, так как в этой главе величины, вообще говоря, рассматриваются лишь по аналогии с объемами. Итак, в чем же заключается не обходное до сих пор затруднение в логическом определении понятия величины? Оно насквозь метафизично и той же природы, что и затруднение, встреченное нами при определении понятия числа. Точно так же, как в свое время рекомендовалось не смешивать число с символом, его изображающим, теперь хотят отличать величину от числа, измеряющего эту величину, хотят даже воспользоваться величиной, чтобы расширить понятие числа, притти к дробям и к числам еще более общим. Таким образом, речь идет о том, чтобы, не пользуясь числом, определить длину, поверхность, объем, или, точнее, понятие, содержащее в себе длину, поверхность, объем.

Отсюда два течения: либо прибегают к метафизике, либо начинают определять в отношении величин равенство, сумму, произведение и пр., словом, строят заново теорию числа, не осмеливаясь произнести это слово. Нам хорошо известно это второе течение; это — течение, о котором я несколько раз упоминал и которому следуют, когда говорят, например, об отношении двух отрезков, рассматриваемом не как число.

Приведем любопытное замечание знаменитого геометра, Г. Дарбу (G. Darboux), по поводу первого течения, сделанное им в беседе с таким проникательным критиком как Ж. Таннери: „попробуйте извлечь все, что возможно, из старого определения: *величина есть все то, что способно увеличиваться и уменьшаться*“.

Таким образом, следовало бы создать теорию, которая могла бы прилагаться одновременно к объемам, к често-

люблю, к температуре, к аппетиту, к государственному бюджету, к плодородию почвы, к уму, к уровню воды в Сене, к удивлению и т. д. и, в частности, к величине числа, измеряющего величину. Можно прямо сказать, что настоящее затруднение начнется с поисков чего-нибудь, что не является величиной, что в том или ином смысле не способно увеличиваться или уменьшаться. Если хотят иметь возможность проводить исследования, то нужно указать область, которой будут ограничиваться. Конечно, слово величина легкомысленно употребляется математиками в самых общих и в самых различных смыслах: иногда всякое число именуется величиной; мало того, иногда наряду с этими скалярными величинами рассматривают также другие величины, среди которых векторные являются самыми простыми; но когда говорят о теории величин, то слову величина придают более ограниченный смысл. Чтобы избежать смешения, выдумали названия вроде: непосредственно измеримая величина; следовало бы только уточнить, к чему прилагаются подобные названия.

85. Обычно заявляют, что в случае величины, измеримой непосредственно, нужно иметь возможность говорить о равенстве и сумме, и в качестве примера таких величин приводят массы, так как можно говорить о равных массах, и о массе, являющейся суммой двух других, но отклоняют температуру на том основании, что можно говорить о равных температурах, но не пользуются температурой-суммой. Заметим, однако, что никто не помешает нам рассуждать и здесь о сумме, например о 70° как сумме 30° и 40° , что всегда, когда дело идет о числах, можно говорить о равенстве и сумме. Но здесь хотят выразить ту мысль, что сумма двух температур не имеет никакого *физического* значения. Но какое *логическое* значение может иметь такое утверждение? Очевидно, никакого, да к тому же нельзя основывать логическое определение величины на физической пользе, которую представляет при теперешнем состоянии науки то или иное понятие. Да и верно ли то, что сумма температур лишена всякого физического смысла? Когда говорят о температуре в 40°C , то отмечают разность температур между данным телом и тающим льдом; точно так же, чтобы найти колебание длины рельса зимой и летом, пользуются разностью температур. А кто пользуется разностью, тот неизбежно имеет дело и с суммой. В самом деле, когда говорят, что 40°C составляют 313° абсолютной темпера-

туры, то этим самым производят сложение температур. Точно так же складывают скорости, изучая составное движение, вычитают потенциалы, употребляя всегда лишь разности потенциалов, и т. д. Словом *указанный критерий, не имеющий никакого логического значения, вообще не имеет смысла*. Между тем мы вернемся сейчас к этому критерию и постараемся придать ему более точную форму; рассмотрение, которому мы подвергли этот критерий, доказывает на деле лишь то, что он плохо понимается и неясно выражается, а не то, что он лишен основания.

Из всех этих замечаний обратим особенное внимание на то, что наши затруднения были вызваны принятыми нами, слишком метафизическими установками, и постараемся применить тот метод, который выручил нас в случае чисел, длин, площадей, объемов; мы отказались от различия между метафизическим числом, отнесенным к совокупности, и символом, его изображающим, между метафизической длиной, метафизическим числом, которое ее измеряет, и символом, изображающим это число (то же имело место для площадей и объемов); мы старались прямым путем определить числа-символы, единственно важные в математике, оставляя другим заботу заниматься проблемами метафизики, выходящими за пределы нашей компетенции. И так как никто не отказывается считать длины, площади, объемы настоящими образцами величин, то мы особенно постараемся выявить, что имеется общего в том, что мы говорили о каждом из этих понятий. Итак, мы это сделаем, предполагая, что глава об общем понятии величины следует за главами о длинах отрезков, о площадях многоугольников, об объемах многогранников или, по крайней мере, за некоторыми из них. Понятие, которое мы собираемся уточнить, не сможет охватить всех случаев, к которым приложимы различные значения, придаваемые слову величина; мы знаем, что нужно уметь себя ограничивать, и мы нисколько не предполагаем достичь наибольшей возможной общности; мы хотим получить лишь обобщение, не уменьшающее того значения, которое в настоящее время хотят придать главе об измерении величин.

86. Итак, рассмотрим, что общего имеется у различных определений предшествующих глав, а так как физические массы признаются также полноценными представителями величин, то мы удержим то общее в определениях, что может быть применено к случаю масс. Длина отрезка

или дуги круга, площадь многоугольника или области, вырезанной на поверхности, объем многогранника или тела были нами определены как положительные числа, соответствующие геометрическим объектам и вполне определенные этими объектами с точностью до выбранной единицы; это было условие α). Случай масс приводит к установлению первой части определения, состоящего из двух частей, а) и б).

а) *Если задано семейство тел, то говорят, что для этих тел определена величина G , если каждому из них и каждой части их поставлено в соответствие определенное положительное число.*

Вспомним прием, позволивший указать число, давая название этому числу, этой величине: длина, объем, масса, количество теплоты и т. д.; говорят также, что мы измерили длину, объем и т. д. Физический прием определения позволяет в действительности получить это число лишь с некоторой погрешностью; он никогда не дает возможности отличить число от чисел, крайне к нему близких. Таким образом, приходится, как мы это делали в случае измерения длины отрезка, вообразить, что наш прием способен неограниченно продолжаться и привести нас к единственному, вполне определенному числу.

Семейство рассмотренных тел будет изменяться при переходе от одной величины к другой; все эти тела смогут быть уподоблены в некоторых случаях отрезкам прямой, в других случаях — дугам кривых, еще в других — поверхностям областей или частям пространства; в преподавании менее элементарном можно будет даже рассматривать части пространств числа измерений, большего трех, или многообразий, погруженных в эти пространства.

87. Случай масс показывает, что мы не должны пытаться обобщить условие γ) предшествующих глав: двум геометрически равным телам могут соответствовать два различных числа, являющиеся мерой величины G этих тел. Напротив того, очень существенное условие β) может быть обобщено.

б) *Если разделить S на некоторое число частичных тел S_1, S_2, \dots, S_p и если величина G для этих тел равна g , с одной стороны, и g_1, g_2, \dots, g_p , с другой, то мы должны иметь:*

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_p.$$

Это условие уточняет то, которое мы критиковали выше: нужно иметь возможность говорить о сумме двух

величин. Во всем, что предшествует, мы оставляли слову „тело“ расплывчатый характер, аналогичный тому, какой раньше мы придавали слову „область“; ясно, что в геометрии или в теоретической физике можно будет определить логический смысл, данный этому слову. В частности, в геометрии можно будет придать слову тело более или менее широкое значение, например, значение множества или фигуры; только в каждом отдельном случае необходимо условиться, что мы понимаем под разбиением геометрической фигуры на части. Мы можем даже отнести величину к данным не только геометрического, но также и более разнообразного характера. Здесь будет достаточно рассмотреть тела, геометрически уподобляемые областям, вырезанным в пространстве, или на поверхностях, или на кривых. Семейства тел, подлежащих изучению, подчинены условию, которое можно оставить подразумеваемым в элементарном преподавании, но необходимость которого с точки зрения логической выявится при доказательстве теоремы, которая вместе с принятым определением составляет всю теорию величин.

88. Если две величины G и G_1 определены для одного и того же семейства тел и если для любых двух тел, для которых G принимает одно и то же значение g , G_1 также принимает одно и то же значение g_1 , то между g и g_1 существует отношение $g_1 = kg$, где k — постоянная величина.

Чтобы доказать это утверждение, сравним числа g и g_1 , отнесенные к телу C , с числами γ и γ_1 , отнесенными к телу Γ , взятому в качестве исходного. Пусть n — любое целое число; определим целое число m с помощью неравенства

$$\frac{m}{n} \leq \frac{g}{\gamma} < \frac{m+1}{n}$$

и разделим тело C на m частичных тел, для которых G имеет одно и то же значение g' , а тело Γ — на n частичных тел, для которых G имеет одно и то же значение γ' . Имеем:

$$g = mg', \quad \gamma = n\gamma', \quad g' \geq \gamma',$$

где знак равенства сохраняется лишь в случае, когда $\frac{g}{\gamma} = \frac{m}{n}$. Если же $\frac{g}{\gamma} > \frac{m}{n}$ и, следовательно, $g' > \gamma'$, то мож-

но уменьшить каждое из m частичных тел, составляющих S , до тех пор, пока не получим тела, для которого G имеет значение γ' ; другими словами, можно заменить m тел, составляющих S , $2m$ телами, из которых m тел имеют каждое значение G , равное γ' . Эти последние m тел и n тел, составляющих Γ , имеющих для G одно и то же значение γ' , имеют для G_1 одно и то же значение γ'_1 . Значит,

$$g_1 \geq m\gamma'_1, \quad \gamma_1 = n\gamma'_1, \quad \frac{g_1}{\gamma_1} \geq \frac{m}{n},$$

где знак равенства сохраняется лишь в случаях, в которых он имел место и первоначально.

Прилагая этот результат к отношению $\frac{\gamma}{g} < \frac{n}{m+1}$, находим:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{g_1}{\gamma_1} < \frac{m+1}{n}, \quad \left| \frac{g}{\gamma} - \frac{g_1}{\gamma_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Так как n — любое целое число, то имеем:

$$\frac{g_1}{g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = k.$$

89. Теорема доказана; но в ходе доказательства мы разбивали тело на частичные тела, возможность чего не вытекает из предположений а) и б). Я думаю, что ничего не будет предосудительного, если мы неявным образом введем в преподавание такое дополнительное предположение; но учителя должны знать, что одних условий а) и б) недостаточно с логической точки зрения. Дополнительное предположение можно формулировать следующим образом:

с) Семейство тел, для которых определена величина, должно быть достаточно богатым, чтобы всякое тело семейства могло быть сведено к точке с помощью последовательных уменьшений, не переставая принадлежать к семейству, и притом так, чтобы в ходе этих уменьшений величина уменьшалась непрерывно от своего первоначального значения до нуля.

Заметим, что в случае площадей плоские многоугольники образуют подобное семейство тел. Более обширное семейство областей, названных нами квадратуемыми, также удовлетворяют условию с) для величины „пло-

щадь". Таким образом, необходимость условия, подобного с), выступает в связи с затруднениями, которые заставили нас в свое время, при исследовании площади или объема, ограничиться известным рода областями.

90. Другое наблюдение, которое учителя обязаны были сделать, но которое бесполезно выявлять в классе, состоит в том, что условие б) может быть в некоторой своей части обманчивым. Рассмотрим семейство тел F , составленное семейством F_1 дуг окружности C_1 и семейством F_2 дуг окружности C_2 , отличной от C_1 . Дугам из F_1 отнесем их меры, подобно тому как это делается во второй части курса геометрии, с помощью единичной дуги U_1 окружности C_1 ; дугам F_2 отнесем их меры с помощью единичной дуги U_2 окружности C_2 . Мы не ошибемся, если скажем, что все эти числа образуют величину, определенную для тел семейства F ; но на самом деле мы будем иметь здесь две величины, определенные соответственно для тел из F_1 и F_2 .

Всякий раз, когда какая-нибудь величина определена для всех тел семейства F , если это семейство F может быть разделено на два семейства F_1 и F_2 без общих тел и таких, что каждое из них содержит также части тел, принадлежащих к F и содержащихся в нем, условие б) обманчиво в том смысле, что оно остается в силе для F_1 и F_2 , для F же оно остается в силе лишь в том смысле, что оно справедливо в каждом из семейств F_1 и F_2 в отдельности. Если будет, например, правильным сказать, что длины дуг кривых с непрерывными касательными суть величины, отнесенные к этим кривым, то мы лучше отделим значение б), если скажем, что величинами являются длины различных дуг одной и той же кривой с непрерывными касательными.

Заметим, что в предшествующем примере можно было бы выбрать U_1 и U_2 произвольными, если бы даже радиусы C_1 и C_2 были равны между собой. Когда дело идет о длинах в смысле главы V, а не о мерах в смысле второй части курса геометрии, дуги U_1 и U_2 одной и той же длины 1 равны, так как мы принимаем в этом изложении условие γ). Если дело касается *геометрических* величин, т. е. удовлетворяющих условию γ), то б) и γ) могут быть объединены в одно предложение: *если тело S можно разделить на тела, равные соответственно C_1, C_2, \dots, C_p , то оно имеет в качестве значения G сумму $g_1 + g_2 + \dots + g_p$ значений для C_1, C_2, \dots, C_p .*

Можно также условиться понимать слова „разделить тело“ по-новому, говоря, что S разделено на S_1, S_2, \dots, S_p или что S есть сумма этих тел, и сохранить условие б). Этим будет положено начало расширению понятия величины, на которое я лишь указываю и которое можно получить, придавая слову „разделить“ расширенное значение. Можно также условиться считать величину не положительным числом, а каким-то новым математическим существом, для которого сложение еще должно быть установлено. Рассмотрение этих обобщений выходит за рамки моего изложения, но я о них упомянул для того, чтобы отметить то, что является произвольным в изучаемом нами понятии.

Остановимся теперь на некоторых замечаниях, на которые следовало бы обратить внимание учащихся: длина высоты пирамиды является величиной, отнесенной не к пирамиде, а к отрезку-высоте; площадь поверхности многогранника не является величиной, определенной для семейства многогранников, но площадь части поверхности многогранника есть величина, определенная для частей поверхности, рассматриваемых как тела; высота по оси ox прямоугольного параллелепипеда, одно ребро которого параллельно ox , не является величиной, определенной для всех параллелепипедов этого рода, но она была бы таковой, если бы мы рассмотрели лишь многогранники, вырезанные плоскостями, перпендикулярными к ox , в одной и той же прямоугольной неограниченной призме.

Таким образом, число может быть или не быть величиной в зависимости от семейства тел, к которым его относят; не существует необходимого тождества между семейством тел, для которых оно определено, и семейством тел, для которых оно является величиной.

91. Если две величины удовлетворяют условиям § 88, т. е. если они определены для одного и того же семейства тел, и если значение g одной величины определяет значение g_1 другой, то обе величины называются пропорциональными.

Из доказанной теоремы можно заключить, что если g_1 есть функция g ,

$$g_1 = f(g),$$

то она имеет вид

$$g_1 = kg.$$

Следовательно, *не существует величин, обратно пропорциональных в том точном смысле, который мы придали слову величина*, ни величин, зависящих одна от другой иначе, чем пропорционально. Совершенно очевидно, что два числа могут быть связаны иной, чем пропорциональная, зависимостью, но тогда, по крайней мере, одно из них не является величиной; если оба они являются величинами, то соотношение сводится к пропорциональности. Семейство величин очень обширно; оно включает в себя, как мы это видели, числа, рассматриваемые в геометрии, физике, а также числа, связанные с экономическими вопросами, как цена товара, время, необходимое на его изготовление, и т. д.; отсюда большое количество встречаемых нами пропорциональных зависимостей.

Мы можем заменить рассуждения, немного сомнительные или явно неприемлемые, правильными рассуждениями, показав, что мы имеем дело с величинами. Чтобы ограничиться чисто математическими понятиями, перечислим следующие величины: длины отрезков прямой, длины дуг кривой, площади плоских областей, площади частей поверхности, объемы частей пространства, меры углов, меры дуг круга, меры телесных углов, меры частей сферы, время, употребленное движущимся телом на прохождение отрезков пути, изменение скорости от одного конца такого отрезка до другого. Что два последних из перечисленных чисел являются величинами, это совершенно очевидно; что же касается первых, то для них мы это показали в свое время; единственные, для которых надо дать доказательство (которое я опускаю), это меры телесных углов и частей сферы, меры, удовлетворяющие условиям α), β), γ).

Если между величинами существует пропорциональность, то это легко доказать. Прежде всего может случиться, что это соотношение будет содержаться в условии вопроса: так для движения, в котором тело проходит равные пространства в равные времена, пройденная длина и время прохождения являются двумя пропорциональными величинами, отнесенными к пройденным дугам; точно так же для движения, в котором скорость в равные промежутки времени возрастает на равные величины, прирост скорости пропорционален приросту времени. В других случаях может оказаться, что процесс измерения одной величины совершается шаг за шагом так же, как процесс

измерения другой, как, например, в § 21, где рассматривалась пропорциональность мер дуг круга центральным углам. К тем же случаям можно также отнести меры частей сферы и меру телесных углов, под которыми эти части видны из центра.

92. Заметим также, что всякий раз, как удастся доказать, что величина вполне определена с точностью до выбранной единицы условиями α), β), γ) для некоторого семейства тел, то этим самым доказываем, что две величины, отнесенные к этим телам и удовлетворяющие условиям α), β), γ), пропорциональны. Сейчас мы увидим пользу, которую можно извлечь из доказательства этой банальной истины, но сначала отметим случай, когда тела зависят лишь от одного параметра. В таком случае, как только задано значение g величины G , отнесенной к какому-нибудь телу, это тело определено по величине; следовательно, и всякая другая геометрическая величина G_1 , отнесенная к нему, будет также определена; G и G_1 пропорциональны между собой. Таков, например, случай с дугами окружностей и с центральными углами.

Рассмотрим геометрическую величину g , отнесенную многогранному углу, например, меру этого угла; ее значения будет недостаточно, чтобы определить угол по величине, так как этому значению будет соответствовать бесконечное множество углов. Отнесем этому же углу число:

$$h = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \dots - (n - 2) \pi,$$

где n — число его двугранных углов, а \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} — их радианные меры, причем каждый двугранный угол отсчитывается внутрь многогранного угла. Если разбить многогранный угол C на два других C_1 и C_2 , то легко заметить справедливость соотношения $h = h_1 + h_2$ между значениями h для всех трех тел. Отсюда следует, что если разбить C на триэдры, то h будет суммой чисел, отнесенных к этим триэдрам; так как в случае триэдра h положительно, то, значит, оно всегда положительно. Таким образом, h есть величина и к тому же величина геометрическая.

Рассуждения, опущенные мной и аналогичные некоторым из тех, которые привели нас к понятию площади плоской фигуры, показывают, что геометрическая величина, отнесенная к многогранному углу, вполне опреде-

лена с точностью до выбранной единицы; значит, $g = kh$. При подходящей единице мы имеем:

$$g = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \dots - (n-2) \pi;$$

это и есть теорема Альберта Жирара (§ 74).

Лежандр (Legendre) показал, не прибегая к аксиоме Евклида, что между углами плоского треугольника существует неравенство:

$$\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \geq 0,$$

откуда для всякого плоского n -угольника мы имеем:

$$h_1 = (n-2) \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} - \dots \geq 0.$$

Совершенно очевидно, что h_1 является либо геометрической величиной, отнесенной к плоским многоугольникам, либо нулем. Если бы с помощью других рассуждений, отличных от тех, которые мы привели, мы установили бы (что вполне возможно) существование площади многоугольников, не прибегая к аксиоме Евклида, и показали бы, что она вполне определена с точностью до единицы меры, то нужно было бы прийти к заключению: либо мы имеем отношение пропорциональности между h_1 и площадью, когда h_1 не равно нулю — это случай геометрии Лобачевского; либо h_1 равно нулю — это случай геометрии Евклида.

93. Обнаружив таким образом как теоретическое, так и практическое значение понятия пропорциональных величин, я заменяю то, что обычно говорят о величинах, предполагаемых пропорциональными некоторым другим величинам, следующим:

если число g определено несколькими другими x, y, z, t и если, при изменении одного из этих чисел, g изменяется пропорционально ему, то мы имеем: $g = Cxyz t$, где C — постоянная величина.

В самом деле, пусть g_0, x_0, y_0, z_0, t_0 — какая-либо другая система совместных чисел. Введем следующие совместные системы:

$$g_1, x, y_0, z_0, t_0; \quad g_2, x, y, z_0, t_0; \quad g_3, x, y, z, t_0;$$

мы имеем:

$$\frac{g_1}{g_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{g_2}{g_1} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{g_3}{g_2} = \frac{z}{z_0}, \quad \frac{g}{g_3} = \frac{t}{t_0};$$

откуда

$$g = x y z t \cdot \frac{g_0}{x_0 y_0 z_0 t_0}.$$

Все же наше доказательство предполагает, что вспомогательные системы значений, данных множеству переменных, не выходят из семейства F тех из них, для которых g определено: это условие не необходимо, но оно *необходимо* для возможности перехода от x_0, y_0, z_0, t_0 к каждому множеству x, y, z, t из семейства F , не выходя за пределы F и изменяя всегда лишь одно переменное, и для того, чтобы существовали системы x, y, z, t , для которых все переменные отличны от своих первоначальных значений x_0, y_0, z_0, t_0 . Следовательно, необходимо, чтобы каждое переменное обладало способностью изменяться само по себе, что исключает, например, случай, когда x постоянно равен y , и случай, когда x и y являются двумя пропорциональными величинами.

Предшествующая теорема является элементарной алгебраической теоремой: *в ней ничего не говорится о величинах*. Рассмотрим сначала классический пример с прямоугольными параллелепипедами. Для частичного семейства, образованного теми из этих тел, длины двух ребер которых являются данными, длина третьего ребра будет величиной, пропорциональной объему, и, следовательно, мы можем приложить алгебраическую теорему к общему семейству прямоугольных параллелепипедов, имеющих g в качестве объема и x, y, z в качестве длин ребер. Но x, y, z не будут величинами для этого общего семейства (сравнить § 90).

Более обще, если предшествующая теорема приложена к числам x, y, z, t, g , то, по крайней мере, одно из них не является величиной для семейства тел, о которых мы рассуждаем, так как *только величины g , определенные для семейства тел F , заданных величинами x, y, z, t , относящимися к F , являются теми, которые пропорциональны одной из величин: x , или y , или z , или t* . Покажем это, предполагая, как сделано ранее, что от одного тела из F можно перейти к другому с помощью ряда таких изменений, при которых меняется лишь одна из величин x, y, z, t , причем для частичных семейств тел, полученных таким образом, выполняется условие с). Тогда при таком изменении, заставляя, например, меняться лишь t , мы будем иметь, что или g постоянно, т. е. не зависит

от t , или g пропорционально t . Если бы g существенно зависело от x, y, z, t , то, по предшествующей теореме, оно имело бы вид $Cxyz t$, что невозможно, так как соотношение

$$C(\xi + x)(\eta + y)(\zeta + z)(\tau + t) = C\xi\eta\zeta\tau + Cxyz t$$

не имеет места ни для какой системы положительных чисел. Итак, g не зависит существенно ни от четырех, ни от трех, ни от двух из переменных x, y, z, t ; этим теорема доказана.

С приложениями этих теорем нужно быть крайне осторожным; в частности, нужно удостовериться в том, что семейство F достаточно обширно, чтобы удовлетворялось условие перехода одного тела в другое. Часто, однако, это условие не выполняется (вопреки тому, что его считают выполненным); в особенности, когда составляющие F тела зависят лишь от конечного числа параметров. Вот почему формулировка и доказательство так называемой теоремы о величинах, пропорциональных многим другим величинам, несостоятельны; на деле, если в таких случаях применять вышеприведенные теоремы, то можно притти к весьма парадоксальным заключениям.

Рассмотрим, например, материальную кривую, линейная плотность которой все время увеличивается при движении в одном и том же направлении. Длина l и масса m вполне определяют дугу; значит, всякая другая величина g , отнесенная к той же дуге, определяется через l и через m и, по предшествующему, была бы пропорциональна l или m . Так, длина проекции дуги на данную плоскость, количество теплоты, необходимой для увеличения температуры этой дуги на 1° , могли бы быть названы пропорциональными длине или массе дуги!

VII.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ¹⁾.

94. Теория величин, составившая предмет предшествующей главы, была подготовлена работами Коши над тем, что он называл „сопровождающими величинами“, работами, призванными осветить понятия площади, объема, меры, а также исследованиями о линейных функциональных операциях; но лишь в связи с интеграцией самых общих функций она была окончательно построена усилиями многочисленных ученых. Это не должно нас удивлять, так как мы видели с самого же начала, что исчисление бесконечно-малых и теория величин имеют некоторые общие цели; с другой стороны, рассматривая наиболее общий случай, т. е. исходя из наименьшего числа первичных понятий, мы имеем возможность рассуждать лишь о самом важном и существенном в вопросе и можем надеяться осветить, таким образом, исходное положение. Вместе с тем создание такой элементарной теории величин было бы, быть может, самым существенным из результатов работ по интегрированию разрывных функций.

С точки зрения педагогической, которой мы здесь придерживаемся, теория величин должна оказать влияние на изложение операций интегрирования и дифференцирования. Приводимое ниже изложение рассчитано на студентов, которым приходится в первый раз слышать об этих функциональных операциях, взятых в их самом общем виде: некоторые из предыдущих параграфов (72, 75—77, 82) имели, впрочем, отношение к преподаванию, рассчитанному на тех же студентов университета. Мы наметим лишь начало изложения и займемся почти исключительно существом вопроса; для настоящего преподавания должны быть приняты различные предосторожности,

1) Примеч. перев. В подлиннике имеется термин „derivation“, который мы будем переводить не совсем точно термином „дифференцирование“.

касающиеся формы изложения, и, например, никто не станет заниматься с самого же начала пространством n измерений.

Мы видели, что некоторые числа, рассматриваемые физиками, были отнесены ими точкам, некоторые другие — протяженным телам, откуда и получились два математических понятия: функции одной или нескольких переменных, с одной стороны, и величины, с другой стороны. Поскольку эти числа физически определимы, они обладают известной непрерывностью, так что двум точкам или двум телам, практически неразличимым, относят одно и то же число. Постараемся сначала перевести эти физические факты на язык чисто логических определений. Нам нужно будет также рассмотреть, какое употребление делают физики из чисел, которые они получают; а для этого мы должны будем обратить наше внимание на то, что они называют *производной величиной*.

Рассмотрим тело C , которому физики приписывают массу M , объем V и плотность (или среднюю плотность) δ . Первые два определяются экспериментально и независимо друг от друга, третье выводится арифметическим путем из формулы определения:

$$\delta = \frac{M}{V}.$$

Чтобы подчеркнуть разницу между этими числами говорят, что масса и объем являются величинами, непосредственно измеримыми, а плотность величиной производной. Легко заметить, что в предшествующей фразе слово величина употреблено правильно (в смысле предшествующей лавы), когда его прилагают к массе и объему, и неправильно в случае плотности; ясно, например, что если тело разделить на два частичных тела, то плотность целого тела не будет суммой плотностей частичных тел. Поэтому мы будем избегать такого употребления слова величина.

Чтобы найти M и V , нужно выбрать единицы массы и объема, но никакого нового выбора не потребуется для δ ; это выражают также, говоря, что единица плотности является производной единицей. Если, в частности, $M=1$ и $V=1$, то тело будет иметь плотность, равную 1, следовательно, равную единичной плотности; в этом заключается смысл фразы вроде следующей: когда единица массы есть грамм и единица объема — кубиче-

ский сантиметр, то единица плотности есть грамм, деленный на кубический сантиметр.

Средняя плотность тела в особенности интересна, когда она остается одной и той же для всех частичных тел, которые можно вырезать из данного тела, т. е. когда это последнее однородно по своей массе. Когда же этого нет, то физики определяют плотность в каждой точке P тела: это есть средняя плотность тел, вырезанных вокруг точки P и достаточно малых, чтобы быть практически однородными. Нам нужно математически определить действие, дающее эту плотность, действие, вызываемое *дифференцированием*. Обратная операция, позволяющая вычислять M , исходя из V и δ , есть действие *интегрирования*.

Ради экономии времени я рассмотрю здесь сразу случай пространства k измерений, напомнив сначала нужные нам элементы геометрии k измерений.

95. На прямой, на поверхности, в обычном пространстве точка определяется одной, двумя, тремя координатами; по аналогии мы назовем точкой пространства k измерений множество k числовых значений, расположенных в известном порядке, x_1, x_2, \dots, x_k , или сокращенно (x_i) . Значения x_i называются координатами; когда говорят, что эти координаты прямоугольные, то просто подчеркивают, что выражение $\sqrt{\sum (x_i - x'_i)^2}$ будет называться расстоянием двух точек (x_i) и (x'_i) . Мы будем пользоваться исключительно прямоугольными координатами.

Формулы

$$X_i = a_i + \sum_{j=1}^{j=k} a'_j x_j$$

будут названы в таком случае формулами перехода от прямоугольных координат (x_i) к прямоугольным координатам (X_i) , если расстояние от (x_i) до (x'_i) постоянно равно расстоянию от (X_i) до (X'_i) . Непосредственное вычисление дает условия ортогональности в виде:

$$\sum_{i=1}^{i=k} (a_i^j)^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=k} a_i^j a_i^k = 0, \quad j \neq k.$$

Отсюда, как известно, вытекает, что детерминант Δ из a_i^j равен ± 1 , что позволяет получить формулы замены координат, разрешенные относительно x_i , и, наконец, условия ортогональности, представленные второй формулой.

На формулы замены координат можно также смотреть как на формулы, которые определяют точечное преобразование, называемое перемещением, если $\Delta=1$. Предположим в дальнейшем, что это так и есть. Если $a_i^i = +1$ для каждого значения i , и, следовательно, согласно условиям ортогональности, $a_i^j = 0$ для $i \neq j$, то перемещение называется параллельным перенесением. Если же $a_i^i = +1$ для одного значения i , и следовательно, $a_i^i = 0$ и $a_j^j = 0$ для этого значения i и, если a суть нули, то перемещение называется вращением около оси координат $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_k = 0$, называемой также осью x_i .

Два образа, которые соответствуют друг другу при перемещении, называются равными; мы сейчас увидим, что можно перейти от одного образа к другому, ему равному, с помощью параллельного перенесения и вращений вокруг осей координат.

96. Неравенства

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1,$$

$$a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1),$$

$$a_3(x_1, x_2) \leq x_3 \leq b_3(x_1, x_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \leq x_k \leq b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}),$$

крайние члены которых являются непрерывными функциями, определяют семейство точек (x_i) , образующих так называемую *простую область*. Если все эти функции сводятся (как, например, a_1 и b_1) к постоянным, то имеется *интервал*, *k измерениями* которого являются k разностей $b_i - a_i$. Соединяя конечное число простых областей в одну, получаем более общие области. Но семейство областей, определенных таким образом, будет зависеть от осей координат и даже от порядка этих осей; чтобы получить семейство областей, независимое от осей, условимся называть областью множество E точек, если при любом $\varepsilon > 0$ можем найти область D_ε в предшествующем смысле этого слова или такое *множество* D_ε *конечного числа областей*, что все точки D_ε принадлежат к E , а точки из E , не принадлежащие к D_ε , расположены на расстоянии, меньшем, чем ε , от точек D_ε ; к тому же D_ε должно содержать $D_{\varepsilon'}$, если ε меньше ε' .

Я не останавливаюсь на легком доказательстве инвариантности этого семейства областей при переходе от одной системы осей к другой. Я лишь подчеркиваю, что если хотя бы иметь логически выдержанное изложение, то такие уточнения и доказательства необходимы даже тогда (об этом я также упоминал), когда ограничиваются пространством не более трех измерений.

97. Выделим сначала из предшествующего семейства частное семейство областей, обобщающих плоские квадратуемые области и таких, что:

а) каждой из этих областей D отнесено положительное число $a_k(D)$;

б) области, состоящей из двух неперекрывающихся областей, отнесена сумма двух чисел, соответствующих обоим частичным областям;

в) двум равным областям отнесены равные числа;

г) эти числа вполне определены, когда определено число, соответствующее одной из областей.

Эти области мы будем называть *квадратуемыми* порядка k ; сокращенно, просто *квадратуемыми*.

К тому же мы хотим, чтобы это семейство содержало все интервалы и все области, образованные собранием конечного числа интервалов.

Рассмотрим полную сетку T с интервалами I, I_1, I_2, \dots , где интервалы I_p определены неравенствами:

$$\frac{e_i}{10^p} \leq x_i \leq \frac{e_i + 1}{10^p},$$

причем e_i — суть целые числа. Если область E дана, то пересчитаем те интервалы I_p , все точки которых принадлежат к E (пусть n_p их число), и те интервалы I_p , по крайней мере, некоторые точки которых принадлежат к E (пусть N_p их число). Тогда, если площадь порядка k , общая всем I , равна 1, то площадь I_p необходимо будет $\frac{1}{10^{kp}}$, а площадь E , если она существует, заключена между

$$\frac{n_p}{10^{kp}} \quad \text{и} \quad \frac{N_p}{10^{kp}}.$$

К тому же имеем:

$$\frac{n_p}{10^{kp}} \leq \frac{n_{p+1}}{10^{k(p+1)}} \leq \frac{N_{p+1}}{10^{k(p+1)}} \leq \frac{N_p}{10^{kp}};$$

следовательно, если $\frac{N_p - n_p}{10^{kp}}$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{p}$, то площадь порядка k области E может быть лишь общим пределом

$$\frac{n_p}{10^{kp}} \quad \text{и} \quad \frac{N_p}{10^{kp}}.$$

Если все это выполняется, говорят, что E *квадрируема* порядка k и обозначают предел через $a_k(E)$.

98. Мы вступили на путь главы III; нам придется теперь показать, как мы это делали в главе III для a_2 , что a_k , очевидно, удовлетворяющее условиям α) и δ), удовлетворяет также β) и γ). Интервалы I , вошедшие в упомянутые числа N_p и не вошедшие в n_p , содержат одновременно точки из E и точки, не принадлежащие к E ; следовательно, это те интервалы, которые содержат граничные точки [граничной точкой является такая точка (X_i) , что интервал

$$X_i - \varepsilon \leq x_i \leq X_i + \varepsilon$$

содержит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, точки из E и точки, не принадлежащие к E]. Отсюда, как и в § 27, следует предложение β), а также то, что область, образованная конечным числом других областей, квадрируема порядка k всякий раз, когда таковыми являются составляющие области.

Для предложения γ) мы прибегнем к методу полной математической индукции, предполагая его установленным для порядка $k - 1$; можно слово в слово повторить то, что было сказано в главе IV для перехода от a_2 к a_3 , или, учитывая возраст слушателей, провести рассуждение, менее элементарное, но зато подготовляющее почву для действия интегрирования, что мы и сделаем.

99. Мы сейчас покажем, что всякая простая область пространства k измерений квадрируема порядка k , предполагая это свойство установленным для порядка $k - 1$.

Пусть E — простая область, определенная k двойными, приведенными выше неравенствами; пусть E' — простая область $k - 1$ измерений, определенная первыми $k - 1$ двойными неравенствами. Мы назовем E' проекцией E на координатное пространство x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . Интервалы I_p , использованные выше, точно так же обладают проекциями, являющимися интервалами I'_p сетки T' , с помощью которой вычисляют площади порядка $k - 1$ в рас-

смаатриваемом координатном пространстве. Таким образом, интервалы I'_p дают для E числа n'_p и N'_p такие, что

$$a_{k-1}(E') - \frac{n'_p}{10^{(k-1)p}} \text{ и } \frac{N'_p}{10^{(k-1)p}} - a_{k-1}(E')$$

стремятся к нулю при p , неограниченно возрастающем.

Интервалы I_p дают для E числа n_p и N_p ; рассмотрим все те из I_p , которые вошли в n_p или в N_p ; они образуют две области \underline{E}_p и \bar{E}_p . Все те из I_p , которые обладают одной и той же проекцией I'_p и входят в \underline{E}_p , образуют интервал J_p , $k-1$ первых измерений которого равны $\frac{1}{10^p}$, а k -е измерение отличается не более чем на η_p от

$$b_k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0) - a_k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0),$$

где $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0$ — произвольно выбранная точка I'_p ; η_p стремится к нулю, когда p неограниченно возрастает. Что же касается I'_p , то это есть некоторый интервал из числа n'_p интервалов, использованных нами для получения приближенного по недостатку значения $a_{k-1}(E')$.

Для такого интервала I'_p интервалы I_p из \bar{E}_p , имеющие I'_p в качестве проекции, дают аналогичный результат, причем бесконечно малое η_p заменяется другим бесконечно малым ζ_p . Но больше того, \bar{E}_p содержит I_p , имеющие в качестве проекций I'_p , учтенные в N'_p , а не в n'_p . Эти интервалы, имеющие своими проекциями тот же I'_p , образуют еще интервал, k -е измерение которого равно самое большее $M + \xi_p$, где M — максимум разности

$$b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) - a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}).$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{N_p - n_p}{10^{kp}} \leq \sum \frac{1}{10^{(k-1)p}} (\eta_p + \zeta_p) + \sum \frac{1}{10^{(k-1)p}} (M + \xi_p),$$

где обе суммы распространены на два только что рассмотренных вида интервалов I'_p . Это же дает неравенство

$$\frac{N_p - n_p}{10^{kp}} \leq a_{k-1}(E') (\eta_p + \zeta_p) + (M + \zeta_p) \frac{N'_p - n'_p}{10^{(k-1)p}},$$

в котором правая часть стремится к нулю при возрастании p , что и доказывает теорему.

Больше того, когда b_k и a_k являются постоянными (случай призматической области с образующими, параллельными оси x_k), k -е измерение J_p постоянно с точностью до $\eta_p + \zeta_p$, а сумма $a_k(J_k)$ дает значение:

$$a_k(E) = (b_k - a_k) \cdot a_{k-1}(E').$$

100. Отсюда следует также, что такая призматическая область обладает площадью порядка k , не изменяющейся ни при каком параллельном перенесении или вращении вокруг оси x_k . Мы распространим этот результат на любую квадратируемую порядка k область E .

С помощью n_p (или N_p) интервалов I_p , дающих приближенное по недостатку (или по избытку) значение $a_k(E)$, составим фигуру \underline{E}_p (или \overline{E}_p). Параллельное перенесение или вращение вокруг оси x_k превращает эти образы в образы, равные F , \underline{F}_p , \overline{F}_p , состоящие из преобразованных I_p , которые, вообще говоря, уже не являются интервалами, но квадратируемы порядка k и всегда имеют a_k равным $\frac{1}{10^{k_p}}$. Следовательно, \underline{F}_p и \overline{F}_p обладают теми же a_k , что и \underline{E}_p и \overline{E}_p ; а так как $a_k(\overline{E}_p) - a_k(\underline{E}_p)$ стремится к нулю при p возрастающем, то то же имеет место и для $a_k(\overline{F}_p) - a_k(\underline{F}_p)$; следовательно, фигура F квадратируема; к тому же ее a_k есть предел $a_k(\overline{F}_p)$, следовательно, и $a_k(\underline{F}_p)$, и мы имеем: $a_k(F) = a_k(E)$.

Таким образом, определение площади порядка k можно считать установленным, так как всегда можно от одной области перейти к другой, ей равной, с помощью ряда перемещений указанной выше природы. Отныне мы будем заниматься исключительно семейством квадратируемых областей, несмотря на то, что не только это семейство может представлять интерес для изучения.

101. Определение площади порядка k вскрыло свойство непрерывности, позволяющее получить эту площадь экспериментальным путем: мы отнесли области E два образа \underline{E}_p , \overline{E}_p , состоящих из интервалов I_p ; прибавим к \overline{E}_p все I_{p+q} (q фиксировано), имеющие точки в \overline{E}_p , но не лежащие целиком в \overline{E}_p . Если бы \overline{E}_p свелось к одному I_p ,

то площадь порядка k этих прибавленных I_{p+q} была бы:

$$\left[\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{p+q}} \right]^k - \left(\frac{1}{10^p} \right)^k = a_k(I) \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{10^q} \right)^k - 1 \right\}.$$

Следовательно, в случае любого \overline{E}_p прибавленные I_{p+q} обладают площадью порядка k , равной самое большее

$$a_k(E_p) \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{10^q} \right)^k - 1 \right\}.$$

При q , достаточно большом, мы будем, следовательно, иметь такой образ $\overline{\overline{E}}_p$, что $a_k(\overline{\overline{E}}_p)$ превосходит сколь угодно мало $a_k(\overline{E}_p)$, а значит, при достаточно большом p , и $a_k(E)$, если только E квадрируема. Отбрасывая от \overline{E}_p интервалы I_{p+q} , содержащиеся в E_p и содержащие граничные точки \overline{E}_p , мы точно так же получим образ $\underline{\underline{E}}_p$, который для p и q , достаточно больших, будет обладать площадью порядка k , сколь угодно близкой к $a_k(E)$. Больше того, все I_{p+q} , содержащие граничные точки E , принадлежат к $\overline{\overline{E}}_p$, и ни одно из них не принадлежит к $\underline{\underline{E}}_p$ ¹⁾.

Рассмотрим теперь переменную квадрируемую область E_v , стремящуюся к E ; это значит, что, коль скоро условия достаточно мало отличаются от тех, при которых отыскивается предел, E_v содержится в произвольно выбранной области, содержащей в точном смысле внутри себя E (значит, содержится в $\overline{\overline{E}}_p$), и содержит область, содержащуюся в точном смысле в E (значит, содержит $\underline{\underline{E}}_p$).

Мы тогда имеем:

$$a_k(\underline{\underline{E}}_p) \leq a_k(E_v) \leq a_k(\overline{\overline{E}}_p).$$

Итак, если квадрируемая область E является пределом квадрируемой области E_v , то $a_k(E)$ есть предел $a_k(E_v)$.

102. Мы рассмотрим сейчас функции области; области, которые будут играть роль переменных, являются квадрируемыми областями. Мы предположим, что каждой из этих областей Δ отнесено число $f(\Delta)$, которое и будет функцией области. К тому же, мы предположим эту функ-

1) Необходимость рассмотрения $\overline{\overline{E}}_p$ и $\underline{\underline{E}}_p$ вытекает из того, что все I_p , содержащие граничные точки E , не обязаны входить в \overline{E}_p (так как относительно E мы не предполагали, что она замкнута в смысле теории множеств) и что некоторые из них могут входить в \underline{E}_p .

цию *аддитивной*, т. е. такой, что если Δ разделить на две квадратируемые области Δ_1 и Δ_2 , то будет иметь место равенство:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) + f(\Delta_2).$$

Значит, наши числа $f(\Delta)$ удовлетворяют условию β); если к тому же они положительны, то они будут величинами, отнесенными телам, образованным различными квадратируемыми областями. Эти числа $f(\Delta)$ (или аддитивные функции) относятся к обычным положительным величинам, как относительные числа к числам положительным. Количество теплоты, которое нужно придать или отнять у тел, взятых в их действительном состоянии, чтобы привести их к 0° , является такой аддитивной функцией. Мы предположим к тому же эти функции *непрерывными*; это значит, что при стремлении переменного Δ_v к Δ , $f(\Delta_v)$ будет стремиться к $f(\Delta)$; это условие необходимо выполняется, когда $f(\Delta)$ может быть определена экспериментально.

Как следствие этой непрерывности мы имеем, что при стремлении Δ_v к нулю по всем своим измерениям, т. е. при стремлении к нулю самого большого измерения переменного интервала, содержащего в себе Δ_v , $f(\Delta_v)$ стремится к нулю. В самом деле, если бы этого не было, то можно было бы взять такие Δ_v , что, при стремлении их измерений к нулю, $f(\Delta_v)$ стремилась бы к числу $\varphi \neq 0$, и можно было бы заставить точки Δ_v стремиться к предельной точке, например P , с координатами (x_i^0) . Разбивая тогда, если нужно, Δ_v на части, можно предположить, что все его точки, сохраняя указанные свойства, удовлетворяют при каждом i , неравенствам:

$$\text{либо } x_i \leq x_i^0, \text{ либо } x_i \geq x_i^0.$$

Пусть при всяком i выполняется первое неравенство и пусть D — область, для которой P является предельной точкой и все точки которой обладают координатами, превосходящими координаты P . Тогда область $D + \Delta_v$ будет иметь в качестве предела D и $f(D + \Delta_v)$ будет стремиться не к $f(D)$, а к $f(D) + \varphi$. Это свойство рассматриваемых нами функций области и величин резко отличает их от точечных функций: если хотят свести Δ к точке P , $f(\Delta)$ стремится к нулю, а не к функции в точке P , подобно плотности в точке P или теплоте тела в точке P . Мы получим сейчас эти точечные функции, соответствующие физическим производным величинам.

103. Рассмотрим функцию $f(\Delta)$ и непрерывную величину $V(\Delta)$, т. е. аддитивную непрерывную функцию области, которая к тому же *положительна*. Частное $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$ имеет смысл; мы назовем его *средней производной функции f по V в области Δ* . Будем неограниченно уменьшать Δ по всем его измерениям, но так, чтобы оно все время содержало точку P ; если при этих предположениях отношение стремится к определенному пределу $\varphi(P)$, то это будет *производная f по V в точке P* ; она обозначается

$$\frac{df}{dV}(P) = \varphi(P).$$

Само определение производной указывает на способ ее вычисления: операция взятия производной есть вычисление предела определенного отношения. Самый интересный случай, единственный, который мы рассмотрим, это тот, когда отношение стремится к пределу равномерно, т. е. случай, когда разность между $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$ и $\varphi(P)$ становится меньше произвольно выбранного положительного числа ε , коль скоро Δ заключено в интервале, k измерений которого не превосходит числа η , стремящегося вместе с ε к нулю¹⁾, причем η зависит от ε , но не от P . Если тогда выбрать для Δ интервал

$$x_i^0 - h \leq x_i \leq x_i^0 + h,$$

где P — точка (x_i^0) , то отношение является непрерывной функцией P ; следовательно, предел при k , стремящемся к нулю, будет непрерывной функцией P , значит, $\varphi(P)$ — функция непрерывная. Мы скажем, что $\varphi(P)$ есть *производная с равномерной сходимостью*²⁾, если *разностное* отношение $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$ стремится равномерно к $\varphi(P)$.

1) В действительности, за исключением случая $k = 1$, равномерная сходимость $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$ есть необходимое следствие сходимости этого отношения для всякой точки P . То же наблюдается для $k = 1$, если применить, даже в этом предположении, общее определение областей (§ 96), не требующее связности.

2) В действительности, коль скоро производная непрерывна, она обладает равномерной сходимостью.

В таком случае это отношение ограничено, коль скоро Δ взято достаточно малым по всем своим измерениям; так как, с другой стороны, оно ограничено при всех Δ больших, но взятых в ограниченной части рассматриваемого пространства, то $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$ ограничено по модулю для всех рассматриваемых Δ . Мы имеем:

$$|f(\Delta)| < M V(\Delta),$$

где M — фиксированное число. Мы говорим, что функция f обладает ограниченными производными числами по V .

В частности, если предшествующее неравенство справедливо, когда вместо $V(\Delta)$ берут $a_k(\Delta)$, т. е. если для всякого Δ выполняется неравенство:

$$|f(\Delta)| < K a_k(\Delta),$$

то функция $f(\Delta)$ называется *функцией с ограниченными производными числами*. Совершенно ясно, что приведенные выше физические примеры функций $f(\Delta)$ дают нам функции с ограниченными производными числами, что, очевидно, влечет за собой непрерывность этих функций.

104. Сформулируем теперь задачу интегрирования: даны непрерывная функция точки $\varphi(P)$ и положительная, аддитивная, с ограниченными производными числами функция области $V(\Delta)$; найти функцию $f(\Delta)$, аддитивную, с ограниченными производными числами, для которой $\varphi(P)$ была бы производной по V , удовлетворяющей требованию равномерной сходимости.

Если Δ — сумма конечного числа интервалов δ_i , то при дальнейшем, в случае надобности, их разбиении можно получить измерения δ_i настолько малыми, чтобы для всякого i имело место неравенство:

$$\left| \frac{f(\delta_i)}{V(\delta_i)} - \varphi(P_i) \right| < \varepsilon,$$

где P_i произвольно выбрано на δ_i . Тогда, так как

$$f(\Delta) = \sum f(\delta_i), \quad \sum V(\delta_i) = \sum V(\delta_i) = V(\Delta),$$

имеем:

$$|f(\Delta) - \sum \varphi(P_i) V(\delta_i)| < \varepsilon V(\Delta).$$

Следовательно, если задача возможна, то она имеет единственное решение $f(\Delta)$, являющееся пределом $\sum \varphi(P_i) V(\delta_i)$.

Посмотрим, существует ли этот предел. Пусть имеется другое подразделение Δ , дающее области δ'_j и точки P'_j . Предположим, что измерения δ и δ' настолько малы, что в каждом из этих интервалов φ изменяется самое большее на ε ; вычислим в этом предположении разность

$$\sum \varphi(P_i) V(\delta_i) - \sum \varphi(P'_j) V(\delta'_j).$$

Пусть δ'' — интервалы, вытекающие из неравенств, определяющих δ_i и δ'_j . Каждое δ_i и δ'_j является суммой δ'' , и если $\delta_i = \delta''_\alpha + \delta''_\beta + \dots + \delta''_\lambda$, то справедливо также равенство

$$V(\delta_i) = V(\delta''_\alpha) + V(\delta''_\beta) + \dots + V(\delta''_\lambda).$$

Произведя это преобразование для $V(\delta_i)$ и $V(\delta'_j)$ в оцениваемой разности, мы представим последнюю в виде суммы относительно δ'' :

$$\sum [\varphi(P_i) - \varphi(P'_j)] V(\delta''_x).$$

Итак, $\varphi(P_i)$ и $\varphi(P'_j)$, связанные таким образом с δ''_x , отличаются от ε самое большее на значение φ в точке P_x интервала δ''_x . Значит, оцениваемая нами разность не превосходит

$$\sum 2\varepsilon \cdot V(\delta''_x) = 2\varepsilon \cdot V(\Delta);$$

она, следовательно, стремится к нулю вместе с ε , и *сумма $\sum \varphi(P_i) V(\delta_i)$ имеет предел $f(\Delta)$, независимый от принятого подразделения Δ .*

Остается показать, что функция $f(\Delta)$ удовлетворяет условиям теоремы. Чтобы нам не пришлось проделывать это больше одного раза, распространим сначала полученные результаты на любую квадратуруемую область Δ . Мы видели, что она является пределом переменной области Δ_ν , состоящей из интервалов; таким образом, так как хотят, чтобы функция $f(\Delta)$ была непрерывной, то $f(\Delta)$ должна быть пределом $f(\Delta_\nu)$. А так как функция $f(\Delta_\nu)$ — единственная, то $f(\Delta)$, если только она существует, будет также единственной. Покажем, что $f(\Delta_\nu)$ на самом деле имеет предел.

Мы видели, что можно найти две такие области, образованные интервалами $\overline{\Delta}$ и $\underline{\Delta}$, что Δ находится строго внутри первой области и сама в том же смысле содержит вторую и что можно сделать $a_k(\overline{\Delta} - \underline{\Delta})$ сколь угодно малым; то-

где Δ_v , стремясь к Δ , в конце концов будет содержаться в $\overline{\Delta}$ и будет содержать $\underline{\Delta}$. Пусть такими двумя областями являются Δ_v , Δ'_v ; они имеют общую часть Δ'' и такковы, что $\Delta_v - \Delta'' = \Delta$, $\Delta'_v - \Delta'' = \Delta'$, где Δ и Δ' , составляя часть $\overline{\Delta} - \underline{\Delta}$, имеют площади порядка k , меньшие, чем a_k ($\overline{\Delta} - \underline{\Delta}$). Вычислим

$$f(\Delta_v) - f(\Delta'_v) = [f(\Delta'') + f(\Delta)] - [f(\Delta'') + f(\Delta')] = f(\Delta) - f(\Delta').$$

Для Δ , образованного конечным числом интервалов, $f(\Delta)$ является пределом суммы $\sum \varphi(P_x) V(\delta_x)$; если B — верхняя граница $|\varphi|$, то эта сумма по модулю не превосходит

$$B \sum V(\delta_x) = BV(\Delta) \leq BK a_k(\Delta),$$

где K — фиксированное число; следовательно,

$$|f(\Delta_v) - f(\Delta'_v)| \leq 2BK a_k(\overline{\Delta} - \underline{\Delta}),$$

и значит, $f(\Delta_v)$ стремится к пределу, который мы принимаем за $f(\Delta)$.

105. Эта функция $f(\Delta)$, единственная могущая быть решением нашей задачи интегрирования, всегда может быть получена как предел сумм $\sum \varphi(P_i) V(\delta_i)$, распространенных на интервалы I_p (играющие роль δ_i), учтенные числами n_p или N_p , дающими приближенные значения $a_k(\Delta)$. Отсюда вытекает основное свойство $f(\Delta)$, позволяющее показать, что $f(\Delta)$ удовлетворяет всем условиям задачи интегрирования.

Теорема о среднем. Если m и M являются нижней и верхней границами $\varphi(P)$ в Δ , то $f(\Delta) = \mu V(\Delta)$, где μ заключено между m и M . В самом деле, вычислим приближенное значение $f(\Delta)$ с помощью n_p интервалов I_p , согласно вышесказанному; мы находим сумму $\sum \varphi(P_i) V(\delta_i)$, заключенную между $m \sum V(\delta_i)$ и $M \sum V(\delta_i)$, стремящимися к $mV(\Delta)$ и $MV(\Delta)$. Так как φ — непрерывная функция от P , то значение μ будет одним из значений, принимаемых φ в Δ , откуда имеем другую теорему, а именно:

теорему о конечных приращениях:

$$f(\Delta) = V(\Delta) \varphi(\pi),$$

где π — подходящим образом выбранная точка в области Δ^1).

106. Из этой теоремы вытекает, что если B — верхняя граница φ в конечной области рассматриваемого пространства и если для этой области функция $V(\Delta)$, обладающая производными ограниченными числами, такова, что $V(\Delta) < K \cdot a_k(\Delta)$, то $|f(\Delta)| < BK \cdot a_k(\Delta)$; таким образом, $f(\Delta)$ обладает ограниченными производными числами.

Если квадрлируемая порядка k область Δ разделена на две также квадрлируемые области Δ^1, Δ^2 , то n_p интервалов I_p , относящихся к Δ , делятся на n_p^1, n_p^2 интервалов, относящихся к Δ^1 и Δ^2 , и на остаточные интервалы R , содержащие точки, внутренние для Δ и граничные для Δ^1 и Δ^2 ; отсюда, употребляя I_p в качестве δ_i , имеем:

$$\sum \varphi(P_i) V(\delta_i) = \sum \Delta^1 \varphi(P_i) V(\delta_i) + \sum \Delta^2 \varphi(P_i) V(\delta_i) + \sum R \varphi(P_i) V(\delta_i).$$

При p , неограниченно возрастающем, первые три суммы стремятся к $f(\Delta)$, $f(\Delta^1)$, $f(\Delta^2)$; третья не превосходит по модулю числа $BK a_k(R)$, стремящегося к нулю. Значит, $f(\Delta)$ — аддитивная функция²⁾.

Теорема о конечных приращениях дает также:

$$\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)} - \varphi(P) = \varphi(\pi) - \varphi(P);$$

следовательно, левая часть равенства становится меньше ε , коль скоро измерения Δ взяты настолько малыми, что при переходе от P к π , т. е. от одной точки Δ к другой, φ изменяется меньше, чем на ε . Значит, $f(\Delta)$ имеет $\varphi(P)$ в качестве производной по V , и эта производная обладает равномерной сходимостью.

Итак, мы доказали, что проблема интегрирования может быть решена, что это решение единственное и выражается пределом суммы $\sum \varphi(P_i) V(\delta_i)$ при δ , попарно не перекрывающихся, квадрлируемых, обладающих измерениями, стремящимися к нулю, образующих область, стремящуюся к данной квадрлируемой области Δ , при произвольно взятых в каждом δ_i точках P_i того же индекса. Чтобы напомнить об этом, представляют реше-

1) Можно легко показать, что, за исключением того случая, когда $m = M$, $\mu = \varphi(\pi)$ отлично от m и от M .

2) Это было очевидно для случая, когда Δ были суммами интервалов; мы уже этим тогда пользовались.

ние, называемое определенным интегралом, взятым в Δ от функции $\varphi(P)$ по $V(\Delta)$ символом

$$\int \varphi(P) dV.$$

Соответствующим неопределенным интегралом называется аддитивная функция $f(\Delta)$ квадратуемой области, полученная в результате изменения Δ .

107. Однако, в действительности, способ вычисления, вытекающий из определения, употребляется редко; чаще всего интегриацию по $V(\delta)$ заменяют интеграцией по $a_k(\delta)$. Это легко сделать, так как из равенства

$$\frac{f(\delta)}{a_k(\delta)} = \frac{f(\delta)}{V(\delta)} \cdot \frac{V(\delta)}{a_k(\delta)}$$

вытекает равенство, обобщающее теорему о производной функции от функции:

$$\frac{df}{da_k}(P) = \frac{df}{dV}(P) \cdot \frac{dV}{da_k}(P) = \varphi(P) \cdot \frac{dV}{da_k}(P) = \psi(P),$$

из которого следует:

$$\int_{\Delta} \varphi(P) dV = \int_{\Delta} \varphi(P) \cdot \frac{dV}{da_k}(P) da_k = \int_{\Delta} \psi(P) da_k.$$

Интеграл по a_k называется *кратным интегралом порядка k* .

Достаточно научиться вычислять эти k -кратные интегралы. Вычисление производят при помощи рекуррентных формул, по крайней мере, когда дело касается простой области, случай, которым мы и ограничимся, так как, какова бы ни была квадратуемая область E , область, названная нами \bar{E}_p , бесконечно близка к ней и является суммой конечного числа простых областей, каковыми являются I_p (§ 101).

Исследуем $\int_{\Delta} \varphi(P) da_k$ в предположении, что Δ — простая область, определенная с помощью неравенств § 96, и $\Delta(AB)$ — область, полученная в результате замены первого неравенства, определяющего Δ , неравенством

$$A \leq x_1 \leq B.$$

Обозначим через $S(X_1)$ сечение Δ плоскостью $x_1 = X_1$, т. е. простую область пространства x_2, x_3, \dots, x_k , определенную при помощи $k-1$ последних двойных неравенств, если положить в них $x_1 = X_1$. При изменении X_1 область $S(X_1)$ меняется непрерывно.

Исследуем функцию $f[\Delta(A, B)]$, полученную распространением интеграла на $\Delta(A, B)$; ее можно рассматривать, как функцию $F(\xi)$ интервала ξ одного измерения, определенного неравенством $A \leq x_1 \leq B$. Эта функция, очевидно, аддитивная; вычислим ее приближенное значение с помощью интервалов I_p , имеющих, по крайней мере, одну точку в $\Delta(A, B)$. Модуль этого приближенного значения мажорирован выражением вида

$$\sum |\varphi(P_i)| a_k(\delta_i) \leq M a_k[\Delta_p(A, B)],$$

если M — верхняя граница $\varphi(P)$ и если $\Delta_p(A, B)$ построена по образцу \bar{E}_p (§ 99). Все же I_p , составляющие $\Delta_p(A, B)$, имеют проекцию на многообразие координат x_2, x_3, \dots, x_k , составленную из тех I_p' этого многообразия, которые имеют точки, принадлежащие проекции Δ . Если, следовательно, A_{k-1} — площадь порядка последней проекции и так как I_p , обладающие той же самой проекцией I_p' , образуют самое большое интервал J_p , первое измерение которого не превосходит $B - A + \frac{2}{10^p}$, то найден-

ный верхний предел превосходит сколь угодно мало $M \cdot A_{k-1} (B - A)$. И так как $B - A$ есть площадь ξ порядка 1, то $F(\xi)$ имеет разностное отношение, мажорированное по модулю выражением $M \cdot A_{k-1}$; $F(\xi)$ есть функция с ограниченными производными числами.

108. Рассмотрим подробнее процесс вычисления производной функции $F(\xi)$ в точке $x_1 = A$. Для этого построим с помощью интервалов I' с достаточно большим индексом $p + q$ две области $\underline{S}(A)$ и $\overline{S}(A)$, из которых первая содержится в точном смысле в $S(A)$, содержащемся в свою очередь в том же смысле во второй области (§ 101). Тогда для B , достаточно близкого к A , и при X_1 , изменяющемся от A до B , $S(X_1)$ содержится в $\overline{S}(A)$ и содержит $\underline{S}(A)$. Вычислим приближенное значение $F(\xi)$ с помощью интервалов I_{p+q+r} ; эти интервалы бывают двух видов: для одних проекция I_{p+q+r} на x_2, x_3, \dots, x_k принадлежит $\underline{S}(A)$; для других она принадлежит разности $\overline{S}(A) - \underline{S}(A)$. Проекции вторых обладают a_{k-1} , не превосходящим $a_{k-1} [\overline{S}(A) - \underline{S}(A)]$, т. е. величины ε , сколь угодно малой, и после вычислений, аналогичных предшествующим, входят в разностное отношение

$\frac{F(\xi)}{B-A}$ в виде слагаемого, по модулю не превышающего M_ε , следовательно, сколь угодно малого.

Что же дают другие интервалы первого вида? В каждом из I_{p+q+r} , имеющих одинаковую проекцию I'_{p+q+r} , выберем по точке; все эти точки имеют одну и ту же проекцию P' на $x_1 = A$; эти I_{p+q+r} дают в отношении

$\frac{F(\xi)}{B-A}$ слагаемое вида

$$\frac{1}{B-A} \left[\varphi(P_{i_1}) a_k(\delta_{i_1}) + \varphi(P_{i_2}) a_k(\delta_{i_2}) + \dots + \varphi(P_{i_m}) a_k(\delta_{i_m}) \right].$$

Это выражение очень мало отличается от $\varphi(P') a_{k-1}(I'_{p+q+r})$, так как $\varphi(P_{i_j})$ отличаются от $\varphi(P')$ меньше, чем на η , коль скоро B достаточно близко к A , и при r , достаточно большом, интервалы δ_{i_j} , т. е. I_{p+q+r} с теми же проекциями I'_{p+q+r} , образуют интервал, первое измерение которого сколь угодно мало отличается от $|B-A|$.

Таким образом, разностное отношение будет с любой желаемой точностью равно $\sum \varphi(P'_{i_j}) a_{k-1}(\delta'_{i_j})$. Производная будет существовать, если это отношение при данных условиях имеет предел. Предел же этот известен, это есть выражение

$$\int_{S(A)} \varphi(P) da_{k-1};$$

следовательно, $F(\xi)$ имеет производную

$$\frac{dF}{da_1} = \int_{S(A)} \varphi(P) da_{k-1}.$$

К тому же это разностное отношение стремится к производной равномерно, и, значит, имеем:

$$F(\xi) = \int_{\xi} \left[\int_{S(A)} \varphi(P) da_{k-1} \right] da_1.$$

Вычисление k -кратного интеграла заменено вычислением простого интеграла от $(k-1)$ -кратного.

Простой интеграл обозначается еще так:

$$\int_{\xi} x(P) da_1 = \int_A^B x(x_1) dx_1,$$

если $A < B$, чтобы напомнить, что мера (или площадь порядка 1) интервала $A \leq x_1 \leq B$ есть приращение переменной x_1 и что значение x_1 определяет P .

Итак, полученная формула напишется, в частности, для $A = a_1$, $B = b_1$, так:

$$f(\Delta) = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{S(x_1)} \varphi(P) da_{k-1} \right] dx_1,$$

откуда, по рекурентности, имеем:

$$f(\Delta) = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \left[\dots \left(\int_{a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}^{b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \varphi(P) dx_k \right) \dots \right] dx_2 \right\} dx_1.$$

Группируя, с одной стороны, n первых интегралов, а, с другой, $k - n$ последних, мы получаем формулу, которую можно было бы доказать и непосредственно:

$$f(\Delta) = \int_{P_1, 2, \dots, n} \left[\int_{S(x_1, x_2, \dots, x_n)} \varphi(P) da_{k-n} \right] da_n.$$

$P_1, 2, \dots, n$ есть проекция Δ на координатное пространство x_1, x_2, \dots, x_n ; $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть сечение Δ пространством, параллельным указанному координатному пространству и проходящим через точку P , т. е. n первых двойных неравенств, определяющих Δ , определяют $P_1, 2, \dots, n$, и $k - n$ последних неравенств, при фиксированных x_1, x_2, \dots, x_n , определяют $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Эти формулы позволяют находить значения кратных интегралов при помощи интеграций менее высокого порядка и вообще прибегать к рекуренциям. Если, в частности, положить в них $\varphi(P) \equiv 1$, то получим формулы, связывающие площадь порядка k с площадями низших порядков; откуда, в частности, вычисление площадей в обычном смысле слова и объемов.

109. Итак, нам остается лишь научиться брать простые интегралы. Пусть имеем выражение

$$F(\xi) = \int_{A \leq x \leq B} \varphi(x) dx,$$

которое есть также функция двух переменных $\Phi(A, B)$. Из факта, что F аддитивна, следует для $A < B < C$:

$$\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C).$$

Следовательно, для $0 < A < B$

$$F(\xi) = \Phi(0, B) - \Phi(0, A).$$

Чтобы эта формула годилась также для $A < B < 0$ и для $A < 0 < B$, достаточно положить $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$; вполне законное допущение, так как с самого начала Φ была определена в предположении, что значение первого переменного меньше значения второго. Мы будем иметь:

$$\int_A^B \varphi(x) dx = \Phi(0, B) - \Phi(0, A),$$

каковы бы ни были знаки A и B , но лишь бы A было меньше B . Мы избавимся, наконец, от этого последнего ограничения, полагая по определению

$$\int_A^B \varphi(x) dx + \int_B^A \varphi(x) dx = 0.$$

Таким образом, $F(\xi)$ зависит лишь от функции одного переменного $\Phi(0, X) = \Psi(X)$, даже когда определяют, как мы только что делали, $F(\xi)$ для отрицательных интервалов $[A > B]$. Посмотрим, какому свойству Ψ соответствует дифференцируемость F ? Для $A < B$ имеем, по нашей теореме о конечных приращениях:

$$\frac{F(\xi)}{a_1(\xi)} = \varphi(X) \text{ при } A < X < B,$$

и по предыдущему:

$$\frac{F(\xi)}{a_1(\xi)} = \frac{\Psi(B) - \Psi(A)}{B - A};$$

следовательно,

$$\frac{\Psi(B) - \Psi(A)}{B - A} = \varphi(X)$$

и, значит, $\Psi(X)$ имеет $\varphi(X)$ в качестве производной, причем можно даже заметить, что разностное отношение для Ψ стремится к производной равномерно¹⁾.

¹⁾ Я предполагаю, следовательно, знакомство с понятиями производной и первообразной функции одного переменного, понятиями, входящими в программы средней школы.

Таким образом, всякая непрерывная функция от одного переменного $\varphi(X)$ обладает первообразными функциями, определенными к тому же по классической теории с точностью до постоянной. Следовательно, если известна одна из них $\Psi_0(X)$, то можно вывести:

$$\Phi(0, X) = \Psi_n(X) + \text{const} = \Psi_0(X) - \Psi_0(0),$$

откуда

$$\int_A^B \varphi(x) dx = \Psi_0(B) - \Psi_0(A).$$

Итак, *вычисление кратных интегралов сведено к отысканию примитивных функций от функций одного переменного.*

С другой стороны, важно заметить, что в случае одного измерения функция области, следовательно, функция *интервалов одного измерения*, будет, согласно предшествующему, определена, если известно, что она аддитивна, и если знают ее непрерывную производную, без того, чтобы было известно заранее, что искомая функция обладает ограниченными производными числами, а ее производная — равномерной сходимостью. Эта функция есть неопределенный интеграл производной. Это замечание, незначительное само по себе, необходимо для придания строгости принятому здесь изложению.

110. Постараемся вывести так называемую формулу замены переменных в интегральном исчислении, предполагая, естественно, известной теорию неявных функций и все, что касается замены переменных в дифференциальном исчислении.

Рассматриваемая замена переменных приводит в соответствие точку (x_i) с точкой (u_i) , область δ_x пространства x_i с областью δ_u пространства u_i . Если бы нам удалось установить, что всякой квадрируемой порядка k области δ_x соответствует квадрируемая область δ_u и обратно, а также, что отношения $\frac{a_k(\delta_x)}{a_k(\delta_u)}$ и $\frac{a_k(\delta_u)}{a_k(\delta_x)}$ остаются меньше некоторого числа M , то аддитивная функция $f(\delta_x)$, обладающая ограниченными производными числами, могла бы быть рассматриваема как аддитивная функция от δ_u , обладающая ограниченными производными числами, так как

$$\frac{f(\delta_x)}{a_k(\delta_u)} = \frac{f(\delta_x)}{a_k(\delta_x)} \cdot \frac{a_k(\delta_x)}{a_k(\delta_u)}.$$

Если $f(\delta_x) = \int_{\delta_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)]$, то первое отношение правой части равенства стремится равномерно к

$$\frac{d[f(\delta_x)]}{d[a_k(\delta_x)]}(P) = \varphi(P);$$

следовательно, если бы удалось показать, что второе отношение стремится равномерно к пределу

$$\frac{d[a_k(\delta_x)]}{d[a_k(\delta_u)]}(P) = \chi(P),$$

то отношение левой части равномерно стремилось бы к пределу, и мы имели бы:

$$f(\delta_x) = \int_{\delta_u} \varphi(P) \cdot \chi(P) d[a_k(\delta_u)].$$

Эта формула разрешает проблему замены переменных; вообще она применяется при замене функции, по которой интегрируют:

$$f(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi(P) dV = \int_{\Delta} \varphi(P) \cdot \frac{dV}{dV_1}(P) \cdot dV_1;$$

в этой интерпретации мы уже встречали ее (§ 107).

Так же, как и формула замены переменных, она предполагает выполненными все сделанные нами предположения; рассмотрим сначала предположение $k=1$.

Формула замены переменных есть $x = A(u)$, причем $A'(u)$ имеет постоянный знак. Интервалу соответствует интервал, и так как мы рассматриваем в качестве областей δ_x лишь интервалы, то никакого сомнения в квадратуемости порядка 1 областей δ_u не будет. Если δ_x есть (x_1, x_2) , а δ_u есть (u', u'') , то имеем:

$$\frac{\delta[a_k(\delta_x)]}{\delta[a_k(\delta_u)]} = \left| \frac{x_1 - x_2}{u' - u''} \right| = \left| \frac{A(u') - A(u'')}{u' - u''} \right|;$$

следовательно, разностное отношение равномерно ограничено, равно как и ему обратное; к тому же мы замечаем, что оно стремится равномерно к пределу $|A'(u)|$.

Итак, мы имеем:

$$\int_{\Delta_x} \varphi(x) dx = \int_{\Delta_u} \varphi[A(u)] \cdot |A'(u)| du.$$

Заметим, что знак *модуля* нужен лишь для $A'(u)$ отри-

цательных, т. е. если $x_1 = A(u'')$, $x_2 = A(u')$, если преобразование приводит в соответствие положительное направление оси x с отрицательным направлением оси u , если как говорят, преобразование меняет ориентацию.

Пусть $k > 1$. Предположим, что формула

$$x_k = A[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, u_k],$$

в которой $\frac{\partial A}{\partial u_k}$ имеет постоянный знак, изменяет одно лишь x_k и пусть

$$u_k = B[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

есть обратная функция. Области Δ_x , определенной неравенствами § 96, соответствует область Δ_u , определенная с помощью $k-1$ первых неравенств и с помощью u_k заключенного между

$$B[(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))]$$

и

$$B[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})].$$

Второе из этих значений B будет больше первого только в том случае, если $A'u_k$ положительно. Обозначим через α_k самую малую из этих величин, через β_k самую большую; тогда, обозначая через D общую проекцию Δ_x и Δ_u на многообразие координат x_1, x_2, \dots, x_{k-1} и через d любую часть D , имеем:

$$\int_{\Delta_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)] = \int_D \left[\int_{a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}^{\beta_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \varphi(P) dx_k \right] d[a_{k-1}(d)],$$

что, по предшествующей формуле, будет равно

$$\begin{aligned} \int_D \left[\int_{a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}^{\beta_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \varphi(P) \cdot \left| \frac{\partial A(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial u_k} \right| du_k \right] d[a_{k-1}(d)] = \\ = \int_{\Delta_u} \varphi(P) \left| \frac{\partial A}{\partial u_k}(P) \right| d[a_k(\delta_u)]. \end{aligned}$$

Это установлено лишь для простой области при данном порядке переменных x_1, x_2, \dots, x_k , но так как всякая квадрируемая область Δ_x отличается сколь угодно мало от суммы интервалов, следовательно, и от суммы простых областей, то эта формула является общей. Заметим еще, что *знак модуля* необходим лишь в том случае, когда нет соответствия между положительными направлениями

осей u и x . Когда этого нет, то при $k=1, 2$ или 3 мы говорим, что имеется перемена ориентации; то же самое выражение будем употреблять и в общем случае.

Пусть теперь имеем замену переменных:

$$x_i = A_i(u_1, u_2, \dots, u_k), \quad i = (1, 2, \dots, k).$$

Пусть будут выполнены классически условия, напоминать которые я не буду. Классическое доказательство теоремы о неявных функциях показывает, что *ограниченная* область, в которой рассматривается преобразование, может быть разделена на конечное число таких частичных областей, что каждая из них допускает замену переменных с помощью k замен одной переменной¹⁾.

Разбивая по мере надобности первоначальную область на части, мы можем предположить, что имеем дело с областью, целиком расположенной в одной из этих частей, пусть в такой, в которой последовательно переходят от x_1 к u_1 , от x_2 к u_2 , ..., от x_k к u_k . Тогда формулы принимают вид:

$$x_i = B_i(u_1, u_2, \dots, u_i, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

или

$$u_i = C_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, x_i, \dots, x_k).$$

k последовательных факторов, вводимых этими k заменами в преобразуемый интеграл, являются частными производными

$$\left| \frac{\partial B_i}{\partial u_i} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\partial C_i}{\partial x_i}} \right|.$$

Так как C_i получаются путем разрешения $k-i+1$ последних уравнений $x_i = A_i$ относительно u_i, u_{i+1}, \dots, u_k , то

1) Для доказательства теоремы о неявных функциях мы показываем, что, переставляя по мере надобности индексы в обоих рядах переменных, мы добиваемся для любой точки того, чтобы были отличны от нуля все миноры, полученные вычеркиванием первых строк и столбцов детерминанта $\frac{\partial A_i}{\partial u_i}$. В таком случае около каждой точки найдется область, где наблюдается то же явление. Это и будут те частичные области, о которых говорится в тексте.

Конечность числа этих областей, вытекающая из так называемой теоремы Бореля-Лебега (Borel-Lebesgue), может быть легко доказана более элементарным путем, предполагая, например, существование вторых производных от A_i .

$$\frac{\partial C_i}{\partial x_i} = \frac{\frac{D(A_{i+1}, \dots, A_k)}{D(u_{i+1}, \dots, u_k)}}{\frac{D(A_i, \dots, A_k)}{D(u_i, \dots, u_k)}},$$

откуда имеем искомую формулу:

$$\int_{\Delta_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)] = \int_{\Delta_u} \varphi(P) \cdot \left| \frac{D(A_1, \dots, A_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}(P) \right| d[a_k(\delta_u)],$$

где Δ_x и Δ_u являются двумя областями, соответствующими друг другу с помощью данных формул.

111. Задержимся несколько, чтобы лучше объяснить последнюю фразу, так как в действительности в предложенном вопросе нет соответствующих областей. Итак, постараемся хорошо разобраться в начале § 110.

Мы исходили из интеграла, распространенного на области, вырезанные на кривой, на поверхности или вообще на так называемом многообразии:

$$X_j = X_j(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

где j меняется от 1 до m , при $m \geq k$. Пусть X_j суть координаты, например, прямоугольные, которые называют прямолинейными, чтобы отличить от параметров x_i , называемых также криволинейными координатами многообразия. Предшествующее многообразие называется k -мерным и погруженным в m -мерное пространство.

Рассмотрим точку P этого многообразия; по предположению, она задана одной единственной системой значений x_i . Если, следовательно, мы будем интерпретировать эти x_i как прямолинейные или, точнее, как прямоугольные координаты так называемого k -мерного координатного пространства x_i , то получим точку P_x , образ P . Таким образом, некоторой области D многообразия соответствует область D_x пространства x_i .

Произведем замену криволинейных координат с помощью формул $x_i = A_i(u_1, u_2, \dots, u_k)$. X_j выразятся в функции u_i , откуда мы получим новый образ P , точку P_u пространства u_i . Переход от P_x к P_u совершается через P : от P_x к P и от P к P_u . Между P_x и P_u имеется соответствие, и, следовательно, данные формулы являются также формулами преобразования пространства x_i в пространство u_i , откуда и берутся соответствующие области.

Все это очень тривиально и вполне аналогично тому; что мы видели в случае, когда A_i были линейными: формулы преобразования координат являются также формулами точечного преобразования. В том частном случае, когда дело касается прямоугольных координат, преобразование называется перемещением, если детерминант преобразования положителен. Если же детерминант отрицателен, то говорят, что мы имеем дело с *преобразованием с помощью симметрии*, так как достаточно изменить знак у единственной координаты, чтобы получить перемещение, и, следовательно, смысл этого словесного выражения согласуется с тем, что мы имели для $k \leq 3$.

Среди этих преобразований прямолинейных координат имеются два очень простых: перемена знака у одной координаты и перестановка порядка двух координат. Для пространств 1, 2, 3 измерений мы привыкли в таком случае говорить, что мы переходим от одной ориентации с другой; мы оставим это выражение и для общего случая. Таким образом, выбор системы криволинейных координат многообразия вполне определяет выбор ориентации этого многообразия. При замене криволинейных координат мы меняем или не меняем ориентацию в зависимости от того, будет ли функциональный определитель от старых координат по отношению к новым отрицательным или положительным.

Заметив это, мы можем утверждать, что функция, определенная для областей D , может быть отнесена к областям D_x и D_u ; так, в предшествующем параграфе всякой области δ были последовательно отнесены функции $a_k(\delta_x)$ и $a_k(\delta_u)$. Интеграл $\int_{\Delta} \varphi(P) dV$ не меняет вида

при замене криволинейных координат; но если хотят напомнить, что будут употреблять то координаты x_i , то координаты u_i , то можно это отметить равенством:

$$\int_{\Delta_x} \varphi(P_x) d[V(\delta_x)] = \int_{\Delta_u} \varphi(P_u) d[V(\delta_u)].$$

Оно показывает, что формулы преобразования вычисления, сделанного над x_i , в вычисление над u_i , т. е. формулы замены переменных, будут также формулами преобразования области Δ_x пространства x_i в область Δ_u пространства u_i . В каждом из этих пространств выбирается

ориентация, принимаемая за положительную; если не будет введено противоположных условий, то положительная ориентация задается самим порядком координатных индексов.

112. Тогда из предшествующего можно вывести:

$$\int_{\Delta_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)] = \int_{\Delta_u} \varphi(P) \cdot \frac{D(A_1, \dots, A_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}(P) d[a_k(\delta_u)],$$

если формулы, рассматриваемые как формулы замены криволинейных координат, сохраняют ориентацию, или рассматриваемые как формулы преобразования устанавливают соответствие между положительными ориентациями пространств x_i и u_i . В противном случае имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)] &= \\ &= \int_{\Delta_u} \varphi(P) \cdot (-1) \cdot \frac{D(A_1, \dots, A_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}(P) d[a_k(\delta_u)]. \end{aligned}$$

Обе эти формулы можно объединить в одну, если различать области не только по семейству составляющих их точек, но также и по приданной им ориентации. Так, мы отнесем одной и той же неориентированной области Δ две ориентированные области $\overset{\rightarrow}{\Delta}_+$ и $\overset{\rightarrow}{\Delta}_-$, в зависимости от того, положительную или отрицательную ориентацию мы ей придаем. Тогда, будет ли вопрос идти о замене криволинейных координат или об их преобразовании, мы всегда будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\rightarrow}{\Delta}_x} \varphi(P) d[a_k(\delta_x)] &= \\ &= \int_{\overset{\rightarrow}{\Delta}_u} \varphi(P) \frac{\vec{D}(A_1, \dots, A_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}(P) d[a_k(\delta_u)], \end{aligned}$$

где $\overset{\rightarrow}{\Delta}_x$, $\overset{\rightarrow}{\Delta}_u$ являются двумя ориентированными, соответствующими друг другу областями, если только положить, что

$$\int_{\overset{\rightarrow}{\Delta}_+} \varphi(P) dV = \int_{\overset{\rightarrow}{\Delta}_-} \varphi(P) dV$$

$$\text{и} \quad \int_{\substack{\Delta \\ \rightarrow +}} \varphi(P) dV + \int_{\substack{\Delta \\ \rightarrow -}} \varphi(P) dV = 0.$$

Это условие есть условие, данное в § 109 для случая одной координаты; оно почти необходимо влечет за собой другие. Оба интеграла предшествующего равенства являются пределами сумм:

$$\sum \varphi(P_i) V(\delta_i); - \sum \varphi(P_i) V(\delta_i) = \sum \varphi(P_i) [-V(\delta_i)],$$

где δ_i являются результатом разбиения Δ ; но в первом случае дело касается Δ , а во втором Δ . Естественно

поэтому писать обе суммы в одном и том же виде:

$$\sum \varphi(P_i) V(\delta_i),$$

причем ориентация δ_i совпадает с ориентацией Δ . Это равносильно допущению:

$$V(\delta_i) = V(\delta_i); V(\delta_i) + V(\delta_i) = 0.$$

Отсюда получается новое условие: *из аддитивной функции $V(\delta)$, заданной для неориентированных областей, можно вывести функцию, определенную предшествующими равенствами для ориентированных областей.*

В то же время выходит, что мы определили интеграл от $\varphi(P)$ по функции $-V$, всегда отрицательной функции области. Если в § 103 и следующих мы предполагали $V > 0$, то это было сделано исключительно для того, чтобы существовало разностное отношение $\frac{f(\Delta)}{V(\Delta)}$; можно

было быть в этом уверенным, также предполагая V всегда отрицательным. В данной нами теории нам пришлось бы изменить лишь несколько слов, смысл некоторых неравенств и поставить несколько знаков абсолютных величин. Бесполезно останавливаться на этом подробно; достаточно условиться, что, по определению, всегда будет иметь место равенство:

$$\int \varphi(P) dV + \int \varphi(P) d[-V] = 0,$$

безразлично, будет ли Δ ориентированной или неориентированной областью.

Если бы $V(\Delta)$ могло принимать оба знака, то, наоборот, мы должны были бы внести серьезные изменения, так как для некоторых Δ разностное отношение относительно V не существовало бы. Но предположим, что рассматри-

ваемая область обладает способностью разбиваться на конечное число таких областей, что для областей, заключенных в одну из них, V обладает постоянным знаком. Тогда, разбивая каждую область Δ на частичные области Δ' , Δ'' , ..., расположенные в этих различных областях, мы положим

$$\int_{\Delta} = \int_{\Delta'} + \int_{\Delta''} + \dots$$

Интеграл, определенный таким образом, будет обладать почти всеми вышеуказанными свойствами; однако теорема о конечных приращениях и теорема о среднем значении смогут быть применены лишь к частичным областям, и придется отказаться от дифференцирования неопределенного интеграла в граничных точках частичных областей. Но что бы там ни было, *нам удалось определить интеграл от не всегда положительной аддитивной функции области, распространенной на ориентированную область.*

113. Пусть

$$x_i = F_i(u_1, u_2, \dots, u_k), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n,$$

суть формулы, определяющие многообразие k измерений пространства n измерений. Так как хотят, чтобы каждой точке этого многообразия соответствовала лишь одна система чисел u_i и чтобы в этом можно было убедиться с помощью теоремы о неявных функциях, то предполагают, помимо существования и непрерывности чисел $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$, что не все миноры k -го порядка, полученные из

матрицы, составленной из этих производных, обращаются в нуль одновременно. Рассматриваемая ограниченная область в нашем случае будет суммой конечного числа областей, для каждой из которых k из n соответствующим образом подобранных прямолинейных координат x_i смогут служить криволинейными координатами для многообразия. Если это суть переменные x_1, x_2, \dots, x_k , то мы имеем тогда при $i \leq k$:

$$u_i = A_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

и при $p > k$:

$$x_p = G_p(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Мы получим соответствие между областями Δ многообразия, областями Δ_n пространства u_i и, если Δ находится в рассматриваемой области R многообразия, то

и областями Δ_x пространства x_1, x_2, \dots, x_k . К тому же имеется соответствие между ориентацией этих областей; если, как было предположено, положительная ориентация Δ_x соответствует положительной ориентации Δ_u , то мы будем иметь в Δ_x положительную или отрицательную ориентацию, в зависимости от того, будет ли детерминант $\frac{D(x_1, \dots, x_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}$ положительным или отрицательным.

Перейдем теперь от области R к области R_1 ; если ориентация многообразия выбрана раз навсегда, то ориентация Δ и Δ_u не изменится, но ориентация Δ_x изменится, если функциональный определитель имеет в R и R_1 разные знаки. Если, следовательно, рассмотренный функциональный определитель

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_k)}{D(u_1, u_2, \dots, u_k)}$$

меняет знак лишь в исключительных точках, не образующих никакой области многообразия и могущих, следовательно, быть изъятыми при вычислении интеграла

$\int_D \varphi(P) d[a_k(\delta_u)]$ для всякой области D^1), то мы имеем:

$$\int_{\vec{D}} \varphi(P) d[a_k(\delta_{\vec{x}})] = \int_{\vec{D}} \varphi(P) \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_k)}{D(x_1, x_2, \dots, x_k)}(P) d[a_k(\delta_{\vec{x}})],$$

где символ \vec{D} указывает, что в правой части равенств нужно отнести каждой области δ многообразия, расположенной в одной из областей R, R_1, \dots , площадь порядка k ее проекции δ_x , снабженную знаком, соответствующим ориентации δ_x как проекции части $\vec{\delta}$ ориентированной области D .

Полученная \rightarrow формула может быть записана и так:

$$\int_D \psi(x_1, x_2, \dots, x_k) d[a_k(\delta_{\vec{x}})] = \int_{\vec{D}} \psi(P) \frac{D(x_1, \dots, x_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}(P) d[a_k(\delta_{\vec{x}})];$$

она раскрывает смысл левой части равенства, называемой

1) Исключения составляют лишь очень специфические многообразия; таковыми, в случае пространства трех измерений, являются кривые, обладающие дугами в плоскостях $x_i = \text{const}$, и поверхности, обладающие цилиндрическими частями с образующими, параллельными $x_k = x_i = 0$.

при $k=1$ криволинейным интегралом, а при $k=2$ — интегралом по поверхности.

Если бы случилось, что многообразие, содержащее в себе D , является исключительным и включающим области, в каждой точке которых детерминант правой части равенства равен нулю, то можно было бы рассматривать эти части, как не влияющие на величину интеграла. Случай же, когда взятые переменные x_i не являются k первыми членами последовательности, расположенными в натуральном порядке их индексов, немедленно сводится к предшествующему, так как перестановка порядка двух переменных меняет лишь направление ориентаций и, следовательно, лишь знаки у a_k .

114. Важным приложением этого определения является формула Грина (Green) и ее обобщения.

Вернемся к последней формуле § 108 для случая простой области, определенной неравенствами § 96. Она напишется так:

$$\int_{\Delta} \varphi(P) dA_k = \int \left[\int_{a_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}^{b_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_k \right] dA_{k-1},$$

$P_{1, 2, \dots, k-1}$

где символы A_k и A_{k-1} означают площади порядка k и $k-1$. Если в правой части предшествующего равенства

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_1, \dots, x_k),$$

то можно применить простое интегрирование:

$$\int_{P_1, \dots, k} F[x_1, \dots, x_{k-1}, b_k(x_1, \dots, x_{k-1})] dA_{k-1} - \\ - \int_{P_1, \dots, k} F[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_k(x_1, \dots, x_k)] dA_{k-1}.$$

Предположим к тому же, что два граничащих с Δ многообразия

$$x_k = a_k(x_1, \dots, x_{k-1})$$

и

$$x_k = b_k(x_1, \dots, x_{k-1})$$

являются двумя частями \sum_1 и \sum_2 многообразия \sum , имеющего $k-1$ измерений,

$$x_i = S_i(u_1, \dots, u_{k-1})$$

и обладающего всеми указанными свойствами регулярности. Функциональный определитель

$$\frac{D(S_1, S_2, \dots, S_{k-1})}{D(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})}$$

сохраняет постоянный знак в Σ_1 и в Σ_2 , так как в нем на место u_1, \dots, u_{k-1} можно поставить x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , и, наоборот, этот определитель меняет знак во всякой области, содержащей общую Σ_1 и Σ_2 граничную точку, так как в этом случае замена невозможна¹⁾.

Этот же функциональный определитель устанавливает ориентацию проекции области на координатное пространство x_1, \dots, x_{k-1} , если ориентация на многообразии выбрана; если, следовательно, взять на Σ ориентацию, дающую для Σ_2 в проекции положительную ориентацию, то значение интеграла напишется еще так:

$$\int_{\Sigma} F(P) d[A_{k-1}(\partial_{x_1} \dots \partial_{x_{k-1}})]$$

Полученный результат, дающий нам формулу Грина, дополняют обычным путем, рассматривая другие области, а также случай, когда переменные, которые остаются, не являются координатами x_1, x_2, \dots, x_{k-1} , расположенными в натуральном порядке индексов.

115. Другим важным приложением замены переменных является обобщение понятий длины кривой и площади поверхности (глава V). Мы определим это обобщенное понятие, беря в качестве определения упомянутый, например, в § 62 и 64 интеграл, как мы часто делали для длины и площади. После беглого исследования этого вопроса мы укажем также и другой метод изложения, хорошо, впрочем, известный, который освобождает нас от необходимости предварительного изучения площадей порядка k , как мы это делали выше в § 97—100, и который позволяет приступить непосредственно к изучению процесса интегрирования.

1) Это утверждение требует пояснения и опирается на формулировку теоремы о неявных функциях, более общую, чем классическая, предполагающая функциональные определители отличными от нуля. Если ограничиться обыкновенным пространством или плоскостью, то это обобщение легко осуществить, и, таким образом, мы получим нужные предпосылки для рассмотрения общего случая.

Во всем предшествующем предварительное изучение площадей было необходимо лишь с логической точки зрения, для обоснования понятия квадратуемой области. Определение же такой области, опирающееся лишь на значение площади порядка k интервала, могущее быть принятым без объяснений, могло бы быть дано без этого исследования. Откуда мы и получаем определение интеграла.

В виду этого, длина отрезка $a \leq x \leq b$ выразится $\int_a^b dx$; назовем площадью квадратуемой области Δ плоскости x_1, x_2 выражение $\int_{\Delta} dx_1 dx_2$

и вообще площадью порядка k квадратуемой области пространства x_1, x_2, \dots, x_k выражение $\int_{\Delta} dx_1 dx_2 \dots dx_k$.

Формула § 110 сейчас же показывает, что эта площадь не зависит от выбранных прямоугольных координат, так как при переходе от одной системы таких координат к другой подлежащий рассмотрению функциональный определитель равен ± 1 . К тому же, для интервала мы можем непосредственно найти произведение его измерений; следовательно, площадь порядка k , таким образом определенная, есть функция, определенная для квадратуемых областей порядка k , аддитивная, положительная и сводящаяся, в случае интервала, к произведению его измерений. Это устанавливает тождественность этого понятия с данным в § 97—100, если последнее уже было рассмотрено; в противном же случае позволяет быстро восстановить факты, указанные в этих параграфах.

Установив это, рассмотрим многообразие k измерений пространства n измерений, определенное в прямоугольных координатах формулами

$$I \quad X_i = F_i(u_1, u_2, \dots, u_k), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Мы скажем, что многообразие линейно, если замена прямоугольных координат пространства n измерений позволяет определить его формулами

$$II \quad \begin{cases} x_i = G_i(u_1, u_2, \dots, u_k), & i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i = 0, & i = k + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Квадрируемая область Δ_u пространства u соответствует области Δ на линейном многообразии, которую мы называем квадрируемой порядка k ; мы знаем (§110), что семейство этих областей не зависит от выбранных переменных u , когда употребляют только рассмотренные нами замены переменных. Области Δ соответствует в пространстве x_1, x_2, \dots, x_k квадрируемая область Δ_x .

Если бы мы пришли к каноническим уравнениям вида II с помощью других прямоугольных координат x' пространства n измерений, то условия ортогональности § 95 показали бы, что переход от x_1, x_2, \dots, x_k к x'_1, x'_2, \dots, x'_k есть замена прямоугольных координат пространства k измерений, и, следовательно, так как площади порядка k не изменяются при таких заменах, мы можем говорить о *площади порядка k квадрируемой области Δ линейного многообразия k измерений*; это будет площадь Δ_k порядка k . Ее значение выразится формулой:

$$\int_{\Delta_x} dx_1 dx_2 \dots dx_k = \int_{\Delta_u} \left| \frac{D(G_1, \dots, G_k)}{D(u_1, \dots, u_k)} \right| du_1 du_2 \dots du_k,$$

или иначе:

$$\int_{\Delta_u} \sqrt{S \left\{ \frac{D(x_\alpha, \dots, x_\lambda)}{D(u_1, \dots, u_k)} \right\}^2} du_1 du_2 \dots du_k,$$

где сумма S распространена на все сочетания k индексов α, \dots, λ , выбранных из последовательности $1, 2, \dots, n$. Это вполне очевидно, так как лишь один из этих определителей отличен от нуля. Если же,

$$x_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{j=n} a_i^j X_j, \quad \text{то тогда}$$

$$\frac{D(x_\alpha, \dots, x_\lambda)}{D(u_1, \dots, u_k)} = S \left[\frac{D(F_\alpha', \dots, F_\lambda')}{D(u_1, \dots, u^k)} \cdot \begin{vmatrix} a_\alpha^{\alpha'} & \dots & a_\alpha^{\lambda'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\lambda^{\alpha'} & \dots & a_\lambda^{\lambda'} \end{vmatrix} \right],$$

где символ S указывает на суммирование по сочетаниям индексов со штрихами.

Условия ортогональности можно вывести классическим вычислением:

$$S \begin{vmatrix} a_{\alpha}^{\alpha'} & \dots & a_{\alpha}^{\lambda'} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda}^{\alpha'} & \dots & a_{\lambda}^{\lambda'} \end{vmatrix}^2 = 1, S \begin{vmatrix} a_{\alpha}^{\alpha'} & \dots & a_{\alpha}^{\lambda'} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda}^{\alpha'} & \dots & a_{\lambda}^{\lambda'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\alpha}^{\alpha''} & \dots & a_{\alpha}^{\lambda''} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda}^{\alpha''} & \dots & a_{\lambda}^{\lambda''} \end{vmatrix} = 0,$$

где первая сумма распространена на все сочетания α', \dots, λ' , а вторая сумма на все пары различных сочетаний

$$\alpha', \dots, \lambda'; \alpha'', \dots, \lambda'';$$

откуда

$$a_k(\Delta) = \int_{\Delta_n} \sqrt{S \left\{ \frac{D(X_{\alpha} \dots X_{\lambda})}{D(u_1 \dots u_k)} \right\}^2} du_1 du_2 \dots du_k.$$

Установив эту формулу для линейных многообразий, единственных до настоящего времени, для которых определены $a_k(\Delta)$, возьмем ее за само определение $a_k(\Delta)$ для всякой квадратуемой области Δ многообразия k измерений. Предшествующее вычисление показывает, что эта площадь не зависит от выбранных прямоугольных координат; легко заметить, обобщая соображения § 83, что эта площадь порядка k определена условиями $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\varepsilon)$.

Можно было бы к тому же восстановить всю главу V; но я на этом не останавливаюсь; *моей главной целью было указание метода определения a_k для областей пространства k измерений, отличного от метода § 97 — 100.*

Заканчивая эту главу, я считаю долгом напомнить, что с точки зрения педагогической совершенно недопустимо начинать со студентами сразу с общего случая, загромождая рассуждения множеством индексов. Если сам я следовал по этому пути, то только для того, чтобы сократить изложение и тем не менее показать, что слишком часто забывают о некоторых необходимых предосторожностях, как, например, не уточняют семейство рассматриваемых областей или переносят на пространство n измерений как очевидные и бесспорные факты, к которым привыкли в случае двух или трех измерений.

VIII.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Предшествующие главы не нуждаются в подведении научных или педагогических итогов. Они ни в коем случае не стремятся окостенить преподавание, объявляя одни способы изложения лучшими, чем остальные; наоборот, они стараются подчеркнуть сильные и слабые стороны каждой манеры преподнесения математических фактов. Если мы сочли полезным подробно развернуть мало известные приемы изложения, то это никоим образом не означает, что они должны быть предпочтены остальным. Подчеркивая некоторые недостатки, ошибки и пробелы классических методов, я никак не претендовал на их осуждение, а хотел, наоборот, способствовать их улучшению. Я считаю, что этого можно достигнуть лишь путем критического сравнения исследования различных способов изложения; я попытался сделать это исследование в вопросе, касающемся измерения величин.

И если такие исследования кажутся мне необходимыми для прогресса педагогики (я думаю, что они необходимы), если они помогают разобраться в том, что нужно говорить, и в том, зачем это говорят, то, значит, они являются прекрасным педагогическим упражнением, знакомства с которым нужно требовать от будущих учителей. Я уже говорил об этом в самом начале; если я возвращаюсь к этому здесь, то это потому что сейчас я буду иметь возможность лучше объяснить, в чем разница между тем, чего я бы хотел, чтобы требовали от кандидатов на звание учителя, и тем, чего от них требуют в настоящее время, причем замечу, что предъявленные мной требования не претендуют на то, чтобы учителя приобретали большие технические и более глубокие философские познания.

Обычно, как только дело касается основ математики, принято становиться на философскую точку зрения; я решительно отказался от такой позиции, и некоторые

усмотрели в этом пренебрежение к философии. Нет мой; дорогой учитель, Жюль Таннери, имел обыкновение говорить: „Будет разумнее, если мы будем, хотя бы в целях предосторожности, уважать то, чего не знаем“. С другой стороны, каким бы невеждой я ни был, я не забываю того, что именно потому, что философы долго обдумывали проблемы, столь сложные, что их даже невозможно сформулировать, они в конце концов стали обособлять от них вопросы, более простые: те, которыми занимается наука.

Мы должны уважать философию; однако из этого еще не следует, что она может помочь нам лучше понять наши науки или двигать их вперед. Это факт, что науки особенно сильно развились тогда, когда они осознали свою индивидуальность и отделились от философии.

Вполне естественно и благоразумно, что философы пытаются использовать некоторые методы, оправдавшие себя в научной области; они идут от легкого к трудному. Но, чтобы математика, изучающая вопросы, такие простые, что на них можно получить точные и исчерпывающие ответы, нуждалась в помощи философии, которая должна довольствоваться ответами, неточными и ненадежными, этого я не мог допустить. К тому же, в течение веков философские проблемы рассматривались со всех сторон и зачастую людьми, из которых некоторые были гениальны; не будет ли нетерпимой и в то же время наивной претензией со стороны математика, если он вообразит себя уполномоченным давать свои философские заключения на том лишь основании, что он обладает для размышления некоторым досугом. Заявляя откровенно о своей некомпетентности, я, мне кажется, лишь иначе доказываю свое искреннее уважение к философии.

На мой взгляд, математик, поскольку он математик, не должен заботиться о философии; это мнение, впрочем, было высказано многими философами. Математики должны направлять усилия своего мышления и понимания в некотором роде внутрь математики вместо того, чтобы устанавливать связь между математикой и философией. Конечно, вопросы, которыми должен заниматься математик, не имеют ни характера красоты, ни острого человеческого интереса философских проблем; однако, если бы удалось воздвигнуть философию и науки и для науки, то эта вторичная философия была бы, быть может,

самым существенным подспорьем для настоящей философии.

Учитель математики в свою очередь должен уметь ограничивать область своей деятельности лишь тем, что предметно; его полномочия относятся к научной культуре, в то время как его коллеге-философу (и ему одному) поручается культура философская.

Занимаясь, таким образом, лишь тем, что в известном роде материально, осязаемо, мы необходимо превращаем математику в одну из ветвей физики, ветвь, которая тем не менее отличается от других тем, что в ней прибегают к наблюдениям лишь в самом начале, чтобы затем устанавливать определения и аксиомы. Когда математик предвидит более или менее четко какую-нибудь теорему, он ищет логического доказательства вместо того, чтобы прибегать к опыту, как это делает физик; логическая проверка заменяет для него проверку опытную. В общем, он не ищет новых открытий, он пытается осознать богатства, которыми он уже владеет бессознательно, которые кроются в определениях и аксиомах. Отсюда первостепенное значение определений и аксиом, которые, конечно, могут быть утверждены логически лишь при условии своей совместности, но которые привели бы к чисто формальной, лишенной смысла науке, если бы они не имели отношения к действительности.

Не дело учителя математики, особенно средней школы, заниматься формированием чистых логистов; он должен создавать людей, способных рассуждать, а для этого нужно заниматься не только логическими построениями, но также и приобретением предпосылок этих построений и приложением их результатов к конкретному. В своем изложении я почти не имел случая говорить о последнем пункте; но от этого он не теряет своего значения. Если пренебрегать подчеркиванием моментов отправления от действительности и возвращения к действительности, то можно навязать ученикам геометрическое мышление в самом худшем смысле этого слова и привить вкус к беспочвенным рассуждениям. Нужно внушить им, что за пределами математики ничего не доказывается математически и что, однакож, логика полезна при всех обстоятельствах. Математика была создана человеком для его нужд, она и служит ему ценным подспорьем,— учитель математики должен осгаться учителем дела. Он не должен пробуждать философские сомнения, так как у него

не будет ни времени, ни возможности пробудить и сразу разрешить эти сомнения, как мог бы его коллега-философ.

Я считаю, что от будущих учителей недостаточно требовать приобретения технической ловкости и умения перелагать учебники; нужно от них потребовать продолжительных размышлений, с точки зрения логической и педагогической критики, над тем, что им придется преподавать, а также самостоятельного, либо под некоторым руководством, исследования каждой значительной главы математики, исследования, аналогичного тому, которое было здесь проделано мной над измерением величин.

Какую пользу извлекут преподаватели из таких исследований? Сразу очевидно, что в целях выбора со знанием дела лучшего изложения математических фактов сравнивают между собой различные способы изложения, отыскивая их сильные и слабые стороны, и зачастую при этом, если возникает надобность, создают новые методы. Все это вполне ясно; перейдем к менее заметным преимуществам. Проникая глубже в суть доказательств, обнаруживают не только всю силу логики, но также и ее требовательность и осознают важность предосторожностей в прикладной математике.

О каждой главе можно повторить то, что я говорил по поводу арифметики (§ 3): эта глава применима тогда, когда она применима. Наши абсолютные заключения приводят нас на практике лишь к относительным истинам. Это потому, что всегда имеется некоторое расхождение между нашими логическими предпосылками и той действительностью, на изображение которой они претендуют. Например, в старом вопросе об иррациональностях: древние построили с помощью дробей некий континуум, вполне достаточный для всех члсвзческих экспериментов, какой бы точности они ни достигали, но недостаточный с логической точки зрения. Нам пришлось (§ 7 и 55) продолжить метафизически последовательность операций измерения, чтобы получить понятие, о котором можно логически рассуждать. Для того чтобы изучать конкретное или то, что нам таковым представляется, нам пришлось прибегнуть к расширению действительности.

В случае понятия площади употребленный прием является в некотором роде обратным применяемому в случае длины, о котором я только что упоминал. Чтобы

подвести под понятие площади логическое основание, мы ограничились специальными, так называемыми квадратуемыми областями. Совершенно очевидно, что, занимаясь с будущими учителями, нужно, при помощи примеров, дать доказательство существования и не квадратуемых областей, которые здесь были рассмотрены только как возможные. Так, мы придем к такой области D , для которой, при любом малом $\varepsilon > 0$, можно найти два многоугольника, отличающихся друг от друга и от D меньше, чем на ε , площади же которых отличаются друг от друга на некоторое данное положительное число. Физическое понятие площади как бы рушится, так как мы отказались обосновать его логически во всех случаях; чтобы вернуть D ее площадь, нужно было бы прибегнуть к новому расширению понятия числа, аналогично тому, как мы это делали, возвращая диагонали единичного квадрата длину, а это расширение может сначала показаться неприемлемым и скандальным.

Все такие рассуждения напомнят нашим ученикам, будущим учителям, что усилия математиков, по крайней мере, сначала, были направлены на окружающую нас действительность, и это побудит их смелее говорить о связи математики с действительностью. Эти рассуждения покажут также все те возможности, которые логика дает нашему разуму, покажут и то, что без разума логика приводит нас к неудачам.

Учитель физики не считает себя обязанным, из уважения к опыту, скрывать участие нашего разума в физических изысканиях. Но слишком много учителей математики, из уважения к логике, считают себя обязанными изображать математику, как неизбежное развертывание голсой дедукции. Если бы не имена математиков, справедливо или нет присвоенных некоторым теоремам, наши ученики могли бы и вовсе забыть, что математика создана людьми. Никогда не говорят о выборе предпосылок, не осмеливаются говорить, что такая-то теорема была получена благодаря *изобретательским способностям* определенного ученого, смешивают открытие теоремы с ее логическим изложением, сделанным современным способом. Если послушать некоторых учителей, то можно подумать, что Ньютон (Newton) ничего не понимал в вопросах интегрирования, что Эйлер (Euler) не знал рядов, что Лагранж (Lagrange) не знал даже, что такое функция. Всюду ищут *естественных* с

доказательств (мне рассказывали об одном математике, которому после шестимесячных усилий посчастливилось найти естественное доказательство того, что три высоты треугольника сходятся в одной точке!) и верят, что эти естественные доказательства научат искусству открывать.

Если бы метод переоткрытий был настоящим путем открытий, то мы бы об этом знали, так как были бы затоплены открытиями бесчисленных героев переоткрытий. Между тем имеет место обратное: преподавание, слишком систематически основанное на переоткрытиях, неизбежно превращается в отсутствие всяких открытий, так как для того, чтобы открыть, нужно совершить необычное, *неестественное* сближение, а метод переоткрытий состоит в подведении учеников к неким каталогизированным рассуждениям, всегда одним и тем же, и к механическому, без всяких пропусков, их применению. Конечно, это позволяет разрешать проблемы, так как предлагаются проблемы, разрешимые путем данных рассуждений; но эта тейлоризация умственного труда, эта дрессировка, совершенно отличны, даже противоположны той гибкости, которая позволяет нашему уму открывать новые точки зрения.

Метод переоткрытий, впрочем, в некоторых случаях превосходит; он сыграл главную роль в деле преобразования математического преподавания в средней школе, заменившего прежние тусклые уроки, на которых ученики были заняты лишь пассивным восприятием, современными живыми, на которых ученики, играя активную роль, лучше чувствуют значение, важность, интерес и цель теорем. Очень полезно также употреблять при доказательствах рассуждения, привычные ученикам, т. е. применять доказательства, называемые естественными; почувствовав возможность построения этих доказательств, ученики начинают лучше понимать их и приобретают больше веры в свои собственные силы. Но не нужно требовать от переоткрытий и от естественных доказательств того, чего они не могут дать. Это — прекрасные педагогические средства, ничего более; но эти средства становятся злосчастными, когда ими заслоняют роль нашего ума и внушают, что быть математиком значит применять буквально те или иные готовые правила.

Вот те вопросы, над которыми приходится задумываться в критических исследованиях, подобных данно-

му. Впрочем, для меня неважно, придут ли наши ученики, будущие учителя, к выводам, сформулированным мной или к каким-либо другим; но я хотел бы, чтобы в таких основных вопросах они имели свое собственное продуманное мнение.

Я только что упомянул о критических исследованиях; но на самом-то деле, сделали ли мы что-нибудь, что заслуживает быть названным критическим, если, говоря, например, о целом числе, мы ограничивались лишь описанием операции счета. Не лучше ли было провести исследование понятия предметов, тел, подлежащих перечислению? Мы указали лишь на произвол в выборе тех объектов, которые служат перечисляемыми телами, и это привело нас (§ 10) к умножению; между тем об этом можно было бы сказать гораздо больше. Понятие тела ясно лишь для того, кто не начинает его критиковать; физика постепенно разрушает это понятие. Мы уже давно знаем, что твердое тело, даже прекрасно отшлифованное, обладает неровностями, порами и что в этих пустотах или даже в самой его материи заключены другие тела, примеси, жидкости и газы; затем мы узнали, что всякое тело погружено в постоянно изменяющуюся атмосферу, образованную его же собственными испарениями; затем атомические теории тел и планетарные теории атомов сделали понятие тела все более и более неопределенным. Разве деление на тела не есть примитивное построение мира с помощью образов, подобных нашему „я“, единственной вещи, о которой наши далекие предки имели более или менее четкое представление? Если понятие тела не имеет никакого абсолютно-го значения, то понятие целого, даже понятие числа *один*, не является ли оно самым обманчивым из всех понятий? И что можно тогда сказать о понятии числа вообще, до которого мы дошли, лишь заменяя смутное понятие тела неуловимым понятием точки?

Ясно, что я нахожусь на плохом пути, что я лишь породил бесплодные сомнения, ища абсолютного, в то время как я находился в области относительного, что настоящее критическое исследование понятия тела было бы самым тесным образом связано с изучением попыток нашей мысли, силящейся понять внешний мир, и вывело бы нас из области математики. Говоря это, я не запрещаю доходить до философской критики, интерес и значение которой никоим образом не ставятся под со-

мнение, но плодотворное обращение к которой потребовало бы слишком много времени, а также знакомства со всеми предшествующими исследованиями. Наряду с этой критикой существует другая, более доступная математикам, та, которую я назвал критикой логической и педагогической и отличие которой от критики чисто философской я хотел подчеркнуть.

Хорошо известные работы, имевшие большое значение, показали, что углубленное изучение элементарной математики представляет интерес как с точки зрения ее связи с другими отраслями математики, так и с точки зрения философии или истории наук; я обращаю внимание на педагогический интерес подобных исследований.

Ответ. редактор *Н. И. Вайсфельд*.
Техн. редакторы *Ю. Ю. Балль* и *Н. Н. Махова*.

Сдано в набор 10/IX 1937 г. Подписано к печати 10/VIII 1938 г. Формат бумаги 84×11 8¹/₃₂. Тираж 10 тыс. Изд. листов 13. Бум. листов 3¹/₄. Авт. листов 11,45. В 1 бум. листе 14(00) тип. зн. Учпедгиз № 9640.
Заказ № 2077. Уполн. Главлита Б- 49297

ФЗУ, тип. газеты „Правда“ имени Сталина. Москва, ул. „Правды“, 24

