

Р. КУРАНТ

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ,
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
И МИНИМАЛЬНЫЕ
ПОВЕРХНОСТИ

Перевод с английского

Б. В. ШАБАТА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1953

DIRICHLET'S PRINCIPLE,
CONFORMAL MAPPING,
AND MINIMAL SURFACES

R. COURANT

with an Appendix by
M. Schiffer

NEW YORK

1950

В новой книге Р. Куранта дается изложение вариационного принципа Дирихле и его приложений к двум тесно связанным между собой циклам задач — о минимальных поверхностях и о конформных отображениях.

Для этих задач характерна их близость к конкретным физическим явлениям и возможность прямой экспериментальной проверки результатов. Вторая особенность этих задач заключается в трудности их математического исследования, для которого приходится привлекать широкий арсенал средств современной математики. В книге постоянно применяются методы теории уравнений математической физики, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и топологии. Она написана довольно сжато, но все же автору удалось наряду с формальным аппаратом показать истоки и ведущие идеи исследований. После изложения основных вопросов, которое дается сравнительно подробно, во многих местах приводятся краткие указания на возможные обобщения и постановка нерешенных задач. Такой характер изложения определяет широкий круг читателей книги — основное ее содержание доступно студентам старших курсов, в полном объеме она представляет интерес и для квалифицированных математиков. Автор ограничивается простейшим случаем принципа Дирихле. В значительно более общем виде этот принцип изложен в монографии С. Л. Соболева „Некоторые применения функционального анализа в математической физике“ (изд. Л. Г. У., 1950).

К книге приложен очерк М. Шиффера, посвященный некоторым вариационным методам в теории конформных отображений. Необходимо отметить, что в этом очерке не упомянуты многие важные методы, созданные советскими учеными. С этими методами можно ознакомиться по статьям М. А. Лаврентьева „О некоторых экстремальных задачах в теории конформных отображений“ (в книге: Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного

исчисления, М.—Л., 1935, т. I, ч. 2) и „К теории конформных отображений“ [Труды института Стеклова, вып. 5 (1934)], а также по обзорной статье М. В. Келдыша „Конформные отображения многосвязных областей“, [У. М. Н., вып. VI (1939)] и монографии Г. М. Голузина „Геометрическая теория функций комплексного переменного“ (М.—Л., 1952) и др.

Перевод сделан без отступлений от оригинала, лишь в отдельных местах исправлены замеченные опечатки. Пришлось исправить многие иллюстрации — в американском издании они выполнены несколько небрежно, иногда с ошибками. В некоторых местах авторы (это особенно относится к М. Шифферу) необъективно освещают заслуги советских математиков. Такие места снабжены соответствующими примечаниями.

Математики всегда стремятся представить выкристаллизовавшиеся результаты своих исследований в виде дедуктивной общей теории, а отдельные математические явления использовать в качестве примеров к ней. Читатель, примирившийся с такой формой изложения, легко следует за логическими рассуждениями автора. Однако для полного понимания существа вопроса необходимо уяснить истоки этих рассуждений. Ведь живая математическая мысль всегда рождается из задач, подсказанных самой природой, постановка которых легка и понятна, но решение трудно и требует развития новых общих методов.

В этой книге рассматриваются именно такие задачи. Она написана в манере, которая, как надеется автор, правильно отражает отношения между отдельными математическими объектами и общими математическими методами.

Принцип Дирихле и его разнообразные приложения интересовали автора еще со студенческой скамьи, когда он был учеником Д. Гильберта. Желание написать книгу на эту тему усилилось после появления работы Дугласа, под влиянием которой у автора возникло предположение о тесной связи задачи Дирихле с основными вопросами теории минимальных поверхностей. Но война помешала работе над книгой. Даже теперь, несмотря на большое запоздание, книга появляется значительно менее отделанной и законченной, чем этого хотелось бы.

Автор считал целесообразным включить в нее изложение результатов теории конформных отображений, полученных за последнее время. К счастью, М. Шиффер, сам принимавший активное участие в развитии этой теории, согласился написать обзорную статью, которая, безусловно, явилась ценным дополнением к книге.

В области, привлекавшей внимание стольких математиков, трудно дать более или менее исчерпывающий список литературы и правильно оценить достижения различных исследователей. Автор попытался ознакомиться со всеми источниками, о которых ему было известно, и надеется, что допустил не слишком много пробелов.

Р. Курант.



ВВЕДЕНИЕ

Доказательство Гауссом основной теоремы алгебры открыло новую эру в развитии математики. Отбросив тщетные попытки своих предшественников решить алгебраические уравнения высших порядков в радикалах, он пошел по принципиально новому пути, доказав существование искомых корней. Впервые стало ясно, что первый шаг в решении математических проблем — это доказательство существования решения. Фактическое нахождение решения в замкнутом виде — это следующая задача, отличная от вопроса о существовании. За время, протекшее с начала прошлого века, понимание этого различия многое прояснило и немало способствовало прогрессу во всех областях математики.

Среди доказательств существования, господствовавших в математической мысли того периода, наиболее значительными и имевшими наибольшее влияние на развитие математики оказались те, которые были основаны на экстремальных задачах вариационного исчисления и связаны с фактическими или мыслимыми физическими экспериментами. Геометрическая теория функций Римана, изложенная в его докторской диссертации (1851 г.) и мемуаре по абелевым функциям (1857 г.), являет собой выдающийся пример силы такого метода.

Чтобы описать физические основы концепции Римана, представим себе в пространстве поверхность S любой топологической структуры с границей или без нее. Допустим, что поверхность покрыта тонким однородным слоем, проводящим электричество. Пусть некоторые точки поверхности S соединены с полюсами электрической батареи и по S течет постоянный ток. Потенциал этого тока будет решением граничной задачи для некоторого дифференциального уравнения — именно такого типа задача и возникает при решении интересующей нас вариационной задачи. Вообще эта вариационная задача сводится к отысканию среди всех возможных токов такого, который сопровождается наименьшим выделением тепла. Если допустить существование математической функции, соответствующей такому минимальному условию, то теорема существования римановой теории функций станет очевидной.

Математически такая минимальная задача может быть сформулирована как задача отыскания минимума интеграла вида

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy,$$

в котором область интегрирования G и совокупность допустимых функций φ выбираются надлежащим образом.

Еще за несколько лет до опубликования диссертации Римана Гаусс и Томпсон заметили, что граничная задача для дифференциального уравнения гармонических функций $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ и для области G плоскости x, y сводится к задаче отыскания минимума интеграла $D[\varphi]$ по области G при условии, что допустимые функции имеют заданные граничные значения. В силу положительной определенности $D[\varphi]$ существование решения последней задачи было признано очевидным и отсюда сделан вывод о существовании решения граничной задачи. Еще студентом, на лекциях Дирихле, Риман заинтересовался этой аргументацией и вскоре в более развернутой и четкой форме он положил ее под названием принципа Дирихле в основу своей геометрической теории функций.

Эта теория, которой суждено было оказать такое влияние на дальнейшее развитие науки, произвела сильное впечатление на математиков, почувствовавших в ней теорию с большим будущим. Поэтому, когда Вейерштрасс нашел слабое место в принципе Дирихле и в 1869 г. опубликовал критику этого принципа, его работа потрясла весь математический мир. Возражение Вейерштрасса сводится к следующему. Из положительной определенности интеграла $D[\varphi]$ следует существование его точной нижней грани d . Риман, как и его предшественники, считал очевидным, что число d является точным минимумом, который действительно осуществляет некоторая допустимая функция $\varphi = u$. Но именно это утверждение и требует тщательной проверки. В то время как непрерывные функции конечного числа переменных в замкнутой области всегда обладают наибольшим и наименьшим значениями, имеются вариационные задачи, в которых максимум и минимум не существуют, хотя существуют точные нижняя и верхняя грани.

Это возражение нелегко было отвести. Риман умер, так и не найдя ответа на возражение Вейерштрасса, безуспешными оставались и попытки других математиков, желавших спасти принцип Дирихле. Тем не менее математики не хотели отказываться от результатов, достигнутых методом Римана. Для доказательства его теорем существования пришлось ввести другие методы. Таким образом, принцип Дирихле косвенно явился стимулом для далеко идущего развития новых методов анализа. Но оставался привлекательным и сам принцип Дирихле — время от времени делались попытки дать его точное доказательство. Наконец, через пятьдесят лет после Римана, это удалось Гильберту. В своем знаменитом сообщении (1900 г.) он обосновал некоторые теоремы существования Римана, непосредственно доказав, что соответствующая минимальная задача действительно имеет решение. С тех пор теория упростилась и расширилась. Сейчас принцип Дирихле превратился в инструмент, такой же гибкий и почти такой же простой, каким его с самого начала представлял себе Риман. Более

того, он явился отправным пунктом для развития так называемых прямых методов вариационного исчисления, одинаково важных как для теоретической, так и для прикладной математики.

В течение последних десятилетий выяснилось, что с принципом Дирихле связана еще одна классическая экстремальная задача анализа и геометрии. Начиная с самого раннего периода развития вариационного исчисления, многие крупные математики брались за решение задачи отыскания поверхностей наименьшей площади, натянутых на заданную кривую или подчиненных другим граничным условиям. Опять физические опыты, такие, как, например, опыты бельгийского физика Плато¹⁾, приводили к интуитивному убеждению, что такого рода задачи разрешимы. Если погрузить замкнутый проволочный контур в мыльный раствор, то образуется пленка, которая по закону поверхностного натяжения принимает в качестве своего положения равновесия форму минимальной поверхности, натянутой на контур. Но эмпирическая очевидность вообще не может служить математическим доказательством существования, вопреки мнению физиков, считающих строгие доказательства существования излишними. Только строгое доказательство существования может убедить в том, что данное математическое описание физического явления не лишено смысла.

Во всяком случае, решение задачи Плато, т. е. доказательство существования минимальной поверхности, натянутой на заданный замкнутый контур, в течение долгого времени представляло большие трудности. Риман, Вейерштрасс, Шварц, Дарбу и др. в своих исследованиях связали эту задачу с теорией гармонических функций и конформными отображениями и дали ее окончательное решение для ряда важных частных случаев. Но только в 1939 г. Радо и Дуглас независимо друг от друга доказали первые общие теоремы существования для задачи Плато. После этого принцип Дирихле стали применять к решению классических и новых задач, связанных с минимальными поверхностями, развивая при этом общие методы вариационного исчисления. В таком направлении работал и автор со своими сотрудниками. Метод оказался применимым не только к задачам об устойчивом равновесии минимальных поверхностей с фиксированными и свободными границами, таких, как в опытах с мыльными пленками, но также и к задачам о неустойчивых минимальных поверхностях. Последние разрабатывались сначала Шиффманом, а затем независимо от него Морсом и Томпкинсом.

Настоящая книга содержит как уже опубликованный, так и некоторый новый материал. Она представляет собой попытку дать изложение принципа Дирихле с применениями к конформным отображениям и к теории минимальных поверхностей. Автор стремился подвести читателя к обширной и в значительной мере еще не исследованной области, связанной со многими интересными задачами анализа и геометрии.

¹⁾ См. работу Плато [60], а также книгу Куранта и Роббинса [4], стр. 385, где описаны другие важные опыты.



ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ И ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

1. Определения. Мы будем рассматривать области G плоскости x, y , границы γ которых состоят из жордановых кривых. Функции $\varphi(x, y), \psi(x, y), u(x, y), \dots$ мы будем называть кусочно гладкими в области G , если они непрерывны и обладают непрерывными первыми производными всюду в этой области, исключая конечное число дуг с непрерывно изменяющейся касательной и конечное число изолированных точек. (Для удобства мы часто будем считать, что линии разрыва представляют собой дуги окружностей или отрезки прямых.)

Интеграл Дирихле

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy, \quad (1.1)$$

мы определим для кусочно гладкой функции φ как несобственный интеграл¹⁾, т. е. положим

$$D[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy,$$

где G_n обозначает последовательность замкнутых подмножеств G , стремящихся к этой области в том смысле, что каждая ее точка принадлежит почти всем множествам G_n . (Множества G_n могут состоять из нескольких областей.) Без ограничения общности мы можем еще предположить, что множества G_n образуют монотонную последовательность, т. е. что G_{n+1} содержит G_n .

В полярных координатах r, θ

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta^2) r dr d\theta, \quad (1.1a)$$

или, если обозначить для сокращения $ds = r d\theta$,

$$D[\varphi] = \iint_G (\varphi_r^2 + \varphi_s^2) dr ds. \quad (1.1b)$$

¹⁾ Мы могли бы предположить, что рассматриваемые функции непрерывны в области G и обладают первыми производными с интегрируемыми по Лебегу квадратами. Однако для наших целей такая общность не нужна.

Интеграл Дирихле для подобласти S из G мы обозначим символом $D_S[\varphi]$.

2. Начальная формулировка принципа Дирихле. Мы сформулируем принцип Дирихле в форме, несколько отличной от той, в которой он был высказан впервые. Пусть на границе γ области G заданы непрерывные граничные значения \bar{g} . Рассмотрим задачу о минимизации интеграла $D[\varphi]$. Допустим к сравнению все функции, непрерывные в $G + \gamma$ и кусочно гладкие в G , граничные значения которых совпадают с \bar{g} . Принцип Дирихле гласит: задачу решает единственная допустимая функция $\varphi = u$, для которой $D[\varphi]$ достигает наименьшего значения d . Эта функция u обладает в области G непрерывными первыми и вторыми производными и гармонична, т. е. удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.2)$$

Таким образом, решение граничной задачи для уравнения (1.2) сводится к решению вариационной задачи Дирихле: найти допустимую функцию, минимизирующую интеграл $D[\varphi]$.

3. Общее замечание о неразрешимых вариационных задачах. На первый взгляд сформулированный выше принцип Дирихле непосредственно следует из результатов классического вариационного исчисления, ибо уравнение $\Delta u = 0$ является уравнением Эйлера для интеграла $D[\varphi]$. Однако это соображение еще не доказывает принципа Дирихле. Можно гарантировать существование точной нижней грани d интеграла $D[\varphi]$, ибо множество всех его возможных значений ограничено снизу нулем, но ниоткуда не следует, что значение d действительно достигается для некоторой допустимой функции u . В самом деле, наивное представление о том, что „естественные“ вариационные задачи всегда имеют решение, опровергается простыми противоречащими примерами.

а) Рассмотрим задачу о минимизации интеграла

$$I[\varphi] = \int_0^1 [1 + \varphi'^2(x)]^{\frac{1}{4}} dx$$

для всех непрерывных функций φ , имеющих на отрезке $0 \leq x \leq 1$ кусочно непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0.$$

Значение 1, очевидно, является нижней гранью для интеграла $I[\varphi]$. Но это значение является и его точной нижней гранью: подставив

в выражение $I[\varphi]$ допустимую функцию частного вида

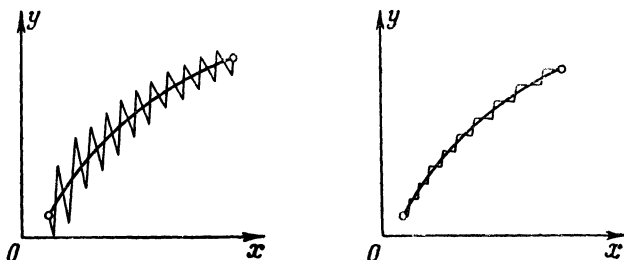
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\delta - x}{\delta}, & 0 \leq x \leq \delta < 1, \\ 0, & x > \delta, \end{cases}$$

найдем

$$I[\varphi] = \int_0^{\delta} (1 + \delta^{-2})^{\frac{1}{4}} dx + \int_{\delta}^1 dx = \delta^{\frac{1}{2}} (1 + \delta^2)^{\frac{1}{4}} + 1 - \delta < 1 + \delta^{\frac{1}{2}},$$

где δ сколь угодно мало. С другой стороны, очевидно, что не существует допустимой функции, для которой $I[\varphi]$ принимает значение 1.

б) Приведем пример задачи, в которой отсутствие минимума очевидно из геометрических соображений: среди всех поверхностей $z = f(x, y)$, ограниченных окружностью k в плоскости x, y и проходящих через данную точку P над этой плоскостью, найти поверхность с наименьшей площадью. Рассмотрим поверхность, совпадающую с плоскостью x, y всюду, кроме достаточно малого круга,



Фиг. 1.

центром которого является проекция точки P на эту плоскость; над этим кругом поверхность имеет вид узкого конуса с вершиной в P . Выбрав основание конуса достаточно малым, мы можем сделать площадь поверхности сколь угодно близкой к площади, равной площади K . Но, конечно, не существует поверхности с площадью, равной площади K .

в) Имеются вариационные задачи, в которых существуют и точная верхняя и точная нижняя грани, но ни одна из них не достигается допустимыми функциями. Примером может служить экстремальная задача для интеграла

$$I[\varphi] = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \varphi'^2},$$

где φ — любая непрерывная функция, обладающая кусочно непрерывной производной на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и удовлетворяющая граничным условиям $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Очевидно, что $0 < I[\varphi] < 1$, но,

несмотря на строгие неравенства, значение интеграла может приблизиться к границам 0 и 1 сколь угодно точно. Если значение $|\varphi'|$ достаточно велико всюду на отрезке, кроме конечного числа точек разрыва, то величина $I|\varphi|$ может быть сделана сколь угодно близкой к своему нижнему пределу 0. С другой стороны, если функция $|\varphi'|$ равна 0 всюду, кроме конечного числа интервалов достаточно малой общей длины, то величина $I|\varphi|$ может быть сколь угодно близкой к 1. Очевидно, что любую допустимую кривую можно сколь угодно точно приблизить кривыми, обладающими одним из этих двух свойств. Например, можно взять ломаные, в первом случае со сторонами, почти перпендикулярными к оси x , а во втором — состоящими из почти горизонтальных звеньев, соединенных почти вертикальными отрезками, сумма проекций которых на ось x достаточно мала (фиг. 1).

4. Минимизирующие последовательности. Пусть $I[\varphi]$ — варьируемый интеграл. Рассмотрим последовательность допустимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ таких, что значения $I[\varphi_1], I[\varphi_2], \dots$ стремятся к точной нижней грани d значений интеграла $I[\varphi]$, — эти последовательности и называются минимизирующими последовательностями. Всякий раз, когда множество возможных значений $I[\varphi]$ ограничено снизу, существование минимизирующих последовательностей очевидно. Однако из предыдущих примеров ясно, что минимизирующие последовательности не обязательно сходятся, а если и сходятся, то предельная функция не обязательно является допустимой. То, что эти трудности встречаются и в случае интеграла Дирихле, видно из следующего примера.

Рассмотрим задачу о минимуме интеграла $D[\varphi]$, распространенного на круг радиуса 1, и потребуем, чтобы допустимые функции обращались в нуль на границе круга. Эту минимальную задачу решает функция $\varphi \equiv 0$, и лишь она одна; $d = 0$ является минимальным значением интеграла, а не только его точной нижней гранью. Определим теперь в полярных координатах r, θ последовательность допустимых функций φ_n :

$$\varphi_n = \begin{cases} c_n \ln \rho_n, & r \leq \rho_n^2, \\ c_n \ln \frac{r}{\rho_n}, & \rho_n^2 \leq r \leq \rho_n, \\ 0, & \rho_n \leq r \leq 1, \end{cases}$$

где c_n — некоторые постоянные. Формула (1.1a) дает

$$D[\varphi_n] = 2\pi c_n^2 \int_{\rho_n^2}^{\rho_n} \frac{1}{r^2} r dr = -2\pi c_n^2 \ln \rho_n.$$

Если положить $\rho_n = e^{-n}$ и $c_n = -n^{\frac{2}{3}}$, то $D[\varphi_n]$ будет стремиться к 0 и φ_n будет минимизирующей последовательностью. Но значе-

ние φ_n при $r=0$ равно $\frac{1}{n^3}$ и стремится к бесконечности, т. е. последовательность φ_n расходится. С помощью этой же конструкции можно получить минимизирующую последовательность, для которой интеграл Дирихле расходится на всюду плотном множестве. Таким образом, вообще говоря, нельзя надеяться получить решение вариационных задач простым предельным переходом в минимизирующих последовательностях. Существенным моментом в так называемых прямых методах вариационного исчисления является применение дополнительных построений, обеспечивающих сходимость.

5. Замкнутое выражение интеграла Дирихле для круга. Замечание о неразрешимости вариационной задачи Дирихле. Общие замечания о неразрешимости вариационных задач, сделанные в предыдущих пунктах, подчеркиваются следующим фактом, впервые установленным Адамаром. Разрешимость вариационной задачи Дирихле не только не очевидна, но эта задача может быть неразрешимой даже в том случае, когда разрешима соответствующая граничная задача для дифференциального уравнения $\Delta u = 0$. Это обстоятельство кажется еще более дискредитирующим идею сведения граничной задачи к вариационной. Вот пример Адамара.

Пусть K будет круг радиуса 1 с центром в начале координат и r, θ попрежнему обозначают полярные координаты. На окружности k этого круга зададим непрерывные граничные значения $\bar{g} = \bar{g}(\theta)$. Рассмотрим (не обязательно сходящийся) ряд Фурье для функции \bar{g} :

$$\bar{g} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta).$$

При $r < 1$ решение уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее на окружности k граничному условию $\bar{u} = \bar{g}$, задается сходящимся рядом

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\nu} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta). \quad (1.3)$$

Эта форма решения, эквивалентная представлению решения *интегралом Пуассона*

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(\alpha) \frac{(1-r^2) d\alpha}{1-2r \cos(\alpha-\theta) + r^2}, \quad (1.3a)$$

часто употребляется¹⁾. При $r < 1$ производные ряда (1.3) могут быть получены его почленным дифференцированием. Кроме того, мы имеем

¹⁾ См. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М.—Л., 1950, стр. 214, или Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, стр. 452.—Прим. перев.

$D[u] = \lim_{\rho \rightarrow 1} D_\rho[u]$, где $D_\rho[u]$ обозначает интеграл Дирихле для круга радиуса $\rho < 1$ с центром в начале координат. Из (1.3) легко получается

$$D_\rho[u] = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) \rho^{2\nu}.$$

Отсюда для любого натурального N

$$\pi \sum_{\nu=1}^N \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) \rho^{2\nu} \leq D_\rho[u] \leq \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

где ряд в правой части может и расходиться. Устремляя ρ к 1, приходим непосредственно к следующему выводу.

Интеграл Дирихле (1.1а) для гармонической функции u в единичном круге представляется рядом

$$D[u] = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) \quad (1.4)$$

и существует тогда и только тогда, когда этот ряд сходится.

Как указал Адамар, существуют непрерывные функции $\bar{g}(\theta)$, для которых ряд (1.4) расходится. Такова, например, функция, определяемая равномерно сходящимся разложением Фурье

$$\bar{g} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin \mu! \theta}{\mu^2}, \quad (1.5)$$

для которой $D[u] = \pi \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu!}{\mu^4}$. Следовательно, при таких граничных значениях, как (1.5), граничная задача для уравнения $\Delta u = 0$ заведомо не может быть сведена к минимальной задаче для интеграла Дирихле: принцип Дирихле здесь не имеет места. Таким образом, не существует полной эквивалентности вариационной и граничной задач.

6. Корректная формулировка принципа Дирихле. Для устранения только что описанной трудности естественно сузить класс заданных граничных значений так, чтобы не допустить неразрешимых вариационных задач. Такое сужение не является необходимым для решения граничных задач, но оно весьма существенно для обеспечения разрешимости вариационных задач. В соответствии с предыдущим пунктом мы будем считать допустимыми лишь такие заданные на кривой γ значения \bar{g} , которые являются граничными значениями функции g , определенной в $G + \gamma$ и обладающей конечным интегралом $D[g]$. Иными словами, мы предполагаем, что заведомо существует хотя бы одна допустимая функция с конечным интегралом Дирихле. Таким образом, мы приходим к следующей формулировке.

Принцип Дирихле. *Задана область G , граница γ которой состоит из жордановых кривых. Пусть g будет функция, непрерывная в $G + \gamma$, кусочно гладкая в G и обладающая конечным интегралом Дирихле $D[g]$. Рассмотрим класс всех функций φ , непрерывных в $G + \gamma$, кусочно гладких в G и принимающих на γ те же граничные значения, что и функция g . Тогда задача отыскания функции φ , для которой интеграл $D[\varphi]$ достигает своего минимума d , имеет единственное решение $\varphi = u$. Функция u решает граничную задачу для уравнения $\Delta u = 0$ и заданных на γ граничных значений \bar{g} .*

§ 2. ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Принцип Дирихле в предыдущей формулировке легко доказывается для случая, когда граница γ является окружностью. При доказательстве используется важный факт, который мы сформулируем для общего случая произвольной области G .

Лемма 1.1. (Полунепрерывность интеграла Дирихле для гармонических функций.) Если последовательность гармонических в некоторой области G функций u_n сходится к гармонической функции u и если сходимость равномерна в каждой замкнутой подобласти G , то

$$D_G [u] \leq \liminf D_G [u_n]. \quad (1.6)$$

Доказательство. Для любой замкнутой подобласти G' области G из сходимости последовательности u_n по теореме Харнака¹⁾ вытекает равномерная сходимость последовательности производных u_n к соответствующим производным u . Следовательно,

$$D_{G'} [u] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{G'} [u_n] \leq \liminf D_{G'} [u_n].$$

Искомое неравенство получается отсюда непосредственным предельным переходом от области G' к области G .

Для доказательства принципа Дирихле обозначим через k границу круга K , через g — любую допустимую функцию, для которой $D[g] < \infty$, и рассмотрим гармонические многочлены

$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n r^\nu (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta),$$

¹⁾ Теорема Харнака гласит: если последовательность гармонических функций равномерно сходится в некоторой области, то и последовательности их производных сходятся равномерно в любой замкнутой подобласти, причем предельные функции являются гармоническими. Доказательство этой теоремы получается простым применением интеграла Пуассона.

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье заданной граничной функции $\bar{g} = g(1, \theta)$. Ряд Фурье для функции \bar{g} не обязательно сходится, но многочлены u_n являются всюду правильными гармоническими функциями. Для разности $\zeta_n = g - u_n$ имеем $D_K[\zeta_n] < \infty$ (см. ниже § 3). Введя обозначение

$$D[\varphi, \psi] = \iint (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) dx dy, \quad (1.7)$$

мы можем написать

$$D[g] = D[u_n] + D[\zeta_n] + 2D[u_n, \zeta_n].$$

По формуле Грина — она применима к многочленам u_n , но не обязательно применима к функции u — мы получаем

$$D[u_n, \zeta_n] = \int_k \zeta_n \frac{\partial u_n}{\partial r} d\theta - \iint_K \zeta_n \Delta u_n dx dy.$$

Второй член справа обращается в 0 в силу тождества $\Delta u_n = 0$. Первый член справа также равен нулю; это будет видно непосредственно, если мы подставим вместо функций u_n их явные выражения и заметим, что первые $2n + 1$ коэффициентов Фурье функции ζ_n обращаются в 0, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \zeta_n d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \zeta_n \cos \nu\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \zeta_n \sin \nu\theta d\theta = 0, \\ \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, $D[u_n, \zeta_n] = 0$ и, таким образом,

$$D[u_n] = D[g] - D[\zeta_n] \leq D[g].$$

В круге K многочлены u_n сходятся к гармонической функции u , которая имеет граничные значения \bar{g} , причем сходимось равномерна в любой замкнутой подобласти K^1). В силу полунепрерывности интеграла Дирихле для гармонических функций отсюда следует

$$D[u] \leq \liminf D[u_n].$$

Объединяя это с предыдущим неравенством, получаем

$$D[u] \leq D[g],$$

что и доказывает минимальное свойство интеграла $D[u]$.

Для доказательства единственности заметим сначала, что

$$D[u, h] = 0 \quad (1.8)$$

для любой кусочно гладкой в K функции h с конечным интегралом Дирихле, которая обращается в 0 на окружности k . В самом деле

1) См. примечание на стр. 15. — Прим. перев.

если интеграл $D[\varphi]$ достигает минимума при $\varphi = u$, то в разложении ¹⁾

$$D[u + \varepsilon h] = D[u] + 2\varepsilon D[u, h] + \varepsilon^2 D[h]$$

коэффициент при ε должен обращаться в 0. Но тогда равенство (1.8) при $h = g - u$ дает

$$D[g] = D[u + h] = D[u] + D[h].$$

Таким образом, $D[u] < D[g]$, если только интеграл $D[h]$ не обращается в 0, т. е. если h — не равная 0 постоянная.

§ 3. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ²⁾

Интеграл Дирихле $D[\varphi]$ является неотрицательным квадратичным функционалом от функции $\varphi(x, y)$. Функцию φ можно рассматривать как элемент линейного функционального пространства, т. е. множества функций, которое вместе с каждым двумя функциями φ и ψ содержит также и их линейную комбинацию $\lambda\varphi + \mu\psi$ с постоянными коэффициентами λ и μ .

Еще один важный пример квадратичного функционала дает

$$H[\varphi] = \iint_G \varphi^2 dx dy.$$

Обозначим квадратичные функционалы типа $D[\varphi]$ или $H[\varphi]$ нейтральным символом $Q[\varphi]$. Перечислим некоторые важные свойства неотрицательных квадратичных функционалов:

а) $Q[\varphi] \geq 0$. (1.9)

б) Если φ и ψ — две функции, для которых существуют $Q[\varphi]$ и $Q[\psi]$, то существует также функционал $Q[\varphi, \psi]$, называемый *билинейной симметрической формой*, такой, что

$$Q[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda^2 Q[\varphi] + \mu^2 Q[\psi] + 2\lambda\mu Q[\varphi, \psi], \quad (1.10)$$

где λ и μ — произвольные постоянные. Очевидно, что

$$Q[\varphi] = Q[\varphi, \varphi]. \quad (1.11)$$

Билинейную форму можно определить соотношением

$$2Q[\varphi, \psi] = Q[\varphi + \psi] - Q[\varphi] - Q[\psi]. \quad (1.12)$$

Для $Q = D$ билинейная форма задается посредством интеграла (1.7), для $Q = H$ — как $\iint \varphi\psi dx dy$.

¹⁾ Существование $D[u + h]$, $D[u, h]$ и $D[g - u]$ следует из существования $D[u]$, $D[h]$ и $D[g]$ на основании доказываемого в § 3 общего предложения о том, что существование $D[\varphi]$ и $D[\psi]$ влечет за собой существование $D[\varphi + \psi]$ и $D[\varphi, \psi]$.

²⁾ См. [3], гл. VII.

в) Из (1.9) и (1.10) следует *неравенство Буняковского — Шварца*

$$Q^2[\varphi, \psi] \leq Q[\varphi]Q[\psi], \quad (1.13)$$

которое выражает положительную определенность квадратичной формы переменных λ и μ в правой части (1.10).

г) Неравенству (1.13) эквивалентны следующие *неравенства треугольника*:

$$\sqrt{Q[\varphi]} + \sqrt{Q[\psi]} \geq \sqrt{Q[\varphi + \psi]}, \quad (1.13a)$$

$$\sqrt{Q[\varphi]} - \sqrt{Q[\psi]} \leq \sqrt{Q[\varphi - \psi]}. \quad (1.13b)$$

Термин „неравенства треугольника“ подсказан интерпретацией $\sqrt{Q[\varphi - \psi]}$ как „расстояния“ между функциями φ и ψ в линейном функциональном пространстве; такую метрику мы будем называть Q -метрикой рассматриваемого пространства. Эта интерпретация применима и к интегралам Q_S , распространенным на подобласти S области G .

Так как интегралы по области G определяются как несобственные, то необходимо доказать существование $Q[\varphi + \psi]$, $Q[\varphi - \psi]$ и $Q[\varphi, \psi]$ в предположении, что существуют $Q[\varphi]$ и $Q[\psi]$. Для любой подобласти S , для которой интегралы берутся в собственном смысле, из неравенств треугольника получаем

$$\sqrt{Q_S[\varphi + \psi]} \leq \sqrt{Q_S[\varphi]} + \sqrt{Q_S[\psi]},$$

$$\sqrt{Q_S[\varphi - \psi]} \leq \sqrt{Q_S[\varphi]} + \sqrt{Q_S[\psi]}.$$

Устремив здесь S к области G , а также используя соотношение (1.12), мы приходим к нужным результатам.

Неравенства треугольника полезны при доказательстве лемм о сходимости квадратичных функционалов для последовательностей функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ линейного функционального пространства. Разобьем область G на замкнутое подмножество внутренних точек G' и *граничную полосу* G^* так, чтобы было $G = G' \cup G^*$; тогда будет справедлива

Лемма 1.2. Если $Q[\varphi_n] < \infty$ и

$$Q[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$$

при $n, m \rightarrow \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно узкая граничная полоса, G^* в которой

$$Q_{G^*}[\varphi_n] < \varepsilon$$

для всех n .

Иными словами, лемма утверждает, что доля, вносимая в значение $Q[\varphi_n]$ достаточно узкой окрестностью границы, может быть сделана равномерно малой.

Доказательство. Из неравенства треугольника (1.13б), примененного к функциям $\varphi = \varphi_n$, $\psi = \varphi_m$ при фиксированном m , и условия $Q[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$ следует сходимость $Q[\varphi_n]$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что последовательность $Q[\varphi_n]$ ограничена. Выберем число N столь большим, чтобы при $n, m \geq N$ выполнялось неравенство

$$Q[\varphi_n - \varphi_m] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Кроме того, выберем внутри области G замкнутую часть G' столь близкой к G , чтобы для всех $v \leq N$ в граничной полосе $G^* = G - G'$ имело место неравенство

$$Q_{G^*}[\varphi_v] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Теперь утверждение леммы будет следовать из соотношения (1.13а), если положить в нем

$$\varphi = \varphi_n - \varphi_N, \quad \psi = \varphi_N.$$

Отметим еще

Следствие леммы 1.2. Пусть $Q[\varphi_n]$ существует для всех n и

$$Q[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0.$$

Если для некоторой функции φ и любого замкнутого подмножества G' области G

$$Q_{G'}[\varphi_n - \varphi] \rightarrow 0,$$

то существует

$$Q[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} Q[\varphi_n]$$

и притом

$$Q[\varphi_n - \varphi] \rightarrow 0.$$

Доказательство. В силу неравенства (1.13б) имеем

$$Q_{G'}[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{G'}[\varphi_n].$$

Так как $Q_{G'}[\varphi_n] \leq Q[\varphi_n]$ и значения $Q[\varphi_n]$ равномерно ограничены, то существование $Q[\varphi]$ очевидно. Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ мы построим полосу G^* ($G = G' + G^*$), такую, что для всех n

$$Q_{G^*}[\varphi_n] < \frac{\varepsilon}{8}, \quad Q_{G^*}[\varphi] < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Выберем еще число N столь большим, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$Q_{G'}[\varphi - \varphi_n] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $n > N$ будем иметь

$$Q[\varphi - \varphi_n] = Q_{G^*}[\varphi - \varphi_n] + Q_{G'}[\varphi - \varphi_n] < \varepsilon,$$

т. е. при $n \rightarrow \infty$

$$Q[\varphi - \varphi_n] \rightarrow 0$$

и, следовательно,

$$Q[\varphi_n] \rightarrow Q[\varphi].$$

Применяя лемму 1.2, мы будем иногда заменять область G ее подобластью S .

§ 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. О сходимости последовательностей гармонических функций.

Пример (б) п. 3 § 1 показывает, что из соотношений $H[\varphi_n] \rightarrow 0$, $D[\varphi_n] \rightarrow 0$, или $D[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ еще не следует сходимости последовательности φ_n . Однако эти соотношения обеспечивают сходимость φ_n в случае более узкого класса гармонических функций.

Лемма 1.3. Если для некоторой последовательности функций w_n , гармонических в области S , $H_S[w_n] \rightarrow 0$, то функции w_n , а следовательно, и их производные, стремятся к нулю равномерно в любой замкнутой подобласти S' из области S .

Доказательство. Для данной замкнутой подобласти S' можно выбрать число h такое, что любой круг K радиуса h с центром в произвольной точке P из S' лежит внутри S . По теореме о среднем для гармонических функций

$$w_n(P) = \frac{1}{\pi h^2} \iint_K w_n(x, y) dx dy,$$

откуда, пользуясь неравенством Буняковского — Шварца, получаем

$$[w_n(P)]^2 \leq \frac{1}{\pi h^2} H_S[w_n].$$

Из этого неравенства и вытекает утверждение леммы относительно функций w_n . Утверждение относительно производных получается автоматически.

Далее можно доказать еще две леммы.

Лемма 1.3а. Пусть u_n — последовательность гармонических в области S функций, для которых

$$H_S[u_n - u_m] \rightarrow 0$$

при $n, m \rightarrow \infty$. Тогда в любой замкнутой подобласти S' из S функции u_n равномерно сходятся к гармонической функции u , а их производные — к соответствующим производным u .

Лемма 1.3б. Обозначим опять через S' замкнутую подобласть S и через u_n — последовательность функций, гармонических в S . Пусть

$D_S[u_n - u_m] \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ и, кроме того, величина $|u_n - u_m|$ при достаточно больших n и m может быть сделана сколь угодно малой или в фиксированной точке P области S , или даже в ее точках P_{nm} , которые могут перемещаться с изменением n и m . Тогда в S' последовательность u_n равномерно сходится к гармонической функции u , а последовательность производных u_n — к соответствующим производным u . При этом

$$D_S[u_n] \rightarrow D_S[u]$$

и

$$D_S[u_n - u] \rightarrow 0.$$

Доказательства лемм 1.3а и 1.3б для произвольной замкнутой под-области S' следуют из леммы 1.3 и теоремы Харнака (см. примечание на стр. 17), а для области S — из леммы 1.2 и ее следствия.

2. Оценка колебания функции с помощью интеграла Дирихле. Для функции $\varphi(x)$ одного переменного x аналогом интеграла Дирихле служит интеграл $\int_a^b \varphi_x^2(x) dx$. Из неравенства Буняковского — Шварца для $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ получаем

$$[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]^2 = \left[\int_{x_1}^{x_2} \varphi'(x) dx \right]^2 \leq |x_2 - x_1| \int_a^b |\varphi'(x)|^2 dx.$$

Таким образом, для одного измерения колебание функции оценивается непосредственно интегралом Дирихле. Такая простая оценка не распространяется на случай двух измерений, что видно из примера (б) п. 3 § 1. Однако для двух измерений возможна аналогичная оценка колебания функций вдоль отдельных кривых, принадлежащих заданному семейству.

Сначала мы рассмотрим лежащие в области G окружности с центром в некоторой точке O . Введем полярные координаты r, θ с полюсом в точке O и обозначим $s = r\theta$. Для любого круга $K: r \leq a$, лежащего в области G , и функции φ , имеющей в K непрерывные производные, определим функцию

$$M(a) = D_K[\varphi] \geq \int_0^a dr \int_0^{2\pi r} \varphi_s^2 ds.$$

Фиксируем постоянные a и $b = a - h < a$. По теореме о среднем интегрального исчисления на отрезке $b \leq r \leq a$ существует внутренняя точка $r = r_0$, такая, что

$$\int_0^{2\pi r_0} \varphi_s^2 ds \leq \frac{M(a)}{h}.$$

Колебание функции φ между концами P_1 и P_2 дуги окружности $r = r_0$ длиной $|s_2 - s_1|$ оценивается, как и в случае одного измерения:

$$|\varphi(P_2) - \varphi(P_1)|^2 \leq \frac{M(a)}{h} |s_2 - s_1| \leq 2\pi M(a) \frac{a}{h}.$$

Выберем теперь h так, чтобы для кольца $b \leq r_0 \leq a$ отношение a/h не превосходило положительной постоянной (например, 2). Для заданного a можно найти окружность $r = r_0$, $a/2 \leq r_0 \leq a$, на которой колебание φ оценивается при помощи интеграла Дирихле, причем так как $M(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$, то это колебание сколь угодно мало при достаточно малом a .

Этот факт можно сформулировать в несколько более общем виде для кусочно гладких функций φ без дополнительных ограничений, налагаемых на положение точки O . Окружность $r = \text{const}$ может теперь иметь также и дуги, лежащие вне области G . Обозначим через $K = K_a$ часть области G , лежащую в круге $r \leq a$ и через $M(a) = D_K[\varphi]$ соответствующий интеграл Дирихле для функции φ . Тогда будет иметь место

Лемма 1.4. Каковы бы ни были положительные a и b , $b < a$, $a - b = h$, всегда существует окружность $r = r_0$, $b \leq r_0 \leq a$, для любой лежащей в области G связной дуги которой справедливо неравенство

$$|\varphi(P_2) - \varphi(P_1)|^2 \leq \frac{M(a)}{h} |s_2 - s_1| < \frac{2\pi a M(a)}{h}, \quad (1.14)$$

где P_1 и P_2 — точки этой дуги и $|s_2 - s_1| < 2\pi a$ — длина ее отрезка между P_1 и P_2 .

В частности, для достаточно малого a всегда существует окружность $r = r_0$, $a/2 \leq r_0 \leq a$, на любой лежащей в области G дуге которой вариация φ сколь угодно мала. Доказательство проводится в точности так же, как и выше, за исключением того, что определение $D_K[\varphi]$ посредством несобственного интеграла требует некоторых предосторожностей при переходе к $D_K[\varphi]$ от интегралов в собственном смысле. Для этого мы рассмотрим область K как предел последовательности замкнутых многоугольников K_n , лежащих в области G , и таких, что производные φ_x и φ_y разрывны в них самое большее в конечном числе дуг и изолированных точек. Если мы обозначим через $L_r^{(n)}$ множество дуг окружности радиуса r , по которым эта окружность пересекается с K_n , то, как и выше, получим

$$\int_0^a dr \int_{L_r^{(n)}} \varphi_s^2 ds \leq D_{K_n}[\varphi] \leq M(a).$$

Для фиксированного n существует величина $r_0 = \rho_n$, такая, что

$$\int_{L_{\rho_n}^{(n)}} \varphi_s^2 ds \leq \frac{M(a)}{h}$$

и для любой дуги $L_{\rho_n}^{(n)}$

$$|\varphi(P_2) - \varphi(P_1)|^2 \leq 2\pi \frac{aM(a)}{h}.$$

Устремив n к бесконечности, мы можем предположить, что ρ_n стремится к некоторому значению ρ , и тогда, очевидно, получим такое же неравенство для любой лежащей в области G дуги L окружности $r = \rho$. Чтобы полностью доказать лемму, остается положить $h = a/2$.

Таким же образом, лишь с небольшими изменениями, доказываются следующие леммы:

Лемма 1.4а. Обозначим через S часть области G , лежащую между прямыми $y = a$ и $y = a + h$. Тогда существует величина y_0 , $a \leq y_0 \leq a + h$, такая, что для любого лежащего в G отрезка прямой $y = y_0$ имеет место неравенство

$$|\varphi(x_2, y_0) - \varphi(x_1, y_0)|^2 \leq |x_2 - x_1| \frac{D_S[\varphi]}{h}.$$

Лемма 1.4б. Рассмотрим семейство концентрических квадратов с центром в точке O , ограниченных прямыми $x = \pm r$, $y = \pm r$. Тогда утверждение леммы 1.4 останется справедливым, если в неравенстве (1.14) заменить множитель 2π на 8.

Лемма 1.4в. Пусть область G , в которой определена функция φ , простирается в бесконечность, причем интеграл $D[\varphi]$ остается конечным. Через K_a обозначим часть G , внешнюю к кругу $r \leq a$, так что $M(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. Тогда попрежнему для любого a существует величина r_0 , $a \leq r_0 \leq 2a$, такая, что неравенство (1.14) остается справедливым для любой лежащей в области G связанной дуги окружности $r = r_0$. Правая часть этого неравенства стремится к 0 при $a \rightarrow \infty$, если положить $h = a$.

Для областей, простирающихся в бесконечность, остается в силе также и лемма 1.4б, если заменить в ней малые квадраты большими.

3. Инвариантность интеграла Дирихле при конформных отображениях. Применения. В следующих двух пунктах мы приведем факты, которые будут использованы лишь в дальнейших главах.

Теорема 1.1. Интеграл Дирихле остается инвариантным при конформных отображениях.

Доказательство. Пусть при конформном отображении $x = x(x', y')$, $y = y(x', y')$ область интегрирования G преобразуется

в область G' . Условия Коши — Римана дают

$$\varphi_{x'}^2 + \varphi_{y'}^2 = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')},$$

следовательно,

$$\int_G \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy = \int_{G'} \int (\varphi_{x'}^2 + \varphi_{y'}^2) dx' dy'.$$

Это равенство и выражает инвариантность интеграла Дирихле относительно конформных отображений. Из доказанной теоремы, конечно, следует также инвариантность смешанного интеграла $D_G[\varphi, \psi]$.

На основании этой теоремы доказательство принципа Дирихле распространяется на области, которые можно конформно отобразить на круг. Напомним несколько элементарных конформных отображений.

а) *Полукруг*. Преобразование

$$\frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2$$

переводит внутренность верхней половины единичного круга плоскости z на верхнюю полуплоскость ζ . Отображение

$$\eta = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

преобразует эту верхнюю полуплоскость в единичный круг плоскости η .

б) *Круговая луночка*. В более общем случае круговую луночку плоскости z с концами z_1, z_2 и с углом α между окружностями можно преобразовать в такую же луночку на плоскости ζ с концами ζ_1, ζ_2 и углом $\alpha\lambda$ с помощью отображения

$$\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} = \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^\lambda.$$

Если выбрать λ равным π/α , то луночка на плоскости ζ обратится в круг.

в) *Круговой сектор*. Вершину кругового сектора на плоскости z мы расположим в начале координат. Если центральный угол сектора равен α , то отображение $\xi = z^{\pi/\alpha}$ переведет этот сектор в полукруг плоскости ξ , который, как мы видели, элементарно отображается на единичный круг.

г) *Эллипс*. Внутренность эллипса также можно конформно отобразить на единичный круг; это отображение осуществляется при помощи эллиптических функций.

4. Принцип Дирихле для круга с частично свободной границей. В гл. II и VI нам понадобится обобщение принципа Дирихле на случай, когда граничные значения задаются всюду на окружности,

кроме некоторой ее дуги. Мы увидим, что на такой свободной дуге решение минимальной задачи удовлетворяет так называемому естественному граничному условию: на свободной дуге нормальная производная решения u обращается в нуль, или, что то же самое, гармоническая функция v , сопряженная с функцией u , постоянна.

Если конформно отобразить круг на верхний полукруг так, чтобы свободная дуга перешла в диаметр, то наша задача сведется к доказательству следующего утверждения.

Теорема 1.2. Обозначим через H полукруг $x^2 + y^2 < 1, y > 0$, через μ — его верхнюю полуокружность и через λ — (открытый) диаметр $y = 0, -1 < x < 1$. Пусть $g(x, y)$ будет функция, непрерывная в H и на μ , обладающая в H кусочно непрерывными первыми производными и такая, что $D_H[g] < \infty$. Тогда существует функция u , гармоническая в $H + \lambda + \mu$, которая на μ принимает те же граничные значения, что и функция g , на λ имеет равную нулю нормальную производную и для которой $D_H[u] \leq D_H[g]$, причем равенство возможно лишь в случае $u = g$.

Доказательство. Если бы функция g была непрерывной на полной границе $\lambda + \mu$, то наше утверждение непосредственно вытекало бы из принципа Дирихле для круга: достаточно было бы продолжить по симметрии эту кусочно непрерывную функцию на нижний полукруг, положив там $g(x, -y) = g(x, y)$. Гармоническая в полном круге функция с симметричными граничными значениями необходимо должна быть симметричной, т. е. нормальная производная должна обращаться в нуль на λ . Условия леммы менее жестки, ибо непрерывность g на λ не предполагается. Поэтому предыдущие рассуждения следует дополнить. Вместо области H рассмотрим сначала область $H_\epsilon: x^2 + y^2 < 1, y > \epsilon$. Область H_ϵ можно конформно отобразить на H с помощью элементарной функции (см. п. 3 § 4), которая осуществляет также взаимно однозначное и непрерывное соответствие границ. При $\epsilon \rightarrow 0$ это отображение равномерно стремится к тождественному. Оно преобразует функцию g , заданную в области H_ϵ , в функцию g_ϵ , непрерывную в $H + \mu + \lambda$ и при $\epsilon \rightarrow 0$ равномерно на $H + \mu$ сходящуюся к функции g . Согласно сделанному выше замечанию, теорему можно считать доказанной для функции g_ϵ и для гармонической функции u_ϵ , имеющей на μ те же граничные значения, что и g_ϵ , а на λ — равную нулю нормальную производную, т. е. можно считать, что

$$D_H[u_\epsilon] \leq D_H[g_\epsilon].$$

Вследствие инвариантности интеграла Дирихле при конформных отображениях мы имеем

$$D_H[g_\epsilon] = D_{H_\epsilon}[g] \leq D_H[g],$$

так что

$$D_H[u_\epsilon] \leq D_H[g].$$

В силу того, что функции g_ε и u_ε можно продолжить по симметрии на полный круг, справедливо утверждение, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция u_ε стремится¹⁾ к гармонической функции u равномерно на $H + \lambda + \mu$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и пользуясь полунепрерывностью интеграла Дирихле, мы получаем неравенство

$$D_H[u] \leq D_H[g].$$

Как мы уже видели при доказательстве принципа Дирихле для круга (см. § 2), знак равенства может иметь место лишь в том случае, если $u = g$.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

1. Прямые методы вариационного исчисления. Теорема Вейерштрасса о том, что непрерывная функция $f(x)$ достигает на замкнутом отрезке максимума и минимума, основана на следующих двух фактах: 1) *компактности* множества действительных чисел, составляющих замкнутый отрезок (т. е. возможности выбора из каждого бесконечного его подмножества последовательности, сходящейся к элементу множества); 2) непрерывности функции $f(x)$. Для достижения одного лишь *минимума* второе условие можно заменить менее строгим условием *полунепрерывности снизу*: $f(x) \leq \liminf_{x_n \rightarrow x} f(x_n)$.

В вариационном исчислении независимой переменной служит не числовая величина x , пробегаящая замкнутый отрезок, а допустимая функция $\varphi(x)$ или $\varphi(x, y)$ из некоторого функционального пространства. Таким образом, возникают следующие вопросы: а) Является ли рассматриваемое функциональное пространство компактным? б) Являются ли функционалы $I[\varphi]$ или $D[\varphi]$, минимум которых мы ищем, полунепрерывными снизу в этом пространстве? Понятие компактности в функциональном пространстве, конечно, определяется понятием сходимости, которое в свою очередь зависит от понятия окрестности или расстояния в этом пространстве. Если бы удалось получить утвердительные ответы на эти два вопроса, то можно было бы решить вариационную задачу Дирихле, которую впредь мы будем называть *вариационной задачей I*. Однако, пойдя по этому пути, мы должны были бы дополнить исходное функциональное пространство до так называемого гильбертова пространства путем присоединения к нему идеальных элементов. При этом нам пришлось бы доказывать, что решение вариационной задачи, найденное в таком расширенном пространстве, на самом деле

¹⁾ Если для последовательности функций, гармонических в области G и непрерывных на ее границе γ , граничные значения сходятся равномерно, то и сами функции в $G + \gamma$ равномерно сходятся к функции, правильной гармонической в G и непрерывной в $G + \gamma$.

содержится в более узком пространстве функций с непрерывными вторыми производными. Для того чтобы достичь поставленной нами цели, повидимому, удобнее действовать более прямым образом, с самого начала используя индивидуальные особенности задачи Дирихле и применив обычное понятие сходимости. Доказательство полунепрерывности не представит особых трудностей, если воспользоваться леммой 1.1. Нам придется, однако, столкнуться с тем обстоятельством, что минимизирующие последовательности некомпактны в смысле обычной (равномерной) сходимости и для получения из них искомого решения нужно будет построить соответствующие предельные процессы.

Доказательство принципа Дирихле производится в три шага:

- 1) Построение функции u , гармонической в области G .
- 2) Доказательство того, что $D[u] \leq d$, где d — точная нижняя грань интегралов $D[\varphi]$ для всех допустимых функций.
- 3) Доказательство того, что u принимает заданные граничные значения.

2. Построение гармонической функции u посредством процесса сглаживания. Рассмотрим в области G произвольную минимизирующую последовательность φ_n допустимых функций. Как мы видели в п. 3 § 1, эта последовательность не обязательно сходится. Однако, как будет сейчас показано, „расстояние“ в D -метрике между функциями этой последовательности стремится к нулю.

Лемма 1.5. Пусть $\zeta_n(x, y)$ — некоторая последовательность вариаций, кусочно гладких в области G , обращающихся в нуль на ее границе и имеющих ограниченные в совокупности интегралы Дирихле, $D[\zeta_n] \leq M$. Тогда для любой минимизирующей последовательности

$$D[\varphi_n, \zeta_n] \rightarrow 0, \quad (1.15a)$$

или, более точно,

$$\{D[\varphi_n, \zeta_n]\}^2 \leq (d_n - d)M, \quad (1.15)$$

где $d_n = D[\varphi_n]$.

Это соотношение при нашем прямом подходе заменяет обычное в вариационном исчислении условие обращения в 0 первой вариации.

Доказательство. Так как $\varphi = \varphi_n + \varepsilon \zeta_n$ является допустимой функцией нашей задачи, то

$$D[\varphi] - d = d_n - d + 2\varepsilon D[\varphi_n, \zeta_n] + \varepsilon^2 D[\zeta_n] \geq 0$$

и тем более

$$d_n - d + 2\varepsilon D[\varphi_n, \zeta_n] + \varepsilon^2 M \geq 0.$$

В левой части неравенства стоит квадратичная форма относительно переменной ε , а доказываемое неравенство (1.15) выражает условие ее неотрицательности.

Из доказанной леммы следует

Лемма 1.5а. Для любой минимизирующей последовательности

$$D[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0 \quad (1.16a)$$

при $n, m \rightarrow \infty$, или, более точно,

$$D[\varphi_n - \varphi_m] \leq (\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d})^2. \quad (1.16)$$

Доказательство. Положим $\zeta_n = \varphi_n - \varphi_m$, тогда по (1.15) будем иметь

$$D[\varphi_n, \varphi_n - \varphi_m] \leq \sqrt{d_n - d} \sqrt{D[\varphi_n - \varphi_m]}$$

[вместо M в (1.15) можно написать $D[\varphi_n - \varphi_m]$]. Меняя роли n и m и складывая два полученных неравенства, находим

$$D[\varphi_n - \varphi_m] \leq \sqrt{D[\varphi_n - \varphi_m]} (\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}).$$

Сократив обе части на $\sqrt{D[\varphi_n - \varphi_m]}$, получим искомое неравенство (1.16).

Следствие леммы 1.5а. Если $\varphi_n^{(1)}$ и $\varphi_n^{(2)}$ — две минимизирующие последовательности, то при $n \rightarrow \infty$

$$D[\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)}] \rightarrow 0.$$

Доказательство следует из того, что смешанная последовательность $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}$ снова является минимизирующей.

Основываясь на лемме 1.5а и доказанном принципе Дирихле для круга, с помощью так называемого *процесса сглаживания* можно получить решение задачи и в общем случае. В самом деле, пусть K будет круг, вместе со своей границей k лежащий в области G , а u_n — последовательность гармонических в K функций, имеющих на k те же граничные значения, что и функции φ_n . Последовательность допустимых функций ψ_n , определяемых соотношениями

$$\psi_n = \begin{cases} u_n & \text{в } K \\ \varphi_n & \text{в } G - K, \end{cases}$$

снова является минимизирующей последовательностью. Действительно, на основании принципа Дирихле для круга $D_K[u_n] \leq D_K[\varphi_n]$ и, следовательно,

$$d \leq D[\psi_n] \leq D[\varphi_n].$$

Заменяя минимизирующую последовательность φ_n последовательностью ψ_n , мы *сглаживаем* каждую функцию φ_n в круге K .

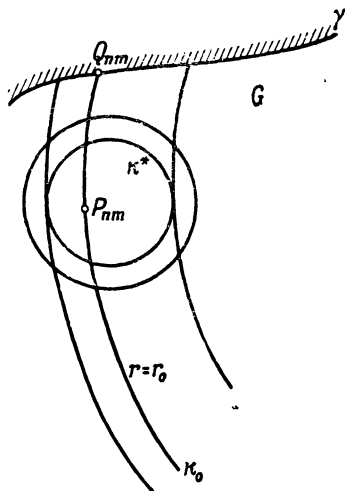
По лемме 1.5а $D[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0$, следовательно, и подавно

$$D_K[u_n - u_m] \rightarrow 0,$$

так же как

$$D_K[\varphi_n - u_n] \rightarrow 0.$$

На основании этих соотношений доказательство сходимости u_n в круге K сводится к применению лемм 1.36 и 1.4. Условия леммы 1.36 выполняются, так как величина $|u_n - u_m|$ может быть сделана сколь угодно малой в точке P_{nm} , выбранной надлежащим образом в малом круге K^* радиуса $h/2$ концентрическом с кругом K . Для этой цели мы рассмотрим две окружности, с центром во внешней к кругу K^* точке O , касающиеся его границы k^* ; пусть их радиусы будут b и $a = b + h$ (фиг. 2). Если точка O выбрана достаточно далеко от k^* , то все окружности с центром в O , пересекающие k^* , пересекают также и границу γ области G (так как область G связная). По лемме 1.4 среди этих окружностей имеется окружность K_0 радиуса $r = r_0$, на любой лежащей в G связной дуге которой колебание функции $p = \psi_n - \psi_m$ меньше $\sqrt{\frac{2\pi a}{h}} D[p]$.



Фиг. 2.

Теперь пусть P_{nm} будет некоторая точка k_0 , лежащая в круге K^* , а Q_{nm} — ближайшая к ней точка пересечения k_0 и γ . Так как все функции ψ_n имеют одинаковые граничные значения, то $p(Q_{nm}) = 0$, а следовательно, $p(P_{nm}) \leq \sqrt{\frac{2\pi a}{h}} D[p]$.

По лемме 1.5а $D[p] \rightarrow 0$, откуда можно заключить, что $p(P_{nm}) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Таким образом, лемма 1.36 применима и потому в любой замкнутой подобласти S из K последовательность u_n равномерно сходится к гармонической функции u . Заметим еще, что

$$D_S[u - \varphi_n] \rightarrow 0. \tag{1.17}$$

В самом деле, так как производные u_n сходятся равномерно в S к соответствующим производным u , то и $D_S[u - u_n] \rightarrow 0$. Далее, $D_S[u_n - \varphi_n] \rightarrow 0$, так что (1.17) получается теперь простым применением неравенства треугольника.

Процесс сглаживания можно применить к любому кругу, лежащему в области G ; если провести его в каждом круге, то получится некоторая гармоническая функция u . Мы утверждаем, что такой прием дает функцию, вполне определенную во всей области G .

Для доказательства мы покажем, что две функции u_1 и u_2 , полученные процессом сглаживания в двух пересекающихся кругах K_1 и K_2 , совпадают в их общей части $K_1 K_2$. Пусть последовательность φ_n порождает в кругах K_1 и K_2 соответственно минимизирующие последова-

тельности $\psi_n^{(1)}$ и $\psi_n^{(2)}$. Смешанная последовательность $\psi_1^{(1)}, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(1)}, \psi_2^{(2)}, \dots$ также является минимизирующей, и поэтому $D[\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}] \rightarrow 0$ (см. следствие леммы 1.5а).

Если через K' обозначить некоторый круг, лежащий в K_1K_2 , то и подавно $D_{K'}[\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}] \rightarrow 0$. Функции $\psi_n^{(2)}$ и $\psi_m^{(2)}$ являются гармоническими в K' и сходятся соответственно к u_1 и u_2 . Из предыдущего рассуждения следует, что смешанная последовательность также сходится в K' к гармонической функции u . Таким образом, u_1 и u_2 совпадают с функцией u в K' , а следовательно, они тождественно равны друг другу всюду в K_1K_2 .

Замечания.

а) Предельная функция u не зависит от той минимизирующей последовательности φ_n , из которой она получена посредством процесса сглаживания. В самом деле, пусть φ'_n будет некоторая другая минимизирующая последовательность, тогда сглаживание смешанной минимизирующей последовательности $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2, \dots$ в любом круге K приведет к последовательности гармонических функций $u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots$, которая сходится к гармонической функции u , являющейся общим пределом последовательностей u_n и u'_n .

б) В процессе сглаживания минимизирующей последовательности вместо фиксированного круга K для различных функций φ_n можно рассматривать различные концентрические круги K_n , предполагая, что их радиусы r_n остаются большими фиксированного числа, скажем, $r_n > h$. Равномерная сходимости u_n к гармонической функции u в концентрическом круге радиуса меньшего h доказывается точно так же, как выше.

3. Доказательство соотношения $D[u] = d$. Рассмотрим замкнутую подобласть G' области G и представим ее как сумму конечного числа неперекрывающихся замкнутых областей S , каждую из которых можно заключить в некоторый круг K , содержащийся в G . Так как в соответствии с (1.17) $D_S[u - u_n] \rightarrow 0$, то и

$$D_{G'}[u - u_n] \rightarrow 0,$$

но тогда лемма 1.2 и ее следствие дают

$$D[u] = d.$$

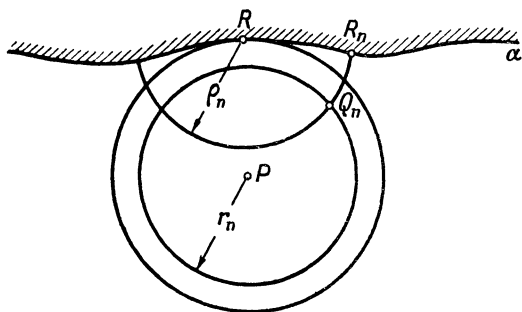
4. Доказательство того, что функция u принимает заданные граничные значения. Функция u , которую мы определили только внутри области G , может быть непрерывно продолжена на ее границу γ и на каждой жордановой кривой α ¹⁾, входящей в состав γ , принимает

¹⁾ Относительно изолированных граничных точек см. конец этого пункта.

заданные граничные значения \bar{g} . Более точно: для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta(\varepsilon)$, такое, что для всех точек P области G , расстояние \overline{PA} которых до точки A на кривой α не превосходит $\delta(\varepsilon)$, будет справедливо неравенство $|u(P) - g(A)| < \varepsilon$. Это утверждение выражает сходимост $u(P)$ к заданным граничным значениям.

Так как граничные значения \bar{g} равномерно непрерывны на α , то достаточно доказать более слабое утверждение: для заданного $\varepsilon > 0$ существует значение $\delta(\varepsilon)$, такое, что $|u(P) - g(R)| < \varepsilon$, если расстояние \overline{PR} от точки P до точки R на α , ближайшей к P , меньше $\delta(\varepsilon)$.

Для доказательства полагаем $\overline{PR} = 2h$ с тем, чтобы в дальнейшем фиксировать верхнюю границу δ для значений $2h$. Прежде всего выбираем δ столь малым, чтобы расстояние P до любой граничной кривой, кроме α , было бóльшим 2δ .



Фиг. 3.

Теперь рассмотрим подобласть S_h области G , состоящую из всех точек P , расстояние которых от α не превышает $4h$. Согласно лемме 1.2, существует число $\sigma(h)$, такое, что $\sqrt{4\pi D_{S_h}[\varphi_n]} \leq \sigma(h)$ для всех n , причем $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. По лемме 1.4, примененной к области S_h , существует окружность с центром в точке P радиуса r_n , $h \leq r_n \leq 2h$, на которой колебание функции φ_n меньше $\sqrt{4\pi D_{S_h}[\varphi_n]} \leq \sigma(h)$.

Аналогично, существует окружность с центром в точке R радиуса ρ_n , $h \leq \rho_n < 2h$, на которой колебание φ_n также меньше $\sigma(h)$. Эта окружность пересекает окружность с центром P в некоторой точке Q_n , а при достаточно малом h — также и кривую α в точке R_n , такой, что дуга $Q_n R_n$ лежит в области G (фиг. 3).

Таким образом, в силу того, что $\varphi_n = g$ на α , мы получаем

$$|\varphi_n(Q_n) - g(R_n)| \leq \sigma(h). \tag{1.18}$$

Пусть u_n — гармонические функции, сглаживающие функции φ_n в круге с центром в P ; так как значение $u_n(P)$ совпадает со

значением φ_n в некоторой точке окружности, то оно отличается от $\varphi_n(Q_n)$ меньше, чем на $\sigma(h)$:

$$|u_n(P) - \varphi_n(Q_n)| \leq \sigma(h). \quad (1.19)$$

В силу равномерной непрерывности функции g на α , существует положительная величина $\eta(h)$, стремящаяся к 0 вместе с h , такая, что

$$|g(R) - g(R_n)| < \eta(h), \quad (1.20)$$

если расстояние между R и R_n не превосходит $2h$. Объединяя неравенства (1.18), (1.19) и (1.20), находим

$$|u_n(P) - g(R)| \leq 2\sigma(h) + \eta(h).$$

Наконец, мы выберем δ столь малым, что при $2h < \delta$ выполняется условие $2\delta(h) + \eta(h) < \varepsilon$.

Итак, найденная функция u дает решение граничной задачи. Согласно п. 3, $D[u] = h$, следовательно, функция u , которая является допустимой в нашей вариационной задаче, дает решение также и этой задачи. Доказательство единственности проводится в точности так же, как и в случае круга. Таким образом, принцип Дирихле в формулировке, приведенной в п. 6 § 1, установлен полностью.

Следует заметить, что наше доказательство неприменимо в том случае, когда α является изолированной граничной точкой, ибо в этом случае нельзя построить дугу R_nQ_n . Можно ожидать, что заданные граничные значения принимаются лишь на невырожденных связных точечных множествах α границы γ .

5. Обобщения. Можно отбросить следующие два несущественных ограничения: а) условие ограниченности области G , б) предположение о том, что граница состоит из жордановых кривых.

а) От условия ограниченности можно освободиться на основании следующих рассуждений. Это условие было использовано лишь для установления связи между значениями функции $\varphi_n - \varphi_m$ в круге K и граничными значениями посредством круговых дуг (см. п. 2). Однако такая связь может быть установлена также и для неограниченной области B , если последняя обладает граничным континуумом T с положительным диаметром $2h$. В этом случае можно найти пересекающую T окружность A , на которой величина $|\varphi_n - \varphi_m|$ сколь угодно мала при достаточно больших n и m . Если A пересекает также и окружность круга K , то остается справедливым приведенное в п. 2 доказательство; если A не пересекает этой окружности, то можно принять, что A содержит K внутри, ибо в противном случае можно было бы предварительно совершить преобразование инверсии относительно A . Наконец, значения величины $|\varphi_n - \varphi_m|$ в круге K можно сравнить с ее (малыми) значениями на окружности A с помощью того же приема, который был применен в п. 2.

б) Для граничных дуг, которые засчитываются дважды, т. е. „разрезов“ с двумя различными берегами, доказательства и результаты остаются буквально неизменными, нужно лишь допустить, что функции g и u на противоположных берегах разрезов могут принимать различные значения.

Общее определение кратных граничных точек можно сформулировать следующим образом.

Последовательность точек P_n области G называется сходящейся, если любые две ее точки P_n и P_m можно соединить лежащей в G ломаной, диаметр которой сколь угодно мал при достаточно больших n и m . Если сходящаяся последовательность не имеет предельной точки внутри G , то говорят, что она определяет граничную точку R . Говорят, что две сходящиеся последовательности P_n и P'_n определяют одну и ту же граничную точку, если смешанная последовательность P_n, P'_n также сходится.

При таком определении очевидным образом вводятся понятия граничных значений и непрерывности на границе, если граничное значение допустимой функции φ в точке R понимать как предельное значение $\varphi(P_n)$ на любой последовательности точек P_n , сходящейся к R . Приведенные выше доказательства и результаты не нуждаются тогда ни в каких изменениях.

Наконец, заметим, что результаты и доказательства остаются также в силе, если G представляет собой *риманову поверхность*, составленную из конечного числа плоских областей, каждая из которых содержит только одну точку разветвления конечного порядка.

§ 6. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

Существует много других доказательств принципа Дирихле. Мы приведем здесь одно из этих доказательств, не опирающееся на решение задачи Дирихле для круга. Оно дает несколько иной подход к принципу Дирихле и разъясняет существо некоторых предыдущих рассуждений.

1. Основное интегральное неравенство. Прежде всего мы приведем одно замечательное неравенство Пуанкаре, которое заменяет лемму 1.4.

Лемма 1.4г. Для любой кусочно гладкой функции ζ с нулевыми граничными значениями существует постоянная k , зависящая лишь от области G и такая, что

$$H[\zeta] \leq kD[\zeta]; \quad (1.21)$$

постоянную k здесь можно выбрать меньшей, чем l^2 , где l — диаметр области G .

Доказательство. Чтобы избежать усложнений, связанных с границей, мы рассмотрим вместо области G ее подобласти G_δ , ограни-

ченные ломаными γ_δ и монотонно сходящиеся к G при $\delta \rightarrow 0$. Для заданного положительного ε на γ_δ можно считать, что $|\zeta| < \varepsilon$, если δ достаточно мало. Через каждую точку P области G_δ проведем прямую $y = \text{const}$ в направлении возрастающих значений x и обозначим через P' первую точку ее пересечения с γ_δ . Положим $\zeta(P') = \varepsilon(P)$, тогда $\varepsilon(P)$ будет кусочно непрерывной функцией P , для которой

$$|\varepsilon(P)| < \varepsilon. \quad (1.22)$$

Из соотношения

$$|\zeta(P) - \zeta(P')| = \left| \int_{P'}^P \zeta_x dx \right|,$$

применяя неравенство Буняковского — Шварца, получаем

$$|\zeta(P) - \varepsilon(P)|^2 \leq l \int_{P'}^P \zeta_x^2 dx \leq l \int_I \zeta_x^2 dx,$$

где I — полное пересечение прямой $y = \text{const}$ с областью G_δ , а l — диаметр G . Интегрируя вдоль I , находим

$$\int_I |\zeta(P) - \varepsilon(P)|^2 dx \leq l^2 \int_I \zeta_x^2 dx.$$

Теперь мы интегрируем это неравенство по всем значениям y , дающим пересечение с G_δ , и получаем

$$\int_{G_\delta} |\zeta(P) - \varepsilon(P)|^2 dx dy \leq l^2 D[\zeta],$$

или, после применения неравенства треугольника и (1.22),

$$\left\{ \int_{G_\delta} \zeta^2(P) dx dy \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_{G_\delta} \varepsilon^2 dx dy \right\}^{1/2} + \{l^2 D[\zeta]\}^{1/2}.$$

Так как число ε можно выбрать сколь угодно малым и так как любая замкнутая подобласть G содержится в G_δ при достаточно малых δ , то лемма получается отсюда почти непосредственно.

При исследовании граничных значений полезно некоторое уточнение неравенства (1.21), получаемое тем же методом. Разобьем область G на внутреннюю замкнутую область G' и граничную полосу G^* , которую выберем так, чтобы она содержала все точки G , расстояние которых до границы не превышает $4h$. Тогда будем иметь

$$D_{G^*}[\zeta] < \sigma(h),$$

где $\sigma(h)$ стремится к нулю вместе с h .

Рассмотрим связную компоненту c границы области G диаметра, большего $4h$ (фиг. 4), и предположим, что все остальные компоненты границы удалены от c также на расстояние, большее $4h$. Пусть T — прямолинейный отрезок длины $4h$, выходящий из точки R компоненты c и направленный внутрь области G ¹⁾. Рассмотрим еще все окружности с центром в точке R и радиусом, изменяющимся от 0 до $4h$, и выделим на них дуги, лежащие в G и пересекающиеся с T . Эти дуги отсекают от G односвязные области L . Так как любая область L содержится в полосе G^* , то

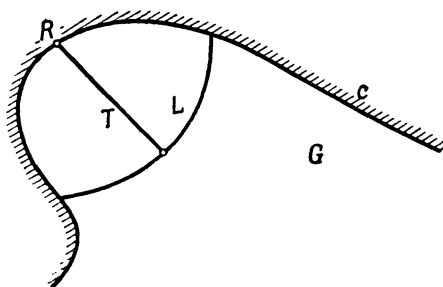
$$D_L[\zeta] < \sigma(h).$$

Справедлива

Лемма 1.4д. Независимо от выбора точки R имеет место неравенство:

$$H_L[\zeta] < 64\pi^2 h^2 \sigma(h). \quad (1.23)$$

Доказательство проводится точно так же, как и в лемме 1.4г, с той лишь разницей, что вместо отрезков $y = \text{const}$ теперь нужно рассматривать окружности.



Фиг. 4.

2. Решение вариационной задачи I. Для построения решения вариационной задачи Дирихле мы опять отправляемся от произвольной минимизирующей последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ и используем следующие факты, доказанные в § 5:

(1.16а) $D[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$ при n и m , стремящихся к бесконечности.

(1.15а) $D[\varphi_n, \zeta] \rightarrow 0$ для любой допустимой вариации ζ .

(1.24) $D_{G^*}[\varphi_n - g] < \sigma(h)$, где G^* обозначает граничную полосу шириной h и $\sigma(h)$ — величину, не зависящую от n и стремящуюся к 0 вместе с h .

Доказательство проведем в четыре шага.

1) Выберем фиксированное положительное значение α и рассмотрим область G_α (возможно, распадающуюся на несколько кусков), которая состоит из всех точек P области G , расстояние которых до границы превышает α . С каждой допустимой функцией φ в области G_α свяжем „сглаженную“ функцию ω , определенную соотношением

$$\omega(P) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int\int_K \varphi \, dx \, dy, \quad (1.25)$$

где K обозначает круг радиуса α с центром в точке P . Среднее значение ω является, очевидно, непрерывной в области G_α функцией

¹⁾ Существование такого отрезка очевидно, так как любой отрезок, выходящий из внутренней точки области, имеет первую точку пересечения с Γ .

точки P . Далее, первые производные $\omega(P)$ существуют, непрерывны и выражаются следующим образом:

$$\pi\alpha^2\omega_x = \iint_K \varphi_x dx dy, \quad \pi\alpha^2\omega_y = \iint_K \varphi_y dx dy. \quad (1.26)$$

Для доказательства выразим $\omega(x + \xi, y) = \omega(P')$ с помощью формулы (1.25), заменив в ней область интегрирования кругом K' радиуса α с центром в точке P' . Мы получим

$$\frac{1}{\xi} \pi\alpha^2 [\omega(x + \xi, y) - \omega(x, y)] = \frac{1}{\xi} \left\{ \iint_{\Delta_1} \varphi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta_2} \varphi(x, y) dx dy \right\},$$

где Δ_1 обозначает часть K' , внешнюю по отношению к K , а Δ_2 — часть K , внешнюю по отношению к K' ; площадь каждой части не превосходит $2\xi\alpha$. При $\xi \rightarrow 0$ правая часть стремится к пределу $\int_k \varphi dy$,

где k — граница круга K , что получается непосредственно, если разбить двойной интеграл от непрерывной функции φ на последовательные интегралы по y и по x . Заменяя контурный интеграл интегралом от производной φ_x , распространенным на круг K , мы получаем нужный результат (1.26); точно так же проводится рассуждение и для ω_y . Непрерывность ω_x и ω_y получается непосредственно из соотношения

$$\pi\alpha^2 [\omega_x(x + \xi, y) - \omega_x(x, y)] = \iint_{\Delta_1} \varphi_x dx dy - \iint_{\Delta_2} \varphi_x dx dy,$$

ибо квадрат его правой части, согласно неравенству Буняковского — Шварца, не превосходит $4\xi D[\varphi]$ (площадь каждой луночки меньше $2\xi\alpha$).

Отождествим функцию φ с функцией φ_n из минимизирующей последовательности и применим (1.16а); воспользовавшись, кроме того, основным неравенством (1.21), получим

$$H[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0. \quad (1.16б)$$

Следовательно, выражения

$$\begin{aligned} \pi^2\alpha^4 (\omega_n - \omega_m)^2 &= \left[\iint_K (\varphi_n - \varphi_m) dx dy \right]^2 \leq \pi\alpha^2 H[\varphi_n - \varphi_m], \\ \pi^2\alpha^4 \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \frac{\partial\omega_m}{\partial x} \right)^2 &= \left[\iint_K \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial x} \right) dx dy \right]^2 \leq \pi\alpha^2 D[\varphi_n - \varphi_m], \\ \pi^2\alpha^4 \left(\frac{\partial\omega_n}{\partial y} - \frac{\partial\omega_m}{\partial y} \right)^2 &= \left[\iint_K \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial y} \right) dx dy \right]^2 \leq \pi\alpha^2 D[\varphi_n - \varphi_m] \end{aligned}$$

стремятся равномерно к нулю в каждой точке G_α . Таким образом, в области G_α существует предельная функция $u(P) = u(P; \alpha)$

$$u(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(P), \quad (1.27)$$

для которой

$$u_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n,x}, \quad u_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n,y}, \quad (1.28)$$

причем сходимость равномерна в G_α .

2) Покажем теперь, что предельная функция $u(P)$ не зависит от радиуса α .

Для доказательства воспользуемся соотношением (1.15а), выбрав в нем надлежащим образом вариацию ζ ; пусть r обозначает расстояние от точки P , а

$$\zeta = \begin{cases} 0 & \text{для } r \geq \alpha, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) & \text{для } r < \alpha. \end{cases}$$

Соотношение (1.15а) дает

$$D_K [\varphi_n, \zeta] = - \int_K \int \varphi_n \Delta \zeta \, dx \, dy + \int_K \varphi_n \frac{\partial \zeta}{\partial r} \, ds \rightarrow 0,$$

где s — длина дуги окружности k . Так как $\Delta \zeta = -2/\alpha^2$ и $\partial \zeta / \partial r = -1/\alpha$ на k , то мы получаем

$$\frac{1}{\pi \alpha^2} \int_K \int \varphi_n \, dx \, dy - \frac{1}{2\pi \alpha} \int_k \varphi_n \, ds \rightarrow 0. \quad (1.29)$$

Это соотношение показывает, что функция $u(P)$ является также пределом при $n \rightarrow \infty$ среднего значения функции φ_n на окружности k .

Далее мы выберем вариацию

$$\zeta' = \begin{cases} 0, & r \geq \alpha, \\ \ln \frac{r}{\alpha}, & t \leq r < \alpha, \\ \ln \frac{t}{\alpha}, & r < t \end{cases}$$

и из соотношения (1.15а) получим

$$\frac{1}{2\pi \alpha} \int_{r=\alpha} \varphi_n \, ds - \frac{1}{2\pi t} \int_{r=t} \varphi_n \, ds \rightarrow 0. \quad (1.30)$$

Отсюда видно, что среднее значение φ_n на окружности в пределе при $n \rightarrow \infty$ не зависит от радиуса.

Таким образом, введенные выше функции u , u_x , u_y не зависят от выбора α и, следовательно, их можно считать определенными и непрерывными во всей области G .

3) Теперь покажем, что функция u принимает заданные граничные значения, т. е. что функция $\zeta = u - g$ равна 0 на границе. Для доказательства рассмотрим точку P области G , расположенную на

расстоянии $2h$ от границы, и обозначим через R ближайшую к P граничную точку, так что $RP = 2h$.

Предположим, что R лежит на компоненте s границы, диаметр которой превышает $4h$. Круг K радиуса h с центром в точке P лежит в области G^* и, в частности, в области L , примыкающей к точке R (мы пользуемся обозначениями, введенными в п. 1: G^* обозначает граничную полосу, а L — подобласть G^* , для которой $D_L[\varphi_n] < \sigma(h)$). В силу (1.24) и леммы 1.4д п. 1 мы имеем

$$\left[\frac{1}{\pi h^2} \int \int_K (\varphi_n - g) dx dy \right]^2 \leq \frac{1}{\pi h^2} H_L[\varphi_n - g] < \frac{1}{\pi h^2} 64\pi^2 h^2 \sigma(h) = 64\pi\sigma(h).$$

Правая часть этого неравенства сколь угодно мала при достаточно малом h . Левая часть при фиксированном h и достаточно большом n сколь угодно мало отличается от квадрата разности между $u(P)$ и средним значением непрерывной функции g в круге K . Так как при $h \rightarrow 0$ это среднее значение приближается к $g(R)$, то величина $|u(P) - g(R)|$ сколь угодно мала при достаточно малом h . Доказательство закончено.

4) Чтобы доказать, что u является допустимой функцией в вариационной задаче Дирихле, нужно проверить конечность интеграла $D[u]$ и доказать соотношение $D[u] = d$. Для этого достаточно убедиться в том, что для любой замкнутой подобласти G' области G справедливо неравенство $D_{G'}[u] \leq d$. При доказательстве нам будет нужна

Лемма 1.6. Любую замкнутую ограниченную плоскую область G' можно покрыть конечным числом непересекающихся кругов так, чтобы ее непокрытая часть имела сколь угодно малую площадь. Кроме того, максимальный радиус покрывающих кругов можно также считать сколь угодно малым.

Доказательство. Пусть ε будет произвольно малая положительная величина. Сначала покроем G' конечным числом непересекающихся квадратов со сторонами длины меньше 2ε так, чтобы (верхняя) площадь оставшейся части G' была меньше $\varepsilon^2/2$. В каждый квадрат мы впишем круг, а оставшуюся часть квадратов снова покроем маленькими квадратиками так, чтобы непокрытая площадь не превосходила $\varepsilon^2/4$. К построенным выше кругам добавим еще круги, вписанные в эти квадратика, и повторим построение. Продолжив этот процесс достаточно далеко, мы покроем область G' непересекающимися кругами таким образом, что оставшаяся непокрытой площадь будет меньше любой наперед заданной величины. В самом деле, так как площадь каждого покрывающего круга больше $3/4$ площади описанного вокруг него квадрата, то после m шагов для всей непокрытой площади r_m будет справедливо неравенство

$$r_m < \frac{A}{4^m} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right] < \frac{A}{4^m} + \varepsilon^2,$$

где A — площадь G' . Очевидно, что отправившись от достаточно малых квадратов и выбрав число m достаточно большим, мы получим оба утверждения леммы.

На основании этой леммы интеграл

$$I = \iint_{G'} f(x, y) dx dy$$

от непрерывной функции $f(x, y)$ можно представить следующим образом. Для заданного ε мы покроем область G' кругами радиусов $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ так, чтобы непокрытая площадь не превосходила ε и колебание f в каждом круге также было меньше ε . Обозначив через f_i значение f в центре P_i круга K_i и воспользовавшись элементарным определением двойного интеграла, мы получим

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^m \pi \rho_i^2 f_i \rightarrow I$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Значение ω_{n_x} в точке P_i оценивается с помощью неравенства Буняковского — Шварца:

$$\omega_{n_x}^2(P_i) = \frac{1}{\pi^2 \rho_i^4} \left| \iint_{K_i} \varphi_{n_x} dx dy \right|^2 \leq \frac{1}{\pi \rho_i^2} \iint_{K_i} \varphi_{n_x}^2 dx dy.$$

Отсюда мы находим

$$\sum \pi \rho_i^2 [\omega_{n_x}^2(P_i) + \omega_{n_y}^2(P_i)] \leq \sum \iint_{K_i} (\varphi_{n_x}^2 + \varphi_{n_y}^2) dx dy \leq D[\varphi_n].$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$I_\varepsilon \leq d,$$

где I_ε обозначает ту же сумму, что и выше, но для функции $u_x^2 + u_y^2$ вместо f . Таким образом,

$$D_{G'}[u] \leq d$$

и соотношение $D[u] \leq d$, а следовательно, и $D[u] = d$ доказано, т. е. функция u действительно решает вариационную задачу.

Отсюда заключаем, что $D[u, \zeta] = 0$ для любой допустимой вариации ζ . Заменяя в (1.29) и (1.30) функцию φ_n на u , мы получаем

$$u(P) = \frac{1}{\pi \alpha^2} \iint_K u dx dy,$$

где K — круг произвольного радиуса α с центром в точке P . Подобным же образом приходим к соотношениям

$$u_x(P) = \frac{1}{\pi \alpha^2} \iint_K u_x dx dy, \quad u_y(P) = \frac{1}{\pi \alpha^2} \iint_K u_y dx dy.$$

Повторив проведенные выше рассуждения, мы докажем, что u_x и u_y обладают непрерывными производными и что

$$u_{xx} = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_k u_x dy$$

и т. д. (обозначения прежние). Наконец, мы воспользуемся классическим аппаратом вариационного исчисления и из соотношения $D[\zeta, u] = 0$, а также из непрерывности u_{xx} и u_{yy} заключим, что функция u — гармоническая.

§ 7. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ И ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

К решению граничной задачи для гармонических функций легко сводится задача конформного отображения односвязных и двусвязных областей соответственно на круг и на круговое кольцо. Сначала мы рассмотрим случай двусвязных областей.

Пусть область G ограничена двумя жордановыми кривыми γ_1 и γ_2 , а U^* обозначает гармоническую в этой области функцию с граничными значениями 0 на γ_1 и -1 на γ_2 . Через V^* мы обозначим гармоническую функцию, сопряженную U^* , и через

$$U^* + iV^* = F^*(x + iy) = F^*(z)$$

— аналитическую в области G функцию комплексного переменного $z = x + iy$. Кривые γ_1 и γ_2 принадлежат семейству линий уровня $U^* = \text{const}$, а линии $V^* = \text{const}$ являются ортогональными траекториями этого семейства. Функция V^* неоднозначна, — когда точка z описывает в положительном направлении замкнутую кривую Γ , окружающую контур γ_2 , эта функция возрастает на величину „периода“ k . Период

$$k = - \int_{\Gamma} U_y^* dx - U_x^* dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial U^*}{\partial n} ds$$

(здесь $\partial/\partial n$ обозначает нормальную производную, s — длину дуги на Γ) не зависит от выбора кривой Γ и определяется формой области G . Линии уровня $U^* = c$, $-1 < c < 0$ представляют собой простые (аналитические) замкнутые кривые, лежащие в области G . Для любого c , $-1 < c < 0$, подобласть $U^* > c$ области G примыкает к кривой γ_1 ; ни одна область $U^* > c$ не достигает линии γ_2 , на которой $U^* = -1$, и ни одна замкнутая подобласть $U^* \geq c$ не может целиком лежать внутри G , ибо тогда было бы $U^* \equiv c$. Следовательно, система кривых $U^* = c$ гомотопна γ_1 и γ_2 ; эта система вместе с ее ортогональными траекториями изображена на фиг. 5. Очевидно, что $k \neq 0$.

Функция

$$U + iV = F(z) = \frac{2\pi}{k} F^*(z)$$

имеет период $2\pi i$ и, следовательно, функция

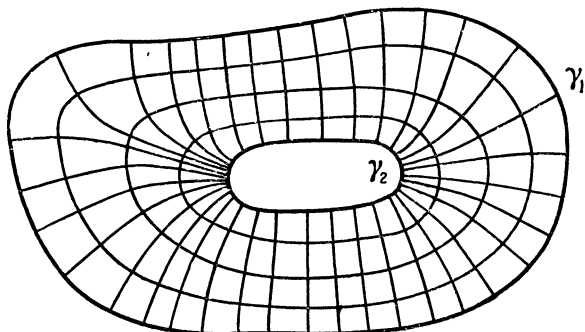
$$\zeta = u + iv = e^{F(z)} = f(z)$$

осуществляет отображение области G на круговое кольцо

$$e^{-\frac{2\pi}{k}} < |\zeta| < 1$$

плоскости ζ .

В предельном случае, когда γ_2 вырождается в точку, скажем, в начало координат O , функция U^* должна быть тождественно равной нулю (граничное значение -1 в изолированной точке O не влияет



Фиг. 5.

на решение) и функцию $f(z)$ нельзя получить непосредственно тем же способом¹⁾. Чтобы период сопряженной функции V был равным 2π , функцию U следует брать в виде

$$U = \ln r + w(x, y),$$

где r — расстояние точки (x, y) от начала координат, а w — правильная гармоническая функция.

Для искомой функции U интеграл Дирихле обращается в бесконечность. Поэтому мы применяем принцип Дирихле не к ней, а к правильной гармонической функции w , граничные значения которой на γ_1 в силу условия $U = 0$ равны $-\ln r$ и, следовательно, известны.

Функция

$$f(z) = e^{F(z)} = e^{U+iV}$$

¹⁾ Физически нашему отображению соответствует вихревое движение двумерного потока жидкости в области G , в котором линии $U = \text{const}$ или $U^* = \text{const}$ являются линиями тока.

Отображение односвязной области G на круг $|\zeta| < 1$ нетрудно получить, как предельный случай, когда кривая γ_2 стягивается в точку O , которую можно считать соответствующей началу $\zeta = 0$ (см., например, теорему 2.2).

осуществляет отображение области G на единичный круг, такое, что точке O соответствует начало координат. Мы видим, что задача конформного отображения односвязной области на круг также сводится к принципу Дирихле, хотя и несколько менее прямым путем.

Посредством дробно-линейного преобразования внутренность круга или круговое кольцо можно отобразить соответственно на внешность одного или двух кругов; в последнем случае радиусы обоих кругов можно принять равными единице.

Для областей, связность которых выше двух, сведение задачи конформного отображения к граничной задаче нельзя осуществить таким простым способом. В дальнейшем мы получим значительно более общие результаты другим методом, во многом независимым от результатов этой главы.

§ 8. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Всюду, кроме п. 4 § 4, мы считали, что граничные значения допустимой функции φ заданы на всей границе γ . Здесь мы рассмотрим прежнюю вариационную задачу, но будем считать, что граничные значения допустимой функции остаются произвольными на некоторой части λ границы $\gamma = \lambda \cup \mu$ и задаются лишь на дополнительной ее части μ . Наличие в вариационной задаче такой „свободной“ границы λ требует некоторых изменений в проведенных выше рассуждениях. Решение u существует, гармонично и принимает заданные значения на связной части μ границы γ всюду, кроме изолированных исключительных точек.

Как мы видели в § 4, в том частном случае, когда область G представляет собой полукруг, μ — полуокружность и λ — диаметр, решение u характеризуется тем, что на „свободной“ части границы γ сопряженная к нему гармоническая функция принимает постоянные значения. По доказанному в § 7, любую односвязную область G можно конформно отобразить на полукруг так, чтобы заданный участок границы γ переходил в диаметр. При этом отображении функция u и сопряженная с ней функция v снова переходят в пару сопряженных гармонических функций, так что полученный результат распространяется на любые односвязные области.

В следующей главе мы получим интересное обобщение этого результата на многосвязные области. Предварительно докажем следующий теорему:

Теорема 1.3. Пусть граница γ k -связной области G состоит из по меньшей мере одной жордановой дуги α и связных линий $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Рассмотрим значения интеграла $D[\varphi]$ для всех функций φ , кусочно гладких в G и принимающих заданные граничные значения на α . В этих условиях решение задачи о минимуме $D[\varphi]$

дает гармоническая функция u , принимающая на α заданные значения и удовлетворяющая условиям

$$\int_{\beta'_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где β'_i обозначает любую ломаную, которая вместе с β_i ограничивает двусвязную часть области G , $\partial/\partial n$ — нормальную производную и s — длину дуги на β'_i .

Так как $du/dn = \partial v/\partial s$, то эти соотношения выражают условие однозначности сопряженной функции v в рассматриваемых двусвязных областях.

Кроме того, сопряженная функция v должна принимать постоянные значения на каждой линии β_i . Это условие вместе с предыдущим условием однозначности v в каждой двусвязной граничной полосе мы будем называть *естественными граничными условиями*. Если α состоит лишь из одной кривой, то можно утверждать, что функция v однозначна во всей области G ¹⁾.

Доказательство. Основываясь на уже рассмотренном случае полностью заданных граничных значений, мы можем считать доказанным существование решения u нашей вариационной задачи. Остается, следовательно, проверить выполнение на границах β_i естественных граничных условий. Очевидно, что функция u осуществляет также и минимум интеграла $D_S[\varphi]$, распространенного на двусвязную полосу S , заключенную между β_i и жордановой кривой β'_i (β'_i — любая кривая,

1) Если не налагать естественных граничных условий, то однозначность v можно установить с помощью следующего рассуждения, основанного на минимальном свойстве $D[u]$. Минимальное свойство равносильно условию, что $D[u, \zeta] = 0$ для любой функции ζ , непрерывной в $G + \alpha$, кусочно гладкой в G , равной нулю на α и обладающей конечным интегралом $D[\zeta]$. Пусть σ будет произвольная лежащая в G замкнутая ломаная, которая отделяет α от граничных кривых $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ и содержит α внутри. Выберем положительную постоянную h и рассмотрим внутри ломаной σ граничную полосу S , состоящую из точек P , расстояние которых до σ не превосходит h . Положим теперь $\zeta = 1$ на σ и вне ее, $\zeta = \frac{1}{h} [h - d(P)]$ в S и $\zeta = 0$ в остальной части G и, в частности, на α . Так как $D[\zeta] < \infty$ и $D[u, \zeta] = D_S[u, \zeta] = 0$, то, по формуле Грина,

$$\int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial s} ds = 0,$$

где s обозначает длину дуги на σ , а n — направление внутренней нормали. Это соотношение выражает однозначность функции при ее аналитическом продолжении вдоль σ .

В заключение заметим, что проведенное доказательство теряет силу для аналитического продолжения вдоль кривых σ , которые не разделяют область G указанным выше образом. Это замечание существенно при обобщении теории на римановы поверхности ненулевого рода.

ограничивающая вместе с β_i двусвязную часть G). В этой минимальной задаче допустимыми являются все функции, непрерывные в $S \mp \beta'_i$, кусочно гладкие в S и принимающие на β'_i те же значения, что и функция u . Отобразим конформно S на круговое кольцо $R: a < r < 1$ с центром в начале так, чтобы кривой β'_i соответствовала окружность $r = a$, а кривой β_i — окружность $r = 1$. Сохраняя старые обозначения для функций, соответствующих функциям u и v , мы получим в силу инвариантности интеграла Дирихле при конформных отображениях, что $D_R[u] \leq D_R[\varphi]$, т. е. что функция u решает также минимальную задачу в кольце R . Поступая так же, как в п. 4 § 4, заменим функцию $\varphi(r, \theta)$, заданную в R , функцией $\varphi_*(r, \theta) = \varphi(r', \theta)$, где $r' = r - \varepsilon \frac{r-a}{1-a}$, и продолжим последнюю по симметрии в кольцо $\bar{R}: 1 \leq r \leq 1/a$, положив там $\varphi_*(r, \theta) = \varphi_*(1/r, \theta)$. Для гармонической в кольце $R \mp \bar{R}$ функции $w(r, \theta)$ с граничными значениями $u(a, \theta) = u(1/a, \theta)$ мы имеем $D_R[w] = D_{\bar{R}}[w] \leq D_R[\varphi_*]$. Так как $D_R[\varphi_*] \rightarrow D[\varphi]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то мы имеем

$$D_R[w] \leq D_R[\varphi].$$

Функция w вполне определяется заданными граничными значениями, следовательно, она не зависит от выбора допустимой в вариационной задаче для кольца R функции φ и является единственным решением этой задачи. На основании проведенных в § 2 рассуждений о единственности решения минимальной задачи можно заключить, что $w = u$. Поэтому можно считать доказанным, что функция u гармонична не только в кольце R , но и в более широком кольце $R \mp \bar{R}$. Отсюда $\partial w / \partial r = \partial u / \partial r = 0$ на окружности $r = 1$ и, следовательно, сопряженная функция v постоянна на этой окружности. При конформном отображении кольца R на полосу S функции u и v остаются гармоническими сопряженными; остаются постоянными и граничные значения функции v ¹⁾. Наша теорема доказана.

¹⁾ Если кривая β_i не аналитична, то аналитическое продолжение функций u и v за область G , естественно, становится невозможным.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА ОБЛАСТИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Классы нормальных областей. Области с параллельными разрезами. Как мы видели в гл. I, любую односвязную плоскую область G (кроме полной плоскости и плоскости с исключенной точкой) можно конформно отобразить на единичный круг, любую двусвязную область G (кроме плоскости с двумя исключенными точками) можно конформно отобразить на круговое кольцо, у которого внешней границей служит единичная окружность, а внутренняя граница зависит от области и может вырождаться в точку.

Здесь мы рассмотрим общую задачу конформного отображения областей данной топологической структуры (например, любой k -связной плоской области) на области определенного семейства, зависящего только от конечного числа параметров. Такое семейство \mathfrak{N} мы будем называть *классом нормальных областей*. Конечно, желательно уменьшить, насколько это возможно, число параметров, определяющих области класса \mathfrak{N} , так чтобы никакие две из них не были конформно эквивалентными. Тогда класс \mathfrak{N} будет содержать одного и только одного конформного представителя каждой из рассматриваемых областей.

В рассмотренных выше случаях односвязных и двусвязных областей минимальное число таких параметров, или, как их еще называют, *модулей*, равно соответственно 0 и 1. Мы увидим далее, что для k -связных плоских областей при $k > 2$ это минимальное число равно $3k - 6$.

Для удобства термин „класс нормальных областей“ будет иногда употребляться в ослабленном смысле — мы будем допускать лишние параметры, которые исключаются лишь впоследствии. Например, как мы увидим в гл. V, любую k -связную область можно отобразить на внешность k кругов, т. е. на область, зависящую от $3k$ параметров. Это число параметров можно уменьшить линейным преобразованием комплексной плоскости: радиус одного из кругов можно считать равным 1, а его центр — заданным.

В этой главе мы будем рассматривать еще один класс \mathfrak{N} — совокупность областей, каждая из которых представляет собой полную плоскость комплексного переменного $w = u + iv$ с исключенными прямолинейными отрезками $v = \text{const}$ — *границными разрезами*. В случае областей бесконечной связности число таких отрезков бесконечно;

в любом случае допускается вырождение отрезков в точки. Область такого класса мы будем кратко называть *плоскостью с разрезами*.

Вместо полной плоскости мы будем рассматривать иногда *полуплоскость с разрезами*, понимая под такой областью верхнюю полуплоскость $v > 0$, из которой исключено некоторое число прямолинейных разрезов, параллельных действительной оси. Последняя считается одной из границ области.

Предположение о том, что k -связные области с параллельными разрезами составляют класс нормальных областей, подкрепляется следующими физическими соображениями. Пусть G будет произвольная k -связная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Рассмотрим в ней потенциальный поток, образованный диполем O , расположенным в ее внутренней точке $z = 0$. Этот поток характеризуется аналитической функцией $w = u + iv = f(z)$ с особенностью типа $1/z$ в точке $z = 0$. В такой интерпретации линии $u = \text{const}$ представляют собой линии равного потенциала потока, а линии $v = \text{const}$ — его линии тока.

Граничные кривые области G , которые мы считаем гладкими, являются частью линий тока $v = \text{const}$. Естественно считать, что за исключением k линий все остальные линии тока проходят через точку O и являются замкнутыми аналитическими кривыми, вдоль которых значение u монотонно изменяется от $-\infty$ до ∞ . Исключительные линии тока $v = c_1, v = c_2, \dots, v = c_k$ идут вдоль границы области G . Они выходят из точки O , на некоторой граничной кривой разделяются на две ветви, обходящие эту кривую с разных сторон, затем снова соединяются и возвращаются в точку O (см. фиг. 6, на которой изображен поток диполя в двусвязной области).

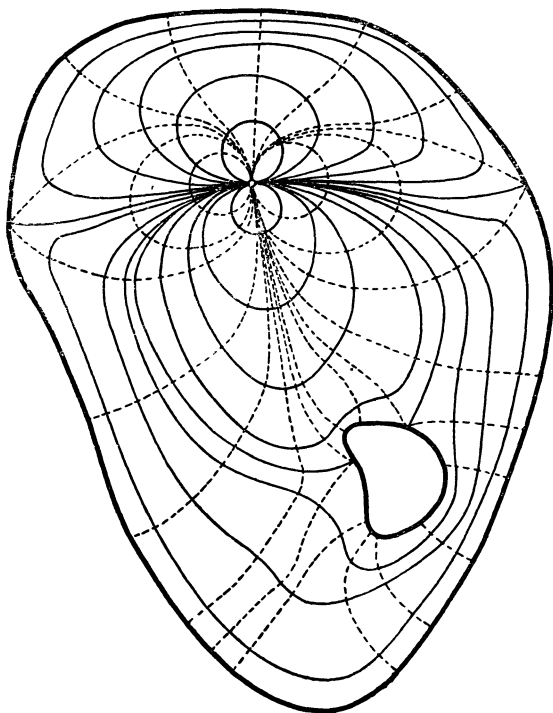
Каждая линия тока $v = c$, кроме $c = c_1, c_2, \dots, c_k$, взаимно однозначно отображается на полную прямую $v = c$ плоскости w . Исключительные линии тока частично совпадают с границей области G , которая преобразуется в разрезы, т. е. в прямолинейные отрезки $v = c_1, v = c_2, \dots, v = c_k$ плоскости w , причем двум берегам разрезов соответствуют две ветви линии тока, идущие вдоль некоторой граничной кривой области G .

Если поместить диполь O на граничную кривую и направить его ось вдоль этой кривой, то мы получим отображение на полуплоскость с разрезами. Если положить на выбранной граничной кривой $v = 0$, то эту полуплоскость можно считать верхней полуплоскостью.

В предыдущих рассмотренных для данной области G остается открытым выбор 6 действительных параметров, так как диполь можно поместить в произвольную точку z_0 , произволен выбор направления и интенсивности диполя и к отображающей функции можно добавлять произвольную постоянную. Иными словами, отображающую функцию можно брать в виде

$$u + iv = w = f(z) = \frac{a}{z - z_0} + b + (z - z_0)R(z),$$

где $R(z)$ — правильная аналитическая в области G функция, $a \neq 0$ и b — произвольные комплексные параметры и z_0 — произвольная точка G . Так как k -связная плоскость с разрезами определяется $3k$ параметрами, а именно, положением начальных точек и длинами k разрезов, то мы приходим к заключению, что при $k > 2$ наименьшее возможное число параметров равно $3k - 6$ ¹⁾.



Фиг. 6. Поток диполя в двусвязной области.

Для полуплоскости с разрезами число модулей подсчитывается также легко. Так как на некоторой граничной линии должно быть $v = 0$, то b определяется лишь одной действительной постоянной, то же справедливо и для z_0 и для a . Поэтому в нашем распоряжении остается лишь три параметра и число $3(k - 1) = 3k - 3$ параметров, определяющих полуплоскость с разрезами, попрежнему сводится к $3k - 6$. Фиксировать три параметра можно, например, задавая граничную точку G ,

¹⁾ Как мы видели в гл. I, формула для числа модулей $3k - 6$ теряет силу при $k = 1$ и $k = 2$, ибо в этих случаях области с разрезами допускают соответственно трехпараметрическое и однопараметрическое отображения одна на другую.

соответствующую точке $w = \infty$, и считая, что $w = i$ является начальной точкой некоторого разреза.

Основной задачей настоящей главы является доказательство того, что области с разрезами образуют класс нормальных областей для совокупности k -связных плоских областей G . Мы рассмотрим также обобщение теоремы существования на случай отображений на области с разрезами римановых областей G произвольной топологической структуры с конечной эйлеровой характеристикой. Для областей ненулевого рода нам придется, однако, несколько модифицировать понятие области с разрезами. Мы осуществим построение областей с разрезами нужной топологической структуры, введя соответствие границ пар *внутренних разрезов* с помощью простого приема *отождествления* (см. § 7).

2. Постановка вариационной задачи. Поставим своей целью охарактеризовать потенциал u поля диполя, решающего минимальную задачу для интеграла Дирихле $D[\varphi]$. Не нарушая общности, мы примем, что диполь расположен в начале координат и что особенность потенциала его поля имеет вид $x/(x^2 + y^2)$. Тогда мы получим комплексный потенциал в виде $w = u + iv = f(z) = 1/z + R(z)$, где $R(z)$ — правильная в области G аналитическая функция. Интеграл Дирихле для функции u , распространенный на область G , бесконечен, и чтобы охарактеризовать наш потенциал, следует несколько изменить постановку минимальной задачи. Мы найдем необходимые изменения, исходя из следующих соображений. Как мы видели в § 8 гл. I, граница γ области G непременно является линией тока $v = \text{const}$, если значения потенциала u , дающего минимум интегралу $D[\varphi]$, остаются свободными на γ . Следовательно, естественно ожидать, что для функции u справедливо следующее свойство: пусть k — аналитическая кривая, например окружность, внутри которой заключена особенность, K — внутренность k и K^* — область $G - K$, тогда функция u осуществляет минимум интеграла $D_{K^*}[\varphi]$ для всех функций φ , кусочно гладких в K^* , непрерывных в $K^* + k$ и принимающих на k те же значения, что и функция u .

Само по себе это свойство еще не характеризует функцию u как решение вариационной задачи, так как оно предполагает минимальное свойство лишь относительно функций, совпадающих с φ на кривых k достаточно малого диаметра. Мы приходим, таким образом, к следующему, пока еще также только предполагаемому, свойству u .

Потенциал u характеризуется заданной особенностью вида $x/(x^2 + y^2)$ в начале координат и вариационным условием

$$D[u, \zeta] = 0, \quad (2.1)$$

справедливым для произвольной функции ζ , кусочно гладкой в области G и равной тождественно нулю внутри достаточно малой окружности k с центром в начале координат.

В следующем пункте мы докажем, что такая функция u существует и что соответствующий ей комплексный потенциал осуществляет отображение G на плоскость с разрезами. Здесь будет доказана только

Лемма 2.1. Функция u с заданной особенностью в точке O , а в остальном правильная гармоническая в области G , определяется однозначно (с точностью до аддитивной постоянной) условием (2.1), справедливым для любой функции ζ , кусочно гладкой в G , обладающей конечным интегралом $D[\zeta]$ и тождественно равной нулю в окрестности начала координат.

Доказательство. Предположим, что функции u_1 и u_2 обе удовлетворяют условию (2.1). Тогда функция $W = u_1 - u_2$, правильная гармоническая в области G (включая начало), удовлетворяет условию $D[W, \zeta] = 0$ для любой кусочно гладкой функции ζ , равной нулю внутри окружности k .

Покажем, что имеет место и более общее соотношение: $D[W, \eta] = 0$ для любой кусочно гладкой в G функции η с конечным интегралом $D[\eta]$. Пусть a — радиус окружности k и r , θ — полярные координаты с полюсом в точке O . Определим функцию

$$h = \begin{cases} \eta, & r \leq a, \\ \frac{2a-r}{a} \eta(a, \theta), & a < r < 2a, \\ 0, & r \geq 2a. \end{cases}$$

Тогда будет $D[h] < \infty$, если мы (не нарушая общности) предположим, что

$$\int_0^{2\pi} [\eta_\theta(a, \theta)]^2 d\theta < \infty.$$

Положим $\zeta = \eta - h$; эта функция удовлетворяет условиям, при выполнении которых справедливо соотношение (2.1), следовательно, $D[W, \zeta] = 0$. Далее, $D[W, \eta] = D[W, \zeta] + D[W, h] = D[W, h]$; но по формуле Грина

$$D[W, h] = - \int_{r < 2a} \int h \Delta W dx dy + 2a \int_{r=2a} h \frac{\partial W}{\partial r} d\theta = 0,$$

так как функция W гармоническая и $h = 0$ на окружности. Таким образом, действительно, $D[W, \eta] = 0$.

В частности, положив $\eta = W$, мы получим

$$D[W] = 0.$$

Отсюда следует, что $W_x^2 + W_y^2 = 0$, т. е. $W = \text{const}$, а это и доказывает лемму.

Чтобы точно сформулировать вариационную задачу, решаемую функцией u , мы исключим особенность этой функции, рассмотрев вместо нее функцию $U = u - S$, где S — надлежащим образом выбранная кусочно гармоническая функция с заданной особенностью. Чтобы удобнее было получить в соответствии с естественными граничными условиями постоянные граничные значения сопряженной функции φ , мы примем, что функция S равна 0 всюду, кроме достаточно малой окружности k радиуса a с центром в начале координат. При таком выборе S будет разрывной на окружности k . Положим, что $S = x/(x^2 + y^2) + R(x, y)$ внутри k , причем R — правильная гармоническая функция. Рассмотрим еще функцию

$$\varphi = \Phi + S,$$

кусочно гладкую всюду в области G , кроме начала координат O , и такую, что функция Φ также кусочно гладка всюду, кроме линии разрыва k . Среди всех допустимых функций Φ мы найдем функцию U , которая решает задачу

$$D[\Phi] = \min = d. \quad (2.2)$$

Чтобы обеспечить выполнение функцией $U + S = u$ условия (2.1) и отсюда получить независимость этой функции от радиуса a окружности k , мы должны надлежащим образом выбрать функцию особенностей S . Заметим, что условие (2.1) заведомо удовлетворяется, если нормальная производная функции особенностей $\partial S/\partial n$ обращается в нуль на всей окружности k ¹⁾.

В самом деле, для решения U минимальной задачи необходимо выполняется соотношение

$$D[U, \zeta] = 0, \quad (2.3)$$

где ζ — произвольная кусочно гладкая в области G функция с конечным интегралом Дирихле. Пусть теперь k' — некоторая гладкая замкнутая кривая, лежащая внутри k и охватывающая точку O , T — кольцо, ограниченное кривыми k' и k , и K' — область, лежащая внутри k' . Допустим еще, что функция ζ равна нулю всюду в K' . Тогда, положив $K'^* = G - K'$, будем иметь

$$0 = D[U, \zeta] = D_{K'^*}[u, \zeta] - D_T[S, \zeta].$$

Далее,

$$D_T[S, \zeta] = - \int_{k'} \zeta \frac{\partial S}{\partial n} ds + \int_k \zeta \frac{\partial S}{\partial n} ds - \iint_T \zeta \Delta S dx dy = 0,$$

так как $\zeta = 0$ на k' , $\partial S/\partial n = 0$ на k и $\Delta S = 0$ в T . Таким образом, для достаточно малых кривых k' условие (2.1) выполняется и, следовательно, по лемме 2.1 можно утверждать, что функция u не

¹⁾ Этому требованию, очевидно, легко удовлетворить.

зависит от выбора радиуса a и функции особенностей S . Заметим, что кривая k , так же как и k' , не обязательно должна быть окружностью, важно лишь, чтобы на k выполнялось соотношение $\partial S/\partial n = 0$.

Допустим, что круг $r \leq a$ целиком лежит в области G , и определим функцию особенностей S следующим образом¹⁾:

$$S = \begin{cases} 0, & r > a, \\ \frac{\cos \theta}{r} + \frac{r \cos \theta}{a^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{a^2}, & r \leq a. \end{cases} \quad (2.4)$$

В заключение мы сформулируем следующую вариационную задачу: *Вариационная задача II*. Среди всех функций $\Phi = \varphi - S$, где S определена соотношением (2.4), φ — кусочно гладка всюду в области G , исключая точку O , а Φ гладка в окрестности O , существует функция $\Phi = U$, дающая минимум интегралу $D[\Phi]$.

Приведенными выше рассуждениями доказана

Лемма 2.2. Решение U вариационной задачи II определяет с точностью до аддитивной постоянной функцию u , не зависящую от выбора окружности k и функции особенностей S . Функция u удовлетворяет условию (2.1) леммы 2.1. Аддитивную постоянную можно определить, положив $\Phi = 0$ в точке O .

Остается показать, что решение U вариационной задачи существует.

§ 2. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ II

1. Построение функции u . Сначала мы убедимся в том, что существует допустимая функция Φ с конечным интегралом Дирихле. Такой допустимой функцией является, например, функция

$$\Phi = \begin{cases} 0, & r < \frac{a}{2}, \\ -2 \cos \theta \frac{2r - a}{a^2}, & \frac{a}{2} \leq r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Следовательно, существует и неотрицательная точная нижняя грань d значений $D[\Phi]$ для всех допустимых функций.

Доказательство существования решения является теперь несложной задачей. Пусть Φ_1, Φ_2, \dots будет какая-либо минимизирующая последовательность. Точно такие же рассуждения, как те, которые мы проводили при доказательстве леммы 1.5а, позволяют установить предельное соотношение

$$D[\Phi_n - \Phi_m] \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

¹⁾ Такая функция особенностей введена Вейлем [78].

или, что то же самое,

$$D[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0 \quad (2.5a)$$

при $n, m \rightarrow 0$

Заменяем минимизирующую последовательность Φ_n с помощью процесса сглаживания другой кусочно гармонической последовательностью. Возвратившись к фиксированному кругу радиуса $r = r_0 \leq a$ с центром в точке O , мы рассмотрим:

1) Сглаживание допустимой функции Φ в круге $r \leq r_0$, т. е. замену Φ допустимой функцией Ψ , которая гармонична внутри круга и с точностью до аддитивной постоянной совпадает с Φ вне круга. Аддитивную постоянную выберем так, чтобы Ψ равнялась 0 в начале координат. По принципу Дирихле для круга

$$D[\Psi] \leq D[\Phi].$$

2) Сглаживание допустимой функции Φ в области G_{r_0} , внешней к кругу $r \leq r_0$). Мы заменяем Φ допустимой функцией Ω , которая совпадает с Φ в круге $r \leq r_0$, причем функция $\omega = \Omega + S$ должна быть гармонической в подобласти $G_{r_0} : r > r_0$, иметь на окружности $r = r_0$ те же граничные значения, что и функция $\Phi + S$ и, наконец, решать задачу

$$D_{G_{r_0}}[\varphi] \equiv D_{r_0}[\varphi] = \min$$

для заданных на окружности $r = r_0$ значений $\varphi = \Phi + S$. Существование функции ω было установлено в § 5 гл. I.

Из неравенства $D_{r_0}[\omega] \leq D_{r_0}[\varphi]$ мы снова получаем

$$D[\Omega] \leq D[\Phi].$$

Так как $\Omega = \Phi$ в круге $r \leq r_0$, достаточно доказать это неравенство для интеграла, распространенного на область G_{r_0} . Но

$$D_{r_0}[\Omega] = D_{r_0}[\omega] + D_{r_0}[S] - 2D_{r_0}[\omega, S]$$

и

$$D_{r_0}[\Phi] = D_{r_0}[\varphi] + D_{r_0}[S] - 2D_{r_0}[\varphi, S].$$

Пользуясь минимальным свойством функции ω и вспоминая граничные условия: $\omega - \varphi = 0$ на окружности $r = r_0$ и $\partial S / \partial r = 0$ на окружности $r = a$, мы находим $D_{r_0}[\omega - \varphi, S] = 0$; вычитая затем второе соотношение из первого, получаем нужный результат:

$$D_{r_0}[\Omega] - D_{r_0}[\Phi] = D_{r_0}[\omega] - D_{r_0}[\varphi] \leq 0.$$

После такой подготовки мы отправляемся от произвольной минимизирующей последовательности Φ_n и заменяем эту последователь-

1) Заметим, что разрывность Φ на окружности $r = a$ в процессе сглаживания сохраняется,

ность другой, $\Psi_n = \psi_n - S$, получаемой сглаживанием Φ_n в круге $r \leq \beta < \alpha$, где β — фиксированная постоянная. Так как $D[\Psi_n] \leq D[\Phi_n]$, то последовательность Ψ_n снова является минимизирующей и

$$D[\Psi_n - \Psi_m] = D[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0$$

при $n, m \rightarrow \infty$. Сжимаемая область интегрирования в круг $r \leq \beta$ (фиг. 7), в котором Ψ_n гармонична, и вспоминая условие, что $\Psi_n = 0$ в начале координат, мы заключаем по лемме 1.3б, что функции Ψ_n равномерно сходятся к гармонической функции Ψ в круге радиуса $\beta' < \beta$. Более того, по лемме 1.3б $D_\beta[\Psi - \Phi_n] \rightarrow 0$, где D_β обозначает интеграл Дирихле, распространенный на круг $r \leq \beta$.

Второй шаг состоит в замене минимизирующей последовательности Ψ_n другой последовательностью Ω_n , получающейся из Ψ_n сглаживанием в области $G_{\alpha'}$, внешней к кругу $r = \alpha' \leq \beta'$. Функции $\Omega_n = \omega_n - S$ снова образуют минимизирующую последовательность, и если обозначить через $D_{\alpha'}$ интеграл Дирихле по области $G_{\alpha'}$, то будем иметь

$$D_{\alpha'}[\Omega_n - \Omega_m] = D_{\alpha'}[\omega_n - \omega_m] \rightarrow 0$$

при $n, m \rightarrow \infty$, где ω_n — гармонические в области $G_{\alpha'}$ функции. Далее, так как $\alpha' \leq \beta'$, значения $\Omega_n(\alpha', \theta) = \Psi_n(\alpha', \theta)$ сходятся равномерно. Отсюда следует (см. примечание на стр. 28), что последовательность ω_n равномерно сходится в области $G_{\alpha'}$ к гармонической функции $\omega = \Omega + S$, для которой по лемме 1.3б

$D_{\alpha'}[\omega - \omega_n] = D_{\alpha'}[\Omega - \Omega_n] \rightarrow 0$. Последнее соотношение можно формулировать в более общем виде: $D_{\alpha'}[\Omega - \Phi_n] \rightarrow 0$ для любой минимизирующей последовательности Φ_n , совпадающей с Ψ_n в круге $r \leq \alpha'$.

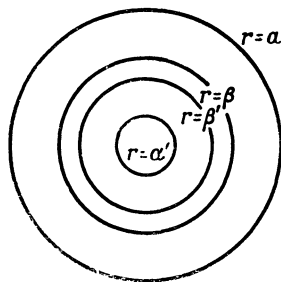
Функция U , при $r \leq \alpha'$ совпадающая с функцией Ψ , а при $r > \alpha'$ — с функцией Φ , также является допустимой и

$$D[U - \Phi_n] = D_{r < \alpha'}[\Psi - \Phi_n] + D_{\alpha'}[\Omega - \Phi_n] \rightarrow 0.$$

Отсюда, как и в п. 3 § 5 гл. I, получаем

$$D[U] = \lim D[\Phi_n] = d.$$

Таким образом, функция U решает вариационную задачу II, следовательно, функция u гармонична всюду в области G , кроме начала координат, где она имеет заданную особенность. Кроме того, выполняется соотношение (2.1) и u определяется однозначно и независимо от выбора радиуса α .



Фиг. 7.

2. Непрерывная зависимость решения от области¹⁾

Теорема 2.1. Пусть G_n — последовательность подобластей G , сходящаяся к этой области, и $U_n = u_n - S$ — решение вариационной задачи II для G_n (особенности остаются фиксированными при изменении n). Тогда функции U_n и u_n в области G сходятся соответственно к функциям U и u , причем сходимость $u_n - u = U_n - U$ к нулю равномерна в любой замкнутой части области G . Функция U решает вариационную задачу II для области G .

Доказательство. Сходимость последовательности G_n к G означает, что каждая точка G является точкой почти всех областей G_n . Для наших целей достаточно принять, что сходимость монотонна²⁾, т. е. что G_n является подобластью G_{n+1} .

Допустимые функции и точные нижние грани для областей G_n мы будем обозначать индексом n . Если d — точная нижняя грань интеграла вариационной задачи для области G и Φ_k — минимизирующая последовательность для этой области, то функции Φ_k , очевидно, являются допустимыми и в вариационной задаче для подобластей G_n ; следовательно, мы имеем

$$d_n = D_n[U_n] \leq D_n[\Phi_k] \leq D[\Phi_k].$$

Оставляя n фиксированным и устремляя k к бесконечности, так что $D[\Phi_k] \rightarrow d$, мы получаем

$$d_n \leq d.$$

Точно таким же образом находим

$$d_n \leq d_m, \quad m > n,$$

так как U_m является допустимой функцией в вариационной задаче для G_n . Следовательно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \delta \leq d.$$

Далее, для $m > n$ и для функции $\zeta = U_n - U_m$ в области G_n получаем

$$d_m \geq D_n[U_m] = D_n[U_n - \zeta] = D_n[U_n] + D_n[\zeta] - 2D_n[U_n, \zeta].$$

Так как по минимальному свойству (2.3) функции U_n имеем $D_n[U_n, \zeta] = 0$, то

$$d_m \geq d_n + D_n[\zeta].$$

Но $d_m \rightarrow \delta$ и $d_n \rightarrow \delta$ при $m, n \rightarrow \infty$, следовательно, $D_n[\zeta] \rightarrow 0$. Отсюда заключаем, что для любой замкнутой подобласти G' из G

1) Непрерывная зависимость решения от положения и направления дипольной особенности — факт очевидный, он вытекает из свойства компактности гармонических функций.

2) Отправляясь от монотонного приближения области G , легко доказать теорему о непрерывной зависимости и без этого ограничения.

интеграл $D_{G'}[\zeta]$, или $D_{G'}[u_n - u_m]$ стремится к нулю при n и m , стремящихся к бесконечности. Так как $U_n = u_n - S = 0$ в начале координат, то по лемме 1.36 отсюда следует сходимость последовательности u_n к гармонической функции u , а также равномерная в любой замкнутой подобласти G' из G сходимость к нулю последовательности $u - u_n$ и ее первых производных. На основании полунепрерывности интеграла Дирихле для гармонических функций (лемма 1.1) мы имеем для $U = u - S$

$$D[U] \leq \lim d_n \leq d,$$

и так как U — допустимая функция в вариационной задаче для G , то

$$D[U] = d.$$

Это и доказывает теорему.

§ 3. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ НА ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

В этом параграфе мы будем изучать конформное отображение области G , осуществляемое аналитической функцией $w = u + iv = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ (u обозначает функцию, построенную в предыдущем пункте).

1. Отображение k -связных областей. Рассмотрим сначала k -связную область G , ограниченную k граничными кривыми или, в более общем случае, связными множествами граничных точек $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Имеет место

Теорема 2.2. Аналитическая функция $w = u + iv = f(z)$ конформно отображает k -связную область G на полную плоскость w с исключенными k отрезками, параллельными оси u (некоторые из таких „граничных разрезов“ могут сводиться к точкам). Это отображение однозначно обратимо. Выбор произвольной точки z_0 области G и комплексных постоянных $\sigma \neq 0$ и λ вполне определяет отображающую функцию, которую можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\sigma}{z - z_0} + \lambda + (z - z_0) R(z),$$

где $R(z)$ — правильная аналитическая в области G функция.

Доказательство. Функция u решает задачу о минимуме интеграла $D_{K^*}[\varphi]$ для области K^* , внешней к окружности k , и для функций φ , принимающих на k те же значения, что и u , поэтому по доказанному в § 8 гл. I можно утверждать, что $f(z)$ является в области G однозначной аналитической функцией и что ее мнимая часть принимает на граничных компонентах γ , постоянные значения c_ν . Пусть $h = \xi + i\eta$ — любая постоянная, причем $\eta \neq c_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, k$. Докажем сначала, что уравнение $f(z) - h = 0$ имеет в области G

одно и только одно решение z . Пусть $\gamma_v^{(\varepsilon)}$ — последовательность кусочно гладких простых замкнутых кривых области G , стремящихся к γ , при $\varepsilon \rightarrow 0$, и $\beta_v^{(\varepsilon)}$ — последовательность их образов, которые снова являются замкнутыми (но не обязательно простыми) кривыми плоскости $w = f(z)$. При достаточно малом ε кривые $\beta_v^{(\varepsilon)}$ сколь угодно близки к отрезкам $v = c$, и имеют положительное расстояние от точки h . Разность числа нулей и числа полюсов функции $f(z) - h$ в подобласти G_ε из G , ограниченной кривыми $\gamma_v^{(\varepsilon)}$, выражается формулой

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \sum_v \int_{\gamma_v^{(\varepsilon)}} d \ln [f(z) - h].$$

При достаточно малом ε точка $w = h$ лежит вне всех петель, образованных кривыми $\beta_v^{(\varepsilon)}$, и, следовательно, правая часть последнего соотношения обращается в нуль, ибо она представляет собой полное изменение аргумента вектора, указывающего из точки h в произвольную точку кривой $\beta_v^{(\varepsilon)}$ при полном обходе совокупности этих кривых. Таким образом, $N = P$, и так как функция $f(z) - h$ имеет в G_ε один полюс в точке O , то она имеет там и один нуль.

Отсюда следует, что каждая точка h плоскости $w = f(z)$, за возможным исключением точек прямых $v = c$, является образом одной и только одной точки области G . Образ B области G должен быть k -связной областью, следовательно, граница B состоит из k разрезов, причем каждый разрез лежит в конечной области, ибо в окрестность бесконечно удаленной точки отображается лишь окрестность начала координат. Отсюда и следует, что функция $f(z)$ осуществляет требуемое отображение.

Для доказательства единственности определения отображающей функции $f(z)$ примем, не нарушая общности, что $z_0 = 0$, $\lambda = 0$ и $\sigma = 1$; первым двум условиям можно удовлетворить с помощью параллельного переноса, а третьему — с помощью поворота и растяжения системы координат. Пусть функция $f^*(z)$, отличная от построенной выше функции $f(z)$, также осуществляет конформное отображение G на плоскость с разрезами и в окрестности начала координат представляется в виде $f^*(z) = 1/z + zR^*(z)$, где $R^*(z)$ — правильная аналитическая функция.

Разность $W = \rho + i\tau = f(z) - f^*(z)$ является аналитической во всей области G функцией, для которой граничные значения τ постоянны на каждой граничной компоненте γ_v . Рассмотрим теперь эту разность в зависимости не от переменной z , а от переменной w :

$$W = f(z) - f^*(z) = H(w).$$

Очевидно, что эта разность правильна всюду в области B , включая бесконечно удаленную точку (образ начала координат O), причем ее мнимая часть τ постоянна на каждом разрезе β_v .

Единственность мы докажем при помощи тех же рассуждений относительно аргумента $H(w) = h$, которыми пользовались выше. Мы получим, что $H(w) = h \neq 0$ для всех точек h области B за возможным исключением точек ее границы. Так как функция $H(w)$ правильна всюду в B , то отсюда следует, что $H(w) = \text{const}$, и единственность отображающей функции доказана.

Другое доказательство основано на следующем общем замечании: если однозначная функция $H(w) = \rho + i\tau$ правильна, ограничена и не постоянна в области B плоскости w , то граница подобласти B , в которой функция τ отлична от заданного постоянного значения (принимаемого этой функцией), должна проходить сколь угодно близко к границе β области B . В противном случае граница этой подобласти содержала бы замкнутую кусочно аналитическую кривую L , лежащую внутри B , на которой $\tau = \text{const}$ и нормальная производная $d\tau/dn$ не меняет знака и не обращается тождественно в нуль. Следовательно, на L касательная производная сопряженной гармонической функции ρ не меняла бы знака и эта функция не могла бы быть однозначной при непрерывном продолжении вдоль L . Таким образом, если τ_0 — значение, принимаемое функцией τ в области B , то в нашем случае τ_0 необходимо должно совпадать с одним из постоянных граничных значений τ на разрезах β , так что кривая $\tau = \tau_0$ должна состоять лишь из одного граничного разреза. Это невозможно, и потому τ , а следовательно, и $W = \rho + i\tau$ постоянны в области B . Но $W = 0$ при $w = \infty$, что и доказывает единственность отображения.

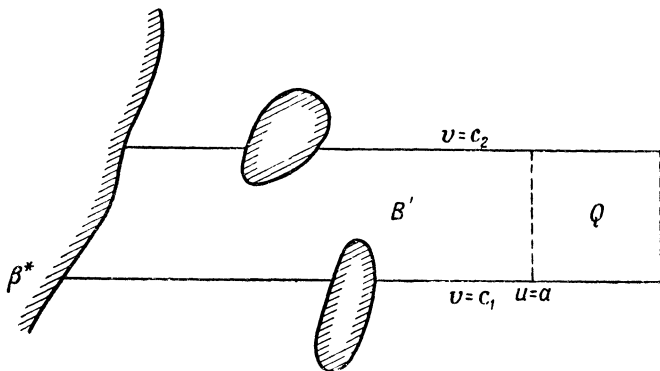
В дальнейшем мы распространим доказанную теорему на более широкие классы областей G . Однако результат можно привести и здесь, ибо он получается в точности таким же методом, каким мы пользовались.

Теорема существования конформного отображения на плоскость с разрезами остается справедливой и для k -связных областей G , расположенных на римановых поверхностях с конечным числом листов. После того как в следующем параграфе мы подробно изучим общий вопрос об отображении римановых областей, этот результат вряд ли будет нуждаться в дополнительном обосновании.

2. Отображение на плоскость с разрезами областей бесконечной связности. Решение вариационной задачи для дипольной функции $w = f(z)$, данное в § 2, можно провести не только в случае областей конечной связности. Построение функции u и доказательство однозначности функций v и $u + iv = f(z)$ остаются в силе также для областей бесконечной связности. Интересно отметить, что для областей бесконечной связности дипольный потенциал также отображает область G на плоскость с разрезами B , получаемую из полной плоскости $w = u + iv$ исключением бесконечного числа параллельных отрезков прямых $v = \text{const}$.

Однако это обобщение уже не достигается непосредственным повторением рассуждений, проведенных в случае k -связных областей,

Чтобы придти к нему, мы будем рассматривать G как предел последовательности областей G_n конечной связности. Отобразим G_n на плоскость с разрезами B_n посредством функции $w = f_n(z)$ с особенностью типа $1/z$ в фиксированной точке O . В соответствии со сказанным в п. 2 § 2 последовательность функций $f_n(z)$ сходится к аналитической функции $f(z)$. Известно, что если функции $f_n(z)$ отображают G_n на плоские области и $f_n(z) \rightarrow f(z)$, причем $f(z) \not\equiv \text{const}$, то $f(z)$ отображает G на плоскую область B плоскости w^1). В нашем



Фиг. 8.

случае условие $f(z) \not\equiv \text{const}$ выполняется вследствие наличия особенности $1/z$. Область B , очевидно, имеет ту же связность, что и G .

Чтобы убедиться в том, что B представляет собой плоскость с разрезами, мы докажем, что любая связная компонента β^* границы B состоит из точек с одинаковыми ординатами. Образом окрестности точки O в области B является окрестность точки $w = \infty$; отсюда заключаем, что граница β области B целиком лежит в конечном круге радиуса a с центром в точке $w = 0$. Если v не постоянна для точек компоненты β^* , то β^* должна пересекаться с каждой прямой некоторого семейства $v = c$, $c_1 < c < c_2$ (фиг. 8). Рассмотрим участки этих прямых от точки $u = \infty$ до первой точки пересечения с β^* (для таких точек, очевидно, $|u| \leq a$), не принимая в расчет возможных пересечений с частями границы B , не связанными с β^* .

1) Если G' — надлежащим образом подобранная замкнутая подобласть G , лежащая в G_n при достаточно больших n , и C — кусочно гладкая граница G' , то в силу условия $f(z) \not\equiv \text{const}$ можно считать, что $f(z) \neq h$ на C для заданного значения h (этого можно достичь, немного расширив в случае надобности G'). Мы имеем

$$N - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln [f(z) - h] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln [f_n(z) - h],$$

в последний интеграл равен 0 или 1. Следовательно, уравнение $f(z) - h = 0^1$ в области G' имеет одно или не имеет ни одного решения.

Лежащие в B части прямых, для точек которых $u < a$, образуют подмножество B' области B . Воспользуемся теперь вариационным условием (2.1), которое после конформного отображения на плоскость w принимает вид

$$\iint_B \zeta_u \, du \, dv = 0 \tag{2.1a}$$

(мы воспользовались инвариантностью условия (2.1) относительно конформных отображений). Равенство (2.1a) справедливо для любой кусочно гладкой функции $\zeta(u, v)$, обращающейся в нуль в окрестности точки $w = \infty$ и имеющей конечный интеграл $D[\zeta]$.

Обозначим через Q квадрат

$$a \leq u \leq a + c_2 - c_1, \quad c_1 \leq v \leq c_2$$

и примем, в частности, что

$$\zeta = \begin{cases} (v - c_1)(v - c_2) & \text{в } B', \\ (v - c_1)(v - c_2) \frac{a + c_2 - c_1 - u}{c_2 - c_1} & \text{в } Q, \\ 0 & \text{в } B - B' - Q. \end{cases}$$

Так как $\zeta_u = 0$ в B' , то (2.1a) сводится к равенству

$$\iint_Q \zeta_u \, du \, dv = 0.$$

Но это равенство невозможно, ибо ζ_u не меняет знака в Q . Полученное противоречие и доказывает наше утверждение относительно β^* , а следовательно, доказывает и теорему об отображении.

Для областей бесконечной связности утверждение о единственности отображения уже не справедливо. Это заметил впервые Кёбе, который доказал, что рассматриваемая вариационная задача обладает следующим характерным свойством: границу β области B можно окружить конечным числом кривых, таких, что общая площадь, ограниченная ими, сколь угодно мала; иными словами, граница β представляет собой множество емкости 0.

Доказательство этого утверждения получается почти непосредственно из вариационного условия $D[u, \zeta] = 0$, справедливого для функций ζ , обращающихся в нуль в окрестности начала координат. Если G_ε обозначает область конечной связности, ограниченную, скажем, ломаной γ_ε и стремящуюся монотонно к области G при $\varepsilon \rightarrow 0$, а D_ε — интеграл Дирихле для G_ε , то непосредственно видно, что

$$D_\varepsilon[u, \zeta] \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбирая функцию ζ равной u всюду, кроме окрестности начала координат O , и применяя формулу Грина, находим

$$\sum_{\gamma_\varepsilon} \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \sum_{\gamma_\varepsilon} \int u \frac{\partial v}{\partial s} ds \rightarrow 0,$$

где s обозначает длину дуги вдоль γ_ε . Сумма, стоящая слева, представляет собой полную площадь, ограниченную образом β_ε многоугольника γ_ε в плоскости (u, v) . Найденное соотношение и доказывает утверждение о емкости границы β .

Легко построить область с разрезами, граница которой имеет отличную от нуля емкость. Такова, например, область, получаемая из полной плоскости удалением отрезков, для которых $0 \leq u \leq 1$ и v принимает все значения из некоторого совершенного всюду плотного множества положительной меры. Такую область по доказанному выше можно конформно отобразить на область с разрезами, граница которой имеет емкость 0. Приведенный пример показывает, что в случае областей бесконечной связности единственность отображения без дополнительных ограничений, налагаемых на область B , не имеет места. Однако этот вопрос мы не будем изучать в настоящей книге.

3. Полу плоскость с разрезами. Модули. Вернемся к областям G конечной связности k . Соответствующая область B зависит от $3k$ параметров — длин k разрезов и координат их левых концов. Однако мы можем еще выбрать полюс $f(z)$ с заданным вычетом σ в произвольной точке z_0 области G . Отображающая функция должна иметь вид

$$w = f(z) = \frac{\sigma}{z - z_0} + \lambda + (z - z_0) R(z),$$

где $R(z)$ — правильная в области G функция. Это показывает, что три комплексных параметра z_0 , σ , λ или шесть действительных параметров для отображающей функции можно фиксировать произвольно, так что, вообще говоря, остается лишь $3k - 6$ существенных параметров, или модулей¹⁾.

Такая нормализация областей с разрезами не позволяет выяснить геометрический смысл всех $3k - 6$ модулей. Мы получим геометрически более ясную интерпретацию этих модулей, изменив немного нормальные области, — вместо плоскости мы будем рассматривать полу плоскость с разрезами. Мы получим такую область, как конформный образ области G , если поместим особую точку O на одну из граничных линий и в качестве направления диполя выберем направление касательной к этой линии. Тогда образом линии будет бес-

¹⁾ В случае $k = 0$ и $k = 1$ число существенных параметров, как мы знаем, равно соответственно 0 и 1.

конечная прямая $v = \text{const}$, скажем, ось u , а образом области G — верхняя полуплоскость с исключенными $k - 1$ конечными отрезками.

Плоскость с разрезами B простым преобразованием можно перевести в полуплоскость с разрезами S . Отражая B в каком-либо отличном от точки сечения β_k , мы получаем двулистную риманову поверхность \bar{B} с $2k - 2$ граничными разрезами, симметричными относительно отрезка β_k , который состоит теперь из внутренних точек \bar{B} . Полученную область \bar{B} можно отобразить¹⁾ на плоскость с разрезами \bar{S} при помощи функции, которая имеет особенность на β_k и симметрична относительно этого отрезка. Область \bar{S} симметрична относительно действительной оси и (внутренний) отрезок β_k переходит в действительную ось. Область G при этом отображении, очевидно, переходит в верхнюю половину S области \bar{S} , что и требовалось.

Линейным преобразованием $w = u + iv = az + b$ с действительными коэффициентами a и b можно достичь того, что левый конец некоторого разреза, отличного от β_k , перейдет в заданную точку, скажем, $u = 0, v = 1$. Так как точка O тоже может занимать на β_k любое заданное положение, то доказана

Теорема 2.3. Любую k -связную область G плоскости z ($k > 1$) можно конформно отобразить на нормированную полуплоскость с разрезами S , ограниченную действительной осью $v = 0$ и лежащими в верхней полуплоскости $k - 1$ прямолинейными разрезами, левый конец одного из которых совпадает с точкой $u = 0, v = 1$. Кроме того, бесконечно удаленную точку оси u можно считать соответствующей произвольной заданной граничной точке G .

Это отображение зависит от $3k - 6$ параметров. Заметим, что геометрическую форму области S описывают $3k - 5$ параметров, но задание положения граничной точки G , соответствующей точке $w = \infty$, налагает еще одно дополнительное условие, уменьшающее на единицу число степеней свободы.

Единственность отображения доказывается в точности так же, как в п. 1.

4. Соответствие границ. Отображение открытых областей автоматически порождает соответствие между их граничными точками. Рассмотрим сначала ограниченную плоскую область G или для общности подобласть G' этой области и образ B' этой подобласти при отображении G на B ; для простоты мы будем в дальнейшем писать G и B вместо G' и B' . Если граничная точка Q является пределом последовательности точек P_1, P_2, \dots области G , то образы P_n^* точек P_n стремятся к предельным точкам на границе B .

¹⁾ См. замечание в конце п. 1; подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 4.

Совокупность всех этих предельных точек мы поставим в соответствие точке Q и рассмотрим такое же соответствие для обратного отображения.

Если Q является изолированной граничной точкой области G , то ей соответствует одна граничная точка B , т. е. рассматриваемый разрез сводится к точке. Это вытекает из того, что функция $f(z)$ ограничена и правильна в окрестности точки Q за возможным исключением самой этой точки и, следовательно, она имеет определенный предел при $z \rightarrow Q$.

Дальнейший анализ поведения функции $f(z)$ на границе не связан ни с ее минимальным свойством, ни с тем, что граница G состоит из разрезов; он основан лишь на конечности интегралов Дирихле функций u и v .

Теорема 2.4. Если функция $w = f(z) = u + iv$ осуществляет отображение области G плоскости z , в состав границы которой входит жорданова дуга C , на область B плоскости w , причем C переходит в жорданову дугу C^* , например в разрез, то эта функция устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие точек C и C^* .

Доказательство. Теорема является следствием леммы 1.4. Введем полярные координаты r, θ с полюсом в точке Q дуги C и рассмотрим интеграл

$$2 \iint (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \iint (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy = M(a),$$

распространенный на часть области G , для которой $r \leq 2a$. Интеграл представляет удвоенную площадь этой части, следовательно, он существует и $\varepsilon^2(a) \equiv M(a)$ стремится к нулю при $a \rightarrow 0$. Заметим, что

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \geq u_s^2 + v_s^2,$$

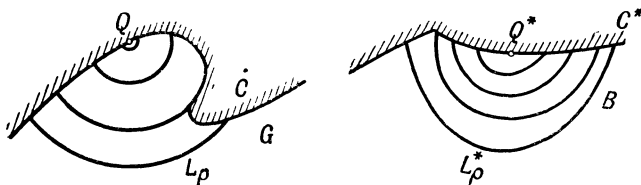
где $s = r\theta$. В предположении, что Q не является изолированной граничной точкой, можно выбрать столь малое значение ρ , что множество $r \leq \rho$ точек G или часть этого множества образует односвязную область G_ρ , ограниченную дугой окружности L_ρ и частью C_ρ дуги C , причем Q служит одной из граничных точек G_ρ . Далее, для $\rho < 2a$ мы имеем

$$\iint_{G_\rho} (u_s^2 + v_s^2) ds \leq \varepsilon^2(a).$$

Следовательно (см. доказательство леммы 1.4), для достаточно малого a существует радиус ρ , $a \leq \rho \leq 2a$, такой, что

$$\int_{L_\rho} (u_s^2 + v_s^2) ds \leq \frac{\varepsilon^2(a)}{a}. \quad (2.6)$$

Теперь рассмотрим последовательность a_ν значений a , сходящуюся к нулю при $\nu \rightarrow \infty$. Ей соответствует сходящаяся к 0 последовательность радиусов ρ_ν , для которых справедливо неравенство (2.6), и последовательность вложенных друг в друга подобластей G_{ρ_ν} области G , ограниченных кривыми $L_{\rho_\nu} + C_{\rho_\nu}$. Образы G_{ρ_ν} также представляют собой вложенные друг в друга односвязные подобласти B_{ρ_ν} области B , ограниченные образами $L_{\rho_\nu}^*$ дуг L_{ρ_ν} и частями $C_{\rho_\nu}^*$ дуги C^* . Граничные точки C^* , связанные с Q , заведомо принадлежат всем дугам $C_{\rho_\nu}^*$.



Фиг. 9.

В силу (2.6) и неравенства Буняковского — Шварца мы получаем следующую оценку для длины $l_\nu^* = \int_{L_{\rho_\nu}^*} \sqrt{u_s^2 + v_s^2} ds$ дуги $L_{\rho_\nu}^*$:

$$l_\nu^{*2} \leq 2\pi\rho_\nu \frac{\varepsilon^2(a_\nu)}{a_\nu} \leq 4\pi\varepsilon^2(a_\nu).$$

Отсюда следует, что длина l_ν^* стремится к нулю при $\rho_\nu \rightarrow 0$, а потому стремится к нулю и расстояние между концами жордановых дуг $C_{\rho_\nu}^*$. Диаметр этих дуг также стремится к нулю, и так как области G_{ρ_ν} вложены друг в друга, то существует одна и только одна точка, общая всем $C_{\rho_\nu}^*$, она и соответствует точке Q . Так как проведенное доказательство справедливо и для обратного отображения, то теорема доказана.

Следует подчеркнуть, что наш метод позволяет выяснить поведение отображения на границе и в случае нежордановых дуг. Рассмотрим, например, случай, когда область G ограничена нежордановой кривой, а ее образ B представляет собой плоскость с разрезами. Граничной точке Q^* области B может теперь соответствовать не одна точка дуги C , а целое множество Π , которое называется „простым концом“¹⁾ области G . Повторяя проведенные выше рассуждения, мы приходим к выводу, что все точки Π являются общими граничными точками последовательности вложенных друг в друга

¹⁾ См. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М. — Л., 1950, стр. 402. — *Прим. перев.*

односвязных областей G_{p_i} , отсекаемых от области G последовательностью кривых, длины которых стремятся к нулю. Дальнейший анализ показывает, что между простыми концами и точками разрезов существует взаимно однозначное соответствие. Доказательство этого предложения почти очевидно, но мы не будем им здесь заниматься [8, 5, 44].

§ 4. РИМАНОВЫ ОБЛАСТИ

1. Введение. При построении дипольного потенциала u мы считали G плоской областью. Однако напрашиваются широкие обобщения. Применяемые нами методы позволяют построить потенциал u и конформное отображение на плоскость с разрезами для значительно более широкого класса так называемых *римановых областей*. При этом мы встречаемся лишь с одним новым обстоятельством — если рассматриваемая риманова область G ненулевого рода, то потенциальная функция v , сопряженная с функцией u , неоднозначна и образом этой области являются области с разрезами нового типа, которые мы рассмотрим в § 7.

Построение функции u с помощью принципа Дирихле основано на следующих свойствах области G :

а) G состоит из конечного или счетного множества *ячеек* и их границ. Ячейка определяется как односвязная область, топологически эквивалентная кругу, причем отображение этой области на круг конформно всюду, кроме, быть может, изолированных точек. (Ячейка может, следовательно, содержать точки разветвления конечного порядка.) Кроме того, необходимо, чтобы при этом отображении граница ячейки взаимно однозначным образом соответствовала окружности.

Если область G состоит из счетного множества ячеек, то мы можем рассматривать ее как предел монотонной последовательности подобластей G_n , каждая из которых состоит из конечного числа ячеек и общих границ двух смежных ячеек.

б) Каждая точка G является внутренней точкой некоторой ячейки. Иными словами, не только точки, лежащие внутри ячеек, составляющих область G [см. свойство (а)], но и граничные точки этих ячеек являются внутренними точками *других* ячеек, целиком принадлежащих G . Эти последние ячейки, конечно, пересекаются с ячейками, описанными в (а).

Сначала мы установим принцип Дирихле для каждой ячейки в отдельности, причем граничные значения будем считать заданными или частично свободными. Свойство (а) области G служит при этом для того, чтобы определить интеграл, распространенный на эту область, и для того, чтобы в каждой ячейке можно было посредством сглаживания минимизирующих последовательностей построить потенциальную функцию u . Свойство (б) существенно для аналитического

продолжения построенной функции u из каждой ячейки в смежную с ней.

Решение граничной задачи и доказательство существования дипольного потенциала u не требуют никаких других свойств рассматриваемых областей. Как мы видели, для доказательства существования конформного отображения плоской области G на плоскость с разрезами нужно еще потребовать лишь однозначности гармонической функции v , сопряженной с u . Однако для римановых поверхностей G ненулевого рода функция v оказывается неоднозначной. Тем не менее, как мы увидим в § 7, для таких областей можно доказать существование отображения на области с разрезами, правда, несколько более общего типа.

Свойства (а) и (б) являются характеристическими для римановых областей. Прежде чем сформулировать точное абстрактное определение римановой области, мы рассмотрим подробнее частные случаи, которые имеют наибольшее значение для наших целей.

1) *Риманова поверхность* G , расположенная над плоскостью $z = x + iy$, обладает свойствами (а) и (б). Ячейки, образующие G , представляют собой односвязные плоские области, ограниченные жордановыми кривыми (возможно, содержащие бесконечно удаленную точку), или совокупность конечного числа конгруэнтных кругов, связанных точкой разветвления, которая расположена в их центре. Очевидно, что точки области G , лежащие на границе составляющих эту область ячеек, можно погрузить в другие ячейки того же типа, содержащие точки многих ячеек.

2) *Полиэдрические области*. Построение дипольного потенциала u и отображения на области с разрезами применимо также к полиэдрическим областям. Полиэдрическая область G составляется из ячеек, каждая из которых представляет собой грань некоторого многогранника или часть такой грани. Если x и y — декартовы координаты на грани, соответствующей некоторой ячейке, то переменное $x + iy = z$ мы будем рассматривать как *локальный комплексный параметр*. Любая точка P , лежащая на ребре многогранника, но не в его вершине, является граничной точкой двух смежных ячеек Z_1 и Z_2 . Чтобы погрузить P в третью ячейку, мы поворачиваем ячейку Z_2 вокруг общего ребра Z_1 и Z_2 так, чтобы обе ячейки вместе составили плоскую ячейку $Z_1 + Z'_2$. Точка P содержится в плоской ячейке $Z_1 + Z'_2$, и, следовательно, мы можем рассматривать $Z_1 + Z_2$ как ячейку¹⁾ многогранника, содержащую эту точку. (Отображение $Z_1 + Z_2$ на $Z_1 + Z'_2$ представляет собой конгруэнцию, т. е. конформное отображение; углы, конечно, измеряются на поверхности.)

1) Если часть общего ребра лежит на границе области G , то отображение $Z_1 + Z_2$ связывается лишь вдоль той части ребра, которая лежит внутри G и содержит точку P ; это обеспечивает односвязность полученной ячейки.

Аналитически это означает, что в ячейках, примыкающих к точке P , мы выбираем локальный параметр так, что общее ребро этих ячеек служит осью x , абсциссы x точек ячеек измеряются параллельно ребру, а ордината y выражается расстоянием до него.

Интеграл Дирихле мы снова определим как сумму интегралов, распространенных на отдельные плоские ячейки; каждый интеграл вычисляется в соответствующих локальных координатах. Функция точки P на поверхности называется гармонической, если она гармонична относительно локальных координат на каждой ячейке. Аналитическая функция $u + iv$ определяется очевидным образом, такая функция осуществляет отображение, конформное в каждой ячейке.

Вершины V многогранника являются граничными точками ячеек Z , состоящих из круговых секторов (достаточно малого) радиуса ρ с центром в вершине V , причем стороны секторов сходятся в этой вершине. Чтобы убедиться в том, что эти секторы образуют ячейки, обладающие свойством (а), мы подвергаем каждый сектор конформному отображению вида $z' = z^\alpha$, где z обозначает локальный комплексный параметр в этом секторе, причем вершина V служит началом координат и показатель α , одинаковый для всех секторов, выбирается так, чтобы сумма центральных углов всех полученных после отображения секторов равнялась 2π и они образовывали на плоскости z' круг Z' радиуса $\rho' = \rho^\alpha$. Этот круг Z' является образом области Z на многограннике, конформным всюду, кроме вершины V . Следовательно, Z представляет собой ячейку определенного выше типа.

Таким образом, мы получаем следующее утверждение: *любую область G рода нуль на многограннике можно взаимно однозначно отобразить на плоскую область с разрезами, причем это отображение всюду непрерывно и конформно всюду, кроме вершин многогранника.*

3) *Кривые поверхности в пространстве.* Результаты предыдущих параграфов применимы также к любой кривой поверхности G в пространстве, обладающей тем свойством, что в достаточно малой окрестности каждой ее точки можно ввести изометрический параметр и, следовательно, отобразить эту окрестность на плоскую область. Ячейками Z для такой поверхности G служат односвязные области, конформно эквивалентные плоским кругам. Функцию φ точки P на поверхности G в каждой ячейке Z можно рассматривать как функцию $\varphi(x, y)$ локального параметра (x и y — декартовы координаты, характеризующие положение точки P в плоскости конформного образа Z^* ячейки Z). Интеграл Дирихле функции φ для ячейки Z мы определим как

$$\iint_{Z^*} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy;$$

он является инвариантом по отношению к конформным отображениям Z^* . Интеграл Дирихле для всей поверхности G определяется

как сумма таких интегралов, распространенных на совокупность неперекрывающихся ячеек, составляющих G . Гармонические функции на G понимаются как функции, гармонические относительно локальных параметров x и y в плоскости конформного образа Z^* ячейки Z^1).

Существование дипольного потенциала и доказывается обычным способом, и мы получаем: *теорема существования отображения остается справедливой и для областей G нулевого рода, расположенных на кривых поверхностях, если окрестность каждой их точки допускает конформное отображение в малом на круг. Иными словами, различные локальные отображения можно заменить одним конформным отображением всей области G в целом на плоскую область с параллельными разрезами так, что переменное $x + iy$ окажется однозначным всюду в G .*

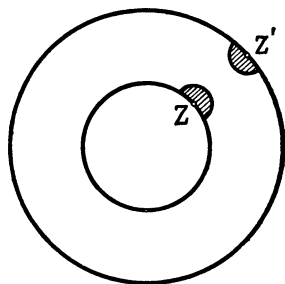
4) *Области, определенные отождествлением границ.* В геометрической теории функций часто рассматриваются римановы области в более широком смысле, например:

а) Область G представляет собой параллелограмм на плоскости z , у которого соответствующие точки противоположных сторон отождествлены, т. е. принято условие, что любая аналитическая в G функция принимает в этих точках одинаковые значения.

Такой *параллелограмм периодов* с отождествленными соответствующими точками является замкнутой областью рода 1.

б) Другую замкнутую область G рода 1 мы получим из кругового кольца $\bar{G}: 1 \leq |z| \leq 2$ плоскости z , если каждую точку z на окружности $|z|=1$ отождествим с точкой z' окружности $|z|=2$, для которой $z' = 2z$. Это отождествление означает, что любая функция $f(z)$, определенная в области G , должна удовлетворять условию $f(2z) = f(z)$.

Отождествление границ в примерах (а) и (б) осуществляется конформными отображениями, которые рассматриваются не только внутри плоских областей \bar{G} , но и в полной окрестности каждой их граничной точки. Таким образом, отождествление граничных точек отражается на строении их окрестностей. Применяя такое отображение в примере (б), мы непосредственно видим, что граничные точки G , расположенные на окружностях $|z|=1$ и $|z|=2$, можно включить в ячейку Z , заштрихованную на фиг. 10. На плоскости z ячейка состоит из двух кусков, но эти куски связываются отождествлением граничных точек и их совокупность конформно эквивалентна плоскому



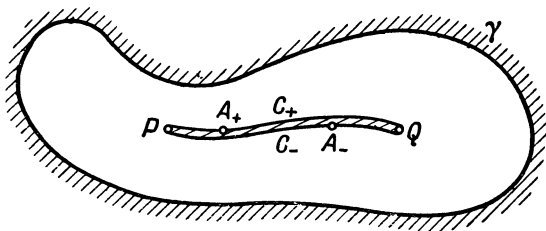
Фиг. 10. Ячейка, образованная отождествлением границ.

1) См. также более общий случай, рассмотренный в § 5.

кругу. К области G из примера (б) применим обычный метод построения потенциала u , то же справедливо и для области из примера (а). Заметим, однако, что род этих областей отличен от нуля и, следовательно, их нельзя отобразить на рассмотренные выше области с разрезами.

2. Теорема склеивания. Области G , получаемые из плоских областей \tilde{G} отождествлением границ, будут часто рассматриваться в этой книге, они приводят к целому ряду замечательных теорем существования отображений. Одной из важных теорем является

Теорема 2.5 (склеивания)¹⁾. Пусть область \tilde{G} плоскости x, y разрезана вдоль аналитической дуги C с концами в точках P и Q и точки A_+ и A_- двух берегов C_+ и C_- разреза связаны аналитическим преобразованием $z_+ = t(z_-)$, оставляющим неподвижными концы



Фиг. 11. Разрез PQ с отождествлением его берегов.

P и Q (фиг. 11). Обозначим через G область, полученную из \tilde{G} — C отождествлением соответствующих точек A_+ и A_- . Кроме кривой γ , ограничивающей область \tilde{G} , граница G содержит еще „вершины“ P и Q . Такую область можно конформно отобразить на плоскую область B , например на область с разрезами, причем так, что C перейдет в аналитическую дугу C' и соответствующие точки A_+ и A_- двух берегов C_+ и C_- разреза C — в одну точку A' дуги C' .

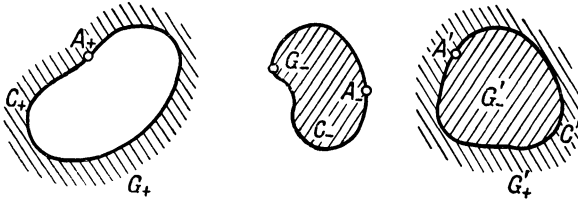
Иными словами, введенное абстрактно отождествление двух берегов разреза C можно осуществить геометрически с помощью конформного отображения: берега разреза C можно *склеить* между собой.

Приведем еще один вариант теоремы склеивания, несколько более простой, чем первый, ибо в нем не выделяется особая роль вершин.

Пусть даны две плоские области G_+ и G_- , представляющие собой внешность замкнутой аналитической кривой C_+ и внутренность дру-

¹⁾ В более сильной форме теорему о склеивании доказал М. А. Лаврентьев [Sur une classe de representations continues, Матем. сб., 42 (1935), 407—424]; его результаты обобщил Л. И. Волковичский [Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, Труды ин-та им. Стеклова, вып. XXXIV (1950)]. — *Прим. перев.*

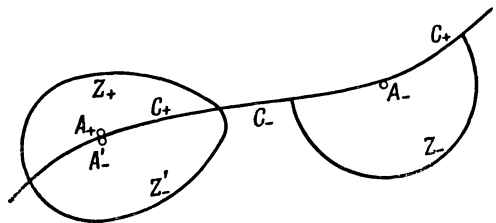
гой такой же кривой C_- (фиг. 12). Пусть еще задано аналитическое преобразование $z_+ = t(z_-)$, устанавливающее взаимно однозначное соответствие точек A_+ и A_- кривых C_+ и C_- так, что посредством отождествления соответствующих граничных точек из G_+ и G_- можно составить одну область G . Тогда существует конформное отображение областей G_+ и G_- соответственно на две области G'_+ и G'_- ,



Фиг. 12. Склеивание двух областей G_+ и G_- .

переводящее C_+ и C_- в одну кривую C' , область G_+ — во внешность C' , а область G_- — в ее внутренность и точки A_+ и A_- — в одну точку A' кривой C' . Иными словами, посредством конформного отображения две отдельные компоненты G_+ и G_- области G можно объединить в одну область G' , т. е. полную плоскость.

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что риманова область G , определенная посредством отождествления соответствующих граничных точек, удовлетворяет условиям (а) и (б) из п. 1 § 4. Для этого мы докажем, что любую точку G можно погрузить в некоторую ячейку, конформно эквивалентную плоской области. Для обычных точек G это очевидно; остается рассмотреть случай „точек“, полученных отождествлением геометрических точек A_+ и A_- кривых C_+ и C_- . Для таких „точек“



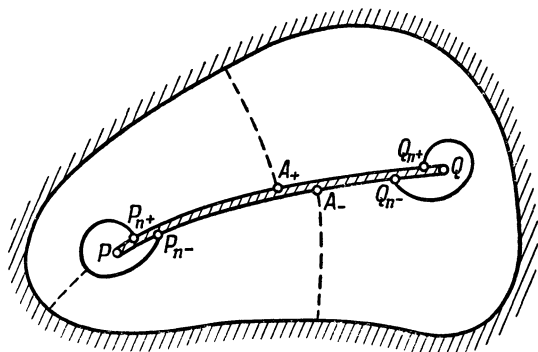
Фиг. 13.

ячейку можно построить, отображая посредством функции $t(z)$ достаточно малую „полуячейку“ Z_- , ограниченную дугой c_- кривой C_- и дугой окружности с центром в точке A_- , на область Z'_- , снова расположенную в плоскости z (фиг. 13 относится к первому варианту теоремы склеивания).

При этом отображении дуга c_- преобразуется в дугу c_+ так, что соответствующие точки переходят друг в друга. Функция $g(z)$, непрерывная в области G и удовлетворяющая условию $g(z_+) = g(z_-)$, остается непрерывной и в области $Z_+ + Z'_-$, где Z_+ — полуячейка, примыкающая к берегу c_+ (см. фиг. 13), если, пользуясь отображе-

нием $z = t(z_-)$, распространить эту функцию из полуячейки Z_- в полуячейку Z'_- . Таким образом, область $Z_+ + Z_-$ можно рассматривать как ячейку римановой области G .

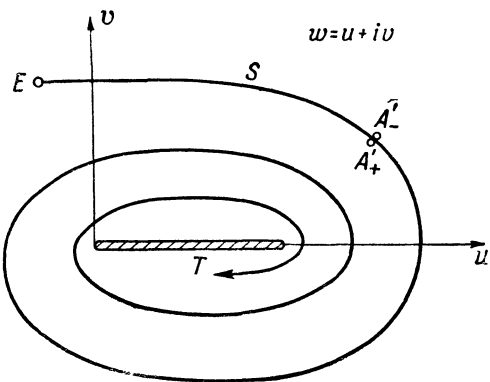
Во втором варианте теоремы склеивания, т. е. в случае, когда кривую S можно покрыть конечным числом таких ячеек, отсюда уже



Фиг. 14.

следует возможность применения к области G нашей теории. В первом варианте, когда имеются „вершины“, т. е. концы P и Q разреза S , мы будем рассматривать область G как предел

последовательности областей G_n , каждую из которых можно разбить на конечное число ячеек способом, указанным на фиг. 14. (G_n получается из области G выбрасыванием окрестностей точек P и Q , она разбита на ячейки пунктирными линиями и разрезом S .)



Фиг. 15.

В предыдущем построении концы P и Q разреза S не принадлежат ни одной ячейке. Следовательно, вообще говоря, нельзя ожидать,

что при отображении G на область B они перейдут в простые точки. Существует пример, в котором таким точкам соответствует целый отрезок. Пусть плоскость w разрезана вдоль аналитической кривой S , начинающейся в точке E и асимптотически навивающейся на отрезок $T: 0 \leq u \leq 1$ оси u (фиг. 15). Плоскость w с разрезом S мы

будем рассматривать как область B , отрезок T является ее простым концом (см. п. 4 § 3). Отобразим B на область \tilde{G} , представляющую собой плоскость z с разрезом γ . Разрезу S вместе с простым концом T соответствует граничный разрез γ области \tilde{G} , причем, как мы знаем, отрезку T соответствует единственная точка γ . Без нарушения общности можно принять, что разрез γ представляет собой отрезок $0 \leq x \leq 1$ оси x и что отрезку T соответствует его конец $x = 0$. При нашем отображении противоположным точкам A'_+ и A'_- берегов разреза S соответствуют различные непротивоположные точки берегов отрезка γ . (Иначе мы получили бы непрерывное и, следовательно, правильное конформное отображение плоскости z с исключенным началом координат на плоскость w с исключенным отрезком T , что невозможно.)

Отождествляя соответствующие точки A_+ и A_- противоположных берегов отрезка γ , мы построим из области \tilde{G} риманову область G . Построенная область допускает отображение на полную плоскость w с исключенным отрезком T , который соответствует одной точке — концу отрезка γ .

Условия, достаточные для того, чтобы „вершинам“ P и Q соответствовали простые точки, дает

Следствие теоремы 2.5. Точки P и Q переходят в изолированные граничные точки области B , если на границе соответствие $z_+ = t(z_-)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \alpha < |t'(z_-)| < \frac{1}{\alpha}, \quad (2.7)$$

где α — положительная и меньшая 1 постоянная.

Доказательство. Не нарушая общности, можно принять, что разрез S представляет собой отрезок $0 \leq x \leq 1$ оси x . Функция $w = u + iv = f(z)$ преобразует точку $P: x = 0$ в замкнутое множество граничных точек области B , скажем, в разрез p . Чтобы убедиться в том, что p состоит из одной точки, мы построим в B замкнутую кривую, окружающую p и имеющую сколь угодно малую длину.

Рассмотрим интеграл

$$M(a) = \iint |f'(z)|^2 r \, dr \, d\theta,$$

распространенный на все точки области G , расстояние которых до точки P не превосходит $2a$. При достаточно малых a особенность $f(z)$ лежит вне области интегрирования, кроме того, $M(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$. Построим окружности $r = \rho$ и $r = \rho^* = t(\rho)$ с центром в точке P , пересекающие отрезок S в соответствующих точках A_- и A_+ , и убедимся в том, что длины их образов, а также образа отрезка DE (фиг. 16) в плоскости w сколь угодно малы при доста-

точно малых a . Отсюда будет вытекать, что кривая, составленная из нижней полуокружности A_-D , отрезка DE и верхней полуокружности EA_+ , замкнута в области G , а ее образ в области B является простой замкнутой кривой сколь угодно малой длины, окружающей множество p . Следовательно, множество p может состоять лишь из одной точки. (Заметим, что кривые, соответствующие построенным выше окружностям, в областях B и G не являются замкнутыми.)

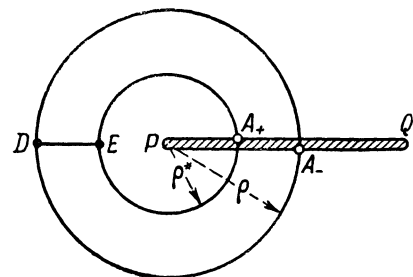
Чтобы закончить доказательство, мы выбираем значение a столь малым, что окружность радиуса $2a$ с центром в точке P пересекает разрез C и не содержит особой точки функции $f(z) = u + iv$. Заметим,

что из условия (2.7) и соотношения $r^* = t(r)$, $0 = t(0)$ с помощью теоремы о среднем вытекает неравенство $\alpha r < r^* < r/\alpha$.

Положив $z = re^{i\theta}$ и $z^* = r^*e^{i\theta}$, где $r^* = t(r)$, будем иметь

$$\int_0^{a\alpha} dr \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 r d\theta < M(a)$$

$$\int_0^{a\alpha} dr^* \int_0^{2\pi} |f'(z^*)|^2 r^* d\theta < M(a).$$



Фиг. 16.

Рассматривая r в соотношении $r^* = t(r)$ как независимое переменное и замечая, что $dr^*/dr = t'(r) > \alpha$, получаем из последнего неравенства

$$\alpha \int_0^{a\alpha} dr \int_0^{2\pi} |f'(z^*)|^2 r^* d\theta < M(a).$$

Объединяя это с полученным выше неравенством, находим

$$\int_0^{a\alpha} dr \left\{ \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 r d\theta + \alpha \int_0^{2\pi} |f'(z^*)|^2 r^* d\theta \right\} < 2M(a).$$

Отсюда заключаем, что существуют промежуточное значение ρ аргумента r , $0 < \rho < a$ и соответствующее ему значение $\rho^* = t(\rho)$ функции $r^* = t(r)$ такие, что для $|z| = \rho$ и $|z^*| = \rho^*$ имеем одновременно

$$\rho \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 d\theta < 2 \frac{M(a)}{a\alpha}$$

и

$$\alpha \rho^* \int_0^{2\pi} |f'(z^*)|^2 d\theta < 2 \frac{M(a)}{a\alpha}$$

(см. аналогичное рассуждение в п. 2 § 4 гл. I).

Длины $L(\rho)$ и $L(\rho^*)$ образов окружностей $r = \rho < a$ и $r = \rho^* < a$ в плоскости w оцениваются так же, как и в гл. I, и мы получаем

$$L^2(\rho) \leq 2\pi\rho \frac{2M(a)}{a\alpha} < 4\pi \frac{M(a)}{\alpha}$$

и

$$L^2(\rho^*) \leq 2\pi\rho^* \frac{2M(a)}{a\alpha^2} < 4\pi \frac{M(a)}{\alpha^2},$$

причем обе величины стремятся к нулю вместе с a . Так как расстояние от точки D до P равно ρ , то расстояние любой точки отрезка DE до отрезка C не превосходит $\eta = \rho\alpha$; для достаточно малого η круг радиуса η с центром в точке z отрезка DE лежит строго внутри области G и внутри круга радиуса $b = \rho(1/\alpha + \alpha)$ с центром в P . Следовательно, по теореме о среднем для $f'(z)$ и неравенству Буняковского — Шварца в любой точке z отрезка DE имеем

$$|f'(z)|^2 < \frac{M(b)}{\pi\rho^2\alpha^2}$$

и для длины λ образа этого отрезка получаем оценку

$$\lambda \leq \overline{DE} \frac{\sqrt{M(b)}}{\sqrt{\pi\rho\alpha^2}},$$

где \overline{DE} — длина отрезка. Но $\overline{DE} = |\rho - \rho^*| = |\rho - t(\rho)| = \rho|1 - t'(\tilde{\rho})|$, где $\tilde{\rho}$ — некоторое значение, заключенное между 0 и ρ . Следовательно, $\overline{DE} < \rho(1 + 1/\alpha)$ и

$$\lambda \leq \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \sqrt{\frac{M(b)}{\pi}}.$$

Так как b стремится к 0 вместе с a , то длины $L(\rho)$, $L(\rho^*)$ и λ сколь угодно малы. Следствие доказано полностью.

§ 5. РИМАНОВЫ ОБЛАСТИ В ОБЩЕМ СМЫСЛЕ. УНИФОРМИЗАЦИЯ

Области G , рассмотренные в предыдущих пунктах, дают примеры, иллюстрирующие общее понятие римановой области. Чтобы прийти к этому общему понятию, мы дополним постулаты (а) и (б) § 4 некоторыми соображениями, подчеркивающими топологическую природу римановского определения аналитической функции в широком смысле.

Если область G^* с помощью некоторого топологического преобразования можно преобразовать в риманову область G или, говоря абстрактнее, если G^* — некоторое двумерное многообразие, непрерывно и взаимно однозначно соответствующее G , то G^* также можно рассматривать как риманову область. Такая точка зрения приводит к изменению постулата (а): конформное отображение ячеек области G на плоские ячейки можно заменить в нем произвольным топологическим

отображением. Мы приходим к следующему абстрактному определению римановой области G :

1) G есть двумерное связное многообразие, т. е.:

а) G представляет собой окрестностное топологическое пространство¹⁾.

б) Каждая точка P из G имеет окрестность, топологически эквивалентную плоскому кругу.

γ) Любые две окрестности N_P и N_Q можно соединить конечной цепочкой окрестностей $N_P = N_0, N_1, \dots, N_n = N_Q$ так, что каждая окрестность N_{k-1} имеет общие точки с N_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

2) С каждой точкой P из G ассоциируется некоторая окрестность N_P и топологическое отображение этой окрестности на круг Z_P плоскости комплексного переменного $z_P = x + iy$, называемого локальным параметром в окрестности N_P так, что выполняется следующее основное условие:

Если окрестности N_P и N_Q точек P и Q пересекаются, то отображение частей ячеек Z_P и Z_Q в плоскостях локальных параметров z_P и z_Q , переводящее друг в друга их точки, соответствующие одной и той же точке пересечения N_P и N_Q , является конформным отображением.

Основываясь на этих свойствах, можно определить в области G аналитические и гармонические функции. Функция φ , заданная во всех точках P области G , называется гармонической или аналитической, если она соответственно гармонична или аналитична относительно локальных параметров x, y или $x + iy = z$. Так как оба эти свойства функций инвариантны относительно конформных отображений, то наше определение, несмотря на его локальный характер, может служить определением в целом. Далее, можно ввести, скажем, понятие гладкой, или аналитической, дуги в области G как множества точек G , образы которого в плоскостях локальных параметров обладают соответствующими свойствами.

Интеграл Дирихле также можно определить с помощью локальных параметров. Для этого мы предположим, что область G допускает разбиение на счетное множество неперекрывающихся ячеек, удовлетворяющее следующим условиям:

а) Каждая ячейка разбиения представляет собой область, содержащуюся вместе с границей внутри некоторой окрестности, или,

1) См. Александров П. С. [1], гл. I. Такое пространство определяется следующими аксиомами: G есть совокупность точек P , каждой из которых соответствует множество N_P , называемое окрестностью P и обладающее следующими свойствами: 1) точка P содержится в любой окрестности N_P ; 2) пересечение любых двух окрестностей P содержит окрестность этой точки; 3) если точка Q лежит в N_P , то N_P содержит некоторую окрестность Q ; 4) две различные точки P и Q обладают непересекающимися окрестностями N_P и N_Q . Формулировка этих аксиом дана Хаусдорфом.

переходя к локальному параметру z , внутри некоторого круга. Можно предположить, что такие ячейки Z являются односвязными областями, ограниченными кусочно аналитическими жордановыми кривыми.

б) Каждая точка области G лежит в одной ячейке или принадлежит границе конечного их числа.

в) Каждая точка области G обладает окрестностью, имеющей общие точки лишь с конечным числом ячеек.

Такое разбиение области G представляет собой ее *триангуляцию*, ибо односвязные ячейки в плоскости z можно заменить конформно эквивалентными им треугольниками. Возможность триангуляции области G не представляет собой дополнительного условия, так как она является простым следствием принятого выше определения.

Интеграл Дирихле $D[\varphi]$ функции φ , распространенный на некоторую ячейку, определяется как интеграл

$$\iint_Z (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy,$$

причем это определение инвариантно относительно замены Z конформно эквивалентной областью. Интеграл Дирихле функции φ , распространенный на всю область G , определяется как сумма интегралов по всем ячейкам триангуляции. Независимость интеграла Дирихле от выбора конкретной триангуляции просто доказывается обычными методами.

Для введенного здесь общего понятия римановой области остаются в силе все рассуждения предыдущего пункта, и, следовательно, в любой римановой области существует дипольный потенциал и. Теорема существования конформных отображений остается справедливой в прежней формулировке, если сопряженная функция однозначна, т. е. если G является римановой областью рода 0. Конечно, свойство конформности всегда относится к отображениям ячеек Z в плоскости локального параметра.

Отображение области G на обычную плоскую область иногда называют *униформизацией*. Оно сводится к тому, что совокупность различных в разных ячейках локальных комплексных параметров заменяется единым комплексным параметром w для всей области.

Следует отметить, что *ориентируемость* римановой области является следствием принятого выше общего определения. В самом деле, рассмотрим ячейку N на поверхности G и соответствующую ей ячейку Z в плоскости z ; в ячейке Z введем ориентацию, скажем, положительную. Рассмотрим теперь цепочку перекрывающихся областей $N = N_0, N_1, \dots, N_n$ и соответствующую ей цепочку ячеек $Z = Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ плоскости z . Так как две смежные ячейки Z_k и Z_{k+1} имеют части, которые связаны конформным отображением, порожденным соответствующими точками в перекрывающихся ячейках области G , то ориентацию ячейки Z можно распространить на все ячейки Z_k и, таким образом, ввести ориентацию во всей области G .

Отсюда следует, что неориентируемые поверхности, такие, например, как известный лист Мёбиуса, нельзя рассматривать как римановы области. С другой стороны, их желательно включить в нашу теорию конформных отображений. Мы сделаем это, перейдя от неориентируемой поверхности \tilde{G} к так называемой *поверхности наложения* G , которая уже является ориентируемой. Чтобы совершить такой переход, мы будем считать каждую ячейку двойной с противоположной ориентацией. Интуитивно мы различаем две стороны неориентируемой поверхности \tilde{G} , как если бы они были разделены тонкой стенкой. Поверхность наложения является римановой областью в обычном смысле.

Для того чтобы на неориентируемой поверхности можно было провести построение дипольного потенциала, достаточно условиться, что функция φ , а следовательно, и потенциал u , зависит только от положения точки P на \tilde{G} и не зависит от ориентации \tilde{G} в окрестности P . Мы увидим, однако, что значения сопряженной функции будут зависеть от ориентации.

§ 6. РИМАНОВЫ ОБЛАСТИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОСРЕДСТВОМ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ЯЧЕЕК

Для наших целей римановы области удобнее всего представлять себе в виде счетного множества односвязных плоских ячеек, ограниченных конечным числом аналитических дуг¹⁾. Каждая точка таких ячеек изображает некоторую точку области G , причем точки различных ячеек изображают различные точки G . Каждую точку z граничной дуги c мы отождествим с точкой z' другой граничной дуги c' , соответствующей первой в силу аналитического преобразования $z' = t(z)$ окрестности первой точки на окрестность второй. Считая, что точки z и z' представляют одну и ту же точку области G , мы можем рассматривать G как риманову область. В самом деле, как мы видели в п. 2 § 4, эти точки можно включить в ячейку, составленную с помощью конформного отображения из частей ячеек Z и Z' , примыкающих к дугам c и c' .

Концы отождествляемых таким образом дуг, или, иначе, *вершины*, вообще говоря, нужно рассматривать как граничные точки области G . Однако имеет место теорема, обобщающая следствие теоремы 2.5 и просто вытекающая из него.

Теорема 2.6. Пусть ячейки $Z_1, Z_2, \dots, Z_r, Z_{r+1} = Z_1$ имеют общую вершину V . Не нарушая общности, примем, что каждая ячейка в окрестности V имеет границу в форме ломаной, составленной из двух прямолинейных отрезков (фиг. 17). Для ячейки Z_i мы обозна-

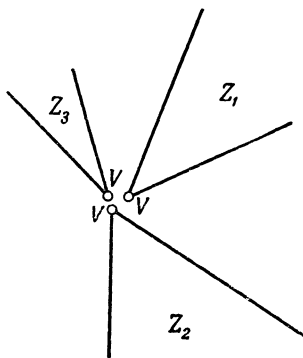
¹⁾ Немного изменяя предыдущие рассуждения, мы можем заменить перекрывающиеся ячейки смежными, примыкающими друг к другу (при аналитическом преобразовании) по аналитической граничной дуге.

чим эти отрезки через γ_i и γ'_i , так что отрезок γ'_i отождествляется с отрезком γ_{i+1} . Предположим, что при этом точка γ'_i , лежащая на расстоянии ρ_i^* от вершины V , отождествляется с точкой γ_{i+1} на расстоянии ρ_{i+1} от V . Тогда, для того чтобы вершину V можно было считать внутренней точкой некоторой ячейки, достаточно существования положительного числа $\alpha < 1$, такого, что в окрестности V имеют место неравенства

$$0 < \alpha < \frac{d\rho_2}{d\rho_1^*}, \frac{d\rho_3}{d\rho_2^*}, \dots, \frac{d\rho_{r+1}}{d\rho_r^*} < \frac{1}{\alpha}$$

или равносильное ему неравенство

$$0 < \alpha < \frac{\rho_2}{\rho_1^*}, \frac{\rho_3}{\rho_2^*}, \dots, \frac{\rho_{r+1}}{\rho_r^*} < \frac{1}{\alpha}.$$



Фиг. 17.

Такую точку V следует рассматривать как внутреннюю точку области G , однако с той оговоркой, что, вообще говоря, отображение области G теряет в этой точке свою конформность.

§ 7. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ НЕНУЛЕВОГО РОДА

1. Введение. Если род римановой области G равен нулю¹⁾, т. е. если любой замкнутой кривой она разбивается на две отдельные части, то, как мы видели, гармоническая функция v , сопряженная дипольному потенциалу u , однозначна в этой области и функция

$$w = u + iv$$

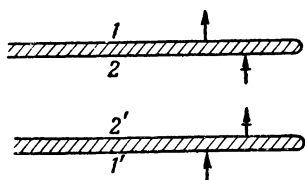
осуществляет ее отображение на плоскость с разрезами. Если же род области G отличен от нуля, то функция u остается однозначной, но сопряженная функция $v = v(P)$ не обязательно возвращается к своему начальному значению, когда точка P описывает замкнутый контур, не разбивающий область G . Конечно, функция $w = u + iv$ теперь уже не может осуществлять конформное отображение G на обычную область с разрезами, род которой равен нулю. Тем не менее мы увидим, что аналитическая функция $w = u + iv$ отображает область G на область B ; последняя представляет собой полную плоскость w с конечными граничными разрезами, параллельными оси u , и, кроме того, с некоторым числом пар параллельных *внутренних* разрезов $v = \text{const}$,

¹⁾ В литературе по конформным отображениям такие области иногда называются *подобными однолистным*; термин оправдывается тем, что эти области можно отобразить на обычные плоские *однолистные* области.

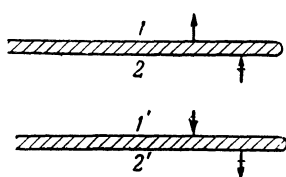
простирающихся от $u = -\infty$ до конечных значений u , причем берега этих разрезов отождествляются так, чтобы область заданную топологическую структуру.

2. Определение областей с разрезами ненулевого рода. Чтобы определить такие области B , мы предположим сначала, что граничные разрезы отсутствуют. Существует два типа пар внутренних разрезов. 1) Пара разрезов $v = \text{const}$ в плоскости u, v , простирающихся от $u = -\infty$ до одного и того же конечного значения u ; четыре берега этих разрезов отождествляются так, как указано на фиг. 18: отождествляются точки с равными абсциссами u , отмеченные одинаковыми значками (*пары первого типа*). 2) Такая же пара разрезов, но отождествление их берегов производится так, как указано на фиг. 19 (*пары второго типа*).

Отождествление берегов разрезов приводит к тому, что пути, подходящие к некоторому берегу, продолжаютсся от соответствующего



Ф и г. 18. Пара разрезов первого типа.



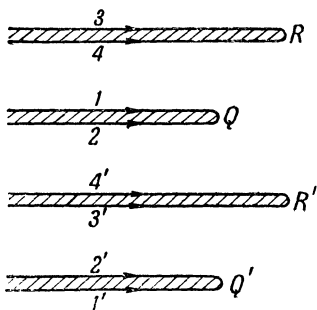
Ф и г. 19. Пара разрезов второго типа.

берега, как указано на фиг. 18 и 19. Область с парой разрезов второго типа неориентируема. Это видно непосредственно из фиг. 22, где показано, что принятое отождествление берегов меняет ориентацию в соседних углах на противоположную. Для пар сечений первого типа ориентация не меняется при отождествлении берегов. Плоские области, содержащие лишь пары разрезов такого типа, ориентируемы.

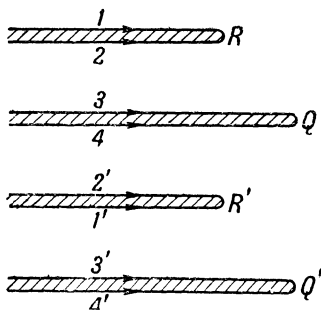
Можно рассечь плоскость вдоль k пар разрезов, отождествляя их берега так, как указано на приводимых ниже чертежах. Получаемые при этом области B не обязательно имеют топологическую структуру замкнутых поверхностей, хотя после отождествления точки берегов разрезов становятся внутренними точками области. Дело в том, что бесконечно удаленные точки разрезов оказываются внутренними точками области B лишь при достаточно правильном упорядочивании этих разрезов.

Если область с разрезами B топологически отображается на риманову область G , причем бесконечно удаленной точке B соответствует внутренняя точка O области G , то замкнутая кривая, окружающая точку O , должна переходить в простую замкнутую кривую, разбивающую область B на две части. Такая кривая на плоскости w должна, очевидно, представляться двумя отдельными кусками, которые соединяются лишь при отождествлении берегов.

Условие того, что бесконечно удаленная точка является внутренней точкой области с разрезами B , можно выразить еще в следующей равносильной предыдущей, но более простой форме. Проведем вертикальную прямую $u = c = \text{const}$, пересекающую все разрезы, продолжая ее при переходе через разрез с сохранением или с изменением направления обхода в зависимости от того, принадлежит ли этот разрез паре первого или второго типа. Если бесконечно удаленная точка является внутренней точкой области B , то наш путь вдоль прямой оказывается замкнутым.



Фиг. 20. Тор, представленный в виде области с разрезами.



Фиг. 21. Бутылка Клейна, представленная в виде области с разрезами.

Это условие устанавливает некоторую связь разрезов между собой; оно не является необходимым, как показывает пример плоскости с одной парой разрезов первого типа (фиг. 18)¹⁾.

Для того чтобы получить допустимую область, необходимо ввести еще по меньшей мере одну пару разрезов. Если вторая пара снова принадлежит к первому типу, то мы получаем ориентируемую поверхность — тор (фиг. 20), если вторая пара разрезов — второго типа, мы получаем неориентируемую поверхность — так называемую „бутылку Клейна“ [неориентируемый тор, см. фиг. 21²⁾]. Заметим, что во втором примере ориентация поверхности сохраняется вдоль замкнутого пути, идущего вдоль разреза второго типа, и меняется вдоль разреза первого типа. С другой стороны, плоскость с одной парой разрезов второго типа представляет допустимую поверхность — проективную плоскость, которую можно наглядно представить в виде круга с отождествленными диаметрально противоположными точками (фиг. 22).

1) Эта область топологически эквивалентна плоскости с двумя исключенными точками.

2) В том, что фиг. 20, 21 и 22 действительно соответствуют обычным наглядным моделям тора, бутылки Клейна и проективной плоскости, мы убедимся на стр. 88—89 с помощью диаграмм линий тока (фиг. 38, 39 и 40).

Замкнутые поверхности описываются топологически эйлеровой характеристикой и указанием на их ориентируемость или неориентируемость. Ориентируемость, как мы говорили выше, определяется отсутствием пар разрезов второго типа. Характеристика зависит от общего числа разрезов. Любую замкнутую поверхность G можно топологически рассматривать как многогранник с некоторым числом F граней, E ребер и V вершин. Тогда эйлерова характеристика поверхности определяется как

$$L = 2 - F + E - V.$$

Если поверхность G ориентируема и имеет конечный род p , т. е. может быть наглядно представлена в виде сферы, к которой прикреплено p „ручек“, то

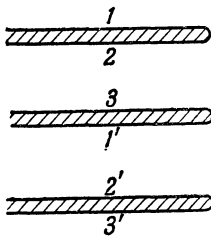
$$L = 2p.$$

Фиг. 22. Пара разрезов второго типа, меняющая ориентацию (представление проективной плоскости).

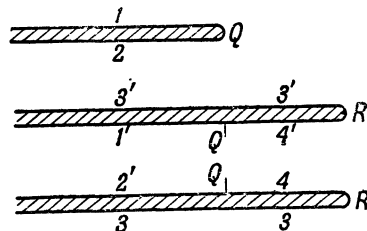
Если G неориентируема и наглядно представляется в виде сферы с p „ручками“ и q „дырами“, заклеенными проективными плоскостями (т. е. кругами с отождествленными диаметрально противоположными точками), то

$$L = 2p + q.$$

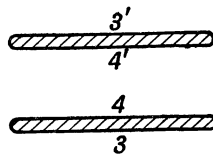
Для замкнутой поверхности, представленной в виде плоскости с s парами разрезов, мы имеем $F = 1$, $E = 2s$ (соответственные берега



Фиг. 23.



Фиг. 24.

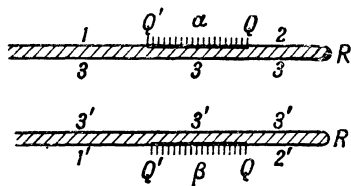


Фиг. 25.

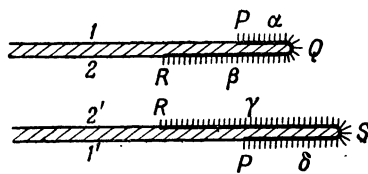
Фиг. 23, 24, 25. Предельные случаи замкнутых областей с разрезами.

отождествлены) и $V = s + 1$ (бесконечно удаленная точка считается за одну из вершин). Следовательно, $L = s$. Таким образом, если харак-

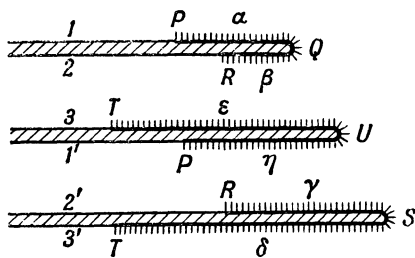
теристика области с разрезами равна L , то область должна иметь точно L пар бесконечных разрезов, например $2r$ пар разрезов первого типа, если она ориентируема и род ее равен r . Расширим теперь наш класс областей с разрезами B , включив в него предельные случаи областей, которые получаются при полном или частичном слиянии различных пар разрезов. (Для примера см. фиг. 23, 24, 25, на которых соответствующие берега обозначены одинаковыми номерами.) Аналогично обстоит дело и с парами разрезов второго типа.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

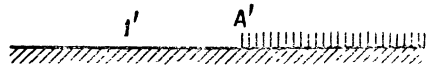
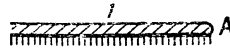
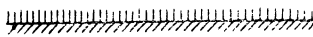
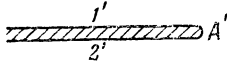
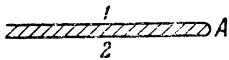


Фиг. 28.

Фиг. 26, 27, 28. Разрезы, несущие отрезки граничных точек.

До сих пор мы рассматривали замкнутые области только с внутренними разрезами, теперь введем r граничных разрезов. Граничным разрезом может служить любой конечный разрез $v = \text{const}$, который либо не совпадает ни с одним бесконечным разрезом (как в предыдущих пунктах), либо совпадает с частью бесконечного разреза, не содержащей его концов (фиг. 26). В последнем случае отождествление берегов бесконечных разрезов прерывается на некоторых конечных отрезках (на фиг. 26 — на отрезках α и β). Кроме того, можно рассматривать случаи, когда граничные разрезы налегают на концы внутренних (бесконечных) разрезов. Здесь отождествление берегов разрезов прерывается у их концов и в силу этого концы внутренних разрезов одной пары могут иметь различные абсциссы. Такой случай изображен на фиг. 27, где граничные разрезы производятся вдоль отрезков α , β , γ и δ . То же самое может иметь место в случае пар разрезов второго типа или в случае, когда отождествляются более чем два разреза, как изображено на фиг. 28.

Как и в случае областей рода 0, можно рассматривать *полуплоскость с разрезами*, скажем, полуплоскость $v > 0$; прямая $v = 0$ служит здесь граничной линией, а в остальном определение остается без всяких изменений. Например, на фиг. 29 представлен лист Мёбиуса, а на фиг. 30 изображен предельный случай, когда бесконечный разрез совпадает с частью прямой $v = 0$; граница на этих рисунках отмечена штриховкой. Для полуплоскости с разрезами можно принять обычную



Фиг. 29.

Фиг. 30.

Фиг. 29 и 30. Представление листа Мёбиуса в виде области с разрезами.

нормировку, которая применялась и в случае $L = 0$, именно, можно задать образ бесконечно удаленной точки на граничном разрезе и фиксировать конец одного внутреннего разреза в точке $u = 0, v = 1$.

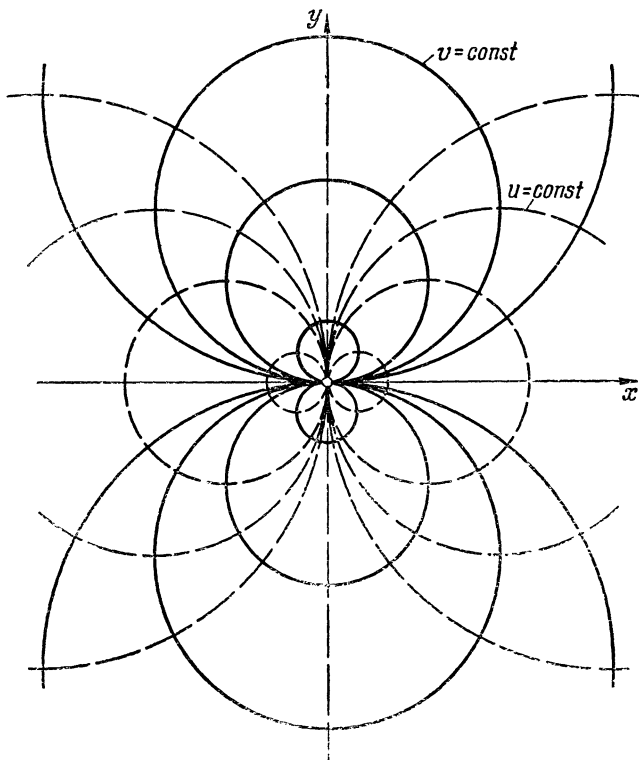
3. Теорема существования. Рассмотрим теперь класс всех областей B с r граничными разрезами и с заданной характеристикой L . Имеет место

Теорема 2.7. Любую риманову область G , а также поверхность наложения неориентируемой области (см. конец § 5) с заданной характеристикой L и с r граничными кривыми можно конформно отобразить на область с разрезами B . Отображение на нормированную полуплоскость определяется однозначно, если задана граничная точка области G , соответствующая бесконечно удаленной точке B .

Доказательство. Отображение попережнему осуществляется аналитической функцией $u + iv = f(x + iy)$ (с особенностью в начале координат O), которая была построена в § 2 и § 3. Как мы уже отметили, при $L > 0$ функция $f(z)$ не может оставаться однозначной в области G , ибо хотя ее действительная часть и однозначна по своему построению, но мнимая часть при обходе замкнутой кривой, не разбивающей область, должна измениться на некоторую величину — на период этой функции. Перейдем к изучению линий тока $v = \text{const}$ функции $f(z) = u + iv$.

Прежде всего мы напомним хорошо известный факт из теории функций комплексного переменного: линии равного потенциала $u = \text{const}$ и линии тока $v = \text{const}$ функции $f(z)$ в окрестности ее полюса O

мало отличаются от двух ортогональных семейств окружностей, причем если вычет $f(z)$ в этом полюсе действителен, то окружности первого семейства касаются оси y , а второго — оси x (фиг. 31). Для постоянных и достаточно больших по абсолютной величине значений c



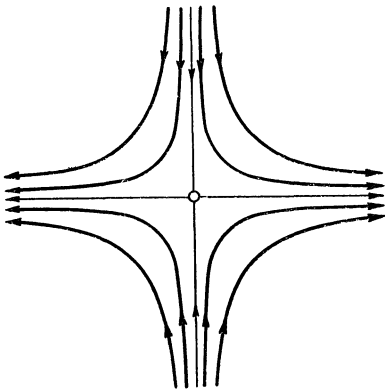
Фиг. 31. Линии тока и линии равного потенциала потока диполя.

кривые $u = c$ представляют собой замкнутые кривые сколь угодно малого диаметра (близкие к окружностям), проходящие через полюс O ; то же самое справедливо и для линий $v = c$.

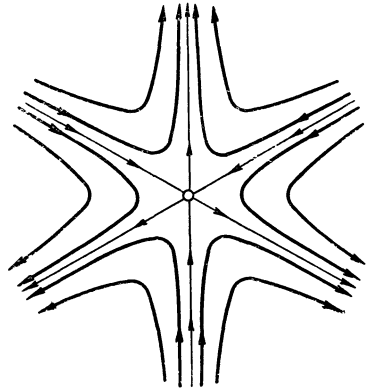
Далее, линии тока $v = c$ являются аналитическими кривыми, вдоль которых значения u меняются монотонно. Исключения составляют только линии тока, проходящие через *критические точки*, т. е. нули производной $f'(z)$. Линии тока в окрестности критической точки Q первого порядка схематически изображены на фиг. 32. Четыре ветви этой линии, выходящие из точки Q , составляют между собой равные углы, стрелки указывают направление убывания функции u . Аналогично, в критической точке Q порядка m [т. е. m -кратном нуле $f'(z)$]

сходятся $2m + 2$ ветви линии тока, составляющие между собой равные углы; случай $m = 2$ изображен на фиг. 33.

Наконец, мы напомним, что любую граничную линию γ области G можно рассматривать как часть линии тока $v = \text{const}$. При изучении поведения линий тока вблизи граничной кривой γ мы можем считать



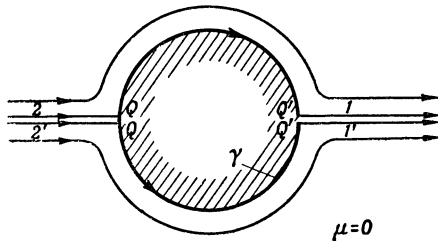
Фиг. 32. Точка разветвления первого порядка.



Фиг. 33. Точка разветвления второго порядка.

эту кривую аналитической, например представлять ее в виде окружности. Для этого достаточно воспользоваться полученным ранее результатом и конформно отобразить двусвязную полосу Z , ограниченную кривой γ и какой-либо другой кривой области G , на плоскую область так, чтобы γ перешла в окружность или разрез и чтобы соответствие границ было взаимно однозначным. Топологическое поведение отображения $u + iv$ вблизи кривой γ полностью описывается его поведением в полосе Z . Пользуясь тем, что $v = \text{const}$ на γ , функцию $u + iv$ можно аналитически продолжить за γ и, следова-

тельно, считать ее правильной на самой этой линии.



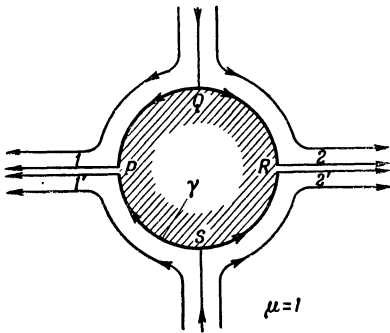
Фиг. 34. Граничная кривая, представляющая простой элемент.

Так как функция u однозначна на γ , то, обозначив через s длину дуги этой кривой и через n — направление нормали к ней, мы будем иметь

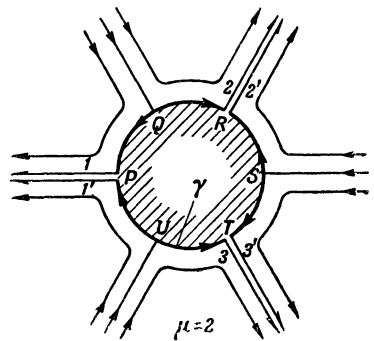
$$\int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0,$$

а отсюда следует, что $\partial v / \partial n$ имеет на γ четное число $2\mu + 2$ нулей. Но $\partial v / \partial s$ на γ обращается в нуль, следовательно, нули нормальной

производной $\partial v/\partial n$ являются критическими точками функции $f(z)$. Случай $\mu = 0$ мы уже рассмотрели в § 3. Его иллюстрирует фиг. 34, где линии тока встречаются линию γ в точке Q , разделяются в этой точке на две ветви, обходящие γ в противоположных направлениях, затем вновь сходятся в точке Q' на γ и идут от γ внутрь области G . В этом случае ($\mu = 0$) мы будем говорить, что γ представляет простой (не критический) граничный элемент области G . Если же $\mu > 0$, то



Фиг. 35.



Фиг. 36.

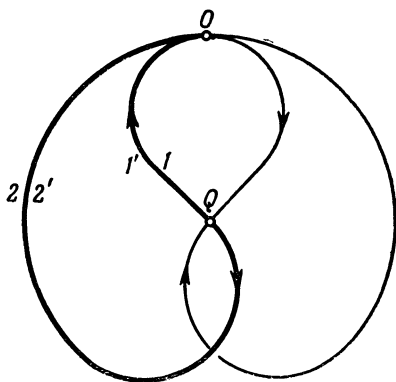
Фиг. 35 и 36. Граничные кривые, представляющие разветвленные элементы.

мы будем говорить, что γ представляет критический граничный элемент порядка μ . Случаи $\mu = 1$ и $\mu = 2$ изображены на фиг. 35 и 36, где опять указано направление убывания функции u . Наконец, мы заметим, что если двигаться в направлении убывания u , то каждая линия тока, даже если она проходит через критические элементы, должна непременно привести к полюсу O , и притом со стороны отрицательных x , ибо кривые $u = c$ для больших отрицательных значений c расположены слева от оси u . Эти линии тока не могут быть замкнутыми, ибо функция u однозначна; они могут оканчиваться лишь в полюсе O , ибо в других точках G функция $f(z)$ правильна.

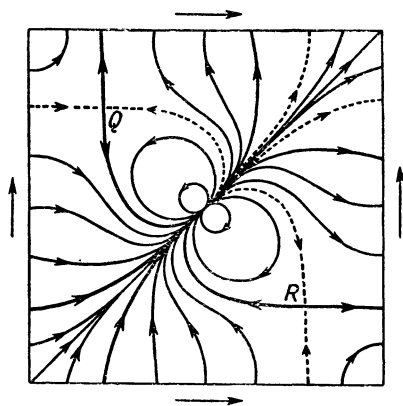
Для упрощения доказательства нашей теоремы существования мы разрежем область G вдоль линий тока так, чтобы получить область G^* , в которой функция v однозначна. Для этого мы рассмотрим все критические точки Q и все критические граничные элементы γ и разрежем область G вдоль всех выходящих из Q и γ ветвей линий тока, вдоль которых функция u убывает. Разрезы кончатся в полюсе O , подходя к нему из левой полуплоскости. С другой стороны, двигаясь от любой точки P области G^* по линии тока в направлении возрастания функции u , мы снова придем к полюсу O , но уже из правой полуплоскости, где нет разрезов. Отсюда мы заключаем, что G^* представляет собой связную область и что через каждую ее точку проходит линия тока, на которой значение u изменяется монотонно от $-\infty$ до ∞ . Таким образом, при отображении $w = f(z)$ эти линии тока

взаимно однозначно преобразовываются в прямые $v = \text{const}$ плоскости u, v и функция $f(z)$ однозначна в области G^* . В самом деле, как мы видели выше, линии тока, проходящие через любую точку P области G^* , непременно подходят к полюсу со стороны $x > 0$, ибо они не могут проходить через критические элементы, но в окрестности полюса, где $x > 0$, значения v определяются единственным образом с точностью до аддитивной постоянной.

Более того, кривые $v = c_1$ и $v = c_2$ для $c_1 \neq c_2$ не имеют в области G^* общих точек кроме полюса O , ибо вблизи O при $x > 0$ они различны, а внутри G^* также не могут пересекаться, ибо там нет критических элементов. Следовательно, область G^* взаимно однозначно отображается на некоторую область B плоскости u, v . Границей этой



Фиг. 37. Линии тока, проходящие через критические точки в проективной плоскости.

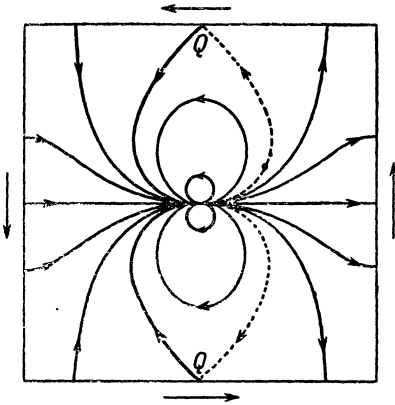


Фиг. 38. Поток диполя на модели тора.

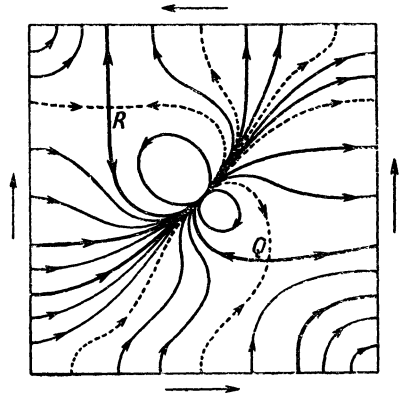
области B служат отрезки $v = \text{const}$. Так как этим отрезкам соответствуют разрезы вдоль критических элементов, то их можно рассматривать как параллельные разрезы в описанном выше смысле. Отождествление противоположных берегов разрезов в области G устанавливается отождествлением тех точек, образы которых в плоскости u, v имеют одинаковые абсциссы u .

Чтобы закончить наш анализ, рассмотрим сначала типичный „общий“ случай простой критической точки Q , лежащей на линии тока, которая не проходит ни через один критический элемент. Разрез через такую точку Q изображен на фиг. 37 жирной линией и отождествленные части берегов разрезов отмечены одинаковыми цифрами. Тонкие линии изображают те ветви проходящей через точку Q линии тока, на которых $u \rightarrow +\infty$. Типичными примерами простых критических точек являются тор и проективная плоскость. Тор, представленный в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сто-

ронами, отображается на область с разрезами посредством эллиптической ζ -функции Вейерштрасса; линии тока для этого случая схемати-



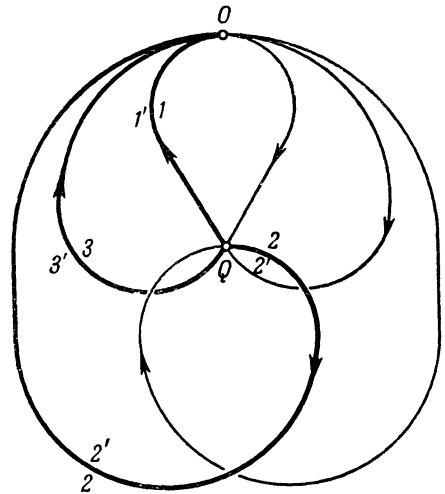
Фиг. 39. Поток диполя на модели проективной плоскости.



Фиг. 40. Поток диполя на модели бутылки Клейна.

чески изображены на фиг. 38. Разрезы, проходящие через две критические точки P и Q , изображены жирными линиями (ср. также фиг. 42). Проективная плоскость, представленная в виде квадрата, у которого каждая сторона отождествлена с перевернутой противоположной стороной, отображается посредством функции с линиями тока, схематически изображенными на фиг. 39 (ср. также фиг. 22). Та же картина для бутылки Клейна представлена на фиг. 40 (ср. фиг. 21).

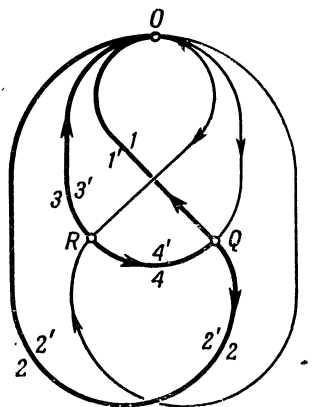
В случае критической точки P высшей кратности, которую можно рассматривать как несколько слившихся простых критических точек, положение остается в основном таким же. Этот случай достаточно полно иллюстрирует фиг. 41, где изображена критическая точка второго порядка. Образ в плоскости u, v дан на фиг. 23.



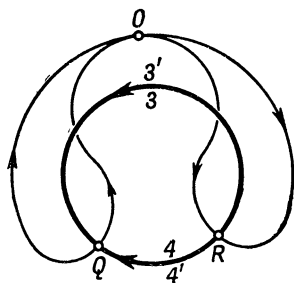
Фиг. 41. Линии тока, проходящие через критические точки второго порядка на торе.

Если ветвь линии тока, на которой значения u убывают, идет от критической точки R к другой критической точке Q , причем обе

точки имеют первый порядок, то, вообще говоря, мы получаем случай, изображенный на фиг. 42; образ в плоскости u, v изображен на фиг. 24. Если, кроме того, и другая часть разреза, проведенного через точку R , проходит через ту же критическую точку Q , то мы получаем случай, изображенный на фиг. 43. Здесь имеется простая замкнутая линия тока, не проходящая через полюс O , которая заменяет две независимые замкнутые линии тока, выходящие из точек R и Q . В плоскости u, v фиг. 43 соответствуют две пары разрезов, которые частично налегают друг



Фиг. 42. Критические линии тока на торе в общем положении.



Фиг. 43. Критические линии тока на торе в симметричном положении.

на друга так, что в налегающих частях разрезы исчезают и остаются лишь разрезы вдоль конечных отрезков (см. фиг. 25). Ясно, что повторение и накопление таких возможностей приводит к склеиванию идущих в бесконечность частей разрезов в плоскости u, v .

Нам остается выяснить отображение границы γ области G . Если граничная кривая γ является частью линии тока, вдоль которой сечение области не производилось, то ее образом служит простой и конечный разрез $v = \text{const}$, не связанный с бесконечными разрезами. Случай, когда γ принадлежит разрезу, проходящему через критическую точку, но сама не является критическим элементом, изображен на фиг. 26 для области B и на фиг. 34 для ее образа (см. стр. 83 и 86). Наконец, случай, когда γ является критическим элементом порядка μ , изображен на фиг. 27 и 28 ($\mu = 1$ или 2) для области B и на фиг. 35 и 36 для ее образа (см. стр. 83 и 86).

Этим и заканчивается доказательство нашей теоремы.

4. Замечания. Полу плоскость с разрезами. В то время как предыдущая теорема легко распространяется на случай бесконечного множества граничных элементов γ , совсем не очевидно, что ее можно обобщить на случай областей с бесконечными характеристиками L

(например, ориентируемых областей бесконечного рода). Можно, далее, заметить, что по теореме 2.2 отображающая функция $f(z)$ определяется однозначно с точностью до аддитивной комплексной постоянной, если заданы ее полюс z_0 и главная часть $\sigma/(z - z_0)$, иными словами, заданы комплексные постоянные z_0 и σ . Таким образом, для заданной области G существует семейство конформно эквивалентных ей областей с разрезами, зависящее от трех комплексных или шести действительных произвольных постоянных.

В приложениях часто бывает удобно выделить определенного „нормированного“ представителя областей с разрезами, конформно эквивалентного данной области. Это можно сделать для незамкнутых областей G по меньшей мере с одним граничным элементом γ . Вместо того чтобы отображать γ на конечный разрез, мы можем отобразить его на всю действительную ось $v = 0$, а область G — на верхнюю полуплоскость $v > 0$. Это делается в точности так же, как в п. 3 § 3 для случая $L = 0$. Без ограничения общности можно предположить, что γ уже представляет собой разрез вдоль оси $u = 0$ (это достигается предварительным конформным отображением части G , примыкающей к γ). Устремим теперь особенность к оси $u = 0$ так, чтобы линии тока в точке O оказались касательными к этой оси. Отражая G относительно граничной линии γ , мы получаем область \tilde{G} , после чего преобразовываем сумму $G + \tilde{G}$ на плоскость с разрезами посредством функции $f(z)$ с особенностью типа $1/z$ на γ . образом G служит при этом область с разрезами B' , аналогичная B , но состоящая только из верхней полуплоскости. Граничный разрез γ преобразуется в действительную ось $v = 0$, а все другие внутренние и граничные разрезы остаются такими же, как раньше. Теперь с помощью растяжения и переноса, параллельного оси u , мы можем ввести требуемую нормировку. Например, полуплоскость с разрезами, служащую конформным образом области G , можно однозначно охарактеризовать, задав вершину ее граничного или внутреннего разреза в точке $u = 0$, $v = 1$.

ЗАДАЧА ПЛАТО

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

С принципом Дирихле и конформными отображениями непосредственно связана так называемая *задача Плато*: найти поверхность G наименьшей площади, натянутую на данную замкнутую жорданову кривую γ . Эта задача издавна привлекала внимание математиков простотой своей постановки и трудностью решения. Если поверхность G в пространстве x, y, z задана посредством функции $z(x, y)$ с непрерывными производными, то площадь этой поверхности A находится по формуле

$$A = \iint_B (1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2} dx dy,$$

где B — область плоскости x, y , ограниченная проекцией β контура γ . Поверхность G является решением граничной задачи для (нелинейного) дифференциального уравнения Эйлера

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

Однако хотя такой подход к решению задачи и привел к значительным успехам [62], все же он оказался довольно громоздким и плохо отражающим существо самой задачи. Следуя ему, приходится исключить из рассмотрения поверхности G , не представляемые функциями $z(x, y)$, но это ограничение совершенно неестественно для геометрической минимальной задачи. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, представленные параметрически посредством вектора $\mathbf{x}(u, v)$ с составляющими x, y, z или x_1, x_2, x_3 , заданными как функции точки (u, v) , изменяющейся в области B плоскости u, v , ограниченной кривой β . Площадь выражается интегралом

$$A(\mathbf{x}) = \iint_B \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_B J du dv, \quad (3.1)$$

где в векторных обозначениях

$$E = x_u^2 = \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u} \right)^2, \quad G = x_v^2 = \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = x_u x_v = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial x_\nu}{\partial u} \frac{\partial x_\nu}{\partial v}, \quad J^2 = EG - F^2.$$

Уравнения Эйлера для варьируемого интеграла (3.1) сводятся к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial J}{\partial x_{ui}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial J}{\partial x_{vi}} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

которая выражает равенство нулю средней кривизны поверхности $x(u, v)$. Поверхности нулевой средней кривизны называются *минимальными поверхностями*, хотя фактически они могут и не доставлять минимума площади при заданных условиях.

Математическое доказательство существования поверхности $x(u, v)$, дающей решение предыдущей системы и ограниченной заданной кривой γ , не удавалось найти в течение долгого времени, хотя экспериментальное решение рассматриваемой задачи осуществляется с помощью простой физической конструкции. Бельгийский физик Плато [60, 61] в своих опытах изучал пленки, образующиеся при погружении в мыльный раствор контуров, согнутых в форме произвольной заданной кривой γ . Положение равновесия таких мыльных пленок соответствует относительному минимуму площади и, таким образом, осуществляет минимальную поверхность, натянутую на контур γ ¹⁾. В честь этих опытов общую задачу исследования минимальных поверхностей, ограниченных заданным контуром γ , и стали называть задачей Плато. Целесообразно отличать от этой общей задачи более частную задачу отыскания поверхностей, имеющих наименьшую площадь среди всех достаточно близких поверхностей, или, выражаясь на языке физики, задачу устойчивого равновесия. Как мы увидим в гл. VI, существуют контуры, ограничивающие неустойчивые минимальные поверхности, площади которых не дают относительного минимума.

В течение XIX века задача Плато была решена для многих частных видов контуров. Достижения в общей теории Римана, Шварца, Вейерштрасса и др. опирались в основном на следующую идею, с очевидностью вытекающую из геометрического смысла задачи: система дифференциальных уравнений относительно функций x_1, x_2, x_3 инвариантна относительно произвольных преобразований параметров u и v . Используя свободу выбора этих параметров, можно упростить нашу систему нелинейных уравнений и свести ее к линейному гармоническому уравнению $\Delta x = 0$ ²⁾. Для того чтобы это сделать, надо допустить, что на поверхности G можно ввести *изометрические параметры* u, v , характеризуемые условиями

$$E - G = 0, \quad F = 0 \quad (3.3)$$

1) Мы не учитываем влияния силы тяжести.

2) Такая линеаризация соответствует введению в дифференциальные уравнения геодезических линий в качестве параметров длины дуги; это — частный случай общего факта теории квазилинейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными (см. [3], гл. III, § 2,1).

или равносильным им условием, что отображение G на область B плоскости u, v конформно. Тогда $J = E = G$ и дифференциальные уравнения (3.2) принимают вид

$$\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \quad \text{или } \Delta x_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Поверхности $x(u, v)$, для которых $\Delta x = 0$, называются *гармоническими поверхностями*.

Гармонические функции $x_\nu(u, v)$ можно рассматривать как действительные части $\operatorname{Re} f_\nu(w)$ аналитических функций

$$f_\nu(w) = x_\nu + i\tilde{x}_\nu$$

комплексного переменного $w = u + iv$ [функция $\tilde{x}_\nu(u, v)$ — гармонически сопряженная с $x_\nu(u, v)$], и, пользуясь уравнениями Коши — Римана, мы находим

$$\varphi(w) = \sum_{\nu=1}^3 |f'_\nu(w)|^2 = \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u} - i \frac{\partial x_\nu}{\partial v} \right)^2 = E - G - 2iF.$$

Следовательно, для гармонического вектора $x(u, v)$

$$\varphi(w) = (E - G) - 2iF$$

является аналитической функцией комплексного переменного $w = u + iv$. Эта аналитическая функция тождественно обращается в нуль для гармонического вектора, представляющего минимальную поверхность. Уравнение

$$\varphi(w) = 0$$

мы будем называть характеристическим уравнением минимальных поверхностей. Оставляя в предыдущих рассуждениях лишь то, что более всего упрощает доказательство, мы приходим к следующему основному определению:

Минимальной поверхностью G называется поверхность, представленная гармоническим вектором $x(u, v)$, для которого

$$\varphi(w) = E - G - 2iF = 0. \quad (3.5)$$

В качестве области B плоскости $w = u + iv$ мы можем выбрать круг $|w| \leq 1$. Задача Плато сводится к решению уравнения $\Delta x = 0$ в круге B при условии, что $\varphi(w) = 0$ и что вектор x отображает окружность $|w| = 1$ на заданный контур γ . После таких упрощений нелинейный характер задачи будет проявляться лишь в граничном условии и условии (3.5).

Хотя соотношения (3.3) выглядят как дополнительные условия, заданные нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка, они на самом деле менее ограничительны. Из эквивалентных им условий (3.5) видно, что они выполняются, если

известно, например, что равны нулю граничные значения функции $E - G$ и что функция $2F$ обращается в нуль хотя бы в одной точке B (в самом деле, тогда характеристическое уравнение $\varphi(\omega) = 0$ справедливо в области B тождественно).

Теория минимальных поверхностей, основанная на предыдущем определении или аналогичных ему, приводит к важным результатам относительно поверхностей, натянутых на контуры простой геометрической формы (таких, как четырехугольники или другие замкнутые ломаные). Уже сравнительно давно Гарнье применил классические методы вариационного исчисления, известные для многоугольных границ, к решению задачи Плато для произвольного контура γ . Полное и достаточно удовлетворительное решение этой задачи было, однако, получено лишь в 1930 и 1931 гг. независимо Радо и Дугласом [30, 62 и 63, гл. V]. Успех был достигнут благодаря применению наряду с классическими методами также и методов современного вариационного исчисления¹⁾.

Гармоничность вектора $x(u, v)$, представляющего минимальную поверхность, указывает на связь между задачей Плато и принципом Дирихле для интеграла

$$D[x] = \frac{1}{2} \iint_B (x_u^2 + x_v^2) du dv = \frac{1}{2} \iint_B (E + G) du dv. \quad (3.6)$$

Естественность этой связи видна из следующего рассуждения.

Из неравенства

$$\frac{E + G}{2} \geq \sqrt{EG},$$

которое обращается в равенство лишь при $E = G$, получается

$$\frac{E + G}{2} \geq \sqrt{EG - F^2},$$

причем и здесь равенство

$$\frac{E + G}{2} = \sqrt{EG - F^2}$$

имеет место лишь при $E - G = F = 0$. Следовательно, для всех поверхностей x справедливо неравенство

$$D[x] \geq A(x), \quad (3.7)$$

¹⁾ Совсем другой подход к решению задачи о минимуме площади с помощью прямых методов вариационного исчисления указан в классической статье Лебега [45]. Позднее Мак-Шэн [48] развил идеи Лебега при весьма общих условиях, наложенных на допустимые поверхности. Однако нельзя забывать, что если расширить понятие решения, т. е. отказаться от условий дифференцируемости, то одного доказательства существования уже недостаточно. Чтобы убедиться в принадлежности построенного решения к более узкому классу „разумных“ функций, практически приходится преодолевать те же трудности и пользоваться теми же методами, которые применяются при отыскании решения в более ограничительных условиях.

которое переходит в равенство

$$D[x] = A(x) \quad (3.7a)$$

лишь при выполнении условий (3.3), т. е. если поверхность, не обязательно являясь гармонической, представляется изометрическими параметрами u и v . Если снова принять, что все рассматриваемые поверхности допускают изометрическую параметризацию, то равенство (3.7a) всегда будет иметь место при надлежащем выборе параметров u и v . Для фиксированной поверхности величина $A(x)$ не зависит от выбора параметров. Интеграл $D[x]$, напротив, зависит от параметризации поверхности, и из неравенства (3.7) видно, что он имеет наименьшее возможное значение в изометрических координатах.

Сопоставляя предыдущие факты, мы приходим к следующему заключению: чтобы найти минимум площади $A(x)$ для всех допустимых векторов, достаточно найти минимум интеграла Дирихле (3.6) при заданных граничных условиях. Вектор, минимизирующий интеграл Дирихле, автоматически решает задачу о минимуме площади, он является не только гармоническим вектором, но также удовлетворяет условиям (3.3) или равносильному им уравнению $\varphi(w) = 0$.

Возможность введения изометрических параметров u и v для всех допустимых поверхностей в приведенных выше рассуждениях остается недоказанной. Однако мы и не будем доказывать возможность такой параметризации, а наши рассуждения будем рассматривать лишь как предварительные. В соответствии со сказанным нашей отправной точкой для строгого исследования задачи о минимуме площади будет служить

Вариационная задача III. Найти минимум интеграла $D[x]$ при заданных условиях на границе.

Мы докажем, что 1) эта задача имеет решение x , 2) решение представляет собой минимальную поверхность и 3) минимальная поверхность является поверхностью наименьшей площади.

Прежде чем перейти к осуществлению этого плана, мы заметим, что значение задачи распространяется за пределы исходной задачи о построении поверхности с наименьшей площадью, натянутой на замкнутый контур. Дуглас заметил, что эту задачу можно так же хорошо поставить и решить для любого числа m координат x_1, x_2, \dots, x_m и что в случае $m = 2$ ее решение равносильно доказательству теоремы Римана о существовании конформного отображения односвязных областей на единичный круг. Кроме того, Дуглас [34] поставил более общую задачу о построении минимальных поверхностей заданной топологической структуры, ограниченных k известными контурами, и дал ее первое решение.

Дуглас сузил класс допустимых векторов вариационной задачи III и рассматривал лишь класс гармонических векторов, для которого интеграл Дирихле $D[x]$ можно выразить только через граничные значения вектора x . Таким образом, задача сводится к некоторой

задаче для функций одного переменного. Однако, как заметил автор и независимо от него Тонелли, решение значительно упростится, если допустить более широкий класс векторов. Более того, указанный подход позволяет решить также и общую задачу Дугласа о минимальных поверхностях высшей топологической структуры (гл. IV), задачи со свободными границами и задачи о неустойчивых минимальных поверхностях (гл. VI).

Эти общие задачи и задачи, смежные с ними, будут рассмотрены в следующих главах. В настоящей главе мы ограничимся изучением задачи Плато для односвязных поверхностей с заданной границей. Мы не только приведем доказательства существования, но проанализируем и другие вопросы, например зависимость решения от начальных данных, т. е. от заданной границы.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКА И РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

1. Определения и обозначения. Мы будем систематически пользоваться следующими определениями и обозначениями. Область изменения параметров u и v в комплексной плоскости $w = u + iv$ мы будем обозначать через B , а ее границу — через β ; в этой главе в качестве области B обычно будет служить единичный круг $|w| < 1$. Минимальную поверхность будем обозначать буквой G и ее заданную границу — буквой γ . Мы назовем *допустимыми* все векторы x , непрерывные в $B + \beta$, кусочно гладкие в B и реализующие непрерывное отображение β на γ , монотонное в следующем смысле: когда граничная точка монотонно описывает β , то ее образ монотонно описывает контур γ . Далее предположим, что для любого допустимого вектора интеграл Дирихле конечен. Совокупность всех таких допустимых векторов мы назовем функциональным пространством \mathfrak{S} . Подпространство гармонических векторов из \mathfrak{S} обозначим через \mathfrak{F} . Всюду в этой главе мы не будем различать поверхности G и изображающие их векторы $x(u, v)$.

Основная вариационная задача формулируется так: *найти допустимый вектор $x(u, v)$, для которого интеграл Дирихле $D[x]$ достигает своего наименьшего значения d .*

А priori не очевидно, что наша вариационная задача имеет смысл, т. е. что существует хотя бы один допустимый вектор. И действительно, нетрудно построить контур γ , для которого интеграл $D[x]$ всегда является бесконечным, если вектор x удовлетворяет условиям непрерывности и имеет заданные граничные значения. Поэтому мы делаем дополнительное предположение о существовании хотя бы одного допустимого вектора. Это предположение, однако, не очень стеснительно, например, оно автоматически выполняется для всех спрямляемых контуров, см. п. 3 § 8.

2. Основная лемма. Решение минимальной задачи. Построение решения вариационной задачи, или, иными словами, доказательство существования решения, основано у нас на важной лемме, по своей формулировке и доказательству напоминающей лемму 1.4. Вместо функций φ мы рассматриваем в ней класс векторов с равномерно ограниченным интегралом Дирихле.

Лемма 3.1. В области B плоскости u, v рассмотрим класс кусочно гладких векторов x , интеграл Дирихле которых равномерно ограничен постоянной M

$$D_B[x] \leq M.$$

Опишем окружность радиуса r с центром в фиксированной точке O и обозначим через C_r дугу или совокупность дуг этой окружности, принадлежащую области B , через s обозначим длину дуги на C_r . Тогда для любого положительного $\delta < 1$ будет существовать значение $\rho, \delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}$, зависящее от x , и такое, что

$$\int_{C_\rho} x_s^2 ds \leq \frac{\varepsilon(\delta)}{\rho}, \quad (3.8)$$

где

$$\varepsilon(\delta) = \frac{4M}{\ln(1/\delta)} \quad (3.9)$$

стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Далее, квадрат длины L_ρ образа C'_ρ совокупности дуг C_ρ в пространстве x, y, z ограничен,

$$L_\rho^2 \leq 2\pi \varepsilon(\delta), \quad (3.10)$$

т. е. колебание $x(u, v)$ на C_ρ не больше $\sqrt{2\pi \varepsilon(\delta)}$.

Доказательство. Если вектор x имеет непрерывные первые производные, то

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} dr \int_{C_r} x_s^2 ds \leq D[x] \leq 2M.$$

Чтобы получить оценку (3.8), достаточно представить левую часть в виде

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} p(r) \frac{dr}{r},$$

где

$$p(r) = r \int_{C_r} x_s^2 ds,$$

и воспользоваться теоремой о среднем интегрального исчисления. Если вектор x только кусочно гладкий, то это рассуждение требует не-

большого уточнения, совершенно аналогичного рассмотренному в гл. I. Соотношение (3.10) вытекает из неравенства Буняковского — Шварца, так как

$$L_p = \int_{\sigma_p} \sqrt{x_s^2} ds.$$

Решение вариационной задачи мы начинаем, как обычно, с построения минимизирующей последовательности допустимых векторов x_1, x_2, \dots , т. е. последовательности, для которой $D[x_n] \rightarrow d$; через d мы снова обозначаем точную нижнюю грань значений $D[x]$. Если мы заменим каждый вектор x_n допустимым гармоническим вектором с теми же граничными значениями на β , то мы получим векторы — обозначим их снова x_n , — тем более образующие минимизирующую последовательность (в силу принципа Дирихле). Мы хотим построить решение x как предел равномерно сходящейся подпоследовательности векторов x_n .

Возможность такого построения основывается на следующем предварительном условии. В силу инвариантности $D[x]$ относительно конформных отображений мы можем с помощью дробно-линейной функции преобразовать единичный круг B плоскости ω в себя так, чтобы точка P перешла в точку Q и вектор $x(P)$ в вектор $y(Q)$, причем $D[x] = D[y]$. Последовательность y_n тогда также будет минимизирующей последовательностью¹⁾. Такая свобода „нормирования“ минимизирующих последовательностей позволяет ввести следующее

Условие трех точек: Любой допустимый вектор x преобразует три фиксированные точки P_1, P_2, P_3 окружности β в три фиксированные точки P'_1, P'_2, P'_3 контура γ .

Условию трех точек можно удовлетворить, заменив каждый допустимый вектор другим, с тем же значением интеграла Дирихле. Новые векторы получаются дробно-линейным преобразованием круга в себя, переводящим три точки Q_1, Q_2, Q_3 в три точки P_1, P_2, P_3 .

Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма 3.2. Граничные значения допустимых векторов x , удовлетворяющих неравенству $D[x] \leq M$ и условию трех точек, равномерно непрерывны. Следовательно, эти граничные значения образуют на β компактное множество; гармонические допустимые векторы образуют множество, компактное на $B \dashv \beta$.

¹⁾ Допустив последовательности дробно-линейных преобразований, переводящих последовательность x_n в последовательность y_n , сходящуюся к вырожденному преобразованию, мы можем получить минимизирующую последовательность, не сходящуюся к решению. Таким образом, нормирование векторов существенно для дальнейшего. Другие способы нормирования, служащие тем же целям, но более удобные в других случаях, см. в гл. IV—VI.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.1 и известным свойством жордановой кривой γ , согласно которому для любого положительного σ существует положительная величина $\tau(\sigma)$, такая, что если Q и Q' — любая пара точек γ , расстояние между которыми не превышает τ , то диаметр одной из двух дуг γ с концами в этих точках не превышает σ . Для данного σ мы выберем δ , $0 < \delta < 1$ так, чтобы величина $2\pi \varepsilon(\delta) = \frac{8\pi M}{\ln(1/\delta)}$ из леммы 3.1 удовлетворяла неравенству $2\pi \varepsilon(\delta) \leq \tau^2$. Тогда для любой точки P на окружности β будет существовать значение ρ , $\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}$, такое, что колебание вектора x на дугах C_ρ окружности с центром в P не будет превосходить $\sqrt{2\pi \varepsilon(\delta)} \leq \tau$.

Согласно условию трех точек для достаточно малых δ , большая из дуг β , которые образуются при пересечении β с C_ρ , содержит по меньшей мере две из трех фиксированных точек P_1 , P_2 и P_3 , следовательно, образ меньшей дуги β является и „меньшей“ дугой γ . Для точек R и R' окружности β , расстояние между которыми не превышает δ , имеем $|x(R) - x(R')| < \sigma$. Это неравенство выражает равностепенную непрерывность граничных значений x , ибо δ зависит только от выбора σ . Равностепенная непрерывность и ограниченность допустимых векторов по теореме Арцела обеспечивают компактность.

Применим эту лемму к нормированной минимизирующей последовательности гармонических векторов x_n и выберем подпоследовательность с равномерно сходящимися граничными значениями (которую снова обозначим через x_n). Так как векторы x_n гармоничны, то мы непосредственно можем заключить, что наша последовательность на $B + \beta$ равномерно сходится к допустимому вектору x , гармоническому в области B .

В силу полунепрерывности снизу интеграла Дирихле (лемма 1.1) имеем

$$D[x] \leq \liminf D[x_n] = d.$$

Так как d — точная нижняя грань $D[x]$, то отсюда следует, что

$$D[x] = d.$$

Таким образом, гармонический вектор x решает нашу вариационную задачу.

3. Замечания. Полунепрерывность. Предыдущие рассуждения на самом деле приводят к несколько более общему результату. Вместо фиксированной кривой γ мы можем рассматривать последовательность непрерывных кривых γ_n , сходящихся к γ в смысле Фреше, т. е. таким образом, что если две последовательности точек P_n и Q_n кривых γ_n сходятся к двум точкам P и Q кривой γ , то и последовательность дуг $P_n Q_n$ кривых γ_n сходится к одной из двух дуг PQ кривой γ . Не обязательно предполагать, что кривые γ_n являются

простыми, можно допустить, что они имеют кратные точки и достаточно малые петли, длина которых в пределе обращается в нуль.

Предположим, что существуют допустимые векторы с конечным интегралом Дирихле для всех кривых γ_n . Рассмотрим теперь последовательность векторов x_n , отображающих окружность β на γ_n и имеющих равномерно ограниченные интегралы Дирихле. Векторы x_n можно нормировать при помощи условия трех точек: трем фиксированным точкам P, Q, R окружности β должны соответствовать три последовательности точек P'_n, Q'_n, R'_n кривых γ_n , сходящиеся к трем фиксированным точкам P', Q', R' кривой γ . В этих предположениях граничные значения векторов x_n образуют компактное множество функций. Доказательство вполне аналогично проведенному в п. 2.

Как и выше, заменяя x_n последовательностью гармонических векторов, мы можем выбрать из нее равномерно сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим через x_n . Обозначив предельный вектор через x , мы еще раз получим

$$D[x] \leq \liminf D[x_n].$$

В частности, можно считать, что векторы x_n дают решение вариационной задачи для контуров γ_n (пусть γ_n — жордановы кривые). Последовательность x_n сходится тогда к вектору x , допустимому в вариационной задаче для контура γ , следовательно, $d \leq D[x] \leq \liminf D[x_n]$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Если d_n является точной нижней гранью интеграла $D[x]$ при условии, что вектор x отображает окружность β на кривую γ_n , то

$$d \leq \liminf d_n.$$

Иными словами, минимум d в рассматриваемой задаче является полунепрерывной снизу функцией кривой γ , если сходимость понимать в смысле Фреше.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МИНИМАЛЬНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ, ДАЮЩЕЙ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Если воспользоваться результатами гл. II, то можно довольно просто доказать, что решение x вариационной задачи III является минимальной поверхностью, т. е. удовлетворяет условию $\varphi(\omega) = 0$. При построении решения x этой вариационной задачи в качестве параметрической области B мы выбирали круг и на его окружности условились фиксировать три точки. Однако так как интеграл Дирихле инвариантен относительно конформных отображений, то наше решение осуществляет минимум относительно более широкого класса

допустимых векторов \mathbf{z} . В частности, мы докажем это для случая некоторых разрывных ¹⁾ векторов.

Рассечем область B вдоль окружности k круга K и в круге введем полярные координаты r и θ . Для любой аналитической периодической функции $\lambda(\theta)$ и параметра ε мы определим функцию $\psi = \theta + \varepsilon\lambda(\theta)$; при достаточно малых ε соответствие между величинами θ и ψ аналитично и взаимно однозначно. Далее мы введем вектор $\mathbf{z}(u, v)$, определенный в области B соотношениями

$$\mathbf{z}(r, \theta) = \begin{cases} \mathbf{x}(r, \psi) & \text{в } K, \\ \mathbf{x}(u, v) & \text{в } B - K. \end{cases}$$

Этот вектор терпит разрыв на окружности k и отображает B снова на область G в пространстве. Мы утверждаем, что

$$D[\mathbf{z}] \geq D[\mathbf{x}],$$

или, что то же самое,

$$D_K[\mathbf{z}] \geq D_K[\mathbf{x}].$$

Ф и г. 44.

Другими словами, вектор \mathbf{x} дает минимум также и для разрывных векторов \mathbf{z} .

Так как векторы \mathbf{x} и \mathbf{z} имеют в $K + k$ непрерывные производные (всех порядков) по переменным u, v, ε , то отсюда можно заключить, что справедливо соотношение ²⁾

$$\frac{d}{d\varepsilon} D_k[\mathbf{z}] = \iint_K (\mathbf{z}_u \mathbf{z}_{u\varepsilon} + \mathbf{z}_v \mathbf{z}_{v\varepsilon}) du dv = 0 \quad (3.11)$$

при $\varepsilon = 0$. Для доказательства достаточно применить теорему склеивания к области B^* , которая получается, если разрезать B вдоль окружности k и отождествить точку θ внешнего берега разреза с точкой $\psi = \theta + \varepsilon\lambda$ внутреннего берега. Полученную риманову область B^* можно конформно отобразить на единичный круг B . Это отображение переводит вектор \mathbf{z} , непрерывный в области B^* , в вектор \mathbf{z}' , удовлетворяющий в B всем условиям допустимости исходной вариационной задачи. Так как в силу инвариантности интеграла Дирихле $D[\mathbf{z}] = D[\mathbf{z}']$ и так как $D[\mathbf{z}'] \geq D[\mathbf{x}]$, то наше утверждение доказано.

¹⁾ Введение таких векторов оправдывается тем, что выражение площади $A(\mathbf{x})$ справедливо и для разрывных параметрических представлений, а также тем, что в рассматриваемых нами случаях выражения $A(\mathbf{x})$ и $D[\mathbf{x}]$ совпадают.

²⁾ Это рассуждение неприменимо ко всей области B , ибо на ее границе производные не обязательно существуют.

Применив к соотношению (3.11) формулу Грина, мы получим равносильное ему соотношение

$$-\iint_K z_\varepsilon \Delta z \, du \, dv + \int_K z_\varepsilon z_r r \, d\theta = 0$$

при $\varepsilon = 0$; оба подынтегральных выражения непрерывно зависят от координат и параметра. При $\varepsilon = 0$ мы имеем

$$z_\varepsilon = \lambda x_\theta, \quad z_r = x_r, \quad \Delta z = 0,$$

так что последнее соотношение принимает вид

$$\int_K \lambda x_r x_\theta r \, d\theta = 0.$$

В силу произвольности функции λ получаем отсюда, что на окружности справедливо равенство

$$x_r x_\theta = 0,$$

или

$$x_r x_s = 0,$$

где s — длина дуги k . Окружность k можно провести через любую точку P области B в любом направлении, следовательно, для любой точки P и любых двух ортогональных направлений s и n мы имеем $x_s x_n = 0$. В частности, мы получаем $x_s x_n = x_u x_v = F = 0$, если направление s параллельно оси u в точке P и $(x_u - x_v)(x_u + x_v) = E - G = 0$, если оно параллельно прямой $u - v = 0$. Соотношение $\varphi(w) = E - G - 2iF = 0$, таким образом, доказано, и наше решение x действительно представляет минимальную поверхность.

§ 4. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

Доказательство соотношения $\varphi(w) = 0$ можно получить и без применения теоремы склеивания и конформных отображений. В приводимом ниже методе используется простое выражение для первой вариации интеграла $D[x]$. Так как это выражение в дальнейшем окажется важным и для других задач, то мы рассмотрим его в несколько более общем виде, чем это необходимо для указанной выше цели. В частности, мы не будем предполагать, что область B фиксирована и односвязна.

1. Вариация в общем пространстве допустимых функций.

Мы будем рассматривать вариации вектора x следующих двух типов:

- а) вариация параметрического представления, оставляющая фиксированной геометрическую поверхность,
- б) вариация самой поверхности ¹⁾.

¹⁾ Для наших ближайших целей необходима лишь вариация типа (а). Вариации типа (б), применяемые к самой поверхности, выражаются с помощью формул (3.19) и (3.20). Мы используем их в гл. VI.

Как всегда в вариационном исчислении, не имеет смысла рассматривать более общие вариации, удовлетворяющие условию допустимости.

Чтобы ввести вариацию типа (а), мы преобразуем область B в себя или в другую допустимую область B' посредством взаимно-однозначного отображения вида

$$\left. \begin{aligned} u &= u' + \varepsilon \Delta, \\ v &= v' + \varepsilon M, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

или, в комплексных обозначениях, где $w = u + iv$, $w' = u' + iv'$,

$$w = w' + \varepsilon (\Delta + iM). \quad (3.12a)$$

Параметр ε можно считать достаточно малым, а Δ и M — непрерывными функциями переменных u , v , ε в области B и переменных u' , v' , ε в области B' , обладающими кусочно непрерывными первыми производными. Далее мы предположим, что абсолютная величина всех первых производных не превосходит общей границы b . Наконец, пользуясь обозначениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta(u', v', 0) &= \lambda(u', v'), \\ M(u', v', 0) &= \mu(u', v'), \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

мы предположим, что справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} |\Delta_{u'} - \lambda_{u'}| < \varepsilon b, & \quad |\Delta_{v'} - \lambda_{v'}| < \varepsilon b, \\ |M_{u'} - \mu_{u'}| < \varepsilon b, & \quad |M_{v'} - \mu_{v'}| < \varepsilon b \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

и аналогичные неравенства для производных по независимым переменным u и v . Тогда мы будем иметь

$$|\Delta_u - \lambda_u| < 3\varepsilon b \quad \text{и т. д.} \quad (3.14a)$$

и

$$|\Delta_u - \lambda_u| < 3\varepsilon b \quad \text{и т. д.} \quad (3.14b)$$

Из наших предположений при помощи несложных вычислений можно получить неравенства для якобиана преобразования

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} - (1 - \varepsilon \lambda_u - \varepsilon \mu_v) \right| &\leq 2\varepsilon^2 (b^2 + b), \\ \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} - (1 + \varepsilon \lambda_{u'} + \varepsilon \mu_{v'}) \right| &\leq 2\varepsilon^2 (b^2 + b). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Мы вводим вариацию (а) вектора x , заменяя этот заданный в области B вектор вектором

$$z(u', v') = x(u, v),$$

заданным в области B' . Обозначив через D^* интеграл Дирихле, распространенный на область B' , мы будем иметь

$$D^*[z] = \frac{1}{2} \int_B \int \{ [x_u(1 + \varepsilon \Delta_{u'}) + x_v \varepsilon M_{u'}]^2 + [x_u \varepsilon \Delta_{v'} + x_v(1 + \varepsilon M_{v'})]^2 \} \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} du dv.$$

Пользуясь неравенствами (3.13), (3.14), (3.14a), (3.14б), (3.15) и неравенством

$$\int_B \int |x_u x_v| du dv \leq D[x],$$

мы получаем основную вариационную формулу

$$D^*[z] = D[x] + \frac{1}{2} \varepsilon V(x, \lambda, \mu) + \varepsilon^2 R. \quad (3.16)$$

Здесь так называемая *первая вариация* V интеграла $D[x]$ определяется формулой

$$V(x, \lambda, \mu) = \int_B \int [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv, \quad (3.17)$$

где для сокращения принято

$$p = x_u^2 - x_v^2, \quad q = -2x_u x_v.$$

Остаточный член R формулы (3.16) оценивается следующим образом:

$$|R| < cD[x],$$

где постоянная c зависит только от величины b , но не от вектора x . Существование (несобственного) интеграла V и, следовательно, интеграла $D^*[z]$ обеспечено, ибо

$$|p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)| \leq 2b(|p| + |q|) \leq 4b(x_u^2 + x_v^2). \quad (3.18)$$

Вообще говоря, нам понадобится только вариация типа (а), т. е. вариация параметрического представления фиксированной поверхности. Все же отметим кратко, что вариацию самой поверхности можно выразить через вектор $t(u', v')$, обращаясь в нуль на границе B' . Для этого заменим вектор x , заданный в области B , вектором

$$z(u', v') = x(u, v) + \varepsilon t(u', v', \varepsilon). \quad (3.19)$$

Предполагая, что интегралы $D[t]$ равномерно ограничены относительно ε , мы находим, что

$$D^*[z] = D[x] + \frac{1}{2} \varepsilon V + \varepsilon D[x, t] + \varepsilon^2 T, \quad (3.20)$$

где вектор \mathbf{t} следует понимать как $\mathbf{t}(u, v, 0)$ и остаточный член T равномерно ограничен, если ограничены интегралы $D[\mathbf{x}]$ и $D[\mathbf{t}]$.

Выражение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D^*[\mathbf{z}] - D[\mathbf{x}]}{\epsilon} = D[\mathbf{x}, \mathbf{t}] + \frac{1}{2} V$$

называется *первой вариацией* интеграла $D[\mathbf{x}]$, соответствующей вариации (3.19) вектора \mathbf{x} . Так как $\mathbf{t} = 0$ на γ , то, как мы видели в гл. I, член $D[\mathbf{x}, \mathbf{t}]$ для гармонического вектора \mathbf{x} обращается в нуль и первая вариация $D[\mathbf{x}]$ совпадает с $\frac{1}{2} V$, если только вектор \mathbf{t} не равен нулю тождественно.

Вектор \mathbf{x} называется *стационарным*, если первая вариация обращается в нуль для всех допустимых вариаций вида (3.19). Так как деформации λ, μ параметрической области и вектора \mathbf{t} не зависят одна от другой, то условие стационарности \mathbf{x} выражается совокупностью условий $D[\mathbf{x}, \mathbf{t}] = 0$ и $V = 0$. Первое из них равносильно уравнению $\Delta \mathbf{x} = 0$. Поэтому, если допустить, что вектор \mathbf{x} является гармоническим¹⁾, то для доказательства тождества $\varphi(\omega) = 0$ достаточно доказать соотношение $V = 0$. При этом можно сосредоточить свое внимание лишь на вариации представлений границы γ посредством граничных значений вектора \mathbf{x} на кривой β .

2. Первая вариация в пространстве гармонических векторов.

Проведенное выше доказательство соотношения $\varphi(\omega) = 0$ мы дополним замечанием, представляющим и самостоятельный интерес. Решая задачу Плато, Дуглас рассматривал только гармонические векторы \mathbf{x} . Мы увидим, что такое сужение класса допустимых векторов не отражается на форме первой вариации V ; точнее, если \mathbf{x} — вектор, гармонический в области B , и \mathbf{x}' — вектор, гармонический в области B' , имеющих те же граничные значения, что и первый вектор, $\mathbf{x}'(u', v') = \mathbf{x}(u, v)$, и определяемый преобразованием²⁾ (3.12), но, вообще говоря, отличный от $\mathbf{z}(u', v')$, то все же справедливо соотношение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D^*[\mathbf{x}'] - D[\mathbf{x}]}{\epsilon} = \frac{1}{2} V(\mathbf{x}, \lambda, \mu).$$

Иными словами, в пространстве \mathfrak{F} гармонических векторов мы получаем для первой вариации $D[\mathbf{x}]$ то же самое выражение, какое выше было найдено в более широком пространстве \mathfrak{S} в предположении, что

¹⁾ Если вектор \mathbf{x} не обязательно гармонический и если мы потребуем, чтобы вектор \mathbf{t} равнялся нулю, то условие стационарности параметрического представления данной поверхности будет выражаться уравнением $V = 0$. Тогда наши рассуждения приведут не к гармоничности \mathbf{x} , а к соотношениям $p = q = 0$, которые означают, что стационарное параметрическое представление является изометрическим.

²⁾ Заметим, что возможность перехода от \mathbf{x} и \mathbf{x}' с помощью преобразования вида (3.12) не является очевидной.

исходный вектор x является гармоническим. Для доказательства мы заметим, что $D^*[x'] \leq D^*[z]$, так как векторы x' и z совпадают на границе β' области B' , следовательно,

$$D^*[x'] \leq D[x] + \frac{1}{2} \varepsilon V + \varepsilon^2 R. \quad (3.21)$$

Однако мы таким же образом можем отправиться от вектора x' в области B' и преобразовать его в вектор $y(u, v) = x'(u', v')$ с помощью преобразования, обратного (3.12).

Тогда из неравенств (3.14), (3.14а), (3.14б), (3.15) мы получим

$$D[x] \leq D[y] \leq D^*[x'] - \frac{1}{2} \varepsilon V + \varepsilon^2 R'. \quad (3.22)$$

Остаточный член $|R'|$ ограничен, если ограничен интеграл $D[x]$ и, следовательно, если ограничен $D^*[x']$. Объединяя эти два неравенства, мы можем утверждать, что при ε , стремящемся к нулю,

$$\frac{1}{2} V - \varepsilon R' \leq \frac{D^*[x'] - D[x]}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2} V + \varepsilon R.$$

Полученное соотношение доказывает наше утверждение.

Замечание.

В соответствии с инвариантностью интеграла $D[x]$ формула (3.17) для первой вариации V показывает, что $V=0$, если функция $\lambda + i\mu$ аналитична в области B , так что функция $w' = w - \varepsilon(\lambda + i\mu)$ осуществляет конформное отображение B на B' и $\lambda_u - \mu_v = \lambda_v + \mu_u = 0$. Точно так же, если $\lambda + i\mu$ является аналитической функцией w в части B_1 области B и если $B_2 = B - B_1$, то

$$V = \iint_{B_2} [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv, \quad (3.23)$$

ибо, согласно уравнениям Коши — Римана, подинтегральная функция в области B_1 тождественно обращается в нуль.

3. Доказательство минимальности поверхности, представляемой стационарным вектором. Используя выражение V для первой вариации интеграла $D[x]$, мы можем дать очень простое доказательство условия $\varphi(w) = 0$ для решения x нашей вариационной задачи. Очевидно, что если x является минимальной поверхностью, то функция V тождественно равна нулю для всех допустимых функций λ и μ . Обратное, мы увидим, что стационарность вектора x , т. е. выполнение условия $V=0$ вместе с условием гармоничности этого вектора, приводит к соотношениям $p=q=0$, т. е. к соотношению $\varphi(w) = 0$. На самом деле, достаточно принять, что $V=0$ лишь для надлежащим образом выбранного семейства вариаций λ и μ . (Заметим еще раз, что соотношения $p = E - G = 0$ и $q = F = 0$, выражающие изометричность рассматриваемых координат, следуют только из равенства $V=0$;

поверхность x не обязательно должна быть гармонической и не обязательно должна доставлять минимум интеграла Дирихле.)

1) *Доказательство с помощью теоремы Римана о конформных отображениях.* Если воспользоваться теоремой существования отображения односвязных областей, то можно утверждать, что вектор x дает решение вариационной задачи, даже если заменить параметрические области другими, конформно эквивалентными кругам. Например, можно рассматривать области B' , получаемые из круга B преобразованием

$$u' = u + \varepsilon \lambda(u, v), \quad v' = v + \varepsilon \mu(u, v),$$

где λ и μ — произвольные непрерывные функции с кусочно непрерывными первыми производными в $B + \beta$ и число ε столь мало, что соответствие между $B + \beta$ и $B' + \beta'$ взаимно однозначно. Но систему дифференциальных уравнений $\lambda_u - \mu_v = H$, $\lambda_v + \mu_u = K$ можно решить¹⁾ для произвольных функций H и K , кусочно непрерывных в $B + \beta$. Поэтому соотношение $V = 0$ сводится к равенству

$$\int \int_B (pH - qK) du dv = 0,$$

справедливому для произвольных кусочно непрерывных функций H и K , и по основной лемме вариационного исчисления мы получаем $p = q = 0$.

2) *Элементарный вариант доказательства.* Для гармонических векторов x тождество $\varphi(w) = p + iq = 0$ можно вывести из соотношения $V = 0$, используя одно лишь конформное отображение внутренней эллипса на круг. Мы полагаем $\lambda = u$, $\mu = 0$; при этом, очевидно, что область B' является эллипсом и соотношение $V = 0$ сводится к равенству

$$\int \int_B p du dv = 0.$$

По теореме о среднем теории потенциала отсюда следует, что $p = 0$ в центре круга B . Полагая $\mu = 0$, $\lambda = v$, мы таким же образом находим, что $q = 0$ в центре круга, следовательно, $\varphi(w) = 0$ при $w = 0$. Чтобы доказать равенство $\varphi(w) = 0$ для любой точки $w = a$ круга B , мы сначала преобразуем этот круг в себя дробно-линейным преобразованием $w' = (w - a)/(a\bar{w} - 1)$, переводящим точку $w = a$ в центр $w' = 0$. Применим предыдущее рассуждение к преобразованному вектору $x'(u', v') = x(u, v)$, для которого

$$p' + iq' = \varphi'(w') = x_{u'}'^2 - x_{v'}'^2 - 2ix_{u'}'x_{v'}' = (d\tau/d\tau')^2 \varphi(\tau).$$

1) Положив, например, $H = 0$, будем иметь $\lambda = w_v$, $\mu = w_u$, где w — произвольная функция, для которой $w_{uu} + w_{vv} = K$. Любое частное решение этого уравнения дает искомые функции λ и μ .

Так как $D^*[x'] = D[x]$, то x' — также стационарный вектор и, следовательно, $p' + iq' = 0$ при $w' = 0$. Но $(dw/dw')^2 \neq 0$ в B , т. е. $\varphi(w) = 0$ при $w = a$, и наше доказательство закончено.

3) *Доказательство без использования конформного отображения.* Вывод тождества $\varphi(w) = 0$ из соотношения $V = 0$ для гармонических векторов можно провести и без применения конформных отображений. Если γ представляет собой плоскую кривую, то мы получим попутно и доказательство теоремы Римана. Этот метод доказательства теоремы Римана представляет для нас особый интерес, ибо он служит подготовкой к изучению конформных отображений многосвязных областей, которому посвящена гл. V, где мы будем пользоваться аналогичными методами.

Для доказательства мы определим функции Δ и M таким образом, чтобы область B' снова была единичным кругом. Рассмотрим произвольную действительную функцию $\alpha(r, \theta)$ полярных координат r, θ с кусочно непрерывными производными в круге B и определим Δ и M соотношением

$$\Delta + iM = -w \frac{e^{i\epsilon\alpha} - 1}{\epsilon}. \quad (3.24)$$

Отображение, обратное отображению (3.12а), имеет вид $w' = w e^{i\epsilon\alpha}$ и при достаточно малом ϵ отображает окружность \mathfrak{B} на себя взаимно однозначным образом.

Пусть B_r обозначает внутренность окружности β_r радиуса r , концентрической с β . Соотношение $V = 0$ равносильно предельному соотношению

$$\iint_{B_r} [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow 1$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\beta_r} [\lambda(p dv + q du) + \mu(p du - q dv)] \rightarrow 0; \quad (3.25)$$

двойной интеграл обращается в нуль, ибо x — гармонический вектор и p и q — действительная и мнимая части функции $\varphi(w)$ — удовлетворяют условиям Коши — Римана. Соотношение (3.25) можно записать в более удобном виде

$$\text{Im} \int_{\beta_r} (\lambda + i\mu) \varphi(w) d\tau \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

при $r \rightarrow 1$, где символ Im обозначает мнимую часть комплексного числа. В частности, для вариации вида (3.24) мы имеем

$$\lambda + i\mu = -i\tau\alpha(r, \theta),$$

и так как $d\omega = i\omega d\theta$, то соотношение (3.26) принимает вид

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta) \omega^2 \varphi(\omega) d\theta \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

при $r \rightarrow 1$.

Функция $\omega^2 \varphi(\omega)$ — правильная аналитическая в области B , так что $\operatorname{Im} \omega^2 \varphi(\omega) = H(r, \theta)$ — гармоническая в этой области функция. Мы рассмотрим фиксированную точку Q круга B с полярными координатами ρ, ψ и построим ядро Пуассона

$$K(r, \theta; Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}.$$

Определим допустимую вариацию $\alpha(r, \theta)$ для значений $r_1 > \rho$, положив

$$\alpha(r, \theta) = K(r, \theta; Q) F(r, \theta),$$

где функция $F(r, \theta)$ задается следующим образом:

$$F(r, \theta) = \begin{cases} 1, & r > r_1, \\ \frac{2r - \rho - r_1}{r_1 - \rho}, & r_1 \geq r \geq \frac{\rho + r_1}{2}, \\ 0, & \frac{\rho + r_1}{2} > r. \end{cases}$$

Для такой вариации α соотношение (3.27) примет вид

$$\int_0^{2\pi} K(r, \theta; Q) H(r, \theta) d\theta \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow 1$. Так как левая часть здесь представляет собой значение гармонической функции в точке Q , то $H(\rho, \psi) \rightarrow 0$ и, следовательно, $H(\rho, \psi) = 0$ для любой точки Q круга B .

Таким образом, правильная аналитическая функция $\omega^2 \varphi(\omega)$ имеет в круге B тождественно равную нулю мнимую часть и, следовательно, представляет собой действительную постоянную. Но $\omega^2 \varphi(\omega) = 0$ при $\omega = 0$, ибо φ правильна в B , следовательно, $\omega^2 \varphi(\omega) = 0$ всюду в B , что и доказывает соотношение $\varphi(\omega) = 0$. Мы снова получаем, что стационарные поверхности являются минимальными поверхностями.

§ 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом пункте мы дополним полученное выше решение задачи Плато, установив несколько важных свойств решения.

1. Взаимная однозначность соответствия граничных точек. В нашей формулировке вариационной задачи (п. 1 § 2) мы требовали, чтобы допустимые векторы отображали окружность β на контур γ

непрерывно и монотонно¹⁾. Из этого требования, как мы сейчас увидим, вытекает взаимная однозначность соответствия границ.

Так как наше соответствие монотонно, то остается лишь доказать, что целая дуга c окружности β не может соответствовать одной точке кривой γ , например точке $x=0$. Если бы такая дуга существовала, то при конформном отображении B на верхнюю полуплоскость $v > 0$ ей соответствовал бы отрезок оси $v=0$; полуплоскость и этот отрезок мы снова обозначим соответственно через B и c . Так как $x=0$ на c , то гармонический вектор x можно аналитически продолжить по симметрии в нижнюю полуплоскость; на самой дуге c имеем $x_u=0$, а отсюда и из соотношения $x_u^2 - x_v^2 = 0$ получаем также $x_v=0$. Мы приходим к абсурдному заключению, что гармонический вектор x тождественно постоянен. Таким образом, c не может быть отрезком и непременно сводится к точке, а это и нужно было доказать.

2. Относительный минимум. Решение вариационной задачи можно провести в точности так же, как в п. 2 § 2, если подчинить вектор x некоторым условиям, заданным в виде неравенства. Можно, например, в случае гармонических допустимых векторов потребовать, чтобы удовлетворялось неравенство $|x(u, v) - a(u, v)| \leq b$, где $a(u, v)$ — заданный гармонический допустимый вектор, а b — постоянная. Если с самого начала допустить только гармонические векторы x , для которых $|x - a| \leq b$, то решение задачи будет проводиться в точности так же, как в § 2. Предположим, что вектор x решает минимальную задачу в „сфере“ $|x - a| \leq b$, тогда вариационные рассуждения, аналогичные проведенным в § 3 или § 4, приведут нас к выводу, что x представляет минимальную поверхность, осуществляющую *относительный* минимум интеграла Дирихле. Если, однако, $|x - a| = b$, т. е. если x лежит на границе „сферы“ по меньшей мере для одной точки $B \dashv \beta$, то наши вариационные рассуждения неприменимы и x не всегда представляет минимальную поверхность.

3. Доказательство того, что решение вариационной задачи решает задачу о минимуме площади. Минимальная поверхность x , минимизирующая интеграл Дирихле, обладает наименьшей возможной площадью. Для доказательства этого утверждения, которое служило отправной точкой наших исследований, мы не можем обойтись без применения некоторых теорем теории конформных отображений. Простейшее рассуждение основано на результатах § 4 гл. II, согласно которым любую односвязную область, расположенную на многограннике и ограниченную жордановой кривой, можно отобразить взаимно однозначно и конформно (всюду, за исключением вершин) на внутренность единичного круга²⁾.

¹⁾ Монотонность всегда понимается в слабом смысле.

²⁾ Приближение посредством многогранников и их отображений на внутренность единичного круга является основным средством, которым пользовался Радо для решения задачи Плато.

Пусть G — любая допустимая поверхность в задаче III для контура γ и A — ее площадь. Тогда существует последовательность многогранников π_n , с границами γ_n , стремящимися к γ в смысле Фреше, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\pi_n) = A.$$

Так как многогранники π_n можно конформно отобразить на единичный круг B , то существуют изометрические представления $y_n(u, v)$ этих многогранников, для которых областью параметров является единичный круг. Отсюда по формуле (3.7а) получаем

$$D[y_n] = A(\pi_n).$$

Пусть x_n — решение задачи III для многоугольного контура γ_n , ограничивающего π_n , и x — решение для границы γ . Тогда

$$D[x_n] \leq D[y_n],$$

и теорема 3.1 о полунепрерывности снизу зависимости минимума от границы дает

$$d = D[x] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D[x_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A(\pi_n) = A$$

или

$$d \leq A.$$

С другой стороны, d является площадью минимальной поверхности, натянутой на контур γ . Следовательно, d является наименьшим возможным значением площади A допустимой поверхности с границей γ ; решение задачи III в то же время решает и задачу о минимуме площади.

4. Роль конформных отображений в решении задачи Плато.

Решение задачи Плато не требует никаких сведений из теории потенциала, кроме знакомства с интегралом Пуассона, решающим граничную задачу для круга. Так как любая плоская область, ограниченная жордановой кривой, конформно эквивалентна единичному кругу B , то в качестве B мы можем выбрать вместо круга более общую область. Это замечание, очевидно, снимает возражение о неприменимости изложенного метода к параметрическим областям общего типа. Однако по своей геометрической природе задача о построении поверхности наименьшей площади, натянутой на заданный контур, требует даже большей независимости от индивидуальных параметрических представлений, нежели та, которая дается теоремой существования Римана в сформулированном выше виде.

До сих пор мы рассматривали теорему Римана лишь для *плоских* областей, ограниченных жордановыми кривыми. Только что указанный метод не дает доказательства теоремы существования для общих римановых областей B . Рассмотрим, например, область, получаемую

из вертикальной полосы $-1 \leq u \leq 1$, $-\infty < v < \infty$ исключением круга $u^2 + v^2 < 1/4$ и отождествлением граничных точек прямых $u = -1$ и $u = 1$ с равными ординатами v . А priori можно допустить, что при этом для интеграла Дирихле получится минимум, отличный от d , и, следовательно, минимальная поверхность, отличная от построенных в § 2. Чтобы исключить такую возможность, мы должны заранее знать, что рассматриваемую риманову область можно отобразить на единичный круг.

Необходимость теоремы существования отображений для более глубокого анализа нашей задачи видна из следующего замечания. Условие минимальности поверхности является исключительно *локальным* условием, оно равносильно уравнению $\varphi(w) = 0$ только для локального параметрического представления. Однако мы начинаем решение с предположения о существовании одного *униформного* представления $x(u, v)$ для *всей* поверхности. Необходимо быть уверенным в том, что при определении площади поверхность можно разбить на части так, чтобы в каждой из них было задано локальное параметрическое представление и чтобы все эти представления были независимы одно от другого. Очевидно, что нельзя решить ни задачу Плато, ни задачу о наименьшей площади, если предварительно не убедиться в возможности *униформизации* поверхности. Возможность замены совокупности надлежащим образом связанных между собой локальных конформных представлений одним униформным представлением, справедливым для всей поверхности, составляет сущность теоремы существования отображений римановых областей, доказанной в гл. II.

Наконец, последнее замечание. Метод, основанный на изучении первой вариации, представляет самостоятельный интерес, в частности потому, что он дает доказательство теорем существования конформных отображений. Его значение выяснится лучше всего при изучении минимальных задач для случаев высшей связности в гл. IV и V. С другой стороны, методы, основанные на применении теоремы существования отображений, более уместны в минимальных задачах, которые в первую очередь относятся к геометрической величине — площади, а не к заменяющему ее интегралу Дирихле, совпадающему с площадью лишь для изометрических координат.

§ 6. НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Аналитическое продолжение минимальных поверхностей.

Приведенное выше доказательство существования решения задачи Плато не дает ответа на многие связанные с ней вопросы, например на вопрос об аналитическом продолжении минимальных поверхностей. Для плоской кривой γ решение задачи дает обычное конформное отображение B на область, ограниченную этой кривой, и, как известно из элементарной теории аналитических функций, функцию, осуществляющую отображение, можно аналитически продолжить через

границу γ , если последняя является аналитической кривой. Соответствующая теорема для минимальных поверхностей в n -мерном пространстве, $n \geq 3$, еще не доказана. Именно, остается недоказанным, несмотря на всю его очевидность, следующее утверждение:

Минимальную поверхность можно аналитически продолжить (как минимальную поверхность) через любую аналитическую дугу граничной кривой.

Трудность задачи видна из того, что аналитическая граница γ может быть задана вектором, составляющие которого являются неаналитическими функциями длины дуги на кривой β .

В случае, когда отрезок границы γ *прямолинеен*, аналитическое продолжение минимального вектора можно легко осуществить с помощью *принципа симметрии*. В самом деле, имеет место

Теорема 3.2. Если граница γ минимальной поверхности содержит прямолинейный отрезок α , то эту поверхность можно аналитически продолжить за пределы отрезка α .

Доказательство. В качестве параметрической области снова удобнее использовать верхнюю полуплоскость вместо единичного круга. Для простоты ограничимся случаем векторов x в трехмерном пространстве x, y, z . Пусть c — открытый отрезок границы $v=0$, соответствующий отрезку α . Без нарушения общности можно, далее, предположить, что α является отрезком оси z , т. е. что $x=y=0$ вдоль α . По принципу симметрии x и y можно продолжить через отрезок c так, что они останутся гармоническими в окрестности S любого замкнутого отрезка c^* , принадлежащего c ; в этой окрестности $x(u, -v) = -x(u, v)$, $y(u, -v) = -y(u, v)$. Производные x и y также правильны в S , и x_u, y_u равномерно стремятся к нулю, когда ордината v точки $P(u, v)$ из S неограниченно уменьшается, а сама точка P стремится к отрезку c^* . Из соотношений $F=0, E=G$, т. е.

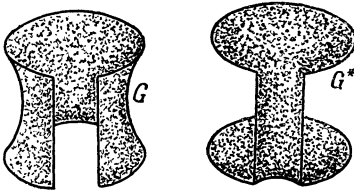
$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0, \quad z_u^2 + y_u^2 + x_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

справедливых в полуплоскости B , мы заключаем, что произведение $z_u z_v$ равномерно стремится к нулю, когда точка P стремится к c^* ; отсюда вытекает, что z_v равномерно стремится к нулю, ибо $x_u \rightarrow 0, y_u \rightarrow 0$ и $z_u^2 \geq z_v^2 - x_u^2 - y_u^2$. Следовательно, z_v имеет на c^* граничные значения нуль, т. е. гармоническая функция $z(u, v)$ также допускает продолжение через c^* по симметрии: $z(u, -v) = z(u, v)$.

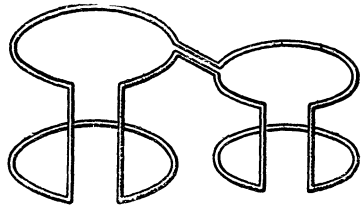
2. Единственность. Кривые, стягивающие бесчисленное множество минимальных поверхностей. В линейных граничных задачах для эллиптических дифференциальных уравнений доказательство единственности решения обычно не представляет больших трудностей — оно значительно проще, чем доказательство существования. Для задачи Плато дело обстоит иначе. Известно еще очень мало общих фактов

относительно числа решений этой задачи для заданного контура. Следующий пример, основанный на экспериментах с мыльной пленкой (см. фиг. 45 и 46), показывает возможность существования двух и больше различных решений, доставляющих относительный минимум с различными значениями площади d .

Напомним сначала известный из элементарного вариационного исчисления факт относительно поверхностей вращения наименьшей площади, ограниченных двумя равными параллельными окружностями, которые расположены перпендикулярно к оси z и имеют центры на этой оси на



Фиг. 45 и 46. Две различные минимальные поверхности, натянутые на одинаковые контуры.



Фиг. 47. Схема, составленная из двух контуров.

расстоянии a друг от друга. Хорошо известно (см. [7], стр. 122), что при некоторых значениях a сильный минимум площади для всех близких поверхностей вращения дает катеноид, т. е. поверхность, образованная вращением цепной линии. С другой стороны, a можно выбрать так, чтобы площадь катеноида не давала абсолютного минимума, а превосходила более чем на положительную величину $2a$ суммарную площадь d_0 двух кругов, натянутых на заданные окружности.

Далее заметим, что катеноид доставляет минимум площади и в том случае, когда к сравнению допущены также поверхности, не являющиеся поверхностями вращения. В этом легко убедиться с помощью классического приема симметризации — площадь любой допустимой поверхности лишь уменьшится, если заменить каждое ее сечение $z = \text{const}$ кругом с центром на оси z , имеющим ту же площадь, что и рассматриваемое сечение. Катеноид является двусвязной поверхностью; рассекая его вдоль узкой полосы s , ограниченной двумя вырожденными цепными линиями (см. фиг. 45), мы получаем односвязную поверхность G^1). Эта односвязная поверхность ограничена кусочно аналитической жордановой кривой, и ее площадь можно принять большей $d_0 + \alpha$, если полоска s достаточно узка. Она осуществляет относительный минимум для случая кривой γ , ибо является частью поверхности, доставляющей минимум.

С другой стороны, если надлежащим образом выбрать полоску s и пару кругов, то можно построить поверхность G' , односвязную и

1) Этот пример предложен Винером и Дугласом (см. [30], стр. 269).

ограниченную контуром γ , площадь которой будет меньше $d_0 + \alpha$. Следовательно, согласно доказанному в нашей общей теории, существует ограниченная контуром γ минимальная поверхность G^* , площадь которой также меньше $d_0 + \alpha$. Поверхность G^* дает решение задачи Плато, отличное от G .

Рассмотренный контур γ можно применить для построения *спрямляемой жордановой кривой, ограничивающей бесчисленное, даже несчетное, множество минимальных поверхностей*. Построение основано на следующей лемме, полное доказательство которой можно дать с помощью методов, развиваемых в гл. VI.

Лемма 3.3. Пусть γ_1 и γ_2 будут две жордановы кривые, ограничивающие соответственно минимальные поверхности x_1 и x_2 .

Свяжем γ_1 и γ_2 тонкой полоской η , состоящей из двух приблизительно параллельных отрезков, расстояние между которыми не превосходит ε , а малые дуги γ_1 и γ_2 , заключенные между этими отрезками, исключим. Построенную таким образом жорданову кривую обозначим через γ_ε . Тогда будет существовать минимальная поверхность x_ε , натянутая на контур γ_ε , которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к x_1 на γ_1 и к x_2 на γ_2 .

Связывая между собой, как в лемме 3.3, два контура γ_1 и γ_2 , геометрически подобные построенному в предыдущем примере контуру γ (но не обязательно имеющие одинаковые размеры), мы построим новый контур $\gamma' = \gamma_\varepsilon$, изображенный на фиг. 47. На контур γ' можно натянуть по меньшей мере четыре устойчивых минимальных поверхности, ибо решения задачи Плато для этого контура в каждой части γ_1 и γ_2 могут иметь вид как поверхности G , так и поверхности G^* (см. фиг. 45 и 46). Совершенно таким же путем мы можем последовательно связать узкими „мостиками“ не два, а бесчисленное множество подобных γ контуров $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Если мы будем надлежащим образом, например по геометрической прогрессии, уменьшать размеры связываемых контуров, а также длину и ширину мостиков, то получим спрямляемый контур Σ . На такой контур Σ можно натянуть бесчисленное множество минимальных поверхностей, каждая из которых в любом звене γ_n , составляющем Σ , может иметь вид как поверхности G , так и G^* . Если для такой минимальной поверхности связать с каждым звеном γ_n число 0 или 1 в соответствии с тем, будет ли это звено в γ_n поверхностью типа G или G^* , то этой поверхности будет соответствовать некоторое представленное в двоичной системе исчисления действительное число из отрезка $[0, 1]$. Очевидно, что это число определяется единственным образом и каждому такому числу соответствует некоторая минимальная поверхность, натянутая на Σ .

Мы доказали, что *множество односвязных минимальных поверхностей, которые можно натянуть на спрямляемый контур Σ , является множеством мощности континуум*.

Пусть T — натянутая на Σ минимальная поверхность, которая во всех звеньях $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ является поверхностью типа G ; T_n пусть обозначает минимальную поверхность, являющуюся поверхностью типа G во всех звеньях Σ , кроме γ_n . Очевидно, что $T_n \rightarrow T$ при $n \rightarrow \infty$, и, таким образом, мы получили пример минимальной поверхности, которая является пределом последовательности минимальных поверхностей, натянутых на один и тот же контур. (Аналогичный пример был предложен Леви.)

В гл. VI мы докажем, что если на контур можно натянуть две устойчивые минимальные поверхности, то на него можно натянуть и неустойчивую минимальную поверхность. На этом основании мы можем заключить, что кроме G и G^* существует еще неустойчивая минимальная поверхность G^{**} , натянутая на контур γ . Точно так же ясно, что существует несчетное множество неустойчивых минимальных поверхностей, натянутых на контур Σ .

Парадоксальное явление, с которым мы встречаемся в этом примере, показывает, что корректно поставленная геометрическая задача может оказаться некорректной, если ее данные имеют слишком общий характер, например если появляются произвольные спрямляемые кривые или кривые с очень неправильными особыми точками.

Эти эвристические изыскания необходимо подкрепить полным доказательством. Однако такое доказательство еще не найдено, так же как не найден и полный ответ на следующие вопросы. Для каких контуров можно доказать единственность решения или ограниченность числа решений? Существуют ли „блоки“ неизолированных минимальных поверхностей, т. е. континуумы минимальных поверхностей с общей границей и, следовательно, с одним и тем же значением площади? Для этих вопросов не найдено даже примеров, которые показали бы возможные пути их решения.

3. Точки разветвления минимальных поверхностей. Если при данном параметрическом представлении минимальной поверхности существуют точки, в которых $E = G = F = 0$, то в этих точках отображение может терять конформность. Такие точки называются точками разветвления по аналогии со случаем аналитических функций при $m = 2$. Несмотря на то, что данное выше решение задачи Плато не исключает возможности получения минимальных поверхностей с точками разветвления, известны только очень простые примеры таких поверхностей [63, 23].

Приведем пример, который показывает, какие возможности могут представиться в этом случае. Введем на плоскости полярные координаты r, θ и рассмотрим лучи $\theta = 0, \theta = 2\pi/3, \theta = 4\pi/3$. Пусть P и Q — две точки, расположенные соответственно на лучах $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi/3$; соединим их пространственной кривой η , лежащей над нашей плоскостью, и построим минимальную поверхность, ограниченную отрезками OP, OQ и кривой η . Эта поверхность целиком лежит

над плоскостью. По доказанному в п. 1 ее можно продолжить по симметрии через отрезок OQ . Получаемая при продолжении поверхность целиком лежит под плоскостью; точке P , в частности, соответствует точка P' на луче $\theta = 4\pi/3$, причем $OP = OP'$. Продолженную поверхность в свою очередь можно продолжить по симметрии через отрезок OP' так, что добавится новый ее кусок $OP'Q'$, где Q' — точка луча $\theta = 0$, для которой $OQ' = OQ$. Этот третий кусок, очевидно, не связывается с первым вдоль луча $\theta = 0$. Только после еще трех отражений через лучи $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/3$, $\theta = 4\pi/3$ мы получим минимальную поверхность G , содержащую полную окрестность начала. Границей G служит жорданова кривая, поверхность имеет точку разветвления O , лучи $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/3$, $\theta = 4\pi/3$ являются ее линиями самопересечения.

Можно, конечно, отправляться от углов, равных $2\pi/5$ или вообще $2\pi/(2n+1)$; тогда при помощи того же приема мы получим другие минимальные поверхности с простой точкой разветвления. Во всех этих примерах характерно наличие более чем одной линии самопересечения и равенство углов между линиями разветвления. Возникают следующие вопросы. Типично ли поведение линий разветвления в нашем примере? Что можно утверждать относительно точек разветвления высшего порядка? Более общей является задача: найти примеры и охарактеризовать классы кривых γ , для которых отыскание минимума интеграла Дирихле непременно приводит к минимальным поверхностям с точками разветвления.

§ 7. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ И МЕТОД СПУСКА [21]

Не только уравнение $V=0$, но и сама первая вариация $V(x, \lambda, \mu)$, введенная в п. 1 § 4, оказывается полезной для более тщательного изучения минимальных поверхностей. В обычном евклидовом x -пространстве можно получить точки стационарности функции $f(x)$, двигаясь от произвольной точки $x = x_0$ вдоль линии наиболее крутого спуска, т. е. в направлении, противоположном направлению градиента этой функции. Если функция ограничена, то, двигаясь указанным образом, мы непременно придем в точку, где градиент обращается в нуль, т. е. в точку стационарности (которая не обязательно является точкой минимума). Как впервые указал Адамар [43], эта идея осуществима и в случае функционального пространства. Сначала казалось, что трудности, присущие вариационному исчислению нескольких независимых переменных, будут представлять серьезное препятствие для применения метода спуска. Однако для задачи Плато и связанных с ней вопросов теории конформных отображений этот метод все же удалось успешно применить в немного измененном виде. Во-первых, не обязательно располагать вариации точно вдоль линии спуска; можно удовлетвориться так называемым *безопасным спуском*, который мы сейчас определим. Во-вторых, с помощью

принципа Дирихле можно свести рассматриваемые функции к гармоническим, которые зависят только от заданных граничных значений.

Метод безопасного спуска для задачи Плато состоит в следующем. Мы отправляемся от произвольного гармонического вектора x_0 . Если вариация $V(x_0, \lambda, \mu)$ не обращается тождественно в нуль для всех λ и μ , то мы заменяем x_0 другим вектором z , для которого по формуле (3.16) имеем $D[z] < D[x_0]$. Заменяя затем вектор z гармоническим вектором w с теми же граничными значениями, мы переходим от вектора x_0 к вектору w , причем величина интеграла Дирихле уменьшается. Повторив этот процесс несколько раз, мы придем к минимальной поверхности u , если сделать спуск „безопасным“ с помощью следующих уточнений.

Для вариации типа (3.24), где величина α выбирается, как в п. 3 § 4, значение V сводится к

$$V = \text{Im } \omega^2 \varphi(\omega) = H(\rho, \psi)$$

(см. стр. 110); точку $\omega = \rho e^{i\psi}$ можно выбрать произвольно в круге $|\omega| < 1$. Вектор z , получаемый из x_0 с помощью этой вариации, необходимо должен быть нормирован в смысле п. 2 § 2. Но так как $D[z]$ не изменяется при дробно-линейном преобразовании, то можно нормировать вектор z , не нарушая справедливости формулы (3.16). Нормированный вектор z снова заменяем гармоническим вектором w с теми же граничными значениями.

Рассмотрим для вектора w величину $\text{Im } \omega^2 \varphi(\omega)$ как функцию ω в фиксированной замкнутой подобласти B , например в круге $|\omega| \leq 1/2$. Пусть Q — точка окружности, для которой $\delta_0 = \text{Im } \omega^2 \varphi(\omega)$ имеет наибольшую абсолютную величину. Если выбрать эту точку при определении функции α , то мы будем иметь

$$V = \delta_0$$

и, следовательно, по (3.16) получим

$$D[w] < D[x_0] + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_0 + \varepsilon^2 c D[x_0].$$

Пусть M — верхняя грань значений интеграла $D[x]$; мы положим

$$\varepsilon = -\frac{\delta_0}{4Mc}$$

и тогда будем иметь

$$D[w] < D[x_0] - \frac{\delta_0^2}{16Mc}.$$

Повторим ту же операцию, заменив вектор x_0 вектором $x_1 = w$. Продолжив этот процесс, мы получим последовательность гармонич-

ческих векторов x_0, x_1, \dots и последовательность чисел $\delta_0, \delta_1, \dots$, удовлетворяющих неравенству

$$D[x_{\nu+1}] < D[x_\nu] - \frac{\delta_\nu^2}{16Mc}.$$

Отсюда заключаем, что при $\nu \rightarrow \infty$ значения $D[x_\nu]$ сходятся к пределу и далее что

$$\delta_\nu \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Гармонические векторы x , образуют компактное множество, поэтому существует их подпоследовательность, сходящаяся равномерно в $B + \beta$ к гармоническому вектору x . Этот вектор представляет минимальную поверхность, ибо функции $\varphi_\nu(\omega)$, соответствующие сходящейся подпоследовательности x_ν , сходятся равномерно в $B + \beta$ к функции $\varphi(\omega)$, соответствующей вектору x . В силу соотношения (3.28) получаем

$$\operatorname{Im} \omega^2 \varphi_\nu(\omega) \rightarrow 0$$

для $|\omega| \leq 1/2$; отсюда $\varphi(\omega) = 0$ в круге $|\omega| \leq 1/2$ и, следовательно, во всем круге B . Наш метод спуска привел к минимальной поверхности, натянутой на контур γ .

Следует подчеркнуть, что мы лишь построили минимальную поверхность, не доказав, что эта поверхность устойчива, т. е. что она дает относительный минимум. Вполне возможно, что в процессе безопасного спуска мы получим стационарный вектор x , представляющий неустойчивую минимальную поверхность. В этом случае в любой окрестности x существуют векторы y , для которых $D[y] < D[x]$. Следовательно, процесс спуска можно продолжить, и он приведет к другой минимальной поверхности, обладающей меньшей площадью, и т. д.

§ 8. ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОЩАДИ ОТ ГРАНИЦЫ

В п. 3 § 2 мы доказали теорему о полунепрерывности снизу для зависимости абсолютного минимума d интеграла Дирихле от кривой γ . Надлежащим сужением понятия сходимости последовательности кривых γ_n к γ можно добиться того, что абсолютный минимум d будет *непрерывным* функционалом от граничной кривой.

1. Теорема о непрерывности для абсолютного минимума. Мы начинаем с доказательства сравнительно простой теоремы о непрерывной зависимости абсолютного минимума d интеграла Дирихле от граничной кривой γ .

Теорема 3.3. Пусть равенства

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.29)$$

определяют преобразование x -пространства в x' -пространство. Функции ξ_i предполагаются непрерывными с кусочно непрерывными производными и удовлетворяющими неравенствам

$$|\xi_i| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right| \leq \varepsilon.$$

Пусть это преобразование переводит кривую γ в кривую γ' , а минимизирующий вектор x , принадлежащий γ , — в вектор x' , непрерывный в $B + \beta$ и с кусочно непрерывными производными в B , который отображает B на поверхность, ограниченную контуром γ' . Обозначим еще через d и d' точные верхние грани интеграла Дирихле для поверхностей, ограниченных соответственно контурами γ и γ' . Тогда будем иметь

$$d' \leq (1 + \delta) d,$$

причем величина $\delta = (1 + m\varepsilon)^2 - 1$ стремится к нулю вместе с ε .

Доказательство. По неравенству Буняковского — Шварца

$$\begin{aligned} D[x' - x] &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \iint_B \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \right] du dv \leq \\ &\leq m\varepsilon^2 D[x]. \end{aligned}$$

Применив неравенство треугольника, найдем

$$\left(\sqrt{D[x']} - \sqrt{D[x]} \right)^2 \leq m^2 \varepsilon^2 D[x];$$

но так как $D[x] = d$, $D[x'] \geq d'$, то мы имеем $d' \leq (1 + m\varepsilon)^2 d$. Теорема доказана.

При достаточно малых ε существует преобразование, обратное преобразованию (3.29). Пользуясь этим обратным преобразованием, мы можем получить обратное соотношение между величинами d и d' . Следовательно, выбрав ε достаточно малым, мы получим, что минимальные значения d и d' для контуров γ и γ' отличаются друг от друга на сколь угодно малую величину.

Пример такой непрерывной зависимости минимума от кривой доставляет аппроксимация кусочно гладкой кривой γ посредством вписанной ломаной γ' . Если эта аппроксимация достаточно точна, то, очевидно, существует преобразование вектора x в x' , которое переводит γ в γ' и удовлетворяет условиям предыдущей теоремы.

В п. 5 мы докажем теорему, менее очевидную, чем эта, и относящуюся к произвольным минимальным поверхностям независимо от характера их минимума.

2. Длины образов концентрических окружностей. Рассмотрим гармоническую поверхность $x(u, v) = x(r, \theta)$, заданную в единичном круге $B: r < 1$. Предположим, что его окружность β отображается

на спрямляемую кривую γ , тогда компоненты вектора $x(1, \theta)$ будут функциями ограниченной вариации. Обозначим через $L(r)$ длину образа окружности радиуса r , концентрической с единичной, и через $L = L(1)$ — длину γ . Имеет место

Теорема 3.4. Функция $L(r)$ монотонно возрастает на отрезке $0 \leq r \leq 1$, и

$$L = L(1) = \lim_{r \rightarrow 1} L(r).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$L(r_1) \geq L(r_0), \quad r_0 < r_1 \leq 1,$$

так как предельное соотношение при $r \rightarrow 1$ является следствием полунепрерывности снизу длины кривых $x(r, \theta)$ как функции от r . Мы проведем доказательство для случая $r_1 = 1$. При $r_1 < 1$ все рассуждения упрощаются, ибо вектор $x(r_1, \theta)$ является аналитической функцией θ , что не имеет места при $r_1 = 1$.

Вектор $x(r_0, \theta)$ можно выразить через граничные значения

$$s(\theta) = x(1, \theta)$$

с помощью интеграла

$$x(r_0, \theta) = \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) s(\alpha) d\alpha,$$

где

$$K(r_0, \alpha - \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos(\alpha - \theta) + r_0^2}$$

— ядро Пуассона. Рассмотрим

$$x_\theta = \int_0^{2\pi} K_\theta s(\alpha) d\alpha = - \int_0^{2\pi} K_\alpha s(\alpha) d\alpha \quad 1)$$

и проинтегрируем последнее выражение по частям, что законно, если понимать интеграл в смысле Стильтьеса, ибо $s(\alpha)$ является вектором ограниченной вариации. Мы получим

$$x_\theta = \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) ds(\alpha)$$

и, так как $K(r_0, \alpha - \theta) > 0$, будем иметь

$$|x_\theta| \leq \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) |ds(\alpha)|.$$

1) Замена K_θ на $-K_\alpha$ является решающим моментом доказательства,

Подставляя это в выражение длины

$$L(r_0) = \int_0^{2\pi} |x_\theta| d\theta$$

и пользуясь соотношением

$$\int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) d\theta = 1,$$

мы получаем неравенство

$$L(r_0) \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} K(r_0, \alpha - \theta) |ds(\alpha)| = \int_0^{2\pi} |ds(\alpha)| = L(1),$$

которое и доказывает теорему.

3. Изопериметрическое неравенство для минимальных поверхностей. (См. [9] и [11], а также [63], гл. III, § 24 и 25 и [64].) Имеет место

Теорема 3.5. Пусть L — длина граничной кривой γ некоторой односвязной минимальной поверхности (не обязательно дающей абсолютный минимум площади) и A — площадь этой поверхности. Тогда справедливо неравенство

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

причем знак равенства может иметь место лишь для случая круга. Иными словами, площадь минимальной поверхности никогда не превосходит площади круга с той же длиной границы.

Доказательство. Сначала мы рассмотрим часть минимальной поверхности $x(r, \theta)$, для которой $r \leq \rho < 1$, с тем чтобы использовать преимущество аналитичности граничных значений на окружности $r = \rho$; теорема 3.4 позволит перейти затем к пределу при $\rho \rightarrow 1$. Для удобства мы снова обозначим через β и γ соответственно границы круга и минимальной поверхности, через L — длину γ и через

$$A = \frac{1}{2} \iint_{r \leq \rho} (x_u^2 + x_v^2) du dv$$

— площадь минимальной поверхности. Пусть s — длина дуги на β , σ — соответствующая длина дуги на γ и $t = 2\pi\sigma/L$; производные по t мы будем отмечать точками наверху. Вдоль границы мы рассматриваем x как функцию σ или t и имеем

$$|x_\sigma| = 1; \quad |\dot{x}| = \frac{L}{2\pi}. \quad (3.30)$$

Величины L и A остаются инвариантными при параллельном переносе системы координат в x -пространстве. Следовательно, можно принять, что начало координат лежит в центре тяжести $\mathbf{x}(t)$, т. е. что

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{x} dt = 0. \quad (3.31)$$

Так как $\Delta \mathbf{x} = 0$, то по формуле Грина

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi\rho} \mathbf{x} \mathbf{x}_r ds,$$

откуда

$$A \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi\rho} |\mathbf{x}| |\mathbf{x}_r| ds.$$

Далее, так как \mathbf{x} — минимальная поверхность, то $|\mathbf{x}_r| = |\mathbf{x}|_s$, и, введя переменную t вместо s , мы получим

$$A \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\mathbf{x}| |\dot{\mathbf{x}}| dt.$$

Из формул (3.30) находим

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{x}}^2 dt,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2\pi} - 2A &\geq \int_0^{2\pi} \{ |\dot{\mathbf{x}}|^2 - |\mathbf{x}| |\dot{\mathbf{x}}| \} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(|\dot{\mathbf{x}}| - |\mathbf{x}|)^2 + \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{x}^2] dt, \end{aligned} \quad (3.32)$$

а потому и подавно

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A \geq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{x}^2) dt. \quad (3.33)$$

Неравенство

$$\int_0^{2\pi} (\dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{x}^2) dt \geq 0 \quad (3.34)$$

для периодических векторов \mathbf{x} с непрерывными производными, удовлетворяющих условию (3.31), доказывается хорошо известным приемом. Именно, если мы обозначим через \mathbf{a} , и \mathbf{b} , коэффициенты Фурье

вектора $\mathbf{x}(t)$, то в силу (3.31) получим $\mathbf{a}_0 = 0$ и интеграл в формуле (3.33) примет вид

$$\frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu^2 - 1) (\mathbf{a}_\nu^2 + \mathbf{b}_\nu^2).$$

Это выражение положительно, если только вектор \mathbf{x} не равен

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \cos t + \mathbf{b}_1 \sin t,$$

т. е. если он не описывает окружность. Так как для круга $L^2 - 4\pi A = 0$, то наше утверждение полностью доказано. Можно также заметить, что из неравенства (3.32) с помощью (3.33) и (3.34) следует то же утверждение: $L^2 - 4\pi A = 0$ только в том случае, когда $|\dot{\mathbf{x}}| = |\mathbf{x}|$, т. е. когда вектор $\mathbf{x}(s)$ описывает окружность. Наконец, как мы уже говорили, теорема 3.4 позволяет перейти к пределу при $\rho \rightarrow 1$, и тогда нужное изопериметрическое неравенство будет доказано для всей минимальной поверхности.

Покажем в заключение, что если граничная кривая спрямляема, то задача Плато заведомо имеет решение. Если аппроксимировать кривую γ многоугольниками γ_n , длины которых стремятся к длине γ , то, согласно изопериметрическому неравенству, минимальные поверхности, натянутые на γ_n , будут иметь равномерно ограниченный интеграл Дирихле. Отсюда по теореме 3.1 можно заключить, что для кривой γ существует хотя бы один допустимый вектор.

4. Непрерывная вариация площади минимальных поверхностей.

Для непрерывной вариации длины спрямляемой границы теореме 3.1 о полунепрерывности зависимости площади от границы можно заменить более точной теоремой о непрерывной зависимости.

Теорема 3.6¹⁾. Пусть $\mathbf{x}_n(u, v) = \mathbf{x}_n(r, \theta)$ — последовательность минимальных поверхностей в круге $B: r \leq 1$, отображающих окружность $\beta: r = 1$ на спрямляемые кривые γ_n ограниченной длины L_n . Если при $r \leq 1$ поверхности \mathbf{x}_n сходятся к минимальной поверхности \mathbf{x} , граница γ которой имеет длину

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

то площади A_n поверхностей \mathbf{x}_n сходятся к площади A поверхности \mathbf{x} .

Доказательство. Предварительно заметим, что, согласно изопериметрическому неравенству, площади A_n равномерно ограничены, скажем, $A_n < M$, и, следовательно, по лемме 3.2 сходимость векторов \mathbf{x}_n равномерна в круге B .

¹⁾ Эта теорема, имеющая важные приложения (см. гл. VI), была получена Морсом и Томпкинсом [55], а в более общей формулировке дана Шиффманом [75].

Для полного доказательства теоремы достаточно показать, что для заданного положительного ε можно найти число h , такое, чтобы для достаточно больших n было справедливо неравенство

$$D_{S_h}[\mathbf{x}_n] < \varepsilon,$$

где S_h — кольцо $1 - h \leq r \leq 1$. Во внутреннем круге $r \leq 1 - h$ интегралы Дирихле для векторов \mathbf{x}_n сходятся к интегралу Дирихле для вектора \mathbf{x} , ибо в наших условиях последовательности производных \mathbf{x}_n равномерно сходятся к соответствующим производным \mathbf{x} .

Оценку интеграла Дирихле $D_{S_h}[\mathbf{x}_n]$ мы получим, разбив кольцо S_h на достаточно малые односвязные ячейки, которые могут зависеть от \mathbf{x}_n , и оценив интеграл по каждой ячейке с помощью изопериметрического неравенства.

Обозначим через $L(r_0, \alpha, \beta)$ длину дуги $r = r_0$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ на минимальной поверхности $\mathbf{x}(r, \theta)$ и через $L_n(r_0, \alpha, \beta)$ — длину такой же дуги поверхности $\mathbf{x}_n(r, \theta)$. Величина $L(1, \alpha, \alpha + \eta)$, которая является непрерывной функцией α , имеет максимум $\delta = \delta(\eta)$ и минимум $\sigma = \sigma(\eta)$, т. е.

$$\sigma \leq L(1, \alpha, \alpha + \eta) \leq \delta. \quad (3.35)$$

Если $\eta \rightarrow 0$, то δ и σ также стремятся к нулю. Для $\eta > 0$ имеем $\sigma \neq 0$, иначе дуга β переходила бы в точку η , что, как мы доказали, невозможно (см. п. 1 § 5).

Разбиение S_h на ячейки определяется первоначальным шагом. Неравенство $D[\mathbf{x}_n] < M$ дает при $h < 1/2$

$$I_h(\mathbf{x}_n) = \int_0^{2\pi} \int_{1-h}^1 \mathbf{x}_{n_r}^2 dr d\theta < 4M.$$

Для $\eta = \frac{2\pi}{N}$ (N — целое) можно написать

$$I_h(\mathbf{x}_n) = \int_0^\eta \int_{1-h}^1 \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathbf{x}_{n_r}^2(r, \theta + \nu\eta) dr d\theta = \int_0^\eta \int_{1-h}^1 p_n(r, \theta) dr d\theta,$$

где $p_n(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathbf{x}_{n_r}^2(r, \theta + \nu\eta)$. В точности теми же рассуждениями, которые применялись при доказательстве леммы 1.4, и используя неравенство $I_h(\mathbf{x}_n) < 4M$, мы докажем, что для любого вектора \mathbf{x}_n (при фиксированных η и h) существует совокупность равноотстоящих друг от друга значений аргумента $\alpha_n, \alpha_n + \eta, \dots, \alpha_n + \nu\eta, \dots, \dots, \alpha_n + (N-1)\eta$, для которых вдоль соответствующего луча

$$\int_{1-h}^1 p_n dr < \frac{4M}{\eta}.$$

Следовательно, для таких лучей и подавно

$$\int_{1-h}^1 x_{n_r}^2 dr < \frac{4M}{\eta}. \quad (3.36)$$

Пусть $R_v^{(n)}$ — длина кривой на минимальной поверхности $x_n(r, \theta)$, для которой $\theta = \alpha_n + v\eta$, $1-h \leq r \leq 1$. Так как

$$(R_v^{(n)})^2 = \left(\int_{1-h}^1 |x_{n_r}| dr \right)^2 \leq h \int_{1-h}^1 x_{n_r}^2 dr,$$

то, согласно неравенству (3.36), мы имеем

$$R_v^{(n)} \leq \sqrt{h} \sqrt{\frac{4M}{\eta}}. \quad (3.37)$$

Разобьем кольцо S_h на N ячеек лучами $\theta = \alpha_n + v\eta = \alpha_v$, $v = 0, 1, \dots, N-1$. Далее, для произвольного малого положительного числа $k < 1$ мы фиксируем величины η и h . Сначала мы выберем η столь малым, чтобы было справедливо неравенство $\delta < k$. Пусть $\delta_v = = L(1, \alpha_v, \alpha_{v+1})$; в силу (3.35) мы имеем

$$\sigma \leq \delta_v \leq k. \quad (3.38)$$

Теперь выберем h столь малым, чтобы было

$$R_v^{(n)} < \sigma \quad (3.39)$$

[это возможно на основании неравенства (3.37)] и, кроме того, чтобы выполнялось неравенство

$$|L(1-h, \alpha, \alpha + \eta) - L(1, \alpha, \alpha + \eta)| < \sigma, \quad (3.40)$$

что возможно на основании теоремы 3.4 и полунепрерывности длины снизу. Наконец, мы выбираем число n столь большим, чтобы было

$$|L_n(1-h, \alpha, \alpha + \eta) - L(1-h, \alpha, \alpha + \eta)| < \sigma \quad (3.41)$$

и

$$|L_n(1, \alpha, \alpha + \eta) - L(1, \alpha, \alpha + \eta)| < \sigma^1. \quad (3.42)$$

¹⁾ Предельное соотношение $L_n \rightarrow L$ вместе с хорошо известным свойством полунепрерывности длины снизу приводит к тому, что $L_n(1, \alpha, \alpha + \eta) \rightarrow L(1, \alpha, \alpha + \eta)$ равномерно относительно концов α и $\alpha + \eta$. Предположив противное, допустим, что существует подпоследовательность индексов n , для которой

$$|L_n(1, \alpha_n, \alpha_n + \eta_n) - L(1, \alpha_n, \alpha_n + \eta_n)| > \varepsilon$$

где ε — фиксированное положительное число. Тогда из выбранной подпоследовательности мы можем выбрать еще одну, для которой $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\alpha_n + \eta_n \rightarrow \alpha + \eta$. Так как для этой новой подпоследовательности

$$L_n(1, \alpha_n, \alpha_n + \eta_n) \rightarrow L(1, \alpha, \alpha + \eta),$$

Для получения неравенства (3.42) мы использовали наше предположение о том, что $L_n \rightarrow L$, а неравенство (3.41) следует из равномерной сходимости x_{n^y} к x_0 для $r = 1 - h$.

Рассмотрим ν -тую ячейку разбиения кольца S_h и обозначим через $\Delta_\nu^{(n)}$ длину образа ее границы на минимальной поверхности x . Пользуясь неравенствами (3.38)—(3.42), находим

$$\Delta_\nu^{(n)} < \sigma + \sigma + (\delta_\nu + \sigma) + (\delta_\nu + 2\sigma) < 7\delta_\nu.$$

Применив, кроме того, изопериметрическое неравенство (теорема 3.5), получим

$$A_\nu^{(n)} \leq \frac{(\Delta_\nu^{(n)})^2}{4\pi},$$

где $A_\nu^{(n)}$ — площадь образа рассматриваемой ячейки на поверхности x_n , и далее

$$D_{S_h}[x_n] = \sum_{\nu=0}^{N-1} A_\nu^{(n)} \leq \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{(\Delta_\nu^{(n)})^2}{4\pi} < \frac{49}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{N-1} \delta_\nu^2 < \frac{49k}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{N-1} \delta_\nu = \frac{49kL}{4\pi}.$$

Следовательно, если мы выберем $k = 4\pi\epsilon/49L$, то для достаточно больших n величина $D_{S_h}[x_n]$ будет меньше ϵ , что и доказывает нашу теорему.

5. Непрерывная вариация площади гармонических поверхностей.

Морс и Томпкинс доказали предыдущую теорему в более общей форме, в которой k сравнению принимаются произвольные, а не обязательно минимальные поверхности.

Теорема 3.7. Пусть $x^{(n)}$ — последовательность гармонических поверхностей со спрямляемыми границами. Предположим, что $x^{(n)}$ равномерно сходится к поверхности x со спрямляемой границей, причем так, что длина L_n границы $x^{(n)}$ сходится к длине L границы x , тогда площадь A_n поверхности $x^{(n)}$ будет стремиться к площади A поверхности x .

то предыдущее неравенство приводит к неравенству

$$\liminf L_n(1, \alpha_n, \alpha_n + \eta_n) - L(1, \alpha, \alpha + \eta) \geq \epsilon;$$

знак абсолютной величины излишен, что следует из полунепрерывности длины снизу.

С другой стороны, обозначая через K_n дугу γ_n , дополнительную к дуге $\alpha_n, \alpha_n + \eta_n$, имеем по той же причине

$$\liminf L_n(K_n) - L(K) \geq 0,$$

где K — дуга γ , дополнительная к дуге $\alpha, \alpha + \eta$. Сложение этих двух неравенств дает

$$\liminf L_n - L \geq \epsilon,$$

что противоречит сходимости L_n к L .

Доказательство. Морс и Томпкинс непосредственно подсчитали интеграл, определяющий площадь. Мы приводим их доказательство в несколько измененном виде.

Сначала, следуя методу этих авторов, мы убедимся в том, что для всех гармонических поверхностей x со спрямляемыми границами справедливо неравенство

$$A \leq \frac{1}{4} L^2, \quad (3.43)$$

которое заменяет изопериметрическое неравенство.

Пусть сначала вектор x определен в единичном круге B плоскости u, v . Имеем, пользуясь векторными обозначениями,

$$A = \iint_B |x_u \times x_v| du dv = \iint_B |x_r \times x_\theta| dr d\theta.$$

Гармонический вектор x можно выразить через граничные значения $x(\psi)$ с помощью интеграла Пуассона

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) \frac{1-r^2}{\Omega(r, \theta; \varphi)} d\varphi,$$

где $\Omega(r, \theta; \varphi) = 1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2$.

Так же, как в п. 2, получаем

$$x_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1-r^2}{\Omega(r, \theta; \varphi)} \right) d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1-r^2}{\Omega(r, \theta; \varphi)} \right) d\varphi$$

и, интегрируя по частям, находим

$$x_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{\Omega(r, \theta; \varphi)} dx(\varphi). \quad (3.44)$$

Интеграл Стильтьеса (3.44) существует, ибо граница области спрямляема и $x(\varphi)$ — функция ограниченной вариации.

Гармонический вектор rx_r , сопряженный x_θ , выражается через граничные значения $x(\theta)$ по формуле

$$rx_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin(\varphi - \theta)}{\Omega(r, \theta; \varphi)} dx(\varphi). \quad (3.45)$$

Из (3.44) и (3.45) мы получаем

$$x_r \times x_\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2(1-r^2) \sin(\varphi - \theta)}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)} dx(\varphi) \times dx(\psi). \quad (3.46)$$

То же самое произведение можно записать, переименовав в (3.46) роли φ и ψ . Складывая оба эти выражения и пользуясь соотношением

$$dx(\psi) \times dx(\varphi) = -dx(\varphi) \times dx(\psi),$$

получаем

$$x_r \times x_\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[1-r^2] [\sin(\varphi-\theta) - \sin(\psi-\theta)]}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)} dx(\varphi) \times dx(\psi).$$

Так как $\sin(\varphi-\theta) - \sin(\psi-\theta) = 2 \cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2} - \theta\right) \sin\frac{\varphi-\psi}{2}$ и $|dx(\varphi) \times dx(\psi)| \leq |dx(\varphi)| \cdot |dx(\psi)|$, то последнее соотношение приводит к неравенству

$$|x_r \times x_\theta| \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2(1-r^2) \left| \sin\frac{\varphi-\psi}{2} \right| \cdot |dx(\varphi)| \cdot |dx(\psi)|}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)}.$$

Из этого неравенства мы и найдем оценку для площади A . Пусть $A(\sigma, \rho)$ будет площадь части x , соответствующей кольцу $\sigma \leq r \leq \rho$, тогда

$$\begin{aligned} A(\sigma, \rho) &= \int_\sigma^\rho \int_0^{2\pi} |x_r \times x_\theta| d\theta dr \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_\sigma^\rho \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) \left| \sin\frac{\varphi-\psi}{2} \right| d\theta dr}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)} \right] |dx(\varphi)| \cdot |dx(\psi)|, \end{aligned}$$

причем интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi^2} \int_\sigma^\rho \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) d\theta dr}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)}$$

можно вычислить. Внутренний интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{\Omega(r, \theta; \varphi) \Omega(r, \theta; \psi)} d\theta \quad (3.47)$$

вычисляется в замкнутом виде элементарными методами¹⁾, но проще получить его значение с помощью следующих рассуждений. Выражение

$$\frac{1}{\Omega(r, \theta; \psi)} = \frac{1}{1-2r \cos(\psi-\theta) + r^2} \quad (3.48)$$

в зависимости от θ можно рассматривать как определяющее граничные значения на окружности $R=1$ правильной гармонической в

¹⁾ Например, разложением его подинтегральной функции в произведение двух рядов Фурье по θ .

единичном круге $R \leq 1$ функции $f(R, \theta)$. (Заметим, что эта функция зависит от значений r и ψ .) Тогда интеграл Пуассона (3.47) будет давать значение этой функции в точке $R=r, \theta=\varphi$. Чтобы найти функцию $f(R, \theta)$, мы вспомним, что при $r < 1$ ядро Пуассона

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + r^2}$$

является гармонической функцией R и θ , правильной во внешности единичного круга. Гармоническая функция, имеющая одинаковые с ней значения на единичной окружности и полученная из нее заменой R на $1/R$, является, следовательно, правильной внутри единичного круга. Таким образом, искомой гармонической функцией с граничными значениями (3.48) будет функция

$$f(R, \theta) = \frac{1}{1-r^2} \frac{\left(\frac{1}{R}\right)^2 - r^2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \frac{2r}{R} \cos(\psi - \theta) + r^2},$$

а ее значение при $R=r, \theta=\varphi$ равно

$$\frac{1+r^2}{1-2r^2 \cos(\psi - \varphi) + r^4}.$$

Это и есть значение интеграла (3.47).

Теперь элементарным интегрированием находим ¹⁾

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{1+r^2}{1-2r^2 \cos(\psi - \varphi) + r^4} dr = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|} \operatorname{arctg} \frac{2r \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|}{1-r^2} \right]_0^{\rho}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

¹⁾ Вычисления проводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} \left[\frac{1}{1-2r \cos \frac{\psi - \varphi}{2} + r^2} + \frac{1}{1+2r \cos \frac{\psi - \varphi}{2} + r^2} \right] dr = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|} \left[\operatorname{arctg} \frac{r - \cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|} + \operatorname{arctg} \frac{r + \cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|} \right]_0^{\rho}. \end{aligned}$$

Если теперь воспользоваться формулой сложения для арктангенса

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab},$$

справедливой для всех a и b , то выражение для I примет вид (3.49).

Отсюда

$$A(\sigma, \rho) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{2r \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|}{1 - r^2} \right]^\rho |dx(\varphi)| |dx(\psi)|, \quad (3.50)$$

и, переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 1$, получаем

$$A \leq \frac{1}{4} L^2,$$

ибо $|dx(\varphi)|$ есть дифференциал дуги на кривой $x(\varphi)$.

Теперь мы могли бы продолжить рассуждения так же, как в п. 4, но проще доказать нашу теорему о непрерывности прямым путем. Рассмотрим все дуги кривых $x^{(n)}(\theta)$, $n = 1, 2, \dots$, которые являются образами дуг единичной окружности длиной σ . Пусть $\eta(\alpha)$ будет максимум длин всех этих дуг. Так как длины $x^{(n)}(\theta)$ сходятся к длине $x(\theta)$, то очевидно, что $\eta(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ ¹⁾. Обозначим через M верхнюю грань длин дуг $x^{(n)}(\theta)$. При оценке $A_n(\sigma, \rho)$ разобьем область интегрирования на две части: $|\psi - \varphi| \leq \alpha/2$, которую назовем D_1 , и $|\psi - \varphi| \geq \alpha/2$, которую назовем D_2 (здесь $|\psi - \varphi|$ обозначает длину кратчайшей дуги, соединяющей точки ψ и φ). Интеграл в правой части (3.50), вычисленный для поверхности $x^{(n)}$ вместо x и распространенный на первую область D_1 , не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} \int \int_{D_1} |dx^{(n)}(\varphi)| |dx^{(n)}(\psi)| \leq \frac{1}{4} \eta(\alpha) M.$$

Интеграл по второй области, очевидно, не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sigma \left| \sin \frac{\alpha}{4} \right|}{1 - \sigma^2} \right] M^2 \leq \frac{M^2}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sigma\alpha}{4(1 - \sigma^2)},$$

ибо $\sin \alpha/4 \geq \alpha/8$. Таким образом, для любой поверхности $x^{(n)}$, следовательно, и для поверхности x , площадь A удовлетворяет неравенству

$$A(\sigma, 1) \leq \frac{M}{4} \eta(\alpha) + \frac{M^2}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sigma\alpha}{4(1 - \sigma^2)}. \quad (3.51)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы выберем α так, чтобы было $\eta(\alpha) < \varepsilon/2M$, и затем выберем $\sigma < 1$, чтобы было

$$\frac{M^2}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sigma\alpha}{4(1 - \sigma^2)} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда неравенство (3.51) даст

$$A(\sigma, 1) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $x^{(n)}$ и для x .

¹⁾ См. примечание на стр. 127.

С другой стороны, мы знаем, что

$$A_n(0, \sigma) \rightarrow A(0, \sigma)$$

при $n \rightarrow \infty$, в силу того что сходимость $x^{(n)}$ к x равномерна в любой замкнутой подобласти B . Следовательно, можно выбрать число N так, чтобы для всех $n \geq N$ было справедливо неравенство

$$|A_n(0, \sigma) - A(0, \sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, у нас

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

для всех $n \geq N$, и теорема о непрерывности доказана полностью.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ДУГЛАСА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В случае контуров γ , состоящих из нескольких замкнутых кривых, опыты с мыльной пленкой приводят к многосвязным минимальным поверхностям, например типа классической поверхности вращения наименьшей площади. Более того, те же опыты иногда указывают на существование минимальных поверхностей высшей топологической структуры, таких, как поверхности ненулевого рода или неориентируемые поверхности (см. фиг. 48 и 49)¹⁾. Эти более сложные поверхности образуются в тех случаях, когда они более устойчивы, т. е. имеют меньшую площадь, чем односвязные поверхности, натянутые на тот же контур. Сформулируем общую задачу.

*Задача Дугласа*²⁾. В m -мерном x -пространстве задана система γ , состоящая из k жордановых кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Требуется построить минимальную поверхность с заданной эйлеровой характеристикой и заданным характером ориентируемости³⁾, имеющую γ своей границей.

Возможность решения этой задачи зависит от некоторых условий, как это видно из примера с минимальными поверхностями, натянутыми на две параллельные окружности. Натянутая на γ минимальная поверхность заведомо будет поверхностью катеноида, если окружности так близки друг к другу, что допустимый класс включает двусвязные поверхности с площадью, меньшей суммы площадей кругов, ограниченных этими окружностями. Если же окружности находятся далеко друг от друга, то они не ограничивают устойчивых двусвязных минимальных поверхностей и решением можно считать лишь вырожденную поверхность, состоящую из двух кругов.

Рассмотрим подробнее эту задачу, введя в качестве параметра расстояние a между плоскостями, в которых лежат граничные окружности. Для малых значений a решение в форме катеноида существует и дает абсолютный минимум площади. Если a увеличивается до определенного значения a_0 , то площадь катеноида приближается к сумме площадей кругов, ограниченных данными окружностями.

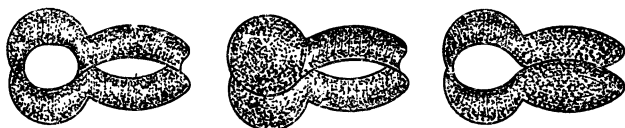
1) Ряд таких опытов описан Курантом [24].

2) Формулировка и первое доказательство разрешимости задачи были даны Дугласом (см. [32, 33, 34, 36] и особенно [37]).

3) Это означает, что заранее указано, ориентируема или неориентируема искомая поверхность. — *Прим. перев.*

Для значений a , немного больших a_0 , катеноид все же дает относительный минимум площади, в то время как абсолютный минимум (точную нижнюю грань) дает совокупность двух кругов. Если увеличивать a до некоторого значения a_1 , определяющего „сопряженное“ положение граничных кругов, то катеноид перестает давать и относительный минимум, давая все же стационарное значение площади¹⁾.

Аналогичное положение имеется в случае общей задачи Дугласа. Сформулируем достаточное (но не необходимое) условие существования ее решения. Поверхность, ограниченную заданной системой γ



Фиг. 48. Минимальные поверхности различных типов, натянутые на одинаковые контуры.

кривых γ , назовем поверхностью низшего типа, если она обладает одним из следующих двух свойств (или двумя вместе).

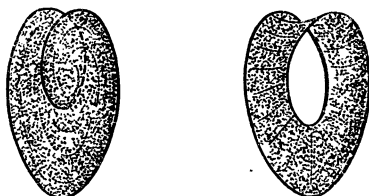
1) Эйлера характеристика поверхности меньше заданной.

2) Поверхность вырождается, т. е. состоит из двух или более поверхностей, суммарная характеристика которых не превосходит заданной, причем эти поверхности ограничены дополнительными множествами точек кривых γ .

Теперь условие формулируется следующим образом:

Теорема 4.1. Для существования решения задачи Дугласа достаточно, чтобы точная нижняя грань d интегралов Дирихле для невырожденных допустимых поверхностей x была строго меньше точной нижней грани d^* интегралов Дирихле для поверхностей низшего типа, натянутых на контур γ .

На фиг. 48 и 49 изображены поверхности, которые могут служить примерами к этой теореме. Они представляют собой поверхности рода 1 и типа листа Мёбиуса и доставляют минимальное значение d для площади, меньшее, чем такое же значение для поверхности рода 0. В этих примерах система кривых γ ограничивает не только одну односвязную минимальную поверхность, решающую задачу Плато в смысле гл. III, но и поверхности высших типов, причем поверхности высшей топологической структуры более устойчивы.



Фиг. 49. Минимальная поверхность, образующая лист Мёбиуса, и односвязная поверхность, натянутая на тот же самый контур.

¹⁾ См. изложение этого вопроса у Блисса ([7], гл. IV).

Следует подчеркнуть, что в формулировке задачи Дугласа неориентируемость поверхности задается в качестве условия, налагаемого на кривые γ . Из примера плоской границы γ видно, что это дополнительное условие может привести к неразрешимости задачи. Однако мы не будем далее заниматься этим вопросом.

Доказательство теоремы 4.1 проводится вариационными методами, подобными развитым в гл. III. Мы попрежнему минимизируем интеграл $D_B[x]$, однако теперь для области параметров B векторов $x(u, v)$ задается лишь ее топологическая структура, а саму область нельзя фиксировать заранее. Например, в случае двусвязных поверхностей нельзя выбирать в качестве области B любое фиксированное круговое кольцо, ибо два таких кольца не обязательно конформно эквивалентны и, следовательно, их, вообще говоря, нельзя считать конформными образами одной минимальной поверхности.

В соответствии со сказанным мы будем предполагать, что область параметров B в нашей вариационной задаче является представителем фиксированного класса \mathfrak{R} областей. Для минимальных поверхностей ненулевого рода применяемые до сих пор плоские области B придется заменить римановыми областями. Правильный выбор рассматриваемого класса областей B является решающим. Такой класс должен быть достаточно узким, чтобы в нем можно было построить, как в гл. III, сходящиеся минимизирующие последовательности, и в то же время достаточно широким, чтобы для него можно было провести вариационное доказательство того, что предел таких последовательностей является минимальной поверхностью.

Если мы заранее знаем, что каждая риманова область заданной структуры конформно эквивалентна некоторому представителю класса \mathfrak{R} допустимых областей B (в этом можно быть уверенным, если пользоваться областями с разрезами, введенными в гл. II), то характеристическое уравнение $\varphi(w) = 0$ для минимальных поверхностей можно вывести в точности тем же методом, что и в § 3 гл. III. Если же не предполагать заранее такой эквивалентности, то тождество $\varphi(w) = 0$ можно вывести из вариационного условия, выражающего свободу выбора не только отображения границы β на кривую γ , но также и допустимых вариаций самой области B .

В связи с этим случай двумерного x -пространства представляет особый интерес. Здесь естественно рассматривать лишь поверхности рода нуль, для которых задача Дугласа сводится к задаче конформного отображения области параметров B на плоские k -связные области G , ограниченные кривыми.

Приложения развиваемой здесь теории к теории конформных отображений k -связных областей на „нормальные области“ некоторых классов \mathfrak{R} мы рассмотрим в гл. V.

В настоящей главе мы сначала займемся теорией минимальных поверхностей. Сказанное выше (п. 1 § 5 гл. III) о роли конформных отображений в этой теории в еще большей степени, чем к началь-

ной задаче Плато, относится к задаче Дугласа, в которой рассматривается случай высших топологических структур. А priori представляется возможным, что различные типы параметрических областей B могут привести к различным решениям задачи Дугласа. Чтобы доказать, что полученная поверхность не зависит от выбора областей, мы должны использовать теоремы о конформной эквивалентности различных классов областей B . Более того, только с помощью этих теорем можно доказать эквивалентность вариационной задачи для площади и такой же задачи для интеграла Дирихле. Доказательство тождественности решения вариационной задачи с минимальными поверхностями в этой главе будет дано на основе теорем существования конформных отображений. В следующей главе мы приведем вывод основного соотношения $\varphi(\omega) = 0$, независимый от этих теорем.

§ 2. РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ k -СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

1. Формулировка задачи. Чтобы построить минимальную поверхность рода нуль, ограниченную k заданными ориентированными кривыми γ_i , мы сформулируем и решим нашу вариационную задачу для следующих различных классов \mathfrak{N} областей параметров B :

а) Область B представляет собой полную плоскость u, v с k исключенными кругами, центры и радиусы которых заранее не задаются (класс \mathfrak{N}_a).

б) Область B представляет собой область с разрезами в смысле гл. II (класс \mathfrak{N}_b).

в) Область B представляет собой расположенную над плоскостью u, v риманову область, ограниченную k единичными окружностями и имеющую точки разветвления общей кратности $2k - 2$ (класс \mathfrak{N}_c).

Чтобы наглядно описать поверхности последнего класса, представим себе над u, v -плоскостью k единичных кругов, связанных между собой с помощью точек разветвления, положение которых не фиксировано, так что получается поверхность с k отдельными граничными окружностями. В случае $k > 2$ допускается, что некоторые из точек разветвления сливаются в точки разветвления высшей кратности. Вообще допускается любая связь между листами, лишь бы общая кратность точек разветвления не превосходила $2k - 2$.

Во всех этих классах \mathfrak{N} граница β области B представляет собой систему k кривых $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Заданный в B вектор $x(u, v)$ мы назовем допустимым, если он обладает следующими двумя свойствами:

1) x непрерывен в замкнутой области $B \cup \beta$ и имеет кусочно непрерывные первые производные в B ;

2) x осуществляет непрерывное и монотонное отображение кривых β_i на заданные кривые γ_i .

Раз и навсегда предположим, что существуют допустимые векторы x , для которых $D[x] < \infty$; для спрямляемых кривых γ это доказано ¹⁾ наверное.

2. Условие сцепления. Как мы уже говорили в § 1, доказательство возможности решения задачи IV можно провести лишь при дополнительных ограничениях. Ниже мы сформулируем *условие сцепления*, которое постулирует существование минимизирующих последовательностей, не вырождающихся в изолированные поверхности. Для высших топологических структур то же условие исключает вырождение минимизирующих последовательностей в поверхности низшего топологического типа.

Последовательность x_n поверхностей x -пространства называется *сцепленной*, если существует такая положительная постоянная α , что любую расположенную на поверхности x_n замкнутую кривую диаметра, меньшего α , мы можем непрерывной деформацией стянуть в точку, оставаясь все время на поверхности. В противном случае мы будем говорить, что последовательность *стремится к вырождению*, или разделению. Принятая терминология соответствует интуитивному представлению о сформулированном условии. Если задача IV допускает сцепленную минимизирующую последовательность, то мы скажем, что сама эта задача удовлетворяет *условию сцепления*. Наша цель — доказать, что *задачи IV, удовлетворяющие условию сцепления, всегда разрешимы*.

Так как обратное очевидно, то мы сможем утверждать, что условие сцепления необходимо и достаточно для существования решения. Очевидно, что это условие неэквивалентно условию существования решения, сформулированному в теореме 4.1. В самом деле, вернемся к примеру задачи о минимальных поверхностях вращения и предположим, что дающий минимум катеноид имеет ту же площадь, что и пара кругов. Тогда существуют минимизирующие последовательности, сходящиеся к катеноиду и удовлетворяющие условию сцепления. С другой стороны, существуют также минимизирующие последовательности, сходящиеся к совокупности двух кругов и соединяющей их линии и не удовлетворяющие этому условию. Следовательно, теорема 4.1 дает лишь достаточное условие для существования решения.

После того как задача IV будет решена при дополнительном условии сцепления, мы докажем, что это условие является следствием условий теоремы 4.1, которые легче проверяются в конкретных случаях.

3. Решение вариационной задачи для k -связных областей G параметрических областей, ограниченных окружностями. Сначала мы построим решение в классе \mathfrak{N}_α параметрических областей.

¹⁾ См. п. 3 § 8 гл. III. Доказательство, данное для одного контура, можно обобщить и на наш случай.

Рассмотрим сцепленную минимизирующую последовательность x_n ; мы имеем

$$D_{B_n} [x_n] \rightarrow d,$$

где B_n — параметрическая область для x_n и d — точная нижняя грань интеграла Дирихле в задаче IV. Выберем подпоследовательность векторов x_n , для которых соответствующие области B_n стремятся к предельной области B , принадлежащей к классу \mathfrak{R}_a , и значения x_n на границах $\beta^{(n)}$ областей B_n образуют равномерно непрерывное семейство функций. Далее рассуждения проводятся в точности так же, как в § 2 гл. III.

С помощью линейного преобразования плоскости w мы отображаем B_n на область, ограниченную единичной окружностью $\beta_1^{(n)}$, концентрической с ней окружностью $\beta_2^{(n)}$ меньшего радиуса и окружностями, лежащими в кольце между $\beta_1^{(n)}$ и $\beta_2^{(n)}$. Такая нормировка заменяет условие трех точек п. 2 § 2 гл. III. Области B_n определяют предельную k -связную область B , если они не вырождаются при $n \rightarrow \infty$. Вырождение может произойти лишь в следующих трех случаях.

1) Две окружности, например $\beta_1^{(n)}$ и $\beta_\mu^{(n)}$, неограниченно приближаются друг к другу вблизи некоторой точки P , причем их радиусы остаются большими положительной постоянной η .

2) Две окружности неограниченно приближаются друг к другу вблизи некоторой точки P , причем радиус одной из них, скажем $\beta_\mu^{(n)}$, стремится к нулю.

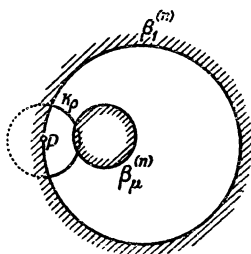
3) Одна или несколько окружностей, например $\beta_3^{(n)}$, $\beta_4^{(n)}$, ... , стремятся к некоторой точке P , которая лежит на ограниченном снизу положительной постоянной расстоянии от других окружностей.

Начнем с исключения первого случая вырождения. Обозначим через M верхнюю грань интегралов $D[x_n]$ и, выбрав малую постоянную δ , $0 < \delta < 1$, положим $\varepsilon(\delta) = \frac{2M}{\ln(1/\delta)}$. В соответствии с леммой 3.1¹⁾ для любого натурального n можно построить окружность k_n с центром в точке P и радиусом ρ_n , $\delta \leq \rho_n \leq \sqrt{\delta}$, так что длина L_n образа лежащей в B_n дуги k_n удовлетворяет неравенству $L_n \leq \sqrt{2\pi\varepsilon(\delta)}$. В рассматриваемом случае вырождения для достаточно больших n существует дуга k_n , пересекающая окружности $\beta_1^{(n)}$ и $\beta_\mu^{(n)}$, и, следовательно, в x -пространстве существует дуга длины L_n , соединяющая точки γ_1 с точками γ_μ . Расстояние между этими кривыми ограничено снизу положительной постоянной. С другой стороны, выбирая

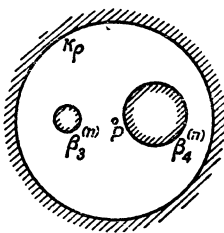
¹⁾ Эта лемма была доказана в предположении, что параметрическая область не зависит от n . В более общем случае, который рассматривается здесь, применимо буквально то же доказательство.

надлежащим образом δ , мы можем сделать величину ε , а следовательно, и L_n , сколь угодно малой. Полученное противоречие показывает, что первый случай вырождения не может иметь места.

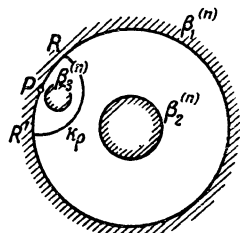
Аналогичные рассуждения приводят к выводу о невозможности третьего случая вырождения. В этом случае мы можем построить окружность k_p радиуса ρ с центром в точке P так, чтобы она содержала внутри все сходящиеся к P граничные окружности, начиная с достаточно большого фиксированного номера n , и так, чтобы длина L_p ее образа не превосходила $\sqrt{2\pi\varepsilon}(\delta)$. Это неравенство показывает, что последовательность x_n стремится к вырождению, и мы приходим к противоречию с условием сцепления.



Ф и г. 50.



Ф и г. 51.



Ф и г. 52.

Наконец, исключим второй случай вырождения, когда, например, окружность $\beta_3^{(n)}$ стремится к точке P , лежащей на $\beta_1^{(n)}$, а $\beta_2^{(n)}$ не подходит сколь угодно близко к $\beta_1^{(n)}$. Снова пользуясь леммой 3.1, мы можем для надлежаще выбранного малого значения δ и достаточно большого n провести через точки R и R' окружности $\beta_1^{(n)}$ дугу k_n окружности с центром в точке P так, чтобы она отделяла R от R' и чтобы длина L_n ее образа λ_n не превосходила $\sqrt{2\pi\varepsilon}(\delta) = \eta(\delta)$. Две дуги, на которые делится окружность $\beta_1^{(n)}$ точками R и R' , преобразуются в две дополнительные дуги кривой γ_1 с концами Q и Q' (образы R и R'), расстояние между которыми не превосходит $\eta(\delta)$. Поэтому диаметр одной из этих двух дуг может быть сколь угодно малым при достаточно малом значении δ . Следовательно, постоянную δ можно выбрать столь малой, чтобы такая дуга вместе с λ_n составляла на поверхности x_n замкнутую кривую ω_n сколь угодно малого общего диаметра. Кривую ω_n нельзя стянуть в точку, оставаясь на поверхности x_n , ибо она отделяет границу γ_2 от γ_3 , и последовательность x_n , вопреки нашему предположению, стремится к вырождению.

Таким образом, мы приходим к выводу, что вырождение последовательности B_n невозможно, откуда заключаем, что она содержит подпоследовательность, сходящуюся к области B того же класса \mathfrak{N}_a .

Теперь мы докажем, что на любой граничной кривой, скажем на $\beta_1^{(n)}$, семейство функций x_n равностепенно непрерывно; доказательство проводится тем же методом, что и в п. 2 § 2 гл. III. Мы снова выбираем величину $\tau(\sigma)$ (в соответствии с геометрической формой контура γ) следующим образом: если Q и Q' — какие-либо две точки граничной кривой γ , на расстоянии, меньшем σ , то диаметр одной из двух дуг γ , с концами в этих точках не превосходит τ . Очевидно, что τ больше σ , но стремится к нулю вместе с σ , и для заданного τ всегда можно найти достаточно малое σ .

Для данной сколь угодно малой положительной постоянной ε мы выберем σ так, чтобы было справедливо неравенство $\tau(\sigma) < \varepsilon$, и малую положительную постоянную

$$\delta < \varepsilon \frac{2\pi M}{\sigma^2},$$

где M обозначает верхнюю грань интегралов Дирихле $D[x_n]$. По лемме 3.1 мы построим лежащую в B_n дугу окружности k_n с центром в произвольной точке P_n окружности $\beta_1^{(n)}$ и радиуса ρ_n , $\delta \leq \rho_n \leq \sqrt{\delta}$, соединяющую точки R и R' на $\beta_1^{(n)}$ так, чтобы колебание x_n на этой дуге не превосходило σ . Меньшая из двух дуг β_1^* окружности $\beta_1^{(n)}$ с концами R и R' преобразуется в одну из двух дуг кривой γ_1 с концами в точках Q и Q' , соответствующих R и R' . Но в большую дугу γ_1^{**} она преобразоваться не может, ибо тогда образ γ_1^{**} большей дуги β_1^{**} , связывающей Q и Q_1 на $\beta_1^{(n)}$, имел бы диаметр, не превосходящий τ , и γ_1^* вместе с образом λ_n дуги k_n составлял бы на поверхности x_n не стягиваемую в точку замкнутую кривую диаметра, не превосходящего $\tau + \sigma$. Мы приходим к противоречию с условием сцепления.

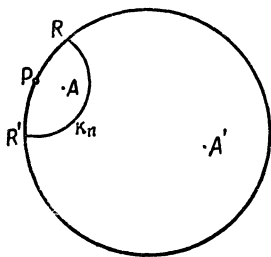
Таким образом, колебание функции x_n на дуге β_1^* меньше τ и тем самым меньше ε , и последовательность x_n равностепенно непрерывна на $\beta_1^{(n)}$. То же самое доказательство справедливо и для других граничных кривых.

После замены векторов x_n гармоническими векторами z_n с теми же граничными значениями на окружностях $\beta_1^{(n)}$ мы заканчиваем доказательство в точности так же, как в гл. III, и получаем подпоследовательность векторов z_n , сходящуюся к допустимому гармоническому в области B вектору x , для которого $D[x] = d$.

4. Решение вариационной задачи для других типов нормальных областей. Для класса \mathfrak{N}_b параметрических областей рассуждения предыдущего пункта остаются почти без изменений, для областей класса \mathfrak{N}_c требуются небольшие переделки. Достаточно обосновать метод для двусвязных областей B , состоящих из двух единичных

кругов, которые связаны между собой с помощью двух точек разветвления A и A' . Фиксируем точку A' , скажем $\omega = 1/2$, а вторую точку A оставим свободной.

Первый случай вырождения исключается на основании леммы 3.1¹⁾, второй — на основании следующих рассуждений. Если A стремится к граничной точке P на единичной окружности β_1 , то мы строим в B дугу окружности k_n с центром в P и радиуса ρ , $\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}$, где величина δ выбирается столь малой, как этого требует наша лемма. Для больших n дуга k_n отделяет точку A от A' так, что эта дуга соединяет точку R окружности β_1 с точкой R' на β_2 . Колебание функции x_n на дуге k_n становится сколь угодно малым вместе с δ , в то время как образы точек R и R' должны все время отстоять друг от друга на расстоянии, не меньшем



Фиг. 53.

минимального расстояния между γ_1 и γ_2 . Второй случай вырождения, следовательно, также оказывается невозможным.

§ 3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ

1. Достаточное условие Дугласа. Условие сцепления, необходимое и достаточное для существования решения вариационной задачи IV, в отдельных случаях трудно проверить. Более узкие и только достаточные, но зато и более наглядные условия, сформулированные в теореме 4.1, были упомянуты во введении к настоящей главе. Повторим в несколько расширенном виде утверждения этой теоремы для случая k -связных областей.

Поверхность x , k -связную и рода нуль, ограниченную кривой γ , мы назовем вырожденной, если она состоит из двух (возможно, пересекающихся между собой) отдельных поверхностей, совокупность границ которых составляет кривую γ . Точную нижнюю грань интегралов $D[x]$ для всех вырожденных поверхностей, натянутых на γ , мы обозначим через d^* . Пусть x разбивается на две поверхности x' и x'' соответственно с границами γ' и γ'' , причем γ' состоит из k' , а γ'' — из k'' кривых γ , ($k' + k'' = k$). Интегралы Дирихле, распространенные на k' -связные и k'' -связные параметрические области для поверхностей, натянутых на кривые γ' и γ'' x -пространства, мы обозначим через $D'[x]$ и $D''[x]$, а через d' и d'' — соответствующие точные нижние грани таких интегралов. Обозначим

$$d' + d'' = d^*$$

и докажем следующую теорему:

¹⁾ Очевидно, что эта лемма остается в силе для римановых областей B .

Теорема 4.2. Для любого возможного типа вырождения поверхности x справедливо неравенство

$$d \leq d^*. \quad (4.1)$$

Далее мы напоминаем содержащееся в теореме 4.1

Условие Дугласа. Если для всех возможных вырождений поверхности x справедливо неравенство

$$d < d^*, \quad (4.2)$$

то решение вариационной задачи IV существует (и, следовательно, существует невырожденная k -связная минимальная поверхность с границей γ).

Одновременно с доказательством теоремы 4.1 удобно будет доказать еще одну теорему.

Теорема 4.3. Точная нижняя грань d в вариационной задаче IV полунепрерывно зависит от границы γ . Точнее, если последовательность $\gamma^{(n)}$ граничных кривых стремится к γ в смысле Фреше, то

$$d \leq \liminf d_n,$$

где d_n обозначает точную нижнюю грань интегралов $D[x]$ для поверхностей x , натянутых на $\gamma^{(n)}$. Теорема остается в силе, если кривые $\gamma^{(n)}$ имеют кратные точки. В гл. III мы доказали это утверждение для $k=1$, теперь хотим доказать его по индукции для любого k .

Доказательство всех этих теорем упростится, если с самого начала принять, что величины d , d^* , d' , d'' можно интерпретировать как точные нижние грани площади — это непосредственно вытекает из теории конформных отображений. Однако так как в следующей главе мы намереваемся изложить методы, при помощи которых теоремы существования конформных отображений выводятся из решения задачи IV, то здесь мы должны будем привести доказательства теорем 4.1—4.3, основанные лишь на свойствах интегралов Дирихле и не использующие их связи с площадью.

Необходимые для доказательства свойства интеграла Дирихле мы сформулируем в виде двух лемм.

2. Лемма 4.1 и доказательство теоремы 4.2. Эти леммы выражают тот факт, что вектор x можно подвергнуть некоторым вариациям, локально большим, но не увеличивающим существенно величину интеграла $D[x]$. Первая лемма утверждает, что вектор x можно заменить фиксированным постоянным вектором в некоторой окрестности точки P области B , варьируя его при этом лишь в несколько более широкой окрестности P так, чтобы величина интеграла $D[x]$ изменялась сколь угодно мало. Приведем более точную формулировку.

Лемма 4.1¹⁾. Пусть $\mathbf{z}(u, v)$ — произвольный ограниченный вектор, скажем $|\mathbf{z}| < M$, непрерывный в $B + \beta$, обладающий в B кусочно непрерывными производными и конечным интегралом Дирихле $D[\mathbf{z}]$. Тогда для заданной сколь угодно малой положительной постоянной α и некоторой точки P области B , скажем начала координат, можно найти достаточно малую постоянную η , $0 < \eta < 1$ и вектор $\mathbf{y}(u, v)$, совпадающий с \mathbf{z} вне окрестности $u^2 + v^2 \leq \eta^2$ точки P , имеющий заданное постоянное значение, скажем $\mathbf{y} = 0$, внутри более узкой окрестности $u^2 + v^2 \leq \eta^4$ той же точки, и удовлетворяющий неравенству

$$D[\mathbf{y}] < D[\mathbf{z}] + \alpha. \quad (4.3)$$

Иными словами, поверхность \mathbf{z} можно „вытянуть“ в окрестности любой данной точки без существенного увеличения интеграла Дирихле.

Следствие. Если область B содержит бесконечно удаленную точку, то можно подобным же образом найти такую достаточно большую постоянную η' и вектор $\mathbf{y}(u, v)$, совпадающий с \mathbf{z} в круге $u^2 + v^2 \leq \eta'^2$ и равный 0 вне более широкого круга $u^2 + v^2 \leq \eta'^4$, для которого справедливо неравенство (4.3).

Доказательство. (См. [14], стр. 685 и дальше.) Для доказательства леммы построим функцию

$$p(u, v) = p(r) = \begin{cases} 1, & r > \eta, \\ 1 + \frac{\ln \frac{\eta}{r}}{\ln \eta}, & \eta^2 \leq r \leq \eta, \\ 0, & r < \eta^2, \end{cases}$$

где $r^2 = u^2 + v^2$ и $\eta < 1$ — некоторая постоянная, и определим вектор \mathbf{y} следующим соотношением:

$$\mathbf{y}(u, v) = p(u, v) \mathbf{z}(u, v). \quad (4.4)$$

Положим еще

$$\varepsilon = D[p] = \frac{1}{2} \iint_{\eta^2 < r < \eta} (p_u^2 + p_v^2) du dv = -\frac{\pi}{\ln \eta}.$$

Пользуясь неравенствами $|p| < 1$, $|\mathbf{z}| < M$ и неравенством Буняковского — Шварца, находим

$$\begin{aligned} D[\mathbf{y}] &\leq D[\mathbf{z}] + M^2 D[p] + \iint_{\eta^2 < r < \eta} p(p_u \mathbf{z}_u \mathbf{z} + p_v \mathbf{z}_v \mathbf{z}) du dv \leq \\ &\leq D[\mathbf{z}] + M^2 \varepsilon + 2M \sqrt{\varepsilon D[\mathbf{z}]}, \end{aligned}$$

или

$$D[\mathbf{y}] \leq (\sqrt{D[\mathbf{z}]} + M \sqrt{\varepsilon})^2.$$

1) Эта лемма находится в соответствии с теоремой гл. III, гарантирующей существование точной нижней грани d для спрямляемых границ.

Так как неравенству (4.3) можно удовлетворить, выбрав η и, следовательно, ε достаточно малыми, то лемма доказана. Доказательство следствия проходит в основном аналогично.

Теорема 4.2 просто получается из леммы 4.1. Чтобы доказать ее, скажем для класса \mathfrak{R}_a областей B , мы рассмотрим в круговых областях B' и B'' допустимые векторы x' и x'' , соответствующие системам γ' и γ'' граничных кривых. Без нарушения общности примем, что область B' лежит внутри одной из ограничивающих ее окружностей, B'' содержит бесконечно удаленную точку и что обе области содержат начало координат O . Выберем произвольную малую положительную постоянную ε и ограничимся рассмотрением допустимых векторов, для которых

$$D_{B'} [x'] < d' + \varepsilon, \quad D_{B''} [x''] < d'' + \varepsilon.$$

В соответствии с леммой 4.1 заменим в B' вектор x' другим допустимым вектором y' , который равен 0 в малом круге K радиуса η с центром в точке O и для которого $D_{B'} [y'] < d' + 2\varepsilon$. Построим в B'' для достаточно большого η' допустимый вектор y'' , равный 0 при $r > \eta'$, для которого $D_{B''} [y''] < d'' + 2\varepsilon$, что возможно на основании следствия этой леммы. Далее мы подвергнем B'' подобному сжатию с центром в начале координат, умножив r на η/η' так, что окружность радиуса η' перейдет в окружность радиуса η . При этом сжатии интеграл Дирихле не изменится. Область и вектор, полученные после сжатия, мы попрежнему обозначим через B'' и y'' , через B^* обозначим $B' - K$ и через B^{**} — часть B'' , внешнюю к кругу K . Наконец, построим новую k -связную круговую область $B = B^* \cup B^{**}$ и в ней допустимый вектор

$$y = \begin{cases} y' & \text{в } B^*, \\ y'' & \text{в } B^{**}, \\ 0 & \text{на } k, \end{cases}$$

где k обозначает границу K . Тогда $D_{B^*} [y'] = D_{B'} [y']$ и $D_{B^{**}} [y''] = D_{B''} [y'']$, так что

$$D[y] = D_{B^*} [y'] + D_{B^{**}} [y''] < d' + d'' + 4\varepsilon.$$

Так как $d \leq D[y]$ и так как ε можно считать сколь угодно малым, то теорема 4.2 доказана для параметрических областей, ограниченных окружностями. В точности такие же доказательства можно дать в случае классов областей \mathfrak{R}_b и \mathfrak{R}_c , определенных в § 2.

3. Лемма 4.2 и доказательство теоремы 4.1. В то время как лемма 4.1 относится к вариации вектора $z(u, v)$ в параметрической области B , следующая лемма учитывает влияние на вектор некоторого преобразования в самом z -пространстве. Это преобразование, которое мы будем называть *стягиванием*, сжимает в точку целую сфериче-

скую окрестность, а точки вне некоторой большей окрестности остаются неизменными. Пусть A — точка, представленная произвольным постоянным вектором \mathbf{a} z -пространства, и ϵ — малая положительная постоянная. Преобразуем рассматриваемое векторное z -пространство в векторное y -пространство, сжимая в точку A сферу радиуса η^2 с центром в этой точке и оставляя неизменной внешность концентрической сферы радиуса η ; величину η мы положим равной $e^{-1/\epsilon}$. Пусть вектор $\mathbf{z}(u, v)$, заданный в параметрической области B , при стягивании преобразуется в вектор $\mathbf{y}(u, v)$, равный тождественно \mathbf{a} в сфере $|\mathbf{z} - \mathbf{a}| < \eta^2$ и совпадающий с \mathbf{z} при $|\mathbf{z} - \mathbf{a}| > \eta$. Имеет место

Лемма 4.2. Любой вектор \mathbf{z} с конечным интегралом Дирихле посредством надлежащим образом выбранного процесса стягивания можно преобразовать в вектор \mathbf{y} , для которого

$$D[\mathbf{y}] \leq (1 + \epsilon)^2 D[\mathbf{z}].$$

Иными словами, без существенного увеличения интеграла Дирихле вектора \mathbf{z} и без существенного изменения самого вектора можно так преобразовать поверхность, что ее часть, близкая к точке \mathbf{a} , стянется в эту точку.

Мы будем применять эту лемму к последовательностям поверхностей \mathbf{z} , стремящимся к вырождению. В частности, мы предположим, что поверхность \mathbf{z} почти вырождена в окрестности точки A , т. е. что на \mathbf{z} существует замкнутая кривая α , целиком лежащая в сфере радиуса η^2 с центром в A и разбивающая поверхность на две части, каждая из которых ограничена не только кривой α , но и некоторой частью границы γ . При стягивании такая поверхность \mathbf{z} преобразуется в поверхность, вырожденную в обычном смысле.

Доказательство. Можно положить $\mathbf{a} = 0$ и сжать m -мерное пространство \mathbf{z} в пространство \mathbf{y} посредством преобразования

$$y_\mu = p(r) z_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, m$$

или

$$\mathbf{y} = p(r) \mathbf{z}, \quad (4.5)$$

где p — функция расстояния $r = (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2)^{1/2}$ и параметра $\eta = e^{-1/\epsilon}$, заданная соотношением ¹⁾

$$p(r) = \begin{cases} 1, & r > \eta, \\ 1 + \frac{\ln \frac{\eta}{r}}{\ln \eta}, & \eta^2 \leq r \leq \eta, \\ 0, & r < \eta^2. \end{cases}$$

¹⁾ Эта функция существенно отличается от функции леммы 4.1 тем, что она зависит от расстояния в векторном пространстве, а не в параметрической области B .

Если в соотношении (4.5) подставить вместо \mathbf{z} вектор $\mathbf{z}(u, v)$, изображающий некоторую поверхность, то и вектор \mathbf{y} будет представлять поверхность, заданную в параметрической области B .

Рассмотрим открытое множество $B^* : \eta^2 < |\mathbf{z}| = r < \eta$, содержащееся в B . Интеграл Дирихле вектора \mathbf{y} мы представим в виде

$$D[\mathbf{y}] = \frac{1}{2} \int_B \int [(p_z u + p_u z)^2 + (p_z v + p_v z)^2] du dv = a + b + c,$$

Так как $p \leq 1$, то мы имеем неравенство

$$a \equiv \frac{1}{2} \int_B \int p^2 (z_u^2 + z_v^2) du dv \leq D[\mathbf{z}];$$

далее, из определения p находим

$$b \equiv \frac{1}{2} \int_B \int \mathbf{z}^2 (p_u^2 + p_v^2) du dv = \frac{1}{2} \int_{B^*} \int \mathbf{z}^2 (p_u^2 + p_v^2) du dv$$

и

$$c \equiv \int_B \int (pp_u \mathbf{z} z_u + pp_v \mathbf{z} z_v) du dv = \int_{B^*} \int (pp_u \mathbf{z} z_u + pp_v \mathbf{z} z_v) du dv.$$

Для производных p в области B^* справедливы оценки

$$|p_u| \leq \frac{\varepsilon}{r} |\mathbf{z}_u|, \quad |p_v| \leq \frac{\varepsilon}{r} |\mathbf{z}_v|.$$

Вспоминая, что $|\mathbf{z}| = r$, мы находим отсюда

$$|pp_u \mathbf{z} z_u| \leq \varepsilon \mathbf{z}_u^2, \quad |pp_v \mathbf{z} z_v| \leq \varepsilon \mathbf{z}_v^2, \\ \mathbf{z}^2 (p_u^2 + p_v^2) \leq \varepsilon^2 (\mathbf{z}_u^2 + \mathbf{z}_v^2),$$

и, следовательно,

$$b \leq \varepsilon^2 D_{B^*}[\mathbf{z}] \leq \varepsilon^2 D[\mathbf{z}], \\ c \leq 2\varepsilon D_{B^*}[\mathbf{z}] \leq 2\varepsilon D[\mathbf{z}].$$

Собирая полученные оценки, находим

$$D[\mathbf{y}] \leq D[\mathbf{z}] (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) = (1 + \varepsilon)^2 D[\mathbf{z}],$$

что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 4.1 мы разобьем на два шага. Сначала мы покажем, что система кривых γ , для которой задача IV не имеет решения, является границей поверхности \mathbf{x}_n , составляющих последовательности, стремящуюся к вырождению. Для удобства мы предположим, что параметрические области B_n поверхностей \mathbf{x}_n принадлежат к классу \mathcal{N}_α^1) и нормированы условием, по которому их внешняя

1) Для других типов областей B доказательство проводится вполне аналогично.

граница является единичной окружностью и существует другая граничная окружность с тем же центром. Второй шаг будет состоять в доказательстве того, что из существования стремящейся к вырождению минимизирующей последовательности вытекает соотношение $d = d' + d''$, противоречащее условию Дугласа $d < d' + d''$. Доказательство будет проведено по индукции с применением леммы 4.2 и теоремы о полунепрерывности, которая обобщает на k -связные области теорему 3.1. Последнюю мы будем доказывать одновременно с теоремой 4.1, снова пользуясь индукцией.

Теорема 4.4. Пусть $\gamma^{(n)}$ — последовательность систем \tilde{k} непрерывных контуров (возможно, с кратными точками) при $n \rightarrow \infty$, сходящихся в смысле Фреше к системе контуров γ , и x_n — последовательность допустимых векторов, определенных в параметрических областях B_n заданного класса и отображающих границы B_n на $\gamma^{(n)}$. В этих условиях точная нижняя грань d интеграла Дирихле для поверхностей, натянутых на γ , удовлетворяет неравенству

$$d \leq \liminf D_{B_n} [x_n]. \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) выражает полунепрерывность зависимости величины d от контуров γ .

Сделаем индуктивное предположение о том, что теорема 4.4 верна для $\tilde{k} = 1, 2, \dots, k-1$, и вернемся ко второму шагу доказательства, о котором говорилось выше. Рассмотрим (не обязательно минимизирующую) последовательность x_n , B_n векторов и параметрических областей, допустимых в задаче IV для границ $\gamma^{(n)}$, и предположим, что последовательность x_n стремится к вырождению. Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что разделение поверхностей x_n происходит в начале координат. Иными словами, на поверхностях x_n существуют замкнутые кривые $\tau^{(n)}$, разбивающие эти поверхности на части, примыкающие к различным участкам границы $\gamma^{(n)}$, причем кривые $\tau^{(n)}$ равномерно сходятся к началу координат. Это означает, что существует сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел η_n , такая, что

$$|x_n| < \eta_n \text{ на } \tau^{(n)}.$$

Кривая $\tau^{(n)}$ определяется как образ простой замкнутой жордановой кривой $l^{(n)}$ в области B_n , разделяющей эту область на две части B_n' и B_n'' , ограниченные $l^{(n)}$ и дополнительными системами $\beta^{(n)'} \text{ и } \beta^{(n)''}$ из k' и k'' граничных компонент.

В соответствии с леммой 4.2 заменим поверхности x_n , определенные в областях B_n , вырожденными поверхностями y_n так, чтобы

$$D_{B_n} [y_n] < D_{B_n} [x_n] + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$. Векторы y_n отображают границы $\beta^{(n)}$ областей B_n на системы кривых $\gamma^{(n)*}$, стремящихся к γ , как и границы $\gamma^{(n)1}$.

Имеем, очевидно,

$$\liminf D_{B_n} [y_n] \leq \liminf D_{B_n} [x_n]. \quad (4.7)$$

Предположим, что кривая $t^{(n)}$, на которой y_n обращается в нуль, содержит область B'_n внутри и область B''_n снаружи. Обозначим через B_n^* сумму B'_n и полной внешности кривой $t^{(n)}$, через B_n^{**} — сумму B''_n и всей внутренней области кривой $t^{(n)}$ и определим векторы

$$y_n^* = \begin{cases} y_n & \text{в } B'_n, \\ 0 & \text{вне } t^{(n)}; \end{cases} \quad y_n^{**} = \begin{cases} y_n & \text{в } B''_n, \\ 0 & \text{внутри } t^{(n)}. \end{cases}$$

Векторы y_n^* и y_n^{**} кусочно гладки в B_n^* и B_n^{**} , и их интегралы Дирихле связаны соотношением

$$D_{B_n^*} [y_n^*] + D_{B_n^{**}} [y_n^{**}] = D_{B_n} [y_n]. \quad (4.8)$$

Далее y_n^* и y_n^{**} отображают границы B'_n и B''_n соответственно на совокупности кривых $\gamma^{(n)*}$ и $\gamma^{(n)**}$, причем $\gamma^{(n)*} \rightarrow \gamma'$, $\gamma^{(n)**} \rightarrow \gamma''$ при $n \rightarrow \infty$. Все эти кривые являются допустимыми в вариационных задачах IV для систем из меньших чисел k' и k'' граничных кривых. По нашему индуктивному предположению для таких систем интеграл Дирихле полунепрерывен снизу, следовательно,

$$\liminf D_{B_n^*} [y_n^*] \geq d', \quad \liminf D_{B_n^{**}} [y_n^{**}] \geq d'',$$

где d' и d'' относятся к частям γ' и γ'' границы γ . Из (4.7) и (4.8) мы получаем

$$d' + d'' \leq \liminf D_{B_n} [x_n]. \quad (4.9)$$

Применяя неравенство (4.9) к минимизирующей последовательности B_n , x_n , для которой $D_{B_n} [x_n] \rightarrow d$, мы находим $d \geq d' + d''$, в то время как по теореме 4.2 имеем $d \leq d' + d''$; следовательно, $d = d' + d''$. Кроме того, неравенство $d \geq d' + d''$ противоречит условию (4.2), согласно которому

$$d < d' + d'' = d^*.$$

Таким образом, это условие не допускает существования вырождающихся минимизирующих последовательностей и, следовательно, достаточно для существования решения задачи IV.

1) Система $\gamma^{(n)*}$ совпадает с $\gamma^{(n)}$, если начало координат O не лежит на γ , ибо тогда можно было бы выбрать η столь малым, чтобы преобразование (4.5) не влияло на границу. Небольшое осложнение доказательства теоремы 4.1, вызванное необходимостью доказательства полунепрерывности, объясняется тем, что а priori нельзя исключить случай, когда точка O лежит на γ .

Чтобы закончить доказательство по индукции, нам остается доказать теорему 4.4 (о полунепрерывности) для $\tilde{k} = k$ в предположении, что она верна для $\tilde{k} < k$. Следует различать два случая. Если последовательность векторов x_n , о которой идет речь в теореме, стремится к вырождению, то полунепрерывность следует из неравенств (4.9) и (4.1). Если же векторы x_n удовлетворяют условию сцепления, то можно почти без всяких изменений повторить рассуждения, проведенные в п. 3 § 2 гл. III: области B_n образуют компактное множество и определяют предельную область B , векторы x_n равномерно непрерывны на границах $\beta^{(n)}$, гармонические векторы z_n , имеющие одинаковые граничные значения с x_n , стремятся при $n \rightarrow \infty$ к допустимому вектору x , отображающему на γ границу β области B ; для этого вектора

$$D[x] \leq \liminf D_{B_n}[x_n].$$

В частности,

$$d \leq \liminf d_n,$$

где d_n — минимальное значение интеграла Дирихле для $\gamma^{(n)}$ и B_n . Таким образом, полунепрерывность для k -связных областей установлена в обоих случаях.

Снова подчеркнем, что проведенный в предыдущих пунктах анализ остается в силе для различных типов параметрических областей, описанных в § 2; все рассуждения нуждаются при этом лишь в небольших изменениях.

4. Замечания и примеры. В предыдущих рассуждениях мы не пользовались результатами теории конформных отображений и потому в гл. V сможем применить теорему 4.2 для доказательства нескольких общих теорем о конформных отображениях. Там число измерений пространства $m = 2$.

С другой стороны, в общем случае, в частности при $m > 2$, можно исключить некоторые особенности, связанные с решением задачи IV без использования конформных отображений. Например, приведенные выше решения относились к заданным классам \mathfrak{K} параметрических областей B . Без теорем о конформной эквивалентности совокупности k -связных римановых областей классу \mathfrak{K} нормальных областей характеристика числа d как минимума интеграла Дирихле $D[x]$ остается искусственной, хотя в классе \mathfrak{K} и можно провести вариационное доказательство того, что решение является минимальной поверхностью. Простейшим классом \mathfrak{K} является класс полуплоскостей с разрезами, который по доказанному в гл. II содержит конформных представителей всех римановых областей с конечной эйлеровой характеристикой. Наше замечание еще в большей степени относится к случаю поверхностей ненулевого рода, который будет рассмотрен в последнем параграфе.

Как и в гл. III, применяя теоремы существования конформных отображений, можно доказать, что решение задачи IV совпадает с

решением задачи об отыскании поверхности наименьшей площади при заданных граничных условиях. Интерпретация величин d , d' , d'' как точных нижних граней площади поверхностей делает все теоремы этой главы интуитивно ясными и облегчает проверку их условий в частных случаях.

Примеры.

1) Достаточное условие Дугласа $d < d^*$ обычно удовлетворяется, если низшие типы поверхностей наименьшей площади обладают самопересечениями. Интуитивно это очевидно: если расщепить поверхность вдоль линий самопересечения, а затем установить новое отождествление берегов разрезов, то с помощью небольшой деформации можно получить поверхности меньшей площади, уже не имеющие самопересечений. Полученные поверхности могут иногда иметь высшую топологическую структуру; в этих случаях естественно ожидать, что данная система кривых ограничивает минимальные поверхности высшей топологической природы, более устойчивые, чем исходные самопересекающиеся поверхности.

2) Рассмотрим случай $k = 2$ для поверхностей рода 0. Допустим, что две граничные кривые γ_1 и γ_2 охватывают друг друга. Непосредственно ясно, что вырожденная поверхность, состоящая из двух односвязных минимальных поверхностей, ограниченных кривыми γ_1 и γ_2 , имеет большую площадь, чем двусвязная поверхность, которая получается из самопересекающейся пары поверхностей посредством деформации, удаляющей самопересечения. Отсюда следует, что условие Дугласа выполняется и существует невырожденное решение.

Аналогично можно убедиться в том, что кривая γ , имеющая вид узла, наряду с односвязными поверхностями с самопересечениями всегда ограничивает минимальные поверхности высшей топологической структуры¹⁾. Вообще для $k = 2$ условие Дугласа выполняется тогда, когда односвязные поверхности наименьшей площади, натянутые на γ_1 и γ_2 , пересекаются по замкнутой кривой. Интересной задачей является доказательство этого факта без использования интерпретации интеграла $D[x]$ как площади.

3) Рассмотрим примеры, не связанные с интерпретацией величин d , d' , d'' как площадей. В гл. V мы проверим условие $d < d^*$ для случая систем кривых γ , ограничивающих плоские области, непосредственно проанализировав интеграл Дирихле. Воспользовавшись очевидным обобщением теоремы 3.3 на k -связные области, мы установим достаточное условие посредством малых деформаций граничной системы γ . Отсюда будет следовать, что задача IV заведомо имеет решение для контуров γ , лежащих достаточно близко к плоскости.

¹⁾ Тот факт, что охватывающие друг друга кривые всегда определяют двусвязную минимальную поверхность, был впервые замечен Дугласом.

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ НА ВЫСШИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В заключение вернемся к задаче о минимальных поверхностях ненулевого рода. Как мы уже говорили, опыты с мыльной пленкой показывают, что для некоторых достаточно извилистых контуров решение задачи о наименьшей площади не обязательно является ориентируемой поверхностью (если γ состоит из одной кривой) или односвязной поверхностью (если γ — система контуров). Могут появиться поверхности типа листа Мёбиуса или другие неориентируемые поверхности, а также поверхности высшего рода [фиг. 48 и 49]¹⁾.

1. Существование решения. Чтобы сформулировать вариационную задачу IV для поверхностей ненулевого рода, мы должны выбрать параметрические области B той же топологической структуры. Наиболее удобными для этой цели являются изученные в § 7 гл. II нормированные полуплоскости с разрезами, берега бесконечных сечений которых отождествлены надлежащим образом; мы видели, что эти области образуют множество нормальных областей.

Как и в случае областей рода нуль, задача Дугласа не обязательно имеет решение заданной топологической структуры. Например, простая плоская граничная кривая γ не ограничивает ни минимальной поверхности рода 1, ни поверхности типа листа Мёбиуса²⁾. Точно так же, как в п. 2 § 2, формулируется условие сцепления; как и там, оно является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи. Остается в силе и достаточное условие $d < d^*$, где величина d^* относится к вырожденным поверхностям, ограниченными контурами γ . Последние либо состоят из двух отдельных поверхностей, сумма эйлеровых характеристик которых не превосходит заданной величины, либо вырождаются просто в силу того, что имеют меньшие эйлеровы характеристики. Если рассматривать величины d и d^* как минимальные значения площади, то можно сказать, что условие $d < d^*$ утверждает существование минимальных поверхностей данной топологической структуры всякий раз, когда существует поверхность этой структуры с площадью, меньшей точной нижней грани площадей поверхностей низшей структуры.

2. Доказательство существования для поверхностей типа листа Мёбиуса. Доказательство проходит в точности так же, как в предыдущем параграфе. Мы ограничимся его подробным разбором для типичного случая минимальных поверхностей типа листа Мёбиуса, натянутых на один контур γ ³⁾.

¹⁾ См. примечание на стр. 134.

²⁾ Единственная минимальная поверхность, ограниченная плоским контуром, — это часть плоскости.

³⁾ Рассуждения для общего случая аналогичны приводимым здесь, но вычисления более громоздки; см. [70].

Параметрические области для этого случая изображены на фиг. 29 и 30 (стр. 84), где A — фиксированная точка $u = 0, v = 1$, а ордината точки A' является параметром. Пусть x_n, B_n — минимизирующая последовательность векторов и областей, допустимых в задаче IV и нормированных условием, что образ точки $u = \infty$ при отображении границы β на кривую γ фиксирован. Предположим, что $d < d^*$, где d^* — точная нижняя грань интегралов Дирихле для односвязных поверхностей, натянутых на γ . Допуская, что области B_n , или их подпоследовательность, сходятся к предельной области B типа изображенной на фиг. 29, мы устанавливаем равномерную непрерывность векторов x_n на линии β (для области B типа изображенной на фиг. 30 рассуждения меняются лишь не существенно).

Далее рассуждаем, как выше, ср. лемму 3.1. Для любого положительного σ найдется величина $\tau(\sigma)$, такая, что если две точки Q и Q' линии γ находятся на расстоянии, меньшем σ , то одна из дуг QQ' этой линии имеет диаметр, меньший τ . При надлежащем выборе σ величина τ может быть сделана сколь угодно малой. Если P — произвольная точка β , то можно построить прямоугольник $R_n TR'_n$ (фиг. 54), в котором колебание вектора x_n не превосходит σ , в то время как

$$\delta < \overline{R_n P R'_n} < \sqrt{\delta},$$

где δ зависит только от σ и стремится к нулю вместе с ним. Так как векторы x_n монотонно отображают прямую β на жорданову

кривую γ , то колебание вектора x_n меньше τ либо на отрезке $R_n P R'_n$, либо на дополнительной бесконечной части прямой β . Второй случай легко исключается: принимая его, мы пришли бы к выводу, что существуют прямоугольники B_n^* , границы которых посредством векторов x_n отображаются на кривые $\gamma^{(n)*}$, стремящиеся при возрастании n к γ в смысле Фреше. Мы будем иметь

$$\liminf D_{B_n^*} [x_n] \leq \lim D_{B_n} [x_n] = d, \tag{4.10}$$

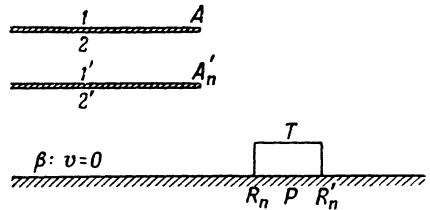
или, пользуясь полунепрерывностью d^* для односвязных областей,

$$d^* \leq \liminf D_{B_n^*} [x_n]. \tag{4.11}$$

Объединяя неравенства (4.10) и (4.11), получим

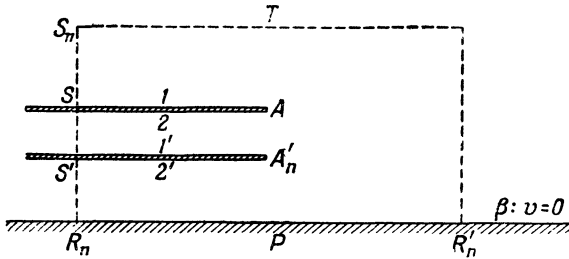
$$d^* \leq d,$$

вопреки предположению, по которому $d^* > d$.



Фиг. 54.

Доказательство нашего утверждения о равностепенной непрерывности следует дополнить анализом окрестности бесконечно удаленной точки $u = \infty$, — мы должны доказать, что для $|u| > 1/\sqrt{\delta}$ колебание вектора x_n на прямой β не превосходит $\tau(\sigma)$ (обозначения прежние). Для доказательства мы строим прямоугольник $R_n TR'_n$, длины сторон которого больше $1/\sqrt{\delta}$, а сторона $R_n S_n$ состоит из трех надлежащим образом связанных между собой отрезков; на этом прямоугольнике полное изменение x_n не превосходит σ (фиг. 55).



Фиг. 55.

Остается доказать, что колебание вектора x_n на отрезке $R_n PR'_n$ прямой β не может быть меньше τ . В самом деле, если это колебание меньше τ , то с учетом соответствия берегов можно утверждать, что часть B_n^* области B_n , внешняя к прямоугольнику $R_n TR'_n$, является односвязной областью; ориентируемость этой части обеспечивается барьером SS' , который исключает пути с возможным изменением ориентации. Граница области B_n^* попрежнему преобразуется посредством вектора x_n на кривую γ^* , которая стремится к γ в смысле Фреше и для которой $D_{B_n^*}[x_n] < D_{B_n}[x_n]$. Таким образом, мы снова приходим к тому же противоречащему условиям неравенству $d < d^*$, что и раньше.

Вместо односвязных областей B_n^* , определенных с помощью отождествления границ, можно было бы воспользоваться следующим построением. Сначала в соответствии с леммой 4.2 мы заменим вектор x_n допустимым вектором y_n , который принимает постоянные значения на контуре $R_n TR'_n$ и для которого $D[y_n] < D[x_n] + \alpha$, причем для достаточно малых δ величину α можно считать сколь угодно малой. В части B_n^* области B_n , внешней к прямоугольнику, мы отражаем полосу C с берегами 2 и 1' относительно ее средней линии μ так, что берег 1' оказывается примыкающим к берегу 1, а берег 2 — к берегу 2' границы C (фиг. 56). Обозначим получен-

ный после отражения вектор через y_n^* и определим новый вектор

$$y_n^0 = \begin{cases} y_n^* & \text{в } C, \\ y_n & \text{в } B_n^* - C, \end{cases} \quad (4.12)$$

который, очевидно, остается непрерывным на берегах разрезов. Удалив разрезы, мы получим во внешности B_n^* прямоугольника плоскую односвязную область B_n^0 и непрерывный в ней вектор y_n^0 , для которого $D[y_n^0] = D[y_n]$. Предыдущие рассуждения позволяют доказать равносвязную непрерывность семейства векторов y_n^0 . Остальные детали доказательства существования решения x точно такие же, как в случае односвязных областей.

Остается еще показать, что из нашего предположения $d < d^*$ вытекает невозможность вырождения последовательности областей B_n , т. е. что точка A'_n не может подойти сколь угодно близко к фиксированной точке A .

Предположим, что $A'_n \rightarrow A$, тогда в соответствии с леммой 3.1 мы можем заменить вектор x_n допустимым вектором y_n , совпадающим с x_n вне фиксированного круга с центром в точке A , равным нулю внутри меньшего круга, концентрического с первым, и таким, что $D[y_n] < D[x_n] + \alpha$ для сколь угодно малого заданного числа α . В частности, y_n равен нулю на прямолинейном отрезке AA'_n для достаточно большого n . Снова заменим вектор y_n в полосе C между берегами 2 и 1' вектором y_n^* и определим вектор y_n^0 соотношениями (4.12). Очевидно, что вектор y_n^0 непрерывен в верхней полуплоскости $H: v > 0$ с исключенными сечениями, и

$$D_H[y_n^0] = D[y_n] < D[x_n] + \alpha.$$

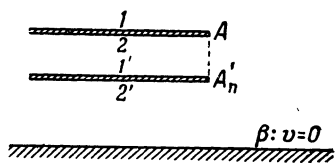
Так как y_n^0 является допустимым вектором в вариационной задаче для односвязной области, натянутой на контур γ , то мы имеем $d^* \leq D_H[y_n^0]$ и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$d^* \leq d + \alpha;$$

поскольку число α может быть выбрано сколь угодно малым, отсюда следует, что, вопреки нашему предположению,

$$d^* \leq d.$$

Таким образом, вырождение последовательности B_n невозможно и наше доказательство закончено.



Фиг. 56.

3. Другие типы параметрических областей. В общей задаче Дугласа можно использовать и другие типы параметрических областей B . Например, чтобы получить поверхности рода p , ограниченные k кривыми γ , в качестве B можно взять риманову поверхность, состоящую из k единичных кругов и полной плоскости, причем $k+1$ ее листов связываются посредством $2k-2+4p$ точек разветвления [17]; границы β , этих кругов будут соответствовать кривым γ .

Отразив такие поверхности одновременно во всех граничных окружностях, мы получим симметричные замкнутые римановы поверхности \tilde{B} , которые также могут служить параметрическими областями для допустимых векторов, имеющих симметричные значения в симметричных точках. Для изучения неориентируемых минимальных поверхностей в качестве параметрических областей можно использовать замкнутые симметричные поверхности, которые в отличие от только что описанных не распадаются при разрезах вдоль линий симметрии, соответствующих линиям γ ¹⁾. Другой возможный класс параметрических областей B для поверхностей рода p доставляют фундаментальные области групп автоморфизмов, порожденных линейными преобразованиями комплексной плоскости, причем из фундаментальных областей нужно исключить k кругов. Значение параметрических областей состоит в том, что они связывают теорию минимальных поверхностей с понятиями теории функций; в других отношениях их значение для нашей теории находится под сомнением. В случае областей ненулевого рода, даже в большей степени, чем для областей рода нуль, теория не может дать удовлетворительных результатов, если заранее не известно, что рассматриваемый класс параметрических областей является классом нормальных областей заданной структуры.

Трудности, которые возникают при отказе от использования теорем существования конформных отображений, мы проиллюстрируем для случая $k=1$, $p=1$. Выберем в качестве B двулистную поверхность, состоящую из единичного круга и полной плоскости, связанных четырьмя точками разветвления, лежащими внутри круга. Если минимизирующая последовательность B_n вырождается так, что две точки разветвления стремятся к одной точке, уничтожая друг друга, и в пределе остаются лишь две точки разветвления, то предельная область B будет односвязной областью, для которой $p=0$. Однако эта область, состоящая из единичного круга и полной плоскости, связанных двумя точками разветвления, является областью иного типа, чем области B , которые использовались выше при определении нижнего предела d для односвязных областей рода 0. Для того чтобы показать, что области, полученные в результате такого процесса вырождения, равносильны областям первоначально рассмотренного типа, необходимо воспользоваться конформными отображениями.

¹⁾ Дуглас [33] основывал свой анализ на изучении симметричных римановых поверхностей.

Подобное положение имеет место и для других типов областей B , например для плоских областей, определяемых фундаментальными областями групп автоморфизмов для линейных подстановок с p образующими элементами. Так как группа и граничные окружности зависят лишь от конечного числа параметров, то доказательство разрешимости вариационной задачи проводится точно тем же путем, что и выше. В этом случае последовательность B_n может вырождаться так, что предельной областью B будет область низшего типа, но по-прежнему определенная группой с p образующими. Такое вырождение происходит, например в том случае, если две соответствующие границы фундаментальных областей соприкасаются в соответствующих точках, или, как говорят, если фундаментальная область предельной группы имеет „параболическую вершину“. Предельная область является областью типа более низкого, чем тип допустимых областей, для доказательства эквивалентности снова приходится использовать конформные отображения. Такие же рассуждения имеют силу и для областей с разрезами.

4. Отождествление решений с минимальными поверхностями. Свойства решений. Если известно заранее, что рассматриваемый класс \mathfrak{R} параметрических областей содержит конформных представителей всех римановых областей заданной топологической структуры, то отождествление решения x с минимальной поверхностью проводится непосредственно. Точно так же, как и в § 3 гл. III для областей рода нуль, мы можем использовать для этого теорему склеивания или же, как в § 4 гл. III, получить соотношение $\varphi(\omega) = 0$ из условия обращения в нуль первой вариации

$$V = \iint_B [(\lambda_u - \mu_v)p - (\lambda_v + \mu_u)q] du dv$$

для произвольных λ и μ .

Из того, что многогранники данной структуры конформно эквивалентны областям B , как и раньше, можно заключить, что наши решения представляют собой поверхности, площадь которых наименьшая возможная в заданных условиях. Далее, достаточно очевидным является распространение на решения задачи Дугласа теоремы о взаимно однозначном соответствии между кривыми β и γ . Аналогично, на решения общей задачи Дугласа легко распространяются теоремы о полунепрерывной и непрерывной зависимости величины d от заданной границы.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Предмет изучения. В гл. I и II конформное отображение произвольной римановой области G на область с разрезами B было получено построением отображающей функции с помощью принципа Дирихле. Другой подход [31] к решению задачи конформного отображения произвольной области G на каноническую область B любого из трех классов \mathfrak{R} дают методы, развитые в гл. III и IV. Здесь принцип Дирихле применяется для построения в области B функции, обратной той, которая отображает G на B . Ограничиваясь случаем k -связных плоских областей G ¹⁾, мы постараемся использовать этот метод для получения теорем существования конформных отображений таких областей²⁾ на канонические области различных классов.

Доказательство теорем существования проводится в следующие два шага. Во-первых, рассматривая области B из класса \mathfrak{R} как параметрические области, мы должны доказать существование решения вариационной задачи IV, сформулированной в предыдущей главе. Во-вторых, мы должны для решения x этой задачи из условия обращения в нуль первой вариации V вывести соотношение $\varphi(\omega) = 0$. Доказательство первого утверждения мы отложим на конец главы. Сейчас, предполагая, что вариационная задача имеет в области B решение x , мы сосредоточим свое внимание на выводе соотношения $\varphi(\omega) = 0$.

2. Первая вариация. Как было установлено в п. 1 § 4 гл. III, выражение (3.17)

$$V(x, \lambda, \mu) = \iint_B [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv,$$

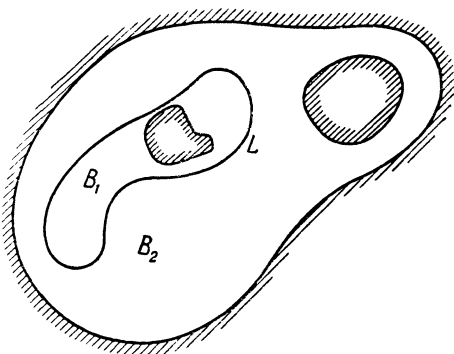
$$p + iq = (x_u^2 - x_v^2) - 2ix_u x_v = \varphi(\omega)$$

¹⁾ В соответствии с доказанным в гл. II любая k -связная риманова область конформно эквивалентна некоторой плоской области, следовательно, ограничение, наложенное в этой главе на области, не уменьшает общности результатов.

²⁾ Для удобства изложения мы исключаем случай областей G с граничными компонентами, состоящими из отдельных точек. Если такие точки не рассматривать как граничные, то получится область G' меньшей связности, не имеющая точечных граничных компонент. Отображение последней на каноническую область будет в то же время являться и отображением области G .

для первой вариации интеграла $D[x]$ справедливо не только для односвязных областей B и для вариаций, которые преобразуют область B в себя, но также и для любых областей заданного класса \mathfrak{N} и для любых вариаций Λ и M , удовлетворяющих условиям (3.14) и преобразующих B в другую допустимую область B' .

Выражение (3.17) можно несколько преобразовать. Пусть область B разделена на две части, $B = B_1 + B_2$, кусочно гладкой граничной линией L , состоящей из внутренних точек B . Предположим, что $\Lambda + iM$, а следовательно, и $\lambda + i\mu$ являются аналитическими функциями w в области B_1 ¹⁾, тогда вариация $w = w' + \varepsilon (\Lambda + iM)$ будет



Фиг. 57.

осуществлять конформное отображение B_1 на некоторую область B'_1 . Следовательно, интеграл Дирихле, распространенный на часть B_1 , останется неизменным, и мы приходим к выражению (3.23) для первой вариации V , в котором интеграл распространяется лишь на область B_2 :

$$V(x, \lambda, \mu) = \iint_{B_2} [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv.$$

Допустим теперь, что в выражении (3.17) вектор x является гармоническим и, следовательно, $p + iq = \varphi(w)$ — аналитическая функция. Если допустить еще, что λ и μ обращаются в нуль в окрестности всех граничных кривых B_2 , кроме L , то выражение (3.23) после интегрирования по частям примет вид

$$V(x, \lambda, \mu) = \int_L [\lambda(p dv + q du) + \mu(p du - q dv)] \quad (5.1)$$

(так как p и q удовлетворяют условиям Коши—Римана, то интеграл по области B_2 обращается в нуль и остается только криволинейный интеграл вдоль L). Формулу (5.1) можно записать также в виде

$$V(x, \lambda, \mu) = \text{Im} \int_L (\lambda + i\mu) \varphi(w) d\tau. \quad (5.2)$$

¹⁾ Можно отказаться от предположения об ограниченности первых производных Λ и M в области B_1 , но для области B_2 это предположение существенно.

Если x и B решают вариационную задачу IV, то, как мы видели в предыдущих главах, выражение V обращается в нуль для всех допустимых вариаций x и B . Нашей задачей является вывести из условия обращения в нуль первой вариации соотношение $\varphi(\omega) = 0$ для различных классов \mathcal{M} . Для этой цели нет нужды рассматривать „произвольные“ вариации, можно ограничиться лишь некоторым подмножеством допустимых вариаций, зависящим лишь от конечного числа параметров ¹⁾.

§ 2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА КРУГОВЫЕ ОБЛАСТИ

1. Формулировка теоремы.

Теорема 5.1. Любую k -связную область G можно конформно отобразить на круговую область B , получаемую из полной плоскости исключением k кругов ²⁾, или из полуплоскости $v > 0$ исключением $k - 1$ кругов.

Следствие. Одну граничную окружность β , области B , точку γ , соответствующую фиксированной точке β_0 , и центр еще одной граничной окружности β_1 можно задать произвольно.

2. Формулировка и анализ вариационных условий. В следующих пунктах мы допустим, что вариационная задача IV для любой круговой области B плоскости u, v имеет своим решением вектор $x(u, v)$, а доказательство существования этого вектора для $k \geq 2$ отложим до § 7. Сначала мы получим и используем вариационное условие для решения (независимо от числа измерений x -пространства).

Обозначим через ω_0 центр граничной окружности β_0 в плоскости $w = u + iv$ и допустим, что точка ω^* окружности β_1 соответствует фиксированной точке кривой γ_1 , точку ω^* мы также будем считать фиксированной. Если B представляет собой полуплоскость с исключенными кругами, то в качестве β_1 мы выбираем действительную ось.

а) При вариации области B на себя, т. е. при отображении границы γ на β , мы получим следующий результат: на граничной окружности β , плоскости w функция $(w - \omega_0)^2 \varphi(w)$ является действительной и правильной аналитической всюду, кроме, быть может, полюса первого порядка в фиксированной точке ω^* на β_1 .

Если β_1 — прямая линия, то вариационное условие формулируется следующим образом: на прямой β_1 функция $\varphi(w)$ является действительной и правильной аналитической всюду, кроме, быть может,

¹⁾ Соотношение $V = 0$ для всех допустимых вариаций является следствием этого условия.

²⁾ Как говорилось выше, тривиальный исключительный случай, когда область G имеет изолированные граничные точки, в дальнейшем рассматриваться не будет.

полюса первого порядка в точке w^* ; в бесконечно удаленной точке $\varphi(w)$ имеет нуль по меньшей мере четвертого порядка.

Если, в частности, $w^* = \infty$, то полюс погашает нуль и $\varphi(w)$ имеет в бесконечности нуль по меньшей мере третьего порядка.

б) При вариации положения центра ω_v окружности β_v , мы получим условие

$$\int_{\beta'_v} \varphi(w) d\omega = 0$$

для любой кривой β'_v , гомотопной β_v .

в) При растяжении и повороте β_v вариационным условием служит соотношение

$$\int_{\beta'_v} (w - \omega_v) \varphi(w) d\omega = 0.$$

Если β_v — прямая на плоскости u, v , скажем прямая $v = 0$, то условия (б) и (в) принимают вид

$$\int_{\beta'_v} \varphi(w) d\omega = 0, \quad \int_{\beta'_v} w\varphi(w) d\omega = 0.$$

Для случая, когда граничная линия β_v является прямой, условие (а) получается непосредственно из такого же условия для окружности. Рассмотрим, например, единичную окружность плоскости w , которая преобразуется в действительную ось плоскости ζ с помощью функции $w = (\zeta - i)/(\zeta + i)$. В плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ вместо $\varphi(w)$ мы должны рассматривать функцию

$$\chi(\zeta) = (x_\zeta - ix_\eta)^2 = \varphi(w) \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2.$$

Так как $dw/d\zeta = 2i/(\zeta + i)^2$, то функция $(dw/d\zeta)^2$ имеет при $\zeta = \infty$ нуль четвертого порядка и, далее,

$$w^2\varphi(w) = \frac{1}{4} \chi(\zeta) (\zeta^2 + 1)^2,$$

так что функция $\chi(\zeta)$ действительна на действительной оси, ибо функция $w^2\varphi(w)$ действительна на окружности $|w| = 1$.

Замечания.

Для внешности круга условие (а) непосредственно сводится к такому же условию для внутренности круга с помощью преобразования¹⁾ $\zeta = \alpha/(z - \omega)$. Далее, условие (а) инвариантно относительно конформных отображений круга на себя. Например, если отобразить

¹⁾ Если β_v — единичная окружность, то $\zeta = 1/w$ и $\zeta^2\chi(\zeta) = w^2\varphi(w)$; условие для внешности β_v следует из условия для ее внутренности.

единичный круг на себя с помощью преобразования $w = (\zeta - a)/(\bar{a}\zeta - 1)$, то из действительности функции $w^2\varphi(w)$ на окружности $|w|=1$ будет следовать, что функция $\zeta^2\chi(\zeta)$ действительна на окружности $|\zeta|=1$, и наоборот. В самом деле, простой подсчет дает для $|\zeta|=1$ соотношение

$$w^2\varphi(w) = \zeta^2\chi(\zeta) \frac{|a-\zeta|^4}{(|a|^2-1)^2},$$

из которого, очевидно, вытекает условие (а).

3. Вывод вариационных условий. Условия (б) и (в) следуют непосредственно из формулы $V=0$, если в выражении (5.2) для функции V выбраны надлежащим образом вариации λ и μ . Пусть B — внутренность окружности β_1 , которую мы будем считать единичной, r, θ — полярные координаты в B . Параллельный перенос окружности β_1 в направлении оси u осуществляется допустимой вариацией Δ, M , для которой функция $\Delta + iM = \lambda + i\mu$ равна 1 в окрестности, ограниченной окружностью β_1 и гомотопной ей кривой L , и равна 0 в окрестности других граничных окружностей. Так как в первой окрестности вариация $\lambda + i\mu$ постоянна и, следовательно, является аналитической функцией w , то, пользуясь выражением (5.2), находим непосредственно

$$\operatorname{Im} \int_L \varphi(w) d\tau = 0.$$

Точно таким же образом, положив $\lambda + i\mu = i$ в окрестности β_1 , мы получим соотношение

$$\operatorname{Re} \int_L \varphi(w) d\tau = 0$$

и, объединив два этих результата, найдем

$$\int_L \varphi(w) d\tau = 0. \quad (5.3)$$

Растяжение окружности β_1 можно осуществить преобразованием $w' = (1 - \varepsilon)w$, растяжение с поворотом — преобразованием $w' = (1 - i\varepsilon)w$, что дает в окрестности β_1

$$\lambda + i\mu = w \quad \text{или} \quad \lambda + i\mu = iw.$$

Как и выше, из соотношения $V=0$, в котором функция V выражена по формуле (5.2), мы выводим вариационное условие для вариации радиуса окружности β_1

$$\int_L w\varphi(w) d\tau = 0. \quad (5.4)$$

Так как функция $\varphi(w)$ — правильная аналитическая в области B , то условия (5.3) и (5.4) эквивалентны условиям

$$\int_{\beta_1'} \varphi(w) dw = 0 \quad (5.5)$$

и

$$\int_{\beta_1'} w \varphi(w) dw = 0 \quad (5.6)$$

для любой кривой β_1' из B , гомотопной β_1 . Условие (5.5) справедливо также для окружностей β_ν с центрами ω_ν , $\nu > 1$. Вместо (5.6) мы получаем для этих окружностей

$$\int_{\beta_\nu'} (w - \omega_\nu) \varphi(w) dw = 0. \quad (5.6a)$$

Объединяя (5.6a) с (5.5), мы снова получаем соотношение (5.6)¹⁾.

Чтобы вывести условие (а), мы должны уточнить соответствующие рассуждения, проведенные в § 4 гл. III для случая $k=1$, когда функция $\varphi(w)$ правильна всюду внутри окружности β . Без нарушения общности можно предположить, что β_1 является единичной окружностью и содержит внутри все остальные окружности β_ν . Как и в гл. III, мы запишем соотношение $V=0$ в следующем виде:

$$\iint_{B_t} [p(\lambda_u - \mu_\nu) - q(\lambda_\nu + \mu_u)] du dv \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

при $t \rightarrow 1$, где B_t обозначает подобласть B , лежащую внутри круга радиуса $r=t < 1$ с центром в начале координат. Предельный переход равномерен для всех вариаций λ , μ , для которых модули производных $|\lambda_u|$, $|\lambda_\nu|$, $|\mu_u|$, $|\mu_\nu|$ равномерно ограничены.

Выберем фиксированное значение $r_0 < 1$, такое, чтобы все окружности $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ лежали в круге радиуса $r=r_0$, и предположим, что $t > r_0$. Как и в гл. III, рассмотрим функцию $\alpha(r, \theta)$, равную нулю при $r < r_0$, для которой $w' = w e^{i\alpha(r, \theta)}$ является допустимой вариацией области B на себя. Соотношение (5.7) даст тогда:

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t, \theta) H(t, \theta) d\theta \rightarrow 0 \quad (5.7a)$$

¹⁾ Условия (5.5) и (5.6) эквивалентны следующему утверждению: функция $\varphi(w)$ является второй производной функции $\psi(w)$, однозначной и аналитической в области B .

при $t \rightarrow 1$, где функция

$$H(r, \theta) = \text{Im } \omega^2 \varphi(\omega) = -2r x_r x_\theta \quad (5.8)$$

гармонична в области B .

Фиксируем число $h > 0$, такое, что $1 - h > r_0$, и рассмотрим полярные координаты ρ, η с полюсом в некоторой точке Q ($\rho < 1 - h$). Как и раньше, введем функцию

$$\alpha(r, \theta) = K(r, \theta; Q) P(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \eta) + \rho^2} P(r),$$

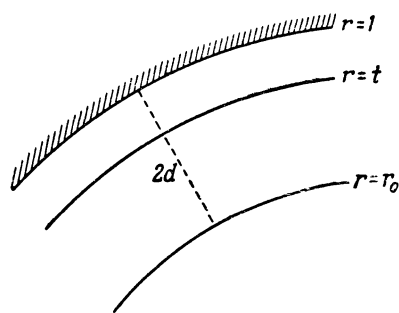
где

$$P(r) = \begin{cases} 0, & r < 1 - h, \\ \frac{2}{h}(r - 1 + h), & 1 - h \leq r \leq 1 - \frac{h}{2}, \\ 1, & r > 1 - \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Условие (5.7а) выражает следующий факт: пусть

$$H(Q; t) = H(\rho, \eta; t)$$

будет гармоническая функция, правильная в круге $0 \leq \rho < t$ и принимающая при $\rho = t$ те же значения, что и функция $H(Q)$, определенная равенством (5.8). Функция $H(Q; t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow 1$, причем для $\rho < 1 - h$ сходимость равномерна. (Равномерность сходимости следует из того, что при нашем выборе α величины $|\lambda_u|, |\lambda_v|, |\mu_u|, |\mu_v|$ равномерно ограничены.)



Фиг. 58.

Заменив r, θ на ρ, η , мы рассматриваем функцию $C(r, \theta; t) = H(r, \theta) - H(r, \theta; t)$, которая гармонична при $r_0 < r < t$, обращается в нуль на окружности $r = t$, следовательно, может быть гармонически продолжена в кольцо $r_0 < r < t^2/r_0$ (фиг. 58).

Далее, покажем, что функция $H(r, \theta)$ стремится к нулю при $r \rightarrow 1$. Обозначим через $A/2$ верхнюю грань $|H(r_0, \theta)|$ и положим $2d = 1 - r_0$. Для произвольного заданного ε выберем h , такое, чтобы выполнялись неравенства

$$h < \frac{d}{4}, \quad h \frac{A}{d} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и будем считать, что t меняется в пределах $1 - h/2 < t < 1$. Пользуясь соотношением $H(\rho, \eta; t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 1$, мы считаем t столь большим, что для всех θ имеет место неравенство $|H(r_0, \theta; t)| < A/2$,

и, следовательно, $|C(r_0, \theta; t)| = |C(t^2/r_0, \theta; t)| < A$. Отсюда заключаем, что во всем кольце $r_0 < r < t^2/r_0$ справедливо неравенство $|C(r, \theta; t)| < A$. Для производной C_r в более узком кольце, $1-h \leq r \leq t$, мы получаем $|C_r| < A/d$, так как функция C правильна в круге радиуса d с центром в любой точке этого кольца и $|C| < A$. Фиксировав число h , мы можем выбрать t столь близким к 1, чтобы было $|H(r, \theta; t)| < \varepsilon/2$ для $r \leq 1-h=r^*$.

Тогда будем иметь

$$|C(r^*, \theta; t)| \leq \int_{r^*}^t |C_r(r, \theta; t)| dr \leq \frac{A}{d} h < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|H(r^*, \theta)| \leq |C(r^*, \theta; t)| + |H(r^*, \theta; t)| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для заданного ε мы имеем $|H(r, \theta)| < \varepsilon$, если число $1-r=h$ выбрано достаточно малым; условие (а) установлено, если на вариации не наложено никаких условий на границе. Отсюда заключаем, что функция $H(r, \theta)$ стремится к 0 при $r \rightarrow 1$ и что эту функцию, а следовательно, и функции $w^2\varphi(w)$ и $\varphi(w)$ можно аналитически продолжить за окружность β .

Если фиксированы точка $F: r=1, \theta=\theta_0$ на окружности β_1 и ее образ на кривой γ , то функцию $\alpha(r, \theta)$ нельзя выбирать, как раньше, ибо теперь значение $\alpha(1, \theta_0)$ должно быть равно нулю. Допустимую вариацию в этом случае мы получим, положив

$$\alpha(r, \theta) = [K(r, \theta; Q) - K(r, \theta_0; Q)] P(r).$$

Вместо соотношения $H(Q; t) \rightarrow 0$ мы получим соотношение

$$H(Q; t) - cK(t, \theta_0; Q) \rightarrow 0,$$

где $c/2\pi$ есть среднее значение функции $H(r, \theta)$ на окружности $r=1$ или на любой концентрической с ней окружности. Заменяв в предыдущих рассуждениях функцию C функцией

$$C(r, \theta; t) = H(r, \theta) - H(r, \theta; t) - cK(t, \theta_0; r, \theta),$$

мы, как и раньше, получим, что

$$H(r, \theta) - cK(1, \theta_0; r, \theta)$$

является гармонической функцией при $r_0 < r < 1$, которая равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow 1$.

Так как $K(1, \theta_0; r, \theta)$ является мнимой частью аналитической функции $\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta_0} + w}{e^{i\theta_0} - w}$, правильной всюду, кроме полюса $w = e^{i\theta_0}$, и принимающей действительные значения на окружности $|w|=1$, то утверждение (а) относительно функции $w^2\varphi(w)$ доказано.

4. Доказательство тождества $\varphi(\omega) = 0$. Чтобы завершить доказательство теоремы существования конформного отображения, нужно из установленных выше вариационных условий вывести соотношение $\varphi(\omega) = 0$. Функция $\varphi(\omega)$, правильная в замкнутой области $B \dashv \beta$, или тождественно равна нулю, или имеет там лишь конечное число нулей. Подсчитав число нулей в области B и на ее границе β , мы исключим вторую возможность¹⁾.

Сначала мы докажем, что на каждой свободно варьируемой граничной окружности²⁾ β , функция $(\omega - \omega_0)^2 \varphi(\omega)$ имеет по меньшей мере четыре нуля. Считая опять, что β , является единичной окружностью, мы полагаем на ней $\omega = e^{i\theta}$, $d\omega = i\omega d\theta$ и

$$\omega^2 \varphi(\omega) = f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — периодическая функция угла θ , для которой в силу (5.5) и (5.6) имеют место соотношения

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \quad (5.9)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (5.10)$$

Равенство (5.9) показывает, что существует по меньшей мере две разделенные нулями $f(\theta)$ дуги окружности β , на которых соответственно $f(\theta) > 0$ и $f(\theta) < 0$. Если $f(\theta)$ меняет знак на β , только два раза, то мы можем предположить, что точками перемены знака служат точки $\theta = \theta_0$ и $\theta = -\theta_0$. Тогда функция $(\cos \theta - \cos \theta_0) f(\theta)$ для всех θ имеет один и тот же знак, что невозможно, ибо из формул (5.9) и (5.10) вытекает равенство

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta - \cos \theta_0) f(\theta) d\theta = 0.$$

Таким образом, число перемен знака функции $f(\theta)$, т. е. число ее нулей на окружности β , по меньшей мере равно четырем, ибо оно непременно четное. Этот результат непосредственно распространяется на другие граничные окружности β , если вместо функции $\omega^2 \varphi(\omega)$ рассматривать функцию $(\omega - \omega_0)^2 \varphi(\omega)$.

Для граничной окружности β , центр которой фиксирован, выше установлено лишь вариационное условие (в) или равенство (5.9). Следовательно, мы можем лишь доказать, что $f(\theta)$ или $\varphi(\theta)$ имеют

¹⁾ Этот метод доказательства предложил автору Леви.

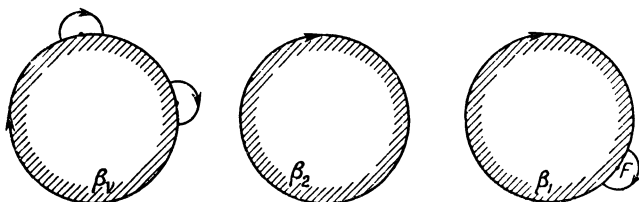
²⁾ В соответствии с примечанием 2 на стр. 158 мы предполагаем, что ни одна граничная окружность не вырождается в точку.

на такой окружности по меньшей мере два нуля. Если окружность β_ν фиксирована, то для нее нельзя считать доказанным ни равенство (5.9), ни равенство (5.10), так как эти условия выводятся из вариации границы. Более того, если фиксировать точку $F: \omega = \omega^*$ на β_ν (и ее образ на γ), то функция $(\omega - \omega_*)^2 \varphi(\omega)$ может иметь в этой точке полюс первого порядка. Так как эта функция действительна на β_ν , то она должна изменяться от $-\infty$ до ∞ , когда точка ω описывает эту окружность, начиная от точки ω^* . Отсюда следует, что функция $f(\theta)$ имеет на β_ν по меньшей мере один нуль, т. е. что разность между числом нулей и полюсов $f(\theta)$ на β_ν неотрицательна.

Для симметрии мы предположим, что B является областью, внешней ко всем k окружностям β_ν . Пусть фиксирована окружность β_1 и на ней точка F (вместе с ее образом на γ) и, кроме того, фиксирован центр окружности β_2 . Функция $\varphi(\omega)$ правильна в бесконечной области B и имеет при $\omega = \infty$ нуль по меньшей мере четвертого порядка¹⁾. Полное число N нулей функции $\varphi(\omega)$ в области B удовлетворяет, следовательно, условию

$$4 \leq N = \frac{1}{2\pi i} \sum_\nu \int_{\beta'_\nu} d \ln \varphi(\omega);$$

здесь β'_ν обозначают кривые, совпадающие с β_ν всюду, кроме окрестностей нулей функции $\varphi(\omega)$ и ее возможного полюса на β_1 , где β'_ν представляют собой дуги окружностей сколь угодно малого радиуса



Фиг. 59.

с центром в этих точках (фиг. 59). Если центр такой дуги является нулем или полюсом порядка r , то при достаточно малом радиусе значение интеграла вдоль нее сколь угодно мало отличается соответ-

¹⁾ Функцию $\varphi(\omega)$ можно представить в виде

$$\varphi(\omega) = \sum_{\mu=1}^m f'_\mu(\omega)^2 = \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u} - i \frac{\partial x_\mu}{\partial v} \right)^2$$

(см. § 1 гл. III), где функции $f_\mu(\omega)$ правильны в бесконечности и, следовательно, функции $f'_\mu(\omega)$ имеют там нуль по меньшей мере второго порядка.

ственно от $-\pi i r$ или $\pi i r$. Пусть N_ν и P_ν обозначают полные кратности нулей и полюсов функции $\varphi(w)$ на окружности β_ν , тогда суммарное значение интеграла по всем малым дугам будет приблизительно равно

$$-\frac{1}{2} \sum (N_\nu - P_\nu).$$

Значение интеграла по части β'_ν , совпадающей с β_ν , при малых радиусах сколь угодно близко к значению

$$\int_{\beta'_\nu} d \ln [(w - \omega_\nu)^2 \varphi(w)] - \int_{\beta_\nu} d \ln (w - \omega_\nu)^2.$$

Так как функция $(w - \omega_\nu)^2 \varphi(w)$ действительна на β_ν , то первый интеграл равен 0, а второй, очевидно, равен 2. Объединяя наши результаты, мы находим, таким образом,

$$4 \leq N = -\frac{1}{2} \sum (N_\nu - P_\nu) + 2k.$$

Так как $N_1 - P_1 \geq 0$, $P_2 = P_3 = \dots = P_k = 0$, $N_2 \geq 2$ и $N_\nu \geq 4$ для $\nu > 2$, то мы получаем

$$4 \leq N \leq 3.$$

Полученный результат абсурден, следовательно, остается лишь возможность, что функция $\varphi(w)$ тождественно равна нулю. Теорема 5.1 доказана.

В случаях, когда область B лежит внутри окружности β_1 или представляет собой полуплоскость с выключенными кругами, рассуждения остаются практически неизменными и не нуждаются в подробных разъяснениях.

§ 3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ОБЩИХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

1. Формулировка теоремы. Методы и результаты предыдущего раздела можно распространить на другие классы \mathfrak{N} нормальных областей. При этом получаются весьма общие теоремы существования конформных отображений для областей, зависящих от $3k - 6$ параметров ($k > 2$).

Рассмотрим плоскую область B , ограниченную кривыми $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. В качестве β_1 мы выберем прямолинейный отрезок или произвольную фиксированную замкнутую жорданову кривую; фиксированной точке F на β_1 пусть соответствует заданная точка P кривой γ_1 . В качестве β_2 примем произвольную жорданову кривую, звездную относительно некоторой точки σ , и допустим, что эту кривую можно подвергать подобному сжатию или растяжению с центром в σ . Кривые $\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_k$ пусть будут выпуклыми, для каждой из них мы зададим

определенную геометрическую форму и допустим, что их можно подвигать подобному преобразованию с произвольным центром, включая в предельном случае и параллельный перенос. Оставляя в стороне другие возможные варианты, мы рассмотрим следующие два класса параметрических областей B :

а) Класс \mathfrak{N}_a — кривая β_1 замкнута, B лежит внутри β_1 и вне $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$, граничные кривые не имеют общих точек.

б) Класс \mathfrak{N}_b — кривая β_1 представляет собой прямолинейный отрезок, B лежит вне $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$.

Теорема 5.2. Любую k -связную область G можно конформно отобразить на некоторую область B класса \mathfrak{N} (либо \mathfrak{N}_a , либо \mathfrak{N}_b) так, чтобы точки F и P соответствовали друг другу.

Сначала мы допустим, что наши кривые β , аналитические; позже, в п. 2 § 6, мы с помощью простого предельного перехода распространим наш результат на области с неаналитическими границами, например на области, границы которых имеют кратные точки, или на области, ограниченные совокупностью прямолинейных отрезков данного направления.

Доказательство теоремы снова будет опираться на предположение о разрешимости вариационной задачи IV для наших классов \mathfrak{N} параметрических областей (это предположение будет доказано в § 7). Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что из условия $V = 0$ вытекает тождество $\varphi(w) = 0$.

2. Вариационные условия. Условие $V = 0$ можно просто свести к его частным случаям, отмеченным в п. 3 § 2. В качестве предварительного шага мы рассмотрим случай вариации одной граничной кривой β_1 . Посредством функции $w = w(\zeta)$ мы отображаем внешность β_1 (на полной плоскости w) на внешность единичного круга вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = re^{i\theta}$ так, чтобы точки $\zeta = \infty$ и $w = \infty$ соответствовали друг другу. На основании условия аналитичности кривой β_1 , можно утверждать, что функция $w(\zeta)$ аналитична в области $|\zeta| \geq 1$ и ее производная $dw/d\zeta$ там ограничена. Точно так же и обратная функция аналитична на кривой β_1 и вне ее, следовательно, производная $dw/d\zeta$ не может обращаться в нуль. Таким образом, отображение $w = w(\zeta)$ сводит вариационное условие для вариации кривой β_1 в себя к условию для вариации единичной окружности $|\zeta| = 1$ в себя.

В соответствии с п. 2 § 2 это условие сводится к условию, что функция $\zeta^2 \varphi(w) (dw/d\zeta)^2 = \zeta^2 \chi(\zeta)$ действительна и поэтому правильна на окружности $|\zeta| = 1$. Функция $\chi(\zeta)$ также правильна на этой окружности, следовательно, $\varphi(w) = p + iq$ правильна на кривой β_1 . Так как фиксированная точка F кривой β_1 соответствует фиксированной точке P кривой γ_1 , то функция $\varphi(w)$ попрежнему может иметь полюс первого порядка в точке F . При помощи тех же

рассуждений, что и в § 2, мы докажем, что она имеет на β_1 по меньшей мере один нуль.

Учитывая, что функции p и q правильны на кривых β , всюду, кроме, быть может, точки F кривой β_1 , мы можем непосредственно воспользоваться условием

$$V = \int_B [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv = 0,$$

в котором следует предположить, что $\lambda = \mu = 0$ на всех β_k , $k \neq v$. Замечая, что $p_u - q_v = p_v + q_u = 0$, мы получаем после интегрирования по частям

$$\int_{\beta_v} (p\lambda - q\mu) dv + (p\mu + q\lambda) du = 0.$$

Рассматривая θ как параметр на кривой β , и обозначая штрихом дифференцирование по θ , мы перепишем последнее условие в виде

$$\int_0^{2\pi} [\lambda(pv' + qu') + \mu(pu' - qv')] d\theta = 0.$$

На β , вариации λ и μ можно считать составляющими вектора смещения \mathbf{v} , причем вариациям β , в себя соответствуют векторы (λ, μ) , касательные к β , т. е. такие, что на β , их составляющие могут быть представлены в виде $\lambda = Au'$, $\mu = Av'$, где A — произвольная (кусочно гладкая) функция θ . Немного изменяя рассуждения § 2, можно установить следующие вариационные условия:

а) При вариации кривой β , в себя условие состоит в том, что вектор \mathbf{w} с составляющими $pv' + qu'$ и $pu' - qv'$ всюду должен быть ортогональным к кривой β . Это условие равносильно тому, что функция $\zeta^2\chi(\zeta)$ принимает на β , действительные значения.

б) При вариации β , сводящейся к подобному преобразованию с центром в начале координат, имеем $\lambda = u$, $\mu = v$ и условие принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{r}\mathbf{w} d\theta = 0,$$

где \mathbf{r} обозначает вектор с составляющими u и v .

в) При вариации, сводящейся к параллельному сдвигу β , функции λ и μ принимают на β , произвольные постоянные значения и условие принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{w}\mathbf{a} d\theta = 0,$$

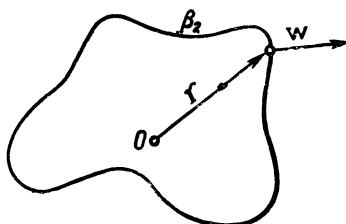
где \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор с составляющими a и b . Объединив условия (б) и (в), получим соотношение

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{w}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) dt = 0, \quad (5.11)$$

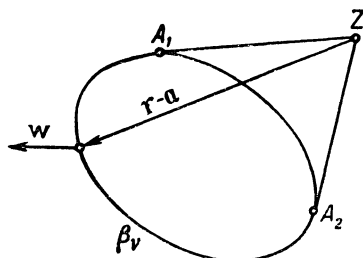
которое можно получить и непосредственно, если рассмотреть подобное преобразование β , с центром в точке $u = a, v = b$.

Если в некоторой точке вектор \mathbf{w} равен 0, то в этой точке $\varphi(w) = p + iq = 0$, ибо $u'^2 + v'^2 \neq 0$. Как и в § 2, мы замечаем, что функция $\varphi(w)$ либо тождественно равна нулю в области B , либо имеет конечное число N нулей в B и конечное число N , нулей на кривой β .

3. Доказательство тождества $\varphi(w) = 0$. Чтобы доказать, что функция $\varphi(w)$ не может иметь конечного числа нулей, мы пойдем по тому же пути, что и в § 2. Рассмотрим непрерывный вектор \mathbf{w} , нормальный к кривой β_2 в случае вариации типа (а) (фиг. 60). Так



Фиг. 60.



Фиг. 61.

как кривая β_2 предположена звездной относительно начала, то скалярное произведение векторов \mathbf{r} и \mathbf{w} не может изменять знака на β_2 , если \mathbf{w} не обращается в нуль, меняя свое направление. Равенство нулю интеграла от $\mathbf{r}\mathbf{w}$ при вариации типа (б) приводит к существованию на β_2 по меньшей мере двух нулей вектора \mathbf{w} , а следовательно, и функции $\varphi(w)$.

Те же рассуждения применимы и к другим кривым β . Кроме того, условие (в) обеспечивает существование двух дополнительных нулей функции $\varphi(w)$ на кривой β . Пусть A_1 и A_2 — два нуля $\varphi(w)$ на β , обеспеченные условием (б), Z — точка пересечения касательных к β в точках A_1 и A_2 (фиг. 61), \mathbf{a} — вектор OZ (если касательные параллельны, то в качестве \mathbf{a} можно взять любой параллельный им вектор). Из условия (5.11) заключаем, что вектор \mathbf{w} обращается в нуль по меньшей мере в двух точках β , отличных от A_1 и A_2 . В самом деле, в противном случае вектор \mathbf{w} может менять свое

направление внутренней нормали на направление внешней нормали лишь в точках A_1 и A_2 .

Вектор $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ соединяет точку Z с точкой, пробегающей кривую β_v . Так как кривые β_v по нашему предположению выпуклы при $v > 2$, то произведение $w(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ не должно менять знака на всех этих кривых. Полученный результат противоречит равенству (5.11) и показывает, что $\varphi(w)$ имеет на β_v по меньшей мере четыре нуля.

Начиная с этого места, доказательство тождества $\varphi(w) = 0$ проходит в точности так же, как в § 2. Как и раньше, мы предположим, что функция $\varphi(w)$ имеет только конечное число $N \geq 0$ нулей в области B , и обозначим через N_v число нулей на β_v . Попреемму

$$N = \frac{1}{2\pi i} \sum_v \int_{\beta'_v} d \ln \varphi(w),$$

где β'_v совпадает с β_v всюду, кроме малых полуокружностей, обходящих нули $\varphi(w)$ на β_v и полюс F на β_1 ; при обходе пути интегрирования область B остается с левой стороны. Предположим, что β_1 совпадает с действительной осью и что F — конечная точка β_1 . Так как $\varphi(w)$ действительна всюду на β_1 и имеет полюс порядка $P_1 \leq 1$ в точке F и нуль не ниже четвертого порядка в точке $w = \infty$, то эта функция должна иметь на β_1 не менее одного нуля. В противном случае она не могла бы приближаться к значениям $+\infty$ и $-\infty$ при подходе к точке F с различных сторон. Отсюда мы заключаем, что $N_1 - P_1 \geq 4$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_1} d \ln \varphi(w) \leq -2.$$

Пользуясь функцией $w(\zeta)$ из § 2 и соотношением

$$\chi(\zeta) = \varphi(w) \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2,$$

мы можем написать для кривой β_2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln \varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln \chi(\zeta) - \frac{2}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln w'(\zeta),$$

где кривой β_2 соответствует единичная окружность плоскости ζ . Так как $w'(\zeta)$ правильна при $|\zeta| \geq 1$ и не обращается в нуль, то второй интеграл равен нулю; первый мы переписываем в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln \zeta^2 \chi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln \zeta^2,$$

откуда, как и в § 2, получаем, что он равен $2 - N_2/2$. Так как $N_2 \geq 2$, то мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_2} d \ln \varphi(w) \leq 1.$$

Для $\nu > 2$ таким же путем, исходя из условия $N_\nu \geq 4$, находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_\nu} d^\nu \ln \varphi(w) \leq 0.$$

Сложив полученные результаты, будем иметь

$$N \leq -1.$$

Абсурдность этого неравенства приводит к заключению, что функция $\varphi(w)$ тождественно равна нулю. Доказательство теоремы 5.2 закончено.

Для доказательства других вариантов теоремы можно воспользоваться теми же рассуждениями с очевидными изменениями, которые нет необходимости подробно описывать.

В нашем доказательстве существенно условие аналитичности граничных кривых β_ν . Посредством аппроксимации аналитическими кривыми легко распространить результат и на неаналитические границы (см. п. 2 § 6). Теоремы предыдущего параграфа допускают существенное обобщение — вместо подобного преобразования граничных кривых β_ν можно рассматривать вариации, переводящие эти кривые в кривые заданных семейств.

§ 4. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ЕДИНИЧНЫМИ ОКРУЖНОСТЯМИ

1. Формулировка теоремы

Теорема 5.3. Любую плоскую ¹⁾ k -связную область G , не имеющую изолированных граничных точек, можно конформно отобразить на риманову поверхность B , состоящую из k одинаковых, например единичных, кругов, связанных точками разветвления ²⁾ общей кратности $2k - 2$. Кроме того, можно потребовать, чтобы произвольная фиксированная точка F_ν каждой граничной окружности β_ν соответствовала фиксированной точке P_ν граничного континуума γ , области G , а также задать положение одной простой точки разветвления поверхности B . Класс \mathfrak{R} таких областей зависит от $3k - 6$ действи-

¹⁾ Выше в связи с общим результатом гл. II мы отмечали, что выбор в качестве G плоской области не является существенным ограничением.

²⁾ В точках разветвления конформность отображения, конечно, нарушается.

тельных параметров: положение $2k - 3$ свободных точек разветвления определяется $4k - 6$ параметрами, задание граничных точек F_v уменьшает число параметров на k .

В § 7 мы докажем существование вектора $x(u, v)$ на поверхности B класса \mathcal{N} , решающего соответствующую вариационную задачу IV. Если считать это доказанным, то останется лишь вывести из условия $V = 0$ тождество $\varphi(\omega) = 0$, что мы сделаем примерно так же, как в § 2 и § 3.

2. Вариационные условия. Вариация точек разветвления. Повторяя доказательство, проведенное в п. 4 § 2, мы приходим к следующему заключению. Аналитическая функция

$$\psi(\omega) = \omega^2 \varphi(\omega)$$

правильна в окрестности всех единичных окружностей β_v , за возможным исключением полюсов первого порядка в точках F_v и действительна на этих окружностях.

Дальнейшие вариационные условия мы получим, варьируя положение точек разветвления, — это единственная возможная вариация поверхности B . Пусть P будет свободная (т. е. не фиксированная) точка разветвления и пусть, например, она расположена над точкой $\omega = 0$; через D мы обозначим окрестность этой точки на поверхности B , не содержащую других точек разветвления. Рассмотрим часть B_1 окрестности D , содержащую точку P и ограниченную замкнутой на поверхности B кривой L , например кривой, расположенной над окружностью.

Применим общее выражение (3.23) для вариации V , выбрав λ и μ равными нулю вне окрестности D и составляющими аналитическую функцию $\lambda + i\mu$ переменного ω в области B_1 , тогда будет иметь место формула (5.2). В частности, в B_1 положим $\lambda + i\mu = 1$ или $\lambda + i\mu = i$, тогда, как и выше, получим вариационное условие (5.3)

$$\int_L \varphi(\omega) d\omega = 0,$$

справедливое для любой замкнутой кривой L , не содержащей внутри точек разветвления, отличных от P .

В случае простой точки разветвления (5.3) является единственным вариационным условием. Если P является точкой разветвления высшего порядка, скажем порядка j , то условие (5.3) следует дополнить условиями, соответствующими разделению P на точки разветвления низшего порядка. В малой односвязной окрестности B_1 точки P , ограниченной кривой L , такое разделение можно осуществить с помощью аналитических преобразований вида

$$\omega' = \omega + \varepsilon \omega^{\frac{j}{j+1}} \quad (5.12)$$

или

$$\omega' = \omega + i\varepsilon\omega^{\frac{\nu}{j+1}}, \quad (5.13)$$

где ν может меняться от 0 до $j-1$ и ε — параметр. Чтобы доказать это утверждение, мы применим сначала преобразование $\omega = \sigma^{j+1}$ окрестности B_1 точки P в простую окрестность точки $\sigma = 0$ плоскости σ ; преобразование (5.12) примет тогда вид $\omega' = \sigma^{j+1} + \varepsilon\sigma^\nu$. Точки разветвления преобразованной окрестности B'_1 над плоскостью ω' будут соответствовать нулям производной

$$\frac{d\omega'}{d\sigma} = \sigma^{\nu-1} [(j+1)\sigma^{j+1-\nu} + \nu\varepsilon].$$

Мы видим, что преобразование (5.12) приводит к разделению точки разветвления над $\omega = 0$ на $j+1-\nu$ простых точек разветвления и одну точку разветвления $(\nu-1)$ -го порядка над $\omega' = 0$.

В области B_1 имеем $\lambda + i\mu = \omega^{\frac{\nu}{j+1}}$ для вариации (5.12) и, аналогично, $\lambda + i\mu = i\omega^{\frac{\nu}{j+1}}$ для вариации (5.13). В обоих случаях мы полагаем $\lambda + i\mu = 0$ вне широкой односвязной окрестности D точки P . В области $D - B_1$ функцию $\lambda + i\mu$ можно определить произвольно, с единственным ограничением, чтобы она была кусочно гладкой на поверхности B . Тогда из формулы (5.2) и условия $V = 0$ непосредственно получим

$$\operatorname{Re} \int_L \omega^{\frac{\nu}{j+1}} \varphi(\omega) d\omega = 0, \quad \operatorname{Im} \int_L \omega^{\frac{\nu}{j+1}} \varphi(\omega) d\omega = 0,$$

или

$$\int_L \omega^{\frac{\nu}{j+1}} \varphi(\omega) d\omega = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, j-1. \quad (5.14)$$

Из условий (5.14) вытекает

Лемма 5.1. В точке разветвления порядка j функция $\varphi(\omega)$ имеет полюс порядка, не превосходящего j .

Доказательство. Функцию $\varphi(\omega)$ можно представить в виде $\varphi(\omega) = \sum_{\mu=1}^m f_\mu^{\prime 2}(\omega)$, где $\operatorname{Re} f_\mu(\omega) = x_\mu$. Преобразование $\sigma = \omega^{\frac{1}{j+1}}$ отображает окрестность точки разветвления над $\omega = 0$ на простую окрестность точки $\sigma = 0$. Так как функции $f_\mu(\omega)$ имеют в окрестности точки $\omega = 0$ ограниченные действительные части, то они являются правильными аналитическими функциями σ ; такой же является и

функция $A(\sigma) = \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{df_{\mu}}{d\sigma}\right)^2$. Следовательно,

$$\chi(\sigma) = \varphi(w) = \left(\frac{d\sigma}{dw}\right)^2 \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{df_{\mu}}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{(j+1)^2 \sigma^{2j}} A(\sigma),$$

где функция $A(\sigma)$ правильна при $\sigma = 0$. Таким образом, функция $\varphi(w)$ имеет в точке $\sigma = 0$ полюс порядка $2j$. Рассмотрим, однако, условие (5.14); выражая его через переменную σ , мы получим

$$\int_{L'} \sigma^{\nu+j} \varphi d\sigma = \int_{L'} \sigma^{\nu+j} \chi(\sigma) d\sigma = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, j-1, \quad (5.15)$$

где L' — простая замкнутая кривая плоскости σ , окружающая полюс $\sigma = 0$ функции $\chi(\sigma)$. Отсюда следует, что в разложении $\chi(\sigma)$ по степеням σ

$$\varphi(w) = \chi(\sigma) = \dots + \frac{a_1}{\sigma} + \dots + \frac{a_j}{\sigma^j} + \frac{b_1}{\sigma^{j+1}} + \dots + \frac{b_j}{\sigma^{2j}}$$

все коэффициенты b , обращаются в нуль, т. е. функция $\varphi(w)$ действительно имеет в точке $\sigma = 0$ полюс порядка не выше j . Лемма доказана.

3. Доказательство тождества $\varphi(w) = 0$. Тождество $\varphi(w) = 0$ мы докажем тем же приемом, которым пользовались выше. Если функция $\varphi(w)$, а следовательно, и $\psi(w) = w^2 \varphi(w)$, не равна тождественно нулю, то функция $\psi(w)$ имеет в области B конечное число N нулей, и так как она правильна в окрестности граничных окружностей, то и число ее нулей N_{ν} на окружностях β_{ν} также конечно. В фиксированных точках F_{ν} она имеет полюсы порядка P_{ν} , равного 1 или 0. Как и раньше, получим, что если $P_{\nu} = 1$, то и $N_{\nu} \geq 1$, следовательно, для всех граничных окружностей β_{ν} имеем $N_{\nu} - P_{\nu} \geq 0$.

Наличие множителя w^2 увеличивает на $2k$ суммарный порядок N нулей $\psi(w)$ в области B . В соответствии с предыдущим пунктом суммарный порядок полюсов функции $\psi(w)$ в свободных точках разветвления не превосходит $2k - 3$, порядок полюса в фиксированной точке разветвления не более 2, следовательно, суммарный порядок P всех полюсов $\psi(w)$ не превосходит $2k - 1$. Объединив наши результаты, получим формулу

$$N - P \geq 1,$$

которая остается справедливой и в том случае, когда нули и полюсы сливаются. С другой стороны

$$1 \leq N - P = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu} \int_{\beta_{\nu}} d \ln \psi(w),$$

где снова β'_ν отличаются от описываемых в отрицательном направлении окружностей β_ν только малыми дугами, обходящими нули и полюсы функции $\psi(w)$ на этих окружностях.

Как и выше, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_\nu} d \ln \psi \leq 0,$$

ибо $N_\nu - P_\nu \geq 0$ и функция $\psi(w)$ действительна на β_ν . Мы приходим к противоречию: $1 \leq N - P \leq 0$, которое и доказывает, что функция $\psi(w)$, а следовательно, и $\varphi(w)$ тождественно равны нулю. Доказательство теоремы 5.3 закончено ¹⁾.

Описанный метод можно применить и для доказательства аналогичной теоремы для более общих поверхностей, которые получаются присоединением к данной k -связной области G некоторого числа полных плоскостей, причем каждая плоскость присоединяется с помощью двух точек разветвления.

§ 5. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Теорема 5.4. Для заданной области G конформное отображение, описанное в теоремах 5.1—5.3, определяется единственным образом.

1. Метод доказательства единственности ²⁾. Предположим, что область G отображена на две области B и B^* одного из рассматриваемых нами классов \mathfrak{N} . Из этого предположения следует, что существует аналитическая функция $w^* = f(w)$, осуществляющая конформное отображение области B на B^* . Доказательство теоремы единственности равносильно доказательству того, что $w^* = w$, т. е. доказательству тождества

$$g(w) = f(w) - w \equiv 0.$$

Доказательство этого тождества мы проведем тем же путем, которым доказывали тождество $\varphi(w) = 0$. Предположим, что функция $g(w)$ не равна тождественно нулю и, следовательно, имеет в области B конечное число N нулей и конечное число полюсов P . Оценивая разность $N - P$, мы придем к противоречию. Так как границы β и β^* областей B и B^* можно предположить аналитическими, то функцию $g(w)$ можно считать аналитической на β ; тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^k \int_{\beta'_\nu} d \ln g(w) = \sum_{\nu=1}^k I_\nu, \quad (5.16)$$

¹⁾ Теорема высказана Риманом. Другое доказательство см. у Грунского [42].

²⁾ Этот метод впервые предложен Карлеманом [10] и позже независимо найден Шиффманом [73].

где β'_1 совпадает с β_1 всюду, кроме малых полуокружностей с центром в нулях и полюсах функции $g(w)$ на β_1 ; при обходе этих кривых область G все время должна находиться с левой стороны.

2. Единственность для римановых поверхностей с точками разветвления. Сначала мы рассмотрим области, составленные из k единичных кругов, как в § 4. Предположим, что эти области нормированы заданием одной точки разветвления и ν пар соответствующих точек F_ν на β_ν и P_ν на γ_ν (по одной для каждой пары соответствующих граничных континуумов). В фиксированной точке разветвления имеем $f(w) = w$, т. е. $g(w) = 0$, так что $N \geq 1$; непосредственно очевидно, что $P = 0$.

Оценивая интеграл (5.16), мы замечаем, что комплексное число $g(w) = f(w) - w$ геометрически представляется вектором, соединяющим точку w с точкой $w^* = f(w)$. Интеграл

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta'_\nu} d \ln g(w)$$

дает число полных оборотов этого вектора, когда точка w описывает кривую β'_ν .

Если бы функция $g(w)$ не имела нулей на окружности β_ν , то ее можно было бы принять за путь интегрирования β'_ν ; при полном обходе β_ν вектор поворачивался бы один раз, так что было бы $I_\nu = 1$. Но мы знаем, что в точке F_ν этой окружности $g(w) = 0$. При обходе нуля порядка n величина интеграла увеличивается на $-n/2$, следовательно, у нас $I_\nu \leq 1 - 1/2$, и так как число I_ν должно быть целым, то $I_\nu \leq 0$. Из (5.16) мы получаем тогда, что $N \leq 0$ вопреки нашему предположению о том, что $N \geq 1$. Следовательно, $f(w) \equiv w$, и единственность отображения доказана.

3. Единственность для классов \mathfrak{N} плоских областей. Докажем теперь теорему единственности для класса \mathfrak{N}_a , описанного в § 3. Для числа полюсов снова имеем

$$P = 0. \quad (5.17)$$

Значение I_1 в правой части формулы (5.16) оценивается точно так же, как в п. 2, и мы получаем

$$I_1 \leq 0. \quad (5.18)$$

Так как кривая β_2^* получается из β_2 с помощью подобного преобразования с центром во внутренней точке и так как β_2 — звездная кривая относительно этой точки, то β_2 и β_2^* либо не имеют общих точек, либо совпадают. Если они совпадают, то мы повторяем рассуждения предыдущего пункта (меняя лишь направление интегриро-

вания) и получаем, что $I_2 = -1 - n/2$, где n — полная кратность нулей $g(w)$ на β_2 . Если β_2^* охватывает β_2 или лежит внутри нее, то $I_2 = -1$; во всех случаях

$$I_2 \leq -1. \quad (5.19)$$

Рассмотрим величины I_ν для $\nu > 2$. Может представиться любая из трех возможностей, отмеченных для величины I_2 , и тогда мы получим $I_\nu \leq -1$; но кроме того, возможны еще три случая расположения кривой β_ν^* относительно β_ν :

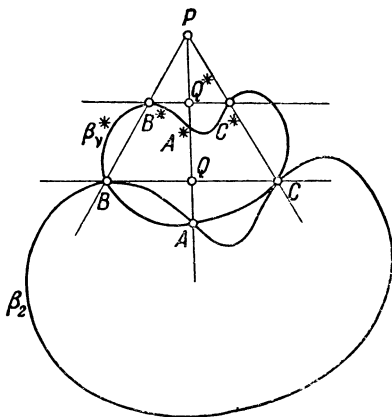
1) Кривая β_ν^* и ее внутренность полностью лежат вне β_ν , в этом случае $I_\nu = 0$.

2) Кривая β_ν^* касается β_ν . Функция $g(w)$ или вовсе не имеет нулей на β_ν , или имеет нуль в точке соприкосновения β_ν и β_ν^* . Если $g(w)$ не имеет нулей, мы немного сместим β_ν^* так, чтобы она не пересеклась с β_ν . При таком смещении полный угол поворота вектора, связанного с β_ν , изменяется непрерывно. Так как он может меняться лишь на величину, кратную 2π , то он вовсе не изменяется; в этом случае I_ν равна 0 или -1 в зависимости от того, является это касание внешним или внутренним.

Если в точке соприкосновения функция $g(w)$ обращается в нуль, то при обходе этого нуля величина I_ν получает приращение $\leq -1/2$. Вместе со значением на остальной части дуги β_ν мы получаем $I_\nu \leq -1/2$ или $I_\nu \leq -3/2$ в зависимости от того, является ли касание внешним или внутренним. Вместо этих неравенств можно соответственно написать неравенства $I_\nu \leq -1$ или $I_\nu \leq -2$, ибо числа I_ν — целые.

3) Кривая β_ν^* пересекается с β_ν . Тогда, как будет доказано ниже на основании выпуклости и подобия этих кривых, возможны лишь две точки их пересечения. В этом случае геометрически очевидно, что $I_\nu \leq 0$. Пусть A и B обозначают точки пересечения β_ν с β_ν^* и A^* , B^* — соответствующие им при подобном преобразовании точки β_ν^* . (Случай, когда $A = A^*$ или $B = B^*$ можно свести к этому с помощью небольшой деформации контура, как мы делали это выше.)

Чтобы доказать, что кривые β_ν и β_ν^* могут иметь только две общие точки, допустим, что существуют три точки пересечения A , B и C , которые мы будем рассматривать как точки β_ν (фиг. 62). Пусть при



Фиг. 62.

подобном преобразовании β , в β^* им соответствуют три точки A^* , B^* и C^* кривой β^* . Прямые AA^* , BB^* и CC^* пересекаются в точке P . Одна из прямых PA , PB и PC , скажем PA , лежит внутри треугольника $A^*B^*C^*$ и пересекает отрезок B^*C^* в точке Q^* , лежащей между B^* и C^* , следовательно, PA пересекает BC в точке Q , лежащей между B и C . Из подобия треугольников ABC и $A^*B^*C^*$ следует, что одна из двух точек Q и Q^* , скажем Q^* , лежит вне отрезка AA^* . Будучи внутренней точкой β^* , Q лежит на прямой PA между двумя точками β^* . Отсюда следует, что существует третья точка A^{**} пересечения β^* и PA , отличная от A и A^* . Так как кривая β^* выпукла, то такой точки существовать не может, следовательно, β , и β^* имеют лишь две точки пересечения.

Собрав наши результаты для $\nu > 2$, будем иметь

$$I_\nu \leq 0, \quad \nu = 3, 4, \dots, k. \quad (5.20)$$

Подставляя неравенства (5.17) — (5.20) в соотношение (5.16), мы получаем

$$N \leq -1,$$

что противоречит неравенству $N \geq 0$.

4. Единственность для других классов областей. Описанный метод дает доказательство теоремы единственности и для других классов областей, рассмотренных в предыдущих разделах. Требуется лишь небольшое изменение для областей B , содержащих бесконечно удаленную точку; для последних мы имеем $P \leq 2$ вместо $P = 0$. Преобразование $w^* = f(w)$ может переводить конечную точку w_0 в точку $w^* = \infty$, тогда функция $g(w) = f(w) - w$ имеет один полюс первого порядка при $w = w_0$ и другой при $w = \infty$, так что $P = 2$. В противном случае $f(\infty) = \infty$ и P равно 0 или 1 в соответствии с тем, равен 0 или 1 вычет в бесконечности. Отсюда $N - P \geq -2$, в то время как подсчет интегралов I_ν для всех кривых β_ν , описываемых в одном направлении, приводит к неравенству $N - P < -2$. Мы снова получаем, что $g(w) \equiv 0$.

Если β_1 представляет собой действительную ось, то никаких изменений в наших рассуждениях не требуется.

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Первая теорема о непрерывности для конформных отображений. Полученные результаты можно существенно обобщить, основываясь на следующей теореме:

Теорема 5.5. Пусть $w = g_n(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение фиксированной k -связной области G плоскости z , ограниченной k жордановыми кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, на область B_n плоскости w . Предположим, что при $n \rightarrow \infty$ области B_n

стремятся к области B так, что k граничных кривых B_n стремятся в смысле Фреше к k граничным кривым B . Тогда или последовательность $g_n(z)$ сходится к постоянной, или существует подпоследовательность g_n , сходящаяся к предельной функции $g(z)$, осуществляющей конформное отображение области G на область B . Сходимость равномерна в любой замкнутой подобласти G , отображение $g(z)$, так же как и $g_n(z)$, взаимно однозначно и непрерывно на границе.

Можно предположить, что B — ограниченная область. Тогда равномерная непрерывность последовательности $g_n(z)$ (не сходящейся к постоянной) устанавливается в точности так же, как в § 2 гл. III. Теорема 5.5 выводится из этого замечания при помощи рассуждений, уже применявшихся выше.

2. Вторая теорема о непрерывности. Обобщение предыдущих теорем. Предположим, что $\mathfrak{M}^{(n)}$ — класс областей $B^{(n)}$ с аналитическими границами, один из тех, которые рассматривались в § 3—5, а \mathfrak{M} — класс областей, границы которых получаются из границ $B^{(n)}$ предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ в смысле Фреше. Если G — фиксированная область, то существование функций $w = g^{(n)}(z)$, осуществляющих ее отображение на области классов $\mathfrak{M}^{(n)}$, обеспечено уже полученными результатами. То рассуждение, которое мы применяли в п. 3 § 2 гл. IV, чтобы исключить возможность вырождения областей, позволит доказать, что и наши области B_n не могут стремиться к вырождению. Отсюда следует, что существует подпоследовательность B_n , сходящаяся к области B класса \mathfrak{M} . Теперь на основании теоремы 5.5 мы заключаем, что существует конформное отображение области G на область B . Далее, можно утверждать, что имеет место

Теорема 5.6. Граничные кривые области B не обязательно считать аналитическими. Они могут быть произвольными жордановыми кривыми.

Доказательство этой теоремы получается при помощи небольших дополнений к уже проведенным рассуждениям. Так же доказывается

Теорема 5.7. Все или некоторые выпуклые граничные кривые области B можно заменить прямолинейными отрезками заданного направления.

3. Дальнейшее изучение конформных отображений. Методами этой главы можно доказать еще несколько теорем существования конформных отображений. Например, можно было бы рассмотреть области ненулевого рода, но они лежат за пределами данной книги.

Обратим внимание на роль выпуклости в наших доказательствах: нетрудно построить пример, показывающий, что отказ от этого условия может привести к нарушению теоремы единственности. С другой

стороны, теоремы существования не обязательно требуют выпуклости¹⁾, что можно видеть из следующего примера, который нетрудно обосновать с помощью наших методов. Рассмотрим класс \mathfrak{M} двусвязных областей B , зависящих от одного параметра. (Области B кольцеобразны.) Внешняя граница γ_1 может быть произвольной жордановой кривой. Внутренняя граница γ_2 принадлежит произвольному заданному семейству кривых $\gamma(t)$, обладающих следующими свойствами: кривая $\gamma(t_1)$ охватывает кривую $\gamma(t_2)$, если $t_1 > t_2$; $\gamma(0)$ представляет собой точку, а $\gamma(1)$ имеет по меньшей мере одну общую точку с γ_1 . Отображение определяется однозначно, если данная точка γ_1 имеет заданный образ.

Далее, наши методы можно применить к изучению поведения отображающей функции при непрерывном изменении областей. Например, рассмотрим кольцо G , ограниченное единичной окружностью и заключенным в ней концентрическим квадратом, и отображим G на круговое кольцо B . Что происходит в пределе, когда квадрат касается единичной окружности? Оказывается, что функция, осуществляющая отображение области G на кольцо B , на единичной окружности стремится не равномерно к постоянной.

§ 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Для доказательства разрешимости вариационной задачи, на которой основаны наши теоремы существования конформных отображений, мы обратимся к достаточному условию теоремы 4.1 и докажем, что в двумерном x -пространстве оно всегда удовлетворится.

1. Доказательство с использованием конформного отображения двусвязных областей. Теорему существования отображений k -связных областей G можно доказать по индукции²⁾; для односвязных и двусвязных областей она совпадает с теоремой Римана. Существенным элементом доказательства теоремы является доказательство того, что минимальное значение d интеграла Дирихле равно площади A области G , если параметрическая область B допускает конформное отображение на G .

Мы рассмотрим подробно доказательство существования решения задачи IV для круговых областей B . В качестве граничной кривой β_1 можно выбрать единичную окружность, другие граничные окружности $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ можно считать расположенными внутри β_1 . Заметим сначала, что область G можно считать конечной плоской областью,

1) См., например, работу Манеля [49], где рассматриваются границы в виде невыпуклых разрезов.

2) Вырожденные случаи, когда несколько граничных кривых вырождается в изолированные точки, можно не рассматривать, если иметь в виду наше индуктивное предположение.

ограниченной k жордановыми кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, причем γ_1 является внешней границей. Если G не является плоской областью, то мы сначала отобразим ее на плоскую область G' , что всегда возможно по теореме 2.2. Предположим, что граничная компонента γ'_1 области G' не является жордановой кривой (скажем, она представляет собой разрез); тогда мы сможем выполнить дополнительное конформное отображение односвязной области, ограниченной континуумом γ'_1 и содержащей G' , на плоскую область, ограниченную окружностью γ''_1 . образом G' при этом отображении будет служить плоская область G'' , для которой жорданова кривая γ''_1 является одной из граничных кривых. Поступив так же с другими границами, мы после k шагов получим область желаемого типа, конформно эквивалентную исходной области G .

Снова обозначим через γ' и γ'' дополнительные подмножества граничных кривых. Через d' и d'' обозначим соответственно нижние грани интегралов Дирихле для вариационных задач, относящиеся к системам γ' и γ'' граничных кривых, через d — такую же нижнюю грань для системы γ . Как мы видели в гл. IV, для доказательства существования решения задачи IV можно ограничиться проверкой достаточного условия $d < d' + d''$. Пусть γ' состоит из k' кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k'}$, $k' < k$. В соответствии с нашим индуктивным предположением мы имеем

$$d' = A_1 - A_2 - \dots - A_{k'} = A' > A_1 - A_2 - \dots - A_k = A,$$

где A_i обозначают площади, ограниченные кривыми γ_i , а A и A' — площади, ограниченные системами кривых γ и γ' . Рассмотрим достаточно малую окружность, которую можно погрузить внутрь любой кривой $\gamma_{k'+1}, \gamma_{k'+2}, \dots, \gamma_k$ и обозначим через $2p$ — ограниченную ею площадь. Тогда, очевидно, будем иметь

$$d' > A + 2p,$$

и достаточное условие $d < d' + d''$ будет доказано, если мы убедимся в справедливости неравенства

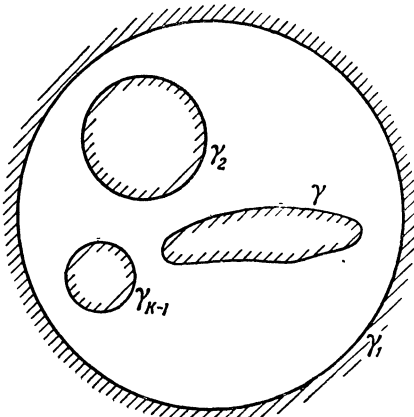
$$d \leq A + p. \quad (5.21)$$

Мы получим это неравенство, построив область B и в ней вектор $u(u, v)$, отображающий (не конформно) B на область G , для которого $D[y] \leq A + p$. По принципу Дирихле мы имеем $d \leq D[x] \leq A + p$ для любого вектора x , гармонического в области B и совпадающего с u на границе β .

Доказательство упростится по форме, если мы допустим, что кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$ являются окружностями. Так как мы предположили, что теорема верна для областей, ограниченных $k - 1$ контурами, то можно предварительно конформно отобразить область, ограниченную кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$, на область, ограниченную $k - 1$ окруж-

ностями. Иными словами, мы с самого начала можем предположить, что кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$ являются окружностями, в то время как последний контур γ_k , или, короче, γ , представляет собой некоторую замкнутую жорданову кривую (фиг. 63). Для краткости, мы будем обозначать через β также и окружность β_k .

Далее доказательство продолжается по методу континуальной индукции. Рассмотрим замкнутое множество $\gamma(t)$ кривых, непрерывно зависящих от параметра $t, 0 \leq t \leq 1$, и обладающих следующими свойствами ¹⁾:



Фиг. 63.

1) $\gamma(0)$ — окружность, ограничивающая площадь 2ρ и лежащая внутри γ .

2) Кривые $\gamma(t)$ ограничивают монотонно возрастающую последовательность областей.

3) $\gamma(1) = \gamma$.

Системы кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma(t)$ ограничивают континуальную последовательность областей $G(t)$. Площади последних мы обозначим через $A(t)$, а нижние грани варьируемых интегралов — через $d(t)$. Область $G(1)$ совпадает с областью G .

Так как область $G(0)$ ограничена окружностями, то для нее теорему существования конформных отображений и разрешимость вариационной задачи IV можно считать установленными. Очевидно, что мы имеем $d(0) = A(0)$.

Неравенство (5.21) вытекает из следующей леммы.

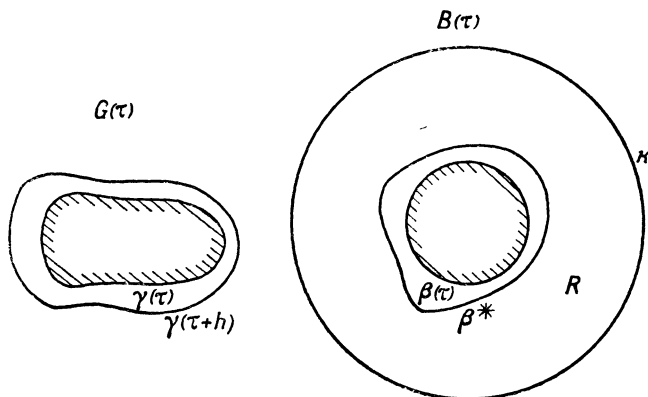
Лемма 5.2. Пусть τ — значение параметра t , для которого область $G(t)$ можно конформно отобразить на область B так, что для области $G(\tau)$ задача IV имеет решение и $d(\tau) = A(\tau)$. Тогда задачу IV можно решить и для всех значений t , удовлетворяющих неравенству $\tau \leq t \leq \tau + h$ при любых достаточно малых положительных значениях h .

Обозначим через Σ множество всех значений t , для которых $G(t)$ является конформным образом области B . Из доказанного в § 6 следует, что Σ является замкнутым множеством. Так как значение $t = 0$ принадлежит Σ , то лемма 5.2 позволяет заключить, что Σ содержит

¹⁾ Такое множество $\gamma(t)$ составляют, например, образы окружностей, лежащих внутри кругового кольца, конформно эквивалентного двусвязной области, ограниченной γ и $\gamma(0)$, и concentрических с граничными окружностями этого кольца.

все значения t , включая $t=1$; следовательно, область G является конформно эквивалентной области B .

Доказательство. Допустим, что $G(\tau)$ является конформным образом круговой области $B(\tau)$, причем $\gamma(\tau)$ соответствует окружности $\beta(\tau)$. На фиг. 64 окружности $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$ не обозначены; можно считать, что они расположены за пределами страницы.



Фиг. 64.

Пусть $t(u, v)$ — вектор, отображающий конформно область $B(\tau)$ на область $G(\tau)$. Построим фиксированную окружность k радиуса a , concentрическую с окружностью $\beta(\tau)$ и заключающую ее внутри; предположим еще, что между $\beta(\tau)$ и ее отражением в окружности k нет граничных точек $B(\tau)$. При нашем конформном отображении кривой $\gamma(\tau+h)$ области $G(\tau)$ соответствует некоторая кривая $\beta^*(\tau+h)$ области $B(\tau)$; в силу непрерывной зависимости отображающей функции t от границы (теорема 2.4) можно утверждать, что для достаточно малых h кривая β^* сколь угодно близка к $\beta(\tau)$. Обозначим через $B^*(\tau)$ область, получаемую из $B(\tau)$ удалением круга, ограниченного окружностью k , через R — кольцеобразную область, заключенную между k и кривой β^* , и через $B'(\tau+h)$ — область $B^*(\tau) + R$, которую можно конформно отобразить на область $G(\tau+h)$ посредством вектора $t(u, v)$.

Нам нужно преобразовать область $B'(\tau+h)$ на область \bar{B} , ограниченную окружностями; такое преобразование, переводящее точку (u, v) из B' в точку (\bar{u}, \bar{v}) из \bar{B} , мы построим так, чтобы вектор

$$y(\bar{u}, \bar{v}) = t(u, v),$$

определенный в области \bar{B} , был допустимым в задаче IV для области $G(\tau+h)$ и чтобы выполнялось неравенство $D_{\bar{B}}[y] < A(\tau+h) + p$.

Тогда из наших предыдущих замечаний можно будет заключить, что задача IV имеет решение в области $G(\tau + h)$, и доказательство леммы будет закончено.

Наше преобразование оставляет неподвижными точки области $B^*(\tau)$, внешней к окружности k (мы положим $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ в B^*), и смещает точки в криволинейном кольце R . Мы преобразуем R в круговое кольцо R^* внешнего радиуса a , равного радиусу окружности k , так чтобы точки на k остались неподвижными. Сначала мы отобразим ¹⁾ конформно R на кольцо R^* , преобразовав каждую точку (u, v) из R в точку (u^*, v^*) из R^* . Вообще говоря, это отображение переводит точки окружности k в другие точки той же окружности. Пусть r, θ — полярные координаты в кольце R ; r^*, θ^* — полярные координаты в R^* и $w = re^{i\theta}$, $w^* = r^*e^{i\theta^*}$; точка $ae^{i\theta}$ окружности k преобразуется тогда в точку

$$ae^{i\theta^*} = ae^{i[\theta + \sigma(\theta)]}.$$

Мы возвратим точки окружности k в их начальное положение с помощью преобразования

$$\bar{w} = w^*e^{-i\sigma(\theta)}.$$

Это новое преобразование не является конформным. Однако вектор u , определенный соотношением $u(\bar{u}, \bar{v}) = t(u, v)$, является непрерывным и допустимым в области $\bar{B} = B^* + R^*$, ибо функция $\sigma(\theta)$ и ее производные непрерывны.

Так как конформное отображение R на R^* преобразует окружность k в себя, то его можно продолжить по симметрии во внешность k . Далее, число h можно выбрать столь малым, чтобы это преобразование на окружности k сколь угодно мало отличалось от тождественного. Следовательно, функция $\sigma(\theta)$ и ее первые производные можно считать сколь угодно малыми по абсолютной величине. Подставив $u(\bar{w}) = t(w^*e^{-i\sigma})$, мы найдем ²⁾, что интеграл $D_{R^*}[y]$ отличается от интеграла $D_R[t]$ меньше, чем на $p/2$, если только h достаточно мало. Можно еще выбрать h столь малым, чтобы имело место неравенство $A(\tau + h) > A(\tau) - p/2$. Вспоминая предположение о том, что $d(\tau) = A(\tau)$, мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} D_{\bar{B}}[y] &= D_{B^*}[t] + D_{R^*}[y] < D_{B^*}[t] + D_R[t] + \frac{p}{2} = \\ &= A(\tau) + \frac{p}{2} < A(\tau + h) + p. \end{aligned}$$

Лемма 5.2 доказана. Учитывая наши предыдущие замечания, можно считать доказанным и существование решения задачи IV для областей G .

¹⁾ Здесь мы пользуемся теоремой существования для двусвязных областей. Если мы хотим предполагать эту теорему известной лишь для односвязных областей, необходимо изменить доказательство так, как указано в п. 2.

²⁾ Аналогичные оценки см. в § 3 гл. IV.

2. Другое доказательство. Дополнительные замечания. Приведем вариант доказательства без использования теоремы существования конформных отображений для двусвязных областей. Вместо отображения R на круговое кольцо можно рассмотреть отображение всей односвязной внешности кривой β^* на внешность окружности, осуществляемое функцией $w^* = g(w)$, которая на окружности k мало отличается от w . При этом R отображается на область R^* , ограниченную образом k^* окружности k и окружностью. Можно (не конформно) отобразить R^* на другое кольцо так, чтобы точки k^* вернулись в свое начальное положение на окружности k . Как и выше, мы получим допустимую область \bar{B} и допустимый вектор y , отображающий \bar{B} на область $G(\tau + h)$, для которого $D_{\bar{B}}[y] < A(\tau + h) + p$, если число h выбрано достаточно малым.

Для других классов \mathfrak{R} областей, рассматриваемых в этой главе, доказательство проходит совершенно аналогично. Требуется лишь один пункт — выбор области $G(0)$ в классе римановых областей, рассмотренных в § 4. Мы должны выбрать в качестве $G(0)$ область плоскости x, y , которую можно отобразить на риманову область B с помощью простой функции. Для этой цели мы воспользуемся областью $B = B_0$, имеющей $(k - 1)$ -кратные точки разветвления над точками $w = 1/2$ и $w = -1/2$. Посредством функции

$$x + iy = \left(\frac{2w - 1}{2w + 1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

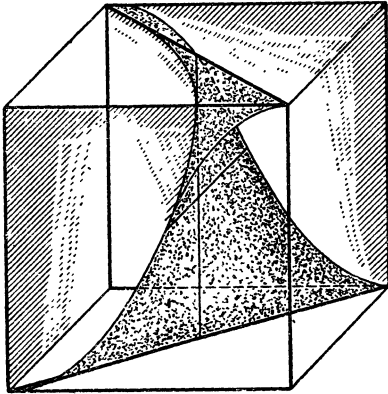
область B_0 отображается на k -связную плоскую область, которую с помощью дробно-линейного преобразования можно перевести в кольцевую область $G(0)$.

Доказав, что вариационная задача IV всегда имеет решение, мы закончили доказательство теорем существования конформных отображений, приведенных в этой главе.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы познакомимся с двумя направлениями теории минимальных поверхностей. Первое из них связано с задачей отыскания минимальной поверхности, граница которой или часть этой границы не задается, а может свободно изменяться на заданных многообразиях¹⁾. Второе направление связано с изучением минимальных поверхностей, которые не осуществляют относительного минимума площади. Минимальные поверхности такого типа соответствуют неустойчивому равновесию мыльной пленки, поэтому мы называем их неустойчивыми минимальными поверхностями.



Фиг. 65. Поверхность Жергонна.

куба и двумя непараллельными диагоналями другой пары его противоположных граней (фиг. 65). Риман и Шварц обобщили задачу, поставив вопрос об отыскании односвязной поверхности, граница которой состоит из прямолинейных отрезков и дуг, лежащих на заданных плоскостях, и которая осуществляет относительный минимум площади.

Эта задача допускает очевидное дальнейшее обобщение и в обобщенном виде ставится так: найти односвязную поверхность наименьшей площади, граница которой состоит из заданных жордановых дуг и точечного множества на заданных многообразиях. Такого типа границы мы будем называть *цепочками*.

¹⁾ Слово „многообразие“ означает здесь связное замкнутое множество.

В дальнейшем мы рассмотрим еще следующую задачу. Найти двусвязную минимальную поверхность, одна из границ которой произвольно располагается на заданной поверхности, скажем, сфере, а другая является заданной жордановой кривой. Наконец, можно поставить задачу об отыскании минимальной поверхности, вся граница которой свободно изменяется на заданном многообразии, например на торе. В этом случае следует ввести дополнительные топологические условия, исключающие тривиальные решения, т. е. поверхности, вырождающиеся в точки. В этой главе мы приведем полное доказательство существования решения задач о наименьшей площади для поверхностей со свободными границами. Однако для так называемых „свойств трансверсальности“ минимальных поверхностей на свободных границах здесь будут получены только частные результаты.

2. Неустойчивые минимальные поверхности. Явление неустойчивости минимальных поверхностей, натянутых на заданные контуры, известно давно. Оно наблюдается, например, в случае минимальной поверхности вращения (катеноида), если расстояние между ее граничными окружностями выбрано так, что цепная линия, образующая поверхность, содержит точки, сопряженные концам. В этом случае катеноид дает стационарное значение площади, но не осуществляет ни максимума, ни минимума.

Другие примеры неустойчивых решений можно найти в исследованиях Шварца по минимальным поверхностям [67].

Вообще говоря, можно ожидать, что существование двух относительных минимумов в задаче Плато обеспечивает существование еще одной неустойчивой минимальной поверхности, подобно тому как существование двух различных точек относительного минимума дифференцируемой функции конечного числа переменных влечет за собой существование точки „минимакса“. Теоремы существования таких неустойчивых минимальных поверхностей были впервые доказаны Шиффманом и одновременно Морсом и Томпкинсом.

Кроме того, в этих статьях предлагается классификация минимальных поверхностей на основе изучения задачи с точки зрения абстрактной теории критических точек в функциональных пространствах. Эти исследования основаны на полученных Дугласом выражениях для интеграла Дирихле от гармонических векторов через граничные значения этих векторов. Другой подход к доказательству существования предлагает автор. Его метод основан на принципе Дирихле и состоит в сведении рассматриваемой задачи к задаче о стационарных значениях дифференцируемой функции конечного числа переменных. Такое сведение достигается при помощи замены ограничивающего контура некоторой ломаной. Позже Шиффман заметил, что переход к пределу от ломаных к более общим (спрямляемым) кривым можно обосновать с помощью теоремы о непрерывности Морса и Томпкинса (теорема 3.6).

Представляет интерес до сих пор еще не решенная задача, аналогичная следующей задаче для функции конечного числа переменных. Пусть дана гладкая замкнутая кривая и две точки A и B на ней. Соединим точки A и B кратчайшей линией (т. е. прямолинейным отрезком) и будем искать такое положение точек A и B , чтобы длина этого кратчайшего пути была наибольшей. Это будет иметь место в том случае, когда отрезок AB представляет собой диаметр, т. е. стационарную хорду, ортогональную к кривой на своих концах. Рассмотрим теперь замкнутую поверхность M и на ней замкнутую кривую μ , на которую натянута односвязная минимальная поверхность наименьшей площади. Затем будем искать такую кривую μ , для которой соответствующая минимальная поверхность является стационарной „диаметральной“ поверхностью (не дающей максимума).

§ 2. СВОБОДНЫЕ ГРАНИЦЫ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Общие замечания. В случае заданных границ при решении задачи Плато решающую роль играет компактность. Соображения, использованные в гл. III и IV, показывают, что минимизирующая последовательность гармонических векторов для задачи Плато всегда содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, предел которой есть либо постоянный, либо допустимый вектор. Отправной точкой для построения минимизирующего вектора служила равномерная непрерывность граничных значений допустимых векторов $x(u, v)$.

Для задач со свободными границами возникает новая трудность, так как нельзя больше требовать непрерывности граничных значений допустимого вектора на заданном многообразии M . Рассматривая задачу Плато, мы доказали сходимость последовательности допустимых векторов внутри области B , исследовав предварительно свойство их граничных значений. Однако существуют примеры поверхностей наименьшей площади, свободные границы которых не являются непрерывными кривыми (см. п. 2 § 5). Поэтому методы гл. III следует теперь заменить методами, в которых векторы рассматриваются внутри области, и исходить из определений, не предполагающих непрерывности граничных значений.

Определение 6.1. Обозначим через $g_M[x]$ кратчайшее расстояние от точки x до многообразия M . Если $x = x(u, v)$ является непрерывной поверхностью, определенной в параметрической области B с границей β , то $g_M[x]$ есть функция $g_M[x(u, v)]$ переменных u и v в области B . Мы скажем, что граница $x(u, v)$ лежит на M , если $g_M[x(u, v)]$ стремится к нулю, когда точка (u, v) области B стремится к границе β этой области.

Замечания.

а) Если граница $x(u, v)$ лежит на M , то расстояние $g_M[x(u, v)]$ равномерно стремится к нулю, когда точка (u, v) стремится к β ;

например, если граница β есть линия $v = 0$, то $g_M[x(u, v)]$ стремится к нулю *равномерно* относительно u при $v \rightarrow 0$. В противном случае существовала бы бесконечная последовательность точек (u_i, v_i) из B , для которых $v_i \rightarrow 0$, и число $\alpha > 0$, такое, что $g_M[x(u_i, v_i)] > \alpha$. Последовательность (u_i, v_i) содержит подпоследовательность, сходящуюся к точке на β (быть может, бесконечно удаленной), и для этой подпоследовательности в силу определения 6.1 $g_M[x(u_i, v_i)] \rightarrow 0$ вопреки допущению.

б) В некоторых из рассматриваемых ниже случаев только часть границы поверхности x лежит на M . Это означает, что условия, указанные в определении 6.1, выполняются только для части β_1 границы β . (Например, если β — прямая $v = 0$, то β_1 состоит из одного или нескольких отрезков на этой прямой.)

Многообразие M может быть замкнутой поверхностью (например, сферой или тором) или частью такой поверхности (например, частью поверхности сферы, отсеченной двумя параллельными плоскостями); M может быть также просто непрерывной замкнутой кривой. В пространстве более чем трех измерений число возможностей соответственно увеличивается.

2. Теорема о граничных значениях. Изучение задачи со свободными границами основано на теореме о компактности. Эта теорема дает возможность доказать, что предельный вектор сходящейся минимизирующей последовательности является допустимым. Для удобства мы сформулируем эту теорему в предположении, что B есть верхняя полуплоскость $v > 0$.

Теорема 6.1. Пусть $x_n(u, v)$ — последовательность гармонических в B векторов, граничные значения которых лежат на замкнутых многообразиях M_n , и пусть

$$D[x_n] \leq A^2,$$

где A — постоянная, не зависящая от номера n . Предположим, что последовательность векторов x_n равномерно сходится к гармоническому вектору x в любой замкнутой подобласти B (для которого мы имеем автоматически $D[x] \leq A^2$), а многообразия M_n стремятся к непрерывному многообразию M в том смысле, что наибольшее расстояние от точек M_n до M стремится к нулю. Тогда граница предельного вектора x лежит на M .

Отметим, что никаких предположений относительно размерностей многообразий M_n и M мы не делали. В приложениях, которые рассматриваются ниже, M_n будут линиями, а M — поверхностями.

Доказательство. Обозначим через $g_{M_n}[x_n(u, v)]$ расстояние от точки $x_n(u, v)$ до многообразия M_n . Надо доказать, что в

условиях теоремы из того, что при $v \rightarrow 0$

$$g_{M_n} [x_n(u, v)] \rightarrow 0,$$

следует, что и

$$g_M [x(u, v)] \rightarrow 0$$

при $v \rightarrow 0$. Пусть $g(M_n, M)$ — наибольшее расстояние от точек многообразия M_n до многообразия M . Из неравенства треугольника имеем

$$g_M [x(u, v)] \leq g_{M_n} [x(u, v)] + g(M_n, M),$$

следовательно,

$$g_M [x(u, v)] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_{M_n} [x(u, v)].$$

Вопрос сводится, таким образом, к исследованию величин $g_{M_n} [x(u, v)]$.

О непрерывности векторов x и x_n на границе $v = 0$ ничего не известно. Рассмотрим вектор

$$y_n(u, v) = x_n(u, v + \delta_n),$$

где δ_n — фиксированная положительная постоянная. Этот гармонический вектор непрерывен при $v = 0$, и значения $y_n(u, 0)$ лежат на кривой M'_n , расстояние которой от M_n можно сделать сколь угодно малым, если только δ_n достаточно мала. Поскольку $y_n(u, v) \rightarrow y(u, v)$ при $\delta_n \rightarrow 0$, то при доказательстве теоремы можно заменить M_n и x_n через M'_n и y_n . Заметим, что $x_n(u, v)$ имеет теперь непрерывные (даже аналитические) граничные значения $x_n(u, 0)$ на линии β .

Остается доказать, что расстояние $g_{M_n} [x(u, v)]$ от предельного вектора до M_n можно сделать сколь угодно малым равномерно относительно n для точек с достаточно малой ординатой v . Для этой цели положим $v = h$, где число h настолько мало, что для полосы $B_h: 0 < v \leq 2h$ выполняется неравенство

$$D_{B_h} [x] < \varepsilon^4,$$

где $\varepsilon > 0$ — заранее выбранная малая постоянная. Это возможно, так как интеграл Дирихле $D[x]$ конечен. Выберем затем число $N(h)$ настолько большим, чтобы для $n > N$ имело место неравенство

$$|x_n(u, h) - x(u, h)| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

Для того чтобы оценить расстояние $g_{M_n} [x(u, h)]$, не предполагая, что для фиксированных значений u и (достаточно малого) h это расстояние мало равномерно относительно n , рассмотрим фиксированную точку, например точку $(0, h)$. Сначала мы оценим колебание вектора $x(u, h)$ вдоль прямой $v = h$. Из теоремы о среднем для гармо-

нических функций и из неравенства Буняковского — Шварца при $v = 0$ получаем неравенство

$$|x_u| < \frac{\sqrt{2} \varepsilon^2}{\sqrt{\pi} h},$$

так что

$$|x(u, h) - x(0, h)| = \left| \int_0^u x_u(u, h) du \right| \leq |u| \frac{\sqrt{2} \varepsilon^2}{\sqrt{\pi} h}.$$

Следовательно, для значений u , для которых $|u| \leq (\sqrt{\pi} h)/(\sqrt{2} \varepsilon)$, находим

$$|x(u, h) - x(0, h)| \leq \varepsilon. \quad (6.2)$$

Это неравенство показывает, что вектор $x(u, h)$ мало меняется на отрезке оси u , большом по сравнению с h . Из (6.1) и (6.2) для $n > N$ и для отрезка

$$|u| \leq \frac{\sqrt{\pi} h}{\sqrt{2} \varepsilon} = s$$

получаем неравенство

$$|x(0, h) - x_n(u, h)| < 2\varepsilon. \quad (6.3)$$

По крайней мере для некоторых точек этого отрезка можно получить искомую оценку расстояния $g_{M_n}[x_n(u, h)]$. Это следует из того, что на основании теоремы о среднем на отрезке длины s существует точка u_0 , быть может зависящая от n , для которой справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_0^h \left[\frac{\partial x_n(u_0, v)}{\partial v} \right]^2 dv \leq \frac{A^2}{s} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A^2 \varepsilon}{h}.$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского — Шварца, обычным способом получаем

$$|x_n(u_0, h) - x_n(u_0, 0)| \leq \sqrt{h} \sqrt{\frac{2A^2}{s}},$$

или, что то же самое,

$$|x_n(u_0, h) - x_n(u_0, 0)| \leq \sqrt[4]{\frac{8}{\pi}} A \sqrt{\varepsilon}.$$

Поскольку точка $x_n(u_0, 0)$ лежит на многообразии M_n , имеем

$$g_{M_n}[x_n(u_0, h)] \leq \sqrt[4]{\frac{8}{\pi}} A \sqrt{\varepsilon}.$$

Из неравенства (6.3) получаем

$$|x_n(u_0, h) - x(0, h)| < 2\varepsilon$$

и, применяя неравенство треугольника, находим

$$g_{M_n} [x(0, h)] < 2\varepsilon + \sqrt[4]{\frac{8}{\pi}} A \sqrt{\varepsilon},$$

где правая часть не зависит от n . Полученная оценка равномерна относительно n и, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, будем иметь

$$g_M [x(0, h)] \leq 2\varepsilon + \sqrt[4]{\frac{8}{\pi}} A \sqrt{\varepsilon}.$$

Теорема доказана. Отсюда следует также, что величина $g_{M_n} [x_n(u, h)]$ при $h \rightarrow 0$ стремится к нулю равномерно относительно n .

Следствия.

1) Доказанную теорему легко распространить на случай, когда B представляет собой внутренность круга. Это можно сделать либо с помощью конформного отображения, либо непосредственно повторяя те же самые рассуждения.

2) Утверждение теоремы остается справедливым также и в том случае, когда различные части границы допустимого вектора x_n лежат на различных многообразиях $M_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, сходящихся к многообразию $M^{(i)}$. Точнее, пусть граница $\beta: v = 0$ области B разделена на отрезки $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ и предположим, что расстояние от точки на допустимой поверхности $x_n(u, v)$ до многообразия $M_n^{(i)}$ стремится к нулю, когда точка (u, v) стремится к β_i . Если остальные условия теоремы 6.1 выполнены, то часть границы x , соответствующая отрезку β_i , лежит на $M^{(i)}$.

3) Очевидно, что теорема остается в силе, если одна или несколько областей с границами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ исключены из полуплоскости и допустимые векторы непрерывно отображают эти границы на заданные жордановы кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$.

§ 3. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ЧАСТИЧНО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

1. Случай одной заданной дуги.

Теорема 6.2. Пусть T — замкнутое многообразие размерности, не превосходящей $m - 1$, и γ — жорданова дуга, соединяющая точки P_1 и P_2 многообразия T . Тогда существует единственная минимальная поверхность наименьшей площади, имеющая границу на γ и на T .

Доказательство. Мы докажем теорему, минимизировав интеграл Дирихле. Поверхности $x(u, v)$, определенные внутри круга B единичного радиуса с границей β , являются допустимыми, если они удовлетворяют следующим условиям:

1) Поверхность x непрерывна и кусочно гладка в области B .

2) Граница x лежит на многообразии $M = T \cup \gamma$ и жорданова дуга γ является гомеоморфным образом дуги c окружности β . (Мы, естественно, предполагаем, что существуют допустимые векторы с конечным интегралом Дирихле.)

Доказательство существования. Построим допустимый вектор x , осуществляющий абсолютный минимум d интеграла Дирихле. Доказательство того, что определяемая этим вектором поверхность минимальна, проводится так же, как и для задачи Плато в гл. III. Начав с минимизирующей последовательности y_n , мы заменим ее последовательностью гармонических векторов с такими же граничными значениями, которую опять обозначим через y_n . Концы дуги c соединим аналитической дугой c'_n , настолько близкой к дополнению c на окружности β , что расстояние ее образа γ'_n на поверхности y_n от многообразия T не будет превосходить $\varepsilon = 1/n$. Пусть y'_n — вектор гармонический в области B' , заключенной внутри $c \cup c'_n$, значения которого на $c \cup c'_n$ совпадают со значениями y_n . На основании принципа Дирихле имеем $D_{B'}[y'_n] \leq D[y_n]$. Конформное отображение B' на единичный круг B преобразует вектор y'_n в гармонический вектор x_n , определенный в B и натянутый на замкнутую кривую $\gamma \cup \gamma'_n$. Линейным преобразованием единичного круга в себя мы можем добиться того, чтобы выполнялось условие трех точек по отношению к концам и одной внутренней точке дуги c . Получаем неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D[x_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} D[y_n]. \quad (6.4)$$

Так же, как и в гл. III, мы приходим к заключению, что граничные значения x_n равностепенно непрерывны на c . Ввиду ограниченности интеграла $D[x_n]$ существует подпоследовательность x_n , сходящаяся к непостоянному вектору x , причем сходимость равномерна на любом замкнутом подмножестве $B \cup c$ и, в частности, на c (см. лемму 1.36). Используя полунепрерывность интеграла Дирихле для гармонических функций и неравенство (6.4), находим

$$D[x] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D[x_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} D[y_n] = d.$$

Вектор x отображает дугу c на γ монотонно и непрерывно. Теорема 6.1 показывает, что все остальные граничные точки x лежат на многообразии T , поэтому вектор x является допустимым и $D[x] \geq d$. Следовательно,

$$D[x] = d,$$

и x представляет собой решение нашей задачи.

Условие трансверсальности. Найдем условие для свободной границы на многообразии T , которое выражает ортогональность в слабом смысле минимальной поверхности к этому многообразию. Для

доказательства предположим, что T обладает непрерывно изменяющейся касательной плоскостью. Допустим, далее, что в окрестности T существуют преобразования пространства x , определяемые уравнениями

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon \xi_\mu(x_1, x_2, \dots, x_m; \varepsilon), \quad (6.5)$$

зависящие от параметра ε и удовлетворяющие следующим условиям: функции ξ_μ имеют ограниченные и кусочно непрерывные производные по переменным x_i , и ε обращаются в нуль в окрестности дуги γ ; преобразования (6.5) отображают T в себя. Введем обозначения: $\xi_\mu(x_1, x_2, \dots, x_m; 0) = \eta_\mu$,

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) = x', \quad (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = \eta.$$

При подстановке составляющих $x_\nu = x_\nu(u, v)$ минимизирующего вектора x вектор x' становится допустимым в B . Поэтому

$$D[x'] \geq D[x],$$

и обычным способом мы находим

$$D[x, \eta] = \frac{1}{2} \int \int_B (x_u \eta_u + x_v \eta_v) du dv = 0.$$

Следовательно, для замкнутой подобласти B_δ области B , ограниченной кусочно гладкой кривой β_δ , стремящейся к β при $\delta \rightarrow 0$, имеем

$$\int \int_{B_\delta} (x_u \eta_u + x_v \eta_v) du dv \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$. Так как $\Delta x = 0$, то, применяя формулу Грина, получаем при $\delta \rightarrow 0$

$$\int_{\beta_\delta} \eta \frac{\partial x}{\partial n} ds \rightarrow 0,$$

где $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по нормали к β_δ , а s — длину дуги на β_δ . Пусть G — минимальная поверхность и γ_δ — образ β_δ на этой поверхности. Так как интеграл инвариантен по отношению к конформному отображению, а вектор x отображает B конформно на G , то предыдущую формулу можно записать в виде

$$\int_{\gamma_\delta} \eta \frac{\partial x}{\partial n} ds \rightarrow 0,$$

где $\partial/\partial n$ обозначает теперь дифференцирование по нормали к γ_δ и s — длину дуги на γ_δ .

Так как вектор η обращается в нуль в окрестности γ , то последняя формула принимает вид

$$\int_{\gamma'_\delta} \eta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial n} ds \rightarrow 0,$$

где γ'_δ стремится к свободной границе при $\delta \rightarrow 0$.

Так как вектор $\partial \mathbf{x} / \partial n$ касается поверхности G , а η — произвольный касательный вектор поля вблизи T , то это соотношение выражает условие, которое можно назвать условием слабой ортогональности G и T . В качестве дуг γ'_δ можно выбрать произвольную последовательность кривых, кусочно гладких на G , концы которых стремятся к концам γ и наибольшее расстояние которых от T стремится к нулю.

2. Замечания о цепочках Шварца [66]. Рассмотрим кратко более общую задачу об односвязной минимальной поверхности наименьшей площади в трехмерном пространстве, граница которой состоит из частей, расположенных на жордановых дугах и на двумерных поверхностях, последовательно соединенных этими дугами. Границы такого типа часто называют *цепочками Шварца*; связанную с ними задачу исследовали Риман и Шварц. Мы рассмотрим случай, когда некоторые из поверхностей совпадают.

Разделим единичную окружность β на k дуг β_i точками A_1, A_2, \dots, A_k , соответствующими центральным углам $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, и будем считать допустимыми все векторы \mathbf{x} , которые отображают эти дуги на дуги, лежащие последовательно на различных граничных многообразиях.

Решение распадается на два шага. Сначала мы решаем вариационную задачу для фиксированных точек A_1, A_2, \dots, A_k . Минимум интеграла Дирихле есть функция $d(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ аргументов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ и осуществляется допустимым вектором. Однако этот вектор не обязательно определяет минимальную поверхность. Затем для нахождения минимальной поверхности, являющейся решением задачи, следует найти минимум $d(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, варьируя значения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. При помощи линейного преобразования круга в себя можно добиться того, что три угла из числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ будут сохранять фиксированные значения. Здесь опять возникает альтернатива. Если функция $d(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ принимает минимальное значение для некоторой системы аргументов θ_i , то соответствующий вектор \mathbf{x} определяет минимальную поверхность и тем самым решает поставленную задачу. В противном случае существует последовательность $\theta_i^{(n)}$ систем значений аргументов, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\theta_i^{(n)}) = d$$

(нижний предел интегралов Дирихле для допустимых векторов) и которая стремится к вырождению, если какие-либо две различные последовательности $\theta_i^{(n)}$ и $\theta_j^{(n)}$ имеют общий предел θ . В этом случае соответствующие гармонические поверхности x_n стремятся к вырождению, как было указано в § 2 гл. IV. Здесь задача имеет вырожденное решение, представляющее собой совокупность минимальных поверхностей, каждая из которых принадлежит к цепочке, образованной частью заданных жордановых дуг и поверхностей. Такое вырождение исключено, если известно, что нижняя грань d значений интеграла Дирихле для невырожденных поверхностей меньше, чем такая же нижняя грань для вырожденных поверхностей.

Простой пример дают две вертикальные полуокружности, поставленные на горизонтальную плоскость M так, что линия, соединяющая центры этих полуокружностей, перпендикулярна к плоскостям, в которых они лежат. Если расстояние между полуокружностями достаточно мало, то решение задачи Шварца дает половину катеноида; в противном случае решение вырождается и состоит из двух полуокругов.

3. Двусвязные минимальные поверхности с одной свободной границей. В качестве примера поверхности высшей связности рассмотрим двусвязную минимальную поверхность, одна из границ которой свободно перемещается по заданному замкнутому многообразию M , в то время как другая граница γ представляет собой проходимость в одном направлении замкнутую жорданову дугу. В вариационной задаче поверхностями сравнения служат поверхности, которые определяются непрерывными векторами $x(u, v)$, обладающими кусочно непрерывными первыми производными в кольце B , ограниченном единичной окружностью β_1 и меньшей концентрической окружностью β_2 на плоскости (u, v) . Будем считать, что граничные значения вектора x непрерывны на β_1 и что этот вектор отображает β_1 непрерывно и монотонно на γ . Предположим также, что граница поверхности x , соответствующая β_2 , лежит на M в смысле определения 6.1.

Мы ищем двусвязную минимальную поверхность наименьшей площади (или с наименьшим интегралом Дирихле) d , ограниченную кривой γ и многообразием M .

Теорема 6.3. Такая поверхность существует, если точная нижняя грань d меньше точной нижней грани d^* в соответствующей задаче Плато с границей, состоящей из одной дуги γ .

Доказательство. Для нахождения минимальной поверхности решим вновь вариационную задачу, состоящую в отыскании области B и допустимого вектора x , для которого интеграл $D[x] = d$ имеет минимальное значение. Предположим, что имеет место неравенство

$$d < d^*,$$

и рассмотрим минимизирующую последовательность векторов x_n , определенных в кольцевых областях B_n , для которых $D_{B_n} [x_n] \rightarrow d$. Сначала мы покажем, подобно тому, как это сделано в § 2 гл. IV, что последовательность B_n не может стремиться к вырождению.

а) Если бы радиус a_n внутренней окружности $\beta_2^{(n)}$ кольца B_n стремился к 1, мы пришли бы к такому же противоречию, как в § 2 гл. IV.

б) Радиус a_n не может стремиться к нулю ни для какой подпоследовательности B_n . Предположив, что $a_n \rightarrow 0$, мы могли бы на основании леммы 4.1 заменить вектор x_n другим вектором $y_n = p_n(u, v)x_n$, обращающимся в нуль для $r^2 = u^2 + v^2 \leq a_n^2$ и равным x_n при $r = 1$, для которого

$$D[y_n] < D[x_n] + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Вектор y_n можно рассматривать как допустимый вектор в задаче Плато для одного контура γ , для которой минимум равен d^* . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, немедленно получаем из неравенства $d^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D[y_n]$ неравенство

$$d^* \leq d,$$

которое противоречит предположению о том, что $d < d^*$. Отсюда вытекает, что из B_n можно выбрать подпоследовательность областей, сходящуюся к кольцу B с радиусами 1 и a , $0 < a < 1$.

Как и раньше, убеждаемся в том, что граничные значения x_n равномерно непрерывны на β_1 , так что, по крайней мере для некоторой подпоследовательности, они равномерно сходятся к монотонному и непрерывному отображению. Векторы x_n снова заменяем гармоническими в B векторами y_n , имеющими значения $x_n(1, \theta)$ на внешней окружности и $x_n(r_n, \theta)$ на внутренней окружности; $r_n > a_n$ — последовательность, сходящаяся к a . Вектор $x_n(r_n, \theta)$, рассматриваемый как функция θ , определяет непрерывную кривую M_n , стремящуюся к многообразию M при $n \rightarrow \infty$. На основании принципа Дирихле для гармонических векторов y_n имеем неравенство

$$\liminf D_{B_n} [y_n] \leq \liminf D_B [x_n].$$

Так как y_n имеют равномерно ограниченные интегралы Дирихле и сходятся на β_1 , то из леммы 1.3б следует, что они сходятся к предельному гармоническому вектору x равномерно на любом замкнутом подмножестве $B + \beta_1$. Из сходимости y_n следует, что вектор x отображает β_1 монотонно на γ .

Из теоремы 6.1 и ее следствия (3) вытекает, что граничные значения вектора x , соответствующие β_2 , лежат на многообразии M . Отсюда следует, что x является допустимым вектором и $D[x] \geq d$.

С другой стороны в § 2 гл. I было выведено соотношение

$$D[x] \leq \liminf D_{B_n}[x_n] = d,$$

поэтому

$$D[x] = d,$$

и вектор x является решением вариационной задачи. То обстоятельство, что x определяет минимальную поверхность, можно показать так же, как это сделано в гл. IV или V.

Вдоль свободной границы x выполняется то же самое условие трансверсальности, что и в п. 1, т. е.

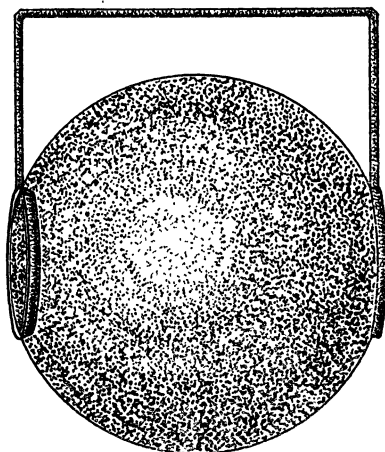
$$\int_{L_\epsilon} \eta \frac{\partial x}{\partial n} ds \rightarrow 0,$$

где L_ϵ — любая система кусочно гладких контуров, гомотопных контуру γ на поверхности x и стремящихся к M при $\epsilon \rightarrow 0$, η — произвольное касательное векторное поле в окрестности M , $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по нормали к L_ϵ на поверхности x и s — длину дуги на L_ϵ . Доказательство почти дословно совпадает с доказательством, проведенным в п. 1.

4. Многосвязные минимальные поверхности со свободными границами. Распространение теорем этого раздела на многосвязные минимальные поверхности, часть границ которых свободно перемещается по заданным многообразиям, не вызывает новых трудностей.

Достаточное условие существования минимальной поверхности заданной топологической структуры со свободными границами на заданном многообразии M попрежнему состоит в том, что точная нижняя грань d для поверхностей заданной топологической структуры меньше, чем такая же грань для поверхностей низших топологических структур с теми же фиксированными границами. С условием такого рода связаны важные геометрические факты. Предположим, например, что M — замкнутая поверхность в пространстве и что фиксированная часть границы γ лежит целиком вне M . Предположим далее, что среди поверхностей всех возможных топологических структур G является минимальной поверхностью наименьшей площади, ограниченной контуром γ и многообразием M ; тогда G будет *целиком лежать вне* поверхности M . В противном случае, отбросив все части G , заключенные внутри M , мы получим минимальную поверхность G' , имеющую границу на γ и на M и обладающую меньшей площадью, чем G . Как видно из следующего примера (фиг. 66), для того чтобы обеспечить расположение минимальной поверхности вне многообразия M , требуются дополнительные ограничения. Рассмотрим задачу, поставленную в п. 3. Пусть M — сфера; рассечем ее двумя плоскостями, перпендикулярными к диаметру и близкими к его концам. В каждой плоскости выберем окружность, concentрическую с окруж-

ностью, по которой эта плоскость пересекает сферу, немного большего радиуса. Наконец, выбросим из обеих окружностей по малой дуге и соединим концы оставшихся дуг узкой перемычкой, состоящей из двух дуг, проходящих далеко от M . Полученная кривая γ состоит из двух неполных окружностей и линий, соединяющих их концы. Очевидно, что существует трехсвязная поверхность сколь угодно малой площади, ограниченная контуром γ и многообразием M ; она состоит из узкой ленты-перемычки и двух колец, соединяющих неполные окружности со сферой (фиг. 66). Окружности можно настолько приблизить к сфере M , а перемычку настолько удалить от нее, что нижняя грань площадей, решающих задачу трехсвязных поверхностей, будет меньше нижней грани решающих эту же задачу двусвязных поверхностей. Более того, легко видеть, что для аппроксимации нижней грани площадей двусвязных поверхностей придется допустить поверхности, проникающие внутрь M .



Фиг. 66.

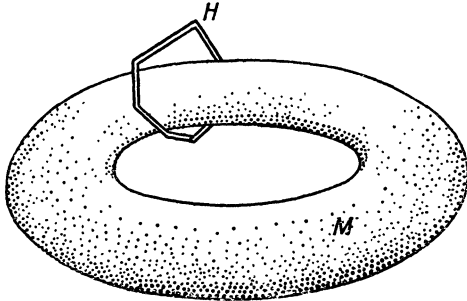
Как показывают результаты, полученные в п. 1, то же самое имеет место и в случае односвязных поверхностей. Легко построить пример задачи, в которой двусвязная поверхность реализует меньший минимум, чем односвязная. В этом случае односвязная поверхность, существование которой было доказано в п. 1, может проникать внутрь многообразия M .

§ 4. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, НАТЯНУТЫЕ НА ЗАМКНУТЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Введение. В то время как в рассмотренных выше задачах части границы минимальной поверхности были заданными жордановыми дугами, в этом параграфе мы будем считать полные границы минимальных поверхностей свободно перемещающимися на заданных поверхностях (см. [19]; более подробно этот вопрос изложен у Дэвидса [29]). Как было указано в § 1, в постановке задачи и в доказательстве существования появляется нечто новое — следует уточнить топологическое расположение искомого решения относительно граничного многообразия M . Можно, например, задать коэффициенты зацепления границ рассматриваемых поверхностей с заранее выбранными кривыми, не лежащими на многообразии M ¹⁾.

¹⁾ Следует отметить, что можно выбрать и другие топологические ограничения; см. замечание (а) в конце этого параграфа.

Мы ограничимся типичной задачей. Пусть M — тор. Будем искать минимальную поверхность с границей на этом торе, закрывающую его отверстие. Для уточнения топологического расположения поверхности выберем простую замкнутую ломаную H (фиг. 67), не пересекающую тор, но *зацепляющую* его, т. е. зацепляющую любой цикл из класса гомологичных между собой и не гомологичных нулю циклов на торе ¹⁾.



Фиг. 67. Ломаная, зацепляющая тор.

Очевидно, такая ломаная либо лежит целиком вне тора и проходит через его отверстие, либо лежит целиком внутри тора, охватывая отверстие. Для того чтобы сформулировать вариационную задачу, предположим, что допустимые поверхности можно параметрически представить векторами $x(u, v)$, непрерывными в единичном круге B плоскости u, v . Векторы x должны иметь кусочно непрерывные первые производные и ограниченный интеграл Дирихле. Поскольку граница x на многообразии M не обязана быть непрерывной кривой, введем следующее условие зацепления: задаваемые вектором x образы простых замкнутых кривых, расположенных в достаточно малой окрестности границы β круга B , в частности, образы близких к β концентрических окружностей, должны зацеплять ломаную H .

Вариационная задача попрежнему состоит в отыскании допустимого вектора x , для которого интеграл

$$D[x] = d$$

принимает наименьшее возможное значение. В том, что решение этой задачи дает минимальную поверхность, можно убедиться точно так же, как и в случае задачи Плато.

2. Доказательство существования. Обозначим через d точную нижнюю грань интегралов $D[x]$ для допустимых векторов и введем следующее определение: последовательность поверхностей x_n называется *допустимой последовательностью*, если каждый ее член удовлетворяет всем условиям допустимости, с той оговоркой, что граница x_n не обязательно лежит на M , а может лежать на многообразии M_n , стремящемся к M при $n \rightarrow \infty$ (в том смысле, что наибольшее расстояние от точек M_n до многообразия M стремится к нулю).

¹⁾ Тогда всякая ориентируемая поверхность, натянутая на не гомологичный нулю цикл, будет пересекать H , и алгебраическая сумма индексов пересечения будет отлична от нуля.

Обозначим через δ точную нижнюю грань нижних пределов $D[x_n]$ для всех допустимых последовательностей. Допустимая последовательность x_n , для которой

$$D[x_n] \rightarrow \delta,$$

называется *обобщенной минимизирующей последовательностью*. Очевидно, что всегда $\delta \leq d$; в дальнейшем мы увидим, что $\delta = d$.

Исходя от произвольной обобщенной минимизирующей последовательности y_n , мы построим последовательность, состоящую из гармонических векторов x_n , ограниченных замкнутыми непрерывными кривыми M_n . Пусть r, θ — полярные координаты в круге B ; выберем значение r_n столь близким к 1, чтобы кусочно гладкие кривые M_n , определяемые векторами $y_n(r_n, \theta)$, зацепляли кривую H и расстояние их от M стремилось к нулю при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через x_n^* гармонический вектор, значения которого на границе β круга B задаются равенством $x_n^*(1, \theta) = y_n(r_n, \theta)$. Поверхность x_n^* имеет M_n своей границей. Поскольку $D[x_n^*] \leq D[y_n]$, векторы x_n^* снова образуют обобщенную минимизирующую последовательность. Так как кривые M_n и H зацепляются, то в B должна существовать по крайней мере одна точка (u_0, v_0) , такая, что точка $x_n^*(u_0, v_0)$ лежит на H . Линейным преобразованием круга B в себя можно перевести (u_0, v_0) в центр. Таким образом, мы получаем обобщенную минимизирующую последовательность гармонических векторов x_n , для которых $D[x_n] = D[x_n^*]$ и границами которых служат кривые M_n .

С этой нормированной последовательностью мы можем поступить, как раньше (см. п. 3 § 2 гл. III). Граничные значения векторов x_n , а следовательно, и значения их в круге B ограничены. Так как ограничены и значения интегралов $D[x_n]$, то на основании леммы (1.3б) из x_n можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к гармоническому вектору x в любой замкнутой подобласти B . Обычным рассуждением получаем неравенство

$$D[x] \leq \delta.$$

Теорема 6.1 утверждает, что граница поверхности x лежит на многообразии M . Точка $x(0, 0)$ лежит на ломаной H и поэтому находится на положительном расстоянии от M , следовательно, вектор x не постоянен.

Чтобы убедиться в том, что вектор x — допустимый вектор, надо доказать, что граница определяемой им поверхности зацепляет ломаную H . Это основной момент нашего рассуждения. Если допустимость вектора x доказана, то (поскольку имеют место неравенства $D[x] \leq \delta$ и $\delta \leq d$) мы получаем соотношение

$$D[x] = \delta = d,$$

которое показывает, что вектор x дает решение нашей задачи. Сначала отделим точки или линии в круге B , для которых точки $x(u, v)$

лежат на ломаной H . Так как вектор x является правильным гармоническим во всякой замкнутой подобласти B , то число таких „пересечений“ конечно, ибо граница x лежит на M и поэтому отделена от H . (Заметим, что общее число пересечений H и x_n может оказаться неограниченным.) Задавшись малой положительной постоянной ε , мы можем выбрать круг радиуса $r = r_\varepsilon$, содержащий все точки пересечения и такой, что все точки кривой M_ε , определяемой вектором $x(r_\varepsilon, \theta)$, будут удалены от M не больше, чем на $\varepsilon/2$. Теперь выберем n настолько большим, чтобы неравенство

$$|x_n(r_\varepsilon, \theta) - x(r_\varepsilon, \theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнялось для всех значений θ и, следовательно, расстояние от кривой $x_n(r_\varepsilon, \theta)$ до M было меньше ε . Предположим, что кривая $x(r_\varepsilon, \theta)$ не зацепляет ломаную H , тогда и кривые $x_n(r_\varepsilon, \theta)$ также не зацепляют ее¹⁾. Так как кривая $x_n(1, \theta)$ зацепляется с H , то алгебраическая сумма их индексов пересечения, соответствующая кольцу $R_\varepsilon: r_\varepsilon < r < 1$, отлична от нуля.

Для любой подобласти B , например для круга $B': r \leq 1/2$, имеем

$$D_{B'}[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{B'}[x_n];$$

далее, поскольку гармоническая функция x не может быть постоянной в области B' , то интеграл $D_{B'}[x]$ отличен от нуля. Поэтому имеет место неравенство

$$D_{B'}[x_n] > \alpha > 0, \quad (6.6)$$

где α — фиксированная постоянная.

Теперь, оценим радиальное колебание $x_n(r, \theta)$ (см. п. 4 § 8 гл. III). Пусть A — верхняя грань для всех значений $D[x_n]$, тогда для любого n существует такое значение $\theta = \theta_n$, что имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} x_n(r, \theta_n) \right\}^2 dr \leq \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} x_n(r, \theta_n) \right\}^2 r dr \leq \frac{1}{\pi} A.$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского—Шварца, получаем

$$|x_n(r, \theta_n) - x_n(1, \theta_n)|^2 \leq 2(1-r) \frac{A}{\pi}, \quad \frac{1}{2} \leq r < 1.$$

Поэтому колебание вектора $x_n(r, \theta_n)$ на отрезке $L_n: \theta = \theta_n, r_\varepsilon \leq r \leq 1$ меньше $\varepsilon/2$ для r_ε , достаточно близких к 1. Точка $x_n(1, \theta_n)$ лежит на M_n , и наибольшее расстояние от M_n до M стремится к нулю с возрастанием n , поэтому при достаточно больших n значения x_n на отрезках L_n удалены от M меньше, чем на ε . Поскольку r_ε не зависит

¹⁾ Так как для достаточно малых ε любую из этих кривых можно непрерывно деформировать в любую другую, не задевая при этом H .

от n , то можно положить $L_n = L$. Разрежем кольцо R_ε вдоль отрезка L . Получим односвязную область $R^* = R_\varepsilon^*$, границу которой вектор x_n отображает на непрерывную кривую, удаленную от M на расстояние, меньшее ε . Поскольку алгебраическая сумма индексов пересечения x_n в кольце R_ε отлична от нуля, эта кривая зацепляет ломаную H . (Точки пересечения x_n и H не могут соответствовать точкам L , так как расстояние этих точек от M остается больше ε .) Имеем

$$D_{R^*}[x_n] = D[x_n] - D_{B-R^*}[x]$$

и, используя неравенство (6.6), получаем

$$D_{B-R^*}[x_n] > D_{B'}[x_n] > \alpha,$$

откуда

$$D_{R^*}[x_n] < D[x_n] - \alpha.$$

Устремляя ε к нулю и соответственно n к бесконечности, а r_ε к 1, получаем

$$\liminf D_{R^*}[x_n] \leq \delta - \alpha. \quad (6.7)$$

Область R^* можно конформно отобразить на единичный круг B , причем вектор x_n , заданный в R^* , перейдет в вектор z_n , заданный в B , так что $D[z_n] = D_{R^*}[x_n]$. Последовательность z_n , очевидно, является допустимой, поэтому

$$\liminf D[z_n] = \liminf D_{R^*}[x_n] \leq \delta - \alpha,$$

что противоречит (6.7), так как x — допустимый вектор. Таким образом, мы закончили доказательство существования и дополнительно установили, что величины d и δ совпадают.

Замечания.

а) Решение вариационной задачи удовлетворяет условиям трансверсальности, аналогичным условиям, выведенным в п. 1 § 3.

б) Для частного случая, когда многообразии M вырождается в жорданову кривую γ , мы получаем решение задачи, аналогичной задаче Плато, но отличающейся от нее тем, что класс допустимых поверхностей сравнения здесь более широк: не требуется, чтобы вектор x непрерывно и монотонно отображал единичную окружность на кривую γ . Достаточно потребовать, чтобы граница поверхности x лежала на γ в смысле определения 6.1 и чтобы эта поверхность зацепляла ломаную H , как это разъяснено в п. 1. Условие зацепления можно расширять как замену условия монотонности отображения β на γ . Такое расширение класса поверхностей сравнения могло бы, на первый взгляд, привести к уменьшению минимального значения площади. Однако было доказано, что обобщенная задача имеет те же решения, что и задача Плато [23].

в) Постановку задачи и методы, развитые здесь для односвязных поверхностей, можно обобщить на случай минимальных поверхностей

высших топологических структур. Мы не будем останавливаться на рассмотрении таких обобщений [29].

г) Следует заметить, что условие замкнутости граничной поверхности M не является необходимым, но оно упрощает изложение доказательства. Очевидно, что минимальная поверхность x , осуществляющая относительный минимум в случае границы, свободной на поверхности M , останется такой же, если заменить M другой замкнутой или открытой поверхностью M' , совпадающей с первой в окрестности множества граничных точек x на M . Вместо условия, в которое входят коэффициенты зацепления, на свободные границы можно было бы наложить другие ограничения, обеспечивающие компактность и замкнутость класса допустимых векторов.

§ 5. СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ ГРАНИЦ. ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Предыдущие разделы посвящены в основном доказательству существования минимальных поверхностей наименьшей площади со свободными границами и содержат лишь немного сведений о *следе* минимальной поверхности G , т. е. о множестве p предельных точек $x(u, v)$ при приближении точек (u, v) к части β_1 окружности β , соответствующей свободной границе. Теперь мы перейдем к изучению свойств такого следа при соответствующих ограничениях, наложенных на многообразии M .

1. Плоская граничная поверхность. Отражение. В случае, когда поверхность M плоская, дело обстоит совсем просто. Из условия трансверсальности минимальной поверхности G к плоскости M следует, что G можно аналитически продолжить с помощью отражения в этой плоскости (см. теорему 3.2).

Теорема 6.4. След является аналитической кривой; вдоль этой кривой касательная плоскость к поверхности G ортогональна к плоскости M .

Доказательство. Пусть вектор $x(u, v)$ определяет минимальную поверхность G , имеющую свободную границу на плоскости $z = 0$ и осуществляющую относительный минимум интеграла Дирихле. Будем считать, что свободная граница соответствует интервалу $[u_1, u_2]$ на границе $\beta: v = 0$ параметрической области $B: v > 0$ плоскости u, v . Для $u_1 < u < u_2$ гармоническая функция $z(u, v)$ стремится к нулю при $v \rightarrow 0$. Поэтому на основании принципа симметрии для гармонических функций z можно аналитически продолжить через интервал $[u_1, u_2]$, положив $z(u, v) = -z(u, -v)$. Рассмотрим расположенный в области B полукруг H радиуса a , диаметр которого лежит на интервале $[u_1, u_2]$. Так как x осуществляет минимум интеграла Дирихле для всей параметрической области, то значение $D_H[x]$ является минимальным также и для всех векторов, заданных в полукруге H , на его

полуокружности совпадающих с вектором x и в точках диаметра принимающих значения из плоскости $z = 0$. Это условие не предполагает никаких ограничений, налагаемых на составляющие $x(u, v)$ и $y(u, v)$ рассматриваемого вектора; их значения при $v = 0$ совершенно произвольны. Из равенства

$$D_H[x] = D_H[x] + D_H[y] + D_H[z]$$

видно, что составляющая $x(u, v)$ минимизирует интеграл Дирихле для полукруга H , когда ее значения заданы на полуокружности и свободны на диаметре полукруга. То же самое справедливо и для составляющей $y(u, v)$ (с другими заданными значениями на полуокружности). Из теоремы 1.3 следует, что составляющие $x(u, v)$ и $y(u, v)$ правильны на части β , входящей в состав границы H , и что на этой части частные производные x_v и y_v обращаются в нуль. На основании принципа симметрии функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ можно продолжить в нижнюю полуплоскость, положив $x(u, -v) = x(u, v)$, $y(u, -v) = y(u, v)$. Наше утверждение доказано.

Пример.

Минимальная поверхность, ограниченная горизонтальной окружностью и имеющая свободную границу на горизонтальной плоскости, есть катеноид, пересекающий плоскость под прямыми углами.

Следует заметить, что применение принципа симметрии и ортогональность плоскости основаны только на свойстве стационарности значения $D[x]$ (см. определение, приведенное в п. 3 этого раздела). Поэтому результаты этого пункта применимы к произвольным стационарным минимальным поверхностям.

Из принципа симметрии вытекает

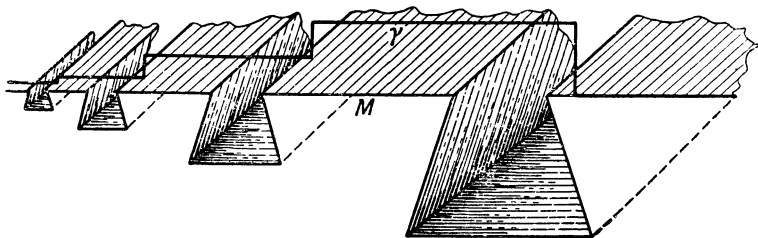
Лемма 6.1. Пусть G — поверхность наименьшей площади, ограниченная плоскостью M и жордановой дугой γ , соединяющей две точки M . Тогда плоскость E , ортогональная к M и не пересекающая γ , не пересекает поверхности G .

Действительно, G можно рассматривать как половину минимальной поверхности G' , граница γ' которой состоит из дуги γ и ее зеркального отражения относительно плоскости M . Если плоскость E задана уравнением $x = 0$, то для γ' можно принять справедливым неравенство $x > 0$. На основании принципа экстремума для гармонических функций неравенство $x > 0$ справедливо всюду на G' , а следовательно, и на G .

Заметим, что поверхность наименьшей площади G , ограниченная плоскостью $M: z = 0$ и заданной кривой γ в полупространстве $z \geq 0$, целиком лежит в этом полупространстве. В самом деле, если отличная от постоянной гармоническая функция $z(u, v)$ имеет неотрицательные граничные значения, то она положительна и всюду на поверхности G . Далее, след поверхности G на плоскости M есть монотонный образ соответствующего отрезка оси u параметрической плоскости.

Действительно, в противном случае величины x_u^2 и x_v^2 обращались бы одновременно в нуль в некоторой точке P отрезка. Допустим, что G является образом верхней половины круга $u^2 + v^2 < 1$. Точка P должна быть критической точкой гармонической функции $z(u, v)$. Отсюда следует, что ветвь линии уровня $z(u, v) = 0$ должна идти от точки P внутрь полукруга, отделяя область $z > 0$ от области $z < 0$. Это противоречит тому, что в полукруге H всюду $z > 0$, поэтому след действительно является монотонным образом отрезка, лежащего на β .

2. Поверхность наименьшей площади с разрывной свободной границей. При общем рассмотрении вопроса о следе поверхности G на многообразии M возникают большие затруднения, сущность которых можно усмотреть из приводимого ниже примера. Пример этот показывает, что след может не быть непрерывной кривой.



Фиг. 68. К задаче, обладающей несчетным множеством решений с разрывным следом.

Для определения граничной поверхности M возьмем куб, одна из граней которого задана условиями $z = 0$, $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$. Выбросим из внутренности этого куба бесконечное множество призм с трапецевидным сечением D_n , $n = 1, 2, \dots$, ограниченных сверху и снизу прямоугольниками

$$z = 0, \quad |x| \leq 1, \quad \left| y - \frac{1}{n} \right| \leq \varepsilon_n^3$$

и

$$z = -\varepsilon_n, \quad |x| \leq 1, \quad \left| y - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{2},$$

с торцов — плоскостями $|x| = 1$ и с боков — наклонными плоскостями (фиг. 68). Положительные постоянные ε_n выберем так, чтобы сумма их не превосходила $1/4$. Площадь верхней горизонтальной грани каждой призмы равна $2\varepsilon_n^3$, площадь сечения вертикальной плоскостью, параллельной оси x , равна $2\varepsilon_n$. Рассмотрим сначала поверхность G_1 , которая ограничивает куб с одной вырезанной призмой, например D_1 .

В качестве дуги γ выберем отрезок $|y| \leq \varepsilon_1^3$, $x = 0$, $z = 0$. Легко видеть, что существуют два симметричных решения вариационной задачи, осуществляющих абсолютный минимум, а именно, два плоских прямоугольника, каждый из которых представляет собой половину верхней горизонтальной грани призмы. Площадь каждого из этих прямоугольников равна ε_1^3 . Свободной границей является соответствующая половина границы верхней горизонтальной грани. Обозначим через G_1^+ и G_1^- прямоугольники, для точек которых соответственно выполняются неравенства $x > 0$ и $x < 0$. Существует еще третье решение — трапеция, получаемая в центральном вертикальном сечении призмы. Площадь этой трапеции больше $\varepsilon_1^3/2$, и, следовательно, решение дает лишь относительный минимум.

Теперь рассмотрим непрерывную поверхность, которая служит границей куба с выброшенными призмами D_n ; верхние горизонтальные грани этих призм стремятся к отрезку $z = 0$, $y = 0$, $|x| \leq 1$. В качестве кривой γ выберем ломаную, соединяющую точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x = 0$, $y = 1 - \varepsilon_1$, $z = 0$. Эта ломаная лежит в плоскости $x = 0$ и составлена поочередно из вертикальных и горизонтальных отрезков. Над призмой D_n горизонтальные отрезки проходят на высоте $\eta_n < \varepsilon_n^4$ над поверхностью куба; вертикальные отрезки соединяют соседние горизонтальные.

Так как $\eta_n \rightarrow 0$ и ломаная γ неограниченно приближается к плоскости $z = 0$, то решения G минимальной задачи сходятся к вырожденным предельным решениям. Обозначим через G_n^+ и G_n^- половины верхней горизонтальной грани призмы D_n , для точек которых соответственно $x > 0$ и $x < 0$. Любая комбинация поверхностей G_n^+ и G_n^- ($n = 1, 2, 3 \dots$) дает абсолютный минимум для вырожденного случая. В рассматриваемом примере след на поверхности M содержит последовательность краев соответствующих половин призм. Применив лемму о непрерывности, аналогичную лемме 3.3 (ее доказательство можно получить с помощью развиваемых ниже методов), мы приходим к заключению, что в достаточной близости от плоскости $z = 0$ существует бесконечное множество минимальных поверхностей, решающих нашу минимальную задачу и лежащих сколь угодно близко к вырожденной поверхности описанного типа. Следы вырожденных поверхностей накапливаются к отрезку $|x| \leq 1$, $y = 0$, $z = 0$ или к его половине.

То же самое справедливо для невырожденных поверхностей, если кривая γ достаточно близка к M , т. е. если числа η_n выбираются достаточно малыми, поэтому след не будет непрерывной кривой. Более того, различные решения задачи образуют несчетное множество — этот замечательный факт дополняет результаты п. 2 § 6 гл. III относительно неединственности решения задачи с заданными границами.

3. Трансверсальность. Из предыдущего примера видно, что, для того чтобы след обладал „разумными“ свойствами, на граничное многообразие M надо наложить некоторые условия. Такие условия требуются также для замены слабого условия трансверсальности, приведенного в п. 1 § 3, более сильным условием ортогональности свободной границы в обычном смысле.

Для большей систематичности удобно ввести общее понятие трансверсальности, применимое ко всем задачам вариационного исчисления со свободными границами. Пусть дана минимальная поверхность G , граница ρ которой лежит на поверхности M и которая в окрестности точки P этой границы расположена по одну сторону M . Поверхность G называется *трансверсальной* к M в окрестности точки P , если она обладает следующими вариационными свойствами: существуют примыкающий к M кусок G' поверхности G (ограниченный жордановой дугой γ и частью ρ' дуги ρ , содержащей P) и содержащая ρ' открытая часть M' поверхности M , такие, что G' осуществляет абсолютный минимум в задаче с границей, фиксированной на γ и свободной на M' .

Используя понятие трансверсальности как локальное понятие, мы приводим теперь следующее определение. Минимальная поверхность G , граница ρ которой лежит на поверхности M , называется *стационарной* относительно M , если она трансверсальна к последней в каждой точке P границы ρ . Заметим, однако, что поверхность, стационарная в целом, не обязательно осуществляет минимум. Примером может служить экваториальный круг G сферы M .

Согласно п. 1, минимальная поверхность, ортогональная к плоскости M , трансверсальна к этой плоскости и потому имеет аналитический след ρ . Обратно, задав плоскость или в общем случае произвольную аналитическую поверхность M и использовав представление минимальной поверхности, данное в § 1 гл. III, можно известным из дифференциальной геометрии способом (см. [2] гл. VIII, § 111) построить минимальную поверхность, ортогональную к M вдоль любой заданной аналитической кривой ρ . Легко видеть, что эта поверхность трансверсальна к поверхности M вдоль ρ . Если бы удалось доказать, что не существует других минимальных поверхностей, трансверсальных к аналитической поверхности M , то отсюда следовало бы доказательство аналитичности следа ρ для поверхностей, дающих решения задачи предыдущих параграфов. Однако в этом направлении до сих пор получены лишь самые незначительные результаты. Доказано только [23], что связности граничной поверхности M по существу¹⁾ достаточно для того, чтобы след был непрерывной спрямляемой кривой и чтобы минимальная поверхность имела почти во всех точках следа касательную плоскость, ортогональную к опорной плоскости поверхности M .

¹⁾ Словами „по существу“ мы хотим сказать, что необходимы некоторые несущественные дополнительные ограничения.

§ 6. НЕУСТОЙЧИВЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАНЫМИ МНОГОУГОЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

1. Неустойчивые точки стационарности функций N переменных.

Займемся вопросом о неустойчивых минимальных поверхностях. Как указано в § 1, непрерывно дифференцируемая функция $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ от N независимых переменных имеет в области S неустойчивые точки стационарности (минимаксы), если она имеет два различных относительных минимума в точках P_1 и P_2 и если на границе S она обращается в бесконечность¹⁾. При этом предполагается, что минимумы строгие, т. е. что для любой точки $P \neq P_i$ из окрестности P_i справедливо неравенство $d(P) > d(P_i)$. Мы, однако, не будем доказывать, что неустойчивая точка стационарности P_3 является точкой строгого минимакса. Вообще говоря, верно лишь то, что в каждой окрестности P_3 существует точка P , для которой $d(P) < d(P_3)$.

Построим такую точку стационарности. Пусть P_1 и P_2 будут две точки области S , в которых достигаются относительные минимумы d_1 и d_2 . Соединим P_1 и P_2 непрерывной кривой или, для большей общности, замкнутым связным точечным множеством Σ , принадлежащим S . Обозначим через d_Σ максимальное значение функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ на множестве Σ , а через P_Σ — точку Σ , в которой достигается это максимальное значение; значение d_Σ больше d_1 и d_2 . Наконец, рассмотрим последовательность $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ связных замкнутых точечных множеств с максимальными значениями $d_{\Sigma_1}, d_{\Sigma_2}, \dots$, достигаемыми в точках $P_{\Sigma_1}, P_{\Sigma_2}, \dots$, и такую, что

$$d_{\Sigma_n} \rightarrow d,$$

где d — точная нижняя грань всех возможных значений d_Σ . Очевидно, что справедливы неравенства $d > d_1$ и $d > d_2$. Пусть A_1, A_2, \dots будет последовательность точек множеств $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$; совокупность всех предельных точек для всех таких последовательностей A_i определяет компактное множество Σ . Множество Σ связно и содержит точки P_1 и P_2 . Более того, соответствующая последовательность точек P_{Σ_n} имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Sigma_n} = P_\Sigma.$$

Точка P_Σ принадлежит множеству Σ . В силу непрерывности функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ имеем $d(P_\Sigma) = d$, в то время как во всех остальных точках Σ значения этой функции не превосходят d , поэтому $d_\Sigma = d$. Мы назовем Σ минимизирующим множеством, связывающим точки P_1 и P_2 .

¹⁾ Если S — неограниченная область, то предполагается, что значение d неограниченно возрастает при приближении к бесконечно удаленной точке.

В Σ существует замкнутое подмножество \mathfrak{M} точек P , в которых функция $d(P)$ принимает максимальное значение $d(P) = d$. Покажем, что по крайней мере одна из таких точек P является точкой стационарности функции $d(P)$, т. е. что в этой точке все первые производные функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ обращаются в нуль.

Для доказательства мы преобразуем минимизирующее множество Σ во множество Σ' — посредством деформации, переводящей точки P первого множества в точки P' второго так, чтобы всюду, кроме образов произвольно малых окрестностей точек стационарности, выполнялось неравенство $d(P') < d(P)$. Поэтому, если \mathfrak{M} не содержит точек стационарности, то Σ можно заменить другим множеством Σ' , для которого $d_{\Sigma'} < d$, что противоречит минимизирующему свойству множества Σ .

Деформация осуществляется *перемещением точек P в P' по направлению градиента* функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$. Пусть $U: u_1, u_2, \dots, u_N$ будет точка области C и $V: v_1, v_2, \dots, v_n$ — произвольный вектор с началом в точке U . Первые производные функции $d(U)$, по предположению, непрерывны в области C . Следовательно, для любой фиксированной ее подобласти C^* и произвольно малого δ можно найти положительную постоянную ε_δ настолько малую, что для всех точек U из C^* справедливо соотношение

$$d(U - \varepsilon V) = d(U) - \varepsilon V \operatorname{grad} d(U) + \varepsilon \tau(\varepsilon), \quad (6.8)$$

где $|\tau(\varepsilon)| < \delta$ для $|\varepsilon| < \varepsilon_\delta$. Выберем подобласть C^* так, чтобы она содержала \mathfrak{M} .

Допустим, что в любой точке замкнутого множества \mathfrak{M} справедливо неравенство

$$|\operatorname{grad} d(U)| \geq 4\alpha,$$

где α — положительная постоянная. Выберем постоянную $a < 1$ настолько малой, чтобы неравенство

$$|\operatorname{grad} d(U)| > 2\alpha$$

выполнялось в большей области \mathfrak{M}^* , состоящей из всех точек U , для которых расстояние от точек области \mathfrak{M} не превосходит a . Мы можем считать, что точки P_1 и P_2 не принадлежат \mathfrak{M}^* и что C^* содержит \mathfrak{M}^* . Применяя к вектору $V = \operatorname{grad} d(U)$ в точках \mathfrak{M}^* соотношение (6.8), будем иметь

$$d(U - \varepsilon V) \leq d(U) - 4\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon\delta, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta. \quad (6.9)$$

Если мы выберем величины $\delta = \alpha^2$ и ε_δ достаточно малыми, то из неравенства (6.9) получим

$$d(U - \varepsilon V) \leq d(U) - 3\varepsilon\alpha^2.$$

Обозначим через P_0 фиксированную точку \mathfrak{M} , через r — расстояние до этой точки и рассмотрим все точки $U: u_1, u_2, \dots, u_N$ из \mathfrak{M}^* ,

расстояние которых от P_0 не превосходит a . В сфере $r \leq a$ заменим каждую точку U точкой $U' : u'_1, u'_2, \dots, u'_N$, положив

$$U' = U - \eta \operatorname{grad} d(U),$$

где $\eta = \varepsilon_\delta(a - r)$. Тогда внутри этой сферы будет иметь место неравенство

$$d(U') < d(U) < d.$$

Вне сферы $r \leq a$ мы положим $U' = U$, и, следовательно, будем иметь

$$d(U) = d(U').$$

Множество \mathfrak{M} можно покрыть конечным числом таких сфер. Выполнив последовательно соответствующие преобразования, мы получим преобразование $U \rightarrow U'$ области S в себя, при котором все точки, расположенные вне \mathfrak{M}^* , остаются неподвижными. Множество Σ преобразуется в компактное связное множество Σ' , содержащее точки P_1 и P_2 , причем всюду в Σ' справедливо неравенство $d(U') < d$, которое противоречит предположению о том, что Σ — минимизирующее множество. Таким образом, предположение $\alpha > 0$ неверно и Σ содержит точку стационарности функции $d(U)$.

Пусть \mathfrak{S} — множество всех точек стационарности, содержащихся в \mathfrak{M} . Это множество замкнуто, ибо производные функции $d(U)$ непрерывны. Так как \mathfrak{M} , а следовательно, и \mathfrak{S} являются собственными подмножествами Σ , то в Σ существует граничная точка P_3 множества \mathfrak{S} . Имеет место

Лемма 6.2. В любой окрестности K точки P_3 существует точка P , для которой $d(P) < d(P_3)$.

Доказательство. Пусть Q — точка, лежащая в пересечении K и множества $\Sigma - \mathfrak{S}$; тогда $d \geq d(Q)$. Если бы значение $d(Q)$ было равно d , то в окрестности Q , содержащейся в K , нашлась бы другая точка P , для которой выполнялось бы неравенство $d(P) < d(Q) = d$, ибо Q не является точкой стационарности. Лемма доказана.

Теория критических точек Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана [6, 47] и Морса [52] значительно продвинула изучение точек стационарности. В этой теории введены в рассмотрение высшие типы точек стационарности и найдены соотношения между их числом и топологическими характеристиками области S .

При обобщении теории неустойчивых точек стационарности на функционалы, рассматриваемые в вариационном исчислении, возникает трудность, состоящая в том, что в некоторых случаях эти функционалы не непрерывны, а только полунепрерывны в соответствующих функциональных пространствах. Для случая вариационных задач Шиффман и независимо от него Морс и Томпкинс преодолели эту трудность, исследовав функционал Дугласа. Другая возможность состоит в сведении задачи о стационарных значениях функционалов к

соответствующей задаче для функций от конечного числа N независимых переменных [20] и дальнейшем переходе к пределу при $N \rightarrow \infty$ ¹⁾). Мы воспользуемся этим методом для случая односвязной минимальной поверхности с кусочно гладкими границами.

В следующем пункте, посвященном рассмотрению минимальных поверхностей, натянутых на ломаные, осуществляется первая часть этой программы.

2. Другая постановка вариационной задачи. Пусть γ — простой многоугольный контур с $N+3$ вершинами. Рассмотрим интеграл Дирихле $D[x]$, распространенный на верхнюю полуплоскость $B: v > 0$ с границей $\beta: v = 0$. Допустимыми векторами будем считать все векторы $x(u, v)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) вектор $x(u, v)$ непрерывен в $B + \beta$ и имеет в B кусочно непрерывные первые частные производные;
- 2) интеграл Дирихле от $x(u, v)$ по области B конечен;
- 3) вектор $x(u, v)$ непрерывно и монотонно отображает β на ломаную γ .

Пространство всех допустимых векторов обозначим через \mathfrak{S}^* . Пространство гармонических векторов из \mathfrak{S}^* обозначим через \mathfrak{F}^* . Можно считать, что три фиксированные последовательные вершины ломаной γ являются образами, например точек $u = -1, 0, \infty$ прямой β . Такая нормировка определяет соответствующие подпространства \mathfrak{S}^* и \mathfrak{F}^* , которые мы обозначим через \mathfrak{S} и \mathfrak{F} . Из п. 2 § 2 гл. III мы знаем, что подпространство \mathfrak{F} , в котором $D[x] \leq c$, компактно.

Остальные вершины γ соответствуют последовательно точкам u_1, u_2, \dots, u_N прямой β , образующим множество (U) . Вместо рассмотренной ранее вариационной задачи III будем рассматривать задачу III — U: для фиксированного множества (U) найти вектор z из пространства \mathfrak{S} , для которого интеграл $D[z]$ достигает минимального значения относительно этого пространства.

Задача III — U решается точно так же, как задача Плато III, рассмотренная в гл. III. Решением ее служит вектор z из пространства, \mathfrak{F} вообще говоря, не определяющий минимальной поверхности. Минимальное значение является функцией

$$d(U) = d(u_1, u_2, \dots, u_N)$$

от системы (U) из N параметров u_i , меняющихся в области $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_N < \infty$. Из результатов гл. III следует, что на границе этой области $d(U)$ обращается в бесконечность. В самом деле, если бы интеграл $D[z]$ оставался ограниченным, например при $u_1 \rightarrow u_2$, мы получили бы множество допустимых векторов z с равномерно ограниченными интегралами Дирихле, граничные значения

¹⁾ Такой предельный переход впервые осуществил Шиффман [75].

которых не были бы равномерно непрерывными, это противоречит лемме 3.2. Зависящие от множества (U) гармонические векторы \mathbf{z} , которые являются решениями задачи III—U, называются *минимальными векторами*. Они образуют подмножество \mathfrak{M} множества \mathfrak{F} . При помощи зависящих от параметра ε преобразований (3.12)

$$\begin{aligned} u &= u' + \varepsilon\Lambda, \\ v &= v' + \varepsilon M, \end{aligned}$$

где Λ и M — функции от u, v и ε (или от u', v' и ε), область $B + \beta$ взаимнооднозначно отображается на себя. Функции Λ и M предполагаются непрерывными в $B + \beta$, а их первые производные — кусочно непрерывными и по абсолютной величине ограниченными постоянной b ; значения Λ и M при $\varepsilon = 0$ мы обозначим λ и μ . Как и в п. 1 § 4 гл. III, рассмотрим семейство вариаций следующего типа: вектор \mathbf{x} из \mathfrak{S} преобразуется в вектор \mathbf{z} из \mathfrak{S}^* при помощи соотношения

$$\mathbf{z}(u', v') = \mathbf{x}(u, v).$$

Обозначая через D^* интеграл Дирихле, взятый по области B относительно переменных u' и v' , имеем соотношение (3.16)

$$D^*[\mathbf{z}] = D[\mathbf{x}] + \frac{1}{2} \varepsilon V(\mathbf{x}, \lambda, \mu) + \varepsilon^2 R,$$

где первая вариация $V(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ интеграла $D[\mathbf{x}]$ определяется формулой (3.17)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, \lambda, \mu) &= \iint_B [p(\lambda_u - \mu_v) - q(\lambda_v + \mu_u)] du dv, \\ p &= x_u^2 - x_v^2, \quad q = -2x_u x_v \end{aligned}$$

и остаточный член оценивается неравенством

$$|R| \leq cD[\mathbf{x}],$$

в котором постоянная c зависит только от верхней грани b первых производных функций Λ и M . Если \mathbf{x} лежит в \mathfrak{F} , то $p + iq = \varphi(\mathbf{w})$ является аналитической функцией переменного \mathbf{w} в области B ; тождество $\varphi(\mathbf{w}) = 0$ служит достаточным условием минимальности поверхности \mathbf{x} .

Преобразования (3.12) отображают систему (U) на другую систему (U') значений u'_1, u'_2, \dots, u'_N . Вообще говоря, преобразование (3.12) перемещает точки $u = -1, 0, \infty$ так, что векторы из \mathfrak{S} преобразуются в векторы из \mathfrak{S}^* , не удовлетворяющие более условию трех точек. Однако подходящим линейным преобразованием с действительными коэффициентами, не изменяющим интеграла Дирихле и области B , можно вернуть вектор в пространство \mathfrak{S} . Следовательно, можно считать все вариации нормированными так, что векторы остаются в этом пространстве.

Назовем значение $D[x]$ *стационарным*, если

- 1) вектор x является гармоническим и
- 2) первая вариация V обращается в нуль для всех допустимых функций λ , μ или Λ , M в преобразованиях (3.12).

Предыдущие замечания показывают, что для доказательства стационарности вектора x из \mathfrak{S} достаточно доказать, что $V=0$ для всех λ , μ или Λ , M , для которых Δ обращается в нуль в точках $u = -1, 0, \infty$ прямой β , и, таким образом, измененный вектор z снова лежит в \mathfrak{S} . Такую нормировку мы примем во всем этом разделе.

Ряд последующих лемм посвящен изучению $d(U)$ как функции множества $(U): u_1, u_2, \dots, u_N$. Прежде всего докажем следующую лемму:

Лемма 6.3. Минимальный вектор z однозначно определяется множеством (U) .

Доказательство. Для фиксированного множества (U) допустимые векторы образуют *выпуклое* множество¹⁾, т. е. вместе с двумя векторами z_1 и z_2 этому множеству соответствует также вектор $x = tz_1 + (1-t)z_2$, $0 \leq t \leq 1$. Полагая $D[z_i] = d_i$, $i = 1, 2$, получаем из неравенства Буняковского — Шварца неравенство

$$D[x] \leq t^2 d_1 + (1-t)^2 d_2 + 2t(1-t) \sqrt{d_1 d_2}, \quad (6.10)$$

в котором знак равенства имеет место только в случае $z_1 = z_2$. Допустим, что z_1 и z_2 — различные минимальные векторы, тогда $d_1 = d_2 = d$, и из неравенства (6.10) вытекает неравенство $D[x] < d$, противоречащее тому, что значение d минимально. Лемма доказана.

Пространство \mathfrak{M} минимальных векторов является, таким образом, N -параметрическим семейством. В дальнейшем окажется полезной

Лемма 6.4. Допустимый вектор x , определяющий минимальную поверхность, принадлежит пространству \mathfrak{M} .

Доказательство. На основании принципа симметрии для минимальных поверхностей (теорема 3.2) на каждом открытом интервале $S_i: u_i < u < u_{i+1}$ прямой β вектор x является правильным гармоническим вектором. Первая составляющая этого вектора имеет на S_i равную нулю первую производную по v , а две другие составляющие постоянны на S_i . (Речь идет о составляющих в надлежащем образом выбранной ортогональной системе координат.) Рассмотрим допустимый вектор $x + y$. Последние две составляющие этого вектора обращаются на S_i в нуль, и потому в любой точке S_i имеем $u_{xv} = 0$.

¹⁾ Это единственный в наших рассуждениях, но существенный пункт, где используется то обстоятельство, что γ представляет собой ломаную линию.

Чтобы показать, что вектор x принадлежит пространству \mathfrak{M} , надо доказать неравенство

$$D[x + y] = D[x] + D[y] + 2D[x, y] > D[x].$$

Но оно следует из соотношения $D[x, y] = 0$, в справедливости которого можно убедиться, если сначала взять интеграл по области B с выброшенными малыми полукругами с центрами в точках множества (U) . Так как $\Delta x = 0$ и $u x_v = 0$ на S_i , то в формуле Грина сохраняются только интегралы по полуокружностям, которые стремятся к нулю, когда радиусы выброшенных полукругов неограниченно уменьшаются.

Лемма 6.5. Функция $d(U)$ непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим минимальный вектор z , соответствующий совокупности U , и обозначим через z' минимальный вектор, соответствующий совокупности (U') . Имеем $d' = d(U') = D[z'] \leq D[z]$ и, следовательно, на основании формулы (3.16) можем написать

$$d(U') \leq d(U) + \frac{1}{2} \varepsilon V(z, \lambda, \mu) + \varepsilon^2 c d(U), \quad (6.11)$$

откуда, используя неравенство $|V(z, \lambda, \mu)| \leq 4bD[z]$, вытекающее из формулы (3.18), получаем

$$d(U') \leq d(U)(1 + 4b\varepsilon + c\varepsilon^2).$$

Аналогичное неравенство справедливо также для обратного преобразования множества (U') во множество (U) . Лемма доказана.

Лемма 6.6. Минимальный вектор z непрерывно зависит от совокупности (U) .

Доказательство. Пусть (U_n) — последовательность, сходящаяся к совокупности (U) , z_n — последовательность соответствующих минимальных векторов и $d_n = D[z_n]$ — минимальные значения интегралов Дирихле в задаче III — U_n . Так как $d_n \rightarrow d$, то значения d_n ограничены. Векторы z_n принадлежат компактному пространству, поэтому существует подпоследовательность, сходящаяся к вектору y пространства \mathfrak{B} , соответствующему множеству (U) . Из полунепрерывности интеграла Дирихле для гармонических векторов следует неравенство $D[y] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$, поэтому $D[y] = d$. На основании леммы 6.3

вектор z однозначно определяется множеством (U) , следовательно, $y = z$ представляет собой минимальный вектор, соответствующий (U) , и в то же время является пределом последовательности z_n , так как в противном случае можно было бы выбрать подпоследовательность, сходящуюся к другому пределу.

На основании предыдущих лемм можно вывести следующее важное заключение:

Лемма 6.7. Функция $d(U)$ имеет непрерывные первые производные по переменным u_i .

Доказательство. Будем рассматривать \mathbf{z} как исходный вектор, а \mathbf{x} — как вектор, полученный из \mathbf{z} вариацией Δ, M . Для этой вариации имеем

$$d = d(U) \leq d(U') - \frac{1}{2} \varepsilon V'(\mathbf{z}', \lambda, \mu) + \varepsilon^2 cd(U'), \quad (6.12)$$

где функция V' определяется равенством

$$V'(\mathbf{z}', \lambda, \mu) = \iint_B [p'(\lambda_u - \mu_v) - q'(\lambda_v + \mu_u)] du dv, \quad (6.13)$$

в котором мы обозначаем переменные интегрирования через u и v вместо u' и v' и пользуемся обозначениями

$$p' = \mathbf{z}'_u{}^2 - \mathbf{z}'_v{}^2, \quad q' = -2\mathbf{z}'_u \mathbf{z}'_v.$$

Сначала мы докажем соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V'(\mathbf{z}', \lambda, \mu) = V(\mathbf{z}, \lambda, \mu). \quad (6.14)$$

Задав малую положительную постоянную δ , разобьем область B на замкнутую внутреннюю область B_1 и граничную полосу B_2 ширины, не превосходящей δ . Пусть V_1 и V_2 — интегралы (3.17), взятые соответственно по областям B_1 и B_2 , а V'_1 и V'_2 — такие же интегралы (6.13). На основании леммы 6.6 имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{z}' = \mathbf{z},$$

причем сходимость равномерна в области B_1 , а на основании теоремы Харнака (см. § 2 гл. I) то же имеет место для производных от \mathbf{z}' . Поэтому в выражении для V'_1 можно перейти к пределу под знаком интеграла, и, следовательно, $V'_1 \rightarrow V_1$. Из (6.11) и (6.12) следует, что $D[\mathbf{z}'] \rightarrow D[\mathbf{z}]$. Выбрав постоянную δ достаточно малой, величину интеграла $D_2[\mathbf{z}]$, а вместе с ней и величину $D_2[\mathbf{z}']$ можно сделать сколь угодно малыми равномерно относительно ε . Из выражения для интеграла V'_2 видно, что если производные функций λ и μ ограничены, то величина этого интеграла становится независимо от ε произвольно малой при достаточно малом значении δ . Следовательно, действительно $V' \rightarrow V$.

Из неравенств (6.1) и (6.12) для положительных значений ε следует неравенство

$$\frac{1}{2} V'(\mathbf{z}', \lambda, \mu) - \varepsilon cd(U') \leq \frac{d(U') - d(U)}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2} V(\mathbf{z}, \lambda, \mu) + \varepsilon cd(U), \quad (6.15)$$

из которого, используя соотношение (6.14), находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(U') - d(U)}{\varepsilon} = \frac{1}{2} V(\mathbf{z}, \lambda, \mu). \quad (6.16)$$

Если функции λ и μ подобраны специальным образом, так чтобы менялась только величина u_i (в частности, $\mu = 0$), то из соотношения (6.16) следует существование частной производной $\partial d(U)/\partial u_i$. Поскольку, согласно предыдущему, вариация V непрерывно зависит от совокупности (U) и от значений λ , очевидно, что производные функции $d(U)$ являются непрерывными функциями переменных u_i . Следовательно,

$$\frac{1}{2} V(\mathbf{z}, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial d(U)}{\partial u_i}, \quad (6.17)$$

где λ_i — значение функции λ в точке $u = u_i$, $v = 0$.

Непрерывность частных производных очевидна также из выражений, которые получаются в том случае, когда в качестве преобразований (3.12) выбраны кусочно линейные преобразования, оставляющие неизменной величину $\varphi' = v$, мало меняющие одну из величин u_i (например, переводящие u_2 в $u_2 + \varepsilon$) и не меняющие остальные:

$$u' = \begin{cases} u_1 + (u - u_1) \left(\frac{\varepsilon}{u_2 - u_1} + 1 \right), & u_1 \leq u \leq u_2, \\ u_3 + (u - u_3) \left(\frac{\varepsilon}{u_2 - u_3} + 1 \right), & u_2 \leq u \leq u_3, \\ u, & u < u_1, u > u_3. \end{cases}$$

Функция $\lambda = \Delta$ равна в соответствующих отрезках $-(u - u_1)/(u_2 - u_1)$ и $-(u - u_3)/(u_2 - u_3)$, а функция $\mu = M$ равна 0. Формула (6.16) дает

$$\frac{\partial d(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial u_2} = - \int_0^\infty dv \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \frac{z_u^2 - z_v^2}{u_2 - u_1} du + \int_{u_2}^{u_3} \frac{z_u^2 - z_v^2}{u_2 - u_3} du \right\},$$

и отсюда видно, что производная непрерывно зависит от значений (U) .

3. Доказательство того, что стационарные значения функции $d(U)$ являются стационарными значениями интеграла $D[x]$. Если функция $d(U)$ стационарна на множестве (U) , т. е. если обращаются в нуль все производные $\partial d/\partial u_i$, то соответствующий вектор \mathbf{z} является стационарным для интеграла $D[\mathbf{z}]$ и, следовательно, определяет минимальную поверхность. Это следует непосредственно из того, что, как было доказано выше (п. 4 § 3 гл. III), обращение в нуль функции V для всех допустимых вариаций λ и μ влечет за собой тождество $\varphi(w) = 0$. Так как любая минимальная поверхность \mathbf{x} ,

натянутая на контур γ , определяется вектором \mathbf{z} пространства \mathfrak{M} , то из леммы 6.4 легко вывести полную эквивалентность задачи о стационарных значениях $d(U)$ и задачи о минимальных поверхностях, натянутых на γ .

Следующая теорема показывает, что теория неустойчивых минимальных поверхностей сводится к теории неустойчивых точек стационарности для функций конечного числа переменных.

Теорема 6.5. Неустойчивые минимальные поверхности, натянутые на контур γ , соответствуют неустойчивым точкам стационарности функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ с непрерывными первыми производными.

Точнее, предположим, что P_3 является точкой стационарности функции $d(U)$, причем, согласно лемме 6.2, каждая окрестность P_3 содержит точку P , в которой $d(P) < d(P_3)$. Координатам (U) такой точки P соответствуют вариации минимальной поверхности, уменьшающие величину $D[x]$. С другой стороны, в пространстве \mathfrak{S} , очевидно, существуют вариации, увеличивающие $D[x]$. Отсюда следует, что минимальная поверхность, соответствующая точке P_3 , является поверхностью строгого минимакса.

Так как минимальная поверхность, осуществляющая строгий относительный минимум интеграла Дирихле, очевидно, принадлежит пространству \mathfrak{M} и осуществляет строгий относительный минимум функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$, то, учитывая результаты п. 1 § 6, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 6.6. Если контур γ ограничивает две различные минимальные поверхности, каждая из которых осуществляет строгий относительный минимум, то существует по крайней мере одна строго неустойчивая минимальная поверхность, натянутая на этот контур.

4. Обобщение. Предыдущие результаты можно обобщить, пользуясь методом, который удобнее всего изложить в геометрических терминах. Пусть два допустимых вектора $\mathbf{y}_1(u, v)$ и $\mathbf{y}_2(u, v)$ пространства \mathfrak{S} , для которых $d_1 = D[\mathbf{y}_1] \leq D[\mathbf{y}_2] = d_2$, соединены связывающим множеством Σ допустимых векторов $\mathbf{y}(u, v)$ и пусть d — точная верхняя грань (или максимум) значений интеграла $D[\mathbf{y}]$ на этом множестве. Величину d_Σ мы назовем *высотой*¹⁾, а разность $d_\Sigma - d_2$ — *относительной высотой* связывающего множества Σ . Минимум или точную нижнюю грань всех значений d_Σ обозначим через d . Если $d > d_2$, т. е. если $d - d_2 = h > 0$, то мы будем говорить, что векторы \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 разделены в пространстве \mathfrak{S} *барьером с относительной высотой h и абсолютной высотой d* . Связывающее множество, высота которого равна высоте d барьера, мы будем называть

¹⁾ Единственное существенное различие между рассмотрением § 6.1 и изучением функционала $D[x]$ в функциональном пространстве обусловлено тем обстоятельством, что интеграл $D[x]$ только полунепрерывен.

минимизирующим связывающим множеством. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 6.8. Пусть x_1 и x_2 — гармонические векторы пространства \mathfrak{F} , граничные значения которых равны соответственно граничным значениям y_1 и y_2 . Тогда x_1 и x_2 также разделены в \mathfrak{F} барьером, высота которого не меньше высоты барьера, разделяющего векторы y_1 и y_2 в пространстве \mathfrak{S} .

Доказательство. Пусть y — допустимый вектор пространства \mathfrak{S} , а x — вектор пространства \mathfrak{F} , имеющий те же граничные значения, что и \bar{y} . Построим связывающее множество

$$y(t) = x + (1-t)(y-x), \quad 0 \leq t < 1.$$

Вектор $y(t)$ имеет такие же граничные значения, как y , и $y(0) = y$, $y(1) = x$. Далее, имеем равенство

$$D[y(t)] = D[x] + (1-t)^2 D[y-x],$$

ибо $D[x, y-x] = 0$ (см. § 2 гл. I). Вектор $y(t)$ определяет деформацию вектора y в вектор x , непрерывно зависящую от параметра t . При возрастании t от 0 до 1 интеграл Дирихле монотонно убывает. Такие монотонные и непрерывные деформации мы назовем сжатиями. Обозначим через L_1 и L_2 множества поверхностей $y(t)$, по которым происходит сжатие y_1 в x_1 и y_2 в x_2 соответственно. Если Σ^* — множество, связывающее векторы x_1 и x_2 в пространстве \mathfrak{F} , то высота Σ^* должна быть не меньше высоты d барьера, разделяющего векторы y_1 и y_2 в пространстве \mathfrak{S} , ибо в противном случае $L_1 + \Sigma^* + L_2$ было бы множеством, связывающим y_1 и y_2 в \mathfrak{S} , и имело бы высоту, меньшую d . Лемма доказана.

Заметим, что лемма остается в силе также и в том случае, когда γ не является ломаной, ибо это обстоятельство в доказательстве не используется.

Если γ — ломаная, то вектор x пространства \mathfrak{F} можно сжать в вектор z пространства \mathfrak{M} , принадлежащий тому же множеству (U), что и вектор x . Обоснование такое же, как и раньше: вдоль связывающего множества, заданного формулой

$$x(t) = z + (1-t)(x-z), \quad 0 \leq t < 1,$$

значения интеграла Дирихле монотонно убывают. В самом деле, имеем

$$D[x(t)] = D[z] + (1-t)^2 D[x-z],$$

так как из неравенства

$$D[z] < D[z + \varepsilon(x-z)],$$

справедливого для $\varepsilon \neq 0$, обычным способом получается соотношение $D[z, x-z] = 0$. Таким образом, мы доказали, что для многоугольного контура γ справедлива

Лемма 6.9. Если два вектора x_1 и x_2 пространства \mathfrak{F} разделены барьером, высота которого превосходит положительную постоянную A , то векторы z_1 и z_2 пространства \mathfrak{M} , принадлежащие соответственно тем же множествам (U) , что и векторы x_1 и x_2 , разделены в \mathfrak{M} барьером высоты, большей A .

Теперь легко доказать следующее обобщение теоремы (6.6).

Теорема 6.7. Если ломаная γ ограничивает две поверхности u_1 и u_2 пространства \mathfrak{S} , разделенные в этом пространстве барьером, то γ должна ограничивать неустойчивую минимальную поверхность. Отметим, что этот результат не предполагает существования двух изолированных относительных минимумов.

Доказательство. Из предыдущих рассуждений мы знаем, что два вектора z_1 и z_2 пространства \mathfrak{M} , принадлежащие соответственно тем же множествам (U) , что и векторы u_1 и u_2 , разделены в этом пространстве барьером; следовательно, функция $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ имеет неустойчивую точку стационарности (см. п. 1) и ломаная γ ограничивает неустойчивую минимальную поверхность.

Б. Замечания о другой постановке задачи и о второй вариации. Недавние исследования Маркса и Шиффмана [50] показали, что функцию $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ можно использовать для классификации неустойчивых поверхностей. Эта классификация зависит от вторых производных функции $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$, существование и непрерывность которых для сформулированной в п. 2 задачи установить не легко. Поэтому мы несколько ослабляем условия задачи и отказываемся от требования монотонности отображения отрезков $u_i \leq u \leq u_{i+1}$ прямой $v = 0$ на соответствующие звенья ломаной, разрешая, чтобы допустимые векторы отображали эти отрезки на прямолинейные отрезки, содержащие звенья ломаной. Иными словами, мы требуем лишь, чтобы точки u_i и u_{i+1} соответствовали вершинам ломаной, и допускаем ее многократные покрытия; мы допускаем даже, чтобы образы отрезков v выходили за пределы звеньев ломаной. Такую задачу мы будем называть задачей М.

Решение этой задачи (кстати, не ведущей непосредственно к обобщениям, излагаемым в следующем параграфе) подробно описано в цитированной выше статье Маркса и Шиффмана. Оно проводится следующим образом. Во-первых, можно показать, что минимальные векторы дифференцируемы по параметрам u_1, u_2, \dots, u_N , откуда следует, что функция $d(u_1, u_2, \dots, u_N)$ имеет непрерывные вторые производные.

Пусть теперь (U) — стационарное множество функции $d(U)$. Построим матрицу из вторых производных $\partial^2 d / \partial u_i \partial u_j$ в точке U . Тогда будет справедливым следующее утверждение: число отрицательных

собственных значений этой матрицы равно числу отрицательных собственных значений оператора

$$L[c] = -(c_{uu} + c_{vv}) + 2KJc$$

с граничными условиями $c(u, 0) = 0$. Оператор $L[c]$ представляет собой выражение Эйлера, связанное со второй вариацией площади поверхности

$$\iint [c_u^2 + c_v^2 + 2KJc^2] du dv,$$

где c обозначает вариацию в направлении нормали, K — гауссову кривизну и $J = \sqrt{EG - F^2}$ — коэффициент площади для поверхности, представляемой минимальным вектором, соответствующим множеству (U) .

Для упрощения описываемой в этом пункте задачи можно доказать (см. [50]), что для минимального вектора функция $\varphi(w)$ имеет полюсы самое большее в точках u_1, u_2, \dots, u_N , а также в точках $u = -1, 0$, т. е. что ее разложение имеет вид

$$\varphi(w) = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{w - u_i} + \frac{R_{N+1}}{w + 1} + \frac{R_{N+2}}{w}.$$

Если, далее, подставить это выражение для $\varphi(w)$ в формулы для производных функции d , то легко получается следующий результат:

$$\frac{\partial d(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial u_i} = \frac{\pi}{2} R_i.$$

§ 7. НЕУСТОЙЧИВЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, НАТЯНУТЫЕ НА СПРЯМЛЯЕМЫЕ КОНТУРЫ

1. Предварительные замечания. Основная теорема. Пользуясь предельным переходом, мы распространим здесь предыдущие результаты на более широкий класс граничных кривых γ , а именно на спрямляемые кривые¹⁾. Сначала мы ограничимся более узким классом \mathcal{Q} спрямляемых жордановых кривых γ , состоящих из конечного числа дуг с непрерывно изменяющейся касательной; относительно непрерывности или существования касательных в концах этих дуг мы не будем делать никаких предположений. Кривые γ из класса \mathcal{Q} обладают следующим свойством:

Лемма 6.10. Пусть σ — сколь угодно малая постоянная. Кривую γ можно аппроксимировать ломаной γ_σ , а все векторное x -пространство непрерывно отобразить на x' -пространство таким образом, чтобы допустимый вектор $x(u, v)$ для границы γ переходил в

¹⁾ См. примечание на стр. 214.

вектор $x'(u, v)$, допустимый для границы γ_σ , и чтобы при этом удовлетворялось неравенство

$$D[x'] < (1 + \sigma) D[x]. \quad (6.18)$$

Значения вектора x' на оси u отличаются от соответствующих значений x не больше чем на величину, зависящую только от σ и стремящуюся к нулю вместе с σ . Если σ_i — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, то ломаные λ_{σ_i} можно построить так, чтобы они аппроксимировали γ в смысле Фреше и имели длину, стремящуюся к длине γ .

Доказательство этой леммы будет дано позже (см. § 8). Целью наших дальнейших рассуждений является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6.8 (основная теорема). Пусть x_1 и x_2 будут два допустимых вектора, натянутых на кривую γ и разделенных барьером. Тогда барьер имеет конечную высоту d , а векторы x_1 и x_2 входят в минимизирующее связывающее множество Σ , которое содержит также строго неустойчивую минимальную поверхность x ; при этом

$$D[x] = d,$$

в то время как для любого вектора y из множества Σ

$$D[y] \leq d.$$

В частности, теорема справедлива, если x_1 и x_2 — два изолированных относительных минимума.

Замечания.

С самого начала можно ограничиться рассмотрением гармонических векторов x , так как не гармонические векторы y можно сжать в гармонические с теми же самыми граничными значениями (см. лемму 6.8) и так как такое сжатие, если применить его ко всем поверхностям связывающего множества Σ , переводит это множество в связывающее множество гармонических поверхностей. Точно так же можно предположить, что все допустимые векторы x удовлетворяют условию трех точек, т. е. принадлежат пространству \mathfrak{F} . Если поверхность x_1 или x_2 не минимальная, то ее можно сжать в минимальную по способу, указанному в конце § 7 гл. III.

Доказательство. Напомним следующие результаты гл. III: зависимость минимума интеграла Дирихле от граничной кривой полунепрерывна снизу, гармонические векторы обладают свойством компактности, использованным при доказательстве полунепрерывности (п. 3 § 2), и площадь минимальной поверхности со спрямляемыми границами непрерывна (п. 4 § 8)¹⁾.

¹⁾ Именно использование этого третьего свойства дает возможность осуществить предельный переход (см. [75]).

Доказательство основной теоремы мы разобьем на три шага:

- а) замена γ и Σ соответственно на γ_σ и Σ_σ ;
- б) применение теоремы 6.7 для каждого значения σ ;
- в) переход к пределу при $\sigma \rightarrow 0$.

Рассмотрим барьер между гармоническим вектором x_1 и вектором x_2 , относительная высота которого удовлетворяет неравенству

$$d - d_1 > d - d_2 > 2\alpha > 0.$$

А priori бесконечная абсолютная высота d не исключена, но в процессе доказательства мы увидим, что этот случай невозможен. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\sigma = \sigma_i$, сходящуюся к нулю, и соответствующую последовательность ломаных γ_σ , аппроксимирующих кривую γ . Применим к этим ломаным лемму 6.10. Если x — вектор пространства \mathfrak{F} , натянутый на γ , то, согласно этой лемме, каждый из контуров γ_σ ограничивает допустимый вектор $x' = x_\sigma$, для которого выполняется неравенство (6.18). На основании принципа Дирихле вектор x_σ можно, не нарушая неравенства (6.18), сжать в гармонический вектор с теми же граничными значениями. Этот гармонический вектор снова обозначим через x_σ ; при $\sigma \rightarrow 0$ векторы x_σ стремятся к вектору x на основании последнего утверждения леммы. Обозначим через \mathfrak{F}_σ пространство гармонических векторов, ограниченных ломаной γ_σ . Можно считать, что три фиксированные точки γ лежат также на γ_σ и что одно и то же условие трех точек выполняется как для x , так и для всех x_σ .

Так как γ_σ представляет собой ломаную, то всякий вектор x_σ из \mathfrak{F}_σ можно сжать в вектор z_σ подпространства \mathfrak{M}_σ , как это делается в лемме 6.9. Для всякого связывающего множества Σ векторов x из \mathfrak{F} , ограниченных контуром γ , мы получаем, таким образом, связывающее множество Σ_σ векторов z_σ из \mathfrak{M}_σ , для которых справедливо неравенство

$$D[z_\sigma] \leq (1 + \sigma) D[x].$$

Граничные значения z_σ отличаются от граничных значений x не больше чем на величину, зависящую только от σ и стремящуюся к нулю вместе с ним. В частности, из векторов x_1 и x_2 мы получаем сначала векторы $x_{1,\sigma}$ и $x_{2,\sigma}$, а затем $z_{1,\sigma}$ и $z_{2,\sigma}$, для которых

$$\begin{aligned} D[z_{1,\sigma}] &= d_{1,\sigma} \leq (1 + \sigma) d_1, \\ D[z_{2,\sigma}] &= d_{2,\sigma} \leq (1 + \sigma) d_2. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Если x_1 и x_2 связаны множеством Σ , для векторов которого $D[x] < a$, то векторы $z_{1,\sigma}$ и $z_{2,\sigma}$ можно связать множеством векторов z_σ пространства \mathfrak{M}_σ , для которых $D[z_\sigma] \leq (1 + \sigma)a$.

В силу результатов п. 4 § 6 векторы $z_{1,\sigma}$ и $z_{2,\sigma}$ можно связать минимизирующим множеством Σ_σ с высотой d_σ , которое удовлетворяет неравенству

$$d_\sigma \leq (1 + \sigma)a. \tag{6.20}$$

Множество Σ_σ содержит *верхние элементы* t_σ , т. е. элементы, для которых $D[t_\sigma] = d_\sigma$, в то время как для всех элементов z_σ из Σ_σ имеем $D[z_\sigma] \leq d_\sigma$.

Как видно из теоремы 6.7, могут представиться три возможности: 1) $d_\sigma = d_{1,\sigma}$, 2) $d_\sigma = d_{2,\sigma}$, 3) между $z_{1,\sigma}$ и $z_{2,\sigma}$ существует барьер, верхний элемент t_σ которого представляет минимальную поверхность. Во всех трех случаях существует не зависящая от σ верхняя граница A значений $D[z_\sigma]$ на множестве Σ_σ . В первых двух случаях наличие такой границы следует из неравенств (6.19), в третьем случае — из изопериметрического неравенства (теорема 3.5), которое утверждает, что $D[t_\sigma] \leq L^2/\pi$, если только ломаные γ_σ столь близки к γ , что длина γ_σ не превосходит $2L$, где L — длина γ .

Пусть σ пробегает последовательность значений $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, стремящуюся к нулю. Обозначим через δ предел точной верхней грани d_{σ_i} при $\sigma_i \rightarrow 0$. Как и в п. 1 § 6, рассмотрим совокупность всех последовательностей векторов x_{σ_i} множеств Σ_{σ_i} и обозначим через Σ множество всех предельных векторов этих последовательностей. В силу компактности множества наших гармонических векторов Σ является связным множеством пространства \mathfrak{F} , содержащим векторы x_1 и x_2 . Далее, так как зависимость интеграла Дирихле от границы полунепрерывна, имеем $D[x] \leq \delta$ для всех векторов x множества Σ . Предположив, что относительная высота Σ больше d_2 на положительную постоянную 2α , получим

$$\delta \geq d_2 + 2\alpha.$$

Таким образом, для достаточно больших i , т. е. для достаточно малых σ_i , из неравенств (6.19) следуют неравенства

$$d_{\sigma_i} \geq d_{1,\sigma} + \alpha, \quad d_{\sigma_i} \geq d_{2,\sigma} + \alpha.$$

Множество Σ_{σ_i} имеет положительную относительную высоту и поэтому первая и вторая из перечисленных выше возможностей отпадают, следовательно, t_{σ_i} представляет минимальную поверхность. В силу компактности существует подпоследовательность t_{σ_i} , имеющая своим пределом минимальную поверхность x из Σ . Можно принять, что $x = \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} t_{\sigma_i}$ и $\delta = \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} d_{\sigma_i}$, где $d_{\sigma_i} = D[t_{\sigma_i}]$. Ввиду того что длина γ_{σ_i} стремится к длине γ , из теоремы 3.6 следует соотношение

$$D[x] = \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} d_{\sigma_i} = \delta,$$

в то время как в силу полунепрерывности значения интеграла Дирихле для всех других векторов из Σ не меньше δ . Другими словами, x является верхним элементом Σ и не осуществляет относительного минимума.

Остается доказать, что Σ является минимизирующим множеством, связывающим векторы x_1 и x_2 пространства \mathfrak{F} (и, следовательно,

что $\delta = d$). Для высоты a любого множества Σ , связывающего x_1 и x_2 в \mathfrak{B} , имеет место неравенство (6.20). Устремляя в нем σ_i к нулю находим

$$a \geq \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} d_{\sigma_i} = \delta.$$

Иначе говоря, δ является абсолютной высотой барьера между векторами x_1 и x_2 в пространстве \mathfrak{B} , т. е. $\delta = d$, чем и заканчивается доказательство.

2. Замечания и обобщения. По существу тем же методом можно распространить полученный результат на произвольные спрямляемые кривые, однако при этом возникают осложнения, связанные с аппроксимацией γ ломаными γ_σ . Этих осложнений удалось избежать Шиффману, предложившему другой способ аппроксимации кривой γ . Пусть параметрической областью является единичный круг, а r, θ — полярные координаты в нем. На γ выберем $N+3$ точки A_1, A_2, \dots, A_{N+3} , так, чтобы при $N \rightarrow \infty$ наибольшее из расстояний между двумя соседними точками стремилось к нулю. На границе β области B отметим $N+3$ точки Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+3} с координатами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N+3}$. Дуги $A_i A_{i+1}$ кривой γ можно вложить в выпуклые точечные множества K_i (диаметры которых будут в дальнейшем равномерно стремиться к нулю при N , стремящемся к бесконечности). Векторы $x(r, \theta)$ являются допустимыми, если 1) они непрерывны и имеют кусочно непрерывные первые производные в B , 2) их граничные значения на дугах $Q_i Q_{i+1}$ принадлежат множествам K_i , 3) они отображают концентрические окружности радиусов $r < 1$ на линии, длины которых не превосходят длины L линии γ . Кроме того, потребуем, чтобы выполнялось условие, эквивалентное условию трех точек. Именно выберем на β три фиксированные точки и потребуем, чтобы множества K_i , соответствующие содержащим эти точки дугам, содержали три фиксированные точки кривой γ . При заданных Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+3} наши допустимые векторы образуют выпуклое многообразие, и это дает ключ к решению задачи о минимуме интеграла $D[x]$, равном минимуму функции $d(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N+3})$. Теория и результаты в этом случае в точности те же, что и изложенные в § 6. Переход к пределу при N , стремящемся к бесконечности, и наибольшем из диаметров выпуклых множеств K_i , стремящемся к нулю, выполняются аналогично тому, как это сделано в п. 1. Более подробно изложение этого вопроса см. у Шиффмана [75].

Следующее замечание относится к распространению теории на случай k контуров, $k > 1$. Для $k=2$ новых существенных осложнений не возникает; для $k > 2$ приходится подробно изучать возможность вырождения области B (см. п. 3 § 2 гл. IV); необходимость этого связана с тем, что при доказательстве теоремы приходится рассматривать вырожденные поверхности. Эти вопросы рассмотрены в статьях Шиффмана [74], Морса и Томпкинса [56],

§ 8. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ X-ПРОСТРАНСТВА

Нам остается доказать лемму 6.10. Для этой цели применим метод преобразования x -пространства, уже использованный в п. 3 § 3 гл. IV. Кривая γ преобразуется в ломаную γ_* посредством конечного числа последовательных элементарных преобразований пространства, называемых операциями стягивания. Каждое из этих преобразований смещает только точки, лежащие в непосредственной окрестности фиксированной точки или отрезка.

а) δ , t -стягивание к точке P . Это преобразование переводит вектор $x(u, v)$ в вектор $y(u, v)$, определенный в той же области B , и непрерывно зависит от параметров δ и t . Для удобства выберем в качестве P начало координат. Операция стягивания оставляет неподвижными все прямые, проходящие через P , преобразует все точки сферы $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2} \leq \delta$ в начало координат и оставляет неизменными координаты всех точек, расположенных вне большей сферы $r > t\delta$. Она определяется следующим образом:

$$y_v = p(r) x_v, \quad v = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$p(r) = \begin{cases} 0, & r < \delta, \\ \frac{1}{\ln t} \ln \frac{r}{\delta}, & \delta \leq r \leq t\delta, \\ 1, & r > t\delta. \end{cases}$$

При $\delta = \eta^2$ и $t = \eta^{-1}$ это преобразование совпадает с преобразованием, использованным для доказательства леммы 4.2. Как и в этом доказательстве, имеем

$$D[y] \leq \frac{1}{2} \iint_B (1 + \varepsilon)^2 (x_u^2 + x_v^2) du dv, \quad (6.21)$$

где функция $\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varepsilon(r)$ задается соотношениями

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\ln t}, & r < t\delta, \\ 0, & r \geq t\delta. \end{cases}$$

(Если предположить вектор x гармоническим, то неравенства $r < t\delta$ и $r \geq t\delta$ будут определять подобласти B с аналитическими границами.)

б) δ , t -стягивание к прямолинейному отрезку S . Без ограничения общности можно выбрать в качестве S отрезок

$$x_2 = x_3 = \dots = x_m = 0, \quad |x_1| < a.$$

Определим преобразование для $|x_1| \leq a$ соотношениями

$$y_1 = x_1, \quad y_i = p(\rho) x_i, \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

где $\rho^2 = x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_m^2$ и функция $p(\rho)$ определяется так же, как и выше. Для $|x_1| > a$ преобразование определяется как δ , t -стягивание к точкам $x_1 = a$ и $x_1 = -a$ отрезка S . При таком преобразовании цилиндрический стержень с двумя полусферами на концах преобразуется в отрезок S .

Как и в случае стягивания к точке, имеет место неравенство (6.21), если только положить $\varepsilon = 1/\ln t$ для всех точек B , соответствующих векторам, смещающимся при этом преобразовании, и $\varepsilon = 0$ для остальных точек B . В результате N последовательно выполненных операций стягивания к различным точкам и линиям (быть может, с различными значениями $\delta = \delta_i$ и $\varepsilon = \varepsilon_i$) вектор x преобразуется в вектор y , для которого справедливо неравенство

$$D[y] \leq \frac{1}{2} \iint_B (1 + \varepsilon_1)^2 \dots (1 + \varepsilon_N)^2 (x_u^2 + x_v^2) du dv,$$

где функции ε_i определяются так же, как была определена выше функция ε . Если каждая точка пространства подвергается не более чем двум операциям стягивания, т. е. если в каждой точке пространства отличны от нуля не более чем два из чисел ε_i , то имеем

$$D[y] \leq (1 + \varepsilon)^4 D[x],$$

где на этот раз ε обозначает наибольшее из значений $1/\ln t_i$ для наших операций стягивания.

Применяя эти преобразования, мы сначала предположим, что точки, где не существует касательной к γ , являются простыми угловыми точками, в которых направление кривой меняется скачком, т. е. примыкающие к ним дуги не касаются друг друга. Впишем в γ ломаную γ' , среди вершин которой содержатся все угловые точки и длины звеньев которой заключены между значениями τ и 2τ ; величину τ мы определим позже как функцию σ . В силу кусочной гладкости γ' существует функция $\eta(\tau)$, стремящаяся к нулю вместе с τ , такая, что каждая точка γ удалена от соответствующего звена γ' на расстояние, меньшее $\eta^4\tau$.

Деформация x -пространства, преобразующая γ в γ' , строится посредством последовательных операций стягивания так, чтобы они не накладывались одна на другую, т. е. чтобы каждый вектор перемещался не больше чем при одной из этих операций. Сначала мы выбрасываем из каждого звена γ примыкающие к его концам отрезки длины $\eta^2\tau$. К оставшимся средним частям звеньев S применяем δ , t -стягивание, полагая

$$\delta = \eta^4\tau, \quad t = \frac{1}{\eta}.$$

Такие операции стягивания при достаточно малых τ не налагаются друг на друга. Они переводят все точки ломаной γ , кроме окрестностей ее вершин, в точки γ' . Дуги, примыкающие к вершинам,

удаляются от последних на расстояние, не превышающее $2r\eta^2$. Дополнительными операциями стягивания, для которых

$$\delta = 2\tau\eta^2, \quad t = \frac{1}{\eta},$$

эти дуги преобразуются в вершины, в то время как точки, лежащие на звеньях, остаются на них. Окончательно в результате всех описанных преобразований кривая γ преобразуется в ломаную γ' , причем способ построения этих преобразований обеспечивает монотонное движение вектора $y(u, v)$ по γ' , если точка (u, v) монотонно пробегает β . При достаточно малых τ один и тот же участок векторного пространства смещается не более чем при двух операциях стягивания. Следовательно, на основании предыдущего результата можно написать неравенство

$$D[y] \leq \left(1 - \frac{1}{\ln \eta}\right)^4 D[x].$$

Выбирая число η настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{\ln \eta}\right)^4 < 1 + \sigma,$$

убеждаемся в справедливости утверждений леммы.

Наконец, чтобы освободиться от условий, налагаемых на концы дуг γ , следует начать с процессов стягивания к вершинам. Тогда γ преобразуется в другую кривую γ^* , для которой эти условия выполняются, и дальнейшие рассуждения проводятся без всяких изменений ¹⁾.

¹⁾ Если в операциях стягивания заменить число η на $\alpha\eta$, то мы получим семейство преобразований, непрерывно зависящих от α ; при изменении α от 0 до 1 получим непрерывную деформацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С.¹⁾, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; см. также Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., 1937.
2. Бляшке В., Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1935.
3. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, М.—Л., 1951, т. 2.
4. Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, М.—Л., 1947.
5. Курант Р., Геометрическая теория функций, М.—Л., 1934.
6. Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, Труды Института математики и механики при МГУ, 1930.
7. Bliss G. A., Calculus of Variations, 1925.
8. Carathéodory C., Über die Bergrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann., **73** (1913), 323—370.
9. Carleman T., Über eine Isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen, 1919.
10. Carleman T., Sur la représentation conforme des domaines multiplement connexes, C. R. Ac. Sci. Paris, **168** (1919), 843—845.
11. Carleman T., Zur Theorie der Minimalflächen, Math. Z., **9** (1921), 160.
12. Chen Y. W., Branch points, poles, and planar points of minimal surfaces in R^3 , Ann. Math., **49** (1948), 790—806.
13. Courant R., On the problem of Plateau, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **22** (1936), 367.
14. Courant R., Plateau's problem and Dirichlet's Principle, Ann. Math., **38** (1937), 679—725.
15. Courant R., The existence of a minimal surface of least area bounded by prescribed Jordan arcs and prescribed surfaces, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **24** (1938), 97—101.
16. Courant R., Remarks on Plateau's and Douglas' problem, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **24** (1938), 519—523.
17. Courant R., Conformal mapping of multiply connected domains, Duke Math. J., **5** (1939), 314—323.
18. Courant R., The existence of minimal surfaces of given topological structure under prescribed boundary conditions, Acta Math., **72** (1940), 51—98.
19. Courant R. and Davids N., Minimal surfaces spanning closed manifolds, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **26**, (1940), 194—199.
20. Courant R., Manel B. and Shiffman M., A general theorem on conformal mapping of multiply connected domains, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **26** (1940), 503—507.
21. Courant R., Critical points and unstable minimal surfaces, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **27** (1941), 51—57.
22. Courant R., On the first variation of the Dirichlet — Douglas integral and on the method of gradients, Proc. Nat. Ac. Sci. USA., **27** (1941), 242—248.

¹⁾ Здесь мы указываем лишь те работы, имеющиеся на русском языке в оригинале или в переводе, которые цитированы автором. Дополнительные указания на русскую литературу сделаны в тексте книги. — *Прим. перев.*

23. Courant R., On a generalized form of Plateau's problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 40—47.
24. Courant R., On Plateau's problem with free boundaries, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **31** (1945) 242—246.
25. Courant R., Über direkte Methoden in der Variationsrechnung und über verwandte Fragen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 711—736.
26. Courant R., Über direkte Methoden bei Variations— und Randwertproblemen, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **34** (1925), 90—117.
27. Courant R., Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip, *J. reine angew. Math.*, **165** (1931), 248—256.
28. Courant R., Soap film experiments with minimal surfaces, *Amer. Math. Monthly*, **47** (1940), 168—174.
29. Davids N., Minimal surfaces spanning closed manifolds and having prescribed topological position, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 348—362.
30. Douglas J., Solution of the problem of Plateau, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 263—321.
31. Douglas J., The problem of Plateau, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 227—251.
32. Douglas J., Some new results in the problem of Plateau, *J. Math. Phys.*, **14** (1936), 55—64.
33. Douglas J., Minimal surfaces of general topological structure, *J. Math. Phys.*, **15** (1936), 105—123.
34. Douglas J., Minimal surfaces of higher topological structure, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **24** (1938), 343—353.
35. Douglas J., Green's function and the problem of Plateau, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **24** (1938), 353—360.
36. Douglas J., The most general form of the problem of Plateau, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **24** (1938), 360—364.
37. Douglas J., Minimal surfaces of higher topological structure, *Ann. Math.*, **40** (1939), 205—298.
38. Douglas J., The higher topological form of Plateau's problem, *Ann. R. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. II*, **8** (1939), 1—24.
39. Douglas J., The problem of Plateau for two contours, *J. Math. Phys.*, **10** (1931), 315—359.
40. Douglas J., Remarks on Riemann's doctoral dissertation, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **24** (1938), 297—302.
41. Douglas J., Green's function and the problem of Plateau, The most general form of the problem of Plateau, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 545—608.
42. Grunsky H., Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf mehrblättrige Kreise, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1937), 40.
43. Hadamard J., Mémoire sur le probleme d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrees, *Mém. savants étrangers Acad. Sci. Inst. France, Ser. 2*, **33**, No. 4 (1908).
44. Kerékjártó B., *Vorlesungen über Topologie*, Bd. I, Berlin, 1923.
45. Lebesgue H., Sur le probleme de Dirichlet, *Rend. circ. mat. Palermo*, **24** (1907), 371—402.
46. Lusternik L. and Schnirelmann L., Méthodes topologiques dans les problemes variationnels, *Actualités scient. et indust.*, No. 188 (1934).
47. Lusternik L. and Schnirelmann L., Functional topology and abstract variational theory, *Mémorial des sciences math.* (1938).
48. McShane E. J., Parametrizations of saddle surfaces, with applications to the problem of Plateau, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 716—733.
49. Manel B., Conformal mapping of multiply connected domains on the basis of Plateau's problem, *Revista, Universidad Nacional de Tucuman*, **3** (1942), 141—149.

50. Marx I. and Shiffman M., Статья должна быть опубликована в ближайшее время.
51. Morrey C. D., The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Ann. Math.*, **49**, No. 4 (1948).
52. Morse M., The calculus of variations in the large, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publication*, **18** (1934).
53. Morse M. and Tompkins C., Existence of minimal surfaces of general critical type, *Ann. Math.*, **40** (1939), 443.
54. Morse M. and Tompkins C., Existence of minimal surfaces of general critical type, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **25** (1939), 153—158.
55. Morse M., and Tompkins C., The continuity of the area of harmonic surfaces as a function of the boundary representation, *Amer. Jour. Math.*, **63** (1941), 325—338.
56. Morse M. and Tompkins C., Unstable minimal surfaces of higher topological structure, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 350—375.
57. Morse M., The critical points of functions and the calculus of variations in the large, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35** (1929), 38—54.
58. Morse M., Functional topology and abstract variational theory, *Ann. Math.*, **38** (1937), 386—449.
59. Morse M., Rank and span in functional topology, *Ann. Math.*, **41** (1940) 419—445.
60. Plateau J., Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur, *Mém. acad. roy. Belgique, New Series*, **23** (1849).
61. Plateau J., *Statique expérimentale et théorique des liquides*, Paris, 1873.
62. Rado T., On Plateau's problem, *Ann. Math.*, **31**, (1930), 457—469.
63. Rado T., On the problem of Plateau, Berlin, 1933.
64. Rado T., The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 530—555.
65. Rado T., The problem of the least area and the problem of Plateau *Math. Z.*, **32** (1930), 763—796.
66. Ritter I. F., Solution of Schwarz' problem concerning minimal surfaces *Revista, Universidad Nacional de Tucuman*, **1** (1940), 49—62.
67. Schwarz H. A., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. I, Berlin, 1890.
68. Shiffman M., The Plateau problem for minimal surfaces which are relative minima, *Ann. Math.*, **39** (1938), 309.
69. Shiffman M., The Plateau problem for minimal surfaces which are no relative minima, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 637.
70. Shiffman M., The Plateau problem for minimal surfaces of arbitrary topological structure, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 853—882.
71. Shiffman M., The Plateau problem for non—relative minima, *Ann. Math.*, **40** (1939), 834—854.
72. Shiffman M., The Plateau problem for non—relative minima, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **25** (1939), 215—220.
73. Shiffman M., Uniqueness theorems for conformal mapping of multiply connected domains, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **27** (1941), 137—139.
74. Shiffman M., Unstable minimal surfaces with several boundaries, *Ann. Math.*, **43** (1942), 197—222.
75. Shiffman M., Unstable minimal surfaces with any rectifiable boundary, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **28** (1942), 103—108.
76. Tonelli L., Sul problema della superficie limitata da un dato contorno ed avente la minima area, *Atti. R. Acad. Sci. Torino*, **72** (1936—1937), 1—11.
77. Tonelli L., Sul problema di Plateau, *Rend. R. Acad. Naz. Lincei*, **2** (1936), 333—339.
78. Weyl H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Berlin, 1923.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ¹⁾

1. Функция Грина. В гл. II и V принцип Дирихле был применен для доказательства существования решений граничных задач, каждая из которых приводит к различным конформным отображениям. Любое такое доказательство существования можно в принципе преобразовать в конструктивное, дающее возможность построить искомое решение. Однако возникающие при этом трудности делают указанный метод практически неосуществимым. Поэтому желательно ввести некоторые, так называемые фундаментальные, решения, при помощи которых решение широкого класса граничных задач сводится к простым вычислениям. Вся теория граничных задач сводится, таким образом, к построению и изучению отдельных фундаментальных решений. Мы рассмотрим здесь такие фундаментальные решения, называемые функциями Грина, и отметим различные важные свойства этих функций, из которых можно получить практические приемы их построения.

Пусть G попрежнему обозначает область плоскости x, y , ограниченную k гладкими кривыми γ_v ; полной границей области является $\gamma = \sum_{v=1}^k \gamma_v$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ будет фиксированная точка G и $h(z, \zeta)$ — гармоническая функция точки $z = x + iy$, принимающая на γ граничные значения

$$h(z, \zeta) = \ln |z - \zeta|; \quad z \in \gamma, \quad \zeta \in G. \quad (\text{П1.1})$$

В соответствии с теоремой, доказанной в гл. I, такая функция существует. Мы хотим изучить ее свойства и рассмотреть различные применения.

Определим функцию

$$g(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + h(z, \zeta), \quad (\text{П1.2})$$

которая обладает следующими тремя характеристическими свойствами:

- а) $g(z, \zeta)$ гармонична всюду в области G , кроме точки $z = \zeta$;

¹⁾ Ко всему этому параграфу см. Келдыш М. В., Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи мат. наук, вып. VI (1939), а также Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952, гл. V и VI. — *Прим. перев.*

б) $g(z, \zeta) + \ln |z - \zeta|$ гармонична и в точке $z = \zeta$;

в) $g(z, \zeta)$ имеет нулевые граничные значения на кривой γ . Функция $g(z, \zeta)$ называется функцией Грина области G .

Пусть теперь $u(z)$ — функция, гармоническая в области G и непрерывно дифференцируемая в $G + \gamma$. Используя граничное свойство функции Грина, мы получаем тогда из известной формулы Грина

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} u(z) ds, \quad (\text{П1.3})$$

где $\partial/\partial n$ обозначает производную в направлении внутренней нормали. Из формулы (П1.3) видно, что если функция Грина известна, то решение граничной задачи для области G сводится к простому интегрированию. Пользуясь более тонкими рассуждениями, можно доказать, что формула (П1.3) справедлива для любых гармонических функций, непрерывных в замкнутой области $G + \gamma$.

Из принципа минимума для гармонических функций вытекает, что функция Грина положительна в области G , ибо она равна нулю на ее границе и обращается в положительную бесконечность в точке ζ ; отсюда следует, что $\partial g(z, \zeta)/\partial n_z \geq 0$ на γ . Зависимость функции Грина от параметра ζ выясняется из формулы Грина

$$\begin{aligned} & g(\eta, \zeta) - g(\zeta, \eta) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left\{ g(z, \zeta) \frac{\partial g(z, \eta)}{\partial n} - g(z, \eta) \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n} \right\} ds = 0, \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

которая доказывает свойство симметрии этой функции:

$$g(z, \zeta) = g(\zeta, z). \quad (\text{П1.4}'$$

Отсюда следует, что мы можем рассматривать z как параметр тогда функция $g(z, \zeta)$, рассматриваемая в зависимости от ζ , также будет являться функцией Грина.

Функция Грина допускает простую электростатическую интерпретацию. Рассмотрим границу γ области G как систему заземленных проводящих стенок и в точке $\zeta \in G$ сосредоточим единичный заряд который создает силовое поле, описываемое производной логарифмического потенциала. Заряд в точке ζ индуцирует на кривой γ заряды с потенциалом $h(z, \zeta)$. Функцию Грина можно рассматривать как потенциал поля, образованного точечным и индуцированными зарядами

Функцию Грина, гармоническую относительно переменной z , можно дополнить до аналитической функции, добавив сопряженную с не гармоническую функцию; мы получим

$$p(z, \zeta) = g(z, \zeta) + i\gamma(z, \zeta). \quad (\text{П1.5})$$

Функция p гармонична относительно переменной ζ и аналитична относительно z , она имеет логарифмический полюс с вычетом, равным 1

в точке $z = \zeta$ и определена с точностью до мнимой аддитивной постоянной. Эта функция многозначна благодаря наличию логарифмической особенности с периодом $2\pi i n$. Если G — многосвязная область, то функция p , кроме того, имеет еще периоды при обходе замкнутых путей, окружающих граничные кривые γ_j . Этими периодами служат

$$2\pi i \omega_j(\zeta) = \int_{\gamma_j} dp(z, \zeta) = i \int_{\gamma_j} \frac{\partial \gamma(z, \zeta)}{\partial s} ds = i \int_{\gamma_j} \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n} ds. \quad (\text{П1.6})$$

Периоды $\omega_j(\zeta)$ гармоничны относительно ζ и однозначны в области G . Из формулы (П1.3) видно, что граничные значения $\omega_j(\zeta)$ равны 0 на всех контурах γ_μ , за исключением γ_j , на котором эти значения равны 1. Функция $\omega_j(\zeta)$ называется гармонической мерой в точке ζ граничной компоненты γ_j относительно области G . Снова дополним гармоническую функцию $\omega_j(\zeta)$ до аналитической функции $\omega_j(\zeta)$, которая определена с точностью до мнимой аддитивной постоянной:

$$\omega_j(\zeta) = \omega_j(\zeta) + i\Omega_j(\zeta). \quad (\text{П1.7})$$

Вообще говоря, функция $\omega_j(\zeta)$ обладает мнимыми периодами при обходе точкой ζ замкнутых кривых в области G . Период $\omega_j(\zeta)$ относительно контура γ_μ определяется по формуле

$$-2\pi i P_{\mu j} = i \int_{\gamma_\mu} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} ds. \quad (\text{П1.8})$$

Следует заметить, что периоды $\omega_j(\zeta)$ и постоянные $P_{\mu j}$ можно подсчитать, распространив интегралы в формулах (П1.6) и (П1.8) на замкнутые кривые γ'_j и γ'_μ , которые целиком лежат в области G и получаются из γ_j и γ_μ непрерывной деформацией внутри этой области. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы Грина, выражающей независимость таких интегралов от пути, если пути принадлежат одному гомотопическому классу. Из формул (П1.6) и (П1.8) мы получаем соотношение

$$P_{\mu j} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma'_\mu} \int_{\gamma'_j} \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial n_z \partial n_\zeta} ds_z ds_\zeta = P_{j\mu}, \quad (\text{П1.9})$$

выражающее свойство симметрии матрицы $P_{\mu j}$.

Постоянные $P_{\mu j}$ также допускают простую электростатическую интерпретацию. Предположим, что заземлены все проводники γ_ρ , кроме γ_j , который имеет потенциал, равный 1; тогда электростатическое поле в области G описывается потенциалом $\omega_j(z)$. Из электростатики известно, что заряд на проводнике γ_μ , индуцированный рассматриваемым полем, равен

$$-\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \omega_j}{\partial n} ds = P_{j\mu}. \quad (\text{П1.10})$$

Постоянные $P_{\rho\nu}$ являются характеристиками системы проводников γ , они были впервые введены Максвеллом [41] и называются емкостными коэффициентами системы¹⁾.

Рассмотрим несколько более общий случай электростатического поля в области G , когда любой проводник γ_ρ имеет постоянный потенциал, скажем α_ρ . Это поле описывается потенциалом

$$\omega(z) = \sum_{\rho=1}^k \alpha_\rho \omega_\rho(z). \quad (\text{П1.11})$$

Энергия такого поля вычисляется с помощью интеграла

$$E = \frac{1}{4\pi} \iint_G (\text{grad } \omega)^2 dx dy = -\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\rho=1}^k \int_{\gamma_\rho} \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} ds. \quad (\text{П1.12})$$

Последние интегралы можно вычислить, воспользовавшись определением (П1.8) и тем, что функция $\omega(z) = \alpha_\rho$ на γ_ρ . Мы получим

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^k P_{\rho\sigma} \alpha_\rho \alpha_\sigma. \quad (\text{П1.13})$$

Из определения непосредственно следует, что величина E всегда неотрицательна. Интеграл энергии может обратиться в 0 лишь в том случае, когда $\text{grad } \omega \equiv 0$ в области G , т. е. когда $\omega = \text{const}$. Но в этом случае все граничные значения α_ρ постоянной ω равны между собой. Обратно, по теореме единственности решения граничной задачи, если все граничные значения α_ρ функции ω равны между собой, то эта функция постоянна. Таким образом, доказано, что всегда справедливо неравенство

$$\sum_{\rho, \sigma=1}^k P_{\rho\sigma} \alpha_\rho \alpha_\sigma \geq 0, \quad (\text{П1.14})$$

в котором знак равенства может иметь место лишь в случае, когда все α_ρ равны между собой. Иными словами, матрица $(P_{\rho\sigma})$ определяет неотрицательную квадратичную форму.

Пусть, в частности, $\alpha_k = 0$. Мы получим, что квадратичная форма

$$\sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} P_{\rho\sigma} \alpha_\rho \alpha_\sigma \geq 0 \quad (\text{П1.14}')$$

¹⁾ См., например, Основы электротехники, под общей редакцией К. А. Круга, М. — Л., 1952. — Прим. перев.

может обращаться в нуль лишь в том случае, когда все α_ρ равны α_k и, следовательно, равны нулю. Таким образом матрица $(P_{\rho\sigma})_{1\dots k-1}$ положительно определена и имеет отличный от нуля определитель. Отсюда следует, что система линейных уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{k-1} P_{\rho\sigma} u_\sigma = v_\rho, \quad \rho = 1, 2, \dots, k-1 \quad (\text{П1.15})$$

имеет точно один вектор решения u_σ , $\sigma = 1, 2, \dots, k-1$. Этот факт играет важную роль в наших дальнейших рассмотрениях.

2. Канонические конформные отображения. В п. 1 мы видели, что если известна функция Грина области G , то для этой области можно решить граничную задачу. Теперь мы хотим убедиться в том, что с помощью функции Грина и полученных из нее гармонической меры и емкостных коэффициентов можно просто выразить функцию, однолиственную в области G и осуществляющую конформное отображение последней на канонические области интересных типов.

Рассмотрим сначала односвязную область, ограниченную одной граничной кривой γ_1 . Дополним функцию Грина этой области до аналитической функции $p(z, \zeta)$. Для устранения многозначности функции $p(z, \zeta)$, обусловленной наличием логарифмического полюса в точке ζ , мы введем функцию

$$f(z, \zeta) = e^{-p(z, \zeta)}, \quad (\text{П1.16})$$

которая однозначна в области G , имеет нуль первого порядка в точке $z = \zeta$ и по модулю равна 1 на γ_1 . Эта функция уже была построена в § 7 гл. I. Она отображает область G на единичный круг так, что точка $z = \zeta$ переходит в его центр.

Описанное построение можно обобщить на случай многосвязных областей G . В этом случае функция $p(z, \zeta)$, кроме периода, обусловленного логарифмическим полюсом, имеет еще и другие периоды. Но, кроме функции $p(z, \zeta)$, в области G определены многозначные функции $\omega_\rho(z)$ и можно попытаться устранить многозначность $p(z, \zeta)$, добавив к ней надлежащим образом подобранную линейную комбинацию этих функций. В самом деле, рассмотрим решение системы линейных уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{k-1} P_{\rho\sigma} u_\sigma = \omega_\rho(\zeta), \quad \rho = 1, 2, \dots, k-1. \quad (\text{П1.17})$$

Введя матрицу $(P_{\rho\sigma})_{1\dots k-1}$, обратную матрице $(P_{\rho\sigma})_{1\dots k-1}$, мы можем записать это решение в виде

$$u_\rho(\zeta) = \sum_{\sigma=1}^{k-1} \Pi_{\rho\sigma} \omega_\sigma(\zeta). \quad (\text{П1.17'})$$

Теперь мы построим линейную комбинацию функций $\omega_\sigma(z)$:

$$\omega(z, \zeta) = \sum_{\sigma=1}^{k-1} u_\sigma(\zeta) \omega_\sigma(z), \quad (\text{П1.18})$$

которая является аналитической функцией z и имеет периоды

$$-2\pi i \sum P_{\rho\sigma} u_\sigma(\zeta) = -2\pi i \omega_\rho(\zeta) \quad (\text{П1.19})$$

относительно замкнутых кривых, окружающих граничные континуумы γ_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, k-1$. Тогда, учитывая соотношения (П1.6), можно утверждать, что функция

$$\ln f(z, \zeta) = - \left\{ p(z, \zeta) + \sum_{\sigma=1}^{k-1} u_\sigma(\zeta) \omega_\sigma(z) \right\} \quad (\text{П1.20})$$

уже не имеет периодов относительно кривых, гомотопных граничным контурам γ_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, k-1$.

Остается исследовать лишь период функции (П1.20) относительно контура γ_k . Заметим, что путь, состоящий из всех граничных кривых γ_σ , проходимых в положительном направлении, топологически эквивалентен малой окружности, окружающей логарифмический полюс ζ , и, следовательно, ему соответствует период $2\pi i$. Так как обход вокруг каждого контура γ_ρ , $\rho < k$ не меняет функции (П1.20), то очевидно, что при обходе γ_k она должна возрастать на величину $2\pi i$. Таким образом, функция

$$f(z, \zeta) = e^{-p(z, \zeta) - \sum_{\sigma, \rho=1}^{k-1} P_{\rho\sigma} u_\sigma(\zeta) \omega_\rho(z)} \quad (\text{П1.21})$$

однозначна в области G и имеет простой нуль в точке $z = \zeta$. Чтобы определить модули значений функции $f(z, \zeta)$ на контурах γ_ρ , рассмотрим действительную часть функции (П1.20) для $z \in \gamma_\rho$. Учитывая известные граничные значения функций $g(z, \zeta)$ и $\omega_\sigma(z)$, мы находим

$$\ln |f(z, \zeta)| = \begin{cases} 0 & \text{для } z \in \gamma_k, \\ -u_\rho(\zeta) & \text{для } z \in \gamma_\rho. \end{cases} \quad (\text{П1.22})$$

Отсюда видно, что величина $|f(z, \zeta)|$ постоянна на каждом контуре γ_ρ и, в частности, равна 1 на γ_k .

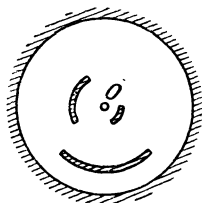
Из установленных фактов можно заключить, что функция $\omega = f(z, \zeta)$ отображает область G на область G_ω , так что образы всех граничных кривых лежат соответственно на окружностях $|\omega| = e^{-u_\rho(\zeta)}$ или $|\omega| = 1$. Так как аргумент функции $f(z, \zeta)$ не изменяется, когда z описывает любой контур γ_ρ , $\rho < k$, то очевидно, что образом каждого такого контура будет дуга окружности на некоторой римановой поверхности, расположенной над плоскостью ω . Это утверждение теряет силу для образа контура γ_k ; в самом деле, когда точка z описывает γ_k , ее образ $\omega(z)$ в точности один раз

описывает единичную окружность, ибо аргумент w при этом возрастает на 2π .

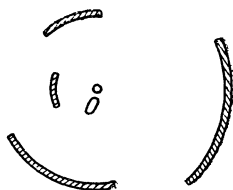
Из поведения функции $f(z)$ на границе области G легко заключить, что все ее значения лежат внутри единичного круга плоскости w и что каждое значение w , $|w| < 1$ она принимает в области G самое большее один раз. В самом деле, пусть a — любая точка плоскости w , не лежащая на окружностях $|w| = \exp\{-u_\rho(\zeta)\}$ или $|w| = 1$. Тогда по принципу аргумента интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d \arg \{ f(z) - a \} \quad (\text{П1.22'})$$

будет давать число точек области G , в которых функция $f(z)$ принимает значение a . Из выясненных граничных свойств $f(z)$, очевидно, следует, что величина $(1/2\pi) \arg [f(z) - a]$ не изменяется, если точка z пробегает любой контур γ_ρ , $\rho < k$; если же z описывает контур γ_k , то эта величина изменяется на 1 или не изменяется, в зависимости от того, будет $|a| < 1$ или $|a| > 1$. Таким образом, $f(z)$ не принимает значений a , для которых $|a| > 1$, и принимает самое большее



Фиг. 1. Единичный круг с разрезами.



Фиг. 2. Плоскость с разрезами вдоль дуг окружностей.

один раз значения a , для которых $|a| < 1$. То же самое имеет место и для точек a , лежащих на исключенных выше окружностях. Мы доказали следующее утверждение [34]:

Функция $f(z, \zeta)$ однолистно отображает область G на внутренность единичного круга с разрезами вдоль $k-1$ дуг окружностей с центром в начале координат. Точка $z = \zeta$ переходит при этом в начало координат, а граничный континуум γ_k — в единичную окружность (фиг. 1).

Замечание.

Так как нумерацию граничных континуумов можно выбирать произвольно, то мы доказали существование k различных канонических отображений, зависящих от выбора граничного континуума, соответствующего единичной окружности.

Пусть ζ и η будут две произвольные точки G ; рассмотрим аналитическую функцию переменного z

$$F(z; \zeta, \eta) = \frac{f(z, \zeta)}{f(z, \eta)}. \quad (\text{П1.23})$$

Эта функция имеет постоянный модуль на каждом граничном континууме γ , обращается в нуль в точке $z = \zeta$ и имеет простой полюс в точке $z = \eta$. Ее аргумент не изменяется при обходе любого граничного контура области z . Следовательно, то же самое рассуждение, что и выше, приведет нас к следующему заключению [34]:

Функция $F(z; \zeta, \eta)$ однолистно отображает область G на полную плоскость с разрезами вдоль k дуг окружностей с центром в начале координат. Точкам ζ и η при этом отображении соответствуют начало координат и бесконечно удаленная точка плоскости (фиг. 2).

Отправляясь от построенной функции, легко получить и другие функции, осуществляющие конформное отображение области G на канонические области. Из того замечания, что на граничных кривых области имеют место соотношения

$$\operatorname{Re} \ln f(z, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{для } z \in \gamma_k \\ -u_p(\zeta) & \text{для } z \in \gamma_p, p < k, \end{cases} \quad (\text{П1.24})$$

простым дифференцированием по ξ (мы полагаем $\zeta = \xi + i\eta$) получаем, что на тех же кривых

$$\operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln f(z, \zeta) = \lambda_p(\zeta) \quad \text{для } z \in \gamma_p, p \leq k, \quad (\text{П1.25})$$

где величины λ_p не зависят от z . Таким образом, функция

$$\psi(z, \zeta) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \ln f(z, \zeta) \quad (\text{П1.26})$$

имеет постоянную действительную часть на каждом граничном континууме γ_p . В точке $z = \zeta$ она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Следовательно, эта функция однолистно отображает область G на полную плоскость с разрезами вдоль отрезков, параллельных мнимой оси. Точка $z = \zeta$ соответствует при этом бесконечно удаленной точке.

Аналогично, дифференцируя соотношения (П1.24) по η , мы убеждаемся в том, что функция

$$\varphi(z, \zeta) = -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln f(z, \zeta) \quad (\text{П1.27})$$

однолистно отображает G на полную плоскость с разрезами вдоль отрезков, параллельных действительной оси. В точке $z = \zeta$ эта функция также имеет простой полюс с вычетом, равным 1.

При помощи функций $\varphi(z, \zeta)$ и $\psi(z, \zeta)$ можно построить бесчисленное множество новых отображений на плоскость с разрезами.

В самом деле, для произвольного действительного α рассмотрим функцию

$$\varphi_\alpha(z, \zeta) = e^{i\alpha} [\cos \alpha \varphi(z, \zeta) - i \sin \alpha \psi(z, \zeta)]. \quad (\text{П1.28})$$

Эта функция в окрестности точки $z = \zeta$ допускает разложение в ряд вида

$$\varphi_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{правильная часть}, \quad (\text{П1.29})$$

и на каждом граничном континууме γ_ρ , очевидно, имеем

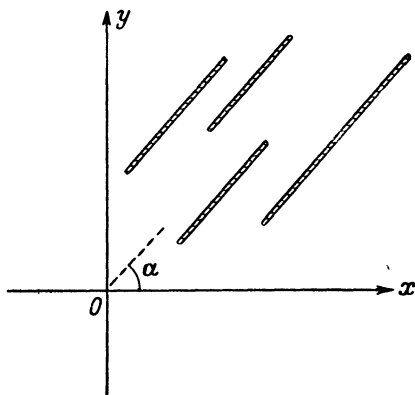
$$\text{Im } e^{-i\alpha} \varphi_\alpha(z, \zeta) = \text{const}, \quad z \in \gamma_\rho. \quad (\text{П1.30})$$

Таким образом ¹⁾, функция $\varphi_\alpha(z, \zeta)$ отображает область G на полную плоскость с разрезами вдоль прямолинейных отрезков, наклоненных под углом α к действительной оси (фиг. 3), точка $z = \zeta$ является простым полюсом с вычетом 1 [25, 45, 59].

Наконец мы проведем следующее построение. Для любого значения α мы находим

$$\frac{1}{2} [\varphi_\alpha(z, \zeta) + \varphi_{\alpha+\pi/2}(z, \zeta)] = \frac{1}{2} [\varphi(z, \zeta) + \psi(z, \zeta)] = \Phi(z, \zeta). \quad (\text{П1.31})$$

Эта функция также правильна всюду в области G , кроме полюса в точке $z = \zeta$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1.



Фиг. 3. Плоскость с разрезами вдоль параллельных отрезков.

Мы хотим убедиться в том, что она однолистка в области G . Во-первых, очевидно, что каждый граничный контур γ_ρ области G отображается с помощью функции $w = \Phi(z, \zeta)$ на простую выпуклую кривую плоскости w . В самом деле, если точка z описывает контур γ_ρ , то действительная часть функции $\psi(z, \zeta)$ остается постоянной, а действительная часть функции $\varphi(z, \zeta)$ в точности два раза принимает любое значение из некоторого отрезка — это следует из свойств отображающих функций φ и ψ . Следовательно, образ каждого контура γ_ρ при отображении (П1.31) пересекается с каждой прямой, параллельной мнимой оси, самое большее два раза. Пользуясь выражением функции Φ через φ_α и $\varphi_{\alpha+\pi/2}$, мы докажем, что этот образ

¹⁾ См. Голузин Г. М., О теоремах искажения для конформных отображений многосвязных областей, Матем. сб., 2 (44) (1937), 37—64, а также цитированную выше статью М. В. Келдыша. — Прим. перев.

и с произвольной прямой пересекается не более двух раз. Этим доказывается наше утверждение о выпуклости образов граничных контуров.

Полученный результат сам по себе не гарантирует однолиственности отображения — образ G_w области G может располагаться на римановой поверхности, хотя образ каждого ее граничного континуума является простой кривой. В случае неоднолиственности область G_w должна содержать хотя бы одну точку разветвления римановой поверхности, так что в соответствующей точке z области G должно быть $\Phi'_z(z, \zeta) = 0$. Но легко видеть, что $\Phi'_z(z, \zeta)$ не обращается в нуль в области G . В самом деле, так как функция $\varphi_\alpha(z, \zeta)$ однолистна в этой области, то ее производная не обращается в нуль, следовательно, в области G при любом значении α имеем

$$\frac{\varphi'_z(z, \zeta)}{\psi'_z(z, \zeta)} \neq i \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{П1.32})$$

В точке $z = \zeta$ отношение (П1.32) равно 1, значения этого отношения не могут быть чисто мнимыми, следовательно, всюду в G

$$\operatorname{Re} \frac{\varphi'_z(z, \zeta)}{\psi'_z(z, \zeta)} > 0. \quad (\text{П1.32}')$$

Если бы в какой-нибудь точке G было $\Phi'(z, \zeta) = 0$, то в этой точке имело бы место равенство

$$\frac{\varphi'_z(z, \zeta)}{\psi'_z(z, \zeta)} = -1, \quad (\text{П1.33})$$

которое противоречит условию (П1.32'). Таким образом, доказано следующее утверждение ¹⁾:

Функция $\Phi(z, \zeta)$ однолистно отображает область G на бесконечную область плоскости w , ограниченную выпуклыми граничными кривыми [20, 26, 59].

В дальнейшем мы увидим, что это отображение обладает важным экстремальным свойством. Здесь мы хотим отметить лишь тот интересный факт, что формулы (П1.28) и (П1.31) позволяют с помощью простого сложения строить однолистные функции из более простых однолистных функций, — в теории однолистных функций это необычное явление. Напомним еще одно важное обстоятельство — все построенные указанным способом функции просто выражаются через функцию Грина и функции, получаемые из нее.

Для дальнейших приложений необходимо указать, что из соотношений (П1.26), (П1.27) и (П1.31) вытекает формула

$$\Phi(z, \zeta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \ln f(z, \zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (\text{П1.34})$$

¹⁾ Ср. цитированную выше статью М. В. Келдыша. — *Прим. перев.*

Очевидно, что $f(z, \zeta)$ не является аналитической функцией параметра ζ . Однако удобно пользоваться следующей символикой. Введем два дифференциальных оператора [70] ¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - i \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\text{П1.35})$$

и применим их к произвольной дифференцируемой функции переменных ξ и η . С их помощью формулу (П1.34) можно записать в виде

$$\Phi(z, \zeta) = - \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln f(z, \zeta). \quad (\text{П1.36})$$

Функция

$$m(z, \zeta) = - \ln |f(z, \zeta)| = - \frac{1}{2} \ln f(z, \zeta) - \frac{1}{2} \ln \overline{f(z, \zeta)} \quad (\text{П1.37})$$

гармонична относительно переменной z и принимает постоянные значения на каждом граничном континууме γ_p ; кроме того, она имеет логарифмический полюс с вычетом, равным -1 . Эта функция является обобщением функции Грина, она будет часто встречаться в дальнейшем. Воспользовавшись ею, можно написать

$$\Phi'(z, \zeta) = 2 \frac{\partial^2 m(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}. \quad (\text{П1.38})$$

3. Вторая граничная задача и функция Неймана. В теории потенциала хорошо известна следующая задача, имеющая много важных приложений.

Вдоль граничных кривых γ_p области G заданы значения нормальной производной гармонической функции, т. е. на γ задано соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu(s), \quad s \text{ — длина дуги на } \gamma. \quad (\text{П1.39})$$

Требуется найти гармоническую в области G функцию $u(z)$, удовлетворяющую этому соотношению.

Эта задача называется второй граничной задачей теории потенциала.

Заметим прежде всего, что функцию $\mu(s)$ нельзя задавать совершенно произвольно. В самом деле, по формуле Грина для гармонических функций имеем

$$\int_{\gamma} \mu(s) ds = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_G \Delta u dx dy = 0. \quad (\text{П1.40})$$

¹⁾ Неясно, почему автор ссылается на работу 1927 г. Символы (П1.35), так называемые формальные производные, были введены еще Коши. Их успешно использовал в своих работах (1907 г. и след.) Г. В. Колосов. — *Прим. перев.*

Таким образом, на $\mu(s)$ должно быть наложено условие, что ее интеграл вдоль границы γ равняется нулю. Докажем теперь, что если это условие удовлетворяется, то задача имеет единственное решение. В самом деле, допуская, что искомая гармоническая функция $u(z)$ существует в области G , мы можем дополнить ее до аналитической функции $w(z) = u(z) + iv(z)$. В силу уравнений Коши — Римана, связывающих действительную и мнимую части этой функции, мы имеем на γ

$$\mu(s) = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \quad (\text{П1.41})$$

Это соотношение с точностью до аддитивных постоянных определяет граничные значения неизвестной функции $v(z)$ на каждой граничной кривой γ_ρ .

Теперь можно указать способ построения искомой функции $u(z)$. Сначала, используя соотношение (П1.41), мы найдем граничные значения функции $v(s)$. Тогда с помощью формулы Грина мы сможем построить гармоническую функцию $v(z)$ внутри области G . Заметим, что функция

$$V(z) = v(z) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu \omega_\nu(z) \quad (\text{П1.42})$$

на каждом контуре γ_ρ , $\rho < k$ принимает значения, отличающиеся от значений $v(z)$ на постоянные λ_ρ , и, следовательно, в соответствии с формулой (П1.41), является одной из возможных сопряженных функций $v(z)$. Среди всех функций $V(z)$ мы выберем такую, которая имеет однозначную сопряженную функцию $u(z)$. Для этого, согласно (П1.3), потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{\gamma_\rho} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int_{\gamma_\rho} \frac{\partial v}{\partial n} ds - 2\pi \sum_{\nu=1}^{k-1} P_{\rho\nu} \lambda_\nu = 0. \quad (\text{П1.43})$$

Но мы уже доказали, что система уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} P_{\rho\nu} \lambda_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{\partial v}{\partial n} ds, \quad \rho = 1, 2, \dots, k-1 \quad (\text{П1.43}')$$

имеет точно одно решение. Следовательно, можно найти гармоническую функцию $u(z)$, однозначную в области G и удовлетворяющую на γ граничным условиям (П1.39). Ясно, что такая функция $u(z)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Мы доказали, что вторая граничная задача разрешима с помощью функции Грина и гармонической меры. Однако этот путь ее решения несколько сложен. Удобнее ввести другую фундаментальную функцию, которая играла бы в этой задаче такую же роль, как функция Грина в первой граничной задаче. Такая функция называется функцией Неймана и определяется следующими тремя свойствами:

- а) $N(z, \zeta)$ гармонична всюду в области G , кроме точки $z = \zeta$;
 б) сумма $N(z, \zeta) + \ln |z - \zeta|$ гармонична и в точке $z = \zeta$;
 в) $\partial/\partial n N(z, \zeta) = 2\pi/L$ на границе γ , где L — полная длина γ .
 Значение условия (в) легко понять, если вспомнить, что так как в точке $z = \zeta$ имеется логарифмический полюс, то необходимо должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial n_z} N(z, \zeta) ds_z = 1. \quad (\text{П1.44})$$

Простейшим условием для нормальной производной функции N является условие постоянства ее граничных значений; это и приводит к условию (в).

Функция $N(z, \zeta)$ определяется нашими условиями неоднозначно, мы можем еще добавить к ней любую постоянную (которая может зависеть от ζ). Чтобы полностью определить эту функцию, принято вводить дополнительное требование

$$\int_{\gamma} N(z, \zeta) ds_z \equiv 0 \quad (\text{П1.45})$$

для всех значений параметра ζ .

Пусть $u(z)$ — произвольная гармоническая функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $G + \gamma$. Применяв формулу Грина, мы найдем

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left\{ u(z) \frac{\partial N(z, \zeta)}{\partial n} - N(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} N(z, \zeta) \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{L} \int_{\gamma} u ds. \end{aligned} \quad (\text{П1.46})$$

Так как заданием своей нормальной производной функция $u(\zeta)$ определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной, то при решении второй граничной задачи можно ограничиться рассмотрением гармонических функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_{\gamma} u ds = 0. \quad (\text{П1.47})$$

Для всех таких функций справедливо следующее представление через функцию Грина и граничные значения нормальных производных:

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} N(z, \zeta) \frac{\partial u(z)}{\partial n} ds. \quad (\text{П1.46}')$$

Остается представить функцию Неймана через функцию Грина. Рассмотрим правильную в области G гармоническую функцию

$$N(z, \zeta) + \ln |z - \zeta|$$

и обозначим через $v(z, \zeta)$ функцию, сопряженную с ней относительно переменной z . Пользуясь уравнениями Коши — Римана и вводя функцию

$$\ln(z - \zeta) = \ln|z - \zeta| + i \arg(z - \zeta),$$

мы получаем на границе γ

$$-\frac{\partial}{\partial s} v(z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial n} [N(z, \zeta) + \ln|z - \zeta|] = \frac{2\pi}{L} - \frac{\partial}{\partial s} \arg(z - \zeta). \quad (\text{П1.48})$$

Выбрав на каждой кривой γ_ρ некоторую ветвь многозначной функции $\arg(z - \zeta)$, мы положим

$$v(z, \zeta) = -\frac{2\pi}{L} s + \arg(z - \zeta) + \lambda_\rho, \quad z \in \gamma_\rho, \quad \lambda_k = 0 \quad (\text{П1.48}')$$

и по этим граничным значениям с помощью формул (П1.3) и (П1.6) найдем, что внутри области

$$v(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\partial g(z, t)}{\partial n_t} \left\{ -\frac{2\pi}{L} s_t + \arg(t - \zeta) \right\} ds_t + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{\nu} \omega_\nu(z). \quad (\text{П1.49})$$

Здесь функции $\lambda_\nu(\zeta)$ попрежнему определяются условием, что сопряженная с $v(z, \zeta)$ функция однозначна в области G . Пользуясь формулами (П1.6) и (П1.8), мы приходим к соотношениям

$$\int_\gamma \frac{\partial \omega_\rho(t)}{\partial n_t} \left\{ -\frac{2\pi}{L} s_t + \arg(t - \zeta) \right\} ds_t = 2\pi \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu(\zeta) P_{\nu\rho}, \quad \rho < k, \quad (\text{П1.50})$$

однозначно определяющим функции $\lambda_\nu(\zeta)$.

Существует непосредственная связь между формулой (П1.49), выражающей функцию, сопряженную правильной части функции Неймана, и следующей формулой для правильной части функции Грина:

$$h(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\partial g(z, t)}{\partial n_t} \ln|t - \zeta| ds_t. \quad (\text{П1.51})$$

Эта формула вытекает непосредственно из того, что функция $h(z, \zeta)$ принимает на γ граничные значения $\ln|z - \zeta|$. Предположим, что на контурах γ_ρ , $\rho < k$ выбраны однозначные ветви функции $\ln(z - \zeta)$. Тогда, сравнив периоды сопряженных обеим частям соотношения функций (П1.51), соответствующие замкнутым кривым, окружающим кривые γ_ρ , и воспользовавшись формулой (П1.6), мы получим

$$\omega_\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\partial \omega_\rho(t)}{\partial n_t} \ln|t - \zeta| ds_t. \quad (\text{П1.52})$$

Пусть $u(\zeta)$, $v(\zeta)$ — пара сопряженных гармонических функций и $\omega(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$. Тогда уравнения Коши — Римана дадут

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = i \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d\zeta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = -i \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}}, \quad (\text{П1.53})$$

где $\partial/\partial\zeta$ и $\partial/\partial\bar{\zeta}$ — дифференциальные операторы, определенные формулой (П1.35). Продифференцировав соотношения (П1.50) и (П1.52) по ζ и приняв во внимание, что функции $\ln|t-\zeta|$ и $\arg(t-\zeta)$ сопряжены друг другу, мы получим

$$i \sum_{\nu=1}^{k-1} P_{\nu\rho} \frac{\partial \lambda_{\nu}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \omega_{\rho}}{\partial \zeta}. \quad (\text{П1.54})$$

Введя аналитические функции $\omega_{\rho}(\zeta)$, определенные формулой (П1.7) будем иметь следующие простые выражения для производных коэффициентов $\lambda_{\nu}(\zeta)$:

$$i \frac{\partial \lambda_{\nu}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{k-1} \Pi_{\nu\rho} \omega'_{\rho}(\zeta). \quad (\text{П1.55})$$

Теперь, дифференцируя по ζ (П1.49) и (П1.51) и пользуясь (П1.55), мы находим

$$i \frac{\partial \nu(z, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial h(z, \zeta)}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \nu=1}^{k-1} \Pi_{\nu\rho} \omega_{\nu}(z) \omega'_{\rho}(\zeta). \quad (\text{П1.56})$$

Мы получили соотношение между производными функций, сопряженных с функциями Неймана и Грина. Конечно, интереснее ввести в это соотношение сами функции. Для этого мы продифференцируем уравнение (П1.53) по z и воспользуемся формулой (П1.56). Мы найдем [14, 20]

$$\frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} = \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} + \frac{1}{4} \sum_{\rho, \nu=1}^{k-1} \Pi_{\nu\rho} \omega'_{\nu}(z) \omega'_{\rho}(\zeta). \quad (\text{П1.57})$$

Продифференцировав по z уравнение, комплексно сопряженное (П1.56), найдем аналогично

$$\frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = - \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{1}{4} \sum_{\rho, \nu=1}^{k-1} \Pi_{\nu\rho} \omega'_{\nu}(z) \overline{\omega'_{\rho}(\zeta)}. \quad (\text{П1.58})$$

Мы получили простое выражение второй производной функции Неймана через функцию Грина. Формулы, основанные на свойствах функции Грина, со всей очевидностью выявляют центральную роль этой функции в рассматриваемой теории.

Если ввести функцию $m(z, \zeta)$, определенную формулой (П1.37), то соотношения (П1.57) и (П1.58) можно записать в более изящном виде. По формуле (П1.21) имеем

$$m(z, \zeta) = g(z, \zeta) + \sum_{\sigma, \rho=1}^{k-1} \Pi_{\rho\sigma} \omega_{\rho}(z) \omega_{\sigma}(\zeta), \quad (\text{П1.59})$$

и тогда (П1.57) и (П1.58) переписываются в виде

$$\frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^2 m(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} = - \frac{\partial^2 m(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta}. \quad (\text{П1.60})$$

Простое соотношение между $\partial^2 m / \partial z \partial \bar{\zeta}$ и некоторой однолистной в области G функцией было получено в формуле (П1.38).

В заключение покажем, что функция Неймана связана с важными каноническими отображениями области G . Фиксируем две произвольные точки ζ и η области G и рассмотрим функцию $N(z, \zeta) - N(z, \eta)$. Исходя из основного свойства функции Неймана, мы можем утверждать, что на всех граничных кривых справедливо соотношение

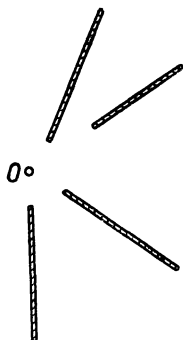
$$\frac{\partial}{\partial n} \{N(z, \zeta) - N(z, \eta)\} = 0 \quad \text{для} \quad z \in \gamma. \quad (\text{П1.61})$$

Как и выше, дополним нашу функцию до аналитической функции $q(z; \zeta, \eta)$ переменной z . На основании уравнений Коши — Римана можно утверждать, что мнимая часть функции q остается постоянной на каждой граничной кривой γ_p . В частности, эта мнимая часть однозначна на каждой кривой γ_p . Далее, функция $q(z; \zeta, \eta)$ имеет два логарифмических полюса в точках ζ и η с вычетами, равными соответственно -1 к $+1$. Отсюда легко получается

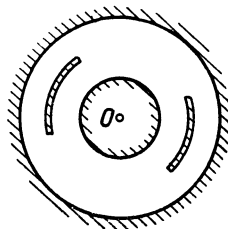
Теорема. Функция

$$Q(z; \zeta, \eta) = e^{-q(z; \zeta, \eta)} \quad (\text{П1.62})$$

однолистка в области G и отображает эту область на плоскость с разрезами вдоль прямолинейных отрезков, направления которых сходятся в начале координат (фиг. 4). Точке $z = \zeta$ соответствует начало координат, точке $z = \eta$ — бесконечно удаленная точка.



Фиг. 4. Плоскость с разрезами вдоль сходящихся отрезков.



Фиг. 5. Кольцо с разрезами.

Эти свойства определяют конформное отображение с точностью до постоянного множителя. Возможность такого отображения впервые была доказана Кёбе [34]. Мы показали здесь, что отображающая

функция в замкнутом виде выражается через функцию Неймана и, следовательно, в конечном счете через функцию Грина области G . С помощью функций Грина и Неймана и гармонической меры можно построить и многие другие канонические конформные отображения. Укажем, например, отображение области G на круговое кольцо, разрезанное вдоль $k-2$ концентрических дуг окружностей (фиг. 5). Можно произвольно задать две граничные кривые γ_0 , соответствующие полным окружностям, ограничивающим кольцо [34].

Дальнейшие результаты относительно функции Грина и канонических конформных отображений см. в [33, 37].

§ 2. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Формальные замечания. В предыдущих главах было рассмотрено семейство всех кусочно гладких в области G функций, удовлетворяющих заданным условиям на границе, и в этом семействе были выделены гармонические функции, осуществляющие минимум интеграла Дирихле. Здесь интеграл Дирихле будет использован иным образом; мы будем применять его только к семейству гармонических функций и характеризовать некоторые гармонические функции экстремальными свойствами этого интеграла.

Пусть $u(z)$ и $v(z)$ гармоничны в области G ; воспользовавшись комплексным дифференциальным оператором $\partial/\partial z$, определенным равенством (П1.35), мы получим две аналитические функции

$$f(z) = u_x - iu_y = 2 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad g(z) = v_x - iv_y = 2 \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (\text{П2.1})$$

Билинейную форму Дирихле $D[u, v]$ можно тогда представить в следующем виде:

$$D[u, v] = \operatorname{Re} \int_G \int f(z) \overline{g(z)} d\tau, \quad d\tau = dx dy. \quad (\text{П2.2})$$

Чтобы использовать все возможности теории аналитических функций, мы будем далее рассматривать аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$ вместо гармонических функций $u(z)$ и $v(z)$. Мы будем представлять их как векторы бесконечно-мерного линейного пространства \mathfrak{F} над полем комплексных чисел, метрика которого вводится с помощью скалярного произведения двух векторов

$$(f, \bar{g}) = \int_G \int f \bar{g} d\tau. \quad (\text{П2.3})$$

В частности, норма, или длина вектора, определяется выражением

$$\|f\| = \sqrt{(f, \bar{f})}, \quad \text{т. е.} \quad \|f\|^2 = \int_G \int |f|^2 d\tau. \quad (\text{П2.3}')$$

В дальнейшем большое значение будет иметь правило интегрирования по частям. Если существует функция $F(z)$, однозначная и непрерывно дифференцируемая в области G и такая, что $f(z) = F'(z)$, то по формуле Грина получим, очевидно,

$$(f, \bar{g}) = \int_G \int F'(z) \overline{g(z)} d\tau_z = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma} F(z) \overline{g(z)} d\bar{z},$$

$$d\bar{z} = dx - i dy. \quad (\text{П2.4})$$

Аналогично, если $g(z) = G'(z)$, то мы будем иметь

$$(f, \bar{g}) = +\frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) \overline{G(z)} dz. \quad (\text{П2.4}')$$

Если $f(z)$ и $g(z)$ получаются из однозначных гармонических функций $u(z)$ и $v(z)$ по формуле (П2.1), то мы можем написать

$$(f, \bar{g}) = -\frac{1}{i} \int_{\gamma} u(z) \overline{g(z)} d\bar{z} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} f(z) v(z) dz. \quad (\text{П2.5})$$

Для любой однозначной аналитической в области G функции $f(z)$ существует функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$. Вообще говоря, функция $F(z)$ многозначна; при обходе замкнутого контура, окружающего граничный континуум γ_p , она получает приращение на период

$$|f|_p = \int_{\gamma_p} f(z) dz. \quad (\text{П2.6})$$

Такие периоды можно записать в виде скалярных произведений в метрике интеграла Дирихле. В самом деле, рассмотрим функцию $\omega'_p(z)$, определенную формулой (П1.7); воспользовавшись формулой (П2.5), найдем

$$(f, \overline{\omega'_p}) = +\frac{1}{i} \int_{\gamma} f(z) \omega_p(z) dz. \quad (\text{П2.7})$$

Замечая, что $\omega_p = 1$ на γ_p и $\omega_p = 0$ для других γ , находим окончательно

$$|f|_p = +i(f, \overline{\omega'_p}) = -i(\overline{\omega'_p}, \overline{f}). \quad (\text{П2.8})$$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$, состоящее из всех аналитических в области G функций с однозначными интегралами. Из формулы (П2.8) получаем следующий важный результат:

Необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ пространству \mathfrak{F}_0 является ортогональность ее всем функциям $\omega'_p(z)$.

2. Ядра K и L . Введем теперь две функции

$$K(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}, \quad L(z, \zeta) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta}. \quad (\text{П2.9})$$

Эти комбинации производных функции Грина уже встречались нам в важных формулах (П1.57) и (П1.58). Их значение в рассматриваемом „исчислении Дирихле“ сейчас же станет ясным из нашего дальнейшего изложения. Так как можно написать

$$\ln |z - \zeta| = \frac{1}{2} \ln(z - \zeta) + \frac{1}{2} \ln(\bar{z} - \bar{\zeta}),$$

то, очевидно, что особенность функции Грина исчезает при дифференцировании, приводящем к функции K . Следовательно, $K(z, \bar{\zeta})$ является правильной аналитической функцией переменных z и $\bar{\zeta}$ во всей области G . Функция $L(z, \zeta)$ в точке $z = \zeta$ имеет двойной полюс, и мы можем представить ее в виде

$$L(z, \zeta) = \frac{1}{\pi(z - \zeta)^2} - I(z, \zeta), \quad (\text{П2.10})$$

где $I(z, \zeta)$ — правильная в области G аналитическая функция переменных z и ζ . В качестве примера рассмотрим случай, когда область G представляет собой круг $|z| < R$; функция Грина имеет здесь вид

$$g(z, \zeta) = \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \bar{\zeta})} \right|, \quad (\text{П2.11})$$

и, следовательно,

$$K(z, \bar{\zeta}) = \frac{R^2}{\pi(R^2 - z\bar{\zeta})^2}, \quad L(z, \zeta) = \frac{1}{\pi(z - \zeta)^2}, \quad (\text{П2.12})$$

$$I(z, \zeta) = 0.$$

Функции K и L симметричны, что видно из их определения и из симметрии функции Грина:

$$K(z, \bar{\zeta}) = \overline{K(\zeta, \bar{z})}, \quad L(z, \zeta) = L(\zeta, z), \quad I(z, \zeta) = I(\zeta, z). \quad (\text{П2.13})$$

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$, аналитическую и непрерывную в замкнутой области $G + \gamma$, и ее интеграл Дирихле:

$$(f(z), \overline{K(z, \bar{\zeta})}) = \int_G \int_G K(\zeta, \bar{z}) f(z) d\tau =$$

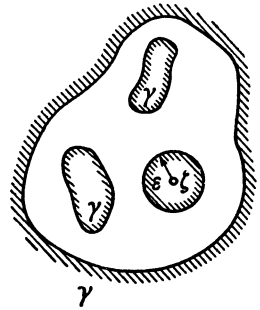
$$= -\frac{2}{\pi} \int_G \int_G \frac{\partial^2 g(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}} f(z) d\tau. \quad (\text{П2.14})$$

Пусть $G_{\zeta, \varepsilon}$ — область, получаемая из области G исключением круга радиуса ε с центром в точке ζ . Пользуясь формулой (П2.5), мы можем представить интеграл Дирихле по этой области в виде

$$\int \int_{G_{\zeta, \varepsilon}} K(\zeta, \bar{z}) f(z) d\tau_z = -\frac{1}{\pi i} \int \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial \bar{\zeta}} f(z) dz. \quad (\text{П2.15})$$

Криволинейный интеграл в правой части этой формулы берется вдоль границы области $G_{\zeta, \varepsilon}$, т. е. вдоль γ и окружности $|z - \zeta| = \varepsilon$ (последняя проходится в отрицательном направлении). Так как при $z \in \gamma$ мы имеем $g(z, \zeta) \equiv 0$ для всех $\zeta \in G$, то очевидно, что для $z \in \gamma$ и $\zeta \in G$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial \bar{\zeta}} = 0. \quad (\text{П2.16})$$



Ф и г. 6. Область $G_{\zeta, \varepsilon}$.

Отсюда, учитывая поведение функции Грина вблизи точки ζ , определяемое формулой (П1.2), находим

$$\int \int_{G_{\zeta, \varepsilon}} K(\zeta, \bar{z}) f(z) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \right) f(z) dz = f(\zeta) + O(\varepsilon). \quad (\text{П2.17})$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ левая часть стремится к интегралу Дирихле (П2.14), и мы получаем замечательное тождество [61, 71]

$$(f(z), \overline{K(z, \bar{\zeta})}) = \int \int_G K(\zeta, \bar{z}) f(z) d\tau = f(\zeta). \quad (\text{П2.18})$$

Функция $K(\zeta, \bar{z})$ является, следовательно, „воспроизводящим“ ядром интегрального оператора (П2.18); ее можно также рассматривать как единичную матрицу в векторном пространстве \mathfrak{F} с метрикой Дирихле. Тождество (П2.18) было впервые установлено Виргингером; как мы увидим, оно имеет многочисленные приложения в теории аналитических и гармонических функций.

Далее, представляет интерес изучение интеграла Дирихле

$$(f(z), \overline{L(z, \bar{\zeta})}) = -\frac{2}{\pi} \int \int_G \frac{\partial^2 g(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} f(z) d\tau_z. \quad (\text{П2.19})$$

Прежде всего мы должны заметить, что так как функция $L(z, \bar{\zeta})$ имеет двойной полюс в точке ζ , то она не принадлежит классу \mathfrak{F} . Можно, однако, определить несобственный интеграл (П2.19) как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ такого же интеграла, распространенного на подобласть $G_{\zeta, \varepsilon}$. Снова пользуясь соотношением (П2.5), мы находим

$$\int \int_{G_{\zeta, \varepsilon}} f(z) \overline{L(z, \bar{\zeta})} d\tau_z = -\frac{1}{\pi i} \int \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial \bar{\zeta}} f(z) dz, \quad (\text{П2.20})$$

где криволинейный интеграл распространен на γ и на окружность $|z - \zeta| = \varepsilon$. На γ подинтегральное выражение обращается в нуль в силу формулы (П2.16), и, следовательно, по формуле (П1.2)

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon} f(z) \overline{L(z, \zeta)} d\tau_z &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left\{ \frac{1}{z-\zeta} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \right\} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} (z-\zeta) + \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \right\} f(z) dz = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{П2.21})$$

Этот результат показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ предел интеграла в левой части существует и равен нулю. Таким образом доказано соотношение

$$(f(z), \overline{L(z, \zeta)}) = 0, \quad (\text{П2.22})$$

которое выражает следующий факт:

Ядро $L(z, \zeta)$ ортогонально ко всем функциям, аналитическим в области G .

Из разложения (П2.10) вытекает тождество

$$\frac{1}{\pi} \int_G \int \frac{f(z)}{(z-\bar{\zeta})^2} d\tau_z = \int_G \int f(z) \overline{l(z, \zeta)} d\tau_z, \quad (\text{П2.23})$$

где несобственный интеграл в левой части понимается в том же смысле, что и интеграл (П2.19) (в этом смысле мы будем понимать и все несобственные интегралы, которые будут встречаться в дальнейшем). Тождество (П2.23) выражает следующий интересный факт. Функция $1/\pi(z-\bar{\zeta})^2$ является элементарной аналитической функцией, которая обращается в бесконечность в точке ζ и в силу этого не принадлежит семейству \mathfrak{F} . Однако это семейство содержит функцию $l(z, \zeta)$, которая эквивалентна $1/\pi(z-\bar{\zeta})^2$ в пространстве с метрикой Дирихле в том смысле, что скалярное произведение $l(z, \zeta)$ на любую функцию семейства \mathfrak{F} равно произведению $1/\pi(z-\bar{\zeta})^2$ на эту функцию.

Если, в частности, положить $f(z) = K(z, \bar{\eta})$ для любой точки $\eta \in G$, то из тождества (П2.23) на основании воспроизводящего свойства (П2.18) ядра K мы получим

$$\frac{1}{\pi} \int_K \int \frac{K(z, \bar{\eta})}{(z-\bar{\zeta})^2} d\tau_z = \overline{l(\zeta, \eta)}. \quad (\text{П2.24})$$

Таким образом, если ядро K известно, то можно легко построить и ядро L :

$$L(\zeta, \eta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{(\zeta - \eta)^2} - \int_G \int \frac{K(\eta, \bar{z})}{(z - \zeta)^2} d\tau_z \right\}. \quad (\text{П2.25})$$

Так как функции Грина и Неймана выражаются через ядра K и L , то решение нашей конструктивной задачи сводится к отысканию удобного выражения для ядра K .

С другой стороны, ядро K можно построить, если известно ядро L . Чтобы в этом убедиться, мы снова отправляемся от формулы (П2.16)

$$\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial \zeta} \equiv 0 \quad \text{для } z \in \gamma.$$

Пусть $z(s)$ будет параметрическое представление системы кривых γ и s — длина дуги. Обозначая dz/ds через z' и дифференцируя тождество (П2.16), находим

$$\frac{\partial^2 g(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial z} z' + \frac{\partial^2 g(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}} \bar{z}' = 0. \quad (\text{П2.26})$$

Отсюда, пользуясь определением (П2.9), получаем следующий результат:

$$L(z, \zeta) z' = -\overline{K(z, \bar{\zeta})} z' \quad \text{для } z \in \gamma, \zeta \in G. \quad (\text{П2.27})$$

Рассмотрим теперь интеграл Дирихле

$$l(z, \zeta, \overline{l(z, \eta)}) = \int_G \int \overline{l(z, \eta)} l(z, \zeta) d\tau_z = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{l(z, \zeta)}{(\bar{z} - \bar{\eta})^2} d\tau_z. \quad (\text{П2.28})$$

На основании (П2.4') устанавливаем формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_G \int_{\eta, \varepsilon} \frac{l(z, \zeta)}{(\bar{z} - \bar{\eta})^2} d\tau_z = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{l(z, \zeta)}{z - \eta} dz + O(\varepsilon), \quad (\text{П2.29})$$

из которой в пределе, при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем с учетом разложения (П2.10)

$$l(z, \zeta, \overline{l(z, \zeta)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{L(z, \zeta)}{z - \eta} dz - \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \zeta)^2 (\bar{z} - \bar{\eta})}. \quad (\text{П2.29}')$$

Пользуясь граничным свойством (П2.27) ядра L и интегральной формулой Коши, мы можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{L(z, \zeta)}{z - \eta} dz = \overline{\frac{1}{2\pi i} \int \frac{K(z, \bar{\zeta})}{z - \eta} dz} = K(\zeta, \bar{\eta}). \quad (\text{П2.30})$$

Пусть, далее, \tilde{G} будет дополнение к области G ; применяя к \tilde{G} соотношение (П2.4'), мы находим

$$\frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \zeta)^2 (\bar{z} - \bar{\eta})} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\tilde{G}} \int \frac{d\tau_z}{(z - \zeta)^2 (\bar{z} - \bar{\eta})^2} = \Gamma(\zeta, \bar{\eta}). \quad (\text{П2.31})$$

Функция $\Gamma(\zeta, \bar{\eta})$ является правильной аналитической функцией ζ и $\bar{\eta}$ в области \tilde{G} и получается простым интегрированием. Она играет важную роль в окончательном построении ядра K . Пользуясь

соотношениями (П2.30) и (П2.31), мы записываем (П2.29') в окончательном виде:

$$\int_G \int l(z, \zeta) \overline{l(z, \eta)} d\tau_z = K(\zeta, \bar{\eta}) - \Gamma(\zeta, \bar{\eta}). \quad (\text{П2.32})$$

Эта формула действительно позволяет выразить ядро K , если известно лишь ядро L .

3. Неравенства. Мы будем теперь применять полученные выше соотношения к функциям, аналитическим в области G . Для каждой такой функции справедливо соотношение (П2.18); применяя к нему неравенство Буняковского — Шварца и снова пользуясь этим соотношением, находим

$$|f(\zeta)|^2 \leq \|f\|^2 \int_G \int K(\zeta, \bar{z}) K(z, \bar{\zeta}) d\tau = \|f\|^2 K(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (\text{П2.33})$$

Из этой формулы видно, что

Значение любой функции $f \in \mathfrak{F}$ в произвольной точке области G оценивается через норму этой функции в метрике интеграла Дирихле.

Знак равенства в формуле (П2.33) может иметь место лишь для функции $f(z) = \lambda K(z, \bar{\zeta})$; отсюда видно, что ядро K можно характеризовать следующим экстремальным свойством:

Среди всех функций $f(z) \in \mathfrak{F}$, принимающих значение 1, в заданной точке $\zeta \in G$ наименьшую возможную норму, именно $|K(\zeta, \bar{\zeta})|^{-1}$, имеет функция $K(z, \bar{\zeta})/K(\zeta, \bar{\zeta})$.

Это замечание указывает новый подход к теории граничных задач. Предположим, что существование функции Грина не было бы доказано, тогда было бы невозможно и построение ядер K и L . Но всегда можно найти аналитическую функцию $K(z, \bar{\zeta})$, которая решает поставленную выше экстремальную задачу, ибо класс аналитических в области G функций с ограниченной нормой компактен. Эта экстремальная функция, очевидно, обладает воспроизводящим свойством (П2.18). Если определить по формуле (П2.25) ядро L , то можно построить функции Грина и Неймана, обладающие нужными свойствами. Такой подход был применен Лехто, а также Гарабедианом и Шиффером для доказательства существования различных конформных отображений (см. [21, 35]).

Рассмотрим теперь аналитическую функцию

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \{K(z, \bar{\zeta}_i) \bar{x}_i + \lambda l(z, \zeta_i) x_i\}, \quad (\text{П2.34})$$

где ζ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ — произвольные точки области G и x_i — произвольные комплексные числа. Норма этой функции, очевидно,

неотрицательна; ее нетрудно подсчитать с помощью формулы (П2.32) и воспроизводящего свойства (П2.18) ядра K . Мы получим

$$0 \leq \|f\|^2 = \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k + 2 \operatorname{Re} \lambda \sum_{i, k=1}^N l(\zeta_i, \zeta_k) x_i x_k + |\lambda|^2 \sum_{i, k=1}^N \{K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) - \Gamma(\zeta_i, \bar{\zeta}_k)\} x_i \bar{x}_k. \quad (\text{П2.35})$$

Заметим сначала, что эрмитова форма

$$\sum_{i, k=1}^N \Gamma(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\bar{G}} \left| \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{(z - \zeta_i)^2} \right|^2 d\tau_z \quad (\text{П2.36})$$

(ср. (П2.31)) положительно определена. Следовательно, из формулы (П2.35) мы находим, что форма

$$\sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k \geq \sum_{i, k=1}^N \Gamma(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k > 0 \quad (\text{П2.37})$$

также положительно определена. Так как неравенство (П2.35) справедливо при любом выборе комплексного параметра λ , то справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i, k=1}^N l(\zeta_i, \zeta_k) x_i x_k \right|^2 \leq \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k \times \sum_{i, k=1}^N \{K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) - \Gamma(\zeta_i, \bar{\zeta}_k)\} x_i \bar{x}_k. \quad (\text{П2.38})$$

Из этого неравенства вытекает более слабый результат

$$\left| \sum_{i, k=1}^N l(\zeta_i, \zeta_k) x_i x_k \right| \leq \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k. \quad (\text{П2.39})$$

Рассмотрим теперь класс всех аналитических в области G функций $f(z)$, которые в N произвольно заданных точках $\zeta_i \in G$ принимают фиксированные значения a_i . В этом классе существует точно одна функция

$$\text{вида } \sum_{i=1}^N K(z, \bar{\zeta}_i) \bar{x}_i, \text{ ибо определитель системы} \quad (\text{П2.40})$$

$$\sum_{i=1}^N K(\zeta_k, \bar{\zeta}_i) \bar{x}_i = a_k$$

отличен от нуля в силу положительной определенности ядра K . Любую функцию этого класса можно теперь представить в виде

$$f(z) = \sum_{i=1}^N K(z, \bar{\zeta}_i) \bar{x}_i + \varphi(z), \quad (\text{П2.41})$$

где функция $\varphi(z)$ обращается в нуль во всех точках ζ_i . Снова подсчитаем норму функции f , пользуясь воспроизводящим свойством (П2.18) ядра и тем, что $\varphi(\zeta_i) = 0$; мы найдем

$$\|f(z)\|^2 = \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k + \|\varphi\|^2 \geq \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k. \quad (\text{П2.42})$$

Квадратичную форму справа можно определить как минимальную в соответствующей интерполяционной задаче. Из этого результата выясняется значение ядра K в теории интерполяции аналитических функций.

4. Конформное отображение. Пусть область G посредством однолистной функции $\omega = \varphi(z)$ отображается на некоторую область G_ω . Обозначим через $g_\omega(\omega, \bar{\omega})$ функцию Грина области G_ω , через K_ω и L_ω — соответствующие ядра. Очевидно, что при подстановке $\omega = \varphi(z)$ имеет место тождество

$$g_\omega(\omega, \bar{\omega}) = g(z, \bar{\zeta}), \quad (\text{П2.43})$$

т. е. функция Грина инвариантна относительно конформных отображений.

Дифференцируя это тождество по z и ζ , мы получаем следующие формулы преобразования ядер:

$$\begin{aligned} K_\omega(\omega, \bar{\omega}) \varphi'(z) \overline{\varphi'(\zeta)} &= K(z, \bar{\zeta}), \\ L_\omega(\omega, \bar{\omega}) \varphi'(z) \varphi'(\zeta) &= L(z, \zeta). \end{aligned} \quad (\text{П2.44})$$

Наконец, мы получаем правило преобразования функции $l(z, \zeta)$:

$$l_\omega(\omega, \bar{\omega}) \varphi'(z) \overline{\varphi'(\zeta)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\varphi'(z) \overline{\varphi'(\zeta)}}{[\varphi(z) - \overline{\varphi(\zeta)}]^2} - \frac{1}{(z - \bar{\zeta})^2} \right\} + l(z, \zeta). \quad (\text{П2.45})$$

Функция

$$U(z, \zeta) = \frac{\varphi'(z) \overline{\varphi'(\zeta)}}{[\varphi(z) - \overline{\varphi(\zeta)}]^2} - \frac{1}{(z - \bar{\zeta})^2} \quad (\text{П2.46})$$

представляет большой интерес для теории конформных отображений. С ее помощью можно просто получить критерий однолистности произвольной функции $\varphi(z)$. Таким критерием, очевидно, является регулярность функции $U(z, \zeta)$ всюду в рассматриваемой области. Если положить $z = \zeta$, функция U примет вид

$$U(z, z) = \frac{1}{6} \left(\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} \right) = \frac{1}{6} \{ \varphi, z \}, \quad (\text{П2.47})$$

где $\{ \varphi, z \}$ обозначает дифференциальный параметр Шварца — Кели, играющий важную роль при конформном отображении на области, ограниченные круговыми дугами.

Пусть z_1 и z_2 — две произвольные точки области G , которые функция $\varphi(z)$ преобразует в w_1 и w_2 . В силу соотношения (П2.44) выражение

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{K(z, \bar{z})} |dz| = \int_{w_1}^{w_2} \sqrt{K_w(w, \bar{w})} |dw| \quad (\text{П2.48})$$

является *конформным инвариантом* и может служить для введения в области G метрики, не изменяющейся при конформных отображениях. Геометрия такой метрики изучалась Бергманом [11]; для случая односвязных областей G метрика была впервые рассмотрена Пуанкаре.

5. Приложения к теории однолистных функций. Теория конформных отображений тесно связана с теорией однолистных функций (см. [42, 67]) — конформные отображения осуществляются однолиственными функциями. Эти две теории, однако, различаются точками зрения на рассматриваемые задачи. В то время как в теории конформных отображений центральной задачей является доказательство существования и изучение свойств канонических отображений, центральной задачей теории однолистных функций является получение необходимых и достаточных условий однолистности данной функции $\varphi(z)$ в заданной области G . Мы покажем, что неравенство (П2.39) дает важные сведения в этом направлении.

В самом деле, пусть функция $w = \varphi(z)$ однолистка в области G и отображает ее на некоторую область G_w . Неравенство (П2.39) можно применить к функциям l_w и K_w . Но в соответствии с результатами предыдущего пункта эти функции можно выразить через данную функцию $\varphi(z)$ и известные функции l и K , связанные с основной областью G . Пользуясь формулами (П2.44) и (П2.45), мы приходим к следующему результату:

Для того чтобы функция $\varphi(z)$ была однолистной в области G , необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left| \sum_{i, k=1}^N \left\{ \frac{1}{\pi} U(\zeta_i, \zeta_k) + l(\zeta_i, \zeta_k) \right\} x_i x_k \right| \leq \sum_{i, k=1}^N K(\zeta_i, \bar{\zeta}_k) x_i \bar{x}_k \quad (\text{П2.49})$$

для любых точек $\zeta_i \in G$ и любых комплексных чисел x_i .

Так как функция U просто выражается через функцию $\varphi(z)$, то это неравенство дает бесконечное множество необходимых условий однолистности, которые нетрудно проверить. В качестве примера рассмотрим случай, когда $N=1$ и область G представляет собой единичный круг. Пользуясь формулами (П2.12) и (П2.47), мы получаем необходимое условие однолистности

$$|\{\varphi, z\}| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}, \quad (\text{П2.50})$$

которое тесно связано с теоремами искажения в теории однолистных функций. Нехари доказал обратное, т. е. что если функция $\varphi(z)$ удовлетворяет в круге $|z| < 1$ неравенству

$$|\{\varphi, z\}| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \quad (\text{П2.51})$$

то она однолистка в этом круге. Это условие, однако, не является необходимым [30, 43].

На основании неравенства (П2.49) можно выбрать счетное множество неравенств, дающих достаточное условие однолиственности функции $\varphi(z)$. Такое множество неравенств было впервые получено Грунским [27] и тесно связано с неравенством (П2.49).

6. Разрывность ядер. По определению ядро $L(z, \zeta)$ имеет двойной полюс в точке $z = \zeta$. Ядро $K(z, \bar{\zeta})$ непрерывно относительно z в замкнутой области $G + \gamma$, если $\zeta \in G$; если, однако, $\zeta \in \gamma$, то ядро K при $z = \zeta$ обращается в бесконечность. В случае круга это совершенно очевидно из формулы (П2.12). То, что это имеет место и в общем случае, следует из того обстоятельства, что однородное интегральное уравнение

$$f(z) + \lambda \int_G \int K(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\tau_\zeta = 0 \quad (\text{П2.52})$$

имеет $\lambda = -1$ собственным значением бесконечного порядка, ибо вследствие воспроизводящего свойства ядра K при $\lambda = -1$ этому уравнению удовлетворяют все аналитические функции. Отсюда в силу общих теорем теории интегральных уравнений (см. [5]) следует, что функция $K(z, \bar{\zeta})$ не может быть ограниченной в замкнутой области $G + \gamma$.

Докажем теперь следующую важную теорему:

Теорема. Функция $l(z, \zeta)$ непрерывна относительно обоих переменных в замкнутой области $G + \gamma$, если граничные кривые γ_ρ всюду обладают тремя непрерывными производными по длине дуги как параметру.

Утверждение теоремы для круга проверяется непосредственно по формуле (П2.12). С помощью дополнительного конформного отображения его можно распространить на произвольную односвязную область G . Для этого достаточно воспользоваться соотношением (П2.45) и заметить, что, согласно нашим предположениям о кривых γ_ρ , функция $U(z, \zeta)$, составленная для функции $\varphi(z)$, отображающей область G на единственный круг, непрерывна в этом круге. Остается, следовательно, доказать непрерывность ядра для многосвязных областей.

Пусть γ_1 — одна из граничных кривых. Она делит плоскость на две части; ту из них, которая содержит область G , мы обозначим через G_1 . Через $g_1(z, \zeta)$ мы обозначим функцию Грина этой области,

тогда функция $g_1(z, \zeta) - g(z, \zeta)$ будет гармонической всюду в области G и, по построению, будет обращаться в нуль на кривой γ_1 . Следовательно, по формуле Грина (П1.3) можно написать

$$g_1(z, \zeta) - g(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma=\gamma_1} \frac{\partial g(z, t)}{\partial n_t} \{g_1(t, \zeta) - g(t, \zeta)\} ds_t. \quad (\text{П2.53})$$

Дифференцируя это соотношение по z и ζ , мы получим в очевидных обозначениях

$$l_1(z, \zeta) - l(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma=\gamma_1} \frac{\partial^2 g(z, t)}{\partial z \partial n_t} \left\{ \frac{\partial g_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial \zeta} \right\} ds_t. \quad (\text{П2.54})$$

Полученная формула и содержит доказываемый результат. Если точки ζ и z лежат вблизи контура γ_1 или на самом этом контуре, то под-интегральное выражение в (П2.54) остается непрерывным, ибо путь интегрирования не содержит точки ζ . Далее, функция $l_1(z, \zeta)$ непрерывна в замкнутой односвязной области G_1 , следовательно, функция $l(z, \zeta)$ непрерывна вблизи контура γ_1 и на нем самом. Но так как в качестве γ_1 можно принять любой граничный контур γ , то наше утверждение доказано полностью.

Непрерывность ядра $l(z, \zeta)$ в замкнутой области $G + \gamma$ имеет большое значение в теории функции Грина. В качестве первого примера применения рассмотрим формулу (П2.32). Мы знаем теперь, что ее левая часть непрерывна в $G + \gamma$, следовательно, мы можем утверждать, что и правая часть $K(z, \bar{\zeta}) - \Gamma(z, \bar{\zeta})$ непрерывна в той же области. Важность этого результата видна из следующего замечания. Мы знаем, что ядро $K(z, \bar{\zeta})$ выражается через производные функции Грина области G и весьма сложно зависит от области. Напротив, функция Γ получается интегрированием элементарных функций по дополнению к области G и подсчитывается просто — для ее вычисления не нужно решать граничных задач, она представляет собой геометрическую величину. Полученный результат показывает, что ядро K имеет на границе γ тот же характер разрыва, что и геометрическая величина Γ .

7. Задача о собственных значениях. Рассмотрим положительно определенное эрмитово ядро $K(z, \bar{\zeta}) - \Gamma(z, \bar{\zeta})$ [см. неравенство (П2.37)], равномерно ограниченное в области G , и соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi_\nu(z) = \lambda_\nu^2 \iint_G \{K(z, \bar{\zeta}) - \Gamma(z, \bar{\zeta})\} \varphi_\nu(\zeta) d\tau_\zeta. \quad (\text{П2.55})$$

В силу указанных свойств ядра это уравнение имеет положительные собственные значения λ_ν^2 и собственные функции $\varphi_\nu(z)$. Легко видеть,

что всегда $\lambda_v^2 \geq 1$. В самом деле, из формул (П2.55), (П2.31) и производящего свойства ядра K получаем

$$\iint_G |\varphi_v(z)|^2 d\tau_z = \lambda_v^2 \iint_G |\varphi_v(z)|^2 d\tau_z - \lambda_v^2 \iint_{\tilde{G}} |\chi_v(z)|^2 d\tau, \quad (\text{П2.56})$$

где

$$\chi_v(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{\varphi_v(\zeta)}}{(z-\zeta)^2} d\tau_\zeta, \quad z \in \tilde{G} \quad (\text{П2.57})$$

(\tilde{G} обозначает дополнение к области G). Соотношение (П2.56) доказывает наше утверждение. Далее, из него же ясно, что $\lambda_p > 1$ для всех функций, кроме тех, для которых преобразованные функции $\chi_v(z)$ тождественно обращаются в нуль в дополнении \tilde{G} к области G . Такие функции $\varphi_v(z)$ легко охарактеризовать. Заметим сначала, что, согласно (П2.55) и свойству непрерывности ядра $K—\Gamma$, любая функция $\varphi_v(z)$ непрерывна в замкнутой области $G + \gamma$. Следовательно, мы можем преобразовать соотношение (П2.57) посредством интегрирования по частям, как в формуле (П2.4); получим

$$\chi_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{\varphi_v(\zeta)}}{\zeta - z} d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{\varphi_v(\zeta)} \zeta'^2}{\zeta - z} d\zeta, \quad (\text{П2.58})$$

ибо $d\bar{\zeta} = \bar{\zeta}' ds$ и $|\zeta'|^2 = 1$. Эта формула и внутри контура γ представляет некоторую аналитическую функцию, причем, вообще говоря, при переходе через γ функция $\chi_v(z)$ терпит разрыв. Согласно классическому результату Племеля [44]¹⁾, для любых точек $z \in \gamma$ выполняется условие

$$\lim_{z_i \rightarrow z} \chi_v(z_i) = \lim_{z_e \rightarrow z} \chi_v(z_e) + \overline{\varphi_v(z) z'^2}, \quad z_i \in G, z_e \in \tilde{G}. \quad (\text{П2.59})$$

Если предположить теперь, что $\chi_v(z) \equiv 0$ в области \tilde{G} , то аналитическая в G функция $\chi_v(z)$ будет иметь на γ граничные значения $\overline{\varphi_v(z) z'^2}$. Пусть

$$\Phi(\zeta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta} \{\varphi_v(z) + \chi_v(z)\} dz; \quad (\text{П2.60})$$

для двух точек ζ_1 и ζ_2 и одного и того же граничного континуума γ , мы будем иметь

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \{\varphi_v z' + \chi_v z'\} ds = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \{\varphi_v z' + \overline{\varphi_v z'}\} ds, \quad (\text{П2.60}')$$

¹⁾ Этот результат много раньше Племеля получил Ю. В. Сохоцкий (1873); вывод формул Сохоцкого см. у А. И. Маркушевича (Теория аналитических функций, М.—Л., 1950).—Прим. перев.

если выбрать в качестве пути интегрирования дугу γ_ρ , заключенную между точками ζ_1 и ζ_2 . Правая часть здесь действительна, следовательно, функция $\Phi(\zeta)$ имеет на каждом континууме γ_ρ постоянную мнимую часть. Отсюда, вычтя из $\Phi(\zeta)$ надлежащим образом подобранную комбинацию функций $i\omega_\rho(\zeta)$, мы получим аналитическую функцию, мнимая часть которой равна нулю на γ . По принципу максимума мы заключаем, что мнимая часть этой функции тождественно равна нулю всюду в области G и, следовательно, сама функция представляет собой действительную постоянную. Таким образом, доказано, что имеет место соотношение

$$\varphi_\nu(\zeta) + \chi_\nu(\zeta) = \Phi'(\zeta) = i \sum_{\rho=1}^k \alpha_\rho \omega'_\rho(\zeta), \quad (\text{П2.61})$$

где α_ρ — действительные постоянные. Аналогично докажем, что

$$\varphi_\nu(\zeta) - \chi_\nu(\zeta) = \sum_{\rho=1}^k \beta_\rho \omega'_\rho(\zeta), \quad (\text{П2.61}')$$

где β_ρ — действительны, и, наконец,

$$\varphi_\nu(z) = \sum \frac{\beta_\rho + i\alpha_\rho}{2} \omega'_\rho(z). \quad (\text{П2.62})$$

Мы доказали, что

Собственные функции уравнения (П2.55), соответствующие собственному значению 1, представляют собой линейную комбинацию функций $\omega'_\rho(z)$.

Очевидно, что и все такие линейные комбинации являются собственными функциями уравнения (П2.55) с собственным значением, равным 1. Этот результат снова иллюстрирует значение гармонической меры и ее многостороннюю роль в рассматриваемой теории.

Умножим обе части уравнения (П2.55) на $\overline{\omega'_\rho(z)}$ и проинтегрируем по области G . Пользуясь свойством симметрии ядра и тем, что $\omega'_\rho(z)$ является собственной функцией, соответствующей $\lambda_\nu^2 = 1$, мы получаем

$$\int_G \int \varphi_\nu(z) \overline{\omega'_\rho(z)} d\tau_z = \lambda_\nu^2 \int_G \int \overline{\omega'_\rho(\zeta)} \varphi_\nu(\zeta) d\tau_\zeta \quad (\text{П2.63})$$

и отсюда для $\lambda_\nu^2 > 1$ находим

$$(\varphi_\nu, \overline{\omega'_\rho}) = \int_G \int \varphi_\nu \overline{\omega'_\rho} d\tau = 0. \quad (\text{П2.63}')$$

Пользуясь еще соотношением (П2.8), приходим к следующему выводу:

Теорема. Любая собственная функция $\varphi_v(z)$ уравнения (П2.55), соответствующая собственному значению, большему 1, принадлежит классу \mathfrak{F}_0 , т. е. имеет в области G однозначный интеграл.

8. Ядра в классе \mathfrak{F}_0 . Вычтем из ядра $K(z, \bar{\zeta})$ комбинацию $\sum t_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \overline{\omega'_\sigma(\zeta)}$ так, чтобы разность была ортогональной ко всем функциям $\omega'_\rho(z)$. Исправленное таким образом ядро $K_0(z, \bar{\zeta})$ лежит в классе \mathfrak{F}_0 , т. е. имеет в области G однозначный интеграл. Оно по-прежнему обладает воспроизводящим свойством для всех функций класса \mathfrak{F}_0 , ибо все функции последнего ортогональны к комбинациям $\sum t_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \overline{\omega'_\sigma(\zeta)}$.

Пользуясь результатами первого параграфа, мы можем дать изящную интерпретацию ядра $K_0(z, \bar{\zeta})$. В самом деле, формула (П1.37) показывает, что ядро $-\partial^2 m / \partial z \partial \bar{\zeta}$ имеет однозначный (и даже однолистный) интеграл $-\frac{1}{2} \partial / \partial \bar{\zeta} \ln f(z, \zeta)$ и, следовательно, принадлежит к классу \mathfrak{F}_0 . По формулам (П1.58) и (П1.60) мы связываем это ядро с функцией $-\partial^2 g(z, \zeta) / \partial z \partial \bar{\zeta}$. Но ядра отличаются только комбинацией функций ω'_ρ , следовательно, мы получаем соотношение

$$K_0(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 m}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}. \quad (\text{П2.64})$$

В классе \mathfrak{F}_0 можно ввести также ядро, соответствующее ядру \mathcal{L}_0 :

$$\mathcal{L}_0(z, \zeta) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 N(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 m}{\partial z \partial \bar{\zeta}}. \quad (\text{П2.65})$$

В этом новом функциональном пространстве можно построить теорию ядер, вполне аналогичную построенной выше, однако центральную роль будет теперь играть функция Неймана, а не функция Грина.

Рассмотрим решения интегрального уравнения

$$\varphi_v(z) = \lambda_v^2 \iint_G \{K_0(z, \bar{\zeta}) - \Gamma(z, \bar{\zeta})\} \varphi_v(\zeta) d\tau_\zeta; \quad (\text{П2.66})$$

так как функции K_0 и Γ принадлежат \mathfrak{F}_0 , то мы прежде всего можем отметить, что $\varphi_v(z) \in \mathfrak{F}_0$. Но скалярное произведение функции $\varphi_v(z)$ на $K_0 - \Gamma$ равно ее произведению на функцию $K - \Gamma$, следовательно, интегральные уравнения (П2.55) и (П2.66) имеют одинаковые собственные значения $\lambda_v^2 > 1$ и одинаковые собственные функции $\varphi_v(z)$. Однако уравнение (П2.66) не имеет собственного значения 1, ибо функции $\omega'_\rho(z)$ не принадлежат \mathfrak{F}_0 .

Рассмотрим соотношение

$$K_0(z, \bar{w}) - \iint_G \{K_0(z, \bar{\zeta}) - \Gamma(z, \bar{\zeta})\} K_0(\zeta, \bar{w}) d\tau_\zeta = \Gamma(z, \bar{w}), \quad (\text{П2.67})$$

которое непосредственно вытекает из воспроизводящего свойства ядра K_0 в пространстве \mathfrak{F}_0 . Это соотношение можно рассматривать как неоднородное интегральное уравнение для функции $K_0(z, \bar{w})$ с положительно определенным эрмитовым ядром $K_0 - \Gamma$, непрерывным в замкнутой области $G + \gamma$. Так как все собственные значения этого уравнения больше 1, то его решение можно представить посредством известного разложения в ряд Ньютона по итерированным ядрам [5]. В самом деле, пусть

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(\nu)}(z, \bar{\zeta}) &= \int_G \int \Delta^{(\nu-1)}(z, \bar{w}) \{K_0(w, \bar{\zeta}) - \Gamma(w, \bar{\zeta})\} d\tau_w, \\ \Delta^{(0)}(z, \bar{\zeta}) &= K_0(z, \bar{\zeta}); \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.68})$$

тогда мы будем иметь

$$K_0(z, \bar{w}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_G \int \Delta^{(\nu)}(z, \bar{\zeta}) \Gamma(\zeta, \bar{w}) d\tau_{\zeta}. \quad (\text{П2.69})$$

Если ввести аналогично

$$\Gamma^{(\nu)}(z, \bar{\zeta}) = \int_G \int \Gamma^{(\nu-1)}(z, \bar{w}) \Gamma(w, \bar{\zeta}) d\tau_w, \quad \Gamma^{(1)}(z, \bar{\zeta}) = \Gamma(z, \bar{\zeta}), \quad (\text{П2.70})$$

то после простых преобразований ряд (П2.69) можно представить в виде двойного ряда

$$K_0(z, \bar{w}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\mu} C_{\mu}^{\nu} \Gamma^{(\mu+1)}(z, \bar{w}) \right\}, \quad (\text{П2.71})$$

где C_{μ}^{ν} — биномиальные коэффициенты. Мы нашли выражение ядра K_0 с помощью ряда, члены которого получаются элементарным интегрированием; оно представляет практический интерес, ибо дает численный метод построения этого ядра [15].

Построив ядро K_0 в классе \mathfrak{F}_0 , мы можем легко найти и ядро K в более широком классе \mathfrak{F} . В самом деле, пусть \bar{G} — дополнение к области G и a_p — некоторая точка компоненты \bar{G} , ограниченной контуром γ_p . Тогда функция

$$W'_p(z) = \frac{1}{z - a_p} - \int_G \int \frac{K_0(z, \bar{\zeta})}{\zeta - a_p} d\tau_{\zeta} \quad (\text{П2.72})$$

будет правильна в области G и по построению ортогональна ко всем функциям класса \mathfrak{F}_0 . Ее интеграл получает приращение $2\pi i$, когда точка z описывает γ_p , и остается однозначным при обходе других контуров. Следовательно, функция $W'_p(z)$ является комбинацией функций $w'_p(z)$ с коэффициентами, которые нетрудно вычислить на основании соответствующих условий периодичности. Зная функции K_0 и w'_p , легко построить и ядро K .

9. Теория сравнения. Можно получить интересное обобщение разложения ядра K_0 , на котором основываются некоторые эффективные вычисления в практических задачах. Пусть \tilde{G} — область комплексной плоскости, содержащая начальную область G и так же, как

и она, ограниченная k гладкими кривыми $\tilde{\gamma}_p$, каждая из которых получается непрерывной деформацией соответствующей граничной кривой γ_p области G (фиг. 7). Обозначим через $\tilde{g}(z, \zeta)$, $\tilde{K}(z, \zeta)$ и $\tilde{L}(z, \zeta)$ функцию Грина и ядра для этой новой, более широкой области.

Заметим, что функция

$$\Lambda(z, \zeta) = \tilde{L}(z, \zeta) - L(z, \zeta) \quad (\text{П2.73})$$

является правильной аналитической в области G и непрерывной в замкнутой области $G + \gamma$. Это следует непосредственно из результата, полученного в п. 6 для ядра L .

В самом деле, функция $\Lambda(z, \zeta)$ является простым обобщением ядра l и для случая, когда $\tilde{\gamma}$ является окружностью, тождественно совпадает с этим ядром [ср. формулы (П2.12)]. Пользуясь тождеством (П2.22), вычислим интеграл

$$\int_G \int \Lambda(z, \zeta) \overline{\Lambda(z, \eta)} d\tau_z = \int_G \int \tilde{L}(z, \zeta) \overline{\tilde{L}(z, \eta)} d\tau_z, \quad (\text{П2.74})$$

аналогичный интегралу (П2.32). Интегрируя по частям, как в формуле (П2.5), и пользуясь формулами (П2.73) и (П2.27), мы преобразовываем этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\partial \tilde{g}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \overline{\{\tilde{L}(z, \eta) - L(z, \eta)\}} d\bar{z} = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\partial \tilde{g}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \overline{\tilde{L}(z, \eta)} d\bar{z} + \frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\partial \tilde{g}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \overline{K(z, \eta)} dz. \end{aligned} \quad (\text{П2.75})$$

Так как функции \tilde{L} и $\partial \tilde{g}/\partial \zeta$ ограничены в области $G^* = \tilde{G} - G$, то первый из двух интегралов по формуле (П2.5) можно преобразовать в интеграл по области G^* :

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\partial \tilde{g}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \overline{\tilde{L}(z, \eta)} dz = - \int_{G^*} \int \tilde{L}(z, \zeta) \overline{\tilde{L}(z, \eta)} d\tau_z = -B(\zeta, \eta) \quad (\text{П2.76})$$

(заметим, что точки ζ и $\bar{\eta}$ лежат в области G^*). Очевидно, что $B(\zeta, \bar{\eta})$ является в области G положительно определенным эрмитовым ядром такого же типа, как и ядро Γ . Будем считать ядра $\tilde{L}(z, \zeta)$ и $\tilde{K}(z, \zeta)$

известными и выразим через них ядра K и L ; при этом B следует рассматривать как геометрическую величину, определяемую простым интегрированием.

Второй интеграл в правой части формулы (П2.75) также преобразуем интегрированием по частям; заметив, что $\partial g(z, \zeta)/\partial \zeta = 0$ на γ , мы перепишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial \{\tilde{g}(z, \zeta) - g(z, \zeta)\}}{\partial \zeta} K(z, \bar{\eta}) dz = \\ = - \int_G \int \{\tilde{K}(\zeta, \bar{z}) - K(\zeta, \bar{z})\} K(z, \bar{\eta}) d\tau_z. \end{aligned} \quad (\text{П2.77})$$

Пользуясь воспроизводящим свойством ядра K , мы без труда вычислим интеграл (П2.77), после чего, объединив формулу (П2.76) и (П2.77), получим окончательное соотношение

$$\int_G \Delta(z, \zeta) \overline{\Delta(z, \eta)} d\tau_z = K(\zeta, \bar{\eta}) - \tilde{K}(\zeta, \bar{\eta}) - B(\zeta, \bar{\eta}). \quad (\text{П2.78})$$

Полученный результат содержит ценные сведения об изменении ядра K при изменении фундаментальной области G . Из него следует, что ядро

$$K(z, \bar{\zeta}) - \tilde{K}(z, \bar{\zeta}) - B(z, \bar{\zeta}) = M(z, \bar{\zeta}) \quad (\text{П2.79})$$

является положительно определенным, т. е. что $\sum M(z_i, \bar{z}_k) x_i \bar{x}_k \geq 0$ при любом выборе точек $z_i \in G$ и комплексных чисел x_i . В частности, мы получаем, что

Положительно определенная форма $\sum K(z_i, \bar{z}_k) x_i \bar{x}_k$ монотонно возрастает при расширении основной области G .

Этот результат позволяет легко оценивать ядро K области G , выбирая области сравнения, которые лежат целиком внутри G или содержат G .

Определим для каждой функции $f(z) \in \mathfrak{F}$ два преобразования:

$$T_1 f(z) = \int_G \int \tilde{K}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\tau_\zeta$$

и

$$T_2 f(z) = \int_G \int \tilde{L}(z, \zeta) \overline{f(\zeta)} d\tau_\zeta. \quad (\text{П2.80})$$

Так как функция $\tilde{L}(z, \zeta)$ имеет двойной полюс в точке $z = \zeta$, то последний интеграл является несобственным. Однако легко убедиться в том, что он представляет аналитическую функцию z в областях G и G^* , которая претерпевает разрыв, когда точка z пересекает границу γ области G . В самом деле, выполняя интегрирование по частям

(в предположении, что функция $f(z)$ является непрерывной в $G + \gamma$), находим

$$T_2 f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial \tilde{g}(z, \zeta)}{\partial z} \overline{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta - z} + \dots \right) \overline{f(\zeta)} d\zeta. \quad (\text{П2.81})$$

Отсюда по формуле Сохоцкого — Племеля мы заключаем, что функция $T_2 f(z)$ испытывает скачок $\overline{f(z)} z'^2$, когда точка пересекает граничную кривую γ . Для $z \in G$ на основании тождества (П2.22) эту величину можно записать с помощью интеграла в собственном смысле:

$$T_2 f(z) = \int_G \int \Delta(z, \zeta) \overline{f(\zeta)} d\tau_{\zeta}. \quad (\text{П2.82})$$

Функция $T_1 f(z)$, очевидно, аналитична всюду в области \tilde{G} .

Умножая тождество (П2.78) на $\overline{f(\zeta)} f(\eta)$ и интегрируя вдоль области G по каждому переменному, мы получаем на основании формулы (П2.76) и воспроизводящего свойства ядра относительно области $\tilde{G} = G + G^*$

$$\begin{aligned} & \int_G \int |T_2 f(z)|^2 d\tau_z = \\ & = \int_G \int |f(z)|^2 d\tau_z - \int_{G+G^*} \int |T_1 f(z)|^2 d\tau_z - \int_{G^*} \int |T_2 f(z)|^2 d\tau_z. \end{aligned} \quad (\text{П2.83})$$

Полученное соотношение выражает замечательный факт — любую функцию $f(z)$, аналитическую в области G , можно преобразовать в две функции $T_1 f$ и $T_2 f$, определенные в области \tilde{G} , сумма норм которых равна норме f :

$$\|T_1 f\|_{\tilde{G}}^2 + \|T_2 f\|_{\tilde{G}}^2 = \|f\|_G^2 \quad (\text{П2.84})$$

(обозначения очевидны).

Снова рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi_v(z) = \lambda_v^2 \int_G \int M(z, \bar{\zeta}) \varphi_v(\zeta) d\tau_{\zeta}, \quad (\text{П2.85})$$

где $M(z, \bar{\zeta})$ — ядро, определенное формулой (П2.79), и исследуем его собственные значения. Умножая это уравнение на $\overline{\varphi_v(z)}$ и интегрируя по области G , получаем на основании формул (П2.79) и (П2.80)

$$\|\varphi_v\|_G^2 = \lambda_v^2 \left\{ \|\varphi_v\|_G^2 - \|T_1 \varphi_v\|_{\tilde{G}}^2 - \int_{G^*} \int |T_2 \varphi_v|^2 d\tau \right\}. \quad (\text{П2.86})$$

Отсюда очевидно, что всегда $\lambda_v^2 \geq 1$, а равенство $\lambda_v^2 = 1$ возможно лишь в случае, когда

$$T_1 \varphi_v \equiv 0 \text{ в } \tilde{G} \text{ и } T_2 \varphi_v \equiv 0 \text{ в } G^*. \quad (\text{П2.87})$$

Легко видеть, что при наших предположениях относительно области \bar{G} не существует таких функций φ_ν , отличных от функции $\varphi \equiv 0$. В самом деле, из тождества $T_2\varphi_\nu \equiv 0$, справедливого в области G^* , и известного скачка функции $T_2\varphi_\nu$ на кривой γ , мы заключаем, что в области G интеграл $T_2\varphi_\nu(z)$ представляет аналитическую функцию с граничными значениями $\varphi_\nu(z)z'^2$. Отсюда, как и в п. 7, мы заключаем, что функция $\varphi_\nu(z)$ представляет собой линейную комбинацию функций $w'_\rho(z)$, скажем,

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{\rho=1}^{k-1} c_\rho w'_\rho(z). \quad (\text{П2.88})$$

С другой стороны, тождество $T_1\varphi_\nu \equiv 0$ дает соотношение

$$\int_G \int \tilde{K}(z, \bar{\zeta}) \varphi_\nu(\zeta) d\tau_\zeta = 0, \quad z \in \bar{G}, \quad (\text{П2.89})$$

умножая которое скалярно на любую функцию, аналитическую в области \bar{G} , мы получаем, что $\varphi_\nu(z)$ должна быть ортогональной ко всем функциям, аналитическим в G . Пусть $\tilde{w}'_\rho(z)$ — производные гармонических мер для области \bar{G} , аналогичные функциям $w'_\rho(z)$. Мы находим

$$\sum_{\rho=1}^{k-1} c_\rho \int_G \int w'_\rho \tilde{w}'_\rho d\tau = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k-1. \quad (\text{П2.90})$$

В соответствии с формулой (П2.8) величины $-i(w'_\rho, \tilde{w}'_\sigma) = \mathfrak{F}_{\rho\sigma}$ представляют собой периоды функций $\tilde{w}_\sigma(z)$ при обходе замкнутых путей, окружающих граничные кривые γ_ρ и эквивалентных путям, окружающим кривые $\tilde{\gamma}_\rho$. Введя эти величины, мы сможем переписать формулу (П2.90) в виде

$$\sum_{\rho=1}^{k-1} c_\rho \mathfrak{F}_{\rho\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k-1. \quad (\text{П2.90}')$$

В § 1 было доказано, что матрица $(\mathfrak{F}_{\rho\sigma})_{1 \dots k-1}$ имеет отличный от нуля определитель. Отсюда следует, что все коэффициенты c_ρ равны нулю и $\varphi_\nu(z) \equiv 0$. Таким образом, мы доказали, что

Все собственные значения интегрального уравнения (П2.85) больше 1.

Рассмотрим теперь неоднородное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} I(z, \bar{\zeta}) &= \tilde{K}(z, \bar{\zeta}) + B(z, \bar{\zeta}) = \\ &= K(z, \bar{\zeta}) - \int_G \int M(z, \bar{w}) K(w, \bar{\zeta}) d\tau_w \end{aligned} \quad (\text{П2.91})$$

с ядром $K(z, \bar{\zeta})$. Функция $I(z, \bar{\zeta})$ известна, если мы предполагаем, что все величины, связанные с областью \tilde{G} , рассматриваются как данные. Так как все собственные значения этого уравнения меньше 1, то его решение можно получить в виде бесконечного ряда. Вводя итерированные ядра

$$I^{(v)}(z, \bar{\zeta}) = \int_G \int I^{(v-1)}(z, \bar{w}) I(w, \bar{\zeta}) d\tau_w, \quad I^{(1)}(z, \bar{\zeta}) = I(z, \bar{\zeta}) \quad (\text{П2.92})$$

и пользуясь методами п. 8, мы получаем разложение ядра [65]:

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} C_{\mu}^{\nu} I^{(\mu+1)}(z, \bar{\zeta}) \right\}. \quad (\text{П2.93})$$

Заметим, что ν -й член этого разложения можно представить в виде

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} C_{\mu}^{\nu} I^{(\mu+1)}(z, \bar{\zeta}) = \int_G \int M^{(\nu)}(z, \bar{w}) I(w, \bar{\zeta}) d\tau_w, \quad (\text{П2.94})$$

где $M^{(\nu)}(z, \bar{\zeta})$ обозначает ν -ю итерацию ядра $M(z, \bar{\zeta})$. Задание величин, связанных с областью \tilde{G} , не позволяет определить функцию $M(z, \bar{\zeta})$, ибо последняя выражается через ядро $K(z, \bar{\zeta})$. Это замечание разъясняет важность разложения (П2.93).

В самом деле, предположим, что граничные кривые $\tilde{\gamma}_p$ и γ_p двух сравниваемых областей \tilde{G} и G представляются параметрически трижды непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуги и что между этими кривыми можно установить соответствие, при котором максимальное расстояние между соответствующими точками не превосходит ε . Мы выражаем это условие, говоря, что система кривых γ лежит в ε -окрестности системы $\tilde{\gamma}$. Легко видеть, что разность $\Delta(z, \zeta) = \tilde{L}(z, \zeta) - L(z, \zeta)$ между соответствующими ядрами является величиной порядка $O(\varepsilon)$ равномерно в области G . Следовательно, предполагая, что область \tilde{G} имеет конечную площадь, т. е. не содержит бесконечно удаленной точки, мы можем заключить из неравенства (П2.78), что ядро $M(z, \bar{\zeta})$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, а его ν -я итерация $M^{(\nu)}(z, \bar{\zeta})$ — порядок $O(\varepsilon^{2\nu})$.

Отсюда видно, что ряд (П2.93) дает разложение ядра K по степеням ε -меры расстояния между граничными кривыми. В частности, непосредственно из (П2.93) получается следующий результат:

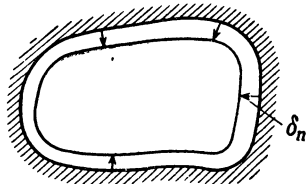
$$K(z, \bar{\zeta}) = I(z, \bar{\zeta}) + O(\varepsilon^2) = \tilde{K}(z, \bar{\zeta}) + \int_G \int \tilde{L}(z, w) \overline{\tilde{L}(\zeta, w)} d\tau_w + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П2.95})$$

Преобразуем формулу (П2.95), приведя ее к виду, обычному в функциональном анализе. Пусть соответствие $\tilde{\gamma} \longleftrightarrow \gamma$ устанавливается так, что точкой кривой $\tilde{\gamma}$, соответствующей некоторой точке кривой γ , служит первая точка пересечения $\tilde{\gamma}$ с внутренней нормалью, проведенной из точки γ . Обозначим расстояние между соответствующими точками через δn (фиг. 8). Вариация δn является на $\tilde{\gamma}$ непрерывной функцией порядка $O(\varepsilon)$. Через нее можно следующим образом записать формулу (П2.95):

$$\delta \tilde{K}(z, \bar{z}) = K(z, \bar{z}) - \tilde{K}(z, \bar{z}) = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{L}(z, w) \overline{\tilde{L}(z, w)} \delta n ds + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П2.96})$$

Формула (П2.96) описывает изменение функционала $\tilde{K}(z, \bar{z})$ при бесконечно малых деформациях границы $\tilde{\gamma}$; из нее можно получить различные заключения относительно этого функционала. Полученная вариационная формула выражает изменение \tilde{K} при смещении на δn бесчисленного множества точек $\tilde{\gamma}$ подобно тому, как дифференциал

$$dF = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$



Фиг. 8. Вариация контура γ .

выражает изменение функции $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$, соответствующее смещениям dx_i ее N независимых переменных. Из формулы (П2.96) можно получить аналогичные вариационные формулы для функций \tilde{L} , \tilde{g} , \tilde{w} и т. п.; мы вернемся к этому вопросу в § 3.

10. Одна экстремальная задача теории конформных отображений. Рассмотрим класс $\mathfrak{S}(z_0)$ всех функций $f(z)$, однолистных в области и правильных там всюду, кроме точки $z = z_0$, где они имеют полюс с вычетом, равным 1. Эти функции отображают G на область, содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную k континуумами, соответствующими граничным кривым γ_ρ . Пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $G + \gamma$ всюду, кроме точки $z = z_0$. Тогда выражение

$$A(f) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f d\bar{f} \quad (\text{П2.97})$$

будет давать площадь дополнения к образу области G ; по своей природе оно неотрицательно. Возникает вопрос об отыскании верхней грани выражения $A(f)$ в классе $\mathfrak{S}(z_0)$.

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что функция $\Phi(z, z_0)$, определенная формулами (П1.31) и (П1.36) и изученная в п. 2 § 1,

принадлежит к классу $\mathfrak{S}(z_0)$. Она имеет следующую простую связь с ядром L [ср. (П1.38) и (П1.59)]:

$$\Phi'(z, z_0) = -\pi L(z, z_0) + \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} \Pi_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \omega'_\sigma(z_0). \quad (\text{П2.98})$$

Из этого факта, а также формулы интегрирования по частям (П2.4) и формул (П2.8) и (П2.10) мы заключаем, что для любой функции $\varphi(z)$, непрерывно дифференцируемой в области $G + \gamma$, имеет место соотношение

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \Phi(z, z_0) \overline{d\varphi(z)} = -[\Phi'(z, z_0), \overline{\varphi'(z)}] = 0. \quad (\text{П2.99})$$

Но любую функцию из класса $\mathfrak{S}(z_0)$ можно записать в виде

$$f(z) = \Phi(z, z_0) + \varphi(z), \quad (\text{П2.100})$$

где функция $\varphi(z)$ правильна в области G . Таким образом, мы приходим к формуле

$$A(f) = A(\Phi) + \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \varphi \overline{d\varphi} = A(\Phi) - \|\varphi'\|^2, \quad (\text{П2.101})$$

которая доказывает следующее утверждение [20, 26, 59]:

Функция $\Phi(z, z_0)$ осуществляет отображение области G на область, дополнение к которой имеет наибольшую возможную площадь среди всех таких площадей для функций, однолистных в G и имеющих в точке z_0 полюс с вычетом, равным 1.

11. Отображение на круговые области. Пусть область ограничена системой кривых γ , представленных параметрически трижды непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуг. Из формулы (П2.27) и свойства симметрии ядер (П2.13) мы получаем для $z \in \gamma$, $\zeta \in \gamma$ соотношение

$$L(z, \zeta) z' \zeta' = -\overline{K(z, \bar{\zeta}) \zeta' \bar{z}'} = -K(\zeta, \bar{z}) \zeta' \bar{z}' = \overline{L(z, \zeta) z' \zeta'}, \quad (\text{П2.102})$$

которое показывает, что функция $L(z, \zeta) z' \zeta'$ принимает действительные значения, если обе точки z и ζ лежат на γ . Из формулы (П2.10) мы можем, следовательно, заключить, что

$$\text{Im} \frac{1}{\pi} \frac{z' \zeta'}{(z - \zeta)^2} = \text{Im} \{l(z, \zeta) z' \zeta'\}, \quad z, \zeta \in \gamma. \quad (\text{П2.103})$$

Положим теперь $\zeta = z(s + \Delta s)$, $z = z(s)$ и устремим Δs к 0. При этом правая часть формулы (П2.103) остается непрерывной в силу непрерывности функции l ; предел левой части легко подсчитывается повторным применением теоремы о среднем. Мы получаем соотношение

$$\text{Im} \{l(z, z) z'^2\} = \frac{1}{6\pi} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho(s)} \right), \quad (\text{П2.104})$$

в котором $\rho(s)$ обозначает радиус кривизны кривой γ , заданный в зависимости от длины дуги s .

Если, в частности, G ограничена окружностями и является областью типа, рассмотренного в § 2 гл. V, мы получим, что функция $l(z, z)z'^2$ принимает на γ действительные значения. Аналитические в области G функции $g(z)$, для которых величина $z'^2g(z)$ принимает на γ действительные значения, играют важную роль в теории конформных отображений; они называются квадратичными дифференциалами относительно рассматриваемой области. Очевидно, что любой правильный в области G квадратичный дифференциал можно представить в виде

$$g(z) = \sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} \lambda_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \omega'_\sigma(z), \quad (\text{П2.105})$$

где коэффициенты $\lambda_{\rho\sigma}$ — действительные числа. Отсюда мы получаем, что для круговой области

$$l(z, z) = \sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} \lambda_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \omega'_\sigma(z). \quad (\text{П2.106})$$

Теперь любую область G можно отобразить с помощью однолистной функции $z^* = f(z)$ на круговую область G^* . В соответствии с формулами (П2.45) и (П2.47) мы получаем соотношение

$$l^*(z^*, z^*) f'(z)^2 = \frac{1}{6\pi} \{f, z\} + l(z, z). \quad (\text{П2.107})$$

Пользуясь формулой (П2.106), которая справедлива в области G^* , и соотношением $\omega_\nu(z) = \omega_\nu^*(f(z))$, вытекающим из того, что $\omega'_\nu(z) = \omega'_\nu^*(z^*) f'(z)$, мы получаем в области G дифференциальное уравнение для функции $f(z)$, осуществляющей отображение G на круговую область:

$$\frac{1}{6\pi} \{f, z\} + l(z, z) = \sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} \lambda_{\rho\sigma} \omega'_\rho(z) \omega'_\sigma(z). \quad (\text{П2.108})$$

Постоянные $\lambda_{\rho\sigma}$ в этом уравнении неизвестны, и их нужно подобрать так, чтобы функция $f(z)$ была однозначной в области G . Функции l и ω'_ρ известны, если известна функция Грина области G . Мы установили, следовательно, простую связь между функцией Грина и конформным отображением на круговые области.

12. Ортонормальные системы. Предположим, что в области G известна система аналитических функций $\{u_\nu(z)\}$ такая, что

$$(u_\nu, \bar{u}_\mu) = \int \int_G u_\nu(z) \overline{u_\mu(z)} d\tau_z = \begin{cases} 0 & \text{для } \nu \neq \mu, \\ 1 & \text{для } \nu = \mu, \end{cases} \quad (\text{П2.109})$$

и что любую функцию $f(z)$ с конечной нормой $\|f\|$ можно представить разложением

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} u_{\nu}(z), \quad (\text{П2.110})$$

равномерно сходящимся в любой замкнутой подобласти G . Коэффициенты α_{ν} разложения по такой ортонормальной системе определяются по формулам Фурье

$$\alpha_{\nu} = (f, \bar{u}_{\nu}) = \iint_G f(z) \overline{u_{\nu}(z)} d\tau_z. \quad (\text{П2.111})$$

В частности, такое разложение можно записать и для ядра $K(z, \bar{\zeta})$, причем с помощью воспроизводящего свойства этого ядра легко вычислить его коэффициенты Фурье. Мы получим разложение

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}(z) \overline{u_{\nu}(\zeta)}, \quad (\text{П2.112})$$

выражающее замечательную связь ядра K с полными ортонормальными системами в области G . Оно дает возможность вычислить ядро K , ибо построение в области полной ортонормальной системы можно провести хорошо известными приемами. Ядро $K(z, \bar{\zeta})$ было впервые введено Бергманом и Бохнером [10, 11, 13, 17] именно в связи с этим разложением, которое они рассматривали как определение ядра. Это определение легко распространить на случай аналитических функций многих комплексных переменных, где ядро K имеет целый ряд важных приложений [12]¹⁾.

Аналогичные разложения основных функций в ортогональные ряды были получены Зарембой в теории дифференциальных уравнений с частными производными [72, 73]. Примерно такой же подход к теории ортогональных многочленов в их связи с конформными отображениями применяет Сеге [68] (ср. также [18]). Абстрактной теорией воспроизводящих ядер занимался Ароншайн [9]²⁾.

§ 3. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

1. Вариационная формула Адамара. В предыдущих параграфах мы рассматривали зависимость функции Грина $g(z, \zeta)$ фиксированной области G от аргументов z и ζ . Однако большой интерес представляет изучение зависимости этой функции от области G или, иными словами, от границы γ . В самом деле, фактическое построение функ-

¹⁾ См. также Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1948. — *Прим. перев.*

²⁾ Важные исследования ядра K и связанных с ним вопросов провели также П. П. Куфарев, И. М. Митрохин и Б. А. Фукс. Литературу см. в сборнике „Математика в СССР за тридцать лет“, М.—Л., 1947. — *Прим. перев.*

ции Грина для произвольной заданной области G весьма сложно, ибо оно требует вычисления суммы бесконечного ряда, составленного из итерированных интегралов. Гораздо удобнее изучить функцию Грина в тех простых случаях, когда она выражается замкнутым образом, и затем посредством непрерывной деформации граничного контура γ распространить результаты на более общие области. Если известно поведение функции Грина при малых деформациях области, то можно делать количественные заключения о ее основных свойствах без фактического ее построения.

Первые исследования такого рода провел Адамар [28, 29], который поступал следующим образом. Пусть G — область, ограниченная k дважды непрерывно дифференцируемыми кривыми γ_ρ . На каждой кривой γ_ρ определим положительную непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(s)$ длины дуги s . Из каждой точки γ проведем внутреннюю нормаль и отложим на ней отрезок длины $\delta n = \varepsilon \varphi(s)$. Если число ε достаточно мало, то концы построенных отрезков нормали образуют систему непрерывно дифференцируемых кривых γ_ρ^* , которые определяют область G^* , целиком лежащую внутри G . Обозначим через $g^*(z, \zeta)$ и $g(z, \zeta)$ функции Грина областей G^* и G .

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(z, \zeta) &= g(z, \zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t} \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \delta n_t ds_t = \\ &= g(z, \zeta) - \varepsilon r(z, \zeta), \end{aligned} \quad (\text{П3.1})$$

которое представляет собой гармоническую функцию, правильную всюду в области G , кроме полюса в точке $z = \zeta$. Для $z \in \gamma$ она принимает граничные значения $-(\partial g(z, \zeta)/\partial n_z) \delta n_z$ [ср. формулу (П1.3)], отрицательные во всех точках границы. Так как $\delta n_z = O(\varepsilon)$, то функция $\mathfrak{S}(z, \zeta)$ должна принимать на контуре γ весьма малые значения и геометрическое место точек $\mathfrak{S}(z, \zeta) = 0$ должно лежать весьма близко от этого контура. Пусть z^* — точка γ^* , соответствующая точке z контура γ , она лежит на нормали к γ в точке z на расстоянии δn_z от этой точки. Следовательно, по формуле Тейлора можно написать

$$g(z^*, \zeta) - g(z, \zeta) = g(z^*, \zeta) = \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда для каждой точки ζ области G получим

$$\mathfrak{S}(z^*, \zeta) = \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \delta n_z - \varepsilon r(z, \zeta) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2) \quad (\text{П3.2})$$

[заметим, что на γ имеем $\varepsilon r(z, \zeta) = (\partial g(z, \zeta)/\partial n_z) \delta n_z$], где член $O(\varepsilon^2)$ можно оценить равномерно относительно ζ в любой замкнутой подобласти G .

Функция $g^*(z, \zeta) - \mathfrak{S}(z, \zeta)$ — правильная гармоническая в области G^* , ибо логарифмические полюсы сокращаются при вычитании;

на γ : она принимает значения порядка $O(\varepsilon^2)$, ибо функция $g^*(z, \zeta)$ обращается там в нуль. Следовательно, пользуясь принципом максимума для нашей разности, рассматриваемой в зависимости от z , мы получаем формулу

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t} \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \delta n_t ds_t + O(\varepsilon^2), \quad (\text{ПЗ.3})$$

в которой остаточный член $O(\varepsilon^2)$ допускает равномерную оценку для $z \in G^*$ и ζ , лежащей в фиксированной замкнутой подобласти G .

Пользуясь обозначениями функционального анализа, можно переписать соотношение (ПЗ.3) в следующем виде [29, 32, 36]:

$$\delta g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t} \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \delta n_t ds_t, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где $\delta g(z, \zeta)$ выражает в области G^* разность двух функций Грина с точностью до гармонической функции двух переменных, которая допускает оценку $O(\varepsilon^2)$, равномерную в любой замкнутой подобласти G^* .

Приведем одно следствие формулы (ПЗ.4). Так как функция $g(z, \zeta)$ равна 0 для $z \in \gamma$ и положительна в области G , то ясно, что $\partial g(z, \zeta) / \partial n_z \geq 0$ для $z \in \gamma$. Отсюда видно, что функция Грина убывает при сжатии области, т. е. когда вариация δn больше 0 всюду на γ . Это непосредственно следует из принципа максимума, ибо разность $g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta)$ меньше 0 на γ^* ; формула (ПЗ.4) позволяет оценить скорость убывания в зависимости от δn .

Правая часть формулы (ПЗ.4) имеет смысл и в том случае, когда точки z и ζ совпадают. Это станет очевидным, если заметить, что обе функции Грина имеют одинаковые особенности, так что $\delta g(z, \zeta) = = \delta h(z, \zeta)$, где $h(z, \zeta)$ — правильная часть функции Грина, определяемая формулой (П1.2). Пользуясь сделанным замечанием, мы выводим из (ПЗ.4) формулу

$$\begin{aligned} & \delta \{h(z, z) + h(\zeta, \zeta) - 2h(z, \zeta)\} = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t} - \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \right)^2 \delta n_t ds_t, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.5})$$

из которой видно, что

Функция $h(z, z) + h(\zeta, \zeta) - 2h(z, \zeta)$ убывает при сжатии области и возрастает при ее расширении.

Полученный результат не является очевидным и представляет собой первое важное следствие из вариационной формулы. Для круга радиуса R мы имеем

$$h(z, \zeta) = \ln \frac{|R^2 - z\bar{\zeta}|}{R}. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Заклучим теперь произвольную область G в достаточно большой круг радиуса R ; пользуясь доказанным свойством монотонности, мы получаем неравенство

$$h(z, z) + h(\zeta, \zeta) - 2h(z, \zeta) \leq \ln \frac{(R^2 - |z|^2)(R^2 - |\zeta|^2)}{|R^2 - z\bar{\zeta}|^2}. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$, будем иметь

$$2h(z, \zeta) \geq h(z, z) + h(\zeta, \zeta). \quad (\text{ПЗ.8})$$

Этот пример показывает, что из дифференциальной вариационной формулы (ПЗ.4) можно получать и конечные неравенства.

Далее, мы хотим распространить формулу Адамара (ПЗ.4) на случай, когда ни одна из двух сравниваемых областей G и G^* не лежит целиком внутри другой и граничные кривые могут пересекаться, так что вариация δn может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для этой цели мы рассмотрим третью область G_0 , которая содержит обе области G и G^* и расстояния по нормали от точек границы γ_0 которой до точек γ и γ^* представляют собой величины порядка $O(\varepsilon)$. Пусть эти расстояния будут соответственно δn_0 и δn_0^* . Всегда можно установить соответствие между областями G_0 и G таким образом, чтобы углы между нормальными к γ_0 и γ в соответствующих точках были величинами порядка $O(\varepsilon)$; тогда можно утверждать, что $\delta n = \delta n_0^* - \delta n_0 + O(\varepsilon^2)$. Теперь мы применим формулу Адамара один раз к областям G_0 и G и другой — к областям G_0 и G^* . Взяв разность полученных результатов, будем иметь

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} \frac{\partial g_0(t_0, \zeta)}{\partial n_t} \frac{\partial g_0(t_0, z)}{\partial n_t} \delta n_t ds_t + O(\varepsilon^2), \quad (\text{ПЗ.9})$$

причем оценка остатка равномерна в любой замкнутой подобласти G . Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ система кривых γ_0 стремится к γ так, что нормали стремятся друг к другу, то мы можем утверждать, что

$$\frac{\partial g_0(t_0, z)}{\partial n_t} \rightarrow \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t}$$

равномерно относительно z в любой замкнутой подобласти G . Отсюда видно, что вариационная формула Адамара (ПЗ.4) остается справедливой в рассматриваемом общем случае.

Из формулы (ПЗ.3) легко получить вариационную формулу для гармонических мер $\omega_p(\zeta)$. В самом деле, пусть γ'_p — кривая, лежащая внутри обеих областей G и G^* и гомотопная γ_p и γ_p^* . В силу

формул (П1.6) и (П3.3) мы имеем

$$\begin{aligned} \omega_p^*(\zeta) - \omega_p(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma'_p} \left(\frac{\partial g^*(z, \zeta)}{\partial n_z} - \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \right) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial \omega_p(t)}{\partial n_t} \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \delta n_t ds_t + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{П3.10})$$

где величина $O(\varepsilon^2)$ оценивается равномерно для всех точек ζ в фиксированной замкнутой подобласти G . Пользуясь определением (П1.8) емкостных коэффициентов $P_{\rho\sigma}$ и интегрируя по кривой γ'_σ , лежащей в области G и гомотопной γ_σ и γ_σ^* , мы получаем

$$P_{\rho\sigma}^* - P_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\sigma} \left(\frac{\partial \omega_\rho^*}{\partial n} - \frac{\partial \omega_\rho}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial \omega_\rho}{\partial n} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial n} \delta n ds + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П3.11})$$

Формулы (П3.10) и (П3.11) позволяют подсчитать вариации всех комбинаций функций g , ω_σ и т. д., которые рассматривались в § 1¹⁾.

Приведем следующее приложение формулы (П3.11). Пусть x_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, k-1$ — произвольная совокупность действительных чисел. Рассмотрим вариацию неотрицательной квадратичной формы $\sum P_{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma$. В силу (П3.11) получаем соотношение

$$\delta \left(\sum_{\rho, \sigma=1}^{k-1} P_{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\sum_{\rho=1}^{k-1} x_\rho \frac{\partial \omega_\rho}{\partial n} \right)^2 \delta n ds, \quad (\text{П3.12})$$

из которого следует

Теорема. Квадратичная форма $\sum P_{\rho\sigma} x_\rho x_\sigma$ монотонно возрастает при сжатии области, т. е. при $\delta n > 0$.

Полученный результат позволяет оценить эту форму с помощью таких же форм для надлежащим образом выбранных областей сравнения, функции Грина которых известны.

Формулу Адамара можно переписать в следующем виде. Рассмотрим функцию $p(t, z)$, аналитическую относительно t и имеющую $g(t, z)$ своей действительной частью. Если точка t изменяется вдоль γ , то, очевидно, имеет место соотношение $p(t, z) = ip(t, z)$, где ρ — действительная функция. Дифференцируя это соотношение по длине дуги

¹⁾ М. А. Лаврентьев получил аналогичные, но значительно более интересные с точки зрения приложений формулы для вариации конформных отображений при переходе от данной области к близким. С этими формулами можно ознакомиться по книгам: Лаврентьев М. А., Конформные отображения, М.—Л., 1946, или Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951. — Прим. перев.

на γ , мы получаем

$$p'(t, z)t' = i \frac{\partial p}{\partial s}, \quad p'(t, z) = \frac{\partial p(t, z)}{\partial t}. \quad (\text{ПЗ.13})$$

Условия Коши — Римана дают соотношение $\partial g / \partial n = -\partial p / \partial s$ между действительной и мнимой частями функции $p(t, z)$. Основываясь на нем, в формуле (ПЗ.4) можно заменить $\partial / \partial n g(t, z)$ на $ip'(t, z)t'$ или на $\overline{ip'(t, z)t'}$. Мы получим тогда, учтя, что $|t'|^2 = 1$,

$$\begin{aligned} \delta g(z, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \overline{p'(t, z)} p'(t, \zeta) \delta n_t ds_t = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} p'(t, z) \overline{p'(t, \zeta)} \delta n_t ds_t. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.14})$$

Вариационное уравнение (ПЗ.14) можно дифференцировать по любому из переменных. Для доказательства заметим, что если гармоническая функция является малой величиной порядка $O(\varepsilon^2)$ равномерно в заданной области, то ее производные являются малыми того же порядка в любой замкнутой подобласти. Пользуясь, кроме того, соотношением

$$p'(t, z) = 2 \frac{\partial}{\partial t} g(t, z),$$

мы выводим из (ПЗ.14) следующие вариационные формулы:

$$\delta K(z, \bar{\zeta}) = \int_{\gamma} K(z, \bar{t}) K(t, \bar{\zeta}) \delta n_t ds_t = \int_{\gamma} L(z, t) \overline{L(t, \zeta)} \delta n_t ds_t, \quad (\text{ПЗ.15})$$

$$\delta L(z, \zeta) = \int_{\gamma} K(z, \bar{t}) L(t, \zeta) \delta n_t ds_t = \int_{\gamma} L(z, t) K(\zeta, \bar{t}) \delta n_t ds_t. \quad (\text{ПЗ.15}')$$

Изящный вид полученных формул снова указывает на важную роль функций K и L — частных производных функции Грина. Вторая из формул (ПЗ.15) совпадает с вариационной формулой (П2.96), полученной другим способом.

Имея для некоторого функционала вариационную формулу, естественно рассматривать для него экстремальные задачи. Вариационная формула позволяет сравнивать значения функционала для близких областей и характеризует экстремальную область тем условием, что любая вариация этой области меняет функционал в одном направлении. Однако, пользуясь вариационной формулой, мы должны быть заранее уверены в том, что она применима к экстремальной области. Чтобы применять, например, формулу Адамара (ПЗ.4), необходимо предполагать, что граница γ области G непрерывно дифференцируема. В противном случае мы не сможем даже записать эту формулу, которая содержит нормальные производные функции Грина на границе области G . Но так как мы не можем утверждать, что искомая экстремальная область имеет такую границу, то формулу Адамара лучше

рассматривать как эвристическое средство для угадывания экстремальных областей, но не для точного их определения. Для последней цели мы должны получить вариационную формулу, применимую к областям возможно более общего вида. Как мы увидим в следующем пункте, такую формулу действительно можно получить.

2. Внутренние вариации. Пусть область G попрежнему ограничена k непрерывно дифференцируемыми кривыми γ_r и z_0 — фиксированная точка этой области. Рассмотрим в этой области функции

$$z^* = z + e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{z - z_0}, \quad 0 < \rho, \quad 0 \leq \varphi < \pi. \quad (\text{ПЗ.16})$$

Они осуществляют отображение внешности окружности $|z - z_0| = \rho$ на полную плоскость, разрезанную вдоль прямолинейного отрезка

$[z_0 - 2\rho e^{i\varphi}, z_0 + 2\rho e^{i\varphi}]$ длины 4ρ с центром в точке z_0 . Если ρ достаточно мало, то окружность $|z - z_0| = \rho$ лежит внутри G . Следовательно, функция $z^*(z)$ однолистка на границе γ этой области и отображает γ на границу γ^* области G^* , которая сколь угодно мало отличается от G (фиг. 9). Вычислим вариацию функции Грина для этой специальной вариации области G .

Обозначим через $g^*(z, \zeta)$ функцию Грина области G^* . Функция

$$d(z, \zeta) = g^*(z^*, \zeta^*) - g(z, \zeta)$$

гармонична в области G вне круга $|z - z_0| \leq \rho$ и обращается в нуль на γ .

Фиг. 9. Внутренняя вариация.

Предположим, что точки ζ и η лежат в области G вне круга $|z - z_0| \leq \rho$, и применим формулу Грина к функциям $d(z, \zeta)$ и $g(z, \eta)$ и области G_ρ , ограниченной системой кривых γ и окружностью $|z - z_0| = \rho$. Так как на γ обе функции $d(z, \zeta)$ и $g(z, \eta)$ обращаются в нуль, мы получим

$$d(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=\rho} \left\{ d(z, \zeta) \frac{\partial g(z, \eta)}{\partial n_z} - g(z, \eta) \frac{\partial d(z, \zeta)}{\partial n_z} \right\} ds_z. \quad (\text{ПЗ.17})$$

Но функция $g(z, \zeta)$ правильна в круге $|z - z_0| < \rho$, следовательно, формулу (ПЗ.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g^*(\eta^*, \zeta^*) - g(\eta, \zeta) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=\rho} \left\{ g^*(z^*, \zeta^*) \frac{\partial g(z, \eta)}{\partial n_z} - g(z, \eta) \frac{\partial g^*(z^*, \zeta^*)}{\partial n_z} \right\} ds_z. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.18})$$

Таким образом, мы представили функцию $d(\eta, \zeta)$ интегралом по малой окружности, лежащей внутри области G . Чтобы оценить этот

интеграл, заметим, что на линии интегрирования

$$|z - z_0| = \rho \quad \text{и} \quad |z^* - z_0| = \left| z - z_0 + e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{z - z_0} \right| = O(\rho).$$

Все члены подинтегрального выражения можно разложить в степенной ряд с центром в точке z_0 . Мы вычислим интеграл лишь от членов первого порядка; допускаемая при этом ошибка зависит лишь от производных функций $g(z, \eta)$ и $g^*(z, \zeta^*)$ вблизи точки z_0 и, следовательно, оценивается равномерно для всех областей G и G^* , которые содержат фиксированную подобласть, содержащую точку z_0 . Вводя аналитическую функцию $p^*(z, \zeta)$ с действительной частью $g^*(z, \zeta)$, мы можем написать

$$g^*(z^*, \zeta^*) = g^*(z_0, \zeta^*) + \\ + \operatorname{Re} \left\{ \left[z - z_0 + e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{z - z_0} \right] p^{*\prime}(z_0, \zeta^*) \right\} + O(\rho^2) \quad (\text{ПЗ.19})$$

и, аналогично,

$$g(z, \eta) = g(z_0, \eta) + \operatorname{Re} \{ (z - z_0) p'(z_0, \eta) \} + O(\rho^2). \quad (\text{ПЗ.19}')$$

Далее, обозначая $z - z_0 = r e^{i\tau}$ и замечая, что на окружности $|z - z_0| = \rho$ имеем $\partial/\partial n = \partial/\partial r$, мы находим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial n_z} g^*(z^*, \zeta^*) = \operatorname{Re} \{ (e^{i\tau} - e^{2i\varphi} e^{-i\tau}) p^{*\prime}(z_0, \zeta^*) \} + O(\rho), \quad (\text{ПЗ.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial n_z} g(z, \eta) = \operatorname{Re} \{ e^{i\tau} p'(z_0, \eta) \} + O(\rho). \quad (\text{ПЗ.20}')$$

Вводя их в формулу (ПЗ.18), после простых вычислений найдем

$$g^*(\eta^*, \zeta^*) - g(\eta, \zeta) = \operatorname{Re} \{ e^{2i\varphi} \rho^2 p^{*\prime}(z_0, \zeta^*) p'(z_0, \eta) \} + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.21})$$

Внутри любой замкнутой подобласти G мы можем воспользоваться тем, что $p^{*\prime}(z_0, \zeta^*) = p'(z_0, \zeta) + O(\rho^2)$; вводя это в формулу (ПЗ.19), получаем тейлоровское разложение

$$g^*(\eta^*, \zeta^*) = g^*(\eta, \zeta) + \\ + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{\eta - z_0} p'(\eta, \zeta) + e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{\zeta - z_0} p'(\zeta, \eta) \right\} + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.22})$$

Отсюда вытекает

Теорема [57, 58, 60]. Если область G посредством вариации (ПЗ.16) преобразуется в область G^* , то соответствующая вариация функции Грина определяется по формуле

$$g^*(\eta, \zeta) - g(\eta, \zeta) = \\ = \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\varphi} \rho^2 \left(p'(z_0, \zeta) p'(z_0, \eta) - \frac{p'(\zeta, \eta)}{\zeta - z_0} - \frac{p'(\eta, \zeta)}{\eta - z_0} \right) \right\} + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.23})$$

Эта формула получена в предположении, что рассматриваемая область G обладает гладкой границей. Заметим, однако, что формула (ПЗ.16)

определяет единственным образом вариацию любой области G , содержащей точку z_0 внутри, причем здесь не используется сдвиг вдоль нормали, требующий гладкости границы. Окончательная формула (ПЗ.23) содержит в правой части члены, также определенные для любой области G , содержащей внутри точки z_0 , ζ и η . Остаточный член $O(\rho^3)$ оценивается равномерно для всех областей, содержащих фиксированную подобласть, для которой z_0 , ζ и η являются внутренними точками.

Из этих замечаний следует, что формула (ПЗ.23) справедлива для произвольных областей G комплексной плоскости. Для таких областей функция Грина определяется как предел функций Грина для сходящихся к ним последовательностей областей G_n с гладкими границами. Если теперь произвести вариацию (ПЗ.16), переводящую область G в область G^* , то области G_n перейдут в области G_n^* с гладкими границами, сходящиеся к области G^* . Так как формула (ПЗ.23) справедлива для всех разностей $g_n^* - g_n$, причем остаточный член $O(\rho^3)$ равномерно ограничен, то она остается справедливой и в пределе для вариации области G в область G^* .

3. Приложение к проблеме коэффициентов однолистных функций. Проиллюстрируем применение вариационной формулы (ПЗ.23) одним важным примером. Рассмотрим семейство \mathcal{U} функций $f(z)$, правильных аналитических и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ и представляемых там разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \quad (\text{ПЗ.24})$$

Известно [38], что n -й коэффициент разложения функции $f \in \mathcal{U}$ удовлетворяет неравенству $|a_n| < en$. Далее, так как семейство \mathcal{U} компактно, то очевидно, что для каждого n существует по меньшей мере одна функция $f_n(z)$, для которой n -й коэффициент имеет наибольший возможный модуль. Известно [39], что функция

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n \quad (\text{ПЗ.25})$$

принадлежит к классу \mathcal{U} и является экстремальной функцией для $n=2$ и 3. Естественно предположить, что эта же функция является экстремальной для любого целого значения n . Мы увидим сейчас, что формула (ПЗ.23) дает частичный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим фиксированное значение n и предположим, что экстремальная функция $w = f(z)$ отображает единичный круг на некоторую область G плоскости w . В силу нормировки (ПЗ.24) область G содержит точку $w = 0$. Пусть $z = \Phi(w)$ — функция, обратная $f(z)$; заметим, что функцию Грина области G можно представить в виде

$$g(w, \omega) = \ln \left| \frac{1 - \overline{\Phi(\omega)} \Phi(w)}{\Phi(w) - \Phi(\omega)} \right|, \quad (\text{ПЗ.26})$$

и, в частности, так как $\Phi(0) = 0$, то

$$g(\omega, 0) = \ln \frac{1}{|\Phi(\omega)|} = \ln \frac{1}{|z|}. \quad (\text{ПЗ.26}')$$

Таким образом, функция Грина области G находится в простой связи с функцией, обратной к экстремальной однолистной функции, и нашу вариационную формулу для $g(\omega, \omega)$ можно использовать для характеристики функции $f(z)$. Посредством вариации

$$\omega^* = \omega + e^{2i\varphi} \frac{\rho^2}{\omega - \omega_0} \quad (\text{ПЗ.16}')$$

преобразуем область G в область G^* плоскости ω . Пользуясь формулой (ПЗ.23), вычисляем функцию Грина $g^*(\omega, 0)$ для новой области; учитывая (ПЗ.26), получаем

$$g^*(\omega, 0) = g(\omega, 0) + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{\Phi'^2(\omega_0)}{\Phi(\omega_0) [\Phi(\omega_0) - \Phi(\omega)]} + \frac{\Phi'^2(\omega_0) \overline{\Phi(\omega)}}{\Phi(\omega_0) [1 - \overline{\Phi(\omega)} \Phi(\omega_0)]} + \frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega) (\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\omega_0 \Phi(\omega)} - \frac{\overline{\Phi(\omega)}}{\omega_0} \right] \right\} + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.27})$$

Пусть теперь $\Phi^*(\omega) = \lambda\omega + b_2\omega^2 + \dots$, $\lambda > 0$ — функция, осуществляющая отображение области G^* на единичный круг. Тогда, очевидно, $g^*(\omega, 0) = -\ln |\Phi^*(\omega)|$ и, следовательно, дополнив обе части равенства (ПЗ.27) до аналитической функции переменного ω будем иметь

$$\ln \Phi^*(\omega) = \ln \Phi(\omega) - e^{2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{\Phi'^2(\omega_0)}{\Phi(\omega_0) [\Phi(\omega_0) - \Phi(\omega)]} + \frac{\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega) (\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\omega_0 \Phi(\omega)} \right] - e^{-2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{\overline{\Phi'^2(\omega_0)} \Phi(\omega)}{\Phi(\omega_0) [1 - \overline{\Phi(\omega_0)} \Phi(\omega)]} - \frac{\Phi(\omega)}{\omega_0} \right] + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.28})$$

Освобождаясь здесь от логарифмов и подставляя $\Phi(\omega) = z$, $\Phi(\omega_0) = z_0$, $\omega = f(z)$, $\omega_0 = f(z_0)$ и $\Phi'(\omega) = 1/f'(z)$, находим

$$\Phi^*(\omega) = z - e^{2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{z}{z_0 f'^2(z_0) (z_0 - z)} + \frac{1}{[f(z) - f(z_0)] f'(z)} + \frac{1}{f(z_0)} \right] - e^{-2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{z^2}{z_0 f'^2(z_0) (1 - \overline{z_0} z)} - \frac{z^2}{f(z_0)} \right] + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.29})$$

Пусть, далее, функция $f^*(z) = z/\lambda + \dots$ отображает единичный круг на область G^* . Из соотношения $f^*[\Phi^*(\omega)] = \omega = f(z)$ мы выводим

$$f(z) = f^*(z) - e^{2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{z f'(z)}{z_0 f'^2(z_0) (z_0 - z)} + \frac{1}{f(z) - f(z_0)} + \frac{f'(z)}{f(z_0)} \right] - e^{-2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{z^2 f'(z)}{z_0 f'^2(z_0) (1 - \overline{z_0} z)} - \frac{z^2 f'(z)}{f(z_0)} \right] + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.30})$$

Таким образом, мы получаем новую однолиственную функцию $f^*(z)$, сколь угодно близкую к экстремальной функции $f(z)$. Чтобы найти разложение $f^*(z)$ в степенной ряд с центром в начале, мы вводим последовательность многочленов $S_n(t)$, определяемых из соотношения

$$\frac{f^2(z)}{1 - tf(z)} = \sum_{n=2}^{\infty} S_n(t) z^n. \quad (\text{ПЗ.31})$$

Коэффициенты многочленов $S_n(t)$ выражаются с помощью простых рациональных дробей через первые коэффициенты функции $f(z)$.

Теперь мы найдем из формулы (ПЗ.30) n -й коэффициент a_n^* функции $f^*(z)$ и после простых преобразований получим

$$\frac{a_n^*}{a_1^*} = a_n + e^{2i\varphi\rho^2} A_n(z_0) + e^{-2i\varphi\rho^2} \overline{B_n(z_0)} + O(\rho^3), \quad (\text{ПЗ.32})$$

где

$$\begin{aligned} A_n(z_0) = & \frac{(n+1)a_{n+1} - 2a_2 a_n}{f(z_0)} - \frac{1}{f^2(z_0)} S_n\left(\frac{1}{f(z_0)}\right) + \\ & + \frac{1}{z_0^2 f'^2(z_0)} \left[(n-1)a_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{z_0} + \frac{(n-2)a_{n-2}}{z_0^2} + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{2a_2}{z_0^{n-2}} + \frac{1}{z_0^{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.33})$$

и

$$\begin{aligned} B_n(z_0) = & \frac{1}{z_0 f'^2(z_0)} [(n-1)\bar{a}_{n-1} + (n-2)\bar{a}_{n-2} z_0 + \\ & + (n-3)\bar{a}_{n-3} z_0^2 + \dots + z_0^{n-2}] - \frac{(n-1)\bar{a}_{n-1}}{f(z_0)}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.33}')$$

Далее, очевидно, что функция $f^*(z)(1/a_1^*)$ также принадлежит к классу \mathbb{U} , и, следовательно, мы имеем

$$\left| \frac{a_n^*}{a_1^*} \right| \leq |a_n|$$

при любом выборе значений ω_0 , φ и ρ . Так как функция $e^{i\varphi} f(e^{-i\varphi} z)$ принадлежит к классу \mathbb{U} вместе с $f(z)$, то, не нарушая общности, можно принять, что $a_n > 0$. Таким образом, мы получаем вариационное условие для функции $f(z)$

$$\operatorname{Re} \{ e^{2i\varphi\rho^2} A_n(z_0) + e^{-2i\varphi\rho^2} \overline{B_n(z_0)} + O(\rho^3) \} \leq 0. \quad (\text{ПЗ.34})$$

Деля на ρ^2 и устремляя ρ к нулю, получаем

$$\operatorname{Re} \{ e^{2i\varphi} [A_n(z_0) + B_n(z_0)] \} \leq 0 \quad (\text{ПЗ.35})$$

(мы воспользовались тем, что $\operatorname{Re} \bar{U} = \operatorname{Re} U$) и, так как множитель $e^{2i\varphi}$ остается произвольным, приходим к следующему необходимому вариационному условию:

$$A_n(z_0) + B_n(z_0) \equiv 0 \quad \text{для } |z_0| < 1. \quad (\text{ПЗ.36})$$

Подставив в него выражения (ПЗ.33) и (ПЗ.33'), получим дифференциальное уравнение для функции $f(z)$

$$\begin{aligned} & \frac{z^2 f'^2(z)}{f^2(z)} S_n \left(\frac{1}{f(z)} \right) - \frac{(n+1)a_{n+1} - 2a_2 a_n - (n-1)\bar{a}_{n-1}}{f(z)} z^2 f'^2(z) = \\ & = \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{2a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{z} + (n-1)a_n + (n-1)a_{n-1}z + \dots + z^{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.37})$$

Этот результат можно значительно упростить с помощью следующего замечания. Подвергнув экстремальную область G простой вариации $\omega^* = \omega + e^{2i\varphi} \rho^2$, которая осуществляет конформное отображение, мы получим вместо (ПЗ.27) тождество

$$g^*(\omega, 0) = g(\omega, 0) + \operatorname{Re} \left\{ e^{2i\varphi} \rho^2 \left[\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)} - \frac{1}{\varphi(\omega) + \overline{\varphi(\omega)}} \right] \right\} + O(\rho^3), \quad (\text{ПЗ.38})$$

которое следует из конформной инвариантности функции Грина: $g^*(\omega^*, \omega^*) = g(\omega, \omega)$. Рассуждая для этого нового типа вариаций точно так же, как и раньше, мы приходим к следующему вариационному условию [40]

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_2 a_n + (n-1)\bar{a}_{n-1}. \quad (\text{ПЗ.39})$$

Учитывая это условие, мы переписываем дифференциальное уравнение для экстремальной функции в окончательном виде [49, 54, 58]:

$$\begin{aligned} & \frac{z^2 f'^2(z)}{f^2(z)} S_n \left[\frac{1}{f(z)} \right] = \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{2a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{z} + \\ & + (n-1)a_n + (n-1)\bar{a}_{n-1}z + \dots + z^{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.40})$$

Правая часть уравнения (ПЗ.40) является рациональной функцией z , которая на окружности $|z|=1$ принимает действительные значения. Мы видим, что функция $f(z)$ остается аналитической всюду на окружности $|z|=1$, кроме тех точек, где она принимает значения, являющиеся корнями уравнения $S_n(1/f) = 0$. Пусть $\omega(t) = f(e^{it})$ — параметрическое представление границы экстремальной области. Тогда вектор $\omega'(t) = i e^{it} f'(e^{it})$ является касательным к кривой $\omega(t)$. Из уравнения (ПЗ.40) находим дифференциальное уравнение границы экстремальной области

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} S_n \left(\frac{1}{\omega} \right) = C, \quad (\text{ПЗ.41})$$

где C — действительная постоянная. При надлежащем выборе параметра последнее уравнение принимает более удобную форму

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} S_n \left(\frac{1}{\omega} \right) \pm 1 = 0. \quad (\text{ПЗ.41}')$$

Таким образом, граница экстремальной области G состоит из конечного числа аналитических дуг. Можно было бы продолжить исследование экстремальной области методом Адамара [например, доказать, что в формуле (П3.41') всегда стоит знак плюс]; такое исследование см. в [54, 55, 56].

Легко проверить, что для $n \geq 2$ функция (П.3.25) удовлетворяет дифференциальному уравнению (П3.40). Для $n=2$ можно доказать, что она является единственным его решением из класса \mathcal{U} ; отсюда будет следовать неравенство $|a_2| \leq 2$. В случае $n=3$ доказано [49], что $|a_3| \leq 3$ для любого решения уравнения (П3.40), следовательно, это неравенство имеет место для всех функций (П3.24) и функция (П3.25) также является экстремальной. Для $n > 3$ соответствующее доказательство еще не найдено и вопрос о максимуме модуля коэффициента $|a_n|$ при $n > 3$ остается открытым¹⁾.

Мы видим, что метод внутренних вариаций приводит к дифференциальным уравнениям, дающим необходимые условия для экстремальной функции. Доказательство того, что необходимое условие определяет экстремальную функцию единственным образом и выяснение достаточных условий экстремума, конечно, вообще нельзя получить вариационным методом, который всего-навсего заключается в сравнении величин для близких функций рассматриваемого класса. Однако знание необходимых условий экстремума сводит исследование совокупности возможных экстремальных функций к исследованию более узких совокупностей, так что доказательство достаточности во многих случаях проводится более просто. Дальнейшие приложения метода внутренних вариаций см. в [2—4, 20, 48, 50—53, 64]. Первый вариационный подход к решению проблемы коэффициентов однолистных функций в единичном круге был указан Лёвнером [39]. Вариационный метод Лёвнера тесно связан с методами, излагаемыми в последних двух пунктах [48, 64].

4. Граничные вариации. Существует другой вариационный метод решения экстремальных задач теории конформных отображений, в частности, применимый и к многосвязным областям. Мы проиллюстрируем его на примере следующей задачи теории однолистных функций. Рассмотрим фиксированную область G плоскости z , содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть \mathfrak{B} — класс всех однолистных в области G функций, разложение которых в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

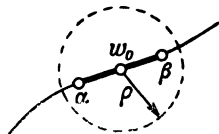
$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (\text{П3.42})$$

¹⁾ Г. М. Голузин доказал, что для всех n имеют место неравенства $|a_n| < (3/4)en$ [О коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., 22 (1948)], И. Е. Базилиевич [Матем. сб., 28 (1951)] уточнил этот результат. Список других работ советских авторов по решению проблемы коэффициентов см. в книге Г. М. Голузина, цитированной на стр. 242. — *Прим. перев.*

Попрежнему очевидно, что коэффициенты a_n всех функций $f(z) \in \mathfrak{B}$ ограничены для фиксированного значения n , и возникает вопрос об отыскании максимума $|a_n|$.

Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет отображение G на область Δ плоскости w с границей Γ . Пусть $w_0 \in \Gamma$ и α, β — две точки одной компоненты Γ , расстояние которых от точки w_0 не превосходит ρ (фиг. 10). Легко построить функцию, однолиственную в области Δ :

$$\Phi(w) = (\beta - \alpha) \left[\ln \frac{w - \alpha}{w - \beta} \right]^{-1}. \quad (\text{ПЗ.43})$$



Вне круга $|w - w_0| > \rho$ эта функция представляется разложением

Фиг. 10. Граничная вариация.

$$\Phi(w) = w - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{12(w - w_0)} + O(\rho^3), \quad (\text{ПЗ.44})$$

остаточный член которого оценивается равномерно в любой замкнутой подобласти $|w - w_0| > \rho$.

В силу очевидного замечания о том, что однолиственная функция от однолистной функции снова является однолистной, мы получаем еще одну функцию класса \mathfrak{B}

$$f^*(z) = \Phi[f(z)] = f(z) - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{12(f(z) - w_0)} + O(\rho^3). \quad (\text{ПЗ.45})$$

Ее n -й коэффициент a_n^* можно представить в виде

$$a_n^* = a_n - \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} T_n(w_0) + O(\rho^3), \quad (\text{ПЗ.46})$$

где многочлены $T_n(w)$ определяются с помощью производящей функции

$$\frac{1}{f(z) - w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(w)}{z^n} \quad (\text{ПЗ.47})$$

и имеют коэффициенты, рационально выражающиеся через коэффициенты $f(z)$.

Предположим теперь, что $f(z)$ — однолиственная функция класса \mathfrak{B} , доставляющая максимум величины $\text{Re}(e^{i\mu} a_n)$. Так как наша основная область G не обязательно симметрична, то каждое значение μ дает особую экстремальную задачу. Тогда для каждой точки $w_0 \in \Gamma$ мы необходимо получаем неравенство

$$\text{Re} \{ e^{i\mu} (\alpha - \beta)^2 T_n(w_0) \} + O(\rho^3) \geq 0, \quad (\text{ПЗ.48})$$

которое после деления на ρ^2 принимает вид

$$\text{Re} \left\{ e^{i\mu} \left(\frac{\alpha - \beta}{\rho} \right)^2 T_n(w_0) \right\} + O(\rho) \geq 0, \quad (\text{ПЗ.48'})$$

Отсюда следует, что отрезок границы Γ вблизи точки w_0 можно приблизить прямолинейным отрезком, проходящим через эту точку в направлении $e^{i\tau}$, так чтобы было справедливым неравенство

$$\operatorname{Re} \{ e^{i(2\tau+\mu)} T_n(w_0) \} \geq 0. \quad (\text{ПЗ.49})$$

Мы видим, что континуум Γ не может иметь внутренних точек; если Γ имеет в точке w_0 касательную, то касательная должна иметь направление $e^{i\tau}$. Уточняя наши рассуждения, можно доказать, что из экстремального свойства функции $f(z)$ вытекает существование касательной к Γ в любой точке w_0 , где $T_n(w_0) \neq 0$. Мы опускаем это довольно длинное доказательство, формулируя результат [55] в виде следующей леммы:

Лемма. Пусть Γ_1 — некоторый континуум плоскости w , и на нем существует аналитическая функция $s(w) \neq 0$, такая, что для любой однолистной функции $\Phi(w)$, представляемой в виде

$$\Phi(w) = w + A_0 + \frac{A_1 \rho^2}{w - w_0} + O(\rho^3) \quad (\text{ПЗ.50})$$

равномерно в произвольной замкнутой подобласти $|w - w_0| > \rho$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \{ A_1 \rho^2 s(w_0) \} + O(\rho^3) \geq 0. \quad (\text{ПЗ.51})$$

Тогда Γ_1 является аналитической кривой и представляется параметрически посредством функции $w = w(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$w'^2(t) s[w(t)] + 1 = 0, \quad w'(t) = \frac{dw}{dt}. \quad (\text{ПЗ.52})$$

Так как в наших предыдущих рассмотрениях любая функция (ПЗ.50) удовлетворяет условию (ПЗ.51), в котором $s(w_0) = -e^{i\mu} T_n(w_0)$, то эта лемма, в частности, позволяет утверждать, что экстремальная область Δ ограничена аналитическими кривыми, удовлетворяющими дифференциальному уравнению

$$w'^2(t) T_n(w) - e^{-i\mu} = 0. \quad (\text{ПЗ.53})$$

Применим этот результат к частному случаю $n = 1$. В этом случае мы просто находим многочлен $T_1(w) \equiv 1$ и получаем дифференциальное уравнение для всех граничных кривых экстремальной области.

$$w'^2(t) = e^{-i\mu},$$

откуда

$$w(t) = e^{-i\mu/2} t + \text{const}. \quad (\text{ПЗ.53}')$$

Таким образом, экстремальная область ограничена отрезками, параллельными вектору $e^{-i\mu/2}$.

Так как существование экстремальной области обеспечено компактностью семейства \mathfrak{B} , то для таких областей наше необходимое условие дает доказательство существования конформных отображений на эти области. Очевидно, что любая экстремальная задача теории конформных отображений, которую можно свести к предыдущей лемме и для которой существование экстремума следует из компактности семейства \mathfrak{B} , приводит к теореме существования отображения на области, ограниченные аналитическими разрезами, удовлетворяющими дифференциальному уравнению (П3.52).

Возможность отображения многосвязных областей на области, ограниченные параллельными разрезами, доказана на основании минимальных задач Посселем [45, 46] и Гретшем [25]. Заметим, что аналогичным вариационным методом можно обосновать более прямое доказательство теоремы существования Римана для односвязных областей. Этот метод приводит к каноническим отображениям при рассмотрении экстремальных задач для семейства функций, однолистных в области G . Он отличается от метода, основанного на принципе Дирихле, тем, что в последнем доказательство существования получается минимизированием некоторого выражения в более широком классе функций, заданных в области G .

Рассмотрим теперь следующую задачу Гретша [23]. Пусть дана область G , содержащая бесконечно удаленную точку и ограниченная k континуумами γ_ρ . Каждая функция $f(z)$ класса \mathfrak{B} отображает G на некоторую область G^+ плоскости w , ограниченную континуумами γ_ρ^+ . Обозначим через $d(\gamma_\rho)$ максимальное расстояние между двумя точками γ_ρ , т. е. диаметр этого континуума, и будем искать максимум $d(\gamma_1^+)$ для всех отображений (П3.42).

Легко видеть, что существует экстремальное отображение, для которого величина $d(\gamma_1^+)$ действительно достигает максимума; пусть a и b будет пара точек γ_1^+ , расстояние между которыми равно этому максимуму: $|a - b| = d(\gamma_1^+)$. Всегда можно найти функцию $\Phi(w)$ вида (П3.50) (где точка $w_0 \in \gamma_1^+$), которая однолистка в области G^+ , так что отображение $\Phi[f(z)]$ также принадлежит к классу \mathfrak{B} . Точки a и b при этом отображении переходят в точки

$$\begin{aligned} a_1 &= a + A_0 + \frac{A_1 \rho^2}{a - w_0} + O(\rho^3), \\ b_1 &= b + A_0 + \frac{A_1 \rho^2}{b - w_0} + O(\rho^3). \end{aligned} \quad (\text{П3.54})$$

Но из рассматриваемого экстремального свойства G^+ мы, очевидно, имеем

$$|a_1 - b_1| = |a - b| \cdot \left| 1 - \frac{A_1 \rho^2}{(a - w_0)(b - w_0)} + O(\rho^3) \right| \leq |a - b|. \quad (\text{П3.55})$$

Таким образом, из условия

$$\operatorname{Re} \frac{A_1 \rho^2}{(a - w_0)(b - w_0)} + O(\rho^8) \geq 0 \quad (\text{ПЗ.55}')$$

на основании нашей леммы можно заключить, что граничные кривые γ_ρ^+ являются аналитическими и удовлетворяют дифференциальному уравнению

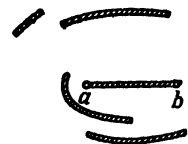
$$\frac{w'^2}{(a - w)(b - w)} + 1 = 0. \quad (\text{ПЗ.56})$$

Последнее непосредственно интегрируется, и его решение имеет вид

$$w = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4} \left(c_1 e^{it} + \frac{1}{c_1} e^{-it} \right), \quad (\text{ПЗ.57})$$

где t — действительное число, а постоянная интегрирования c_ρ на различных континуумах γ_ρ^+ принимает различные значения. В частности, можно положить $c_1 = 1$ на γ_1^+ , ибо γ_1^+ содержит точки a и b .

Тогда γ_1^+ будет представлять собой прямолинейный отрезок, соединяющий эти две точки. Остальные континуумы γ_ρ^+ , $\rho > 1$ являются дугами эллипсов с фокусами в точках a и b (фиг. 11). Таким образом, доказана



Фиг. 11. Разрезы вдоль дуг эллипсов с фокусами a и b и отрезка (a, b) .



Фиг. 12. Разрезы вдоль дуг эллипсов с фокусами a и b и двух отрезков, принадлежащих отрезку (a, b) .

Т е о р е м а. Любую многосвязную область можно конформно отобразить на полную плоскость, разрезанную вдоль дуг софокусных эллипсов. Один из граничных континуумов области можно считать соответствующим прямолинейному отрезку между фокусами.

Можно также сформулировать еще одну задачу, аналогичную этой. Рассмотрим области G^+ с границами γ^+ , которые получаются из области G в результате отображений класса \mathfrak{B} , и будем искать максимальный диаметр $d(\gamma_i^+, \gamma_k^+)$. Иными словами, мы рассмотрим всевозможные пары точек $a \in \gamma_i^+$, $b \in \gamma_k^+$ и при фиксированных i и k будем искать максимальное расстояние $|a - b|$ при всех отображениях $f \in \mathfrak{B}$. Мы можем повторить все рассуждения, которые привели нас от формулы (ПЗ.54) к формуле (ПЗ.57), но, считая при этом, что $a \in \gamma_i^+$ и $b \in \gamma_k^+$. Из (ПЗ.57) снова найдем, что кривые γ_ρ^+ являются дугами эллипсов с фокусами в точках a и b . Различное с предыдущей задачей состоит лишь в том, что теперь γ_i^+ и γ_k^+ будут представлять собой отдельные прямолинейные отрезки, лежащие на отрезке $[a, b]$, между фокусами (фиг. 12). Таким образом доказано, что

Любую многосвязную область можно конформно отобразить на полную плоскость, разрезанную вдоль дуг софокусных эллипсов. Два граничных континуума можно считать соответствующими прямолинейным отрезкам, которые лежат на отрезке между фокусами и имеют фокусы своими концами [23].

В частности,

Любую двусвязную область можно конформно отобразить на полную плоскость, разрезанную вдоль двух коллинеарных прямолинейных отрезков.

Читатель может без труда поставить другие вариационные задачи и решить их описанным методом. Каждое такое упражнение приведет к теореме существования конформных отображений некоторого типа.

5. Метод Лаврентьева. В предыдущих пунктах изучались экстремальные задачи для однолистных функций в заданной области. Главную трудность в каждой такой задаче представляет доказательство того, что граница экстремальной области обладает некоторым свойством непрерывности. Для этой цели можно использовать лишь метод внутренних вариаций или глубокие леммы из предыдущих пунктов. Однако во многих случаях можно применить впервые указанный М. А. Лаврентьевым [6, 1] метод, который дает возможность убедиться в том, что экстремальная область имеет аналитическую границу¹⁾. Уже одно это обстоятельство значительно облегчает изучение экстремальной области, например делает возможным применение вариационной формулы Адамара.

Мы изложим существо метода М. А. Лаврентьева на примере вариационной задачи, имеющей и самостоятельный интерес. Рассмотрим односвязную область G , содержащую бесконечно удаленную точку, и пусть в этой области существует однолистная функция $w = f(z)$, имеющая в бесконечности разложение вида (ПЗ.42) и отображающая G на внешность круга $|\omega| > R$. Число R является геометрической характеристикой области G , его называют *конформным радиусом* этой области. Непосредственно очевидно, что любая область, на которую область G отображается посредством функции с нормировкой (ПЗ.42), имеет тот же конформный радиус.

С помощью функции

$$t = w + \frac{R^2}{w} \quad (\text{ПЗ.58})$$

мы отображаем внешность круга $|\omega| > R$ на внешность отрезка $[-2R, 2R]$. Последняя область также имеет конформный радиус R ;

¹⁾ Автор ограничивается изложением лишь качественной стороны вариационно-геометрического метода М. А. Лаврентьева и тем самым, конечно, суживает его значение. В полном виде с методом можно ознакомиться, кроме указанной здесь литературы, еще по книге: Лаврентьев М. А. и Листерник Л. А., Основы вариационного исчисления, М. — Л., 1935, т. I, ч. 2, Дополнение 2. — *Прим. перев.*

с другой стороны, пользуясь результатами п. 4, мы видим, что диаметр¹⁾ $d(\gamma^+)$ границы γ^+ любой области, получаемой из внешности отрезка отображением с нормировкой (ПЗ.42), не превосходит диаметра этого отрезка. Таким образом, мы получаем простое неравенство, связывающее конформный радиус и диаметр границы области

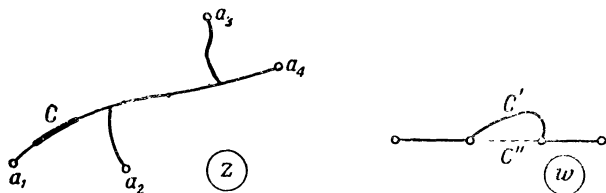
$$d(\gamma) \leq 4R; \quad (\text{ПЗ.59})$$

знак равенства может иметь место лишь в том случае, когда γ представляет собой отрезок длины $4R$.

Этот результат можно обратить следующим образом. Пусть заданы две произвольные точки a и b ; рассмотрим всевозможные континуумы, содержащие эти точки. Каждый такой континуум γ определяет содержащую бесконечно удаленную точку односвязную область с некоторым конформным радиусом; последний можно называть конформным радиусом континуума γ . Очевидно, что диаметр $d(\gamma)$ не меньше $|b - a|$ и что для прямолинейного отрезка, соединяющего точки a и b , он точно равен $|b - a|$. Для конформного радиуса $R(\gamma)$ имеем, следовательно, неравенство

$$|b - a| \leq d(\gamma) \leq 4R(\gamma), \quad (\text{ПЗ.60})$$

которое переходит в равенство лишь в том случае, когда γ представляет собой отрезок $[a, b]$. Таким образом, доказано, что



Фиг. 13. Метод Лаврентьева.

Среди всех континуумов, содержащих заданные точки a и b , наименьший конформный радиус имеет прямолинейный отрезок $[a, b]$.

Гретш [24] поставил более общую задачу. Пусть даны n точек комплексной плоскости $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, требуется найти содержащий эти точки континуум γ с возможно меньшим конформным радиусом (фиг. 13). Мы укажем, как можно решать эту задачу методом Лаврентьева.

Рассмотрим экстремальный континуум γ и предположим, что, выбрасывая из него континуум C , не содержащий точек a_i , можно разбить γ на два отдельных континуума γ_1 и γ_2 . Континуумы γ_1 и γ_2

¹⁾ То есть наименьшее расстояние между двумя точками γ^+ . — Прим. перев.

определяют двусвязную область D , содержащую бесконечно удаленную точку. В соответствии с результатами предыдущего пункта в D существует однолистная функция $w = f(z) = z + a_0 + a_1/z + \dots$, отображающая D на полную плоскость с разрезами вдоль двух коллинеарных отрезков γ'_1 и γ'_2 . Континуум C при этом переходит в континуум C' , соединяющий отрезки γ'_1 и γ'_2 и образующий вместе с ними образ γ' экстремального континуума γ . Конформные радиусы континуумов γ и γ' , очевидно, равны. Если C' не является прямолинейным отрезком C'' , соединяющим концы γ'_1 и γ'_2 , то мы можем заменить C' на C'' . Такая замена по предыдущей теореме приведет к уменьшению конформного радиуса γ' . Новому континууму γ' в силу однолистности отображения $w = f(z)$ в плоскости z будет соответствовать и новый континуум γ , содержащий все точки a_i и имеющий меньший конформный радиус. Но это противоречит нашему предположению о том, что континуум γ экстремальный; следовательно, уменьшение конформного радиуса γ' невозможно и континуум C' должен представлять собой прямолинейный отрезок, соединяющий концы γ'_1 и γ'_2 . Мы видим, что C получается из C' посредством отображения $z = f^{(-1)}(w)$, конформного во внешности отрезков γ'_1 и γ'_2 , и, следовательно, представляет собой аналитический образ прямолинейного отрезка, т. е. аналитическую дугу.

Очевидно, и любой континуум C , выбрасывание которого из γ приводит к разделению на два отдельных континуума, представляет собой аналитическую дугу. Если, следовательно, известно, что γ состоит лишь из конечного числа жордановых дуг, то можно утверждать, что все эти дуги аналитичны. Это обстоятельство открывает путь для дальнейших исследований, которые не представляют затруднений, и мы не будем приводить их здесь.

Таким образом, метод Лаврентьева позволяет из предположения о том, что континуум γ является жордановым, сделать вывод об аналитичности этого континуума. Однако доказательство того, что γ состоит из конечного числа жордановых дуг, приводит к тонким топологическим рассуждениям, подобным тем, которыми приходится пользоваться при доказательстве общей леммы о граничной вариации в п. 4.

В классическом вариационном исчислении часто применяется принцип, состоящий в том, что часть экстремальной кривой также представляет собой экстремальную кривую. Для рассматриваемого здесь типа вариационных задач указанный принцип, вообще говоря, не справедлив. Однако метод Лаврентьева показывает, что этим плодотворным принципом вариационного исчисления можно иногда пользоваться и в наших задачах.

6. Метод экстремальной длины. В предыдущих пунктах мы рассматривали решение экстремальных задач методами вариаций. Решение

ряда таких задач привело к доказательству соответствующих теорем существования конформных отображений на канонические области. В самом деле, мы видели, что отображения, осуществляемые экстремальными функциями, приводят к областям с аналитическими границами, удовлетворяющими некоторым дифференциальным уравнениям. Возникает, однако, обратный вопрос: можно ли для любой такой области найти соответствующую экстремальную задачу рассматриваемого здесь типа? Ответить на этот вопрос в общем виде при помощи вариационных рассуждений трудно, и поэтому становится очевидным значение следующего метода, называемого методом экстремальной длины.

Этот метод восходит к Фаберу [19], Гретшу [22] и Ренгелю [47] и в законченном виде дан Альфорсом и Беурлингом [7, 8, 16]. Он особенно полезен как метод проверки, приводящий к точному доказательству в тех случаях, когда имеется предположение о том, что некоторая область обладает каким-либо экстремальным свойством. Мы проиллюстрируем этот метод на конкретном примере.

Рассмотрим круговое кольцо, ограниченное окружностями $|z| = 1$ и $|z| = R$, зададим в этом кольце положительный вес $\rho(x, y)$ и введем с его помощью метрику $ds^2 = \rho^2 |dz|^2$. Потребуем лишь, чтобы полная „взвешенная“ площадь кольца была равной 1, т. е. чтобы имело место равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_1^R \rho^2 r dr d\varphi = 1, \quad z = re^{i\varphi} = x + iy. \quad (\text{ПЗ.61})$$

Длина кривой C из этого кольца выражается интегралом

$$l_C = \int_C \rho |dz| = \int_C \rho \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2}, \quad (\text{ПЗ.62})$$

и мы можем искать минимум таких длин для всех замкнутых кривых C , топологически эквивалентных окружности $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, причем этот минимум $\mu[\rho]$ будет, конечно, зависеть от выбора функции ρ . Постараемся выбрать эту функцию так, чтобы указанный минимум $\mu[\rho]$ был возможно большим.

Рассмотрим прежде всего вес

$$\rho_0(x, y) = \frac{1}{r \sqrt{2\pi \ln R}},$$

для которого постоянная выбрана так, чтобы удовлетворялось условие (ПЗ.61). Для длины l_C мы получаем тогда следующую оценку:

$$l_C \geq \int_C r \rho_0 d\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{\ln R}}. \quad (\text{ПЗ.63})$$

Если выбрать в качестве C окружность $|z| = c$, $1 \leq c \leq R$, то неравенство перейдет в равенство. Таким образом, в этой специально выбранной метрике мы имеем $\mu[\rho_0] = \sqrt{2\pi/\ln R}$.

Пусть теперь $\rho(x, y)$ будет произвольный вес, удовлетворяющий условию (ПЗ.61). Будем исходить из очевидного неравенства

$$\int_0^{2\pi} \int_1^R (\rho - \rho_0)^2 r dr d\varphi \geq 0, \quad (\text{ПЗ.64})$$

которое преобразуем, используя дважды условие (ПЗ.61), к следующему виду:

$$2 \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi \ln R}} \int_0^{2\pi} \int_1^R \rho r d\varphi \frac{dr}{r}. \quad (\text{ПЗ.65})$$

Из определения величины $\mu[\rho]$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \rho r d\varphi \geq \mu[\rho], \quad (\text{ПЗ.66})$$

ибо интеграл в левой части выражает длину окружности $|z| = r$ в ρ -метрике. Поэтому неравенство (ПЗ.65) дает

$$\sqrt{2\pi \ln R} \geq \mu[\rho] \ln R, \quad (\text{ПЗ.67})$$

и окончательно получаем

$$\mu[\rho] \leq \sqrt{\frac{2\pi}{\ln R}} = \mu[\rho_0]. \quad (\text{ПЗ.68})$$

Мы пришли к следующему результату:

Среди всех весов $\rho(x, y)$, удовлетворяющих условию (ПЗ.61), наибольшую величину минимума длины дает вес $\rho_0 = 1/r\sqrt{2\pi \ln R}$. Эта наибольшая величина равна $\sqrt{2\pi/\ln R}$.

Пусть теперь G — двусвязная область, получаемая из кругового кольца с помощью отображения $w = f(z)$. Пусть $w = u + iv$: любой интеграл вида $\iint \rho_w du dv$, распространенный на часть области G , можно представить в виде интеграла $\iint \rho_w |f'(z)|^2 dx dy$, распространенного на соответствующую часть кольца. Таким образом, задание веса ρ_w в области G определяет вес

$$\rho_z = \rho_w |f'(z)|^2 \quad (\text{ПЗ.69})$$

в кольце, и наоборот.

Любую двусвязную область G можно отобразить на круговое кольцо рассмотренного выше вида, т. е. ограниченного окружностями $|z| = 1$ и $|z| = R$. Число R является характеристикой области и называется ее модулем. Введем следующее минимальное свойство:

Рассмотрим все метрики, определенные с помощью весов ρ_w , в которых площадь области G равна 1. Минимум вычисленных в этих метриках длин всех замкнутых кривых, не сводимых в области G к точке, не превосходит $\sqrt{2\pi/\ln R}$, причем последняя величина достигается для веса ρ_w , соответствующего по формуле (ПЗ.69) весу ρ_0 .

В самом деле, с помощью формулы (ПЗ.69) задачу для области G можно свести к соответствующей задаче для кольца. При этом каждой метрике в G соответствует некоторая метрика в кольце, в которой соответствующие кривые имеют равные длины, следовательно, минимум достигается в обеих областях одновременно.

Таким образом, мы получаем возможность определить модуль области с помощью экстремальной задачи, формулируемой относительно самой этой области. Заметим, что решенная задача дает весьма изящную характеристику отображения области G на кольцо, хотя возможность такого отображения и предполагалась заранее.

Приведем несколько следствий полученного результата.

а) Невозможно отобразить друг на друга области с различными модулями. В самом деле, конформное отображение переносит метрику из одной области в другую, следовательно, экстремумы минимальных длин в этих областях должны совпадать. Но отсюда следует и совпадение модулей рассматриваемых областей.

б) Пусть G' и G — двусвязные области, такие, что $G' \supset G$ и что каждая кривая, не сводимая в точку в области G , будет такой же кривой в области G' . В этом случае можно утверждать, что модуль G' будет больше модуля G . Действительно, любой вес ρ' в области G' после умножения на постоянный множитель $\lambda > 1$ можно рассматривать как допустимый вес $\lambda\rho' = \rho$ в области G (множитель λ подбирается так, чтобы в метрике ρ площадь области G была равна 1). Поэтому длина в метрике ρ любой не сводимой к точке кривой области G в λ раз больше ее длины в метрике ρ' и, следовательно, заведомо больше минимальной длины для области G' . То же самое справедливо и для наибольших значений минимумов, что и доказывает неравенство $R' > R$ для модулей наших областей.

Наше утверждение о минимальной длине для двусвязных областей можно обратить следующим образом: пусть ρ будет вес, заданный в области G , так что для любой не сводимой к точке замкнутой кривой в этой области имеет место неравенство

$$\int_G \rho ds \geq 1. \quad (\text{ПЗ.70})$$

Тогда для площади G , вычисленной в ρ -метрике, имеем оценку

$$\iint_G \rho^2 dx dy \geq \frac{1}{2\pi} \ln R. \quad (\text{ПЗ.71})$$

Применим этот результат к двусвязной области G , ограниченной кривыми C_1 и C_2 . Проведем в области G не сводимую к точке замкнутую кривую Γ , которая делит эту область на две двусвязные области G_1 и G_2 , ограниченные парами кривых C_1, Γ и C_2, Γ . Введем в G экстремальный вес ρ , удовлетворяющий неравенству (ПЗ.70) и дающий минимальное значение площади. Применяв уже полученный результат к областям G_1 и G_2 , найдем

$$\iint_{G_1} \rho^2 dx dy \geq \frac{1}{2\pi} \ln R_1, \quad \iint_{G_2} \rho^2 dx dy \geq \frac{1}{2\pi} \ln R_2, \quad (\text{ПЗ.72})$$

где R_1 и R_2 обозначают модули этих областей, ибо ρ , очевидно, является для них допустимым весом. Складывая выведенные неравенства и пользуясь тем, что вес ρ — экстремальный для области G , мы получаем неравенство

$$\ln R \geq \ln R_1 + \ln R_2, \quad (\text{ПЗ.73})$$

выражающее супераддитивное свойство логарифмов модулей.

Метод минимальной длины легко распространяется также и на случай областей высшей связности. В этом случае можно снова ввести положительный вес ρ , так что интегралы $\iint \rho^2 dx dy$ и $\int \rho ds$ измеряют площадь и длину. Подчиним ρ следующему ограничению: предположим, что для любой кривой γ'_ν области G , топологически эквивалентной граничной кривой γ , этой области, выполняются неравенства

$$\int_{\gamma'_\nu} \rho ds \geq a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, k, \quad (\text{ПЗ.74})$$

в которых a_ν обозначают заданные положительные числа. Будем искать минимум интеграла

$$\min \iint_G \rho^2 dx dy = M(a_1, a_2, \dots, a_k). \quad (\text{ПЗ.75})$$

Функция $M(a_1, a_2, \dots, a_k)$ является, конечно, конформным инвариантом, следовательно, совпадение функций $M(a_1, a_2, \dots, a_k)$ для двух k -связных областей G является необходимым условием их конформной эквивалентности. Недавно Джонкинс доказал, что в случае трехсвязных областей это условие является и достаточным [31].

Метод экстремальной длины успешно применяется в различных задачах теории конформных отображений [22—24, 31, 47]. Если выбрать надлежащие краевые условия, то экстремальные длины будут совпадать с важными функционалами, зависящими от области, подобно тому как в приведенном выше примере экстремальная длина выражалась через модуль двусвязной области. Экстремальное свойство таких длин

приводит к полезным неравенствам для рассматриваемых функционалов. Укажем, например, на результат Тейхмюллера [69], полученный аналогичным образом.

Любая функция вида (ПЗ.24), осуществляющая отображение единичного круга на плоскость w с разрезами, удовлетворяющими дифференциальному уравнению (ПЗ.41'), решает экстремальную задачу для первых $n - 1$ коэффициентов a_2, a_3, \dots, a_n .

Таким образом, метод экстремальной длины позволяет убедиться в том, что необходимые условия для проблемы коэффициентов, найденные вариационными методами, являются достаточными условиями для некоторой аналогичной проблемы. Только отсутствие аналогичного результата для общей проблемы коэффициентов отделяет нас от полного решения этой проблемы.

7. Заключительные замечания. Для краткости мы изложим теорию фундаментальных решений и ядер для областей, расположенных в комплексной плоскости. Можно было бы рассмотреть более общий случай областей, расположенных на произвольных римановых поверхностях, подобных тем, которые изучались в предыдущих главах. Все наши рассуждения остаются справедливыми, кроме одного важного пункта, который позволяет судить об относительной силе рассмотренных методов доказательств существования.

Подчеркнем, что в случае плоских областей существование воспроизводящих ядер можно установить некоторыми экстремальными методами, действующими в семействе функций, аналитических в данной области, и, следовательно, можно доказать существование функции Грина без применения принципа Дирихле. Однако это невозможно в общем случае областей, расположенных на римановых поверхностях, ибо в этом случае а priori нельзя быть уверенным в существовании функции, аналитической в области. Мы исходим здесь из семейства произвольных функций, кусочно гладких в рассматриваемой области, и только принцип Дирихле делает возможным выбор из этого семейства аналитических функций. Опираясь на одно лишь существование таких функций, можно продолжать исследования методами фундаментальных функций и ядер.

Точно так же экстремальные методы доказательства существования в семействе функций, однолистных в данной области, можно применять лишь после того, как в этой области установлено существование таких функций. В любой плоской области однолистные функции существуют всегда, например функция, тождественно равная z , однако это неясно в общем случае.

Итак, мы рассмотрели три типа методов доказательств существования решений граничных задач:

а) Методы, основанные на принципе Дирихле и действующие в наиболее широком классе всех кусочно гладких в рассматриваемой области функций с конечным интегралом Дирихле.

б) Методы ядер, действующие в подклассе всех аналитических в области функций с конечным интегралом Дирихле.

в) Экстремальные методы, действующие в наиболее узком классе функций, однолистных в рассматриваемой области.

Очевидно, что методы, действующие в более широком классе, являются и более общими, в то время как методы, относящиеся к более узкому классу, удобнее для приложений.

В заключение отметим, что методы фундаментальных решений и ядер легко распространяются на теорию дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа и находятся в этой теории в том же отношении к методам, основанным на принципе Дирихле, как и в случае уравнения Лапласа (см. [14, 66]).

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ ¹⁾

1. Голузин Г. М., Внутренние задачи теории однолистных функций, Успехи мат. наук, VI (1939), 26—89.
2. Голузин Г. М., Метод вариаций в конформном отображении, Матем. сб., 19 (61) (1946), 203—236.
3. Голузин Г. М., Метод вариаций в конформном отображении, II, Матем. сб., 21 (63) (1947), 83—117.
4. Голузин Г. М., Метод вариаций в конформном отображении, III, Матем. сб., 21 (63) (1947), 119—132.
5. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, М.—Л., 1951.
6. Лаврентьев М. А., К теории конформных отображений, Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова, 5 (1934), 159—246.
7. Ahlfors L., Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und ganzen Funktionen, Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova Ser. A., 1 (1930).
8. Ahlfors L. and Beurling A., Invariants conformes et problèmes extrémaux, X Congrès des Mathématiciens Scandinaves (1946).
9. Aronszajn N., La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, Proc. Cambridge Phil. Soc., 39 (1943), 133—153.
10. Bergman S., Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen, Math. Ann., 86 (1922), 238—271.
11. Bergman S., Partial differential equations, Providence, 1941.
12. Bergman S., Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, New York, 1941.
13. Bergman S., Complex orthogonal functions and conformal mapping, 1950.
14. Bergman S. and Schiffer M., A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order, Duke Math. J., 14 (1947), 609—638.
15. Bergman S. and Schiffer M., Kernel functions and conformal mapping, Duke Math. J., 17 (1950).
16. Beurling A., Études sur un problème de majoration, Thesis, Upsala, 1933.
17. Bochner S., Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen, Math. Z., 14 (1922), 180—207.
18. Daniell P. J., Orthogonal potentials, Phil. Mag. (7), 2 (1926), 247—258.

¹⁾ См. примечание на стр. 231. — *Прим. перев.*

19. Faber G., Über den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung, Münchener Ber. (1922), 91—100.
20. Garabedian P. R. and Schiffer M., Identities in the theory of conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949), 187—238.
21. Garabedian P. R. and Schiffer M., On existence theorems of potential theory and conformal mapping, Ann. Math., **51** (1950).
22. Grötzsch H., Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, Leipziger Ber. (Abdruck aus den Berichten der Math. Phys. Kl. der sächsischen Academie der Wissenschaften zu Leipzig), **80** (1928), I, 367—376; II, 497—502.
23. Grötzsch H., Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach-zusammenhängender schlichter Bereiche, Leipziger Ber., I, **81** (1929), 38—47; II, **81** (1929), 217—221; III, **83** (1931), 283—297.
24. Grötzsch H., Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung, Leipziger Ber., **82** (1930), 251—263.
25. Grötzsch H., Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche, Leipziger Ber., **84** (1932), 15—36.
26. Grunsky H., Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schr. Math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin, **1** (1932), 94—140.
27. Grunsky H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen, Math. Z., **45** (1939), 29—61.
28. Hadamard J., Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Mém. Savants étrangers Acad. Sci. Inst. France, Series 2, **33**, No. 4 (1908), 1—128.
29. Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, Paris, 1910.
30. Hille E., Remarks on a paper by Z. Nehari, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 552—553.
31. Jenkins J. A., Some problems in conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949), 327—350.
32. Julia G., Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liées à la représentation conforme, Ann. Ecole Norm. Sup. (3), **39** (1922), 1—28.
33. Julia G., Leçons sur la représentation conforme des aires multiples connexes, Paris, 1934.
34. Köbe P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, IV, Acta Math., **41** (1918), 305—344.
35. Lehto O., Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, I (1949), 59.
36. Lévy P., Leçons d'analyse fonctionnelle, Paris, 1922.
37. Lichtenstein L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encykl. d. math. Wissenschaften, Leipzig, IIC3, 1918.
38. Littlewood J. E., On inequalities in the theory of functions, Proc. London. Math. Soc. (2), **23** (1924), 481—519.
39. Löwner K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann., **89** (1923), 103—121.
40. Marty F., Sur le module des coefficients de MacLaurin d'une fonction univalente, C. R. Acad. Sci. Paris, **198** (1934), 1569—1571.
41. Maxwell J. C., A treatise on electricity and magnetism, v. I, Oxford, 1892.
42. Montel P., Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Paris, 1933.
43. Nehari Z., The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 545—551.
44. Plemeij J., Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. f. Math. u. Phys., **19** (1908), 205—210.
45. Pössel R., Zum Parallelschlitztheorem unendlichvielfach zusammenhängender Gebiete, Göttinger Nachrichten (1931), 199—202.

46. P o s s e l R., Sur la représentation conforme d'un domaine a connexion infinie sur un domaine à fentes parallèles, *J. de Math.* (9), **18** (1939), 285—290.
47. R e n g e l E., Über einige Schlichttheoreme der konformen Abbildung, *Schr. Math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin*, **1** (1933), 141—162.
48. S c h a e f f e r A. C., S c h i f f e r M. and S p e n c e r D. C., The coefficient regions of schlicht functions, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 493—527.
49. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., The coefficients of schlicht functions. I, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 611—635.
50. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., The coefficients of schlicht functions. II, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 107—125.
51. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., The coefficients of schlicht functions. III, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **32** (1946), 111—116.
52. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., The coefficients of schlicht functions. IV, *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, **35** (1948), 143—150.
53. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., A variational method in conformal mapping, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 949—966.
54. S c h a e f f e r A. C. and S p e n c e r D. C., Coefficient regions for schlicht functions, *Amer. Math. Soc. Colloquium Series*, 1950.
55. S c h i f f e r M., A method of variation within the family of simple functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **44** (1938), 432—449.
56. S c h i f f e r M., On the coefficients of simple functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), **44** (1938), 450—452.
57. S c h i f f e r M., Sur la variation de la fonction de Green de domaines plans quelconques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **209** (1939), 980—982.
58. S c h i f f e r M., Variation of the Green function and theory of p -valued functions, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 341—360.
59. S c h i f f e r M., The span of multiply connected domains, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 209—216.
60. S c h i f f e r M., Hadamard's formula and variation of domain functions, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 417—448.
61. S c h i f f e r M., The kernel function of an orthonormal system, *Duke Math. J.*, **13** (1946), 529—540.
62. S c h i f f e r M., An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 147—156.
63. S c h i f f e r M., On various types of orthogonalization, *Duke Math. J.*, **17** (1950).
64. S c h i f f e r M. and S p e n c e r D. C., The coefficient problem for multiply-connected domains, *Ann. Math.* (1950).
65. S c h i f f e r M. and S p e n c e r D. C., Lectures on conformal mapping and extremal methods, *Princeton*, 1949—1950.
66. S c h i f f e r M. and S z e g ö G., Virtual mass and polarization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 130—205.
67. S p e n c e r D. C., Some problems in conformal mapping, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 417—439.
68. S z e g ö G., Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc. Colloquium Series*, **23** (1939).
69. T e i c h m ü l l e r O., Ungleichungen zwischen den Koeffizienten schlichter Funktionen, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wis. Math. Phys. Kl* (1938), 363—375.
70. W i r t i n g e r W., Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 357—375.
71. W i r t i n g e r W., Über eine Minimalaufgabe im Gebiete der analytischen Funktionen, *Monatsh. Math. u. Phys.*, **39** (1932), 377—384.
72. Z a r e m b a S., L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie* (1907), 147—196.
73. Z a r e m b a S., Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie* (1909), 125—195.

УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар 15, 118, 278
Александров 76
Альфорт 294
Аналитические функции на римановых поверхностях 76
Аналитическое продолжение минимальных поверхностей 113, 118
- Беурлинг 294
Билинейная форма, симметричная 13
Бутылка Клейна 81
— — представленная в виде области с разрезами 81
- Вариационная задача в двух измерениях 182
— — для минимальных поверхностей 97
— — — поверхностей ненулевого рода 152
— — решение для k -связных областей 137
— формула Адамара 274, 278, 279
Вариационные задачи неразрешимые 12, 15
Вариация точек разветвления 174
— функций Грина 274
Вейерштрасс 8, 9, 93
Вектор стационарный 106
Внутренние вариации 280
— — приложение к однолиственным функциям 282
Вторая граничная задача 144
- Гармоническая мера 236
Гармонические поверхности 94
Гильберт 8, 9
Гильбертово пространство 28
Голузин Г. М. 286
Граничная кривая спрямляемая 125
Граничные вариации 286
Граничные кривые 86, 87
Гретш 294
- Дарбу 9
Диполь, потенциальный поток 48
— — — на модели бутылки Клейна 89
— — — — проективной плоскости 89
— — — — — тора 88
Допустимые векторы 97
Дуглас 9, 95, 96, 189
- Естественные граничные условия 44, 45, 27
- Задача Дугласа 97, 134, 135
— о собственных значениях 261
— Плато 92
— — роль конформных отображений в решении задачи 112
- Изометрические параметры 93
Изометрическое неравенство для минимальных поверхностей 123
Интеграл Дирихле 11, 12
— — в единичном круге 16

- Интеграл Дирихле для гармонических функций 250
 — — — круга 15, 16
 — — инвариантность при конформных отображениях 25
 — — первая вариация 106
 — — теорема о непрерывности для абсолютного минимума 120
 Интегральное неравенство 35
- Катеноид 115
 Классы нормальных областей 47
 Компактность в функциональном пространстве 28
 Компактные множества действительных чисел 28
 Конформное отображение границы области 90
 — — двусвязной области на круговое кольцо 295
 — — на круг верхней полуплоскости, полукруга, круговой луночки, кругового сектора, эллипса 26
 — — — круговые области 160, 272
 — — — приложение к задаче Плато 112
 — — — — однолиственным функциям 259
 Конформные отображения канонические 238
 — — многосвязных областей 158
 — — — — римановы поверхности, ограниченные единичными окружностями 173
 — — — — теоремы единственности 177
 — — — — — непрерывности 180, 181
 — — — — — существования 168
 — — на области с параллельными разрезами 47
 — — областей бесконечной связности 59
 — — ненулевого рода 79
 — — односвязных и двусвязных областей 42
- Конформные отображения плоских областей на области разрезами 57
 — — теоремы непрерывности 180, 181
 Конформный инвариант 259
 Концентрические окружности, длины образов 121
 Критические точки 85
- Лаврентьев М. А. 278, 291
 Лебег 95
 Леви 117, 166
 Лёвнер 286
 Лехто 256
 Линии тока в проективной плоскости 88
 — — на торе 89, 90
 Лист Мёбиуса 135, 152, 84
- Мак-Шэн 95
 Метод Лаврентьева 291
 — спуска 118
 — экстремальной длины 293
 Минимальная задача 7
 Минимальные поверхности 93, 94
 — — неустойчивые 189, 211
 — — — натянутые на спрямляемые контуры 223
 — — со свободными границами 188
 — — — — — двусвязные 198
 — — — — — многосвязные 200
 — — — — — натянутые на замкнутые многообразия 201
 — — с разрывной свободной границей 208
 — — стационарные 210
 — — с частично свободными границами 194
 Минимизирующая последовательность 14
 — — обобщенная 203
 Минимизирующее связывающее множество 211, 221
 Модули 47
 Морс 9, 125, 128, 129, 189

- Наименьшее возможное число параметров 49
 Неравенство Бунякавского — Шварца 20
 — треугольника 20
 Неустойчивые точки стационарных функций 211
- Области, подобные однолистным** 79
 — с разрезами ненулевого рода 80
 Общая задача Дугласа, 134
 Опыты Плато 93
 — с мыльными пленками 9, 134, 152
 Ортонормальные системы 273
- Параметр Шварца—Кели** 258
Параметры, наименьшее число 49
Поверхности наложения 78
Поверхность Жергонна 188
Полиэдрические области 67
Принцип Дирихле 8, 11, 17
 — — для круга 17
 — — — произвольных областей 28
 — — — — с частично свободной границей 26
 — — — свободных граничных значений 44
 — — — ячейки 66
 — — корректная формулировка 16
 — — начальная формулировка 12
Пуанкаре 36
- Радо** 9, 111
Расстояние между функциями 20
Ренгель 294
Риман 7, 95, 177
Риманова поверхность 67
Римановы области 66
 — — в общем смысле 75
 — — определенные посредством неперекрывающихся ячеек 78
 — — теорема склеивания 70
- Свободные границы** 206
Сглаживания процесс 29, 30
Сжатие 221
- След минимальной поверхности** 206
Соответствие границ 63
 — граничных точек, взаимная однозначность 110
Спряжяемые кривые 223
Стягивание 145, 228
Сходимость в смысле Фреше 100
 — последовательностей гармонических функций 22
- Теорема склеивания** 70
 — Харнака 17
Томпкинс 9, 125, 128, 129, 189
Тонелли 97
Тор, представленный в виде области с разрезами 81
Точки разветвления 86
 — — минимальных поверхностей 117
Трансверсальность 195, 206, 210
Триангуляция 77
- Униформизация** 75, 77
Условие сцепления 138
 — трансверсальности 195
 — трех точек 99
- Фабер** 284
Функционалы квадратичные 19, 20
Функция Грина 234, 245, 261, 238
 — — электростатическая интерпретация 235
 — особенностей Вейля 53
- Характеристика** 82
Характеристическое уравнение минимальных поверхностей 94
Хаусдорф 76
- Цепочки** 188
 — Шварца 197
- Шварц** 9, 93, 189, 198, 258
Шиффман 9, 125, 189
- Ядра K и L** 252
Ячейка 66

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	3
Из предисловия автора	5
Введение	7
Глава I. Принцип Дирихле и граничная задача теории потенциала	11
§ 1. Принцип Дирихле	11
1. Определения	11
2. Начальная формулировка принципа Дирихле	12
3. Общее замечание о неразрешимых вариационных задачах	12
4. Минимизирующие последовательности	14
5. Замкнутое выражение интеграла Дирихле для круга. Замечание о неразрешимости вариационной задачи Дирихле	15
6. Корректная формулировка принципа Дирихле	16
§ 2. Полунепрерывность интеграла Дирихле. Принцип Дирихле для круга	17
§ 3. Интеграл Дирихле и квадратичные функционалы	19
§ 4. Вспомогательные предложения	22
1. О сходимости последовательностей гармонических функций	22
2. Оценка колебания функции с помощью интеграла Дирихле	23
3. Инвариантность интеграла Дирихле при конформных отображениях. Применения	25
4. Принцип Дирихле для круга с частично свободной границей	26
§ 5. Доказательство принципа Дирихле для произвольных областей	28
1. Прямые методы вариационного исчисления	28
2. Построение гармонической функции u посредством процесса сглаживания	29
3. Доказательство соотношения $D[u] = d$	32
4. Доказательство того, что функция u принимает заданные граничные значения	32
5. Обобщения	34
§ 6. Другое доказательство принципа Дирихле	35
1. Основное интегральное неравенство	35
2. Решение вариационной задачи I	37

§ 7. Конформное отображение односвязных и двусвязных областей	42
§ 8. Принцип Дирихле для свободных граничных значений. Естественные граничные условия	44
Глава II. Конформное отображение на области с параллельными разрезами	47
§ 1. Введение	47
1. Классы нормальных областей. Области с параллельными разрезами	47
2. Постановка вариационной задачи	50
§ 2. Решение вариационной задачи II	53
1. Построение функции u	53
2. Непрерывная зависимость решения от области	56
§ 3. Конформное отображение плоских областей на области с разрезами	57
1. Отображение k -связных областей	57
2. Отображение на плоскость с разрезами областей бесконечной связности	59
3. Полуплоскость с разрезами. Модули	62
4. Соответствие границ	63
§ 4. Римановы области	66
1. Введение	66
2. Теорема склеивания	70
§ 5. Римановы области в общем смысле. Униформизация	75
§ 6. Римановы области, определенные посредством неперекрывающихся ячеек	78
§ 7. Конформное отображение областей ненулевого рода	79
1. Введение	79
2. Определение областей с разрезами ненулевого рода	80
3. Теорема существования	84
4. Замечания. Полуплоскость с разрезами	90
Глава III. Задача Плато	92
§ 1. Введение	92
§ 2. Формулировка и решение основной вариационной задачи	97
1. Определения и обозначения	97
2. Основная лемма. Решение минимальной задачи	98
3. Замечания. Полунепрерывность	100
§ 3. Доказательство минимальности поверхности, дающей решение вариационной задачи	101

§ 4. Первая вариация интеграла Дирихле	103
1. Вариация в общем пространстве допустимых функций	103
2. Первая вариация в пространстве гармонических векторов	106
3. Доказательство минимальности поверхности, представляемой стационарным вектором	107
§ 5. Дополнительные замечания	110
1. Взаимная однозначность соответствия граничных точек	110
2. Относительный минимум	111
3. Доказательство того, что решение вариационной задачи решает задачу о минимуме площади	111
4. Роль конформных отображений в решении задачи Плато	112
§ 6. Нерешенные задачи	113
1. Аналитическое продолжение минимальных поверхностей	113
2. Единственность. Кривые, стягивающие бесчисленное множество минимальных поверхностей	114
3. Точки разветвления минимальных поверхностей	117
§ 7. Первая вариация и метод спуска	118
§ 8. Зависимость площади от границы	120
1. Теорема о непрерывности для абсолютного минимума	120
2. Длины образцов концентрических окружностей	121
3. Изопериметрическое неравенство для минимальных поверхностей	123
4. Непрерывная вариация площади минимальных поверхностей	125
5. Непрерывная вариация площади гармонических поверхностей	128
Глава IV. Общая задача Дугласа	134
§ 1. Введение	134
§ 2. Решение вариационной задачи для k -связных областей	137
1. Формулировка задачи	137
2. Условие сцепления	138
3. Решение вариационной задачи для k -связных областей G и параметрических областей, ограниченных окружностями	138
4. Решение вариационной задачи для других типов нормальных областей	141
§ 3. Дальнейшее изучение решения	142
1. Достаточное условие Дугласа	142
2. Лемма 4.1 и доказательство теоремы 4.2	143
3. Лемма 4.2 и доказательство теоремы 4.1	145
4. Замечания и примеры	150
§ 4. Обобщение на высшие топологические структуры	152
1. Существование решения	152

2. Доказательство существования для поверхностей типа листа Мёбиуса	152
3. Другие типы параметрических областей	156
4. Отождествление решений с минимальными поверхностями. Свойства решений	157
Глава V. Конформное отображение многосвязных областей . . .	158
§ 1. Введение	158
1. Предмет изучения	158
2. Первая вариация	158
§ 2. Конформное отображение на круговые области	160
1. Формулировка теоремы	160
2. Формулировка и анализ вариационных условий	160
3. Вывод вариационных условий	162
4. Доказательство тождества $\varphi(w) = 0$	166
§ 3. Теоремы существования отображений для общих классов нормальных областей	168
1. Формулировка теоремы	168
2. Вариационные условия	169
3. Доказательство тождества $\varphi(w) = 0$	171
§ 4. Конформное отображение на римановы поверхности, ограниченные единичными окружностями	173
1. Формулировка теоремы	173
2. Вариационные условия. Вариация точек разветвления	174
3. Доказательство тождества $\varphi(w) = 0$	176
§ 5. Теоремы единственности	177
1. Метод доказательства единственности	177
2. Единственность для римановых поверхностей с точками разветвления	178
3. Единственность для классов \mathfrak{N} плоских областей	178
4. Единственность для других классов областей	180
§ 6. Дополнительные замечания	180
1. Первая теорема о непрерывности для конформных отображений	181
2. Вторая теорема о непрерывности. Обобщение предыдущих теорем	181
3. Дальнейшее изучение конформных отображений	181
§ 7. Существование решения вариационной задачи в двух измерениях	182
1. Доказательство с использованием конформного отображения двусвязных областей	182
2. Другое доказательство. Дополнительные замечания	187

Глава VI. Минимальные поверхности со свободными границами и неустойчивые минимальные поверхности	188
§ 1. Введение	188
1. Задачи со свободными границами	188
2. Неустойчивые минимальные поверхности	189
§ 2. Свободные границы. Предварительные замечания	190
1. Общие замечания	190
2. Теорема о граничных значениях	191
§ 3. Минимальные поверхности с частично свободными границами	194
1. Случай одной заданной дуги	194
2. Замечания о цепочках Шварца	197
3. Двусвязные минимальные поверхности с одной свободной границей	198
4. Многосвязные минимальные поверхности со свободными границами	200
§ 4. Минимальные поверхности, натянутые на замкнутые многообразия	201
1. Введение	201
2. Доказательство существования	202
§ 5. Свойства свободных границ. Трансверсальность	206
1. Плоская граничная поверхность. Отражение	206
2. Поверхность наименьшей площади с разрывной свободной границей	208
3. Трансверсальность	209
§ 6. Неустойчивые минимальные поверхности с заданными многоугольными границами	211
1. Неустойчивые точки стационарности функций N переменных	211
2. Другая постановка вариационной задачи	214
3. Доказательство того, что стационарные значения функции $d(U)$ являются стационарными значениями интеграла $D[x]$	219
4. Обобщение	220
5. Замечания о другой постановке задачи и о второй вариации	222
§ 7. Неустойчивые минимальные поверхности, натянутые на спрямляемые контуры	223
1. Предварительные замечания. Основная теорема	223
2. Замечания и обобщения	227
§ 8. Непрерывность интеграла Дирихле при преобразованиях x -пространства	228
Литература	231

<i>Приложение. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений (М. Шиффер)</i>	234
§ 1. Функция Грина и граничные задачи	234
1. Функция Грина	234
2. Канонические конформные отображения	238
3. Вторая граничная задача и функция Неймана	244
§ 2. Интеграл Дирихле для гармонических функций	250
1. Формальные замечания	250
2. Ядра K и L	252
3. Неравенства	256
4. Конформное отображение	258
5. Приложения к теории однолистных функций	259
6. Разрывность ядер	260
7. Задача о собственных значениях	261
8. Ядра в классе \mathfrak{F}_0	264
9. Теория сравнения	266
10. Одна экстремальная задача теории конформных отображений	271
11. Отображение на круговые области	272
12. Ортонормальные системы	273
§ 3. Вариация функции Грина	274
1. Вариационная формула Адамара	274
2. Внутренние вариации	280
3. Приложение к проблеме коэффициентов однолистных функций	282
4. Граничные вариации	286
5. Метод Лаврентьева	291
6. Метод экстремальной длины	293
7. Заключительные замечания	298
Литература к приложению	299
Указатель	302

Редактор *Н. Б. ЕГОРОВА*
Художник *М. Г. Ровенский*
Технич. редактор *Е. С. Герасимова*

Сдано в производство 13/II 1953 г.
Подписано к печати 14/V 1953 г.
А-02644. Бумага $60 \times 92 \frac{2}{16} = 9,8$ бум. л.
19,6 печ. л. Уч.-издат. л. 20,9.
Изд. № 1/1746. Цена 16 р. 65 к.
Зак. 204.

4-я типография им. Евг. Соколовой
Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ,

выпущенные

ИЗДАТЕЛЬСТВОМ ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Морс М., **Топологические методы теории функций комплексного переменного.** Перевод с английского, 248 стр., ц. 8 р. 10 к.
- Хилл Э., **Функциональный анализ и полугруппы.** Перевод с английского, 635 стр., ц. 35 р. 65 к.
- Камке Э., **Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.** Перевод с немецкого, 328 стр., ц. 37 р. 30 к.
- Эйзенхарт Л., **Непрерывные группы преобразований.** Перевод с английского, 359 стр., ц. 19 р.
- Уокер Р., **Алгебраические кривые.** Перевод с английского, 236 стр., ц. 11 р. 85 к.
- Феллер В., **Введение в теорию вероятностей и ее приложения.** Перевод с английского, 427 стр., ц. 22 р. 10 к.
- Гобсон Е. В., **Теория сферических и эллипсоидальных функций.** Перевод с английского, 476 стр., ц. 34 р. 40 к.
- Б. ван дер Поль и Х. Бреммер, **Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа.** Перевод с английского, 506 стр., ц. 27 р. 30 к.
- Биркгоф Г., **Теория структур.** Перевод с английского, 407 стр., ц. 20 р. 60 к.
- Э. Грей и Метьюз Г. Б., **Функции Бесселя и их приложения к физике и механике.** Перевод с английского, 371 стр., ц. 19 р. 60 к.

Книги продаются в книжных магазинах и киосках Книготорга и других книготорговых организаций, высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми отделами „Книгапочтой“ областных, краевых и республиканских отделений Книготоргов.

Р. Курант

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ,
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
И
МИНИМАЛЬНЫЕ
ПОВЕРХНОСТИ

