Х. Кухлинг

Справочник по ФИЗИКЕ

NACHSCHLAGEBÜCHER FÜR GRUNDLAGENFÄCHER

PHYSIK

Von

Fachschuldozent
HORST KUCHLING

15. Auflage

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1980

Х. Кухлинг

Справочник по ФИЗИКЕ

Перевод с немецкого
под редакцией
Е. М. ЛЕЙКИНА

МОСКВА «МИР» 1983

ББК 22.3
К95
УДК 530.1(03)

Кухлинг Х.

К95 Справочник по физике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1983. — 520 с., ил.

Составленный физиком из ГДР Х. Кухлингом справочник по физике, выдержавший в ГДР 15 изданий. Справочник охватывает все разделы современной физики, содержит определения основных физических величин и понятий и формулировки основных законов. Книга снабжена большим количеством иллюстраций, облегчающих понимание текста, и многочисленными таблицами, содержащими численные значения важнейших физических величин.

Рассчитана на широкий круг читателей — научных работников, инженеров, преподавателей высшей и средней школы, студентов и школьников старших классов.

К $\frac{1704020000-249}{041(01)-83}$ 63—82, ч. 1

ББК 22.3
53

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Представляя справочник советскому читателю, мы хотели бы обратить внимание на два обстоятельства, которые могут оказаться полезными при практической работе с ним.

В книге в концентрированной форме изложены основные сведения по физике, включая многочисленные приложения законов физики и их следствий. Однако было бы ошибочно думать, что по этой книге можно изучать физику. Справочник адресован тем, кто уже знаком с физикой и обращается к ней в своей повседневной практике. Вместе с тем он достаточно универсален и может быть одинаково полезен как тем, для кого общение с физикой ограничивается школьным курсом, так и специалистам по естественным и техническим наукам. Справочник обеспечивает специалисту простой доступ ко всему арсеналу современной науки, позволяя ему при этом не перегружать свою память избытком фактических данных. С другой стороны, справочник безусловно принесет пользу и тем, кто еще только готовится стать специалистом, т. е. учащейся молодежи. Но именно поэтому следует еще раз предостеречь: справочник не может заменить учебники, и не следует думать, что с его помощью можно сэкономить время на изучение физики. Точно так же справочник не решает задач просветительного плана — это дело энциклопедии, и в том случае, когда у читателя возникают вопросы познавательного характера, лучше всего обращаться именно к энциклопедическим изданиям.

Следует также отметить еще одно обстоятельство, которое связано с подготовкой к изданию русского перевода справочника. В процессе этой подготовки в текст книги были внесены изменения с целью привести терминологию справочника в соответствие с принятой в советской научной и технической литературе. Эта работа проведена в соответствии с рекомендациями Комиссии Международного союза чистой и прикладной физики относительно стандартизации терминологии, обозначений и единиц измерения. Подобная стандартизация, вообще говоря, имеет большое значение и способствует более успешному обмену научной информацией, В предлагаемом переводе учтены современные требования к стандартизации и унификации терминологии, обозначениям и единицам измерения физических величин. В частности, используются единицы измерения, установленные СТ СЭВ 1052-78 «Метрология. Единицы физических величин», введенные в СССР с 1 января 1980 г. Однако хотелось бы предупредить читателя, что полная унификация, в частности системы единиц, не всегда целесообразна. (В этой связи мы рекомендуем познакомиться с редакционной статьей в журнале: УФН, 1979, т. 129, вып. 2.)

Мы надеемся, что предлагаемая книга будет полезна многочисленным советским читателям — как изучающим физику, так и специалистам.

Перевод книги выполнили: канд. физ.-мат. наук Д. Х. Абдрашитова (разд. 1—4; 19—24, 35—41, таблицы), канд. техн. наук В. Г. Картащев (разд. 25—34) и канд. физ.-мат. наук Е. В. Мозжухин (разд. 5—18).

Е. М. Лейкин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика, бесспорно, играет большую роль на всех этапах нашей социалистической системы образования и во всех областях науки и техники. Поэтому необходимо, чтобы любой специалист мог воспользоваться установленными физикой законами и результатами. Предлагаемая книга, выходящая в серии справочников по основным предметам, должна помочь читателю быстро получить полную информацию.

Этот справочник не является учебником, но вместе с тем далеко выходит за рамки простого сборника формул. Так, здесь приводится вывод большинства закономерностей и соотношений и кратко рассматривается их применение. Для каждой формулы поясняются используемые обозначения и приводятся единицы измерения входящих в нее величин. Это позволит читателю сэкономить время, которое потребовалось бы для поисков соответствующих данных по другим источникам. Многочисленные иллюстрации призваны поясиять текст. В таблицах, содержащих применяемые на практике величины, читатель найдет все важнейшие численные значения.

Чтобы обеспечить достаточно высокий уровень книги, решено было не отказываться от высшей математики и векторного способа записи. Однако наряду с дифференциальными уравнениями всегда приводятся соответствующие более простые уравнения, не содержащие производных, поэтому у читателя, менее сведущего в математике, не должно возникать затруднений при работе с книгой.

14-е издание книги было полностью переработано. Все разделы были критически пересмотрены и частично написаны заново. Многочисленные поправки и дополнения существенно увеличили объем информации, содержащейся в книге.

В предлагаемом издании сохранена прошедшая испытание временем форма изложения, но улучшено графическое оформление книги.

Пусть же наш справочник по физике продолжает служить верным помощником в учебе и на практике.

Митвайда, 1980 г. *Хорст Кухлинг*

О ПОЛЬЗОВАНИИ КНИГОЙ

- Все формулы представляют собой уравнения для величин, т. е. не зависят от выбора системы единиц. Если в порядке исключения даются приведенные к определенной системе единиц уравнения, то это специально оговаривается.
- Преимущество отдается СИ. При необходимости дополнительно указываются десятичные кратные и дольные единицы, а также другие некогерентные единицы, если они допускаются или допускались к применению. Пояснение сокращений см. в разд. 3.6.
- Физические постоянные в табл. 47 приведены с современной точностью (однако без указания пределов ошибки). Аналогичным образом коэффициенты пересчета некогерентных единиц указываются с точностью, установленной официальными нормативами.
- За этим исключением точность постоянных и коэффициентов пересчета ограничивается тремя значащими цифрами (независимо от положения запятой), поскольку, как правило, экспериментальные и табличные данные не обладают большей точностью. Такая точность соответствует также практике расчетов с помощью логарифмической линейки. При использовании электронных калькуляторов, которые находят все более широкое распространение, в результате следует брать такое же число значащих цифр, сколько их было у исходных величин.
- Производные по времени обозначаются, как обычно, точками над символами, например, $v = ds/dt = \dot{s}$.
- Ссылки на другие разделы книги даются следующим образом: см. разд. 12.4; ссылки на формулы: см. (М 4.13).
- Табличные данные взяты из следующих источников:

Kohlrausch: Praktische Physik, Bd. 3., Stuttgart: B. G. Teubner.
Tabellenbuch Chemie. Leipzig, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie.
Wissensspeicher für Technologen. Leipzig, VEB Fachbuchverlag.
Ebert: Physikalisches Taschenbuch. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Ф ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

1. Физические величины

Физические законы выражаются в виде математических соотношений между физическими величинами. Под последними понимают измеряемые характеристики (свойства) физических объектов (предметов, состояний, процессов).

Каждая физическая величина представляет собой произведение численного значения на единицу измерения.
Физическая величина = Численное значение × Единица измерения.

Таким образом, выражение

$$\text{Время} = 5 \text{ секунд},$$
$$t = 5 \text{ с}$$

означает, что измеренное время составляет пятикратное повторение секунды.

Только одного численного значения недостаточно для характеристики физической величины. Поэтому никогда нельзя опускать соответствующую единицу измерения!

1.1. Основные величины

В физике применяются следующие 7 основных величин:
длина, время, масса, температура, сила тока, количество вещества, сила света.

1.2. Производные величины

С помощью основных величин можно получить другие величины либо используя выражения для законов природы, либо путем целесообразного определения через умножение или деление основных величин. Например,

$$\text{Скорость} = \text{Путь}/\text{Время}, \qquad \text{Работа} = \text{Сила} \cdot \text{Путь},$$
$$\text{Плотность} = \text{Масса}/\text{Объем}, \qquad \text{Заряд} = \text{Сила тока} \cdot \text{Время},$$

и т. д.

1.3. Обозначения величин

Для представления физических величин, особенно в формулах, таблицах или на графиках, используются специальные символы — **обозначения величин.** В согласии с международными соглашениями введены соответствующие стандарты на обозначения физических величин. То же самое относится и к обозначениям, применяемым не в физике, а, например, в технике.

Принято набирать обозначения физических величин *курсивом* (*наклонным шрифтом*). Курсивом обозначаются и индексы, если они представляют собой обозначения, т. е. символы физических величин, а не сокращения.

Квадратные скобки [ ], содержащие обозначение величины, означают единицу измерения величины ..., например, выражение $[U] = \mathrm{B}$ читается следующим образом: «Единица измерения напряжения равна вольту».

Неправильно заключать в квадратные скобки единицу измерения (например, [В]), хотя такая запись встречается весьма часто.

Фигурные скобки { }, содержащие обозначения величины, означают «численное значение величины...», например выражение

$\{U\} = 220$ читается следующим образом: «численное значение напряжения равно 220».

Поскольку каждое значение величины представляет собой произведение численного значения на единицу измерения, для приведенного выше примера получается:

$$\text{Напряжение } U = \{U\} \cdot [U] = 220 \text{ В}.$$

Между численным значением и единицей измерения физической величины при написании необходимо оставлять интервал, например:

$$A = 5 \text{ мм}^2, \quad r = 12 \text{ см}, \quad \varphi = 0{,}2 \text{ рад}, \quad I = 10 \text{ А},$$
$$t = -5°\text{C}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad \alpha = 22°\,30', \quad \beta = 90°.$$

Исключение составляют обозначения единиц: градусов (°), минут (′) и секунд (″).

1.4. Размерность

Размерность физической величины устанавливает ее связь с основными величинами. Она представляет собой произведение степеней размерностей основных величин.

Основная величина	Обозначение	Обозначение размерности
Длина	l	L
Время	t	T
Масса	m	M
Сила электрического тока	I	I
Температура по шкале Кельвина	T	Θ, T
Количество вещества	n	N
Сила света	I	J, I

Таким образом, размерность (dim) скорости определяется как $\frac{\text{Путь}}{\text{Время}}$.

$$\dim v = LT^{-1}.$$

Обратите внимание:

- Необходимо строго различать понятия **размерность** и **единица измерения**. Часто единицу измерения **ошибочно** называют **размерностью**.

1.5. Скалярные величины

Необходимо различать **скалярные** и **векторные** величины.

Скалярные величины полностью характеризуются **численным значением и единицей измерения.**

Пример: время t, температура T, электрический заряд Q, масса m.

Для обозначения скалярных величин используются строчные и прописные буквы латинского и греческого алфавитов.

В расчетах скалярные величины выражаются действительными числами и с ними можно производить все без исключения действия, которые выполняются с действительными числами.

Скалярные величины могут иметь положительное или отрицательное численное значение (исключение составляет температура по шкале Кельвина).

1.6. Векторные величины

Векторная величина полностью характеризуется **численным значением, единицей измерения и направлением.**

Пример: скорость, сила, напряженность электрического поля.

Для обозначения векторной величины также используют строчные и прописные буквы латинского и греческого алфавитов. Для указания на векторный характер физической величины над обычным ее обозначением ставится стрелка: $\vec{v}$, $\vec{F}$, $\vec{E}$ и т. д.

Обратите внимание:

- Часто векторы обозначаются также жирным шрифтом: $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$ и т. д.
- Иногда векторы обозначают готическими буквами $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$ ... .

Если направление векторной величины не существенно, а важны лишь численное значение и единица измерения, называемые **величиной** вектора $\vec{A}$, то пишут $|\vec{A}|$ или просто A.

Векторная величина геометрически изображается вектором, т. е. отрезком, имеющим определенные направление и длину.

Свободные векторы можно перемещать параллельно самим себе в плоскости или пространстве. В физике векторы чаще всего связаны с их линией действия и могут перемещаться только вдоль нее (**коллинеарные векторы**). Векторы, которые исходят из строго определенной точки (например, из начала координат), вообще не могут перемещаться и называются **орт-векторами**.

Математические операции над векторными величинами подчиняются особым закономерностям.

Часто встречаются следующие величины:

- сумма векторных величин,
- разность векторных величин,
- произведение векторной и скалярной величин,
- скалярное произведение двух векторных величин,
- векторное произведение двух векторных величин.

Соответствующие правила можно найти в учебниках по математике.

2. Уравнения для физических величин

Связь между физическими величинами выражается математическими уравнениями. Следует различать три возможных способа записи уравнений:

- уравнения для величин,
- приведенные уравнения для величин,
- уравнения для численных значений.

2.1. Уравнения для величин

В принципе следует использовать только уравнения для величин. В них каждое обозначение (см. разд. 1.3) представляет символ физической величины и может принимать различные значения (равные произведению численного значения на единицу измерения). Поэтому уравнения для величин **не зависят от выбранной системы единиц измерения и принципиально справедливы.** Следовательно, уравнение для величин остается справедливым независимо от выбора единиц. **В данной книге все уравнения представляют собой уравнения для величин.**

2.2. «Приведенные» уравнения для величин

Если при расчетах часто пользуются одним и тем же уравнением и если оно содержит константы и материальные постоянные, то целесообразно, выбрав соответствующие единицы, заранее подсчитать повторяющиеся численные значения. Разумеется, тогда единицы измерения оставшихся величин не могут быть выбраны произвольно. Получают **уравнение для величин, которое в данном** конкретном случае является «приведенным». Тогда единицы измерения указываются после формулы, например:

U — напряжение в вольтах,
v — скорость в километрах в час,
P — мощность в ваттах и т. д.

В приведенных уравнениях для величин каждое обозначение также представляет физическую величину, значение которой является произведением численного значения и единицы измерения. Однако после подстановки значения единицу измерения можно сократить.

Пример:

Скорость электрона в электрическом поле определяется выражением

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}},$$

где $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. Выбрав единицы измерения оставшихся величин и подставив известные постоянные, получим

$$v = \sqrt{0{,}352 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \cdot U},$$

где v — скорость в метрах в секунду, U — напряжение в вольтах. Подстановка $\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{В}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{В}}$, 1 км $= 10^3$ м дает

$$v = \sqrt{0{,}352 \cdot 10^{12}\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}}{\text{с}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{кг} \cdot 10^6}\,U}.$$

В результате преобразований получаем приведенное уравнение для величин:

$$v = 594\sqrt{U},$$

где скорость выражена в километрах в секунду, а напряжение — в вольтах. Подставляя напряжение U в вольтах, с помощью этого приведенного уравнения для величин можно сразу получить скорость v в километрах в секунду.

2.2.1. Таблицы

Численные данные в таблицах вместе с головками таблиц также образуют приведенные уравнения для величин. При этом, конечно, численные значения имеют смысл только при одновременном задании единиц измерения.

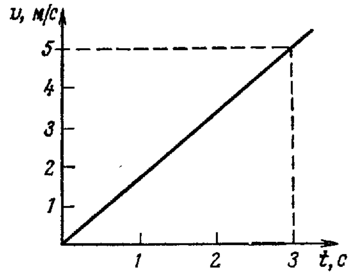
Пример:

Скорость звука

Вещество	c, м/с
Воздух (0 °C)	331
Свинец	1300
Сталь	5100
и т. д.	

2.2.2. Оси координат

Уравнения для величин могут быть представлены графически. Уравнения должны быть приведенными, поскольку численное значение, указываемое на графике, также имеет смысл лишь при одновременном определении единицы измерения.



Пример:

Точка на кривой (см. рисунок) определяется следующей парой значений: $v = 5$ м/с и $t = 3$ с.

2.3. Уравнения для численных значений

Уравнения для численных значений справедливы лишь в том случае, когда используются определенные, строго заданные единицы измерения.

Поскольку уравнения для численных значений находятся в противоречии с представлением, согласно которому

Значение величины = Численное значение × Единица измерения,

они не используются в физической литературе. Изредка такие уравнения, к сожалению, еще встречаются в устаревшей технической литературе.

3. Международная система единиц (СИ)

Измерение представляет собой важнейшую задачу физики и техники. Для осуществления измерения необходимо не только располагать нужными измерительными приборами, но и установить соответствующие единицы измерения, которые объединяются в некоторую систему.

В настоящее время повсеместно применяется принятая в 1960 г. единая Международная система единиц. На всех языках мира эта система получила сокращенное название СИ, а ее единицы называются **единицами СИ.**

3.1. Основные единицы

В Международной системе единиц (СИ) в качестве основных используются следующие 7 единиц:

- единица длины **метр** (м),
- единица времени **секунда** (с),
- единица массы **килограмм** (кг),
- единица силы электрического тока **ампер** (А),
- единица температуры **кельвин** (К),
- единица количества вещества **моль** (моль),
- единица силы света **кандела** (кд).

3.2. Производные единицы СИ

Все остальные единицы Международной системы представляют собой произведения степеней основных единиц, не содержащие численных коэффициентов, или, иначе говоря, образуются **когерентно** из основных единиц. Другие единицы являются **некогерентными** и потому не входят в СИ.

Пример:

Ватт (Вт) — когерентная единица мощности, поскольку

1 Вт = 1 кг·м^2/с^3, т. е. она выведена без численного коэффициента.

Киловатт (кВт) — некогерентная единица мощности, поскольку
1 кВт = 10^3 кг·м^2/с^3, т. е. она выведена с помощью численного коэффициента.

3.3. Десятичные кратные и дольные единицы

Единицы Международной системы при практическом использовании часто оказываются слишком большими или слишком малыми, поэтому с помощью особых **приставок** могут быть образованы десятичные кратные и дольные единицы, если это не запрещено в отдельных случаях. Сводка этих приставок дана в табл. П1.

Существуют некоторые правила использования приставок. Приведем важнейшие из них:

- Единица измерения не может содержать более одной приставки.
- Комбинация сокращенного обозначения приставки и единицы измерения составляет **единый символ**, который можно возводить

в степень; при этом скобки не применяются. Иными словами, если единица возводится в какую-либо степень, то в ту же степень возводится и десятичная приставка.

- Желательно отдавать предпочтение приставкам, которые соответствуют целочисленным степеням 10^3 (10^{3n}): Приставки гекто-, дека-, деци-, санти- следует применять только в тех наименованиях единиц, которые стали традиционными.
- В составных единицах каждая единица может содержать десятичную приставку (если она допустима для этой единицы). Однако необходимо стараться по возможности использовать при расчетах только одну приставку, стоящую в числителе. Приставки единиц измерения следует выбирать таким образом, чтобы численное значение результата лежало в области 0,1 ... 1000.

Единицы с десятичной кратной или дольной приставкой называются некогерентными и не входят в СИ. Однако они также являются законными единицами, например 1 километр (км) = 10^3 м.

3.4. Единицы, не входящие в СИ

Эти единицы выводятся некогерентно. Из-за важной роли, какую играют такие единицы в науке, технике и экономике, их разрешается применять в определенных областях в течение ограниченного, а в ряде случаев и неограниченного времени. Некоторые из них используются только в специальных областях.

3.5. Единицы, допускаемые ГОСТом[1]

Согласно постановлению Государственного комитета СССР по стандартам от 25 июня 1979 г. № 2242 с 1 января 1980 г. в СССР в качестве государственного стандарта вводится стандарт Совета Экономической Взаимопомощи СТ СЭВ 1052-78 «Метрология. Единицы физических величин». В соответствии с этим стандартом допускаются к применению следующие единицы:

- основные единицы СИ (см. разд. 3.1),
- производные единицы СИ (см. разд. 3.2),
- десятичные кратные и дольные единицы СИ (см. разд. 3.3).

Кроме того, допускается к применению ряд не входящих в СИ единиц, которые подразделяются следующим образом:

— единицы, допускаемые к применению во всех областях без ограничения срока;

[1]) Раздел переработан в соответствии с принятыми в СССР положениями. — *Прим. ред.*

— единицы, допускаемые к применению в специальных областях без ограничения срока;
— единицы, которые допускались к применению до 1 января 1980 г.;
— единицы, срок действия которых будет установлен дополнительно.

3.6. Единицы измерения важнейших физических величин

В нижеследующей таблице для каждой величины указаны сначала единица СИ и ее связь с основными единицами. Затем следуют единицы, не входящие в СИ, и устаревшие единицы с указанием связи с единицами СИ.

В графе **«Примечание»** использованы следующие сокращения:

ОЕ — основные единицы,
СИ — единицы СИ,
КД — десятичные кратные и дольные единицы СИ,
н — единицы с неограниченной областью и неограниченным сроком применения,
(н) — единицы с неограниченным сроком, но специальной областью применения,
огр — единицы с ограниченным сроком применения,
(огр) — единицы с ограниченным сроком и специальной областью применения,
80 — единицы с ограниченным сроком применения, которые допускались к применению до 1 января 1980 г.,
(80) — единицы с ограниченным сроком и ограниченной специальной областью применения, которые допускались к применению до 1 января 1980 г.,
О — единица, не определяемая в СИ.

В графе КД (образование кратных и дольных единиц) использованы следующие обозначения:

\+ — кратные и дольные единицы СИ применяются,
— — кратные и дольные единицы СИ не применяются.
/ — составная единица, см. соответствующую единицу.

Внимание! Эти же сокращения использованы во всей книге для характеристики единиц.

Физическая величина	Обозначение	Единица измерения, краткое обозначение, соотношение между единицами	Примечание	КД
Длина	l, s, r	метр, м	ОЕ	+
		астрономическая единица, а. е. $= 1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м $= 149{,}598$ Гм	(н)	—
		световой год, св. год $= 9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м	(н)	—
		парсек, пк $= 3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м	(н)	+
		ангстрем, Å $= 10^{-10}$ м	(80)	—
		икс-единица, икс-ед. $= 1{,}00206 \cdot 10^{-13}$ м	(80)	—
		морская миля, м. миля $= 1852$ м	(огр)	—
Площадь	A	$м^2$	СИ	+
		ар, а $= 10^2$ $м^2$	(80)	—
		гектар, га $= 10^4$ $м^2$	(н)	—
		барн, б $= 10^{-28}$ $м^2 = 100$ $фм^2$	(80)	+
Объем	V	$м^3$	СИ	+
		литр, л $= 10^{-3}$ $м^3 = 1$ $дм^3$	н	+
Плоский угол	α, φ	радиан, рад = м/м = 1	СИ	+
		градус, $1° = 1{,}745329 \cdot 10^{-2}$ рад	н	—
		минута, $1' = 1°/60 = 2{,}908882 \cdot 10^{-4}$ рад	н	—
		секунда, $1'' = 1'/60 = 1°/3600 = 0{,}484814 \cdot 10^{-5}$ рад	н	—
Телесный угол	Ω	стерадиан, ср $= м^2/м^2 = 1$	СИ	+
Время	t	секунда, с	ОЕ	+
		минута, мин = 60 с	н	—
		час, ч = 60 мин = 3600 с	н	—
		сутки, сут = 24 ч = 1 440 мин = 86 400 с	н	—
Частота	ν	герц, Гц = 1/с	СИ	+

Частота вращения	n	оборот/секунда, об/с = 1/с	(огр)	—
		об/мин = $1{,}666667 \cdot 10^{-2}$ 1/с	(огр)	—
Угловая частота	ω	1/с	СИ	+
Скорость	v	м/с	СИ	/
		км/ч = 1/3,6 м/с = 0,277778 м/с	н	—
		узел, уз = 1 м. миля/ч = 0,514444 м/с	(огр)	—
Ускорение	a	м/с^2	СИ	/
		Гал, Гал = 1 см/с^2 = 10^{-2} м/с^2	(80)	+
Угловая скорость	ω	рад/с = 1/с	СИ	/
		°/с = $1{,}745329 \cdot 10^{-2}$ рад/с	н	—
Угловое ускорение	α	рад/с^2 = 1/с^2	СИ	/
		°/с^2 = $1{,}745329 \cdot 10^{-2}$ рад/с^2	н	—
Масса	m	килограмм, кг	ОЕ	—
		грамм, г = 10^{-3} кг	н	+
		тонна, т = 10^3 кг	н	+
		атомная единица массы, а. е. м. = $1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг	(н)	—
		карат, кар = 0,2 г = $2 \cdot 10^{-4}$ кг	(огр)	—
Плотность	ρ	кг/м^3	СИ	/
		кг/дм^3 = т/м^3 = 10^3 кг/м^3	КД	/
		г/см^3 = кг/дм^3 = т/м^3 = 10^3 кг/м^3	КД	/
Сила	F	ньютон, Н = кг · м/с^2	СИ	+
Вес	G	килограмм-сила, кгс = 9,80665 Н	80	—
		дина, дин = 10^{-5} Н	80	+

Продолжение

Физическая величина	Обозначение	Единица измерения, краткое обозначение, соотношение между единицами	Примечание	КД
Момент силы	M	ньютон-метр, Н · м = кг · м^2/с^2	СИ	+
Момент пары сил		кгс · м = 9,80665 Н · м	80	—
Жесткость	D	Н/м = кг/с^2	СИ	/
Коэффициент упругости	k	кгс/см = 980,665 Н/м	80	/
		кгс/м = 9,80665 Н/м	80	/
Угловая жесткость	D^*	Н · м/рад = Н · м = кг · м^2/с^2	СИ	/
		кгс · м/рад = 9,80665 Н · м/рад	80	/
Коэффициент затухания	δ	1/с	СИ	+
Коэффициент трения	β	кг/с	СИ	/
Работа	W, A	джоуль, Дж = Н · м = Вт · с = кг · м^2/с^2	СИ	+
Энергия	W, E	кгс · м = 9,80665 Дж	80	—
Количество теплоты	Q	киловатт-час, кВт · ч = 3,6 · 10^6 Дж	н	—
		эрг, эрг = 10^{-7} Дж	80	+
		калория, кал = 4,1868 Дж	80	+
		электрон-вольт, эВ = 1,60219 · 10^{-19} Дж	(н)	+
		л. с · ч = 0,73549875 кВт · ч = 2,6477955 · 10^6 Дж	(80)	—
Мощность	P	ватт, Вт = Дж/с = кг · м^2/с^3	СИ	+
		кгс · м/с = 9,80665 Вт	80	/
		лошадиная сила, л. с. = 735,49875 Вт	(80)	—
		кал/с = 4,1868 Вт	80	/
		ккал/ч = 1,163 Вт	80	—

Давление	p	паскаль, Па = Н/м^2 = кг/(с^2 · м)	СИ	+
		бар, бар = 0,1 МПа = 10^5 Па	огр	+
		Торр, Торр = 133,3224 Па	80	+
		кгс/м^2 = 9,80665 Па	80	/
		техническая атмосфера, ат = 1 кгс/см^2 = 98,0665 кПа = = 0,980665 · 10^5 Па	80	—
		физическая атмосфера, атм = 760 Торр = 101,325 кПа = = 1,01325 · 10^5 Па	80	—
		метр водяного столба, м вод. ст. = 0,1 ат = 9,80665 кПа = = 0,980665 · 10^4 Па	80	+
Нормальное напряжение	σ	Па = Н/м^2 = кг/(с^2 · м)	СИ	+
Модуль упругости	E	кгс/мм^2 = 9,80665 · 10^6 Па	80	—
Модуль сдвига	G	кгс/см^2 = 9,80665 · 10^4 Па	80	—
Поверхностное натяжение	σ	Н/м = кг/с^2	СИ	/
		дин/см = 1 мН/м = 10^{-3} Н/м	80	/
Динамическая вязкость	η	паскаль-секунда, Па · с = Н · с/м^2 = кг/(м · с)	СИ	+
		пуаз, П = 0,1 Па · с	80	+
		сантипуаз, сП = 1 мПа · с = 10^{-3} Па · с	80	—
Кинематическая вязкость	ν	м^2/с	СИ	/
		стокс, Ст = см^2/с = 10^{-4} м^2/с	80	+
		сантистокс, сСт = мм^2/с = 10^{-6} м^2/с	80	—

Продолжение

Физическая величина	Обозначение	Единица измерения, краткое обозначение, соотношение между единицами	Примечание	КД
Импульс	p	Н · с = кг · м/с	СИ	/
Момент количества движения, угловой момент	L	Н · м · с = кг · м²/с	СИ	/
Момент инерции	J	кг · м²	СИ	/
Температура по шкале Кельвина	T	кельвин, К градус Кельвина, °К = К	ОЕ 80	+ —
Температура по шкале Цельсия	t	градус Цельсия, °С $t = T - T_0$; $T_0 = 273.15$ К	н	—
Разность температур	ΔT Δt °К	кельвин, К градус Цельсия, °С = К	ОЕ н 80	+ — —
Количество теплоты	Q	Дж = кг · м²/с² кал = 4,1868 Дж	СИ 80	+ +
Теплоемкость Энтропия	C S	Дж/К = Вт · с/К = Н · м/К = кг · м²/(с² · К) ккал/К = 4186,8 Дж/К	СИ 80	/ /
Удельная теплоемкость	c	Дж/(кг · К) = м²/(с² · К) ккал/(кг · К) = 4186,8 Дж/(кг · К)	СИ 80	/ /
Теплопроводность	λ	Вт/(м · К) = кг · м/(с³ · К) ккал/(м · ч · К) = 1,163 Вт/(м · К)	СИ 80	/ /

		кал/(см · с · К) = 418,68 Вт/(м · К)	80	/
Коэффициент теплообмена	α	Вт/(м^2 · К) = кг/(с^3 · К)	СИ	/
		ккал/(м^2 · ч · К) = 1,163 Вт/(м^2 · К)	80	/
Коэффициент теплопередачи	k	кал/(см^2 · с · К) = 4,1868 · 10^4 Вт/(м^2 · К)	80	/
		Дж/кг = м^2/с^2	СИ	/
Теплота сгорания	H	Дж/кг = м^2/с^2	СИ	
Удельная теплота сгорания	q, r	ккал/кг = 4186,8 Дж/кг	80	/
Давление звука	p	Па = Н/м^2 = кг/(м · с^2)	СИ	/
		мкбар = 0,1 Па	огр	—
Сила звука	J	Вт/м^2 = Дж/(с · м^2) = кг/с^3	СИ	/
Сила электрического тока	I	ампер, А	ОЕ	+
Количество электричества, заряд	Q	кулон, Кл = А · с	СИ	+
Плотность электрического тока	j	А/м^2	СИ	/
Поверхностная плотность заряда	σ	Кл/м^2 = А · с/м^2	СИ	/
Электрическое смещение	D			
Электрическое напряжение	U	вольт, В = Вт/А = кг · м^2/(с^3 · А)	СИ	+
Электрический потенциал				

Продолжение

Физическая величина	Обозначение	Единица измерения, краткое обозначение, соотношение между единицами	Примечание	КД
Электрическое сопротивление	R	Ом, Ом = В/А = кг · м^2/(с^3 · А^2)	СИ	+
Электрическая проводимость	G	сименс, См = 1/Ом = А/В = с^3 · А^2/(кг · м^2)	СИ	+
Удельное электрическое сопротивление	ρ	ом-метр, Ом · м = В · м/А = кг · м^3/(с^3 · А^2)	СИ	+
		Ом · мм^2/м = 10^{-6} Ом · м = мкОм · м	КД	/
		Ом · см = 10^{-2} Ом · м	КД	/
Удельная электрическая проводимость	σ	См/м = 1/Ом · м = с^3 · А^2/(кг · м^3)	СИ	/
Электрическая емкость	C	фарад, Ф = Кл/В = с^4 · А^2/(кг · м^2)	СИ	+
Напряженность электрического поля	E	В/м = кг · м/(с^3 · А)	СИ	/
		В/см = 10^2 В/м	КД	/
		Н/Кл = В/м	СИ	/
Электрическая постоянная	ε_0	Ф/м = А · с/(В · м) = с^4 · А^2/(кг · м^3)	СИ	/
Напряженность магнитного поля	H	А/м	СИ	/
		эрстед, Э = 79,5775 А/м	80	—
Магнитный поток	Φ	вебер, Вб = В · с = кг · м^2/(с^2 · А)	СИ	+
		максвелл, Мкс = 10^{-8} Вб	80	—
Магнитная индукция	B	тесла, Тл = Вб/м^2 = В · с/м^2 = кг/(с^2 · А)	СИ	+

Плотность магнитного потока		гаусс, Гс $= 10^{-4}$ Тл	80	—
Магнитодвижущая сила	F	ампер, А	ОЕ	+
Индуктивность	L	генри, Гн = Вб/А = кг · м²/(с² · А²)	СИ	+
Магнитная постоянная	μ_0	Гн/м = В · с/(А · м) = кг · м/(с² · А²)	СИ	/
Поток излучения	Φ_e	Вт = кг · м²/с³	СИ	+
Энергетическая экспозиция	H_e	Дж/м² = кг/с²	СИ	/
Энергетическая освещенность	E_e	Вт/м² = кг/с³	СИ	/
Энергетическая сила света	I_e	Вт/ср = кг · м²/(с³ · ср)	СИ	/
Энергетическая яркость	B_e	Вт/(ср · м²) = кг/(с³ · ср)	СИ	/
Сила света	I	кандела, кд	ОЕ	+
Яркость	B	кд/м² стильб, сб = кд/см² = 10^4 кд/м² апостильб, асб = 0,318310 кд/м²	СИ 80 (80)	/ + —
Световой поток	Φ	люмен, лм = кд · ср	СИ	+
Освещенность	E	люкс, лк = лм/м² = кд · ср/м²	СИ	+
Световая энергия	Q	люмен-секунда, лм · с = с · кд · ср	СИ	+

Продолжение

Физическая величина	Обозначение	Единица измерения, краткое обозначение, соотношение между единицами	Примечание	КД
Экспозиция (количество освещения)	H	люкс-секунда, лк · с = с · кд · ср/м^2	СИ	+
Экспозиционная доза рентгеновского и γ-излучения	X	Кл/кг = А · с/кг рентген, Р = 2,58 · 10^4 Кл/кг	СИ 80	/ +
Поглощенная доза излучения	D	грей, Гр = Дж/кг = м^2/с^2 рад, рад = 10^{-2} Дж/кг = 10^{-2} Гр	СИ 80	+ +
Мощность экспозиционной дозы рентгеновского и γ-излучения	$\dot{X}$	А/кг Р/с = 2,58 · 10^{-4} А/кг	СИ 80	/ /
Мощность поглощенной дозы излучения	$\dot{D}$	Гр/с = Вт/кг = м^2/с^3 рад/с = 10^{-2} Вт/кг = 10^{-2} Гр/с	СИ 80	/ /
Эквивалентная доза излучения	$D_э$	бэр, бэр = рад = 10^{-2} Дж/кг = 10^{-2} Гр	О	+
Активность	A	беккерель, Бк = 1/с кюри, Ки = 3,7 · 10^{10} Бк	СИ 80	+ +
Количество вещества	n	моль, моль	ОЕ	+
Молярная масса	M	кг/моль	СИ	/
Молярный объем	V_m	м^3/моль	СИ	/
Молярная теплоемкость	C_m	Дж/(моль · К) = кг · м^2/(с^2 · моль · К)	СИ	/

М МЕХАНИКА

4. Основные единицы измерения механических величин

4.1. Единицы измерения длины

Первым эталоном длины служил прототип метра — хранящийся в Париже стержень из платино-иридиевого сплава. Длина этого стержня должна была составлять одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана (длины дуги от полюса до экватора). Однако более точные измерения обнаружили отклонения от этого значения.

В настоящее время метр определяется как 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, отвечающего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Соотношение между единицами длины

10^{-3} км = 1 м = 10 дм = 10^2 см = 10^3 мм = 10^6 мкм (микрометр) = 10^9 нм (нанометр) = 10^{12} пм (пикометр)

Единицы, не входящие в СИ:

1 морская миля (миля)	= 1852 м	= 1,852 км
1 астрономическая единица (а. е.)	= $1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м	= 149,598 Гм
1 световой год (св. год)	= $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м	= 9,4605 Пм
1 парсек (пк)	= $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м	= 30,857 Пм
1 ангстрем (Å)	= 10^{-10} м	= 100 пм
1 X-единица (икс-ед.)	= $1{,}00206 \cdot 10^{-13}$ м	= 100,206 фм
1 миля = 1760 ярд	= 1609,344 м	= 1,609344 км
1 ярд = 3 фут	= 0,9144 м	= 91,44 см
1 фут = 12 дюйм	= 0,3048 м	= 30,48 см
1 дюйм	= 0,0254 м	= 25,4 мм

Обратите внимание:

- Обозначение микрон (μ, мк) для 10^{-6} м не допускается. Следует применять единицу микрометр (мкм).

4.1.1. Измерение длин

Для измерения длин пользуются главным образом линейками, рулетками, мерными лентами, концевыми мерами, микрометрами и миниметрами, пружинными индикаторами, а также оптическими методами, основанными на интерференции света.

4.1.2. Измерение площадей

Единица СИ площади: $[A]$ = **квадратный метр** **(м²)**, кроме того: ар (а) (80), гектар (га) для площади полей и земельных участков.

Соотношение между единицами площади

10^{-6} км^2 = 1 м^2 = 10^2 дм^2 = 10^4 см^2 = 10^6 мм^2
1 ар (а) = 100 м^2
1 гектар (га) = 100 а = 10^4 м^2

Единицы, не входящие в СИ:

1 квадратная миля (миля^2)	$=3{,}0976\cdot10^6$ ярд^2	$=2{,}589988\cdot10^6$ м^2
1 квадратный ярд (ярд^2)	=9 фут^2 = 1296 дюйм^2	=0,8361 м^2
1 квадратный фут (фут^2)	=144 дюйм^2 = 0,0929 м^2	=9,29 дм^2
1 квадратный дюйм (дюйм^2)	$=0{,}6452\cdot10^{-3}$ м^2	=6,452 см^2

Обратите внимание:

- По возможности следует избегать следующих сокращений:

кв. м для м^2 (квадратный метр),
кв. км для км^2 (квадратный километр),
кв. дм для дм^2 (квадратный дециметр),
кв. см для см^2 (квадратный сантиметр),
кв. мм для мм^2 (квадратный миллиметр).

Площади плоских фигур с нерегулярной границей определяются с помощью полярного планиметра.

4.1.3. Измерение объемов

Единица СИ объема: $[V]$ = **кубический метр (м³)**, кроме того: литр (л).

Объем твердых тел неправильной формы может быть измерен либо по объему вытесненной жидкости, либо путем измерения выталкивающей силы в определенной жидкости.

Соотношение между единицами объема

1 м^3 = 10^3 дм^3 = 10^6 см^3 = 10^9 мм^3
1 литр (л) = 1 дм^3

Единицы, не входящие в СИ:

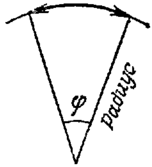
1 кубический ярд (ярд^3)	= 27 фут^3 = 46 656 дюйм^3	= 0,7646 м^3
1 кубический фут (фут^3)	= 1 728 дюйм^3	= 28,32 дм^3
1 кубический дюйм (дюйм^3)		= 16,39 см^3
1 регистровая тонна	= 100 фут^3	= 2,832 м^3
1 бушель	= 8 гал (брит.)	= 36,37 дм^3
1 галлон (гал) брит.		= 4,546 дм^3
1 галлон (гал) США		= 3,785 дм^3

Обратите внимание:

- По возможности следует избегать следующих сокращений:
 куб. м для $м^3$ (кубический метр),
 куб. дм для $дм^3$ (кубический дециметр),
 куб. см для $см^3$ (кубический сантиметр),
 куб. мм для $мм^3$ (кубический миллиметр).

4.1.4. Измерение углов

Единица СИ угла: $[\varphi]$ = **радиан (рад)**, кроме того: градус (°), (угловая) минута (′), (угловая) секунда (″).



1 полный угол = 2π рад = 360°.

Угол определяется как отношение охватываемой углом дуги окружности к радиусу:

$$\varphi = \frac{b}{r} \text{ рад.}$$

Соотношение между единицами угла

1 градус (°) = 60 минут (′) = 3600 секунд (″)	
360° = 6,28 рад	57,3° = 1 рад
180° = 3,14 рад	1° = 17,45 мрад
90° = 1,57 рад	1′ = 291 мкрад

Для измерений углов служат угломеры, часто снабженные зрительной трубой (теодолит).

Обратите внимание:

- Наименование единицы радиан (рад) обычно указывается в формулах только тогда, когда ее можно спутать с градусом. Поскольку эта единица определяется как отношение линейных размеров, отношение размерностей равно единице, т. е. радиан не имеет размерности.
- В качестве единицы углов в геодезии используется гон. 100 гон = 90°.
- Приставки для образования кратных и дольных единиц применяются только с единицами радиан и гон.

4.2. Единица измерения времени

Единица СИ времени: $[t]$ = **секунда (с)**. Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, отвечающего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Соотношение между единицами времени

1 сутки (сут) = 24 часа (ч) = 1 440 минут (мин) = 86 400 секунд (с)
1 час = 60 мин = 3 600 с

Обратите внимание:

- Приставки для образования кратных и дольных единиц применяются только с единицей секунда (с).
- Сокращение сек (sec) не допускается. Следует писать: с. Для измерения или поверки времени служат периодические процессы, например колебания (маятниковые часы, атомные часы).

4.3. Единица измерения массы

Единица СИ массы: $[m]$ = **килограмм (кг).**

Килограмм определяется как масса международного прототипа килограмма — хранящегося в Париже платино-иридиевого цилиндра высотой 39 мм и диаметром 39 мм.

Соотношение между единицами массы

1 кг = 10^3 г = 10^6 мг = 10^9 мкг
1 декаграмм (даг) * = 10 г
1 тонна (т) = 1 мегаграмм (Мг) = 10 децитонн (дт) = 10^3 кг

Единицы, не входящие в СИ:

1 длинная тонна = 2240 фунт (торговый)	= 1016,05 кг	= 1,01605 т
1 короткая тонна = 2000 фунт США	= 907,2 кг	= 0,9072 т
1 слаг = 32,174 фунт	= 14,594 кг	
1 фунт = 16 унций	= 0,4536 кг	= 453,6 г
1 унция	= 0,02835 кг	= 28,35 г

* Используется в основном в Польше, Венгрии, Австрии и Чехословакии.

Обратите внимание:

- Единица массы карат (кар) применяется только для выражения массы драгоценных камней и жемчуга: 1 кар = 0,2 г.

Масса определяется сравнением на рычажных (а не пружинных) весах.

5. Статика, равновесие твердых тел

Единица СИ силы: $[F]$ = ньютон (Н) = кг $\cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: килограмм-сила (кгс).

Соотношение между единицами силы см. в табл. П4.

5.1. Силы

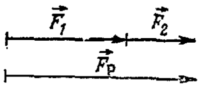
Силы — векторные величины. Они характеризуются *величиной* и *направлением действия*. Если силы изображены векторами, то они имеют вид стрелок, острия которых указывают направление, а длина характеризует величину силы. Силу, приложенную к твердому телу, можно перемещать только вдоль линии ее действия (коллинеарность векторов).

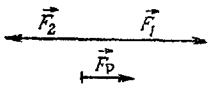
Если на тело действует несколько сил, их можно свести к одной *равнодействующей*. Отдельные силы называют *составляющими*. Объединение составляющих в равнодействующую представляет собой операцию геометрического сложения. Способ записи векторных величин см. в разд. 1.5.

Обратите внимание:

- В дальнейшем векторное обозначение для сил используется только в тех случаях, когда существенно их направление. Во всех остальных случаях имеется в виду только величина силы.

5.1.1. Силы, действующие по одной прямой



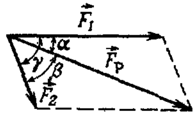


Если несколько сил действуют вдоль одной линии, то их равнодействующая равна сумме или разности величин этих сил (в зависимости от их направления), т. е. силы складываются алгебраически:

(M 5.1) $\boxed{F_p = F_1 + F_2.}$

5.1.2. Силы, приложенные к одной точке

Если две силы приложены к одной точке, то их равнодействующая определяется правилом параллелограмма. Диагональ параллелограмма, построенного на данных силах, определяет величину и направление равнодействующей. Силы складываются геометрически:



$$\vec{F}_p = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Величину равнодействующей силы можно вычислить.

Если

F_p — величина равнодействующей силы,
F_1 — величина составляющей 1,
F_2 — величина составляющей 2,

$\gamma = \alpha + \beta$ — угол между силами, то по теореме косинусов получаем

(M 5.2) $\boxed{F_p = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\gamma.}}$

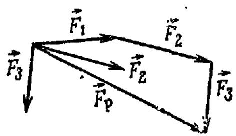
Если силы взаимно перпендикулярны, то выражение (М 5.2) упрощается, так как $\cos 90° = 0$:

(М 5.2а) $\boxed{F_p = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$. (теорема Пифагора).

Направление равнодействующей определяется соотношениями

(М 5.2б) $\boxed{\sin\alpha = \frac{F_2}{F_p}\sin\gamma \quad \text{и} \quad \sin\beta = \frac{F_1}{F_p}\sin\gamma.}$

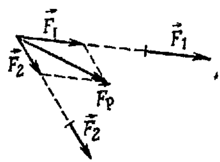
Если к точке приложено несколько сил, то для определения равнодействующей следует соответствующее число раз построить параллелограммы сил. Однако проще воспользоваться **многоугольником** сил. Для его построения надо поместить начало вектора последующей силы в конец вектора предыдущей, а затем соединить начало вектора первой силы с концом вектора последней. Если многоугольник окажется замкнутым, то равнодействующая всех сил равна нулю, т.е. все силы находятся в равновесии, их действие взаимно уравновешивается. Силы складываются геометрически:



$$\vec{F}_p = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

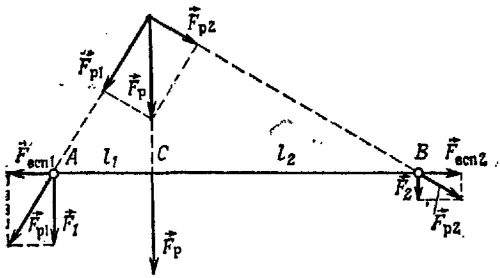
5.1.3. Силы, приложенные к разным точкам

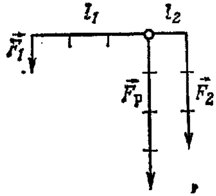
Для сложения сил, приложенных к разным точкам, следует переместить силы вдоль их линий действия до точки пересечения и затем определить равнодействующую по правилу параллелограмма. Такое построение позволяет определить величину и направление равнодействующей, но не точку ее приложения.



5.1.4. Параллельные силы

Линии действия параллельных сил не пересекаются. В этом случае добавим к каждой составляющей вспомогательную силу, так чтобы эти силы были равны по величине и противоположны по направлению, т. е. их равнодействующая была равна нулю. Затем найдем равнодействующую всех четырех сил; она и представляет собой искомую равнодействующую. Линия действия этой силы делит расстояние между двумя приложенными силами в отношении, обратном отношению сил:



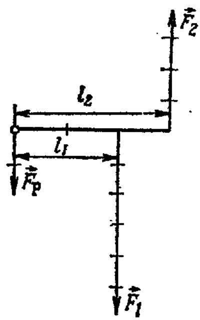


Отношение расстояний от параллельных сил до линии действия их равнодействующей обратно пропорционально отношению величин этих сил (правило рычага):

(M 5.3) $\boxed{F_1 : F_2 = l_2 : l_1.}$

Обратите внимание:

- Если силы параллельны, но направлены в противоположные стороны (антипараллельны), то равнодействующая определяется тем же способом. Но точка приложения равнодействующей в этом случае находится не между точками приложения данных сил, а по одну сторону от них.



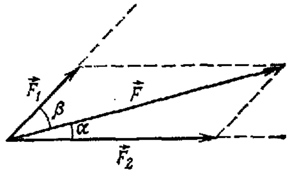
5.2. Разложение сил на составляющие

Чтобы разложить силы на составляющие, необходимо знать направление или величину последних. Направление составляющих обычно задается. В этом случае через точки приложения сил проводят линии их действия и строят на них параллелограмм. Можно также вычислить величину составляющих.

Если

F — величина силы, разлагаемой на составляющие,
F_1 — величина первой составляющей,
F_2 — величина второй составляющей,
α — угол между силами $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$,
β — угол между силами $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$,

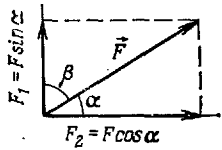
то



(М 5.4) $$\boxed{F_1 = F\,\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad F_2 = F\,\frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.}$$

Часто возникает задача разложения данной силы на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Так как в этом случае $\alpha + \beta = 90°$ и $\sin \beta = \cos \alpha$, выражения (М 5.4) упрощаются:



(М 5.4а) $$\boxed{F_1 = F\sin\alpha = F\cos\beta, \quad F_2 = F\cos\alpha = F\sin\beta.}$$

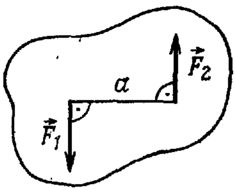
Обратите внимание:

- Если составляющие F_1 и F_2, на которые разлагается сила F, параллельны осям прямоугольной системы координат, то F_1 и F_2 часто обозначают F_x и F_y.

5.3. Момент силы

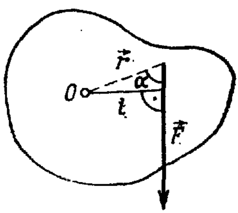
Сила, приложенная к твердому телу, которое может вращаться вокруг некоторой точки, создает момент силы. Действие момента силы аналогично действию *пары сил*.

Моментом силы относительно некоторой точки называется векторное произведение силы на кратчайшее расстояние от этой точки до линии действия силы.



Единица СИ момента силы: $[M] = Н \cdot м$. Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: кгс·м и дин·см.

Если
M — момент силы,
F — приложенная сила,
r — расстояние от центра вращения до места приложения силы,
l — длина перпендикуляра, опущенного из центра вращения на линию действия силы,
α — угол между силой $\vec{F}$ и вектором положения $\vec{r}$, то



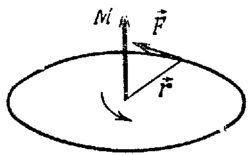
(М 5.5) $$\boxed{M = Fl = Fr\sin\alpha}$$

нли в виде векторного произведения

(М 5.5а) $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.}$

Момент силы $\vec{M}$ равен векторному произведению вектора положения $\vec{r}$ на снлу $\vec{F}$.

Момент силы — **аксиальный вектор**, он направлен вдоль оси вращения. Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика, а величина его равна M. Аксиальные векторы не связаны с определенной линией действия, их можно перемещать в пространстве параллельно самим себе (**свободные векторы**).



Если на тело, которое может вращаться вокруг какой-либо точки, действует одновременно несколько сил, то для сложения моментов этих сил следует воспользоваться **правилом сложения моментов:**

Результирующий момент силы равен сумме составляющих моментов сил.

Обратите внимание:

Необходимо различать два случая:

- Моменты сил лежат в одной плоскости. Их сумма определяется путем алгебраического сложения: правовинтовые моменты входят в сумму со знаком минус, а левовинтовые — со знаком плюс.
- Если моменты снл лежат в разных плоскостях, то оси вращения не параллельны. Сумма моментов определяется путем геометрического сложения.

5.4. Условия равновесия

Силы, действующие на твердое тело, могут вызвать как поступательное, так и вращательное движение тела. Чтобы тело находилось в равновесии, необходимо выполнение следующих условий:

Равнодействующая всех действующих на тело сил равна нулю. Сумма всех моментов сил равна нулю.

Если силы лежат в одной плоскости, получаем следующее условие равновесия:

(М 5.6) $\boxed{\sum \vec{F}_x = 0; \quad \sum \vec{F}_y = 0; \quad \sum \vec{M} = 0,}$

т. е.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_i \sin \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_i \cos \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_i l_i = 0.}$$

5.5. Простые машины

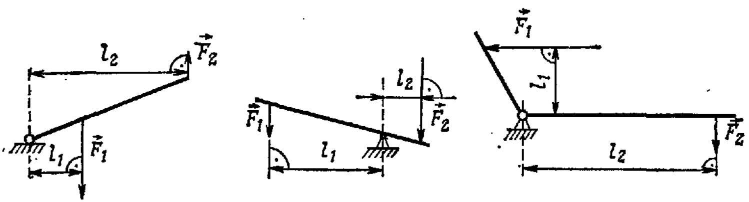
Простые машины служат для того, чтобы изменять величину или направление приложенных сил при неизменной затрате работы. Работой называется произведение силы на перемещение. Простые машины не могут изменить величину работы. Если уменьшается приложенная сила, то должно увеличиться перемещение. В силу вступает «золотое правило механики»:

> **То, что удается выиграть в силе, приходится проигрывать в перемещении.**

5.5.1. Рычаг

Рычагом называется твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси.

У *одноплечного* рычага ось расположена на одном из концов и силы, действующие на него, антипараллельны (см. разд. 5.4.4).



У *двуплечного* рычага ось расположена между точками приложения сил и силы параллельны (см. разд. 5.1.4).

Если

F_1 — сила, уравновешивающая нагрузку F_2,

F_2 — нагрузка,

l_1 — плечо силы, равное расстоянию по перпендикуляру от точки опоры до линии действия силы F_1,

l_2 — плечо нагрузки, равное расстоянию по перпендикуляру от точки опоры до линии действия нагрузки F_2,

то, согласно правилу рычага,

(М 5.7) $$\boxed{F_1 l_1 = F_2 l_2.}$$

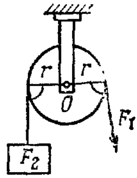
Сила × Плечо силы = Нагрузка × Плечо нагрузки.

Обратите внимание:

- Если плечи рычага образуют угол, меньший 180°, то такой рычаг называется *угловым рычагом*. В этом случае l_1 и l_2 также обозначают расстояние *по перпендикуляру* до линий действия сил от точки опоры.

5.5.2. Неподвижный блок

Неподвижный блок действует аналогично равноплечному рычагу. Моменты сил, действующие с обеих сторон блока, одинаковы, соответственно одинаковы и силы, создающие эти моменты. У неподвижного блока



(М 5.8) $\boxed{\text{Сила равна нагрузке; } F_1 = F_2.}$

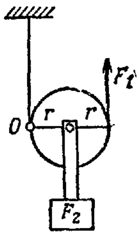
Обратите внимание:

- Неподвижный блок изменяет только направление действия силы.

5.5.3. Подвижный блок

Подвижный блок действует аналогично одноплечному рычагу. Относительно центра вращения O действуют моменты сил, которые при равновесии должны быть равны:

$F_1 2r = F_2 r$. Отсюда

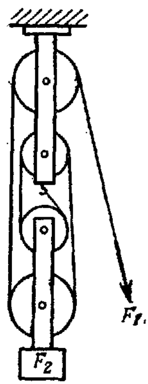


(М 5.9) $\boxed{\text{Сила равна половине нагрузки; } F_1 = \frac{F_2}{2}.}$

Обратите внимание:

- Подвижный блок изменяет только величину силы.

5.5.4. Степенной полиспаст



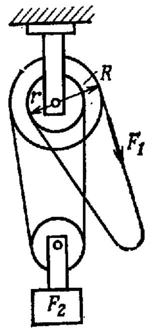
Степенной полиспаст состоит из n блоков, так что нагрузка распределяется между n веревками. При равновесии

(М 5.10) $\boxed{\text{Сила} = \frac{\text{Нагрузка}}{\text{Число веревок}}; \quad F_1 = \frac{F_2}{n}.}$

5.5.5. Дифференциальный блок

Если

R — радиус большого неподвижного блока,
r — радиус малого неподвижного блока,
F_1 — приложенная сила,



F_2 — нагрузка,
то

(М 5.11) $$\boxed{F_1 = F_2\,\frac{R-r}{2R} = \frac{F_2}{2}\left(1-\frac{r}{R}\right).}$$

5.5.6. Наклонная плоскость

Наклонная плоскость — это плоскость, расположенная под углом к горизонту. Силу тяжести, действующую на тело, находящееся на наклонной плоскости, можно разложить на две составляющие:

- **скатывающую силу**, направленную вдоль наклонной плоскости, и
- **нормальную силу**, направленную перпендикулярно наклонной плоскости.

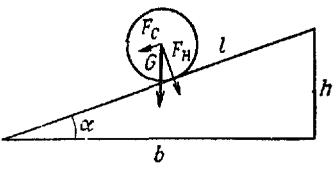
Если
G — сила тяжести, действующая на тело (вес тела),
$F_с$ — скатывающая сила,
$F_н$ — нормальная сила,
b — длина основания наклонной плоскости,
l — длина наклонной плоскости,
h — высота наклонной плоскости,
α — угол наклонной плоскости,

то $F_с : G = h : l$, или

(М 5.12) $$\boxed{F_с = \frac{Gh}{l} = G\sin\alpha,}$$

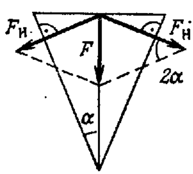
а $F_н : G = b : l$ или

(М 5.13) $$\boxed{F_н = \frac{Gb}{l} = G\cos\alpha.}$$

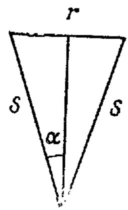


5.5.7. Клин

Клин состоит из двух наклонных плоскостей, основания которых соприкасаются. Силы реакции перпендикулярны боковым граням клина.



Если
F — сила, действующая на основание клина,
$F_н$ — силы, действующие на боковые грани клина,
r — ширина основания клина,



s — длина боковой грани клина,
α — половина угла при вершине клина,

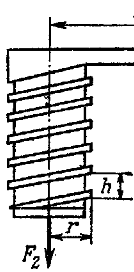
то

(М 5.14) $\boxed{F_{\text{н}} = F\dfrac{s}{r} = \dfrac{F}{2\sin\alpha}.}$

5.5.8. Винт

Винт можно представлять как наклонную плоскость, навитую на ось.

Если



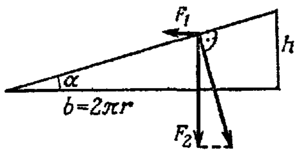
F_1 — сила, действующая на расстоянии r от оси винта и необходимая для поворота винта,
F_2 — сила, действующая в направлении оси винта,
h — шаг винта,
r — средний радиус резьбы,
α — угол наклона резьбы (наклонной плоскости),

то $F_1 : F_2 = h : b = \operatorname{tg}\alpha$, или

(М 5.15) $\boxed{F_1 = F_2 \operatorname{tg}\alpha.}$

Если сила F_1 приложена на некотором расстоянии R от оси винта, то $F_1 : F_2 = h : b = h : 2\pi R$, или

(М 5.16) $\boxed{F_1 = \dfrac{F_2 h}{2\pi R}.}$



5.6. Равновесие

5.6.1. Центр масс

Сила тяжести, действующая на тело, равна сумме сил тяжести, действующих на элементы его массы. Равнодействующая этих элементарных сил приложена к центру масс тела.

Для экспериментального определения положения центра масс достаточно поочередно подвесить тело за две различные точки на его поверхности и провести через точки подвеса вертикали. Пересечение этих линий (линий действия сил тяжести) и дает положение центра масс тела.

Центр масс тела представляет собой точку приложения равнодействующей элементарных сил тяжести. Центр масс тела может располагаться вне самого тела.

Положение центра масс можно вычислить, воспользовавшись правилом сложения моментов (см. разд. 5.3). Согласно этому правилу, момент силы тяжести, приложенной к центру масс, относительно произвольной оси должен быть равен сумме моментов всех элементарных сил тяжести относительно этой оси.

Если

G — сила тяжести, действующая на тело (вес тела),
m — масса тела,
V — объем,
ΔG, Δm, ΔV — вес, масса и объем отдельных элементов тела,
x, y, z — координаты центра масс элемента тела,

то, согласно правилу сложения моментов,

$$x_{ц}G = \sum x\,\Delta G; \quad y_{ц}G = \sum y\,\Delta G; \quad z_{ц}G = \sum z\,\Delta G.$$

Поскольку $G = mg$ (М 7.2), выражения можно сократить на величину g:

$$x_{ц}m = \sum x\,\Delta m \text{ и т. д.}$$

Для однородных тел (т. е. тел, плотность ρ которых не зависит от координат) уравнения упрощаются, так как $m = V\rho$ (М 7.3); тогда

$$x_{ц}V = \sum x\,\Delta V; \quad y_{ц}V = \sum y\,\Delta V; \quad z_{ц}V = \sum z\,\Delta V.$$

Отсюда получаем координаты центра масс **однородного тела**

(М 5.17) $$\boxed{x_{ц} = \frac{\sum x\,\Delta V}{V}; \quad y_{ц} = \frac{\sum y\,\Delta V}{V}; \quad z_{ц} = \frac{\sum z\,\Delta V}{V}.}$$

Аналогично определяются координаты центра масс **плоской фигуры:**

(М 5.18) $$\boxed{x_{ц} = \frac{\sum x\,\Delta A}{A}; \quad y_{ц} = \frac{\sum y\,\Delta A}{A}}$$

и линии:

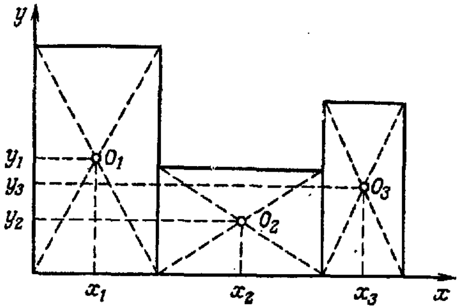
(М 5.19) $$\boxed{x_{ц} = \frac{\sum x\,\Delta l}{l}; \quad y_{ц} = \frac{\sum y\,\Delta l}{l}.}$$

Пример

Координаты центра масс плоской фигуры, изображенной на рисунке, можно определить по координатам центров масс ее частей, воспользовавшись формулами (М 5.18):

$$x_ц = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

$$y_ц = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$



Обратите внимание:

- Для вычисления центра масс необходимо знать положение центров масс элементов ΔV тела. Если не удается разбить тело на элементы с известными положениями центров масс, то прибегают к помощи дифференциального исчисления и переходят к бесконечно малым элементам объема при условии, что форму тела можно описать некоторой математической функцией. Тогда

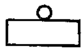
(М 5.20) $$\boxed{x_ц = \frac{1}{V}\int x\,dV; \quad y_ц = \frac{1}{V}\int y\,dV; \quad z_ц = \frac{1}{V}\int z\,dV.}$$

Аналогичными выражениями определяются координаты центра масс плоской фигуры.

5.6.2. Положение равновесия

В зависимости от того, как перемещается центр масс тела, когда тело приводят в движение, оно может находиться в устойчивом, неустойчивом и безразличном равновесии.

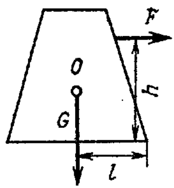
Справочная таблица

Устойчивое равновесие		Прн смещении тела центр масс подиимается
Неустойчивое равновесие		Прн смещении тела центр масс опускается
Безразличное равновесие		При смещении тела центр масс остается на том же уровне

5.6.3. Устойчивость

Положение тела устойчиво, если опущенная из его центра масс вертикаль проходит внутри контура, образованного точками опоры. Если же эта вертикаль проходит вне указанного контура, то равновесие неустойчиво и при малейшем толчке тело опрокинется. Мерой устойчивости тела служит величииа момента, приводящего к опрокидыванию, который должен быть по крайней мере равен моменту силы тяжести, препятствующему опрокидыванию.

Если



h — расстояние точки приложения опрокидывающей силы от плоскости опоры,
l — расстояние от проекции центра масс на плоскость опоры до оси опрокидываиия,
G — вес тела,
F — опрокндывающая сила,

то препятствующий опрокидыванию момент равен опрокидывающему моменту, $Gl = Fh$, т. е.

(М 5.21) $\boxed{F = \frac{Gl}{h}}$

Устойчивость тела тем выше,

- чем больше вес тела ($F \sim G$),
- чем больше площадь опоры ($F \sim l$),
- чем ниже приложеиа опрокидывающая сила $\left(F \sim \frac{1}{h}\right)$.

6. Кинематика

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения безотносительно к причинам этого движения. Различают два типа движений:

поступательное движенне и **вращательное движение**
(см. разд. 6.1) (см. разд. 6.3)

Обратите внимание:

Изучаемые в кинематике величины
— перемещение (путь) s, скорость v, ускорение a,

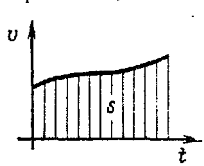
— угловая скорость ω и угловое ускорение α
являются величинами векторными. Однако при дальнейшем рассмотрении они записываются в векторной форме только в том случае, когда важно их направление. Во всех остальных случаях рассматривается только величина соответствующих векторов.

6.1. Поступательное движение

Справочная таблица

Вид поступательного движения	Скорость	Ускорение	См. раздел
Равномерное	Постоянна	Равно нулю	6.1.1
Равномерно ускоренное	Изменяется равномерно	Постоянно	6.1.2
Неравномерно ускоренное	Изменяется неравномерно	Изменяется	6.1.3

Соотношения между скоростью, перемещением и временем для всех видов поступательного движения можно определить, используя график скорости (зависимость v от t). График позволяет определить величину скорости в любой момент времени и перемещение тела к этому моменту (оно равно площади под кривой).



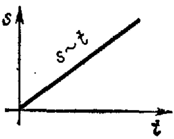
Кроме того, для установления законов движения, т. е. соотношения между названными величинами, удобно воспользоваться графиком перемещения (пути) (зависимость s от t) и графиком ускорения (зависимость a от t).

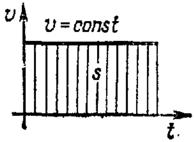
6.1.1. Равномерное поступательное движение

Поступательное движение называется равномерным, если оно происходит с **постоянной скоростью** v, т. е. тело проходит одинаковые расстояния за равные промежутки времени.

Если

v — скорость тела, постоянная в течение времени t,
s — перемещение тела за это время,
t — время движения,





то, поскольку перемещение s равно площади прямоугольника на графике скорости, имеем $s = vt$, или

(М 6.1) $\boxed{v = \frac{s}{t}.}$

Скоростью равномерного движения v называется отношение перемещения к затраченному на него времени.

Единица СИ скорости: $[v]$ = м/с.

Соотношение между единицами скорости

1 м/с = 3,6 км/ч; 1 км/ч = 0,278 м/с

Единицы, не входящие в СИ:

1 узел (уз.) = 1 $\frac{\text{морская миля}}{\text{час}}$ = 1,852 км/ч = 0,514 м/с

1 миля в час (миля/час = миля/ч) = 1,609 км/ч = 0,477 м/с

1 ярд в секунду (ярд/с) = 3,294 км/ч = 0,9144 м/с

1 фут в секунду (фут/с) = 1,0973 км/ч = 0,3048 м/с

6.1.2. Равномерно ускоренное движение

Поступательное движение называется равномерно ускоренным, если

- ускорение a = const, или
- скорость $v \sim t$.

Если

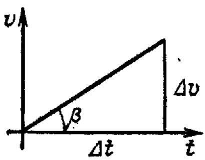
a — ускорение,

Δv — изменение скорости (увеличение или уменьшение),

Δt — время, за которое происходит изменение скорости,

то

(М 6.2) $\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.}$



На графике скорости ускорение характеризуется тангенсом угла между касательной к скорости и осью времени:

$\{a\} = \operatorname{tg} \beta$.

В случае равноускоренного движения ускорение дается отношением изменения скорости к потребовавшемуся для этого времени.

Единица СИ ускорения: $[a]$ = м/с^2.

Обратите внимание:

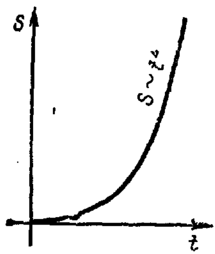
- **Замедление** отличается от ускорения только знаком (отрицательным) численного значения.

  Ускорение: $a > 0$. Замедление: $a < 0$.

При равномерно ускоренном движении надо различать два случая: движение без начальной скорости и движение с начальной скоростью.

Движение без начальной скорости

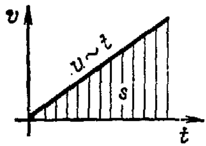
Тело начинает двигаться равноускоренно из состояния покоя. Если



v — скорость тела через промежуток времени t,
s — перемещение тела за время t,
t — время,
a — ускорение, постоянное в течение времени t,

то, поскольку на графике скорости перемещение равно площади треугольника, имеем

(M 6.3) $$\boxed{s = \frac{vt}{2},}$$

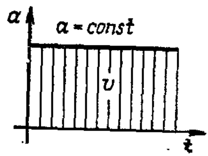


или, учитывая (M 6.5),

(M 6.4) $$\boxed{s = \frac{at^2}{2}.}$$

Поскольку движение начинается из состояния покоя, изменение скорости равно величине скорости, достигнутой к моменту времени t, и равенство (M 6.2) принимает вид

(M 6.5) $$\boxed{v = at.}$$



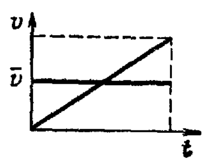
Из формулы (M 6.5) следует $t = v/a$. Подставив это равенство в формулу (M 6.3), получим

(M 6.6) $$\boxed{v = \sqrt{2as}.}$$

Средняя скорость $\bar{v}$ движения равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей

$$\bar{v} = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2}, \quad \text{или}$$

(M 6.7) $$\boxed{\bar{v} = \frac{at}{2} = \frac{s}{t}.}$$

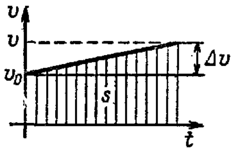


Движение с начальной скоростью

Начальная скорость v_0, т. е. скорость, которой тело обладало в момент времени $t = 0$, изменяется равномерно на величину Δv (ускорение при этом постоянно).

Если

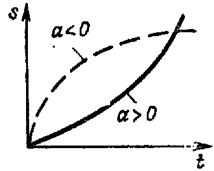
v_0 — начальная скорость в момент $t = 0$,
v — конечная скорость тела,
s — перемещение тела за время t,
t — время, продолжительность равноускоренного движения,
a — ускорение, постоянное в течение времени t,



то, поскольку пройденный путь соответствует площади трапеции на графике скорости, имеем

(М 6.8) $$\boxed{s = \frac{v_0 + v}{2}\, t.}$$

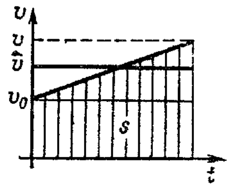
Далее, площадь трапеции можно представить как сумму площадей прямоугольника и треугольника, $s = v_0 t + \dfrac{(v - v_0)\, t}{2}$, откуда следует



(М 6.9) $$\boxed{s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.}$$

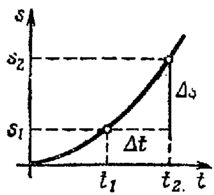
Из графика скорости следует $v = v_0 + \Delta v$, так что в соответствии с выражением (М 6.2) получаем

(М 6.10) $$\boxed{v = v_0 + at.}$$



Решив уравнение (М 6.10) относительно t и подставив результат в (М 6.8), найдем $s = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a}$. После преобразования получим выражение, не содержащее времени:

(М 6.11) $$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2as}.}$$



Средняя скорость $\bar{v}$ в данном случае равна

(М 6.12) $$\boxed{\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{at}{2} = \frac{s}{t},}$$

или за промежуток времени Δt равноускоренного движения

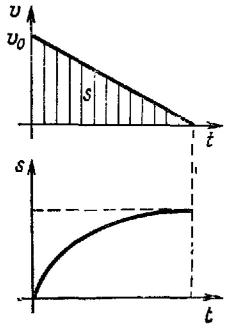
(М 6.13) $$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Если по условиям задачи следует учесть перемещение тела s_0 к моменту t_0, то из формул (М 6.8) и (М 6.9) получим

(М 6.14) $$\boxed{s = s_0 + \frac{v_0 + v}{2}\,t = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.}$$

Обратите внимание:

- Формулы (М 6.3)—(М 6.7) представляют собой частные случаи формул (М 6.8)—(М 6.12). Если движение начинается из состояния покоя, то $v_0 = 0$.
- При равнозамедленном движении (замедление представляет собой отрицательное ускорение) величина a отрицательна. Скорость v в этом случае уменьшается ($v < v_0$) и тело может остановиться ($v = 0$) или начать двигаться с отрицательной скоростью.



6.1.3. Неравномерно ускоренное поступательное движение

Поступательное движение называется неравномерно ускоренным, если изменение скорости происходит не пропорционально времени, т. е. ускорение не постоянно. В этом случае и скорость и ускорение являются функциями времени: $v = v(t)$; $a = a(t)$.

Связь величин s, v и a представлена на графиках.

Мгновенная скорость

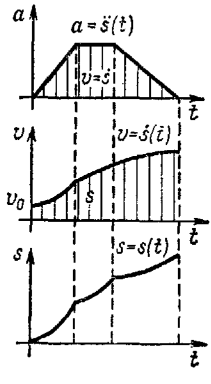
По графику перемещения можно определить расстояние, пройденное телом за данные промежутки времени. Чем круче график перемещения, тем больше в данный момент времени мгновенная скорость.

Если

α — угол между касательной и осью времени,
v — *мгновенная скорость в момент времени t,*
s — перемещение тела к моменту времени t,

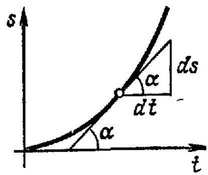
то $\{v\} = \operatorname{tg}\alpha$, или

(М 6.15) $$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.}$$



Мгновенной скоростью называется первая производная функции $s = s(t)$ по времени ($v = \dot{s}$).

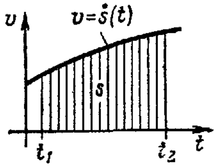
Обратите внимание:



- Для вычисления мгновенной скорости v необходимо знать зависимость перемещения от времени.
- Формулы (М 6.1) и (М 6.3) являются частными случаями формулы (М 6.15) соответственно для $a = 0$ и $a = \text{const}$.

Из формулы (М 6.15) следует $ds = v dt$. Проинтегрировав обе части выражения, получим

$$\int ds = \int v\, dt, \quad \text{или}$$



(М 6.16) $$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt.}$$

Перемещение есть интеграл по времени от скорости.

Обратите внимание:

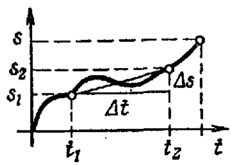
- Для вычисления s необходимо знать зависимость скорости от времени.

Средняя скорость

По определению

$$\text{Средняя скорость} = \frac{\text{Перемещение}}{\text{Время движения}},$$

(М 6.17) $$\boxed{\bar{v} = \frac{s}{t};}$$



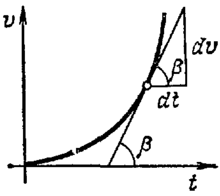
для некоторого интервала времени

(М 6.18) $$\boxed{\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Мгновенное ускорение

По графику скорости можно определить скорость в любой момент времени. Чем круче кривая скорости, тем больше мгновенное ускорение в данный момент времени.

Если



β — угол между касательной и осью времени,
a — мгновенное ускорение в момент времени t,
v — мгновенная скорость в момент времени t,

то $\{a\} = \operatorname{tg}\beta$, или

(М 6.19) $$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}.}$$

Мгновенным ускорением называется первая производная скорости по времени ($a = \dot{v}$) или вторая производная перемещения по времени ($a = \ddot{s}$).

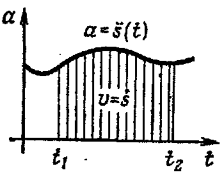
Обратите внимание:

- Для определения мгновенного ускорения необходимо знать зависимость скорости или перемещение от времени.
- Формула (М 6.2) является частным случаем формулы (М 6.19) для $a = \text{const}$.

Из формулы (М 6.19) следует $dv = adt$. Проинтегрировав обе части выражения, получим

$$\int dv = \int a\,dt \quad \text{или}$$

(М 6.20) $$\boxed{v = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt.}$$



Скорость есть интеграл по времени от ускорения.

Обратите внимание:

- Для вычисления v необходимо знать зависимость ускорения от времени.
- Формула (М 6.5) представляет собой частный случай формулы (М 6.20).

Среднее ускорение

$$\text{Среднее ускорение} = \frac{\text{Изменение скорости}}{\text{Время движения}},$$

или аналогично формуле (М 6.2)

(М 6.21) $$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}}$$

для некоторого интервала времени

(М 6.22) $$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.}$$

6.2. Падение тел

6.2.1. Свободное падение

Свободное падение представляет собой частный случай равномерно ускоренного движения без начальной скорости (см. разд. 6.1.2). Ускорение этого движения равно ускорению свободного падения (называемого также ускорением силы тяжести). Для этого движения справедливы формулы (М 6.3)—(М 6.6).

Если

v — скорость падения тела спустя время t,
$g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения,
h — высота, с которой падает тело (расстояние, пройденное за время t),
t — время, в течение которого продолжалось падение,

то из формул (М 6.3)—(М 6.6) следует

(М 6.23) $$\boxed{h = \frac{vt}{2},}$$

(М 6.24) $$\boxed{h = \frac{gt^2}{2},}$$

(М 6.25) $$\boxed{v = gt,}$$

(М 6.26) $$\boxed{v = \sqrt{2gh}.}$$

Обратите внимание:

- Сопротивление воздуха в данных формулах *не учитывается.*
- Ускорение свободного падения имеет приведенное значение ($g = 9{,}81$ м/с^2) вблизи земной поверхности. Значение g на других расстояниях от поверхности Земли: см. формулу (М 7.71).

6.2.2. Движение тела, брошенного вверх

Тело, брошенное вертикально вверх, движется равномерно замедленно с начальной скоростью v_0 и ускорением $a = -g$. Перемещение тела за время t представляет собой высоту подъема h. Для описания этого движения воспользуемся формулами (М 6.8)—(М 6.12).

Если
v_0 — начальная скорость движения тела,
v — скорость тела по истечении времени t,
$g = 9{,}81$ м/с² — ускорение свободного падения,
h — высота, на которую поднимается тело за время t,
t — время,

то из формул (М 6.8)—(М. 6.12) следует

(М 6.27) $$\boxed{h = \frac{v_0 + v}{2}\, t,}$$

(М 6.28) $$\boxed{h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},}$$

(М 6.29) $$\boxed{v = v_0 - gt,}$$

(М 6.30) $$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.}$$

Обратите внимание:

- Движение тела, брошенного **вертикально вниз**, представляет собой равномерно ускоренное движение с ускорением $a = g$. Для его описания можно воспользоваться формулами (М 6.28)—(М 6.30), поменяв в них знак «—» на «+».
- Сопротивление воздуха в данных формулах *не учитывается.*

Тело, брошенное вертикально вверх, достигает **максимальной высоты** в тот момент, когда его скорость обращается в нуль.

Если
$h_м$ — максимальная высота подъема тела,
v_0 — начальная скорость тела, брошенного вертикально вверх,
$t_{hм}$ — время, за которое тело достигает высоты $h_м$ (время подъема),
$g = 9{,}81$ м/с² — ускорение свободного падения,

то из выражения (М 6.30) для $v = 0$ следует

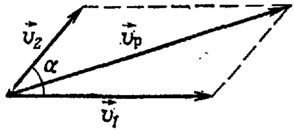
(М 6.31) $$\boxed{h_м = \frac{v_0^2}{2g},}$$

а из выражения (М 6.29) для $v = 0$ —

(М 6.32) $$\boxed{t_{hм} = \frac{v_0}{g}}$$

6.2.3. Сложение движений, направленных под углом друг к другу

Тело может одновременно участвовать в нескольких поступательных движениях. Поскольку ускорение, скорость и перемещение являются векторными величинами, их можно складывать по законам векторного (геометрического) сложения, т. е. по правилу параллелограмма. Соответственно имеем



$$\vec{s}_p = \vec{s}_1 + \vec{s}_2; \quad \vec{v}_p = \vec{v}_1 + \vec{v}_2; \quad \vec{a}_p = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Величину результирующей любой характеристики движения несложно вычислить. Покажем это на примере скорости.

Если

v_p — величина результирующей мгновенной скорости,
v_1 — величина мгновенной скорости движения 1,
v_2 — величина мгновенной скорости движения 2,
α — угол, образуемый векторами скоростей 1 и 2,

то по теореме косинусов получим

(М 6.33) $$\boxed{v_p = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha.}}$$

Если движения 1 и 2 происходят под прямым углом друг к другу, то формула (М 6.33) упрощается, поскольку $\cos 90° = 0$:

(М 6.34) $$\boxed{v_p = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.}$$

Обратите внимание:

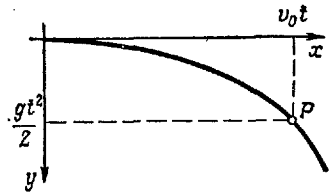
- Аналогично вычисляются величины результирующего ускорения и перемещения.
- Движение тела, брошенного вертикально, является частным случаем движения, описываемого формулой (М 6.33); для него $\alpha = 0$ или $\alpha = 180°$.

6.2.4. Движение тела, брошенного горизонтально

Движение тела, брошенного горизонтально, представляет собой комбинацию двух движений, взаимно перпендикулярных друг другу:
— горизонтального (равномерного) движения (см. разд. 6.1.1),
— вертикального (свободного падения) (см. разд. 6.2.1).

Если построить траекторию движения тела, брошенного горизонтально, в системе координат xy, то координаты каждой точки P траектории представляют собой перемещения тела в горизонтальном направлении (движение с постоянной скоростью v_0) и в вертикальном направлении (равномерно ускоренное движение с ускорением g):

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$



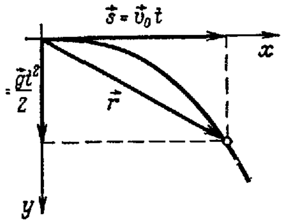
Подставив $t = x/v_0$ во второе уравнение, получим **уравнение траектории тела, брошенного горизонтально:**

$$\text{(M 6.35)} \quad \boxed{y = \frac{g}{2v_0^2}\, x^2.}$$

Так как g и v_0 — постоянные величины, то $y \sim x^2$, т. е. траектория движения представляет собой **параболу.**

Положение каждой точки траектории можно задать вектором положения $\vec{r}$, который представляет собой результирующее перемещение: $\vec{r} = \vec{s} + \vec{h}$, или

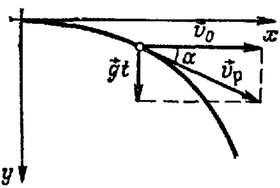
$$\text{(M 6.36)} \quad \boxed{\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.}$$



Аналогично вектор мгновенной скорости в каждой точке траектории является результирующей мгновенных скоростей обеих движений:

$$\text{(M 6.37)} \quad \boxed{\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{g}t.}$$

Направление мгновенной скорости $\vec{v}_p$ совпадает с направлением касательной в данной точке траектории:



$$\text{(M 6.38)} \quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{gt}{v_0},}$$

а величина мгновенной скорости v_p определяется по формуле (M 6.34):

$$\text{(M 6.39)} \quad \boxed{v_p = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.}$$

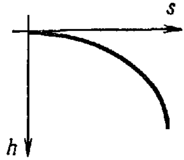
Если

s — перемещение тела за время t в горизонтальном направлении,
k — высота падения, т. е. перемещение тела за время t по вертикали,
v_0 — начальная скорость в горизонтальном направлении,
t — время, продолжительность падения,
g = 9,81 м/с² — ускорение свободного падения,

то из формул (М 6.1) и (М 6.24) следует:

(М 6.40) $$\boxed{s = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}},}$$

(М 6.41) $$\boxed{h = \frac{gt^2}{2}.}$$



Обратите внимание:

- Сопротивление воздуха в формулах (М 6.40) и (М 6.41) *не учитывается.*

6.2.5. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, представляет собой комбинацию двух поступательных движений:
— свободного падения в вертикальном направлении и
— равномерного прямолинейного движения под углом α к горизонту.

Координаты произвольной точки P траектории движения определяются уравнениями:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \text{ Отсюда } t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \text{ и}$$

$$y = \frac{v_0 x \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

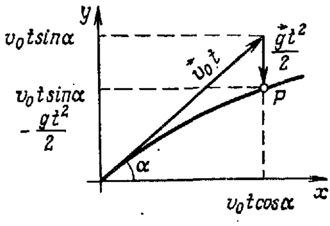
Уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту:

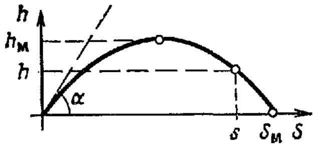
(М 6.42) $$\boxed{y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2.}$$

Поскольку v_0, α и g — постоянные величины, траектория данного движения представляет собой **параболу.**

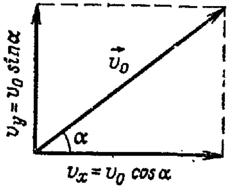
Если

v_x — горизонтальная составляющая скорости тела в момент времени t,
v_y — вертикальная составляющая скорости тела в момент времени t,
v — мгновенная скорость тела в момент времени t,
s — перемещение тела в горизонтальном направлении к моменту времени t,





h — высота подъема к моменту времени t,
$s_м$ — перемещение тела по горизонтали за все время движения $t_{sм}$,
$h_м$ — максимальная высота подъема за время $t_{hм}$,
$t_{hм}$ — время, в течение которого тело поднялось на максимальную высоту $h_м$ (время подъема),
$t_{sм}$ — время, в течение которого тело прошло расстояние $s_м$,
t — время,
α — угол, под которым брошено тело,



то, поскольку начальную скорость $\vec{v}_0$ можно разложить на
— вертикальную составляющую скорости $\vec{v}_0 \sin\alpha$ и
— горизонтальную составляющую скорости $\vec{v}_0 \cos\alpha$, в момент времени t имеем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \quad \text{и, согласно формуле (М 6.29),}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Воспользовавшись формулой (М 6.34), определим величину мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2gtv_0 \sin\alpha + g^2t^2},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)},$$

или с учетом формулы (М 6.45)

(М 6.43) $$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.}$$

Перемещения тела к моменту времени t в горизонтальном и вертикальном направлениях найдем по формулам (М 6.1) и (М 6.28):

(М 6.44) $\boxed{s = v_0 t \cos \alpha}$ и

(М 6.45) $\boxed{h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.}$

Время подъема определим из условия $v_y = 0$. Тогда $0 = v_0 \sin \alpha - g t_{h\text{м}}$ и

(М 6.46) $\boxed{t_{h\text{м}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.}$

Поскольку **общее время движения** в два раза больше времени максимального подъема (время подъема равно времени падения), имеем

(М 6.47) $\boxed{t_{в\text{м}} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}.}$

Максимальная высота подъема определится по формуле (М 6.45) $h_\text{м} = v_0 t_{h\text{м}} \sin \alpha - \frac{g t_{h\text{м}}^2}{2}$. Подставив сюда выражение (М 6.46), получим

(М 6.48) $\boxed{h_\text{м} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.}$

Дальность броска (радиус поражения) определяется по формуле (М 6.44) $s_\text{м} = v_0 t_{в\text{м}} \cos \alpha$. Подставив сюда выражение (М 6.47), получим $s_\text{м} = 2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$, или после упрощения

(М 6.49) $\boxed{s_\text{м} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.}$

Обратите внимание:

- Сопротивление воздуха при расчетах *не учитывалось.*
- При постоянной начальной скорости v_0 дальность броска (радиус поражения) $s_\text{м}$ зависит от угла α. Из выражения (М 6.49) следует, что она максимальна при $\alpha = 45°$, поскольку $\sin 2\alpha = 1$. При значениях $\alpha > 45°$, а также $\alpha < 45°$ дальность броска будет меньше.
- Формулы (М 6.27)—(М 6.32) и (М 6.39)—(М 6.41) представляют собой частные случаи формул (М 6.43)—(М 6.49) соответственно для $\alpha = 90°$ и $\alpha = 0°$.

6.3. Движение тела по окружности (вращательное движение)

Законы, определяющие движение тела по окружности, аналогичны законам поступательного движения.

Уравнения, описывающие вращательное движение, можно вывести из уравнений поступательного движения, произведя в последних следующие замены:

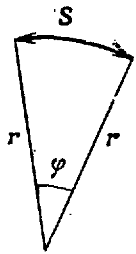
перемещение s — угловое перемещение (угол поворота) φ,
скорость v — угловая скорость ω,
ускорение a — угловое ускорение α.

Справочная таблица

Вид кругового движения	Угловая скорость ω	Угловое ускорение α	Раздел
Равномерное	Постоянная	Равно нулю	6.3.1
Равномерно ускоренное	Изменяется равномерно	Постоянное	6.3.2
Неравномерно ускоренное	Изменяется неравномерно	Переменное	6.3.3

Угол поворота

Во всех уравнениях вращательного движения углы задаются в радианах (рад); см. разд. 4.1.4



Если
φ — угловое перемещение в радианах,
s — длина дуги, заключенной между сторонами угла поворота,
r — радиус,

то по определению

(M 6.50) $\boxed{\varphi = \frac{s}{r} \text{ рад.}}$

Соотношение между единицами угла

$$\frac{\varphi\,(\text{рад})}{\varphi} = \frac{\pi}{180°} \qquad 1 \text{ рад} = 57{,}3°; \quad 1° = 17{,}45 \text{ мрад}; \quad 1' = 291 \text{ мкрад}$$

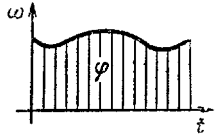
Обратите внимание:

- Наименование единицы радиан (рад) обычно указывается в формулах только в тех случаях, когда ее можно спутать с градусом. Поскольку радиан равен отношению длин двух отрезков (1 рад = 1 м/1 м = 1), он не имеет размерности.

Справочная таблица

$\varphi°$:	30	45	60	90	120	150	180	270	360
φ, рад:	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0,524	0,785	1,05	1,57	2,09	2,62	3,14	4,71	6,28

Соотношения между угловой скоростью, угловым перемещением и временем для всех видов движения по окружности наглядно видны на графике угловой скорости (зависимость ω от t). По этому графику можно определить, какой угловой скоростью обладает тело в тот или иной момент времени и на какой угол с момента начала движения оно повернулось (он характеризуется площадью под кривой).



Кроме того, для представления соотношений между названными величинами используют график углового перемещения (зависимость φ от t) и график углового ускорения (зависимость α от t).

Число оборотов

Характеристикой всех видов вращения является **число оборотов** n или равноценная ей характеристика — **частота** f. Обе величины характеризуют число оборотов в единицу времени.

Единица СИ частоты (или числа оборотов) $[n] = [f] = \frac{\text{Обороты}}{\text{Секунда}} = \frac{(\text{об})}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}}$,

В технике число оборотов обычно измеряется в оборотах в минуту (об/мин) $=$ 1/мин.

Таким образом, величина, обратная числу оборотов, есть продолжительность одного оборота.

Если
n — число оборотов,
f — частота,
T — продолжительность одного оборота, период,
φ — угловое перемещение,
N — полное число оборотов,
t — время, продолжительность вращения,
ω — угловая частота,

то

(М 6,51) $$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{1}{n}.}$$

Угловое перемещение равно произведению полного числа оборотов па 2π:

(М 6.52) $\boxed{\varphi = 2\pi N.}$

Из формулы (М 6.54) для *одного* оборота следует

(М 6.53) $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.}$

Обратите внимание:

- Формулы (М 6.51)—(М 6.53) справедливы для всех видов вращательного движения — как для равномерного движения, так и для ускоренного. В них могут входить постоянные величины, средние значения, начальные и конечные значения, а также любые мгновенные значения.
- Вопреки своему названию число оборотов n — *это не число*, а физическая величина.
- Следует различать число оборотов n и полное число оборотов N.

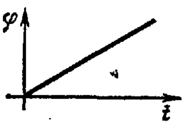
6.3.1. Равномерное движение тела по окружиости

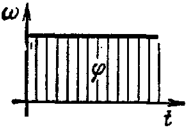
Говорят, что тело движется по окружности равномерно, если его **угловая скорость постоянна**, т. е. тело за равные промежутки времени поворачивается на один и тот же угол.

Если
ω — угловая скорость (постоянная в течение времени t),
φ — угловое перемещение,
t — время поворота на угол φ,

то, поскольку на графике угловой скорости площадь прямоугольника соответствует угловому перемещению, имеем $\varphi = \omega t$, или

(М 6.54) $\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}.}$





Постоянной угловой скоростью ω называется отношение углового перемещения (угла поворота) ко времени, затраченному на это перемещение.

Единица СИ угловой скорости: $[\omega] =$ рад/с $= 1$/с.

6.3.2. Равномерно ускоренное движение тела по окружиости

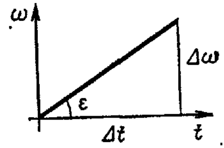
Движение по окружности называется равномерно ускоренным, если

- угловое ускорение $\alpha = \text{const}$, или
- угловая скорость $\omega \sim t$.

Если
α — угловое ускорение,
$\Delta\omega$ — изменение скорости вращения (увеличение или уменьшение),
Δt — время, за которое происходит это изменение угловой скорости,

то

(М 6.55) $\boxed{\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}.}$



Согласно этому выражению, угловое ускорение на графике скорости характеризуется тангенсом угла между касательной к кривой скорости и осью времени: $\{\alpha\} = \operatorname{tg}\varepsilon$.

Постоянным угловым ускорением называется отношение изменения угловой скорости к продолжительности этого изменения.

Единица СИ углового ускорения: $[\alpha]$ = рад/с^2 = 1/с^2.

Обратите внимание:

- Угловое замедление отличается от углового ускорения только знаком (отрицательным)

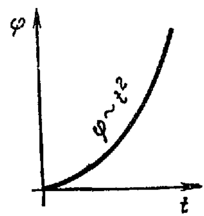
Угловое ускорение:	Угловое замедление:
$\alpha > 0$	$\alpha < 0$

При движении тела по окружности с постоянным угловым ускорением следует различать два случая: движение с начальной угловой скоростью и без нее.

Движение без начальной угловой скорости

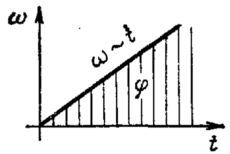
Тело начинает двигаться из состояния покоя, и его угловая скорость равномерно возрастает.

Если
ω — мгновенная угловая скорость тела в момент времени t,
α — угловое ускорение, постоянное в течение времени t,
φ — угловое перемещение тела за время t,
t — время,



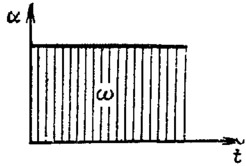
то, поскольку на графике скорости угловое перемещение равно площади треугольника, имеем

(М 6.56) $\boxed{\varphi = \dfrac{\omega t}{2},}$ (φ в радианах) или по формуле (М 6.58)



(М 6.57) $\boxed{\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}.}$ (φ в радианах)

Поскольку вращение тела начинается из состояния покоя, изменение угловой скорости $\Delta\omega$ равно достигнутой в результате ускорения угловой скорости ω. Поэтому формула (М 6.55) принимает следующий вид:



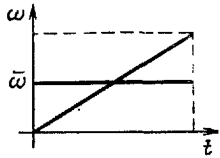
(М 6.58) $\boxed{\omega = \alpha t;}$

отсюда $t = \omega/\alpha$. Подставляя этот результат в формулу (М 6.56), после перестановки получим

(М 6.59) $\boxed{\omega = \sqrt{2\alpha\varphi}.}$

Средняя угловая скорость $\bar{\omega}$ равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей:

$$\bar{\omega} = \frac{0 + \omega}{2} = \frac{\omega}{2}, \quad \text{иначе}$$



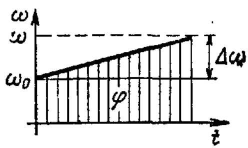
(М 6.60) $\boxed{\bar{\omega} = \frac{\alpha t}{2} = \frac{\varphi}{t}.}$

Обратите внимание:

Формулы (М 6.51)—(М 6.53) справедливы и для случая ускоренного движения по окружности.

Движение с начальной скоростью

Начальная скорость тела, равная ω_0 в момент $t = 0$, изменяется равномерно на величину $\Delta\omega$. (Угловое ускорение при этом постоянно.)



Если
ω_0 — начальная угловая скорость,
ω — конечная угловая скорость,
φ — угловое перемещение тела за время t,
t — время,
α — угловое ускорение, постоянное в течение времени t,

то, поскольку на графике скорости угловое перемещение соответствует площади трапеции под кривой скорости, имеем

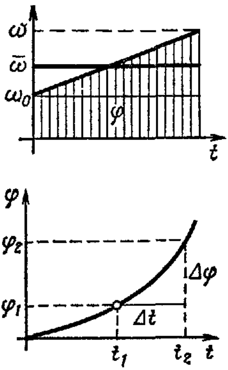
(М 6.61) $\boxed{\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t}$ (φ в радианах).

Так как площадь трапеции равна сумме площадей образующих ее треугольника и прямоугольника, получаем

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\omega - \omega_0}{2} t, \text{ откуда}$$

(M 6.62) $\boxed{\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}}$ (φ в радианах).

Далее из графика скорости следует $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, откуда в соответствии с формулой (M 6.55) имеем



(M 6.63) $\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t.}$

Разрешив уравнение (M 6.63) относительно t и подставив результат в (M 6.61), найдем $\varphi = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)/2\alpha$. После преобразования получаем выражение, не содержащее времени:

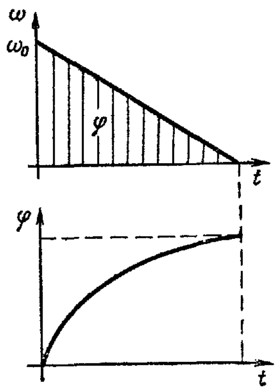
(M 6.64) $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\varphi}}$ (φ в радианах).

Средняя угловая скорость соответственно равна

(M 6.65) $\boxed{\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} = \omega_0 + \frac{\alpha t}{2} = \frac{\varphi}{t};}$

за промежуток времени Δt

(M 6.66) $\boxed{\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.}$

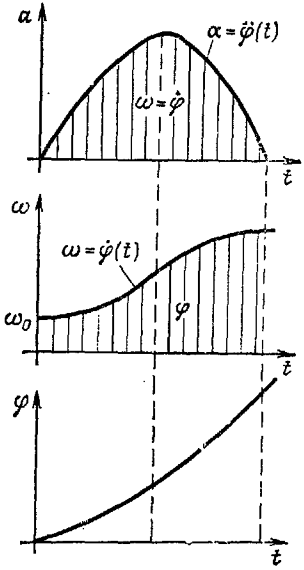


Обратите внимание:

- Формулы (M 6.56)—(M 6.60) представляют собой частный случай формул (M 6.61)—(M 6.65), в которых ω_0 надо положить равным нулю, поскольку **движение** начинается из состояния **покоя**.
- При замедленном **движении** по окружности **ускорение α отрицательно**. Угловая **скорость ω в этом** случае уменьшается ($\omega < \omega_0$), **возможно**, до нуля (состояние покоя) или даже до **отрицательных** значений.

6.3.3. Неравномерно ускоренное движение тела по окружности

Движение тела по окружности будет неравномерно ускоренным, если изменение угловой скорости происходит не пропорционально времени, т. е. если угловое ускорение не остается постоянным. В этом случае и угловая скорость и угловое ускорение являются функциями времени:



$$\omega = \omega(t), \quad \alpha = \alpha(t).$$

Связь величин φ, ω и α представлена на соответствующих графиках.

Мгновенная угловая скорость

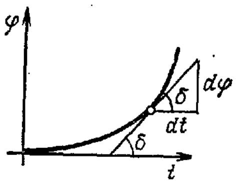
Полный угол поворота тела в любой момент времени можно определить по графику углового перемещения. Чем круче график, тем больше в данный момент времени мгновенная угловая скорость.

Если

δ — угол между касательной и осью времени t,
ω — мгновенная угловая скорость,
φ — угловое перемещение к моменту времени t,

то $\{\omega\} = \operatorname{tg}\delta$, или

(M 6.67) $$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.}$$



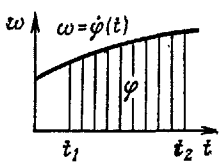
> Мгновенной угловой скоростью называется первая производная функции $\varphi = \varphi(t)$ по времени ($\omega = \dot{\varphi}$)

Обратите внимание:

- Чтобы вычислить мгновенную угловую скорость ω, необходимо знать зависимость углового перемещения от времени.
- Формулы (M 6.54) и (M 6.56) являются частными случаями формулы (M 6.67) соответственно для $\alpha = 0$ и $\alpha = \text{const}$.

Из формулы (М 6.67) следует $d\varphi = \omega dt$. Проинтегрировав обе части выражения, получим $\int d\varphi = \int \omega\, dt$ или

(М 6.68) $$\boxed{\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt.}$$



Угловое перемещение есть интеграл по времени от угловой скорости.

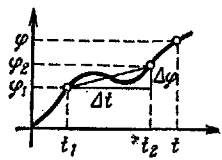
Обратите внимание:

- Для вычисления углового перемещения φ необходимо знать зависимость угловой скорости от времени.

Средняя угловая скорость

Средняя угловая скорость $= \dfrac{\text{Угловое перемещение}}{\text{Время}}$.

(М 6.69) $$\boxed{\bar{\omega} = \frac{\varphi}{t}.}$$



Средняя угловая скорость для некоторого интервала времени

(М 6.70) $$\boxed{\bar{\omega} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.}$$

Среднее число оборотов определяется аналогично формуле (М 6.53):

(М 6.71) $$\boxed{\bar{n} = \bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}}$$

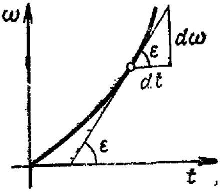
Мгновенное угловое ускорение

Скорость вращения тела в любой момент времени можно определить по графику угловой скорости. Чем круче график угловой скорости, тем больше мгновенное ускорение в данный момент времени.

Если

ε — угол между касательной и осью времени t,
α — мгновенное угловое ускорение в момент времени t,
ω — мгновенная угловая скорость в момент времени t,

то $\{\alpha\} = \operatorname{tg}\varepsilon$ или



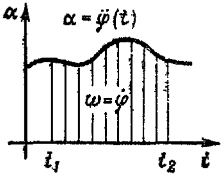
(М 6.72) $$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot\omega = \ddot\varphi.}$$

Мгновенным угловым ускорением называется первая производная угловой скорости по времени ($\alpha = \dot\omega$) или вторая производная углового перемещения по времени ($\alpha = \ddot\varphi$).

Обратите внимание:

- Для определения углового ускорения α необходимо знать зависимость угловой скорости или углового перемещения от времени.
- Формула (М 6.55) представляет собой частный случай ($\alpha =$ const) формулы (М 6.72).

Из формулы (М 6.72) для мгновенной угловой скорости следует $d\omega = \alpha dt$; проинтегрировав обе части выражения, получим $\int d\omega = \int \alpha\, dt$ или



(М 6.73) $$\boxed{\omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha\, dt.}$$

Угловая скорость есть интеграл по времени от углового ускорения.

Обратите внимание:

- Для вычисления угловой скорости ω надо знать зависимость углового ускорения от времени.
- Формула (М 6.58) представляет собой частный случай ($\alpha =$ const) формулы (М 6.73).

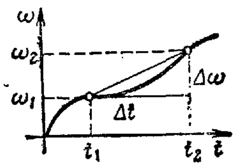
Среднее угловое ускорение

$$\text{Среднее угловое ускорение} = \frac{\text{Изменение угловой скорости}}{\text{Время}}$$

По аналогии с формулой (М 6.55) имеем

(М 6.74) $$\boxed{\bar\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}.}$$

Среднее угловое ускорение за некоторый интервал времени



(М 6.75) $$\boxed{\bar\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}.}$$

$\Delta\vec{v}$ всегда направлено перпендикулярно к исходной скорости. Отношение $\Delta\vec{v}/\Delta t$ называется радиальным, нормальным или центростремительным ускорением и обозначается $a_р$, $a_н$, $a_ц$. Если величина радиального ускорения постоянна, то тело движется по окружности.

- Если изменяются и величина и направление скорости, то тело движется по криволинейной траектории. В этом случае помимо радиального ускорения $a_р$ тело обладает тангенциальным ускорением $a_т$, направленным по касательной к траектории.

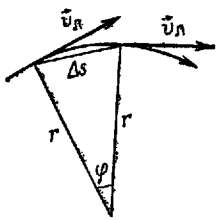
6.4.1. Радиальное (нормальное) ускорение

При движении тела по криволинейной траектории возникает радиальное ускорение. Оно всегда перпендикулярно направлению мгновенной скорости.

Для достаточно малого промежутка времени Δt справедливы следующие соотношения:

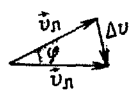
$$\frac{\Delta s}{r}=\frac{\Delta v}{v_л}.$$ Так как $\Delta s = v_л\,\Delta t$, имеем

$$\frac{\Delta v}{v_л}=\frac{v_л\,\Delta t}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_л^2}{r}.$$



Отсюда получается радиальное ускорение

(М 6.82) $$\boxed{a_р=\frac{v_л^2}{r}=\omega^2 r.}$$

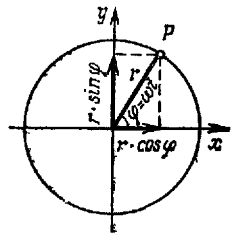


Обратите внимание:

- Радиальное ускорение меняет только направление, но не величину скорости.

Тот же результат можно получить, рассмотрев координаты лежащей на окружности точки P, в которой в данный момент находится тело:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$



Из выражения (М 6.49) следует $\varphi = \omega t$. Согласно формуле (М 6.18), $a = \ddot{s}$, т. е. ускорение представляет собой вторую производную перемещения по времени. Продифференцировав дважды координаты точки P, найдем ускорения в направлении осей координат:

$$\dot{x} = -\omega r \sin \omega t, \qquad \dot{y} = \omega r \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t.$$

Знаки минус указывают на то, что ускорение направлено к началу координат. Отсюда для результирующего ускорения имеем

$$a_{\text{р}}^2 = (-\omega^2 r \cos \omega t)^2 + (-\omega^2 r \sin \omega t)^2,$$

$$a_{\text{р}}^2 = \omega^4 r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t),$$

$$a_{\text{р}} = \sqrt{\omega^4 r^2} = \omega^2 r,$$

что совпадает с формулой (M 6.82).

7. Динамика

Динамика рассматривает силы в качестве причины движения тел. При этом следует различать:

- динамику поступательного движения, или динамику материальной точки, и
- динамику вращательного движения, или динамику твердого тела.

7.1. Динамика поступательного движения

7.1.1. Масса и сила

Первый закон Ньютона:

> Если на тело не действует внешняя сила, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Это свойство называется **инерцией** тел.

Из первого закона Ньютона следует:

> Любое изменение состояния движения обусловлено действием сил.

Связь между действующей силой и вызванным ею изменением состояния движения (ускорением) устанавливает

Второй закон Ньютона:

> Ускорение тела пропорционально силе, действующей на тело: $\boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{a}$.

Из второго закона Ньютона следует:

> Отношение величины силы, действующей на тело, к приобретенному телом ускорению постоянно для данного тела. Это отношение представляет собой массу тела.
>
> $$\text{Масса} = \frac{\text{Сила}}{\text{Ускорение}}.$$

Масса тела является неизменной характеристикой данного тела, не зависящей от его местоположения. Масса характеризует два свойства тела:

- Инерцию: тело изменяет состояние своего движения только под воздействием внешней силы.
- Тяготение: между телами действуют силы гравитационного притяжения.

Эти свойства присущи не только телам, т. е. веществу, но и другим формам существования материи (например, излучению, полям). Справедливо следующее общее утверждение:

Масса характеризует свойство любого вида материи быть инертной и тяжелой, т. е. принимать участие в гравитационных взаимодействиях.

Обратите внимание:

- Масса тела зависит от его скорости (см. разд. 41.4.1).
  Однако релятивистское увеличение массы заметно только при очень больших скоростях, т. е. прежде всего у элементарных частиц. Наименьшее значение массы тела, т. е. его масса в состоянии покоя, называется массой покоя.

Используя понятие массы, можно представить соотношение между силой (причиной) и ускорением (следствием).

Если

F — сила, вызывающая ускорение тела,
m — масса тела,
a — приобретенное телом ускорение,

то **основное уравнение динамики** выглядит следующим образом:

(М 7.1) $\boxed{F = ma,}$

	F	m	a
СИ	Н	кг	м/с^2

или в векторной форме

(М 7.2) $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}.}$

Единица СИ силы: $[F]$ = ньютон (Н) = кг·м/с^2.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: килограмм-сила (кгс).

Соотношение между единицами силы в разных системах см. в табл. П4.

Определение:

Силой в один ньютон называется сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Соотиошение между единицами силы

Единицы, не входящие в СИ:

1 килограмм-сила (кгс)		$= 9{,}80665$ Н
1 дина (дин)		$= 10^{-5}$ Н
1 тонна-сила (длинная) 1 тонна веса (длинная)	$= 1016{,}047$ кгс	$= 9964{,}015$ Н
1 тонна-сила (короткая) 1 тонна веса (короткая)	$= 907{,}2$ кгс	$= 8896$ Н
1 фунт-сила 1 фунт веса	$= 0{,}45359$ кгс	$= 4{,}448$ Н
1 паундаль	$= 0{,}0141$ кгс	$= 0{,}138255$ Н

На каждое тело действуют гравитационные силы притяжения со стороны Земли и других небесных тел.

Действующей на тело **силой тяжести** (или просто весом тела) называется сила притяжения в гравитационном поле небесных тел.

В соответствии с формулой (*M* 7.1) гравитационная сила притяжения (сила тяжести) сообщает телу ускорение. Это ускорение называется **ускорением свободного падения** (ускорением силы тяжести или гравитационным ускорением).

Если
G — сила тяжести, действующая на тело (вес тела),
m — масса тела,
g — ускорение свободного падения,
то из формулы (*M* 7.1) следует

(M 7.3) $\boxed{G = mg.}$

	G	m	g
СИ	Н	кг	м/с^2

Обратите внимание:

- Величина нормального ускорения свободного падения $g_н$ (т. е. на уровне моря на 45° северной широты) составляет 9,80665 м/с^2. На полюсах ускорение свободного падения больше (9,832 м/с^2), а на экваторе меньше (9,780 м/с^2). При расчетах обычно пользуются средним значением, равным 9,81 м/с^2.
- Из формулы (*M* 7.3) и соотношения между ньютоном и килограмм-силой следует: на уровне моря на «нормальной» широте масса тела в килограммах численно равна действующей на него силе тяжести, выраженной в килограммах силы.

Третий закон Ньютона

Если одно тело действует с некоторой силой на другое тело, то на него со стороны последнего также действует сила, равная первой по величине, но противоположная по направлению. Таким образом, силы действуют всегда парами, т. е. носят характер взаимодействия. Каждой действующей на тело силе $\vec{F}$ соответствует противодействие $\vec{F}'$, приложенное к другому телу.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона)

Каждой силе $\vec{F}$ соответствует сила противодействия $\vec{F}'$ (сила реакции), равная по величине, но противоположно направленная: $\vec{F}' = -\vec{F}$. Силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}'$ приложены к разным телам (действие равно противодействию).

Примеры сил взаимодействия

— сила гравитационного притяжения двух тел;
— силы притяжения или отталкивания двух магнитов;
— силы притяжения или отталкивания двух электрически заряженных тел;
— силы притяжения нуклонов в атомном ядре;
— силы, возникающие при упругой деформации;
— силы взаимодействия молекул и т. д.

Обратите внимание:

- Если две силы приложены к одному телу (равные или неравные по величине, но противоположные по направлению), то они не являются силами действия и противодействия (силами реакции) в смысле третьего закона Ньютона.

7.1.2. Плотность

Тела, имеющие одинаковые объемы, но состоящие из разных веществ, обладают различной массой.

Отношение массы тела к его объему называется плотностью.

$$\text{Плотность} = \frac{\text{Масса}}{\text{Объем}}.$$

Если
ρ — плотность тела,
m — масса тела,
V — объем тела,
то

(М 7.4) $$\boxed{\rho = \frac{m}{V}.}$$

		ρ	m	V
Для твердых и жидких тел:	КД	кг/дм^3	кг	дм^3
	КД	г/см^3	г	см^3
Для газообразных тел:	СИ	кг/м^3	кг	м^3

Обратите внимание:

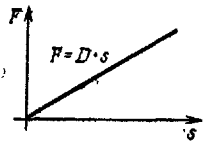
- Численные значения плотностей см. в табл. 1.
- Плотность твердых и жидких веществ зависит от их температуры. Значение плотности при других температурах определяется по формуле (Т 13.10).
- Плотность газов зависит от давления и температуры. В таблицах приводятся значения, соответствующие температуре 0°С и давлению 101,325 кПа (760 мм рт. ст.), т. е. нормальная плотность $\rho_н$. Значение плотности при других условиях определяется по формуле (Т 13.22).
- **Удельным весом** γ называется отношение веса тела, т. е. силы тяжести, действующей на тело, к его объему. В случаях когда удельный вес измеряется в кгс/дм^3 (или кгс/м^3 для газов), численные значения плотности и удельного веса совпадают.

7.1.3. Упругие силы

Согласно первому и второму закону Ньютона, все изменения состояния движения тела вызываются силами. Кроме того, силы, создавая давление либо растяжение, могут изменять форму тела, например длину пружины.

Силы служат причиной либо ускорения тела (динамическое действие), либо изменения его формы (статическое действие).

В пределах упругости вещества сила и деформация пропорциональны друг другу. В этом случае справедлив закон Гука (М 12. 1). Коэффициент пропорциональности D называется жесткостью (коэффициентом упругости).



Если
D — жесткость,
F — сила, вызывающая изменение длины тела (например пружины),
s — изменение длины тела под действием силы F,
то

(М 7.5) $$\boxed{D = \frac{F}{s}.}$$

	D	F	s
СИ	Н/м	Н	м
КД	Н/см	Н	см
80	кгс/см	кгс	см

Действующей на тело (пружину) силе противодействует сила, называемая упругой силой. С учетом направления действия получим для упругой силы формулу, аналогичную формуле (М 7.5):

(М 7.6) $$\boxed{\vec{F} = -D\vec{s}.}$$

Единицы: см. (М 7.5).

Обратите внимание:

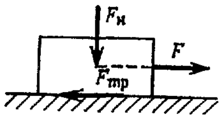
- Чем жестче тело (чем труднее растянуть пружину), тем выше жесткость D (коэффициент упругости k).
- Для измерения сил применяется пружинный динамометр, в котором изменение длины пружины характеризует величину приложенной силы. Пружинный динамометр, используемый для определения силы тяжести, называется пружинными весами.

7.1.4. Сила трения

Движущееся тело теряет свою энергию, не только преодолевая сопротивление окружающей среды, но и из-за наличия трения. Сила трения действует на поверхности соприкосновения тел и затрудняет их перемещение относительно друг друга.

Сила трения всегда направлена вдоль поверхности соприкосновения в сторону, противоположную движению. Она всегда меньше силы нормального давления.

Если
$F_{\text{тр}}$ — сила трения,
μ — коэффициент трения,
$F_{\text{н}}$ — сила нормального давления, которая прижимает тело к опоре,



то

(M 7.7) $\boxed{F_{\text{тр}} = \mu F_{\text{н}}.}$

Обратите внимание:

- Трение не зависит от площади соприкосновения тел.
- Ориентировочные значения коэффициента трения приведены в табл. 2.

Различают следующие виды трения:

- **Трение покоя** проявляется в том случае, когда тело, находившееся в состоянии покоя, приводится в движение. Коэффициент трения покоя обозначается μ_0.
- **Трение скольжения** проявляется при наличии движения тела; оно значительно меньше трения покоя ($\mu < \mu_0$).
- **Трение качения** проявляется в том случае, когда тело катится по опоре; оно значительно меньше трения скольжения ($\mu' \ll \mu$).

Сила трения качения зависит от радиуса катящегося предмета. В типичных случаях (при расчетах трения качения колес поезда, автомашины), когда радиус колеса известен и постоянен, его учитывают непосредственно в коэффициенте трения качения μ'.

Коэффициент трения можно определить экспериментально. Для этого помещают тело на наклонную плоскость и определяют угол наклона, при котором тело начинает двигаться (коэффициент трения покоя μ_0), а также угол наклона, при котором тело движется с постоянной скоростью (коэффициент трения скольжения μ).

Если
μ — искомый коэффициент трения,
α — угол наклонной плоскости,

то при указанных условиях имеем:

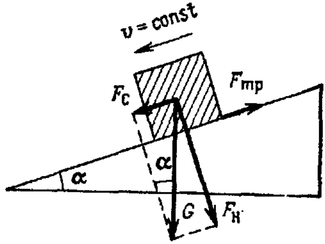
сила трения равна скатывающей силе

$$\mu F_н = F_c,$$

$$\mu G \cos\alpha = G \sin\alpha,$$

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{или}$$

(M 7.8) $\boxed{\mu = \operatorname{tg}\alpha.}$



Сопротивление движению

Энергия движущегося транспортного средства расходуется не только на преодоление трения колес о покрытие дороги (трение качения), но и на преодоление трения в подшипниках осей. Оба коэффициента трения учитываются вместе в **коэффициенте сопротивления движению.** Для вычисления сопротивления движению следует пользоваться формулой (M 7.7). Значения коэффициентов трения приведены в табл. 2.

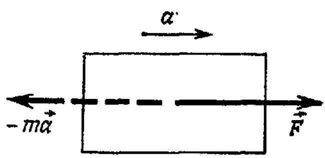
7.1.5. Силы инерции (случай поступательного движения)

Силы являются **причиной** любого изменения состояния движения, т. е. любого ускорения. Ускорение возникает в направлении действия силы. Кроме того, существуют так называемые **силы инерции,** которые возникают как **следствие** ускорений. Они направлены в сторону, противоположную ускорению. Силы инерции возникают только в системе отсчета, движущейся с ускорением, т. е. это **кажущиеся силы.**

Силы, вызывающие ускорение данного тела, и силы инерции, возникающие вследствие ускорения, всегда равны по величине и противоположно направлены.

Если
F — сила, сообщающая телу ускорение,
$F_н$ — сила инерции,
m — масса тела,
a — ускорение,

то $\vec{F}_н = -\vec{F}$, или



(M 7.9) $\boxed{\vec{F}_н = -m\vec{a}, \text{ или } \vec{F} - m\vec{a} = 0.}$

	F	m	a
СИ	Н	кг	м/с²

Чтобы установить, как движется тело, на которое действует сразу несколько сил, часто пользуются принципом **динамического равновесия** $\left(\sum F = 0\right)$, причем в этом случае кроме действующих сил и сил трения следует также учитывать кажущиеся силы инерции (принцип Д'Аламбера).

7.2. Работа, энергия и мощность

7.2.1. Работа

Если сила перемещает тело на некоторое расстояние, то она совершает над телом работу.

Работой W называется произведение силы на перемещение.
Работа = Сила × Перемещение.

Единица СИ работы: $[W] = [F] \cdot [s] =$ Н·м = Дж = Вт·с = кг·м²/с².

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: килограмм-сила на метр (кгс·м) и эрг

Соотношение между единицами работы

Единицы, не входящие в СИ:

1 кВт·ч		$= 3{,}6 \cdot 10^6$ Дж
		$= 3{,}6$ МДж
1 кгс·м		$= 9{,}80665$ Дж
1 эрг		$= 10^{-7}$ Дж
1 л. с.·ч	$= 2{,}737 \cdot 10^5$ кгс·м	$= 2{,}684$ МДж
1 фунт-сила-фут	$= 0{,}1383$ кгс·м	$= 1{,}3558$ Дж
1 фунт-сила-дюйм	$= 0{,}01152$ кгс·м	$= 0{,}11298$ Дж
1 паундаль-фут	$= 4{,}297$ гс·м	$= 42{,}14$ мДж
1 фунт-сила-ярд	$= 0{,}4148$ кгс·м	$= 4{,}06745$ Дж

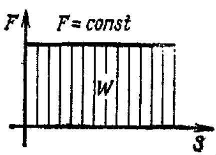
Обратите внимание:

- Соотношение между единицами работы см. в табл. П5.

Если

W — совершенная работа,
F — постоянная сила, совпадающая по направлению с перемещением,
s — перемещение тела,

то

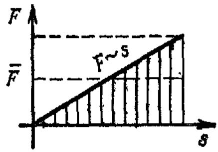


(М 7.10) $\boxed{W = Fs.}$

	W	F	s
СИ	Дж	Н	м
80	кгс·м	кгс	м

Обратите внимание:

- Сила должна совпадать по направлению с перемещением. В противном случае следует пользоваться формулой (М 7.11).
- Величина силы должна оставаться постоянной во время перемещения. Если сила меняется по линейному закону, как, например, при растяжении пружины, следует пользоваться средним значением силы; в иных случаях — формулой (М 7.13).



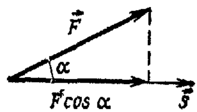
Если сила и перемещение составляют между собой угол $\alpha < 90°$, то перемещение следует умножать на составляющую силы в направлении перемещения (или силу умножать на составляющую перемещения в направлении действия силы).

Если

α — угол между направлениями действия силы и перемещением,

то в соответствии с выражением (М 7.10)

(М 7.11) $$\boxed{W = Fs\cos\alpha,}$$



или в векторной форме

(М 7.12) $$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}.}$$

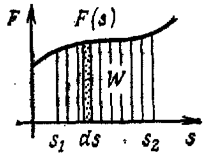
Обратите внимание:

- Работа — величина скалярная.

Если сила не постоянна по величине, а является функцией перемещения, $F = F(s)$, и направлена под углом α к перемещению, то

$$dW = F\cos\alpha\, ds, \text{ или}$$

(М 7.13) $$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha\, ds,}$$



или в векторной форме

(М 7.14) $$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, d\vec{s}.}$$

▌ Работа есть интеграл от силы по перемещению.

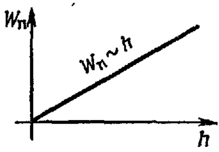
Обратите внимание:

- Из этого определения следует, что площадь под кривой на графике зависимости F от s равна работе, произведенной данной силой.

Работа против силы тяжести

Если тело равномерно поднимается, т. е. движется с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению действия силы тяжести, то, согласно формуле (М 7.10), над телом совершается работа $W = Fs$, где F — сила; она совпадает по направлению с перемещением s и равна по величине весу тела G.

Если
$W_{п}$ — работа по поднятию тела,
G — вес тела (сила тяжести, действующая на тело),
m — масса тела,
g = 9,81 м/с^2 — ускорение свободного падения,
$s = h$ — перемещение, т. е. высота, на которую поднимается тело,



то

(М 7.15) $\boxed{W_{п} = Gh = mgh.}$

	W	G	h	m	g
СИ	Дж	Н	м	кг	м/с^2
80	кгс·м	кгс	м	кг	м/с^2

Обратите внимание:

- Совершенная над телом работа запасается в виде энергии, связанной с положением тела (потенциальной энергии); см. разд. 7.2.2.
- Формула (М 7.15) определяет также работу, затрачиваемую на подъем тела без трения по любому пути (включая наклонную плоскость); в этом случае высота подъема h равна составляющей перемещения в направлении действия силы тяжести.

Работа против сил трения

Если тело движется с постоянной скоростью (равномерно) против сил трения, то, согласно формуле (М 7.10), над ним совершается работа $W = Fs$. При этом сила F совпадает по направлению с перемещением s и равна по величине силе трения $F_{тр}$.

Если
$W_{тр}$ — работа против сил трения,
$F_{тр}$ — сила трения,
μ — коэффициент трения,
$F_{н}$ — сила нормального давления,
s — перемещение,

то

(М 7.16) $\boxed{W_{тр} = F_{тр}s = \mu F_{н}s.}$

	W	F	s	μ
СИ	Дж	Н	м	—
80	кгс·м	кгс	м	—

Обратите внимание:

- Работа против сил трения превращается в тепловую энергию. При движении тела вверх по наклонной плоскости совершается работа против силы тяжести и сил трения. В этом случае сила, действующая в направлении перемещения, складывается из скатывающей силы F_c и силы трения $F_{тр}$. В соответствии с формулой (М 7.10)

$$W = (F_c + F_{тр})\,s = (F_c + \mu F_н)\,s = (G \sin\alpha + \mu G \cos\alpha)\,s,$$

откуда

(М 7.17) $\boxed{W = mgs\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).}$

	W	m	g	s	μ
СИ	Дж	кг	м/с²	м	—

Работа, затрачиваемая на ускорение тела

Если под действием постоянной силы $F_у$ тело равномерно ускоренно перемещается на расстояние s, то, согласно формуле (М 7.10), над ним совершается работа $W = F_у s$. При этом сила $F_у$, ускорение a и перемещение s имеют одинаковое направление.

Если
$W_у$ — работа, затрачиваемая на ускорение тела,
m — масса тела,
v — скорость, которую достигает тело,
a — ускорение,
то $W_у = F_у s = mas$. Если ускорение сообщается телу, находящемуся в состоянии покоя, то, согласно формуле (М 6.6), $W_у = m\dfrac{v^2}{2s}\,s$, т. е.

(М 7.18) $\boxed{W_у = mas = \dfrac{1}{2}\,mv^2.}$

	m	a	s	v	W
СИ	кг	м/с²	м	м/с	Дж

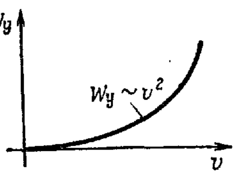
Если ускорение сообщается телу, уже обладающему скоростью $v_0 \neq 0$, то в (М 7.18) a следует найти из формулы (М 6.11):
$a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2s}$. Тогда

(М 7.19) $\boxed{W_у = mas = \dfrac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right).}$ Единицы: см. (М 7.18)

Обратите внимание:

- Совершенная над телом работа запасается в форме кинетической энергии тела $W_к$.

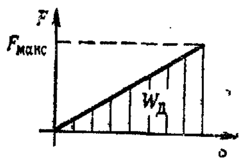
- Из формул (М 7.18) и (М 7.19) видно, что работа, затрачиваемая на ускорение тела, не зависит от характера приложенной к телу силы. Поэтому действующая на тело сила не обязательно должна быть постоянной, а может зависеть от перемещения или времени:



$$F_у = F_у(s) \quad \text{или}$$
$$F_у = F_у(t).$$

Работа, затрачиваемая на упругую деформацию тела

Если пружина растягивается на длину s, то действующая на пружину сила в соответствии с выражением (М 7.5) возрастает пропорционально s от 0 до $F_{макс}$. Тогда в формулу (М 7.10) для работы $W = Fs$ следует подставить среднее значение силы



$$\bar{F} = \frac{F_{макс}}{2}.$$

Если
$W_д$ — работа против упругой силы, работа по деформации пружины
D — жесткость пружины,
s — растяжение,

то, согласно формуле (М 7.5), $W_д = \frac{Ds}{2} s$, т. е.

(М 7.20) $$\boxed{W_д = \frac{1}{2} Ds^2}$$

	W	D	s
СИ	Дж	Н/м	м
80	кгс·м	кгс/м	м

Обратите внимание:

- Работа, затрачиваемая на деформацию (растяжение) пружины, запасается в виде потенциальной энергии $W_п$ растянутой пружины.
- Формулу (М 7.20) можно вывести, воспользовавшись формулой (М 7.14) $W = \int\limits_{s_1}^{s_2} F\,ds$ при $s_1 = 0$ и $F = Ds$.

7.2.2. Энергия

Любая работа, совершаемая над телом, увеличивает его энергию и делает его способным в свою очередь совершать работу.

Энергией W называется способность тела совершать работу. Энергия = Способность тела совершать работу или запас работы.

Энергия измеряется в тех же единицах что и работа.

Единица СИ энергии: $[W]$ = джоуль (Дж) = Н·м = Вт·с = = кг·м²/с².

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: кгс·м и эрг.

Обратите внимание:

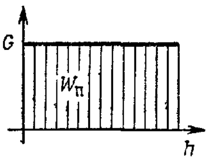
- Соотношение между единицами энергии в разных системах см. в табл. П5.

Потенциальная энергия (энергия положения и энергия упругой деформации)

Чтобы увеличить расстояние тела от центра Земли (поднять тело), над ним следует совершить работу. Эта работа запасается в виде потенциальной энергии тела.

Если

$W_п$ — потенциальная энергия тела, энергия положения,
m — масса тела,
h — высота, на которое поднято тело,
g ≈ 9,81 м/с² — ускорение свободного падения,



то, поскольку, согласно формуле (М 7.15), работа, затраченная на подъем тела $W_п = Gh = mgh$, потенциальная энергия тела равна

(М 7.21) $$\boxed{W_п = Gh = mgh.}$$

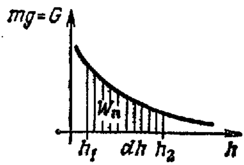
	W	G	h	m	g
СИ	Дж	Н	м	кг	м/с²
80	кгс·м	кгс	м		

Обратите внимание:

- Потенциальная энергия, определяемая по формуле (М 7.21), не является полной потенциальной энергией тела, а представляет собой лишь приращение потенциальной энергии при подъеме тела на высоту h, поскольку начало отсчета выбирается произвольно.

Формула (М 7.21) верна при условии, что ускорение свободного падения g постоянно по всей высоте подъема, т. е. в случае подъема на относительно небольшую высоту. В гравитационном поле любого небесного тела сила тяжести и соответственно ускорение свободного падения тела убывают пропорционально квадрату расстояния от центра этого тела; см. (М 7.69). Поэтому при подъеме на большую высоту следует учитывать, что $g = g(h)$ и, следовательно $G = G(h)$:

(М 7.22) $$\boxed{W_п = m\int_{h_1}^{h_2} g\,dh.}$$



Обратите внимание:

- Если тело опускается с высоты h, то выделяется определяемая формулами (М 7.21) и (М 7.22) энергия $W_п$, зависящая от расстояния, на которое опустилось тело.
- Если тело падает с высоты h, то его потенциальная энергия $W_п$ целиком превращается в кинетическую энергию $W_к$ (энергию движения).

Работа, затрачиваемая на деформацию упругих тел, также накапливается в этих телах в виде потенциальной энергии.

Если
$W_п$ — потенциальная энергия, работа, затраченная на упругую деформацию,
D — жесткость тела или пружины,
s — величина деформации,

то аналогично (М 7.20) имеем

(М 7.23) $$\boxed{W_п = \frac{Ds^2}{2}.}$$

	W	D	s
СИ	Дж	Н/м	м
80	кгс · м	кгс/м	м

Кинетическая энергия (энергия движения)

Чтобы сообщить телу ускорение и заставить его двигаться с определенной скоростью, нужно совершить работу. Эта работа запасается в виде кинетической энергии тела.

Если
$W_к$ — кинетическая энергия тела,
m — масса тела,
v — скорость тела,

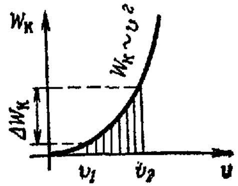
то, поскольку работа, затраченная на ускорение тела, согласно формуле (М 7.18), равна $W_у = mas = \frac{1}{2} mv^2$, кинетическая энергия тела запишется в виде

(М 7.24) $$\boxed{W_к = \frac{1}{2} mv^2.}$$

	m	v	W
СИ	кг	м/с	Дж

Изменение величины скорости от v_1 до v_2 приводит к изменению кинетической энергии, которое записывается в виде

(М 7.25) $$\boxed{\Delta W_к = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).}$$



Обратите внимание:

- Если $v_2 < v_1$, то выражение в скобках отрицательно, $\Delta W_к < 0$, т. е. тело отдает свою кинетическую энергию.

7.2.3. Закон сохранения энергии

Этот закон гласит, что энергия не может исчезать бесследно или возникать из ничего.

Полная энергия замкнутой системы, которая не отдает своей энергии и не получает энергии извне, остается неизменной.

Этот общий закон в применении к механике означает следующее:

Закон сохранения механической энергии

В замкнутой механической системе сумма механических видов энергии (потенциальной и кинетической энергии, включая энергию вращательного движения) остается неизменной.

(М 7.26) $\boxed{W_п + W_к + W_{вр} = W_{полн} = \text{const}.}$

Обратите внимание:

- Энергия вращательного движения определяется в разд. 7.4.7.
- Потенциальная энергия включает энергию положения и энергию упругой деформации.
- На практике не бывает чисто механических процессов, так как вследствие трения часть механической энергии превращается в тепловую энергию.

7.2.4. Мощность

Мощностью P называется отношение произведенной работы и времени, в течение которого совершена работа.

$$\text{Мощность} = \frac{\text{Работа}}{\text{Время}}.$$

Единица СИ мощности: $[P]$ = ватт (Вт) = Дж/с = кг·м²/с³.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: килограмм-сила-метр в секунду (кгс·м/с) и (для машин и механизмов) лошадиные силы (л. с.).

Соотношение между единицами мощности

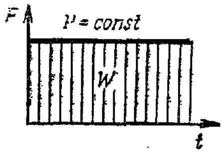
Единицы, не входящие в СИ:

1 кгс · м/с	= 9,80665 Вт
1 л. с.	= 735,49875 Вт
1 эрг/с	= 0,1 мкВт = 10^{-7} Вт
1 л. с. (брит.)	= 745,7 Вт
1 фунт-сила-фут в секунду	= 1,356 Вт
1 фунт-сила-дюйм в секунду	= 0,11298 Вт
1 паундаль-фут в секунду	= 42,14 мВт
1 фунт-сила-ярд в секунду	= 4,06745 Вт

Средняя мощность

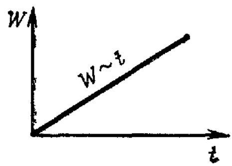
Если
$\overline{P}$ — средняя мощность,
W — работа,
t — время, затраченное на совершение работы,

то



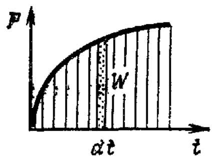
(M 7.27) $\boxed{\overline{P} = \dfrac{W}{t}.}$

	P	W	t
СИ	Вт	Дж	с
80	кгс·м/с	кгс·м	с



Обратите внимание:

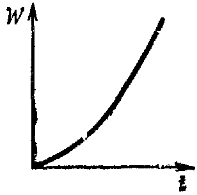
- Если работа пропорциональна времени, $W \sim t$, то мощность постоянна.



Мгновенная мощность

В большинстве случаев мощность зависит от времени, $P = P(t)$. В то время как средняя мощность вычисляется по формуле (M 7.27), мгновенная мощность определяется как

(M 7.28) $\boxed{P = \dfrac{dW}{dt} = \dot{W}.}$



Мгновенная мощность есть производная работы по времени: $P = \dot{W}$.

Поскольку $dW = Fds$ (M 7.13), из формулы (M 7.28) следует $P = Fds/dt$. Так как $ds/dt = \dot{s} = v$, имеем

(M 7.29) $\boxed{P = Fv.}$

	P	F	v
СИ	Вт	Н	м/с
80	кгс·м/с	кгс	м/с

Мгновенная мощность равна произведению мгновенной силы на мгновенную скорость.

Обратите внимание:

- Формула (M 7.29) справедлива в том случае, когда F *или* v постоянны. Если же F и v остаются постоянными, то P представляет собой постоянную мощность.

При равномерно ускоренном движении ($F = \text{const}$)

$$P_{\text{макс}} = Fv_{\text{макс}}; \quad \bar{P} = F\bar{v}.$$

7.2.5. Коэффициент полезного действия (КПД)

Каждая машина потребляет бóльшую мощность, чем отдает, поскольку в ней происходят потери мощности (за счет трения, сопротивления воздуха, нагревания и т. д.).

Коэффициент полезного действия представляет собой отношение отдаваемой мощности к подводимой мощности.

Если

η — КПД,

$P_{\text{отд}}$ — отданная мощность, т. е. полезная или эффективная мощность, равная подведенной мощности минус мощность потерь,

$P_{\text{подв}}$ — подведенная мощность, называемая также номинальной, приводной или индикаторной мощностью,

то

(M 7.30) $$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{подв}} - P_{\text{потерь}}}{P_{\text{подв}}} = 1 - \frac{P_{\text{потерь}}}{P_{\text{подв}}} = \frac{P_{\text{отд}}}{P_{\text{подв}}}.}$$

Часто бывает целесообразно определять КПД не как отношение мощностей, а как отношение работ, особенно в тех случаях, когда работа над телом совершается не одновременно с работой, производимой самим телом, и с другой скоростью (например, растяжение и сжатие пружины). Поэтому КПД определяют также следующим образом:

$$\text{Коэффициент полезного действия} = \frac{\text{Полезная работа}}{\text{Общая работа}}$$

Обратите внимание:

- КПД по мощности η_P и КПД по работе η_W совпадают только в том случае, когда продолжительность подвода и выделения энергии одинакова.
- Вследствие неизбежных потерь КПД всегда меньше единицы; $\eta < 1$.
- Часто КПД выражают в процентах, т. е. $\eta = \frac{P_{\text{отд}}}{P_{\text{подв}}} \cdot 100\%$, или $\eta = \frac{W_{\text{отд}}}{W_{\text{подв}}} \cdot 100\%$.

Общий коэффициент полезного действия

При многократном превращении или передаче энергии общий коэффициент полезного действия равен произведению КПД на всех ступенях преобразования энергии:

(М 7.31) $\boxed{\eta_{\text{общ}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots}$

7.3. Импульс и соударение (столкновение) тел

7.3.1. Импульс (количество движения)

Импульсом тела называется произведение массы тела на его скорость.

Импульс — векторная величина. Его направление совпадает с направлением скорости.
Единица СИ импульса: $[p]$ = кг·м/с = Н·с.

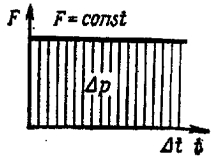
Если
p — импульс тела,
m — масса тела,
v — скорость тела,

то

(М 7.32) $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.}$

	p	m	v
СИ	Н·с = кг·м/с	кг	м/с

Изменение импульса тела постоянной массы может происходить только в результате изменения скорости и всегда обусловлено действием силы.



Если
Δp — изменение импульса тела,
m — масса тела,
$\Delta v = v_2 - v_1$ — изменение скорости,
F — ускоряющая тело постоянная сила,
Δt — продолжительность действия силы,

то, согласно (М 7.2) и (М 6.2), имеем

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

(М 7.33) $$\boxed{\Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v} = \vec{F}\,\Delta t.}$$

	p	F	t	m	v
СИ	Н·с = кг·м/с	Н	с	кг	м/с

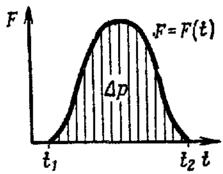
Произведение $F\Delta t$ называется **импульсом** силы. Он равен изменению импульса (количества движения) тела.

Единица СИ импульса силы: $[F\Delta t]$ = Н·с = кг·м/с.

Обратнте вннманне:

- Формула (М 7.33) справедлнва только в том случае, когда сила постоянна в течение времени Δt.

Если сила меняется со временем, т. е. $\vec{F} = \vec{F}(t)$, то



(М 7.34) $$\boxed{\Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt.}$$

Измененне импульса (количества движения) тела равно интегралу от снлы по временн.

Из (М 7.32) вытекает следующее определенне силы: $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, откуда

(М 7.35) $$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\,(m\vec{v})}{dt} = \dot{\vec{p}}.}$$

Мгновенное значение силы равно первой производной импульса тела по времени.

Обратите внимание:

- Формула (М 7.35) справедлива и в том случае, когда масса тела меняется в процессе ускорения (релятивистское увеличение массы ускоренных элементарных частиц, запуск ракеты и т. д.).

7.3.2. Закон сохранения импульса

Этот закон играет в физике столь же основополагающую роль, как и закон сохранения энергии.

Закон сохранения импульса

Полный импульс замкнутой системы (на которую не действуют внешние силы) остается постоянным.

(М 7.36) $$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \vec{p}_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const.}}$$

Обратите внимание:

- Полный импульс системы $\vec{p}_{\text{полн}}$ есть **векторная сумма** отдельных импульсов.
- Так как полный импульс системы $\vec{p}_{\text{полн}}$ не меняется, векторная сумма всех изменений импульсов должна обращаться в нуль:

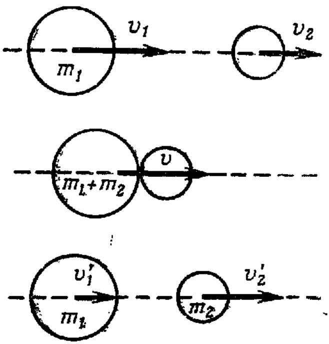
$$\Delta\vec{p}_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{p}_i = 0.$$

7.3.3. Упругое соударение (лобовое центральное)

Соударение — это столкновение двух тел. При соприкосновении тела обмениваются энергией и импульсом. После соударения они двигаются со скоростями, которые отличаются по направлению и величине от их скоростей до столкновения.

При лобовом центральном соударении центры масс обоих тел двигаются вдоль одной линии. Силы взаимодействия, возникающие при соударении, параллельны направлению движения. Если применить к такой системе двух тел закон сохранения импульса, то полный импульс системы будет равен **алгебраической** сумме импульсов обоих тел.

При упругом соударении на протяжении кратковременного соприкосновения тела двигаются с общей скоростью, затем они разлетаются и продолжают двигаться с разными скоростями.



Если
m_1 — масса первого тела,
m_2 — масса второго тела,
v_1 — скорость первого тела до соударения,
v_2 — скорость второго тела до соударения,
v — общая скорость обоих тел в момент соударения,
v_1' — скорость первого тела после соударения,
v_2' — скорость второго тела после соударения,

то из закона сохранения импульса (М 7.36) следует

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \text{ или}$$

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2).$$

Из закона сохранения энергии получаем

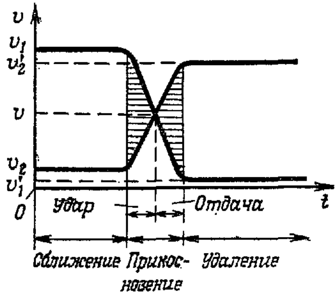
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \text{ или}$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2), \text{ откуда}$$

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2), \text{ откуда,}$$

воспользовавшись законом сохранения импульса, находим

(М 7.37) $$\boxed{v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.}$$



Сумма скоростей до и после соударения одинакова при любом соударении тел.

Из формулы (М 7.37) следует

$$v_2' = v_1' + v_1 - v_2,$$

$$v_1' = v_2 + v_2' - v_1.$$

Подставив эти выражения в видоизмененный закон сохранения импульса, получим

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1' + v_1 - v_2 - v_2')$$

и

$$m_1 (v_1 - v_2 - v_2' + v_1) = m_2 (v_2' - v_2),$$

откуда, разрешив относительно v_1' и v_2', найдем

(М 7.38) $$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_2 + m_1}. \end{aligned}}$$

	m	v	v'
СИ	кг	м/с	м/с

Обратите внимание:

- При противоположном направлении движения скорость считается отрицательной.

● Поскольку полная энергия до и после соударения остается неизменной, после столкновения тела приобретают свою первоначальную форму; возникающие в момент соударения деформации исчезают.

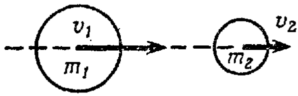
7.3.4. Неупругое соударение (лобовое центральное)

Если происходит неупругое соударение тел, то они деформируются в месте соприкосновения и затем двигаются с общей скоростью.

Если
m_1 — масса первого тела,
m_2 — масса второго тела,
v_1 — скорость первого тела до соударения,
v_2 — скорость второго тела до соударения,
v — общая скорость обоих тел после соударения,

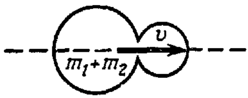
то, согласно формуле (М 7.36),

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,v;$$



отсюда

(М 7.39) $$\boxed{v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.}$$



Согласно закону сохранения энергии кинетическая энергия системы после соударения меньше, чем до него, так как часть энергии расходуется на неупругую деформацию тел.

Если
W_1 — сумма кинетических энергий обоих тел до соударения,
W_2 — сумма кинетических энергий обоих тел после соударения,
ΔW — потеря энергии, равная работе, затраченной на деформацию,

то, согласно (М 7.25),

$$W_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}, \text{ а}$$

$$W_2 = \frac{(m_1 + m_2)\,v^2}{2}.$$

Подставив в это равенство выражение (М 7.39) для v и преобразовав его, получим выражение для работы, затраченной на деформацию:

(М 7.40) $$\boxed{\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{m_1m_2}{2\,(m_1 + m_2)}\,(v_1 - v_2)^2.}$$

Обратите внимание:

- При противоположном направлении движения скорость считается отрицательной.

7.3.5. Частично упругое соударение (лобовое центральное)

При упругом соударении сумма энергий соударяющихся тел не изменяется, а при неупругом соударении, для которого выполняется условие $v_1' = v_2' = v$, большая часть полной энергии затрачивается на деформацию тел. Оба этих процесса представляют собой идеализированные частные случаи.

В реальных процессах более или менее значительная часть энергии растрачивается на создание небольших деформаций и на преодоление сил внутреннего трения.

Часть работы, затраченной на деформацию тел при неупругом соударении, $\Delta W = W_1 - W_2$ (М 7.40), снова превращается в кинетическую энергию, а именно $(W_1 - W_2)k^2$.

Если
W — потеря энергии при частично упругом соударении,
m_1 — масса первого тела,
m_2 — масса второго тела,
v_1 — скорость первого тела до соударения,
v_2 — скорость второго тела до соударения,
v_1' — скорость первого тела после соударения,
v_2' — скорость второго тела после соударения,
k — коэффициент восстановления,

то

$$W = (W_1 - W_2) - (W_1 - W_2)k^2 \text{ или}$$
$$= (W_1 - W_2)(1 - k^2).$$

С учетом формулы (М 7.40) получим

(М 7.41) $$\boxed{W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 (1 - k^2).}$$

	W	m	v	k
СИ	Дж	кг	м/с	—

Вследствие потери энергии скорости тел после частично упругого соударения будут меньше, чем после абсолютно упругого соударения. Формула (М 7.37) для данного случая принимает следующий вид:

$$(v_1 - v_2)k = v_2' - v_1'.$$

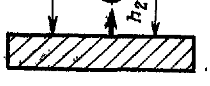
После некоторых преобразований находим

(М 7.42)
$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (v_1 - v_2)\, m_2 k}{m_1 + m_2}, \\ v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + (v_1 - v_2)\, m_1 k}{m_1 + m_2}. \end{aligned}}$$

Обратите внимание:

- Упругое соударение (см. разд. 7.3.3) и неупругое соударение (см. разд. 7.3.4) являются частными случаями частично упругого соударения. Выражения для W, v_1' и v_2' отличаются во всех трех случаях только значением коэффициента восстановления k:
  неупругое соударение $k = 0$,
  частично упругое соударение $0 < k < 1$,
  абсолютно упругое соударение $k = 1$.

Коэффициент восстановления k является в определенном смысле мерой упругости тела, и его можно определить экспериментально. Для этого достаточно бросить шарик на пластинку из того же материала и определить высоту подскока.



Если
k — коэффициент восстановления,
h_1 — высота, с которой падает шарик,
h_2 — высота подскока шарика,
то, поскольку $v_2 = 0$ и $m_2 \gg m_1$, согласно формуле (М 7.42), имеем $k = -v_1'/v_1$. Так как $v = \sqrt{2gh}$, получаем $k = \sqrt{2gh_2}/\sqrt{2gh_1}$, и, наконец,

(М 7.43)
$$\boxed{k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.}$$

Обратите внимание:

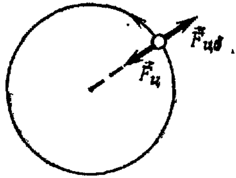
- Коэффициент восстановления не является просто характеристикой вещества, а зависит от скорости v_1. Численные значения см. в табл. 3.

7.4. Динамика вращательного движения. Динамика твердого тела

7.4.1. Центростремительная сила

Если точечная масса или центр масс твердого тела движется по окружности, то существует ускорение, направленное по радиусу к центру вращения — центростремительное ускорение $a_ц$ (см. разд. 6.4.1). Иными словами, при движении по окружности всегда существует сила, направленная к центру вращения. Ее называют центростремительной силой. Эту силу можно рассчитать по формуле (М 7.2) $\vec{F} = m\vec{a}$.

Если



$F_ц$ — центростремительная сила, т. е. сила, направленная к центру,
v — скорость тела,
ω — угловая скорость тела,
r — радиус окружности,
m — масса тела,
p — импульс тела,

то в соответствии с выражением (М 7.1) $F_ц = ma_ц$, или с учетом формулы (М 6.82) для $a_ц$

(М 7.44) $$\boxed{F_ц = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = p\omega.}$$

	F	m	v	r	ω	p
СИ	Н	кг	м/с	м	рад/с = 1/с	Н·с

Обратите внимание:

- Центростремительная сила обеспечивает движение по окружности.
- **Центробежная сила** — это сила инерции; она противодействует изменению состояния движения и направлена от центра вращения (см. разд. 7.4.2).

Центробежная и центростремительная силы равны по величине, но противоположны по направлению.

7.4.2. Силы инерции при вращательном движении

Центробежная сила

Центростремительная сила (см. разд. 7.4.1) заставляет тело двигаться по окружности и не позволяет телу двигаться по инерции по прямой (касательной к окружности). Сила инерции, противодействующая центростремительной, называется центробежной силой и обозначается $F_{цб}$. Обе силы равны по величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{цб} = -\vec{F}_ц$.

Если

$F_{цб}$ — центробежная сила, сила инерции, действующая по радиусу от центра при движении по окружности, то, согласно формуле (М 7.44),

(М 7.45) $$\boxed{F_{цб} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = p\omega.}$$

	F	m	v	r	ω	p
СИ	Н	кг	м/с	м	рад/с = 1/с	Н·с

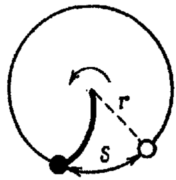
Обратите внимание:

- Так как на тело, движущееся по окружности, действует также сила тяжести, то при рассмотрении такого движения тела к центробежной силе следует добавить вес тела (по правилам геометрического сложения, см. разд. 5.1).

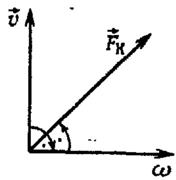
Сила Кориолиса

Если во вращающейся системе отсчета некое тело движется по радиусу от центра или к центру вращения, то его скорость изменяется. Тело приобретает тангенциальное ускорение, которое вызывается силой Кориолиса.

Если
v — постоянная по величине скорость тела, направленная по радиусу,
ω — угловая скорость вращающейся системы отсчета,
m — масса тела,
$a_к$ — ускорение Кориолиса,
$F_к$ — сила Кориолиса,



то перемещение тела в радиальном направлении равно $r = vt$. За то же время точка, удаленная от центра вращения на расстояние r, пройдет по дуге окружности путь $s = r\omega t$. Подставив сюда выражение для r, получим $s = vt\omega t = v\omega t^2$. Отсюда следует, что $s \sim t^2$, т. е. движение происходит ускоренно, а $s = at^2/2$. Таким образом, $v\omega t^2 = at^2/2$, следовательно, ускорение Кориолиса равно



(М 7.46) $$\boxed{a_к = 2v\omega.}$$

	a	v	ω
СИ	м/с^2	м/с	рад/с = 1/с

Применив выражение (М 7.1), найдем величину **силы Кориолиса** $F_к = ma_к$ или

(М 7.47) $$\boxed{F_к = 2mv\omega;}$$

	F	m	v	ω
СИ	Н	кг	м/с	рад/с = 1/с

в векторной форме сила Кориолиса запишется в виде

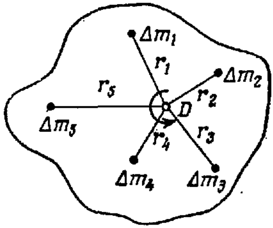
(М 7.48) $$\boxed{\vec{F}_к = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}).}$$

Обратите внимание:

- Формулы (М 7.46)—(М 7.48) справедливы и в том случае, когда v и ω не постоянны. Тогда эти формулы позволяют определить *мгновенные* значения ускорения и силы Кориолиса.

7.4.3. Основной закон динамики вращательного движения

Под действием момента силы закрепленное на оси твердое тело приобретает угловое ускорение.



Если

$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ — полный момент действующей на данное тело силы, равный сумме моментов всех сил, действующих на отдельные элементы Δm массы тела,

$m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \ldots$ — масса тела, равная сумме отдельных элементов массы,

r_i — расстояние элемента массы Δm_i от оси вращения,

α — угловое ускорение, с которым вращается твердое тело, одинаковое у всех элементов массы,

J — момент инерции данного тела,

то

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i,$$

$$M = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots + F_n r_n = \sum_{i=1}^{n} F_i r_i.$$

Так как

$$Fr = mar = m\frac{\Delta v}{\Delta t} r = m\frac{r\,\Delta\omega}{\Delta t} r = mr^2\alpha, \text{ то}$$

$$M = \alpha r_1^2\,\Delta m_1 + \alpha r_2^2\,\Delta m_2 + \ldots + \alpha r_n^2\,\Delta m_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha r_i^2\,\Delta m_i.$$

Поскольку угловое ускорение одинаково у всех элементов массы, то $M = \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta m_i$. Выражение под знаком суммы зависит, очевидно, от распределения массы тела относительно оси вращения. Оно называется моментом инерции J тела. Отсюда момент сил, действующий на твердое тело и сообщающий ему угловое ускорение α, равен

(М 7.49) $\boxed{M = J\alpha,}$

	M	J	α
СИ	Н·м	кг·м²	рад/с² = 1/с²

или в векторной форме

(M 7.50) $\boxed{\vec{M} = J\vec{\alpha}.}$

Обратите внимание:

- Формулы (M 7.49) и (M 7.50) для вращательного движения соответствуют формулам (M 7.1) и (M 7.2) для поступательного движения (основной закон динамики).

7.4.4. Момент инерции тела

Из формулы (M 7.49) следует:

Моментом инерции данного тела называется отношение момента силы к вызываемому им угловому ускорению.

$$\text{Момент инерции} = \frac{\text{Момент силы}}{\text{Угловое ускорение}}.$$

Таким образом, момент инерции является мерой инертности тела по отношению к вращательному движению; он играет ту же роль, что и масса при поступательном движении.

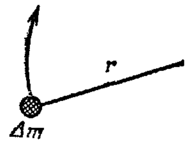
Единица СИ момента инерции: $[J] = $ кг·м^2.

На практике часто используются дольные единицы: кг·см^2 и г·см^2.

Момент инерции элемента массы Δm, движущегося по окружности радиусом r, равен

(M 7.51) $\boxed{J = r^2 \Delta m.}$

	J	r	m
СИ	кг·м^2	м	кг
КД	кг·см^2	см	кг
КД	г·см^2	см	г



Момент инерции тела, содержащего n таких элементов массы Δm_i, равен

(M 7.52) $\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i.}$

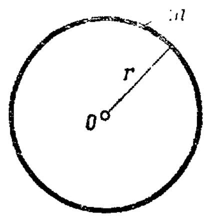
Для тела с непрерывным распределением массы следует воспользоваться интегральным представлением

(M 7.53) $\boxed{J = \int_0^{m_{\text{полн}}} r^2 \, dm.}$

Отсюда следует, что момент инерции тела зависит от

- его массы
- распределения массы относительно данной оси.

Вычислить момент инерции тела можно только в том случае, когда известны масса тела и ее распределение относительно оси вращения. Это легко сделать, если все элементы массы Δm располагаются на одинаковом расстоянии от оси, например для тонкого обруча.



Если
m — масса обруча,
r — радиус обруча (расстояние всех элементов массы от оси вращения),
J_O — момент инерции обруча относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости обруча,

то по формуле (М 7.52) (поскольку $\sum \Delta m = m$) получим

(М 7.54) $\boxed{J_O = mr^2.}$

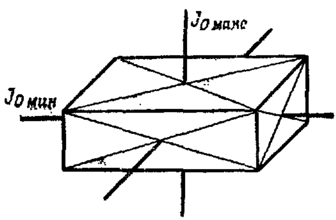
	J	m	r
СИ	кг · м²	кг	м
КД	кг · см²	кг	см
КД	г · см²	г	см

Обратите внимание:

- Моменты инерции других тел правильной формы представлены в справочной таблице. Они вычислены по формуле (М 7.53).
- Момент инерции тела неправильной формы можно определить экспериментально (см. разд. 19.2.3).
- Момент инерции составного тела равен сумме моментов инерции отдельных частей относительно той же оси вращения.

Свободные оси

Через центр масс любого тела можно провести сколь угодно много осей вращения. Момент инерции данного тела имеет наибольшую ($J_{O\,\text{макс}}$) и наименьшую ($J_{O\,\text{мин}}$) величину относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Устойчивое вращение незакрепленного тела возможно только вокруг двух этих осей. Устойчивое вращение тела вокруг оси, перпендикулярной двум первым, невозможно. Все три оси называются **главными осями инерции** данного тела.

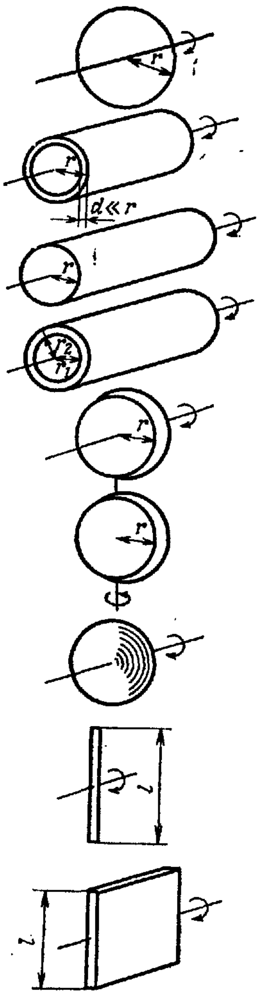


Поскольку при вращении тела вокруг любой из главных осей инерции все силы взаимно уравновешиваются, эти оси называются также **свободными осями**.

Справочная таблица

Момент инерции некоторых тел, вычисленный относительно оси вращения, проходящей через центр масс

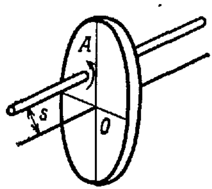
Тонкое кольцо	mr^2
Полый тонкостенный цилиндр	mr^2
Сплошной цилиндр	$\frac{m}{2} r^2$
Полый толстостенный цилиндр	$\frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$
Диск	$\frac{m}{2} r^2$
Диск	$\frac{m}{4} r^2$
Шар	$\frac{2m}{5} r^2$
Полая тонкостенная сфера	$\frac{2m}{3} r^2$
Тонкий стержень длиной l	$\frac{m}{12} l^2$
Четырехугольная пластина	$\frac{m}{12} l^2$



Параллельные оси

Параллельное смещение оси вращения, проходящей через центр масс, приводит к увеличению момента инерции данного тела.

Если



J_O — момент инерции данного тела относительно оси, проходящей через центр масс O,
J_A — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку A,
s — расстояние между двумя параллельными осями,
m — масса тела,

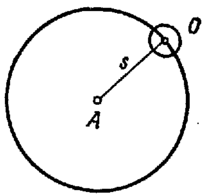
то энергия тела, вращающегося вокруг оси O, проходящей через центр масс, определится по формуле (М 7.62)

$$W = J_O\omega^2/2.$$

Если сместить ось вращения так, чтобы она проходила через точку A, то тело будет одновременно участвовать в двух движениях. Как и раньше, оно будет вращаться относительно центральной оси O и дополнительно вокруг оси A. Оба вращения происходят с одинаковой угловой скоростью.

Полная энергия тела складывается из энергий вращения вокруг центральной оси и оси A:

$$W = J_O\omega^2/2 + mv^2/2.$$



Оба вращения происходят с одинаковой угловой скоростью, следовательно,

$$W = J_O\omega^2/2 + ms^2\omega^2/2 = (J_O + ms^2)\,\omega^2/2.$$

Таким образом, энергия вращения вокруг оси A равна

$$W = J_A\omega^2/2.$$

Связь между J_O и J_A дается **теоремой Гюйгенса — Штейнера**

(М 7.55) $\boxed{J_A = J_O + ms^2.}$

	J	m	s
СИ	кг · м^2	кг	м
КД	кг · см^2	кг	см
КД	г · см^2	г	см

Обратите внимание:

- Оси, проходящие через точку A и через центр масс, должны быть параллельны.
- Момент инерции тела минимален, если ось вращения проходит через центр масс: $ms^2 = 0$.

Приведенная масса

Приведенной массой $m_{прив}$ называется точечная масса, которая, находясь на расстоянии r от оси вращения, создает момент инерции, равный моменту инерции всего тела относительно той же оси.

Если
$m_{прив}$ — приведенная масса,
J — момент инерции данного тела,
r — расстояние приведенной массы от оси вращения,

то согласно формуле (М 7.54)

$$J = m_{прив} r^2, \text{ или}$$

(М 7.56) $$\boxed{m_{прив} = \frac{J}{r^2}.}$$

	m	J	r
СИ	кг	кг · м²	м
КД	кг	кг · см²	см
КД	г	г · см²	см

Радиус инерции

Представим себе, что *вся* масса данного тела сосредоточена в одной точке, а момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции точечной массы относительно той же оси. Тогда расстояние этой точечной массы от оси вращения называется радиусом инерции i.

Если
i — радиус инерции, равный расстоянию точечной массы от оси вращения,
J — момент инерции тела,
m — масса тела,

то, согласно формуле (М 7.54),

$$J = mi^2 \text{ или}$$

(М 7.57) $$\boxed{i = \sqrt{\frac{J}{m}}.}$$

	i	J	m
СИ	м	кг · м²	кг
КД	см	кг · см²	кг
КД	см	г · см²	г

Маховой момент

В технике часто используется понятие махового момента.

Если
mD^2 — маховой момент тела,
m — масса тела,
$D = 2i$ — диаметр инерции,
J — момент инерции тела,

то, согласно формуле (М 7.57),

$J = mi^2 = mD^2/4$, или

(М 7.58) $\boxed{mD^2 = 4J.}$

	m	D	J
СИ	кг	м	кг · м²
КД	кг	см	кг · см²
КД	г	см	г · см²

7.4.5. Работа, совершаемая при вращательном движении

Согласно формуле (М 7.10), работа равна произведению силы на перемещение. Это справедливо и в случае вращательного движения.

Если
W — совершенная работа,
F — постоянная по величине сила, действующая по касательной к вращающемуся телу,
s — перемещение точки на периферии вращающегося тела,
M — момент силы F,
φ — угловое перемещение тела,

то

$W = Fs$, где
$F = M/r$ (М 5.5) и $s = \varphi r$ (М 6.76), откуда
$W = M\varphi r/r$, т. е.

(М 7.59) $\boxed{W = M\varphi.}$

	W	M	φ
СИ	Дж	Н · м	рад = 1

Работа при вращательном движении равна произведению момента силы на угловое перемещение.

Обратите внимание:

- Формула (М 7.59) справедлива для случая постоянного момента силы. При изменении момента по линейному закону (например, в результате закручивания спиральной пружины) следует воспользоваться средним значением. В остальных случаях следует пользоваться формулой (М 7.60).
- Единицы работы, не входящие в СИ, см. в разд. 7.2.1.
- Соотношение между единицами работы см. в табл. П5.

Если момент силы зависит от угла поворота, т. е. $M = M(\varphi)$, то работа вычисляется по формуле

(М 7.60) $$\boxed{W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\, d\varphi.}$$

	W	M	φ
СИ	Дж	Н · м	рад = 1

7.4.6. Мощность в случае вращательного движения

Мгновенная мощность P, согласно (М 7.28), вычисляется по формуле $P = \dot{W}$. Та же формула справедлива и в случае вращательного движения.

Если
P — мощность,
M — момент силы,
ω — угловая скорость тела,

то $P = dW/dt$ или с учетом (М 7.59)

$$P = \frac{M\,d\varphi}{dt} = M\dot{\varphi}.$$

Отсюда следует

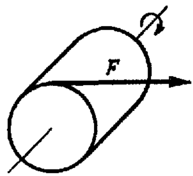
(М 7.61) $\boxed{P = M\omega.}$

	P	M	ω
СИ	Вт	Н · м	рад/с = 1/с
80	кгс · м/с	кгс · м	рад/с = 1/с

Мгновенная мощность равна произведению мгновенного момента силы на мгновенную угловую скорость.

Обратите внимание:

- Формула (М 7.61) справедлива также и в том случае, когда M *или* ω остаются постоянными; тогда мощность также постоянна.
- Единицы мощности, не входящие в СИ, см. в разд. 7.2.4.
- Соотношение между единицами мощности см. в табл. П6.



Если в выражение (М 7.61) подставить $M = Fr$ и $\omega = v/r$, то после сокращения получим $P = Fv$, что совпадает с формулой (М 7.29). Уравнения для случая поступательного движения можно использовать в том случае, когда F — тангенциальная сила, действующая на периферии тела, а v — скорость движения точки на периферии тела.

7.4.7. Энергия вращательного движения

Вращающееся вокруг оси тело обладает кинетической энергией, поскольку все элементы его массы двигаются с определенной скоростью. Эта энергия называется энергией вращения. Полная энергия тела равна сумме энергий отдельных элементов тела.

Если
$W_{вр}$ — энергия вращения тела,
J — момент инерции тела относительно оси вращения,

ω — угловая скорость тела,
m_i — масса i-го элемента тела,
v_i — скорость i-го элемента тела,
r_i — расстояние i-го элемента тела от оси вращения,

то

$$W_{вр} = W_1 + W_2 + \ldots + W_n,$$

$$W_{вр} = \frac{r_1^2 \Delta m_1 \omega_1^2}{2} + \frac{r_2^2 \Delta m_2 \omega_2^2}{2} + \ldots + \frac{r_n^2 \Delta m_n \omega_n^2}{2},$$

$$W_{вр} = \left(r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \ldots + r_n^2 \Delta m_n\right) \frac{\omega^2}{2},$$

$$W_{вр} = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i \frac{\omega^2}{2}$$ и, согласно формуле (М 7.52),

(М 7.62) $$\boxed{W_{вр} = \frac{J\omega^2}{2}.}$$

	W	J	ω
СИ	Дж	кг · м^2	рад/с = 1/с

Следовательно, изменение скорости вращения от ω_1 до ω_2 влечет за собой изменение энергии вращения тела. Количественно изменение выражается формулой

(М 7.63) $$\boxed{\Delta W_{вр} = \frac{J}{2}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right).}$$

Обратите внимание:

- Момент инерции тела, входящий в формулы (М 7.62) и (М 7.63),— это момент инерции относительно оси вращения, а именно J_O, если тело вращается вокруг оси, проходящей через центр масс, и J_A, если тело вращается вокруг другой оси A.
- Соотношение между единицами энергии см. в табл. П5.

7.4.8. Момент количества движения

Моментом количества движения (угловым моментом, моментом импульса) тела называется произведение его момента инерции на угловую скорость.

Угловой момент — векторная величина. Его направление совпадает с направлением вектора угловой скорости.

Единица СИ углового момента $[L]$ = кг·м^2/с = Н·м·с.

Если

L — угловой момент тела,
J — момент инерции тела,
ω — угловая скорость тела,

то

(M 7.64) $\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}.}$

	L	J	ω
СИ	кг·м²/с = Н·м·с	кг·м²	рад/с = 1/с

Изменение углового момента (при неизменном моменте инерции тела) может произойти только вследствие изменения угловой скорости и всегда обусловлено действием момента силы.

Если
ΔL — изменение углового момента тела,
M — момент силы, сообщающий телу дополнительное угловое ускорение,
t — время действия силы,
J — момент инерции тела относительно оси вращения,
$\Delta\omega$ — изменение угловой скорости тела,

то, согласно формулам (М 7.50) и (М 6.55),

$$\vec{M} = J\vec{\alpha} = J\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}, \text{ или}$$

(M 7.65) $\boxed{\Delta\vec{L} = J\,\Delta\vec{\omega} = \vec{M}\,\Delta t.}$

	L	J	ω	M	t
СИ	кг·м²/с = Н·м·с	кг·м²	рад/с = 1/с	Н·м	с

Произведение $\vec{M}\Delta t$ называется **импульсом момента силы** или **движущим моментом**. Он равен изменению углового момента.

Единица СИ движущего момента: $[M\Delta t]$ = Н·м·с = кг·м²/с.

Обратите внимание:

- **Формула (М 7.65) справедлива при условии, что момент силы не меняется в течение времени Δt.**

Если же момент силы зависит от времени, т. е. $\vec{M} = \vec{M}(t)$, то из формулы $\vec{M} = J\vec{\alpha} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ следует $\vec{M}\,dt = J\,d\vec{\omega}$. Проинтегрировав, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\vec{\omega}, \text{ откуда}$$

(M 7.66) $$\boxed{\Delta\vec{L} = J\,\Delta\vec{\omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt.}$$

Изменение углового момента (движущий момент) равно интегралу по времени от момента силы.

Из формулы (M 7.66) следует определение момента силы: $d\vec{L} = \vec{M}\,dt$, откуда

(M 7.67) $$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \dot{\vec{L}}.}$$

Мгновенный момент силы представляет собой первую производную углового момента по времени.

Обратите внимание:

- Формула (M 7.67) справедлива и в том случае, когда масса в процессе ускорения не остается постоянной.

Закон сохранения углового момента

Если на систему не действуют моменты внешних сил (замкнутая система), то ее полный угловой момент остается постоянным по величине и направлению

(M 7.68) $$\boxed{\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \vec{L}_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}.}$$

Обратите внимание:

- Полный угловой момент системы $\vec{L}_{\text{полн}}$ равен векторной сумме угловых моментов отдельных частей системы.
- Закономерности движения волчка определяются законом сохранения углового момента.

7.5. Гравитация (тяготение)

Как известно, любые два тела притягиваются друг к другу. Это свойство тел обусловлено их массой. Поскольку другие формы материи (поля, излучения) также обладают массой, они также подчиняются закону гравитации. Самое известное проявление притяжения масс — это существование силы тяжести, с которой Земля действует на все тела.

7.5.1. Закон всемирного тяготения

Сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, называется гравитационной силой (силой тяготения). Величина этой силы определяется законом всемирного тяготения, сформулированным Ньютоном.

Если

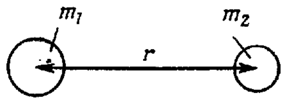
F — гравитационная сила, с которой два тела притягиваются друг к другу,

m_1 — масса первого тела,

m_2 — масса второго тела,

r — расстояние между центрами масс тел,

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная,



то

(М 7.69) $$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.}$$

	F	γ	m	r
СИ	Н	м³/(кг·с²)	кг	м

Обратите внимание:

- Не следует смешивать взаимное притяжение масс с силами магнитного или электрического притяжения. Это силы совершенно разной природы.

Силы гравитации не могут быть отталкиванием. Кроме того, гравитационное взаимодействие нельзя ослабить или устранить с помощью какого-либо экрана.

По формуле (М 7.69) можно определить силу земного притяжения, подставив в числитель массу Земли и массу рассматриваемого тела, а в знаменатель — расстояние r тела до центра Земли:

(М 7.70) $$\boxed{G = \frac{\gamma m_{\text{Зем}}}{r^2} m,}$$ т. е. $G \sim \frac{1}{r^2}$

Сила тяжести убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли.

Обратите внимание:

- Сила тяжести G не обращается в нуль на конечных расстояниях r, она стремится к нулю лишь при бесконечном удалении тел.
- Формула (М 7.70) справедлива и в случае других небесных тел.

7.5.2. Ускорение свободного падения

По формуле (М 7.70) можно определить величину ускорения свободного падения на любом расстоянии от Земли.

Если

g — ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли,

$g_{\text{Зем}}$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли,

r — расстояние от центра Земли,

$r_{Зем}$ $= 6{,}37 \cdot 10^6$ м — средний радиус Земли,
m — масса тела,
$m_{Зем}$ — масса Земли,
γ $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная,

то сила тяжести равна гравитационной силе, т. е.

$$mg_{Зем} = \frac{\gamma m m_{Зем}}{r_{Зем}^2} \quad \text{(на поверхности Земли)},$$

$$mg = \frac{\gamma m m_{Зем}}{r^2} \quad \text{(на расстоянии } r \text{ от центра Земли)}.$$

Разделив первое выражение на второе, получим

$$g_{Зем}/g = r^2/r_{Зем}^2,$$

или

(М 7.71) $$\boxed{g = g_{Зем} \frac{r_{Зем}^2}{r^2},}$$ т. е. $g \sim \frac{1}{r^2}$

	g	r
СИ	м/с²	м

▌ Ускорение свободного падения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли.

Обратите внимание:

▌ Формула (М 7.71) справедлива и для других небесных тел.

Сократив выражение $mg = \frac{\gamma m m_{Зем}}{r^2}$ на m,

получим следующее выражение для ускорения свободного падения:

(М 7.72) $$\boxed{g = \frac{\gamma m_{Зем}}{r^2}.}$$

	g	γ	m	r
СИ	м/с²	м³/(кг·с²)	кг	м

7.5.3. Гравитационное поле (поле тяготения)

Каждое тело (например, Земля) создает вокруг себя силовое поле — поле тяготения. Напряженность этого поля в любой его точке характеризует силу, которая действует на находящееся в этой точке другое тело.

Если

$\vec{g}$ — напряженность гравитационного поля,
$\vec{F}$ — гравитационная сила, действующая на тело массой m,
m — масса тела в гравитационном поле,

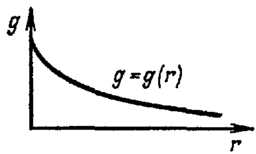
то

(M 7.73) $\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.}$

	g	F	m
СИ	Н/кг = м/с^2	Н	кг

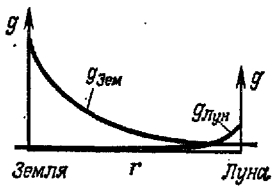
Обратите внимание:

- Напряженность поля $\vec{g}$ представляет собой векторную величину, направление которой определяется направлением гравитационной силы $\vec{F}$, а численное значение — формулой (M 7.72).
- Напряженность гравитационного поля совпадает по величине, направлению и единицам измерения с ускорением свободного падения, хотя по своему физическому смыслу это совершенно разные физические величины. В то время как напряженность поля характеризует состояние пространства в данной точке, сила и ускорение появляются только тогда, когда в данной точке находится пробное тело.



Из графика функции $\vec{g} = \vec{g}(r)$ наглядно видно, что напряженность гравитационного поля $\vec{g}$ стремится к нулю, когда расстояние r стремится к бесконечности.

Поэтому утверждения типа «спутник покинул гравитационное поле Земли» неверны.



Гравитационные поля небесных тел перекрываются. Если двигаться вдоль прямой, соединяющей центры Земли и Луны, то, начиная с определенного места, будет преобладать напряженность гравитационного поля Луны.

7.5.4. Работа в гравитационном поле

Если тело перемещается в гравитационном поле на значительное расстояние, то совершаемую против сил гравитационного притяжения работу (например, работу для вывода ракеты в космос) нельзя вычислять по формуле $W = Fh$, поскольку $F \sim 1/r^2$.

Если
W — работа по перемещению тела в гравитационном поле,
$m_{Зем}$ — масса Земли,
m — масса тела,
r — расстояние до центра Земли,
γ $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) — гравитационная постоянная,

то работа, совершаемая при перемещении тела вдоль радиуса, определяется как $dW = F dr$. Проинтегрировав обе части равенства, получим

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_{Зем} m}{r^2}\,dr = \gamma m_{Зем} m \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,dr,$$

откуда

(М 7.74) $$\boxed{W = \gamma m_{Зем} m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).}$$

	W	γ	m	r
СИ	Дж	$м^3/(кг \cdot с^2)$	кг	м

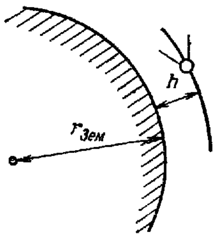
Обратите внимание:

- Величина работы W не зависит от формы пути от точки r_1 к r_2, так как в формулу входят только радиальные составляющие dr перемещения, совпадающие с направлением силы притяжения Земли.
- Формула (М 7.74) справедлива и в случае других небесных тел.

7.5.5. Космические скорости

Первая космическая (орбитальная) скорость

С помощью формулы (М 7.71) можно определить скорость обращения искусственного спутника Земли на любой высоте над ее поверхностью.



Если
$v_к$ — орбитальная скорость искусственного спутника Земли,
h — расстояние спутника от поверхности Земли,
$r_{Зем}$ $= 6{,}37 \cdot 10^6$ м — радиус Земли,
$g_{Зем}$ $= 9{,}81$ $м/с^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли,
$m_{Зем}$ — масса Земли,
γ $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3/(кг \cdot с^2)$ — гравитационная постоянная,

то действующая на спутник сила тяжести равна центробежной силе, т. е.

$$G = mg = F_{цб} = mv_к^2/(r_{Зем} + h),\text{ откуда}$$

$$v_к = \sqrt{g\,(r_{Зем} + h)}.$$

Подставив сюда значение g (М 7.71), получим

$$v_к = \sqrt{g_{Зем} r_{Зем}^2/(r_{Зем} + h)},\text{ или}$$

(М 7.75) $$\boxed{v_к = r_{Зем} \sqrt{\frac{g_{Зем}}{r_{Зем} + h}}.}$$

	v	g	r	h
СИ	м/с	$м/с^2$	м	м

Выражение для скорости движения искусственного спутника по орбите (верное также для других небесных тел) можно вывести, просто приравияв вес спутника силе гравитационного притяжения:

$$mg_{\text{Зем}} = \gamma \frac{mm_{\text{Зем}}}{r^2_{\text{Зем}}}.$$

Упростив выражение, получим

$$g_{\text{Зем}} r^2_{\text{Зем}} = \gamma m_{\text{Зем}}.$$

После подстановки в (М 7.75) получим

(М 7.76) $$\boxed{v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{\gamma m_{\text{Зем}}}{r_{\text{Зем}} + h}}.}$$

	v	γ	m	r	h
СИ	м/с	м³/(кг · с²)	кг	м	м

Обратите внимание:

- Формулы (М 7.75) и (М 7.76) позволяют определить скорость движения спутииков по орбите. Однако конечная скорость ракеты-носителя в момент прекращения работы двигателей должна быть больше, чтобы вывести спутник на нужную высоту.
- Для траектории, расположенной на относительно небольшом расстоянии от поверхности Земли, орбитальная скорость $v_{\text{к}} =$ **= 7,9 км/с.**
- Формулы (М 7.75) и (М 7.76) справедливы и для других небесных тел.
- Указаиные формулы справедливы и для случая движения Луны вокруг Земли. Верны они также и в случае движеиия планет вокруг Солнца, если движение происходит по траектории, незначительно отличающейся от круговой, т. е. по траектории с малым эксцентриситетом.

Вторая космическая скорость (скорость убегания)

Вторая космическая скорость — это минимальиая скорость, с которой должио двигаться тело, чтобы оно могло без затрат дополнительной работы преодолеть влияние поля тяготения Земли, т. е. удалиться на бесконечио большое расстояние от Земли.

Еслн
m — масса тела,
$m_{\text{Зем}}$ — масса Земли,
r — расстояние от места старта до центра Земли,
γ = 6,67·10⁻¹¹ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная,
$v_{2\text{к}}$ — вторая космическая скорость,

то кинетическая энергия тела должиа быть равиа работе по преодолению влияния гравитационного поля: $mv^2_{2\text{к}}/2 = \gamma m_{\text{Зем}} m/r$ согласно

(М 7.74). После упрощения и перестановки имеем

$$\boxed{v_{2к} = \sqrt{\frac{2\gamma m_{Зем}}{r}} = v_к\sqrt{2}.} \quad (М\ 7.77)$$

	v	γ	m	r
СИ	м/с	м³/(кг·с²)	кг	м

Обратите внимание:

- Для точки, находящейся на поверхности Земли, вторая космическая скорость $v_{2к} = 11{,}2$ км/с.
- Формула (М 7.77) справедлива и для других небесных тел. Скорость, необходимая для того, чтобы тело могло преодолеть гравитационное поле Солнца, т. е., стартуя с Земли, покинуть пределы Солнечной системы (третья космическая скорость) $v_{3к} = 16$ км/с.

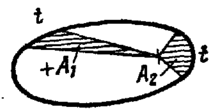
7.5.6. Движение планет

Все планеты Солнечной системы движутся под действием силы притяжения Солнца подобно тому, как Луна и искусственные спутники Земли движутся вокруг Земли. Подобное движение называется центральным. Для него справедливы **законы Кеплера.**

1. Планеты движутся по эллиптическим траекториям, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Обратите внимание:

- Строго говоря, Солнце и планеты вращаются вокруг общего центра масс. Но этот центр расположен внутри Солнца, поскольку масса Солнца много больше массы планет.



2. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, заметает за равные промежутки времени равные площади.

Обратите внимание:

- Второй закон Кеплера выводится из закона сохранения углового момента.

3. Отношение r^3/T^2 постоянно для всех планетных орбит.

Обратите внимание:

- Последний закон следует из того, что центростремительная сила должна быть равна силе гравитационного притяжения: $m_{пл}\omega^2 r = \frac{\gamma m_{Солн} m_{пл}}{r^2}$, откуда $\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{\gamma m_{Солн}}{r^2}$ и $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma m_{Солн}}{4\pi^2}$.

В выражение, стоящее справа, входят только постоянные величины; оно равно $3{,}36\cdot10^{-18}$ м³/с².

- При удалении от Солнца скорость движения планет уменьшается, а при приближении — увеличивается (следствие второго закона Кеплера).
- Эти же законы описывают движение искусственных тел вокруг Солнца, искусственных спутников Земли и спутников других планет.

Справочная таблица

Планеты Солнечной системы

Планета	Среднее расстояние от Солнца, Гм	Период обращения, годы	Эксцентриситет	Отношение массы к массе Земли
Меркурий	58	0,24	0,21	0,053
Венера	108	0,62	0,01	0,8149
Земля	150	1,00	0,02	1,000
Марс	228	1,88	0,09	0,107
Юпитер	778	11,86	0,05	318,00
Сатурн	1428	29,46	0,06	95,22
Уран	2872	84,02	0,05	14,55
Нептун	4498	164,78	0,01	17,23
Плутон	5910	248,4	0,25	0,9

Обратите внимание:

- Эксцентриситетом называется отношение расстояния между фокусами эллипса к длине его большой оси.
- Масса Земли: $m_{\text{Зем.}} = 5{,}97\cdot10^{24}$ кг.
- Масса Солнца: $m_{\text{Солн}} = 3{,}334\cdot10^{5}\, m_{\text{Зем.}}$
- Масса Луны: $m_{\text{Лун}} = 0{,}0123 m_{\text{Зем}}$. Среднее расстояние от Луны до Земли 384 400 км, эксцентриситет ее орбиты вокруг Земли 0,0549.
- Средний экваториальный радиус Земли: $r_{\text{Зем}} = (6378{,}169 \pm \pm 0{,}008)$ км.

8. Гидростатика (покоящиеся жидкости)

Вследствие подвижности молекул жидкость не обладает собственной формой, а принимает форму того сосуда, в который она заключена. По той же причине поверхность жидкости всегда перпендикулярна действующей на жидкость силе.

Под действием силы тяжести поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна, т. е. располагается на одном уровне.

Это утверждение справедливо и в случае сосудов сложной формы, а также нескольких соединенных между собой сосудов (сообщающихся сосудов).

В сообщающихся сосудах жидкость устанавливается на одном уровне.

Внутри жидкости повсюду действуют силы давления.

Давлением называется отношение силы, действующей перпендикулярно поверхности, к площади этой поверхности.
Давление = Сила/Площадь.

Давление — величина скалярная.

Единица СИ давления: $[p]$ = Н/м^2 = Паскаль (Па) = кг/(м·с^2).

Единица, не входящая в СИ: бар = 10^5 Па.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.), физическая атмосфера (атм) = = 760 мм рт. ст.; техническая атмосфера (ат) = 1 кгс/см^2.

Соотношение между единицами давления

Единицы, не входящие в СИ:

1 ат	= 0,980665 бар	= 98,0665 кПа
1 м вод. ст. = 0,1 ат	= 98,0665 мбар	= 9,80665 кПа
1 мм вод. ст. = 10^{-4} ат	= 98,0665 мкбар	= 9,80665 Па
1 бар	= 10^5 Па	= 100 кПа
1 мм рт. ст.	= 1,333224 мбар	= 133,3224 Па
1 атм	= 1,01325 бар	= 101,325 кПа
1 фунт-сила/кв. ярд	= 53,2 мкбар	= 5,320 Па
1 фунт-сила/кв. фут.	= 478,8 мкбар	= 47,88 Па
1 фунт-сила/кв. дюйм	= 68,95 мбар	= 6,895 кПа
1 паундаль/кв. фут	= 14,88 мкбар	= 1,488 Па
1 тонна-сила/кв. фут	= 1,07252 бар	= 107,252 кПа
1 дюйм водяного столба	= 2,4908 мбар	= 249,08 Па
1 дюйм ртутного столба	= 33,864 мбар	= 3,3864 кПа

Если
p — давление,
A — площадь поверхности,
F — сила, действующая на эту поверхность.

то

(М 8.1) $$\boxed{p = \frac{F}{A}.}$$

	p	F	A
СИ	Па = Н/м^2	Н	м^2
80	ат = кгс/см^2	кгс	см^2
80	кгс/м^2	кгс	м^2

Обратите внимание:

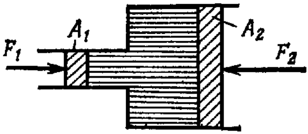
- Соотношение между единицами давления см. в табл. П 3.

8.1. Давление в жидкостях

8.1.1. Давление поршня

Если на жидкость действует внешнее давление, то вследствие подвижности молекул это давление передается одинаково во все стороны.

В **гидравлическом прессе** на все поршни действует одинаковое давление. Однако вследствие того, что площади поршней различны, силы, действующие на них, не одинаковы. Согласно формуле (М 8.1):



Силы относятся друг к другу как площади поршней, т. е. как квадраты диаметров поршней:

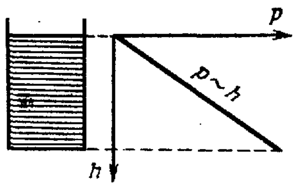
$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}, \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Это соотношение лежит в основе действия различных подъемных механизмов (домкрат, подъемник), гидравлических тормозов, преобразователей давления и т. д.

8.1.2. Давление столба жидкости

В каждой жидкости существует давление, обусловленное ее собственным весом. Так, например, давление на основание столба воды высотой 10 м составляет около 10^5 Па.

Если
p — давление в жидкости на глубине h,
h — высота столба жидкости,
ρ — плотность жидкости,
$g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения,



то давление в жидкости равно ее весу, деленному на площадь, $p = G/A$ и по формуле (М 7.3) $p = mg/A$. Поскольку, согласно (М 7.4), $m = \rho V$, имеем $p = \rho Vg/A$. Так как $Ah = V$, получаем

(М 8.2) $\boxed{p = \rho g h.}$

	p	ρ	g	h
СИ	Па = Н/м^2	кг/м^3	м/с^2	м

Обратите внимание:

- Плотность жидкости ρ зависит от температуры. Для очень точных вычислений плотность следует рассчитывать по формуле (Т 13.10).
- Единица измерения плотности может отличаться от указанной в таблице.

- Давление на данной глубине одинаково во всех направлениях.
- Соотношение между единицами давления см. в табл. П 3.
- Суммарное давление, обусловленное весом столба жидкости и давлением поршня, называют гидростатическим давлением.

8.2. Сжимаемость

Несмотря на то что подвижность молекул в жидкостях велика, жидкости удается заметно сжать только с помощью очень больших давлений. Жидкости обладают *ничтожной сжимаемостью*! Относительное изменение объема прямо пропорционально изменению давления: $dV/V \sim -dp$.

Сжимаемостью жидкости $\varkappa$ называется отношение относительного изменения объема к изменению давления, вызвавшему это изменение:

$$\varkappa = -\frac{dV}{V\,dp}.$$

Если
$\varkappa$ — сжимаемость жидкости,
V — объем жидкости,
ΔV — изменение объема при изменении давления,
Δp — изменение давления,

то по определению сжимаемости

(M 8.3) $$\boxed{\Delta V = -\varkappa\,\Delta p V,}$$

или в дифференциальной форме

(M 8.4) $$\boxed{dV = -\varkappa\,dpV.}$$

	p	$\varkappa$
СИ	Па = Н/м^2	1/Па = м^2/Н
80	ат	см^2/кгс = 1/ат

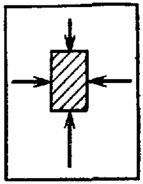
Обратите внимание:

- В большинстве случаев изменение объема жидкости настолько ничтожно, что им можно пренебречь.
- Знак минус в формулах (M 8.3) и (M 8.4) показывает, что увеличение давления сопровождается уменьшением объема и наоборот.
- Сжимаемость почти не зависит от температуры и давления.
- Значения сжимаемости $\varkappa$ см. в табл. 4.

8.3. Подъемная (выталкивающая) сила

Погруженное в жидкость тело как бы теряет часть своего веса. Силу, направленную противоположно действующей на тело силе тяжести, называют подъемной, или выталкивающей, силой. Она равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость, и в случае тела правильной формы равна разности давлений столба жидкости непосредственно над и под телом. Это положение называется **законом Архимеда.**

На тело, погруженное в жидкость, действует подъемная (выталкивающая) сила, направленная вверх. Ее величина равна весу вытесненной телом жидкости.



Если
$F_в$ — подъемная (выталкивающая) сила,
V — объем вытесненной телом жидкости,
ρ — плотность жидкости,
$g = 9{,}81$ м/с² — ускорение свободного падения,
$\gamma = G/V$ — удельный вес,

то

(М 8.5) $\boxed{F_в = V\rho g,}$

	$F_в$	V	ρ	g
СИ	Н	м³	кг/м³	м/с²

или

$\boxed{F_в = V\gamma.}$

	$F_в$	V	γ
80	кгс	дм³	кгс/дм³

Обратите внимание:

- Единица измерения плотности может отличаться от указанной в таблице.

В зависимости от величины подъемной силы тело может находиться в трех положениях:

- $G < F_в$: тело поднимается на поверхность и плавает, лишь частично погрузившись в жидкость;
- $G = F_в$: тело полностью погружено в жидкость и находится в ней во взвешенном состоянии;
- $G > F_в$: тело тонет.

8.3.1. Определение плотности твердых тел

Для определения плотности твердого тела используются гидростатические весы, которые позволяют взвешивать тело как в воздухе, так и в жидкости.

Если
ρ — плотность твердого тела,
$\rho_ж$ — плотность жидкости, в которой тело взвешивается,
G — вес тела в воздухе,
$G_ж = G - F_в$ — вес тела в жидкости, измеренный при полном его погружении в жидкость,

то

(M 8.6) $$\boxed{\rho = \rho_ж \frac{G}{G - G_ж} = \frac{\rho_ж}{1 - \frac{G_ж}{G}}.}$$

Обратите внимание:

- Такие измерения можно проводить только при условии, что тело не плавает на поверхности жидкости.

8.3.2. Определение плотности жидкости

Для определения плотности жидкости также применяются гидростатические весы.

Если
ρ_1 — определяемая плотность жидкости 1,
ρ_2 — известная плотность жидкости 2 (например, воды),
G — вес твердого тела в воздухе,
$G_{ж1}$ — вес твердого тела в жидкости 1,
$G_{ж2}$ — вес твердого тела в жидкости 2,

то

(M 8.7) $$\boxed{\rho_1 = \rho_2 \frac{G - G_{ж1}}{G - G_{ж2}}.}$$

Обратите внимание:

- Для измерений можно использовать любое твердое тело, не плавающее на поверхности одной из жидкостей. Знать его объем и плотность не обязательно.

9. Аэростатика

Молекулы газов практически не взаимодействуют друг с другом. Поэтому газы не имеют определенной формы и объема и целиком заполняют сосуд, в котором находятся. В газе существует определенное давление, действующее равномерно во все стороны.

9.1. Давление и объем газа

Давление газа при постоянной температуре пропорционально числу молекул газа, находящихся в данном объеме, т. е. массе газа. Состояние газов описывается **законом Бойля — Мариотта:**

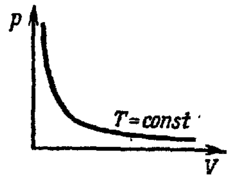
> При постоянной температуре объем находящегося в замкнутом сосуде газа обратно пропорционален давлению,
> **или**

При постоянной температуре произведение давления газа, находящегося в замкнутом сосуде, на его объем есть постоянная величина,

или

При постоянной температуре давление и плотность находящегося в замкнутом сосуде газа пропорциональны друг другу: $p \sim \rho$.

Если
p_1 — начальное давление газа,
p_2 — конечное давление газа,
V_1 — начальный объем газа,
V_2 — конечный объем газа,



то

(М 9.1) $$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}, \quad \text{или} \quad pV = \text{const}.}$$

О б р а т и т е в н и м а н и е:

- Соотношение между единицами давления см. в табл. П 3.
- При расчетах следует всегда пользоваться **полным давлением** (абсолютным давлением); см. разд. 9.1.1.

9.1.1. Избыточное давление

В технике часто указывается избыточное давление газа.

Избыточным давлением называется разность между внутренним (собственным) давлением газа и атмосферным давлением.

Если
p — полное давление газа,
$p_а$ — атмосферное давление,
$p_и$ — избыточное давление,

то

(М 9.2) $$\boxed{p_и = p - p_а.}$$

О б р а т и т е в н и м а н и е:

- Если точное значение атмосферного давления не известно, то его принимают равным примерно 1 бар = 100 кПа (до 1980 г. примерно 1 ат).
- *Не допускается* применение единицы ати, использовавшейся ранее для избыточного давления.
- Если в формуле (М 9.2) $p < p_а$, то речь идет о разрежении газа $p_{раз}$.

9.1.2. Измерение давления газа

Для измерения давления газа используются следующие манометры:

- открытый манометр (U-образная трубка, открытая с обеих сторон),
- закрытый манометр (U-образная трубка, запаянная с одной стороны),
- металлические манометры (трубчато-пружинный манометр, трубки Бурдона).

9.2. Атмосферное давление

Собственный вес столба воздуха создает атмосферное давление, которое уменьшается по мере удаления от поверхности Земли. *Вблизи земной поверхности*:

> При подъеме на каждые 8 м атмосферное давление падает на 100 Па = 1 мбар.

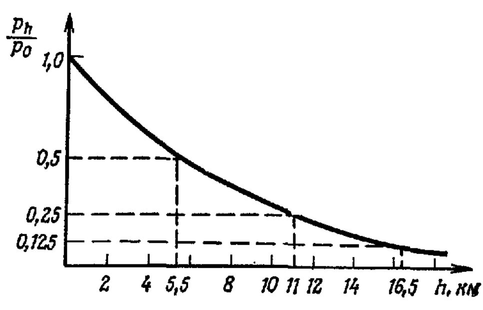
Если предположить, что температура воздуха с высотой не меняется, то атмосферное давление уменьшается с высотой по экспоненциальному закону.

Если
p_0 — атмосферное давление у поверхности Земли,
p_h — атмосферное давление на высоте h,
h — высота над поверхностью Земли,
ρ_0 — плотность воздуха у поверхности Земли,
g — ускорение свободного падения,
e = 2,71828,

то для высот примерно до 100 км давление (при постоянной температуре) рассчитывается по формуле

(М 9.3) $$\boxed{p_h = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}}.}$$

	p	ρ	g	h
СИ	Па = Н/м²	кг/м³	м/с²	м



Если давление у поверхности Земли $p_0 = p_н = 101{,}325$ кПа (до 1980 г. — 760 мм рт. ст.) и температура воздуха на любой высоте равна 0°С, то из формулы (М 9.3) следует:

(М 9.4) $$\boxed{p_h = p_0 e^{\frac{-h}{7{,}99}},}$$

или

(М 9.5) $$\boxed{h = 18{,}4 \lg \frac{p_0}{p_h}},$$

где высота h выражена в километрах.

Формула (М 9.3) называется **барометрической формулой высоты**. При точных вычислениях атмосферного давления следует учитывать понижение температуры воздуха по мере увеличения высоты. При $p_н = 101{,}325$ кПа (среднегодовое значение атмосферного давления на уровне моря) и $t = 15$°С (среднегодовое значение температуры на уровне моря) для высот до 11 000 м (тропосфера) следует пользоваться **междуварoдной формулой:**

(М 9.6) $$\boxed{p_h = 101{,}3\left(1 - \frac{6{,}5h}{288}\right)^{5{,}255},}$$

где давление выражено в килопаскалях, высота h — в километрах, или

(М 9.7) $$\boxed{\rho_h = 1{,}2255\left(1 - \frac{6{,}5h}{288}\right)^{4{,}255}.}$$

где плотность выражена в кг/м^3, высота — в километрах.

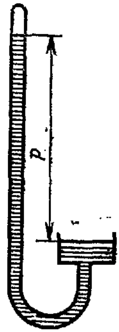
Обратите внимание:

- Атмосферное давление зависит от места измерения, температуры воздуха и погоды.
- На уровне моря среднегодовое атмосферное давление составляет $p_Н$ = **1013,25 мбар = 101,325 кПа (нормальное давление)** при среднегодовой температуре 15°С.
- Зависимость среднегодового давления от высоты см. в табл. 5.

9.2.1. Измерение атмосферного давления

Давление воздуха измеряется с помощью следующих барометров:
— барометра-анероида,
— ртутного барометра.

Показания ртутного барометра зависят от температуры ртути, поскольку ртуть при нагревании расширяется. Поэтому для точных измерений показания ртутного барометра следует пересчитывать по следующей формуле:



Если

p_0 — атмосферное давление, приведенное к 0°С,

p_t — показаиия барометра (высота ртутного столба) при температуре t,

t — температура ртути,

то

(М 9.8) $$\boxed{p_0 = p_t\,(1 - 0{,}000181t),}$$

где t — температура (°С).

9.2.2. Роль атмосферного давления

Многие устройства действуют только благодаря наличию атмосферного давления. В качестве примера можно назвать пипетки, поршневые вакуумные и нагнетательные насосы, центробежные насосы.

Максимальная высота подачи вакуумных насосов определяется из условия, что давление, создаваемое весом столба жидкости, должно быть равно атмосферному давлению.

Так как атмосферное давление составляет около 10^5 Па $= 1$ бар, высота подъема воды не может превышать 10 м.

10. Гидро- и аэродинамика

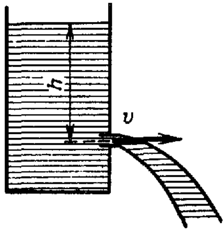
Гидро- и аэродннамика — раздел физики, занимающийся изучением законов движущихся жидкостей и газов. Законы движения жидкостей справедливы и для газов, если скорости потока оказываются меньше скорости звука, поскольку в этом случае газы можно считать практически несжимаемыми. Движение жидкостей происходит под действием силы тяжести, разности давлений и т. д. Скорость каждой частицы в потоке жидкости или газа в каждый момент времени имеет определенную величину и направление. Пространство, заполненное частицами движущейся жидкости, называется **потоком**. Для определения направления скоростей частиц используют **линии тока**. Касательные к ним в любой точке дают направление течения в данной точке. Это особенно наглядно, когда траектории частиц совпадают с линиями тока. Так обстоит дело в том случае, когда линии тока сохраняют свою конфигурацию в течение длительного времени, т. е. в случае **стационарного** потока.

10.1. Течение без внутреннего трения

Идеальной жидкостью или идеальным потоком называется такая жидкость или поток, при рассмотрении которых можно пренебречь существованием в жидкости внутреннего трения и образованием вихрей.

10.1.1. Истечение жидкости из сосуда

Скорость вытекающей жидкости зависит только от высоты столба жидкости в сосуде.



Если
v — скорость истечения жидкости,
h — высота столба жидкости,
$g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения,

то

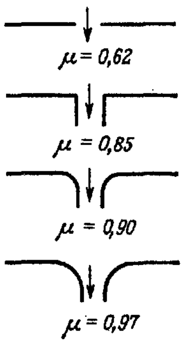
(М 10.1) $\boxed{v = \sqrt{2gh}.}$

Обратите внимание:

- Скорость истечения равна по величине скорости свободного падения с высоты, равной высоте столба жидкости.

В действительности же скорость истечения реальных жидкостей гораздо меньше, особенно если отверстие имеет необтекаемые края.

Коэффициент, характеризующий форму отверстия, называется **коэффициентом истечения** μ.



(М 10.2) $\boxed{v = \mu\sqrt{2gh}.}$

	v	μ	g	h
СИ	м/с	—	м/с^2	м

Значения коэффициента истечения μ приведены на рисунке.

10.1.2. Течение по трубам

Если
V — объем жидкости, протекающей через сечение A,
t — время, за которое протекает данный объем жидкости,
A — площадь сечения трубы,
v — скорость течения жидкости,

то объем протекшей жидкости определяется соотношением

(М 10.3) $\boxed{V = Avt.}$

	V	A	v	t
СИ	м^3	м^2	м/с	с

Произведение Av называется объемным расходом Q.

(М 10.4) $\boxed{Q = Av = \frac{V}{t}.}$

	Q	A	v
СИ	м^3/с	м^2	м/с

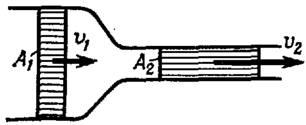
Мгновенное значение объемного расхода определяется по формуле

(М 10.5) $$\boxed{Q = \frac{dV}{dt} = \dot{V}.}$$

Единица СИ расхода: $[Q] = [\dot{V}] = м^3/с$.

Из формулы (М 10.4) следует, что через любое сечение трубы за равные промежутки времени t должны протекать одинаковые объемы V, поскольку жидкость практически несжимаема. Поэтому через сечение с меньшей площадью жидкость течет быстрее и наоборот.

Если
A_1 — площадь сечения 1,
A_2 — площадь сечения 2,
v_1 — скорость потока в сечении 1,
v_2 — скорость потока в сечении 2,



то **уравнение потока (уравнение непрерывности)** имеет вид

(М 10.6) $$\boxed{\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_2 v_2, \\ Av &= \text{const}. \end{aligned}}$$
или

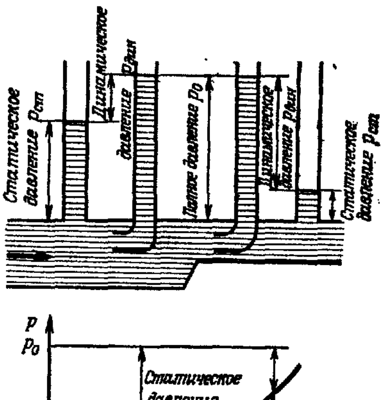
$$A \sim \frac{1}{v}.$$

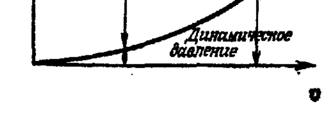
10.1.3. Давление в потоке

Полное давление в любом потоке складывается из статического и динамического давления.

- **Статическое давление** обусловлено потенциальной энергией жидкости, находящейся под давлением.
- **Динамическое давление (давление напора)** обусловлено кинетической энергией движущейся жидкости.

При увеличении скорости потока динамическая составляющая давления возрастает, а статическая уменьшается. В покоящейся жидкости динамическое давление равно нулю, а полное давление равно статическому, т. е. гидростатическому давлению, которое складывается из давления, создаваемого поршнем (см. разд. 8.1.1), и давления, создаваемого весом столба жидкости (см. разд. 8.1.2).





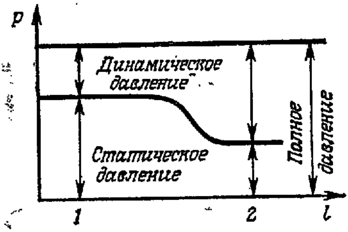
Закон Бернулли гласит:

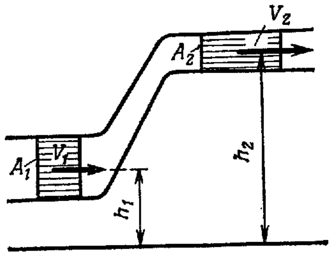
> В стационарном потоке сумма статического и динамического давлений остается постоянной. Эта сумма соответствует гидростатическому давлению в покоящейся жидкости.

Если жидкость течет в наклонной трубе, то следует учитывать связанное с наклоном изменение энергии.

Если

p_1 — статическое давление в сечении 1,
p_2 — статическое давление в сечении 2,
v_1 — скорость потока в сечении 1,
v_2 — скорость потока в сечении 2,
h_1 — высота сечения 1 относительно произвольно выбранного уровня,
h_2 — высота сечения 2 относительно того же уровня,
p_0 — полное давление,
ρ — плотность жидкости,





то работа W, расходуемая на изменения скорости v и высоты h жидкости, равна сумме изменения потенциальной энергии $\Delta W_п$ и изменения кинетической энергии $\Delta W_к$, т. е.

$$W = \Delta W_п + \Delta W_к.$$

Для элемента объема ΔV имеем $W = F\Delta s = pA\Delta s = p\Delta V$ откуда

$$(p_1 - p_2)\Delta V = mg(h_2 - h_1) + \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Разделив на ΔV, что можно сделать, так как объем остается неизменным вследствие несжимаемости жидкостей, получим

$$p_1 - p_2 = \rho g h_2 - \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 - \frac{\rho}{2} v_1^2.$$

Перенеся в одну сторону слагаемые с одинаковыми индексами, получим **уравнение Бернулли**

(M 10.7)
$$\boxed{\begin{aligned} &p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2, \\ &p + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0 = \text{const}. \end{aligned}}$$

	p	ρ	g	h
СИ	Па = Н/м²	кг/м³	м/с²	м

Сумма статического давления p, давления, обусловленного весом столба жидкости $\rho g h$, и динамнческого давлеиия $\rho v^2/2$ остается постояниой вдоль лииии тока.

О б р а т и т е в н и м а н и е:

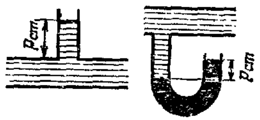
- Формула (М 10.7) вериа лишь для идеальных жидкостей, в которых отсутствует треине.

Если жидкость течет примерно на одной высоте, то формулы (М 10.7) упрощаются:

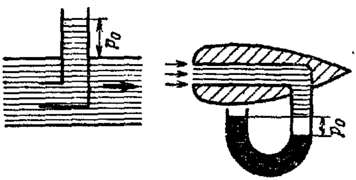
(М 10.8)
$$\boxed{\begin{aligned} &p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2, \\ &p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0 = \text{const}. \end{aligned}}$$

10.1.4. Измерение давления в потоках

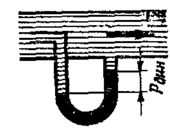
- **Статическое давление** измеряется манометром, установленным перпеидикулярно направлению потока. В простейшем случае можно использовать открытый жидкостный манометр.



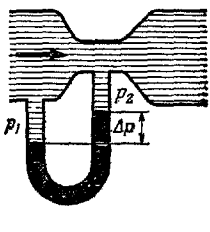
- **Полиое давление** измеряется манометром, установленным параллельно направлению потока (**трубка Пито**). Превышает статическое давление на величину давления напора.



- **Напор.** Разность полного и статического давлений измеряется комбинацией соответствующих приборов, которая называется иапорной **трубкой Прандтля.** Особенно часто этот прибор применяется для измерения скорости газового потока.



- **Разность двух статических давлений.** Для определения скоростей течения жидкости применяется **трубка Вентури.** Этот прибор позволяет измерить разность статических давлений в различных сечениях потока. По измеренной разности давлений можно определить скорость потока.



Если

p_1, v_1, A_1 — давление, скорость потока и площадь поперечного сечения в плоскости 1,

p_2, v_2, A_2 — давление, скорость потока и площадь поперечного сечения в плоскости 2,

ρ — плотность жидкости,

то по формуле (M 10.8)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} v_2^2 - \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Согласно формуле (M 10.6), $v_2 = A_1 v_1 / A_2$ и, следовательно,

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right].$$

После преобразования получим

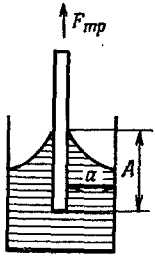
(M 10.9) $$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}}.}$$

	v	p	ρ	A
СИ	м/с	Па = Н/м²	кг/м³	м²

10.2. Ламинарное течение жидкостей

Течение жидкостей при наличии внутреннего трения, но не сопровождающееся образованием вихрей, называется ламинарным. Внутреннее трение возникает в жидкости вследствие взаимодействия молекул. В отличие от внешнего трения, возникающего в месте соприкосновения двух тел, внутреннее трение имеет место внутри движущейся среды между слоями с различными скоростями движения.

10.2.1. Динамическая вязкость



Внутреннее трение становится заметным, например, при перемещении в жидкости пластинки параллельно плоской стенке. Для такого перемещения требуется приложить силу, равную по величине силе трения.

Если

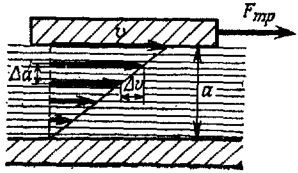
$F_{тр}$ — сила внутреннего трения,

A — площадь соприкосновения,

v — относительная скорость граничных плоскостей среды,

a — расстояние между граничными плоскостями,

η — динамическая вязкость, коэффициент внутреннего трения,



то сила трения определяется формулой

(М 10.10) $$\boxed{F_{тр} = \frac{\eta A v}{a}.}$$

	F	η	A	v	a
СИ	Н	Н·с/м² = Па·с	м²	м/с	м

Единица СИ динамической вязкости: $[\eta]$ = паскаль-секунда (Па·с) = Н·с/м² = кг/(м·с).

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: пуаз (П) и сантипуаз (сП).

Соотношение между единицами динамической вязкости

1 пуаз (П) = 0,1 Па·с = 0,1 Н·с/м²; 1 сП = 1 мПа·с = 1 мН·с/м²

Формула (М 10.10) справедлива также для промежуточных слоев, находящихся друг от друга на расстоянии $\Delta a < a$, если в нее подставить соответствующие значения относительной скорости Δv:

(М 10.11) $$\boxed{F_{тр} = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta a}.}$$

Отношение v/a или $\Delta v/\Delta a$ называется **градиентом скорости.** Если же это отношение непостоянно, его следует заменить производной dv/da.

(М 10.12) $$\boxed{F_{тр} = \eta A \frac{dv}{da}.}$$

Обратите внимание:

- Динамическая вязкость η жидкостей резко уменьшается с повышением температуры: $\eta \approx A e^{b/T}$, где A и b — эмпирические постоянные.
- Динамическая вязкость η газов увеличивается с повышением температуры.
- Численные значения динамической вязкости см. в табл. 6. Кроме понятия динамической вязкости применяются понятия **текучести и кинематической вязкости.**

Текучестью называется величина, обратная динамической вязкости.

$$\text{Текучесть } \varphi = \frac{1}{\text{Динамическая вязкость } \eta}.$$

Единица СИ текучести: $[\varphi]$ = м²/(Н·с) = 1/(Па·с).

Кинематической вязкостью ν называется отношение динамической вязкости к плотности среды.

$$\text{Кинематическая вязкость } \nu = \frac{\text{Динамическая вязкость } \eta}{\text{Плотность } \rho}.$$

Единица СИ кинематической вязкости: $[\nu] = м^2/с$.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: стокс (Ст) и сантистокс (сСт).

Соотношение между единицами кинематической вязкости

1 стокс (Ст) $= 10^{-4}$ $м^2/с$; 1 сСт $= 10^{-6}$ $м^2/с = 1$ $мм^2/с$

10.2.2. Ламинарное течение жидкости по трубе

При ламинарном течении отдельные слои жидкости движутся с различными скоростями. Непосредственно у стенки скорость течения жидкости равна нулю, а на оси трубы максимальна.

Поэтому для вычисления объема жидкости, протекающего по трубе за время t, нельзя пользоваться формулой (*M* 10.3).

Если
V — объем жидкости, протекающий по трубе за время t,
R — радиус трубы (с гладкими стенками),
Δp — разность давлений на концах трубы,
t — продолжительность протекания жидкости,
l — длина трубы,
η — динамическая вязкость,

то объем жидкости V определяется **формулой Пуазейля:**

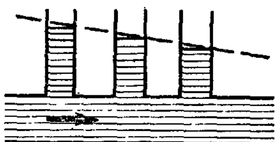
(*M* 10.13) $$\boxed{V = \frac{\pi\, \Delta p t R^4}{8\eta l}.}$$

	V	p	t	R	l	η
СИ	$м^3$	Па $=$ Н/м^2	с	м	м	Па $\cdot$ с $=$ Н $\cdot$ с/м^2

Обратите внимание:

- Объем протекающей по трубе жидкости ($V \sim \Delta p R^4$) можно увеличить в первую очередь за счет увеличения сечения (радиуса) трубы, а не за счет повышения разности давлений.

Из формулы (*M* 10.13) следует, что для трубы с постоянным сечением $\Delta p \sim l$.



Падение давления вдоль трубы с постоянным сечением пропорционально длине трубы.

10.2.3. Шар в ламинарном потоке

Когда тело шарообразной формы движется в жидкости, ему приходится преодолевать силу трения.

Если
$F_{тр}$ — сила трения в жидкости,
v — скорость шара относительно жидкости,

r — радиус шара,
η — динамическая вязкость,

то в предположении, что жидкость обтекает шар ламинарно, движение шара можно описать **законом Стокса**:

(М 10.14) $\boxed{F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v.}$

	F	η	r	v
СИ	Н	Па·с = Н·с/м²	м	м/с

Обратите внимание:

- На законе Стокса основано определение вязкости жидкости вискозиметром Гёпплера. В трубу определенного диаметра, заполненную жидкостью, вязкость которой надо определить, опускают шарик и измеряют скорость его падения, которая и является мерой вязкости жидкости.

10.3. Турбулентное течение

Когда скорость течения превысит определенное критическое значение, жидкость или газ начинают двигаться турбулентно. Возникают вихри, а следовательно, и силы, препятствующие течению. Сопротивление потоку, т. е. сила, действующая на помещенное в поток тело, складывается из разности давлений перед и за телом и силы трения на поверхности тела.

10.3.1. Гидравлическое сопротивление

Если
F — гидравлическое сопротивление,
c — коэффициент, зависящий от формы тела,
A — площадь наибольшего сечения тела в плоскости, перпендикулярной направлению потока,
ρ — плотность текущей жидкости (газа),
v — относительная скорость движения тела в среде,

то, поскольку сила равна произведению давления на площадь ($F = pA$), имеем

(М 10.15) $\boxed{F = cA\frac{\rho}{2}v^2.}$

	F	c	A	ρ	v
СИ	Н	—	м²	кг/м³	м/с

Обратите внимание:

- Коэффициент c — безразмерное число. Его значения приведены в табл. 7.
- Коэффициент c определяется экспериментально и зависит от скорости.
- Гидравлическое сопротивление увеличивается пропорционально квадрату скорости потока:

$$F \simeq v^2.$$

5 Зак. 722

10.3.2. Мощность при движении в потоке

Мощность, необходимая для движения тела против потока, определяется по формуле $P = Fv$ (М 7.29):

(М 10.16) $$\boxed{P = cA\frac{\rho}{2}v^3.}$$

	P	c	A	ρ	v
СИ	Вт	—	м^2	кг/м^3	м/с

Обратите внимание:

- Мощность увеличивается пропорционально третьей степени скорости: $P \sim v^3$.

10.3.3. Закон подобия Рейнольдса

Коэффициент c, необходимый для вычисления гидравлического сопротивления, зависит не только от формы тела, но и от свойств среды, в которой происходит движение. Коэффициент c является функцией **числа Рейнольдса** Re.

Если
Re — число Рейнольдса,
l — характерные размеры тела (радиус шара, радиус трубы и т. д.),
ρ — плотность текущей среды,
v — скорость тела относительно среды,
η — динамическая вязкость,
ν — кинематическая вязкость (см. разд. 10.2.1),

то

(М 10.17) $$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{l\rho v}{\eta} = \frac{lv}{\nu}.}$$

	Re	l	ρ	v	η	ν
СИ	—	м	кг/м^3	м/с	Па·с = Н·с/м^2	м^2/с

При малой скорости, т. е. при малом числе Рейнольдса, течение любой жидкости или газа будет ламинарным. Если скорость возрастает и достигает критического значения $v_{кр}$ (соответствующее число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$), то ламинарное течение сменяется турбулентным, гидравлическое сопротивление значительно увеличивается.

Критическое значение числа Рейнольдса для потока в гладких трубах составляет $\mathrm{Re}_{кр} \approx 1160$. Однако это значение сильно зависит от состояния поверхности труб и условий втекания и при определенных условиях может достигать 20 000.

Из формулы (М 10.17) следует, что число Рейнольдса не изменится, если уменьшить размеры тела и соответственно увеличить скорость потока или уменьшить вязкость среды.

Закон подобия гласит:

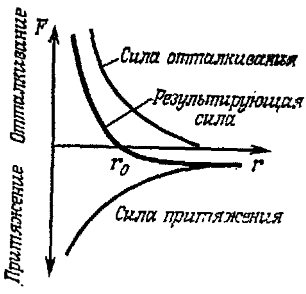
Коэффициенты c геометрически подобных тел равны, если равны соответствующие числа Рейнольдса. В этом случае оба потока подобны.

Этот закон дает возможность проводить экспериментальное исследование сложных процессов, используя модели обтекаемых тел.

11. Молекулы

11.1. Силы межмолекулярного взаимодействия

Между молекулами (а также атомами и ионами) действуют силы, величина которых зависит от агрегатного состояния вещества. В случае твердых тел и жидкостей эти силы задают объем тела. Объем тела может измениться (уменьшиться или увеличиться) только под воздействием внешней силы. Это означает, что молекулы располагаются на некотором равновесном расстоянии друг от друга.



Если расстояние между молекулами оказывается меньше равновесного значения, между молекулами возникают силы отталкивания, при большем расстоянии — силы притяжения. Силы межмолекулярного взаимодействия представляют собой равнодействующую сил отталкивания и притяжения, компенсирующих друг друга при нормальном равновесном расстоянии между молекулами.

Межмолекулярные силы действуют на очень малых расстояниях между молекулами, причем силы отталкивания уменьшаются при увеличении расстояния быстрее сил притяжения. **Радиус действия** межмолекулярных сил не превышает 10 нм.

11.1.1. Когезия и адгезия

Взаимодействие между поверхностными слоями одинаковых тел называется **когезией** (сцеплением); взаимодействие между поверхностными слоями различных тел — **адгезией** (прилипанием).

Когезия — это сцепление молекул одного тела между собой, вызванное взаимным притяжением.

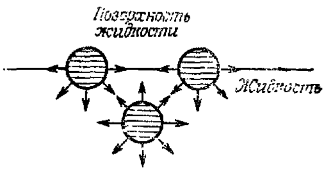
Когезия наблюдается у твердых и жидких тел. При очень низких температурах или больших давлениях, т. е. когда расстояние между молекулами газа становится достаточно малым, когезия возникает и в газах.

Адгезия — это прилипание молекул двух различных тел, вызванное взаимным притяжением.

Адгезия возникает между твердыми, твердыми и жидкими, а также между твердыми и газообразными телами. В последнем случае это явление называется **адсорбцией.**

11.1.2. Поверхностное натяжение

Поверхностное натяжение обусловлено силами притяжения между молекулами. Внутри жидкости силы притяжения между молекулами взаимно компенсируются, а на молекулы, находящиеся вблизи поверхности, действует нескомпенсированная результирующая сила, направленная внутрь от поверхности жидкости. Поэтому, чтобы переместить молекулу из глубины на поверхность жидкости, надо совершить работу против этой результирующей силы. В результате молекулы на поверхности жидкости обладают определенной потенциальной энергией, называемой **поверхностной энергией.**



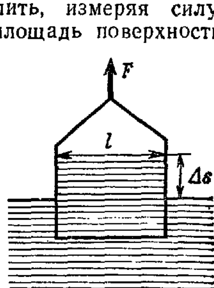
Если на тело не действуют внешние силы, то значение поверхностной энергии оказывается минимальным; при этом минимальна и площадь самой поверхности. Капли жидкости в невесомости имеют форму шариков (минимальная площадь поверхности).

Плотностью поверхностной энергии (поверхностным натяжением) называется отношение работы, требующейся для увеличения площади поверхности, к величине этого приращения площади:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}.$$

Единица СИ поверхностного натяжения: $[\sigma] = Дж/м^2 = Н/м = кг/с^2$.

Поверхностное натяжение можно определить, измеряя силу, которую нужно приложить, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости; для этого используется проволочная рамка, которую опускают в жидкость.



Если

σ — поверхностное натяжение,

F — сила, необходимая для увеличения площади поверхности,

l — длина основания рамки,

то, поскольку работа равна произведению силы на перемещение, $\Delta W = F\Delta s$, а изменение площади поверхности по обе стороны рамки равно $\Delta A = 2\Delta s l$, поверхностное натяжение можно вычислить по формуле:

$$\sigma = F\,\Delta s/2\,\Delta s l,$$

или

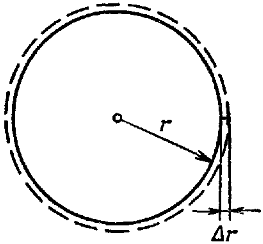
(М 11.1) $$\boxed{\sigma = \frac{F}{2l}.}$$

	σ	F	l
СИ	Н/м	Н	м
80	дин/см	дин	см

Обратите внимание:

- Численные значения поверхностного натяжения σ см. в табл. 8.

По формуле (М 11.1) можно определить давление внутри шарообразной капли *жидкости* или давление внутри *пузырька газа* в жидкости.



Если

p — давление внутри шарообразной капли жидкости или внутри пузырька газа,

σ — поверхностное натяжение жидкости,

r — радиус шарика,

то для увеличения радиуса r шарика на величину Δr или увеличения площади его поверхности A на ΔA надо затратить работу, равную приращению поверхностной энергии: $\Delta W = \sigma\Delta A = \sigma[4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2]$, а поскольку $\Delta r^2 \ll 2r\Delta r$, имеем

$$\Delta W = \sigma \cdot 8\pi r\,\Delta r.$$

С другой стороны, затраченная работа равна

$$\Delta W = F\,\Delta r = p\,\Delta V = pA\,\Delta r = p \cdot 4r^2\pi\,\Delta r.$$

Приравняв оба выражения, получим

(М 11.2) $$\boxed{p = \frac{2\sigma}{r}.}$$

	p	σ	r
СИ	Па = Н/м²	Н/м	м

Обратите внимание:

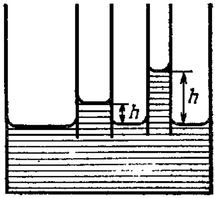
- Поскольку $p \sim 1/r$, давление тем больше, чем меньше радиус шарообразной капли.

11.1.3. Капиллярные явления

Между молекулами стенок сосуда и молекулами поверхности жидкости действуют силы притяжения (адгезии) F_a. Совместно с межмолекулярными силами они приводят к возникновению **краевого угла** α между стенками сосуда и поверхностью жидкости. Равнодействующая сил когезии и адгезии $F_к$ и $F_а$ всегда перпендикулярна поверхности жидкости.

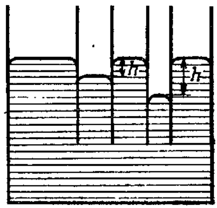
Если

- $\alpha < 90°$: жидкость смачивает стенку,
- $\alpha > 90°$: жидкость не смачивает стенку.



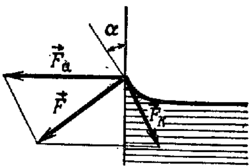
Это явление особенно заметно в тонких трубочках — капиллярах.

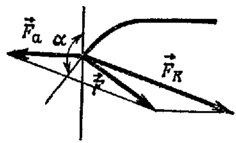
В капилляре жидкость стоит выше или ниже того уровня, на котором она должна была бы находиться по закону сообщающихся сосудов. В указанных случаях мы имеем дело с капиллярными явлениями.



Если

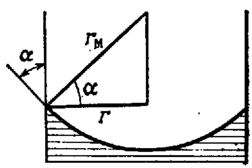
h — высота жидкости в капилляре,
σ — поверхностное натяжение жидкости (см. табл. 8),
$g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения,
ρ — плотность жидкости (см. табл. 1),
r — радиус трубочки,
$r_М$ — радиус шарообразного мениска в капилляре,





то, поскольку давление в жидкости, обусловленное межмолекулярными силами, должно быть равно давлению столба жидкости высотой h, получаем $p = 2\sigma/r_м = h\rho g$, а так как

$$\cos\alpha = r/r_М,$$



для высоты подъема жидкости в капилляре имеем

(М 11.3) $$\boxed{h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{\rho g r}.}$$

	h	σ	g	ρ	r
СИ	м	Н/м	м/с^2	кг/м^3	м
80	см	дин/см	см/с^2	г/см^3	см

Обратите внимание:

- Формула (М 11.3) дает возможность определить поверхностное натяжение жидкости по высоте подъема жидкости в капилляре и величине краевого угла между мениском жидкости и стенками сосуда.

- Краевой угол α на границе вода — стекло близок к 0°, а на границе ртуть — стекло составляет примерно 140°.
- Высота подъема данной жидкости в капилляре зависит только от радиуса капилляра: $h \sim 1/r$ (остальные величины в формуле (М 11.3) — постоянные).

11.2. Движение молекул

Молекулы всех тел находятся в постоянном движении и вследствие этого обладают кинетической энергией.

В твердых телах они колеблются относительно определенного положения в кристаллической решетке.

В жидкостях молекулы колеблются относительно мгновенного положения, меняющегося со временем.

В газах между молекулами нет взаимодействия, поэтому они двигаются с довольно большими скоростями. В промежутке между столкновениями друг с другом или с препятствием молекулы двигаются прямолинейно (см. разд. 17.3.6).

Движение молекул в жидкостях и газах можно наблюдать косвенным методом с помощью микроскопа. Маленькие частицы взвешенного вещества (сажи, краски) под действием ударов молекул жидкости двигаются хаотично по зигзагообразной траектории. Такое движение называется **броуновским движением.**

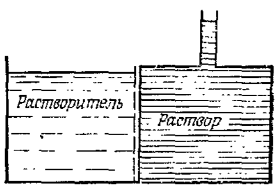
11.2.1. Диффузия

Двигаясь, молекулы постоянно меняют свое положение. Это явление называется диффузией. При **самодиффузии** происходит перемешивание молекул одного вида, а в процессе собственно **диффузии** смешиваются молекулы разных видов.

Диффузией называется самостоятельное перемешивание молекул, обусловленное их тепловым движением.

Диффузия имеет место как в газах и жидкостях, так и в твердых телах. Однако в газах диффузия протекает с наибольшей скоростью вследствие большой подвижности молекул газа. Скорость диффузии во всех агрегатных состояниях вещества сильно зависит от температуры.

11.2.2. Осмотические явления



Если раствор отделить от растворителя полупроницаемой перегородкой, то в одной из частей сосуда возникает избыточное давление (осмотическое давление), поскольку перегородка пропускает только молекулы растворителя. В силу тенденции к выравниванию концентраций будет происходить односторонняя диффузия молекул растворителя.

11.3. Растворы

Если мельчайшие частицы одного вещества равномерно распределены в другом веществе, то говорят о **дисперсной системе.** В зависимости от величины частиц эти системы имеют различные свойства и носят различные названия.

11.3.1. Истинные растворы (молекулярно-дисперсные системы)

В истинных растворах частицы растворенного вещества имеют молекулярные размеры. Они перемешиваются с молекулами растворителя в результате диффузии.

Истинный раствор образуется, когда молекулы двух различных веществ полностью перемешиваются между собой. Истинный раствор всегда прозрачен.

Твердые вещества растворяются в жидкостях только до определенной концентрации, зависящей от температуры и называющейся концентрацией насыщения.

Молекулы двух жидкостей также могут смешиваться между собой, образуя раствор. Однако не все жидкости растворимы друг в друге и не смешиваются друг с другом неограниченно.

Процесс растворения газов в жидкостях называется **абсорбцией.**

Мерой количества растворенного вещества служит концентрация:

- Массовая концентрация $= \dfrac{\text{Масса растворенного вещества}}{\text{Объем раствора}}$.
- Массовая доля $= \dfrac{\text{Масса растворенного вещества}}{\text{Масса раствора}} \cdot 100\%$.
- Молярный раствор $= \dfrac{1\ \text{моль растворенного вещества}}{1\ \text{л раствора}}$.

11.3.2. Коллоидные растворы (коллоидно-дисперсные системы)

Коллоидами называются высокодисперсные системы с частицами размером $10^{-6} - 10^{-4}$ мм.

Таким образом, в коллоидных растворах с молекулами растворителя смешаны не молекулы растворенного вещества, а его мельчайшие частицы, состоящие из $10^3 - 10^9$ атомов.

11.3.3. Дисперсные системы

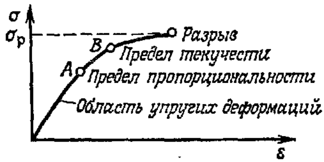
При дальнейшем увеличении размеров частиц (когда их можно видеть под микроскопом) раствор становится нестабильным, происходит разделение смеси (в основном под действием силы тяжести), Такие системы называются по-разному в зависимости от агрегатного состояния растворенного вещества и растворителя, причем зачастую бывает трудно различать коллоидную и дисперсную системы.

Справочная таблица

Растворенное вещество	Растворитель	Название
Твердое	Твердый	Твердый золь, например стекло
Твердое	Жидкий	Суспензия, золь
Твердое	Газообразный	Дым, аэрозоль
Жидкое	Твердый	Твердая эмульсия (паста), гель
Жидкое	Жидкий	Эмульсия
Жидкое	Газообразный	Туман, аэрозоль
Газообразное	Твердый	Пористое тело, например пемза
Газообразное	Жидкий	Пена

12. Упругие свойства твердых тел

В разделах «Статика», «Кинематика» и «Динамика» рассматривались абстрактные понятия точечной массы и твердого тела. На самом деле внешние силы изменяют форму и объем реального тела, т. е. деформируют его. При **деформации** происходит относительное смещение элементов тела (его молекул).



Деформации, исчезающие с прекращением действия силы, называются **упругими**. При превышении предела упругости в кристаллической решетке возникают необратимые изменения, происходит **пластическая** деформация тела. Тело не возвращается к исходной форме даже после прекращения действия внешних сил.

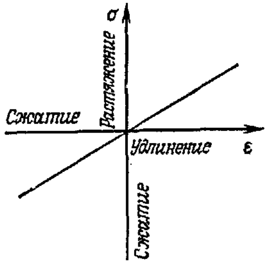
Внешние силы могут вызывать различные изменения.

Справочная таблица

Деформация	Изменение формы	Изменение объема	Раздел
Растяжение	Происходит	Происходит	12.1
Всестороннее сжатие	Не происходит	Происходит	—
Сдвиг	Происходит	Не происходит	12.2
Кручение	Происходит	Не происходит	

12.1. Растяжение

Сила растяжения или сжатия, приложенная к телу в форме стержня, вызывает изменение длины тела Δl. Величина Δl зависит от размеров стержня, материала, из которого он изготовлен, и величины самой силы.



Если
l — начальная длина стержня,
Δl — изменение длины под действием внешней силы,
$\varepsilon = \Delta l/l$ — относительное удлинение, линейная деформация,
A — площадь поперечного сечения стержня,
F — сила,
$\sigma = F/A$ — напряжение,
E — модуль упругости (модуль Юнга) (см. табл. 9),

то согласно **закону Гука**

(M 12.1)
$$\boxed{\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta l}{l},\quad \sigma = E\varepsilon.}$$

	F	A	F	σ
СИ	Н	м^2	Н/м^2 = Па	Н/м^2 = Па
КД	Н	мм^2	Н/мм^2	Н/мм^2
80	кгс	мм^2	кгс/мм^2	кгс/мм^2

1 кгс/мм^2 = 9,81 · 10^6 Н/м^2 = 9,81 МПа

Напряжение пропорционально относительному удлинению.

Модуль упругости равен отношению приложенного напряжения к вызванному им относительному удлинению:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Обратите внимание:

- Закон Гука выполняется только в области упругих деформаций (в пределах упругости).
- Из формулы (M 12.1) следует, что изменение длины пропорционально приложенной силе: $F \sim \Delta l$.
- Величина α, обратная модулю упругости, называется коэффициентом упругости (коэффициентом растяжения): $1/E = \alpha$; $[\alpha] =$ $=$ м^2/Н.

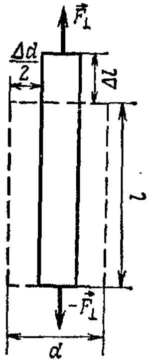
Из формулы (M 12.1) получаем выражение для изменения длины:

(M 12.2)
$$\boxed{\Delta l = \frac{l\sigma}{E}.}$$

Обратите внимание:

- Силы сжатия вызывают уменьшение длины тела; напряжение и изменение длины Δl в этом случае отрицательны.

Механическое напряжение в продольном направлении кроме удлинения вызывает поперечное сжатие тела, т. е. с изменением длины тела изменяется и его поперечное сечение.



Если
d — поперечный размер тела (диаметр, толщина стержня и т. д.),
Δd — изменение поперечного сечения,
l — длина тела,
Δl — изменение длины,
μ — коэффициент Пуассона (см. табл. 9),

то эти величины связаны следующим соотношением:

(M 12.3)
$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_п = -\mu\varepsilon.}$$

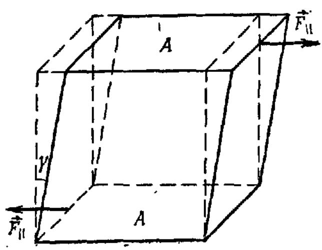
Коэффициент Пуассона представляет собой относительное изменение $\varepsilon_п$ поперечного размера тела, деленное на относительное изменение его длины.

Обратите внимание:

- Коэффициент Пуассона принимает значения от 0,2 до 0,5 (см. табл. 9).

12.2. Сдвиг

Пусть к параллельным плоскостям тела приложены параллельные силы, направленные в разные стороны. Тогда эти плоскости смещаются относительно друг друга.
Такая деформация сдвига характеризуется углом сдвига.



Если
$F_\parallel$ — сила, параллельная плоскости A,
A — площадь поверхности,
τ — касательное напряжение,
γ — сдвиговая деформация,
G — модуль сдвига (см. табл. 10),

то по аналогии с законом Гука (M 12.1)

(M 12.4) $\boxed{\tau = \frac{F}{A} = G\gamma.}$

	τ	G	γ
СИ	Н/м^2	Н/м^2 = Па	рад = 1
КД	Н/мм^2	Н/мм^2 = МПа	рад = 1
80	кгс/мм^2	кгс/мм^2	рад = 1

Обратите внимание:

- Величина, обратная модулю сдвига, называется коэффициентом сдвига: $1/G = \beta$; $[\beta] = $ м^2/Н.

Модуль сдвига можно определить из других упругих постоянных.

Если
G — модуль сдвига,
E — модуль упругости,
μ — коэффициент Пуассона,

то

(M 12.5) $\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}.}$

Т ТЕРМОДИНАМИКА (ТЕОРИЯ ТЕПЛОТЫ)

В основе учения о теплоте (термодинамики) лежат законы механики. Следует различать тепловое состояние (температуру) тела и его тепловую энергию. Для тепловой энергии, как и для любого вида энергии, справедлив закон сохранения энергии. Изменение температуры и подвод или отвод тепловой энергии — это не одно и то же!

13. Температура

Температура тела характеризует энергию, с которой движутся его молекулы (см. кинетическую теорию газов, разд. 17).

В твердых телах происходят колебания молекул относительно неподвижных положений равновесия. Движению молекул во всех трех направлениях в пространстве отвечают потенциальная и кинетическая энергии.

Молекулы жидкостей также совершают колебания, испытывая при этом многочисленные соударения.

Молекулы движутся с огромными скоростями (порядка 10^3 м/с).

Многие физические свойства зависят от температуры:

- Объем тела (а, следовательно, и его размеры), как правило, увеличивается с повышением температуры.
- При повышении температуры вещество переходит в жидкое, а затем в газообразное агрегатное состояние.
- У металлов удельное электрическое сопротивление возрастает с повышением температуры, а у полупроводников падает.
- Спектр теплового излучения, испускаемого твердым телом, при повышении температуры смещается в более коротковолновую область.
- Электрическое напряжение термоэлемента увеличивается с повышением температуры.
- Многие «константы» вещества (скорость звука, удельная теплоемкость, коэффициент теплового расширения и др.) также зависят от температуры.

Большинство физических величин, зависящих от температуры, используется для измерения температуры.

Температура характеризует состояние тела независимо от его массы и химического состава. Поэтому температуру называют параметром состояния.

13.1. Измерение температуры

13.1.1. Шкалы температуры

Температура представляет собой одну из основных величин Международной системы единиц (СИ); единица измерения температуры является одной из основных единиц в этой системе.

Единица СИ температуры: $[T]$ = кельвин (К).

Наряду с этим температура измеряется по международной стоградусной шкале в градусах Цельсия (°С). В Великобритании и Северной Америке употребляется также градус Фаренгейта.

Определение единицы кельвин см. в разд. 15.3.4.

Для градуировки температурных шкал служат реперные точки, установленные международным соглашением.

Справочная таблица

Реперные точки

Вещество	Реперная точка	T, °С	T, К	T, °F
Кислород	Точка кипения	—182,97	90,18	
Вода	Точка затвердевания	0,00	273,15	31
Вода	Точка кипения	100,00	373,15	212
Сера	Точка кипения	444,60	717,75	
Серебро	Точка плавления	960,80	1233,95	
Золото	Точка плавления	1063,00	1336,15	

Все приведенные значения соответствуют нормальному давлению $p_н$ = 101,325 кПа.

Нулевая точка по шкале Кельвина соответствует наинизшей теоретически возможной температуре (абсолютный нуль температуры). Нулевая точка по шкале Цельсия соответствует точке затвердевания воды. Более низкие температуры по этой шкале — отрицательны. Один кельвин равен по своей величине одному градусу Цельсия.

Таким образом, шкалы Кельвина и Цельсия просто смещены друг относительно друга.

Если

T — температура в кельвинах (К), или абсолютная температура,

t — температура в градусах Цельсия (°С),

T_0 = 273,15 К нулевая точка по шкале Цельсия (точка затвердевания воды),

то

(Т 13.1) $$\boxed{t = T - T_0 \quad \text{или} \quad T = t + T_0.}$$

Обратите внимание:

- Температура — единственная физическая величина, имеющая два обозначения (T или t) в зависимости от применяемых единиц. Если оба обозначения встречаются в одном уравнении, то сокращать их нельзя!
- Разности температур ΔT и Δt выражаются в кельвинах (К).
- Разность температур по шкале Цельсия Δt также выражается в градусах Цельсия (°С).
- Кельвин и градус Цельсия можно сокращать, если они применяются для обозначения **разности температур.**
- В сочетании с градусом Цельсия не используются множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц, перечисленные в табл. П1.

13.1.2. Термометры

Термометры всегда показывают собственную температуру. Только через определенное время эта температура становится равной температуре окружающей среды. Иначе говоря, термометрам свойственна определенная инерционность. Кроме того, они могут изменять измеряемую температуру среды.

Жидкостные термометры

Длина столбика жидкости, ртути, спирта, толуола, пентана и т. д.) служит мерой температуры. Интервал измерений ограничен температурами кипения и замерзания данной жидкости. Если температура неодинакова по длине столбика жидкости, то возможны незначительные ошибки измерения.

Металлические термометры

Металлический термометр представляет собой биметаллическую пластинку, т. е. пластинку, сваренную или склепанную из полосок двух различных металлов. Вследствие разницы в тепловом расширении металлов пластинка при нагревании будет изгибаться. Из длинной пластинки сгибают спираль. Наружный конец спирали закрепляют, а ко внутреннему прикрепляют стрелку, которая указывает по шкале соответствующую температуру.

Термометры сопротивления

Сопротивление металлов меняется с температурой. Сила тока в цепи зависит от сопротивления проводника, а следовательно и от его температуры. Преимущество термометра сопротивления состоит в том, что измерительный прибор и место, где измеряется температура, могут быть разнесены на значительное расстояние. В качестве сопротивления в основном применяется тонкая отожженая платиновая проволока.

13.2. Расширение твердых тел

При нагревании амплитуда колебания молекул увеличивается, расстояние между ними возрастает, и тело заполняет больший объем. Твердые тела расширяются при нагревании во всех направлениях. Стержни и проволока расширяются в основном в длину.

13.2.1. Линейное тепловое расширение

Если
l_1 — начальная длина тела при температуре t_1,
l_2 — конечная длина тела при температуре t_2,
$\Delta l = l_2 - l_1$ — удлинение тела,
$\Delta t = t_2 - t_1$ — разность температур,
α — коэффициент линейного расширения (линейный коэффициент теплового расширения) в 1/К (см. табл. 11),

то в хорошем приближении справедливы равенства

(Т 13.2) $$\boxed{\Delta l = l_1 \alpha \, \Delta t,}$$

$$l_2 = l_1 + \Delta l = l_1 + l_1 \alpha \, \Delta t,$$

(Т 13.3) $$\boxed{l_2 = l_1 (1 + \alpha \, \Delta t).}$$

Коэффициент линейного расширения α равен отношению относительного удлинения $\Delta l / l_1$ к разности температур Δt:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_1 \, \Delta t}.$$

Обратите внимание:

- Каждый материал характеризуется собственным значением коэффициента линейного расширения α.
  Значения α см. в табл. 11.
- Коэффициент линейного расширения α слабо зависит от температуры. Табличные значения обладают достаточной точностью в интервале температур от 0 до 100°С.
- При охлаждении величина Δt отрицательна.

13.2.2. Двумерное расширение

При вычислениях двумерное расширение можно рассматривать как линейное расширение в двух направлениях.

Если
A_1 — площадь тела при температуре t_1,
A_2 — площадь тела при температуре t_2,
$\Delta A = A_2 - A_1$ — изменение площади тела,
$\Delta t = t_2 - t_1$ — разность температур,
α — коэффициент линейного расширения (линейный коэффициент теплового расширения) в 1/К (см. табл. 11),

то

$$\Delta A = A_2 - A_1 = l_2^2 - l_1^2 = l_1^2 (1 + \alpha\,\Delta t)^2 - l_1^2,$$

$$\Delta A = l_1^2 [1 + 2\alpha\,\Delta t + \alpha^2 (\Delta t)^2] - l_1^2.$$

Из-за малости численного значения α слагаемым второго порядка можно пренебречь. Тогда

$$\Delta A = l_1^2 (1 + 2\alpha\,\Delta t) - l_1^2 = l_1^2\, 2\alpha\,\Delta t,$$

откуда

(Т 13.4) $\boxed{\Delta A = A_1 2\alpha\,\Delta t,}$

$$A_2 = A_1 + \Delta A = A_1 + A_1\, 2\alpha\,\Delta t,$$

(Т 13.5) $\boxed{A_2 = A_1\,(1 + 2\alpha\,\Delta t).}$

Обратите внимание:

- При охлаждении величина Δt отрицательна.

13.2.3. Объемное расширение

При вычислениях объемное расширение можно рассматривать как линейное расширение в трех направлениях.

Если
V_1 — начальный объем тела при температуре t_1,
V_2 — конечный объем тела при температуре t_2,
$\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема,
$\Delta t = t_2 - t_1$ — разность температур,
α — коэффициент линейного расширения (линейный коэффициент теплового расширения) в 1/К (см. табл. 11),

то

$$\Delta V = V_2 - V_1 = l_2^3 - l_1^3 = l_1^3 (1 + \alpha\,\Delta t)^3 - l_1^3,$$

$$\Delta V = l_1^3 [1 + 3\alpha\,\Delta t + 3\alpha^2 (\Delta t)^2 + \alpha^3 (\Delta t)^3] - l_1^3.$$

Из-за малости численного значения α слагаемыми второго и третьего порядка можно пренебречь. Тогда

$$\Delta V = l_1^3 (1 + 3\alpha\,\Delta t) - l_1^3 = l_1^3\, 3\alpha\,\Delta t,$$

(Т 13.6) $\boxed{\Delta V = V_1 3\alpha\,\Delta t,}$

$$V_2 = V_1 + \Delta V = V_1 + V_1 3\alpha\,\Delta t,$$

(Т 13.7) $\boxed{V_2 = V_1\,(1 + 3\alpha\,\Delta t).}$

Обратите внимание:

- При охлаждении величина Δt отрицательна.
- Расширение полых тел происходит по тем же законам.

13.3. Расширение жидкостей

Жидкости расширяются значительно сильнее твердых тел. Они также расширяются во всех направлениях. Вследствие большой подвижности молекул жидкость принимает форму сосуда, в котором она находится, причем следует учитывать и тепловое расширение сосуда. Расширение жидкости в трубках также представляет собой объемное расширение. Следовательно, верны формулы (Т 13.6) и (Т 13.7).

Если
V_1 — объем жидкости при температуре t_1,
V_2 — объем жидкости при температуре t_2,
$\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема жидкости,
β — коэффициент объемного расширения (объемный коэффициент теплового расширения) в 1/К (см. табл. 12),

то

(Т 13.8) $\boxed{\Delta V = V_1 \beta \, \Delta t,}$

(Т 13.9) $\boxed{V_2 = V_1 (1 + \beta \, \Delta t).}$

Коэффициент объемного расширения β равен отношению относительного объемного расширения $\Delta V/V_1$ к разности температур Δt:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_1 \, \Delta t}.$$

Обратите внимание:

- Каждый материал характеризуется собственным значением коэффициента объемного расширения β. Значения β см. табл. 12.
- Коэффициент объемного расширения β слабо зависит от температуры. Приведенные в таблице значения обладают достаточной точностью в интервале температур от 0 до 40°С.
- При охлаждении разность температур Δt отрицательна.
- Вода является исключением. Коэффициент объемного расширения воды сильно зависит от температуры, а в интервале от 0 до 4°С принимает отрицательное значение. Значения плотности воды см. в табл. 13.

13.3.1. Изменение плотности

При нагревании изменяется не только объем, но и плотность жидкости. Так как объем и плотность обратно пропорциональны друг другу,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1},$$

то вместо (Т 13.9) можно также написать

$$\rho_1 = \rho_2 (1 + \beta\,\Delta t);$$

после перестановки получаем

(Т 13.10) $$\boxed{\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta\,\Delta t}.}$$

Обратите внимание:

- Формула (Т 13.10) справедлива и для твердых тел. В этом случае коэффициент объемного расширения β следует заменить на 3α.
- При охлаждении разность температур Δt отрицательна.

13.4. Расширение газов

При нагревании скорость молекул возрастает. При повышении температуры произведение давления на объем (pV) также возрастает. Наглядные соотношения можно получить, если оставить постоянным один из сомножителей. Газы расширяются значительно сильнее, чем твердые и жидкие тела.

13.4.1. Изменение объема при нагревании

Пусть газ нагревается при постоянном давлении. Тогда справедлива формула (Т 13.9). Коэффициент объемного расширения имеет приблизительно одну и ту же величину для всех газов. В хорошем приближении можно считать его равным коэффициенту объемного расширения идеального газа:

$$\beta = 0{,}003661\,\mathrm{K}^{-1} = \frac{1}{273{,}15\,\mathrm{K}}.$$

Коэффициент объемного расширения газа β равен отношению относительного объемного расширения $\Delta V/V_0$ к температуре t:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 t}.$$

Обратите внимание:

- В определение коэффициента объемного расширения β входит V_0 — объем при 0°С.
- Газ считается идеальным, если для него при постоянной температуре выполняется равенство $pV = \text{const}$ (закон Бойля — Мариотта); см. также разд. 9.1.1.

Если
V_t — объем газа при произвольной температуре t,
V_0 — объем газа при температуре 0°С,
t — температура,
β — коэффициент объемного расширения газа,
то

(Т 13.11) $$\boxed{V_t = V_0 (1 + \beta t).}$$

Обратите внимание:

- Коэффициенты объемного расширения инертных газов, водорода и кислорода равны коэффициенту объемного расширения идеального газа $\beta = 1/(273{,}15\ \text{К})$. Значения коэффициентов объемного расширения других газов отличаются от этого значения.
- **Точные** численные значения коэффициентов объемного расширения важнейших газов см. в табл. 14.

Из формулы (Т 13.11) следует, что при температуре t_1

$$V_1 = V_0 (1 + \beta t_1) = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{273{,}15}\right) = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{T_0}\right) = V_0 \left(\frac{T_0 + t_1}{T_0}\right),$$

а при другой температуре t_2 соответственно

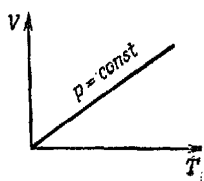
$$V_2 = V_0 (1 + \beta t_2) = V_0 \left(1 + \frac{t_2}{273{,}15}\right) = V_0 \left(1 + \frac{t_2}{T_0}\right) = V_0 \left(\frac{T_0 + t_2}{T_0}\right).$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_0 + t_1}{T_0 + t_2},$$

или с учетом формулы (Т 13.1)

(Т 13.12) $$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const}.}$$



При постоянном давлении объем газа пропорционален абсолютной температуре газа T (**первый закон Гей-Люссака**):

$V \sim T$ $(p = \text{const})$.

Обратите внимание:

- Формула (T 13.12) справедлива только для идеальных газов, для реальных газов она является хорошим приближением и неприменима в случае пара.

13.4.2. Изменение давления при нагревании

Пусть объем газа при нагревании остается постоянным. Тогда давление газа увеличивается по тому же закону, что и объем [формула (T 13.11)]. Относительный коэффициент давления практически одинаков у всех газов и с хорошим приближением равен относительному коэффициенту давления идеального газа. Он совпадает с коэффициентом объемного расширения $\beta = 0{,}003661$ $K^{-1} = 1/(273{,}15\ K)$.

Относительный коэффициент давления газа представляет собой отношение относительного изменения давления $\Delta p/p_0$ к температуре t:

$$\beta = \frac{\Delta p}{p_0 t}.$$

Обратите внимание:

- В определение относительного коэффициента давления β входит нормальное давление p_0 (при 0°С).
- Относительный коэффициент давления называют также термическим коэффициентом давления.

Если

p_t — давление газа при произвольной температуре t,
p_0 — давление газа при 0°С,
t — температура, при которой давление газа равно p_t,
β — относительный коэффициент давления (коэффициент объемного расширения),

то

(T 13.13) $$\boxed{p_t = p_0(1 + \beta t).}$$

Обратите внимание:

- См. замечания к формуле (T 13.11).

Из формулы (T 13.13) следует, что для температуры t_1:

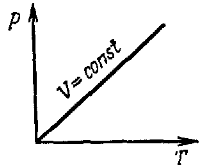
$$p_1 = p_0(1 + \beta t_1) = p_0\left(1 + \frac{t_1}{273{,}15}\right) = p_0\left(1 + \frac{t_1}{T_0}\right) = p_0\left(\frac{T_0 + t_1}{T_0}\right),$$

а для температуры t_2 соответственно:

$$p_2 = p_0(1+\beta t_2) = p_0\left(1+\frac{t_2}{273{,}15}\right) = p_0\left(1+\frac{t_2}{T_0}\right) = p_0\left(\frac{T_0+t_2}{T_0}\right).$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_0+t_1}{T_0+t_2}$$ или с учетом формулы (Т 13.1)



(Т 13.14) $$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \text{ или } \frac{p}{T} = \mathrm{const}.}$$

Давление газа в замкнутом объеме пропорционально абсолютной температуре (**второй закон Гей-Люссака**):

$p \sim T$ $(V = \mathrm{const})$.

Обратите внимание:

- Формула (Т 13.14) точно выполняется для идеального газа, является хорошим приближением для реальных газов и неприменима в случае пара.

13.5. Газовые законы

Применимость законов (Т 13.11)—(Т 13.14) ограничивается довольно редкими случаями постоянства давления или объема газа при изменении температуры. Поэтому закон Гей-Люссака и закон Бойля — Мариотта были сведены в один общий закон.

13.5.1. Уравнение состояния идеального газа

Если

p_1, T_1, V_1 — начальные давление, температура и объем газа (состояние 1),

p_2, T_2, V_2 — конечные давление, температура и объем газа (состояние 2),

$V_{пр}$ — промежуточный объем газа при нагревании,

то согласно соотношению (Т 13.12) $V_{пр} = V_1T_2/T_1$, а из соотношения (М 9.1) следует, что после изменения давления

$$V_2 = \frac{V_{пр}p_1}{p_2} = \frac{V_1T_2p_1}{T_1p_2}.$$

Перенеся в одну сторону величины с одинаковым индексом, получим **уравнение состояния идеального газа**

(Т 13.15) $$\boxed{\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \text{ или } \frac{pV}{T} = \mathrm{const}.}$$

Для данного количества (данной массы) идеального газа отношение произведения давления на объем к абсолютной температуре есть величина постоянная.

Обратите внимание:

- Уравнение состояния строго выполняется только для идеального газа, является хорошим приближением для реальных газов и неприменимо в случае пара.
- Уравнение состояния идеального газа объединяет в себе три частных случая, см. справочную таблицу и разд. 16.2—16.4.

Справочная таблица

Частные случаи уравнения состояния

Процесс	Изобарический	Изохорический	Изотермический
Признак:	$p = \text{const}$	$V = \text{const}$	$T = \text{const}$
Запись:	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$
Название закона:	Гей-Люссака		Бойля — Мариотта

Согласно формуле (Т 13.15) $pV/T = \text{const}$; величина постоянной пропорциональна массе данного газа, т. е. $pV/T \sim m$ или $pV/T = mR$, где R — **газовая постоянная**, зависящая от природы газа. Путем преобразования получаем новую запись уравнения состояния идеального газа:

(Т 13.16) $\boxed{pV = mRT.}$

	p	V	m	R	T
СИ	Па = Н/м^2	м^3	кг	Дж/(кг · К)	К
	кгс/м^2 = 10^{-4} ат	м^3	кг	кгс · м/(кг · К)	К

Обратите внимание:

- Формулы (Т 13.15) и (Т 13.16) представляют собой две различные записи уравнения состояния идеального газа. Выбор любой из них зависит от условий задачи.
- Численные значения газовой постоянной R см. в табл. 15.
- Соотношение между единицами измерения давления см. в табл. П3.
- Обе части формулы (Т 13.16) имеют размерность работы. Формулу (Т 13.16) можно записать в еще более общем виде, если массу m заменить количеством вещества n.

Единица СИ количества вещества: $[n]=$(моль) (основная единица).

Один киломоль любого газа занимает при нормальных условиях ($p_н=101{,}325$ кПа, $T_н=273{,}15$ К) объем $V_{mн}=22{,}41383$ м³/кмоль, называемый **нормальным молярным объемом.**

Если
M — молярная масса (в кг/моль), равная отношению массы m к количеству вещества n.
$p_н$ $=101{,}3$ кПа, (до 1980 г.: 760 мм рт. ст.) — нормальное давление,
$T_н$ $=273{,}15$ К — нормальная температура,

то после подстановки этих значений в формулу (Т 13.16) получим

$$101{,}325 \text{ кПа} \cdot 22{,}41383 \text{ м}^3 = nMR \cdot 273{,}15\text{К},$$

или

$$R=\frac{101{,}325 \text{ кПа} \cdot 22{,}413 \text{ м}^3}{1 \text{ кмоль} \cdot M \cdot 273{,}15 \text{ К}}=\frac{8314{,}41 \text{ Дж}}{M \text{ кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Отсюда

(Т 13.17) $\boxed{R=\dfrac{R_m}{M},}$ где R_m —

универсальная (молярная) газовая постоянная

$$\boxed{R_m=8314\,\frac{\text{Дж}}{\text{кмоль}\cdot\text{К}}.}$$

	R	R_m	M
КД	Дж/(кг·К)	Дж/(кмоль·К)	кг/кмоль

Обратите внимание:

- Молярная масса M численно равна относительной массе молекулы.
- По формуле (Т 13.17), зная относительную массу молекулы, можно вычислить газовую постоянную. Однако поскольку уравнение состояния точно выполняется только для идеального газа, при точных расчетах следует пользоваться экспериментальными данными из табл. 15.

13.5.2. Количество вещества

Количество вещества n характеризует число структурных элементов, содержащихся в данной системе. Это могут быть атомы, молекулы, а также ионы, электроны и другие частицы. Единица количества вещества n является одной из основных единиц СИ.

Единица СИ количества вещества: $[n]$ = (моль) (основная единица)

1 моль — такое количество вещества, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько атомов в 12 г изотопа углерода-12. В количестве вещества, равном 1 моль, содержится $6{,}022 \cdot 10^{23}$ структурных элементов.

Часто бывает удобно относить объем и массу газа к количеству вещества.

Если
m — масса газа,
V — объем газа,
n — количество вещества (газа),
M — молярная (отнесенная к количеству вещества) масса,
V_m — молярный (отнесенный к количеству вещества) объем,
v = V/m — удельный объем газа,
ρ — плотность газа,
то

(Т 13.18) $$\boxed{M = \frac{m}{n}}$$

	M	m	n
КД	кг/кмоль	кг	кмоль

(Т 13.19) $$\boxed{V_m = \frac{V}{n}.}$$

	V_m	V	n
КД	$м^3$/кмоль	$м^3$	кмоль

Разделив (Т 13.19) на (Т 13.18), получим

(Т 13.20) $$\boxed{v = \frac{V_m}{M} = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}.}$$

	v	V_m	V	M	m	ρ
КД	$м^3$/кг	$м^3$/кмоль	$м^3$	кг/кмоль	кг	кг/$м^3$

13.5.3. Плотность газов

Плотность газа зависит от состояния, в котором он находится, т. е. от давления и температуры. Приведенные в таблицах значения соответствуют нормальным условиям $p_н = 101{,}325$ кПа и $T_н = 273{,}15$ К = 0°С (**нормальная плотность**). Используя обе формы записи уравнения состояния идеального газа, можно вычислить плотность данного газа при любых условиях.

Пересчет плотности

Если
ρ_1, T_1, p_1 — плотность, температура и давление газа в состоянии 1,
ρ_2, T_2, p_2 — плотность, температура и давление газа в состоянии 2,

$\rho_н$ — нормальная плотность газа (при давлении $p_н$ и температуре $T_н$),
$p_н$ = 101,325 кПа — нормальное давление,
$T_н$ = T_0 = 273,15 К — нормальная температура,

то, поскольку объем и плотность обратно пропорциональны друг другу, $V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$, согласно формуле (Т 13.15) $p_1 T_2 \rho_2 = p_2 T_1 \rho_1$ получаем

(Т 13.21) $$\boxed{\rho_2 = \rho_1 \frac{T_1 p_2}{T_2 p_1},}$$

или

(Т 13.22) $$\boxed{\rho = \rho_н \frac{T_н p}{T p_н}.}$$

Вычисление плотности

Если
ρ — плотность газа при давлении p и температура T,
p — давление газа,
T — температура газа,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),

то, поскольку $\rho = m/V$, из формулы (Т 13.16) следует

$$\frac{m}{V} = \frac{p}{RT};$$

(Т 13.23) $$\boxed{\rho = \frac{p}{RT};}$$

	ρ	p	R	T
СИ	кг/м^3	Па = Н/м^2	Дж/(кг · К)	К
80	кг/м^3	кгс/м^2 = 10^{-4} ат	кгс · м/(кг · К)	К

для нормальной плотности имеем соответственно

(Т 13.24) $$\boxed{\rho_н = \frac{p_н}{R T_н}.}$$

Обратите внимание:

- Численные значения нормальных плотностей газа см. в табл. 1.
- Численные значения плотности воздуха в зависимости от давления и температуры см. в табл. 16.
- Соотношение между единицами давления в разных системах см. в табл. 113.

13.5.4. Объем газа при нормальных условиях (нормальный объем)

Сравнивать объемы различных газов можно лишь в том случае, когда они имеют одинаковую температуру и одинаковое давление. Нормальным объемом называется объем при давлении $p = p_н = 101{,}325$ кПа ($=760$ мм рт. ст.) и температуре $T = T_н = 273{,}15$ К $= 0$°С. С помощью уравнения состояния объем любого газа можно привести к объему при нормальных условиях.

Если
V — объем газа при произвольном давлении p и произвольной температуре T,
$V_н$ — нормальный объем, т. е. объем при нормальных условиях,
$p_н = 101{,}325$ кПа ($= 760$ мм рт. ст.) — нормальное давление,
$T_н = T_0 = 273{,}15$ К $= 0$°С — нормальная температура,

то в соответствии с уравнением (Т 13.15)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_н V_н}{T_н}.$$

Отсюда

(Т 13.25) $$\boxed{V_н = V\,\frac{T_н p}{p_н T}.}$$

Обратите внимание:

- Соотношение между единицами давления в разных системах см. в табл. П3.

13.5.5. Смеси газов

Для вычисления параметров состояния смесей газов пользуются средним значением плотности смеси $\rho_{ср}$ и средней газовой постоянной $R_{ср}$. Обе величины зависят от масс компонентов смеси, поэтому их расчет производится следующим образом:

Если
ρ_1 — плотность 1-го компонента смеси,
R_1 — газовая постоянная 1-го компонента смеси,
m_1 — масса 1-го компонента и т. д.,

то средняя плотность смеси газов определяется по формуле

(Т 13.26) $$\boxed{\rho_{ср} = \frac{\rho_1 m_1 + \rho_2 m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}.}$$

Средняя газовая постоянная смеси газов рассчитывается по формуле:

(Т 13.27) $$\boxed{R_{ср} = \frac{R_1 m_1 + R_2 m_2 + \ldots}{m_2 + m_2 + \ldots}.}$$

Обратите внимание:

- Численные значения ρ см. в табл. 1.
- Численные значения газовых постоянных R см. в табл. 15; их можно также вычислить по формуле (Т 13.17).

14. Тепловая энергия

Тепловая энергия, называемая также количеством теплоты, подобно механической или электрической энергии представляет собой один из видов энергии. Подобно другим видам энергии, тепловая энергия подчиняется закону сохранения энергии. Все виды энергии могут частично превращаться друг в друга. Для изменения температуры или агрегатного состояния тела необходим подвод или отвод тепла.

Единица СИ тепловой энергии: $[Q]$ = джоуль (Дж) = ньютон·метр (Н·м).

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: калория (кал) и килокалория (ккал).

Соотношение между единицами тепловой энергии

1 кал = 4,1868 Дж; 1 ккал = 10^3 кал = 4186,8 Дж = 4,1868 кДж

Обратите внимание:

- Соотношение между единицами энергии в разных системах см. в табл. П5.

14.1. Количество теплоты

Количество теплоты, необходимое для нагревания данного тела, пропорционально его массе и изменению температуры.

Если
Q — количество теплоты,
c — коэффициент пропорциональности — удельная теплоемкость вещества (см. разд. 14.2),
m — масса тела,
$\Delta t = t_2 - t_1$ — изменение температуры, происходящее в результате подвода к телу количества теплоты Q,

то

(Т 14.1) $$\boxed{Q = cm\,\Delta t,}$$

или в дифференциальной форме

(T 14.2) $\boxed{dQ = cm\,dt.}$

	Q	c	m	t
СИ	Дж	Дж/(кг · К)	кг	К
80	ккал	ккал/(кг · К)	кг	К

Обратите внимание:

- Численные значения удельных теплоемкостей для различных веществ см. в табл. 17 и 18.
- Теплоемкость c не постоянна и зависит от температуры.
- При охлаждении величина Δt отрицательна.
  Знак минус перед количеством теплоты означает, что тепло отводится от тела, а не подводится к нему.

14.1.1. Теплосодержание

Теплосодержанием называется количество теплоты, которым обладает тело при данной температуре. Считается, что теплосодержание тела при $t = 0°C$ равно нулю.

Единица СИ теплосодержания $[Q_T]$ = джоуль (Дж).

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: калория (кал) и килокалория (ккал).

Если
$Q_т$ — теплосодержание тела,
c — удельная теплоемкость (см. разд. 14.2),
m — масса тела,
t — температура тела в градусах Цельсия,

то по аналогии с формулой (T 14.1)

(T 14.3) $\boxed{Q_т = cmt.}$

	$Q_т$	c	m	t
СИ	Дж	Дж/(кг · К)	кг	°C
80	ккал	ккал/(кг · К)	кг	°C

Обратите внимание:

- Теплосодержание тела положительно при $t > 0°C$, отрицательно при $t < 0°C$ и равно нулю при $t = 0°C$.

14.1.2. Теплоемкость

Теплоемкостью C называется отношение подведенного к телу количества теплоты к достигнутой разности температур:

$C = \frac{Q}{\Delta t}$, или в дифференциальной форме $C = \frac{dQ}{dt}$.

Из уравнения состояния (Т 13.16) следует, что

$$p\,\Delta V = mR\,\Delta t, \text{ т. е.}$$

$$c_p m\,\Delta t = c_v m\,\Delta t + mR\,\Delta t.$$

Разделив обе стороны уравнения на $m\Delta t$, получим $c_p = c_v + R$ или

(Т 14.6) $$\boxed{c_p - c_v = R.}$$

Отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v называется **показателем адиабаты** $\varkappa$ (см. разд. 16.5):

(Т 14.7) $$\boxed{\frac{c_p}{c_v} = \varkappa.}$$

	c	R
СИ	Дж/(кг · К)	Дж/(кг · К)
80	ккал/(кг · К)	ккал/(кг · К)
80	кгс · м/(кг · К)	кгс · м/(кг · К)

Обратите внимание:

- Численные значения c_p и c_v см. в табл. 18.
- Показатель адиабаты $\varkappa$ двухатомных газов равен ~1,4. Точные значения см. в табл. 18.
- Из формулы (Т 14.6) следует наглядное определение газовой постоянной: газовая постоянная R равна механической работе, которую может совершить 1 кг газа при нагревании его на 1 К.

14.3. Теплообмен

Если несколько тел с различными температурами привести в соприкосновение, то между ними происходит теплообмен, который приводит к выравниванию температур тел. По закону сохранения энергии количество теплоты, отдаваемое телом с более высокой температурой, равно количеству теплоты, приобретаемому телом с более низкой температурой.

Если

c_1, m_1, t_1; c_2, m_2, t_2 — удельные теплоемкости, массы и начальные температуры тел 1 и 2

$t_{общ}$ — конечная температура обоих тел,

то по закону **Рихмана**

(Т 14.8) $$\boxed{c_1 m_1 (t_1 - t_{общ}) = c_2 m_2 (t_{общ} - t_2).}$$

Обратите внимание:

- В формулу (Т 14.8) вместо температуры t (в °C) можно подставить температуру T (в К).

- Если в теплообмене участвует более двух тел или если при этом происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, то вместо закона (T 14.8) справедлив следующий закон.

Сумма теплосодержаний компонентов до теплообмена равна конечному теплосодержанию системы:

(T 14.9) $$\boxed{c_1m_1t_1 + c_2m_2t_2 + \ldots = t_{\text{общ}}(c_1m_1 + c_2m_2 + \ldots),}$$

или, поскольку $C = cm$,

(T 14.10) $$\boxed{C_1t_1 + C_2t_2 + \ldots = t_{\text{общ}}(C_1 + C_2 + \ldots).}$$

Обратите внимание:

- В формулы (T 14.9) и (T 14.10) вместо температуры t (в °C) можно подставить температуру T (в К).
- Необходимо учитывать все тела, участвующие в теплообмене, включая сосуды (например, калориметр).
- Если в процессе теплообмена изменяется агрегатное состояние одного из компонентов, то высвободившееся при этом количество теплоты следует отнести в левую часть формулы (или отнять поглощенное количество теплоты).
- С помощью формул (T 14.9) и (T 14.10) можно определить удельные теплоемкости, конечную температуру системы и тепловые значения калориметров.

14.4. Источники тепла

Согласно закону сохранения энергии, тепловая энергия может возникать только в результате превращения других видов энергии, как, например, механической, электрической, химической, энергии излучения, ядерной энергии и т. д.

Энергия не может исчезать бесследно или возникать из ничего. Теплота представляет собой одну из форм энергии и может превращаться в другие виды энергии (не всегда целиком). В этом и заключается **закон сохранения энергии.**

14.4.1. Солнечная энергия

Солнце непрерывно излучает энергию (см. разд. 18.3). Очень небольшая часть этого излучения попадает на Землю. Мощность солнечного излучения, попадающего на единицу площади земной поверхности, называется солнечной постоянной.

$$\boxed{\text{Солнечная постоянная} = 1{,}4\,\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}\left(= 0{,}33\,\frac{\text{ккал}}{\text{с}\cdot\text{м}^2} = 2{,}0\,\frac{\text{кал}}{\text{мин}\cdot\text{см}^2}\right).}$$

Обратите внимание:

- Данное значение солнечной постоянной соответствует перпендикулярному падению лучей на поверхность. Ослаблением излучения при прохождении земной атмосферы мы пренебрегаем.

14.4.2. Энергия горения

При горении (окислении) высвобождается тепловая энергия.

Теплотой сгорания H называется отношение количества теплоты, выделяющегося при горении, к массе сгоревшего топлива (жидкого или твердого):

$$H = \frac{Q}{m}.$$

Если
H — теплота сгорания данного твердого или жидкого топлива (см. табл. 19),
m — масса полностью сгоревшего топлива,
Q — количество теплоты, выделившейся при сгорании (включая теплоту, затраченную на испарение воды),

то

(Т 14.11) $\boxed{Q = mH.}$

	Q	m	H
СИ	Дж	кг	Дж/кг
80	ккал	кг	ккал/кг

Обратите внимание:

- Следует различать низшую теплоту сгорания $H_н$ и высшую теплоту сгорания $H_в$. Величина $H_в$ больше $H_н$ на количество теплоты, необходимое на испарение возникающей при горении воды. В физике и технике обычно используют значение $H_н$, а в химии $H_в$.
  Для газообразных видов топлива используется теплота сгорания H газа при нормальных условиях, т. е. при давлении $p_н = 101{,}325$ кПа ($= 760$ мм рт. ст.) и $T_н = T_0 = 273{,}15$ К $= 0°$C.

Если
H' — теплота сгорания газообразного топлива (см. табл. 20),
$V_н$ — объем полностью сгоревшего газа при нормальных условиях,
Q — количество теплоты, выделившееся при горении (включая теплоту, затраченную на испарение воды),

то

(Т 14.12) $\boxed{Q = V_н H'.}$

	Q	V	H'
СИ	Дж	$м^3$	Дж/$м^3$
80	ккал	$м^3$	ккал/$м^3$

14.4.3. Электрическая энергия

Электрический ток в проводнике нагревает его. Превращение электрической энергии в тепловую является полным, т. е. происходит без потерь (обратное утверждение неверно!).

Если
Q — выделившееся в проводнике количество теплоты,
U — электрическое напряжение на концах проводника,
I — сила тока в проводнике,
R — сопротивление проводника,
t — продолжительность прохождения тока через проводник,

то

(Т 14.13) $$\boxed{Q = UIt = I^2Rt = \frac{U^2t}{R}.}$$

	U	I	R	t	Q
СИ	В	А	Ом	с	Дж = Вт · с

Обратите внимание:

- Поскольку все виды энергии равноценны, в СИ они имеют одинаковую размерность: джоуль (Дж). Таким образом, отпадает необходимость в использовавшемся ранее **электрическом эквиваленте теплоты:**

  1 кал = 4,1868 Вт · с
  1 кВт · ч = 860 ккал

- Соотношение между единицами энергии и работы в разных системах см. в табл. П5.

14.4.4. Механическая энергия

Механическая энергия может полностью без потерь перейти в тепловую энергию (например, в результате трения), но обратное утверждение неверно.

Если
$\Delta W_к$ — уменьшение кинетической энергии тела,
$\Delta W_п$ — уменьшение его потенциальной энергии,
Q — выделяющееся количество теплоты,

то

(Т 14.14) $$\boxed{Q = \Delta W_к + \Delta W_п.}$$

	Q	W
СИ	Дж	Дж

Обратите внимание:

- Тепловая и механическая энергии равноценны и измеряются в одинаковых единицах — джоулях. Поэтому отпадает необходимость в использовавшемся ранее **механическом эквиваленте теплоты:**

  1 кал = 4,1868 Дж =
  = 0,42693 кгс · м

15. Агрегатные состояния вещества

Вещества могут находится в трех агрегатных состояниях: твердом, жидком и газообразном. Каждое агрегатное состояние характеризуется определенной внутренней структурой вещества и соответственно определенными свойствами.

Справочная таблица

Свойства веществ в различных агрегатных состояниях

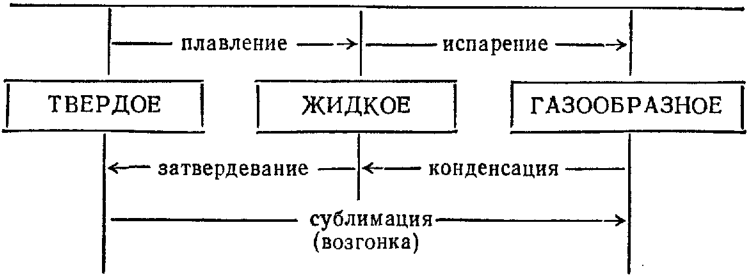
Свойство \ Состояние	Твердое	Жидкое	Газообразное
Кристаллическая решетка	есть	нет	нет
Постоянство формы	есть	нет	нет
Межмолекулярное взаимодействие	есть	есть	нет
Постоянство объема	есть	есть	нет

Переход в агрегатное состояние, отвечающее *более высокой* температуре, требует *подвода энергии.*

Переход в агрегатное состояние, отвечающее *более низкой температуре*, сопровождается *выделением энергии.*

Возможны следующие переходы из одного агрегатного состояния в другое:

Изменения агрегатного состояния



15.1. Плавление и затвердевание

В твердом теле молекулы вещества колеблются относительно своих положений равновесия в кристаллической решетке. Если кристаллу сообщить энергию, колебания усиливаются и кристаллическая решетка может разрушиться.

15.1.1. Точка плавления

Фазовый переход из твердого состояния в жидкое и обратно происходит при определенной зависящей от давления температуре $t_{пл}$:

Точка плавления совпадает с точкой затвердевания.

Обратите внимание:

- Точки (температуры) плавления см. в табл. 22. Все значения соответствуют давлению 101,325 кПа (=760 мм рт. ст.).
- Обычно температура плавления повышается с возрастанием давления. Исключение составляет вода (понижение температуры плавления составляет 7,65 мК на 100 кПа).
- В процессе плавления или затвердевания температура тела не меняется.

15.1.2. Температура плавления растворов

Если в одном веществе растворить другое, то температура затвердевания раствора понижается с увеличением концентрации растворенного вещества.

Если
Δt — понижение точки затвердевания,
m — масса растворенного вещества,
$M_{отн}$ — относительная молекулярная масса растворенного вещества,
$m_ж$ — масса растворителя (жидкого),
K — коэффициент пропорциональности, называемый криоскопической постоянной (значения см. в табл. 21),

то

(Т 15.1) $$\boxed{\Delta t = K \frac{m}{m_ж M_{отн}}.}$$

	Δt	K	m
СИ	К	К	произв.

Справочная таблица

Сплавы с особо низкой температурой плавления

Сплав	$t_{пл}$, °С
Сплав Роза (50% висмута, 25% свинца, 25% олова)	94
Сплав Липовица (50% висмута, 26,7% свинца, 13,3% олова, 10% кадмия)	70
Сплав Вуда (50% висмута, 25% свинца, 12,5% олова, 12,5% кадмия)	60

Обратите внимание:

- Понижение точки затвердевания пропорционально числу растворенных молекул.

Температуры плавления **сплавов** обычно ниже температуры плавления самого легкоплавкого компонента.

15.1.3. Изменение объема

Большинство веществ занимает в твердом состоянии меньший объем (т. е. обладает большей плотностью), чем в жидком: металлы, парафины, стеарины, жиры и т. д.

Поэтому при повышении давления их температура плавления возрастает, т. е. их нельзя перевести в жидкое состояние только за счет повышения давления.

Исключение составляет вода: $\rho_{\text{лед}} < \rho_{\text{вода}}$. При затвердевании ее объем увеличивается на 9%. Лед плавает на поверхности воды. Он плавится при повышении давления, так как температура плавления льда при этом понижается.

Поскольку все металлы при литье (затвердевании) уменьшаются в объеме, формы для литья должны быть больше готового изделия на величину усадки.

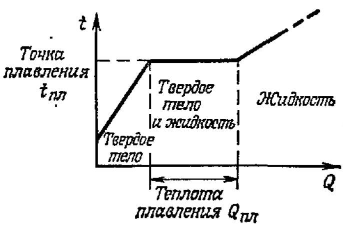
Справочная таблица

Величина усадки (по длине)

Металл	Усадка	Металл	Усадка
Чугун	1/96	Мягкая сталь	1/64
Свинец	1/92	Цинк	1/62
Латунь	1/65	Стальное литье	1/50

15.1.4. Теплота плавления

Фазовый переход из твердого в жидкое (из жидкого в твердое) состояние сопровождается поглощением (выделением) определенной теплоты плавления $Q_{\text{пл}}$.



Теплота плавления равна теплоте затвердевания.

Теплота плавления данного тела, отнесенная к его массе, называется **удельной теплотой плавления** q.

Удельная теплота плавления q представляет собой количество теплоты, необходимое, чтобы перевести 1 кг твердого вещества в жидкое состояние при постоянной температуре:

$$q = \frac{Q_{пл}}{m}.$$

Единица СИ удельной теплоты плавления: $[q] = \frac{Дж}{кг}$.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: ккал/кг.

Если
$Q_{пл}$ — количество теплоты, необходимое для плавления,
m — масса плавящегося тела,
q — удельная теплота плавления (см. табл. 22),

то

(Т 15.2) $\boxed{Q_{пл} = qm.}$

	Q	q	m
СИ	Дж	Дж/кг	кг
80	ккал	ккал/кг	кг

15.1.5. Теплота растворения

Чтобы растворить твердое тело в жидкости, необходимо определенное количество теплоты. Это количество теплоты отнимается у жидкости, так что последняя в результате растворения охлаждается. При образовании растворов указанных в таблице веществ можно достичь следующих температур:

Справочная таблица

Охлаждающие смеси

Смесь	t, °C
Лед (100 г) + поваренная соль (31 г)	—21
Лед (100 г) + хлорид кальция (143 г)	—55
Твердая двуокись углерода + спирт	—78
Лед (100 г) + сульфат аммония (100 г)	—30

15.2. Испарение и конденсация

Молекулы в жидкостях связаны между собой молекулярными силами сцепления. При подводе энергии к жидкости тепловое движение молекул усиливается и эти силы уже не могут удержать молекулы в жидкости.

15.2.1. Точка кипения

Фазовый переход из жидкого в газообразное состояние (и из газообразного в жидкое) происходит при определенной (сильно зависящей от давления) температуре $t_{кип}$:

▌ Температура кипения равна температуре конденсации.

Обратите внимание:

- Значения точек (температур) кипения см. в табл. 23. Эти значения соответствуют давлению 101,325 кПа (= 760 мм рт. ст.).
- Температура кипения повышается с увеличением внешнего давления. Пример — вода (см. табл. 24).
- Во время кипения или конденсации температура не меняется.

15.2.2. Температура кипения растворов

Температура кипения растворов повышается с увеличением концентрации растворенного вещества.

Если
Δt — повышение температуры кипения,
m — масса растворенного вещества,
$M_{отн}$ — относительная молекулярная масса растворенного вещества,
$m_{ж}$ — масса растворителя (жидкости),
E — коэффициент пропорциональности — эбулиоскопическая постоянная (см. табл. 21),

то

(Т 15.3) $$\boxed{\Delta t = E\frac{m}{m_{ж}M_{отн}}}$$

	Δt	E	m
СИ	К	К	произв.

Обратите внимание:

- Повышение температуры кипения пропорционально числу растворенных молекул.

15.2.3. Изменение объема

Все вещества в газообразном состоянии обладают гораздо большим объемом (и соответственно гораздо меньшей плотностью), чем в жидком состоянии.

Пример: из 1 кг ($\approx$ 1 л) воды получается 1700 л водяного пара (при давлении около 10^5 Па).

15.2.4. Теплота парообразования

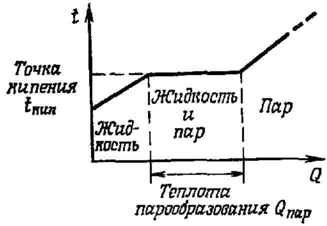
Чтобы перевести вещество из жидкого в газообразное состояние, к нему надо подвести определенное количество теплоты $Q_{пар}$.

Теплота парообразования равна теплоте конденсации.

Теплота парообразования данного вещества, отнесенная к его массе, называется **удельной теплотой парообразования** q.

Удельная теплота парообразования представляет собой количество теплоты, необходимое, чтобы перевести 1 кг жидкости в газообразное состояние при постоянной температуре:

$$q = \frac{Q_{\text{пар}}}{m}.$$



Единица СИ удельной теплоты парообразования: $[q]$ = Дж/кг.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: ккал/кг.

Если

$Q_{\text{пар}}$ — количество теплоты, затраченное на парообразование,
m — масса жидкости,
q — удельная теплота парообразования (см. табл. 23),

то

(Т 15.4) $\boxed{Q_{\text{пар}} = qm}$

	Q	q	m
СИ	Дж	Дж/кг	кг
80	ккал	ккал/кг	кг

Обратите внимание:

- Удельная теплота парообразования q зависит от давления и температуры; она уменьшается с повышением давления.

15.2.5. Испарение

Жидкость может переходить в газообразное состояние и при температурах ниже точки кипения. Такой процесс называется испарением. Необходимая для этого тепловая энергия (теплота испарения) соответствует теплоте парообразования. Источником ее обычно служит внутренняя энергия самой жидкости, которая в результате испарения охлаждается.

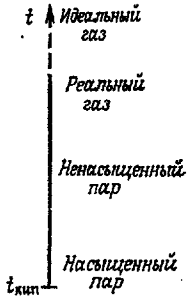
15.2.6. Сублимация

Сублимацией называется процесс прямого перехода вещества из твердого в газообразное состояние, минуя жидкую фазу. Теплота сублимации равна сумме теплот плавления и парообразования.

К сублимации способны, например, сера, кристаллы льда,

15.3. Пар

Следует различать идеальный газ, реальный газ и пар. Давление и объем идеального газа в точности обратно пропорциональны друг другу. Для реальных газов это справедливо лишь в хорошем приближении. Давление пара незначительно (в зависимости от степени насыщения) меняется или остается постоянным при изменении объема. Различие между газом и паром определяется тем, насколько температура выше точки кипения данного вещества. Температура идеального газа бесконечно велика по отношению к точке кипения (понятие точки кипения просто не имеет смысла для идеального газа). Температура t насыщенного пара при любом давлении совпадает с температурой кипения $t_{пар}$.



15.3.1. Насыщенный пар

Над поверхностью каждой жидкости вследствие испарения находится пар, давление которого может возрастать до определенного предела, зависящего от температуры и называемого **давлением насыщенного пара.** При этом давление пара и жидкости будет одинаковым, пар и жидкость оказываются в равновесии и пар становится насыщенным. Содержащееся в 1 м^3 количество пара (масса пара) называется массой насыщения. Величина массы насыщения зависит от температуры. Измеряется она в кг/м^3.

Обратите внимание:

- Значения давления насыщенного пара см. в табл. 25.
- Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры см. в табл. 26. В этой же таблице дана зависимость точки кипения воды от давления. Последнюю зависимость можно также представить в виде **кривой давления пара.**
- Насыщенные пары не подчиняются газовым законам. Например, уменьшение объема пара не приводит к повышению давления (давление не может быть выше давления насыщенного пара), а вызывает конденсацию части пара.

15.3.2. Ненасыщенный пар

Если жидкости недостаточно для получения насыщенного пара, то возникает ненасыщенный пар.

Насыщенный пар может стать ненасыщенным, если его изолировать и увеличить объем или повысить температуру. Такой пар называют *перегретым.*

Газы представляют собой *сильно перегретые* или *сильно ненасыщенные* пары. Их температура много выше точки кипения, соответствующей данному давлению.

Обратите внимание:

- Для ненасыщенных паров газовые законы выполняются лишь весьма приближенно, а для сильно ненасыщенных паров (реальных газов) выполняются довольно точно.

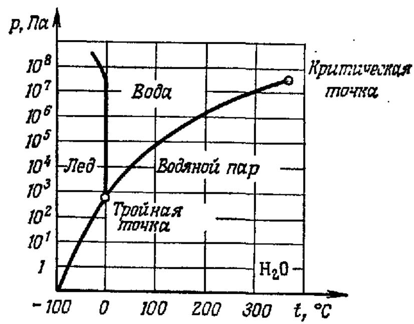
15.3.3. Парообразование

На процесс образования пара над поверхностью жидкости не влияет наличие других паров или газов. Давление пара данного вещества называется **парциальным давлением**; его максимальное значение равно давлению насыщенного пара соответствующей жидкости. Для смеси газов выполняется **закон Дальтона:**

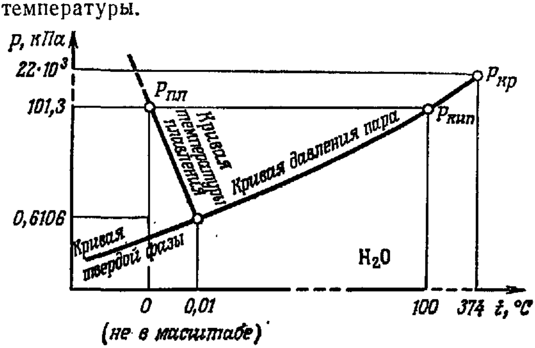
Общее давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений, т. е. сумме давлений газовых компонентов.

15.3.4. Тройная точка

Температуры (точки) плавления и кипения данного вещества зависят от давления (см. разд. 15.1.1 и 15.2.1). Эти функциональные зависимости можно представить графически. Поскольку твердые вещества также обладают способностью испаряться (сублимироваться), а давление образующегося пара зависит от температуры, на диаграмме $p-t$ данного вещества получаются три кривые:



- кривая зависимости температуры кипения от давления (кривая давления пара),
- кривая зависимости температуры плавления от давления,
- кривая зависимости давления пара твердой фазы от температуры.



Все три кривые сходятся в одной точке, называемой **тройной точкой.**

Координаты тройной точки воды: $T = 273{,}16$ **К**, ($\approx 0{,}01°C$) $p = 610{,}6$ **Па** ($= 4{,}58$ мм рт. ст.). Эти значения используются для **определения основной единицы измерения температуры «кельвин».**

1 кельвин равен 1/273,16 части температуры тройной точки чистой воды.

15.3.5. Влажность воздуха

В атмосферном воздухе всегда присутствует некоторое количество водяного пара. Содержание водяного пара в атмосфере зависит от места и времени и называется влажностью воздуха (или просто влажностью). Парциальное давление водяного пара не может превышать определенного зависящего от температуры значения — давления насыщенного водяного пара. В данном объеме воздуха при данной температуре может содержаться лишь вполне определенное максимальное количество водяного пара.

Максимальное количество водяного пара, которое может находиться в 1 $м^3$ воздуха при каждой определенной температуре, называется **максимальной влажностью,** или количеством насыщенного пара $f_{макс}$:

$$f_{макс} = \frac{\text{Максимально возможная масса водяного пара в воздухе}}{\text{Объем влажного воздуха}}.$$

Единица СИ максимальной влажности: $[f_{макс}] = кг/м^3$.

Обычно используемая единица: $г/м^3$.

Обычно количество пара, содержащегося в воздухе, меньше максимально возможного значения.

Количество водяного пара, фактически содержащееся в 1 $м^3$, называется **абсолютной влажностью** f:

$$f = \frac{\text{Масса содержащегося в воздухе водяного пара}}{\text{Объем влажного воздуха}}.$$

Обычно используемая единица абсолютной влажности f: $г/м^3$.

Отношение абсолютной влажности воздуха к максимально возможной называется **относительной влажностью воздуха** φ:

$$\varphi = \frac{\text{Абсолютная влажность}}{\text{Максимальная влажность}}.$$

Относительная влажность обычно выражается в процентах.

Если

φ — относительная влажность,
f — абсолютная влажность,
$f_{макс}$ — максимальная влажность (количество насыщенного пара),

то они связаны между собой следующим соотношением:

(Т 15.5) $$\boxed{\varphi = \frac{f}{f_{\text{макс}}} \cdot 100\%}$$

Обратите внимание:

- Значения максимальной влажности $f_{\text{макс}}$ см. в табл. 26.
- Так как максимальная влажность $f_{\text{макс}}$ зависит от температуры, относительная влажность меняется при изменении температуры, даже если абсолютная влажность остается неизменной. При охлаждении до точки росы относительная влажность достигает 100%.

Точкой росы называется такая температура, при охлаждении до которой начинается конденсация воды, содержащейся во влажном воздухе (образование росы).

Конденсирующийся пар выступает в виде **росы** на поверхности твердых тел. Если таковых недостаточно, то в присутствии центров конденсации (пыли) образуется **туман**. В отсутствие центров конденсации водяной пар может переохлаждаться ниже точки росы.

Измерение влажности воздуха

- Для измерения относительной влажности воздуха пользуются волосными гигрометрами. В них применяются обезжиренные волоски (гигроскопические), длина которых меняется с изменением влажности.
- Другой прибор для измерения влажности воздуха, психрометр, состоит из двух одинаковых термометров. У одного из них стеклянный шарик с ртутью обертывается мокрой тряпкой. Вода, испаряясь, охлаждает этот термометр, и он показывает более низкую температуру, чем сухой. Разность температур служит мерой относительной влажности. Если $\varphi = 100\%$, то $\Delta T = 0$.

15.4. Реальные газы

Газовые законы, рассмотренные в разд. 13.4 и 13.5, точно выполняются только для идеальных газов, т. е. таких газов, которые не конденсируются при охлаждении их вплоть до абсолютного нуля температуры.

Свойства большинства газов близки к свойствам идеального газа, когда они находятся при температурах, достаточно далеких от точки конденсации, т. е. когда между молекулами отсутствует взаимодействие (исключая момент соударений) и когда собственный объем молекул газа мал по сравнению с объемом газа.

Вблизи точки конденсации (при высоком давлении и низкой температуре) свойства газов значительно отличаются от свойств идеального газа. В этих случаях говорят о реальных газах.

15.4.1. Уравнение состояния реальных газов

Уравнение состояния идеального газа $pV = mRT$ (Т 13.16) видоизменяется в случае реальных газов. Давление следует увеличить на величину так называемого **внутреннего давления**, которое возникает вследствие межмолекулярного взаимодействия и пропорционально квадрату плотности газа. Объем V следует уменьшить на величину **собственного объема** молекул — того минимального объема, который могут занимать молекулы данной массы m газа. Собственный объем молекул приблизительно в четыре раза больше реального объема молекул.

Если

p — давление газа,
V — объем газа,
m — масса газа,
R — газовая постоянная,
T — температура,
a, b — постоянные Ван-дер-Ваальса (коэффициенты пропорциональности),

то внутреннее давление газа равно $a(m^2/V^2)$, а собственный объем молекул равен bm.

В результате получаем **уравнение Ван-дер-Ваальса** (уравнение состояния реальных газов):

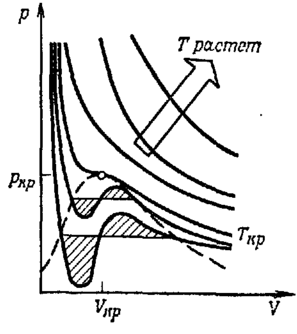
(Т 15.6) $$\boxed{\left(p + \frac{am^2}{V^2}\right)(V - bm) = mRT.}$$

	p	V	m	R	T	a	b
СИ	Па = Н/м^2	м^3	кг	Дж/(кг · К)	К	Н · м^4/кг^2	м^3/кг

Обратите внимание:

- Кривые зависимости объема реального газа от давления для постоянной температуры (**изотермы**) представляют собой кубические параболы. Набор изотерм при различных температурах для данного газа называется **диаграммой Эндрюса** (см. разд. 15.4.2.).

15.4.2. Критическая температура



На диаграмме Эндрюса под штриховой кривой расположена область фазового перехода из жидкого в газообразное состояние и обратно. Так как при таком переходе давление p остается постоянным, в этой области параболу третьего порядка нужно заменить отрезком горизонтальной прямой.

Слева от штриховой кривой вещество находится в жидком, а справа — в газообразном состоянии.

Над этой областью нельзя перевести газ в жидкое состояние только путем сжатия (уменьшения объема и увеличения давления). Высшая точка штриховой кривой представляет собой точку перегиба изотермы, которой соответствует **критическая температура** $T_{кр}$. Касательная к изотерме в этой точке параллельна оси V. Точке перегиба отвечают **критическое давление** $p_{кр}$ и **критический объем** $V_{кр}$.

Газ можно перевести в жидкое состояние путем сжатия только при температуре ниже критической.

Обратите внимание:

- Значения критической температуры и критического давления см. в табл. 27.

15.4.3. Сжижение газов

Техническое сжижение газов производится по методу Линде. В основу метода положено свойство газов охлаждаться при дросселировании.

Охлажденный газ снова подвергается сжатию, а возникающее при этом тепло отводится в холодильник. Цикл повторяется до тех пор, пока газ не охладится до температуры ниже критической.

Свойство газов охлаждаться при расширении называется **эффектом Джоуля — Томсона.**

Реальные газы охлаждаются при дросселировании.

Если
$\Delta T = T_2 - T_1$ — разность температур, достигнутая за счет расширения,
$\Delta p = p_2 - p_1$ — изменение давления при расширении,
μ — коэффициент Джоуля — Томсона,

то

(T 15.7) $$\boxed{\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p}.}$$

	μ	T	p
СИ	К/Па	К	Па = Н/м²
80	К/ат	К	ат = кгс/см²

Обратите внимание:

- Коэффициент μ зависит от вида газа и начальных значений давления и температуры. Значения μ приведены в соответствующей специальной литературе. Для комнатной температуры коэффициент Джоуля — Томсона имеет следующие значения:

  Воздух, Кислород (O_2), Азот (N_2): $\mu \approx +0{,}25$ К/100 кПа

  Двуокись углерода (CO_2) $\mu \approx +0{,}75$ К/100 кПа

Охлаждение ($\mu > 0$) может произойти только в том случае, когда начальная температура газа ниже **температуры инверсии.** При температурах выше этой температуры ($\mu < 0$) расширение газа ($\Delta p < 0$) приводит к повышению температуры ($\Delta T > 0$).

Обратите внимание:

- Значение температуры инверсии зависит от вида газа. Например, температура инверсии для воздуха равна 490°С, а для водорода равна —80°С.

16. Изменение термодинамического состояния идеального газа

Термодинамическое состояние каждого газа определяется тремя величинами: **давлением, объемом и температурой,** называемыми **параметрами** состояния. Изменение двух или сразу всех трех параметров состояния системы называется термодинамическим процессом.

Кроме указанных в разд. 13.5.1 частных случаев изменения термодинамического состояния газа, получивших названия изобарического, изохорического и изотермического процессов, возможны также адиабатический и политропный процессы.

Все термодинамические процессы сопровождаются обменом или превращением энергии. При этом всегда выполняется первый закон термодинамики.

16.1. Первый закон термодинамики

Закон сохранения энергии приобретает в термодинамике специальный вид. При его применении необходимо учитывать так называемую внутреннюю энергию тела, т. е. кинетическую и потенциальную энергию его молекул (см. разд. 16.1.2 и 17.4.3).

В применении к замкнутой системе он гласит:

> Тепловая энергия, подведенная к замкнутой системе, расходуется на повышение ее внутренней энергии и работу, производимую системой против внешних сил.

Если

Q — подведенная к системе тепловая энергия,

W — совершенная системой работа,

U — внутренняя энергия системы (которая зависит от агрегатного состояния и температуры системы),

то

(Т 16.1) $$\boxed{Q = \Delta U + W,}$$

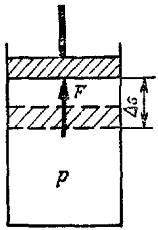
или в дифференциальной форме

(Т 16.2) $$\boxed{dQ = dU + dW.}$$ **первый закон термодинамики**

Обратите внимание:

- Если работа совершается над системой, то система приобретает соответствующее количество теплоты и значения Q и W отрицательны. Это **определение знаков** принято в термодинамике. При увеличении внутренней энергии системы $\Delta U > 0$, при уменьшении $\Delta U < 0$.

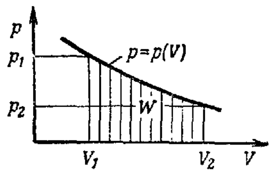
16.1.1. Работа, совершаемая газом при расширении



Применим первый закон термодинамики к идеальному газу. Совершенная газом работа представляет собой работу по расширению. Согласно формуле (М 7.10), $W = Fs$. Так как $F = pA$ (М 8.1) и $V = As$, имеем

(Т 16.3) $\boxed{W = p\,\Delta V,}$

или, если давление p при увеличении объема на ΔV не остается постоянным, то



(Т 16.4) $$\boxed{\begin{aligned} dW &= p\,dV, \\ W &= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \end{aligned}}$$

Первый закон термодинамики для случая идеального газа имеет следующий вид:

(Т 16.5) $\boxed{Q = \Delta U + p\,\Delta V,}$

или в дифференциальной форме

(Т 16.6) $$\boxed{\begin{aligned} dQ &= dU + p\,dV, \\ Q &= \Delta U + \int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \end{aligned}}$$

16.1.2. Внутренняя энергия

Под внутренней энергией системы U понимается ее полная энергия. Однако интерес представляет не сама внутренняя энергия, а ее изменение ΔU или dU.

Внутренняя энергия системы является функцией состояния системы, т. е. зависит только от параметров состояния p, V, T и **не зависит от способа, которым это состояние было достигнуто.**

Каждому термодинамическому состоянию системы соответствует определенное значение внутренней энергии.

Изменение внутренней энергии системы зависит только от начального и конечного состояний системы.

Внутреннюю энергию идеального газа можно определить с помощью первого закона термодинамики.

Изменение внутренней энергии газа равно количеству теплоты, полученному в результате теплообмена, если газ не затрачивает работы на расширение. Если $c_v = \text{const}$, то, согласно разд. 14.2, имеем

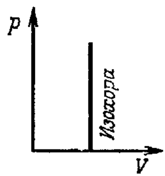
$$\Delta Q = \Delta U = c_v m \Delta T, \quad \text{или}$$

(Т 16.7) $\boxed{U = c_v m T.}$

	U	c	m	T
СИ	Дж	Дж/(кг·К)	кг	К
80	ккал	ккал/(кг·К)	кг	К

Внутренняя энергия определенного количества (массы) идеального газа зависит только от его температуры.

16.2. Изохорический процесс



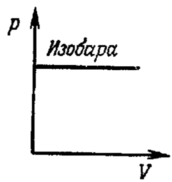
Пусть к идеальному газу при постоянном объеме подводится тепловая энергия Q. Тогда изменение термодинамического состояния газа происходит в соответствии со вторым законом Гей-Люссака: $p/T = \text{const}$ (Т 13.14). На $p - V$-диаграмме состояния **изохора** параллельна оси p. Так как $V = \text{const}$, газ не совершает работу. Первый закон термодинамики записывается тогда в следующем виде:

(Т 16.8) $$\boxed{\begin{aligned} dQ &= dU = c_v m\, dT, \\ Q &= \Delta U = c_v m\, \Delta T. \end{aligned}}$$

	Q	U	c	m	T
СИ	Дж	Дж	Дж/(кг·К)	кг	К
80	ккал	ккал	ккал/(кг·К)	кг	К

При изохорическом процессе подведенная к системе тепловая энергия расходуется только на повышение внутренней энергии системы.

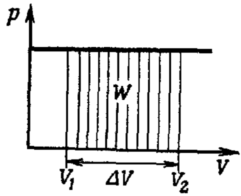
16.3. Изобарический процесс



Пусть к идеальному газу при постоянном давлении p подводится количество теплоты Q. Изменение термодинамического состояния газа происходит в соответствии с первым законом Гей-Люссака: $V/T = \text{const}$ (Т 13.12). На $p - V$-диаграмме состояния **изобара** параллельна оси V. Работа $p\Delta V$, совершаемая газом при нагревании, соответствует площади на $p - V$-диаграмме,

Если
Q — подведенное к газу количество теплоты,
c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении (см. табл. 18),
m — масса газа,
$\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры,
p — давление газа (постоянное),
$\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),

то для подведенного к газу количества теплоты справедливо следующее соотношение:



(T 16.9) $\boxed{Q = c_p m\, \Delta T,}$

или в дифференциальной форме

(T 16.10) $\boxed{dQ = c_p m\, dT.}$

Совершенная при расширении газа работа [с учетом уравнения состояния $pV = mRT$ (T 13.16)] равна

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV, \text{ или, поскольку } p = \text{const}, \; W = p \int_{V_1}^{V_2} dV \text{ и,}$$

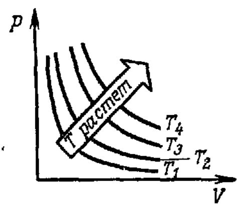
следовательно,

(T 16.11) $\boxed{W = p\,\Delta V = mR\,\Delta T.}$

	W	p	V	m	R	T
СИ	Дж	Па = Н/м²	м³	кг	Дж/(кг · К)	К
80	кгс · м	кгс/м² = 10^{-4}ат	м³	кг	кгс · м/(кг · К)	К

16.4. Изотермический процесс

При постоянной температуре происходит изотермическое изменение состояния, которое описывается законом *Бойля — Мариотта* (М 9.1):



(T 16.12) $$\boxed{\begin{gathered} pV = \text{const} \\ p \approx \frac{1}{V}. \end{gathered}}$$

На $p - V$-диаграмме состояния **изотерма** представляет собой гиперболу, положение которой зависит от температуры газа.

Так как $T = \text{const}$, внутренняя энергия газа $U = c_v mT$ остается постоянной, и первый закон термодинамики сводится к соотношению $dQ = pdV$.

При изотермическом расширении подведенное тепло целиком переходит в работу.

Работа при изотермическом расширении газа

Нетрудно вычислить работу, которую производит идеальный газ при изотермическом расширении.

Если

W — работа, производимая газом при изотермическом расширении, равная количеству теплоты Q, которое необходимо подвести газу для совершения этой работы,

m — масса газа,

R — газовая постоянная (см. табл. 15),

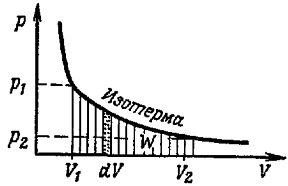
T — температура газа (постоянная),

V_1 — начальный объем газа,

V_2 — конечный объем газа,

p_1 — начальное давление газа,

p_2 — конечное давление газа,



то, поскольку $dQ = dW = pdV$, имеем $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$ и из выражения (Т 13.16) следует $W = mRT \int_{V_1}^{V_2} (dV/V)$. Проинтегрировав, получим

(Т 16.13) $$\boxed{W = mRT \ln \frac{V_2}{V_1}.}$$

	W	m	R	T	V
СИ	Дж	кг	Дж/(кг · К)	К	м^3
80	кгс · м	кг	кгс · м/(кг · К)	К	м^3
80	ккал	кг	ккал/(кг · К)	К	м^3

Далее, согласно формуле (Т 13.16), имеем

(Т 16.14) $$\boxed{W = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad W = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.}$$

	W	p	V
СИ	Дж	Па = Н/м^2	м^3
80	кгс · м	кгс/м^2 = 10^{-4}ат	м^3

В соответствие с формулой (М 9.1) отношение объемов можно заменить отношением давлений:

(Т 16.15) $$\boxed{W = mRT \ln \frac{p_1}{p_2}.}$$

	W	m	R	T
СИ	Дж	кг	Дж/(кг · К)	К
80	кгс · м	кг	кгс · м/(кг · К)	К
80	ккал	кг	ккал/(кг · К)	К

Тогда, воспользовавшись уравнением (Т 13.16), получим

(Т 16.16) $$\boxed{\begin{aligned} W &= p_1V_1 \ln\frac{p_1}{p_2},\\ W &= p_2V_2 \ln\frac{p_1}{p_2}.\end{aligned}}$$

	W	p	V
СИ	Дж	Па = Н/м^2	м^3
80	кгс · м	кгс/м^2 = 10^{-4}ат	м^3

Обратите внимание:

- Если $V_1 > V_2$ или $p_1 < p_2$, то происходит не расширение, а **сжатие** газа. При этом работа отрицательна ($W < 0$), т. е. не газ производит работу, а работа совершается над газом.
- Соотношение между единицами работы и энергии в разных системах см. в табл. П5.
- Формулы (Т 16.13)—(Т 16.16) справедливы и в случае когда к системе подводится тепловая энергия Q.
- Условие $T = \text{const}$ практически не осуществимо, так как для его реализации изменение давления p и объема V должно происходить бесконечно медленно. Кроме того, газ должен находиться в среде с очень большой теплоемкостью.
- Если термодинамический процесс протекает настолько медленно, что газ успевает перейти из одного равновесного состояния в другое, то его называют **квазистатическим**.

16.5. Адиабатический процесс

Адиабатический процесс протекает без теплообмена с окружающей средой, т. е. при полной теплоизоляции, $dQ = 0$. В этом случае первый закон термодинамики запишется в виде: $0 = dU + pdV$. Поскольку $dU = mc_v dT$ и $p = mRT/V$, в результате подстановки получим $-mc_v dT = mRTdV/V$.

Подставляя $R = c_p - c_v$ (Т 14.6), после преобразования получаем

$$-c_v\frac{dT}{T} = (c_p - c_v)\frac{dV}{V} \text{ и интегрирование дает}$$

$$-c_v\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = (c_p - c_v)\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}, \text{ или}$$

$$-c_v\ln\frac{T_2}{T_1} = (c_p - c_v)\ln\frac{V_2}{V_1},$$

или

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{c_v} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{c_p - c_v},$$

или

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_p-c_v}{c_v}}.$$

Если

p_1, T_1, V_1 — начальные давление, температура и объем газа,
p_2, T_2, V_2 — конечные давление, температура и объем газа,
$\varkappa=c_p/c_v$ — показатель адиабаты (см. табл. 18),

то в соответствии с приведенными выше выкладками получаем **уравнение Пуассона**

(T 16.17) $$\boxed{\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1}, \quad \text{или} \quad TV^{\varkappa-1}=\text{const.}}$$

Согласно формуле (T 13.15), отношение V_2/V_1 можно заменить на p_1T_2/p_2T_1. Отсюда следует

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1T_2}{p_2T_1}\right)^{\varkappa-1} \text{ и далее}$$

(T 16.18) $$\boxed{\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \quad \text{или} \quad T^{\varkappa}p^{1-\varkappa}=\text{const.}}$$

Приравняв (T 16.17) и (T 16.18), получим

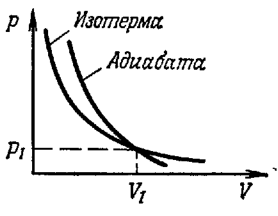
(T 16.19) $$\boxed{\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa}, \quad \text{или} \quad pV^{\varkappa}=\text{const.}}$$

Обратите внимание:

- Условие $dQ=0$, т. е. полная теплоизоляция, на практике не осуществимо. Только для очень быстрых процессов это условие приближенно выполняется.

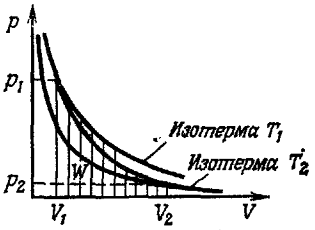
Вторая форма записи уравнения (T 16.19) называется уравнением адиабатического процесса, или **законом Пуассона**.

На p — V-диаграмме **адиабата** имеет больший наклон, чем изотерма, поскольку тепло, возникающее при адиабатическом сжатии, вызывает повышение температуры газа, что приводит в свою очередь к дополнительному увеличению давления.



Работа при адиабатическом расширении газа

Можно рассчитать работу, которую производит идеальный газ при **адиабатическом** расширении.



Если

W — работа, производимая газом при адиабатическом расширении,

m — масса данного газа,

R — газовая постоянная (см. табл. 15),

T_1 — начальная температура газа,

T_2 — конечная температура газа,

$\varkappa = c_p/c_v$ — показатель адиабаты (см. табл. 18),

то, поскольку $W = -\Delta U$ и $\Delta U = c_v m (T_2 - T_1)$, имеем

$$W = -c_v m (T_2 - T_1) = c_v m (T_1 - T_2) =$$
$$= \frac{c_p - c_v}{c_p - c_v} c_v m (T_1 - T_2),$$

а так как $c_p - c_v = R$ и $c_p/c_v = \varkappa$, получаем

$$W = R \frac{c_v}{c_p - c_v} m (T_1 - T_2) = R \frac{1}{\varkappa - 1} m (T_1 - T_2)$$

и, следовательно,

(Т 16.20) $$\boxed{W = \frac{mR}{\varkappa - 1} (T_1 - T_2).}$$

	W	m	R	$\varkappa$	T
СИ	Дж	кг	Дж/(кг·К)	—	К
80	кгс·м	кг	кгс·м/(кг·К)	—	К

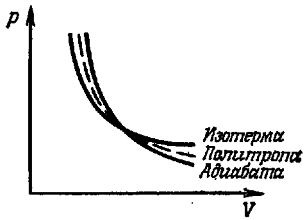
Обратите внимание:

- Работа W, производимая постоянной массой газа при адиабатическом расширении, зависит только от разности температур (ΔT).
- При $T_2 > T_1$ происходит не расширение, а сжатие газа. При этом работа отрицательна ($W < 0$), т. е. не газ производит работу, а работа совершается над газом.
- Соотношение между единицами работы и энергии в разных системах см. в табл. П5.

16.6. Политропный процесс

Если возможен беспрепятственный теплообмен системы с окружающей средой, т. е. $\Delta T = 0$, то протекающий при таких условиях процесс называется *изотермическим*. Если теплообмен с окружающей средой отсутствует, т. е. $\Delta Q = 0$, то процесс называется *адиабатическим*. Процессы, занимающие промежуточное положение между этими крайними случаями, не осуществимыми на практике, называются политропными. Это процессы, при которых происходит частичный теплообмен со средой.

На p — V-диаграмме **политропа** занимает промежуточное положение между изотермой и адиабатой.



Если
p — давление газа,
V — объем газа,
n — показатель политропы,

то закон политропного изменения состояния газа имеет вид

(T 16.21) $$\boxed{pV^n = \text{const},}$$

где

$$1 < n < \varkappa.$$

Обратите внимание:

- Изотермический и адиабатический процессы можно рассматривать как частные случаи политропного процесса (для которых $n = 1$ и $n = \varkappa$).
- Изохорический и изобарический процессы также являются частными случаями политропного процесса (для которых $n = \infty$ и $n = 0$).

Остальные закономерности легко вывести из формулы (T 16.21); они аналогичны формулам (T 16.17)—(T 16.20).

Если
p_1, T_1, V_1 — начальные давление, температура и объем газа,
p_2, T_2, V_2 — конечные давление, температура и объем газа,
n — показатель политропы,
W — работа, совершаемая газом при политропном расширении,
m — масса газа,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),
то

(T 16.22) $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}, \quad \text{или} \quad TV^{n-1} = \text{const},$$

(T 16.23) $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad \text{или} \quad T^n p^{1-n} = \text{const},$$

(T 16.24) $$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n}, \quad \text{или} \quad pV^n = \text{const}.$$

Выражение для работы, которую производит газ при политропном расширении, имеет вид

(T 16.25) $$\boxed{W = \frac{mR}{n-1}(T_1 - T_2).}$$

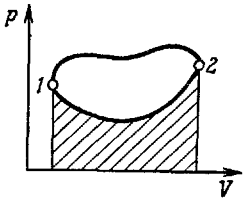
	W	m	R	n	T
СИ	Дж	кг	Дж/(кг · К)	—	К
80	кгс · м	кг	кгс · м/(кг · К)	—	

Обратите внимание:

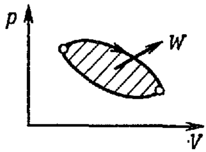
- Если $T_2 > T_1$, то газ не расширяется, а наоборот, сжимается. При этом работа отрицательна ($W < 0$), т. е. газ не производит работы, а работа совершается над газом.
- Численные значения n определяются экспериментально.
- Соотношение между единицами энергии и работы в разных системах см. в табл. П5.

16.7. Круговые процессы (циклы)

Совокупность процессов, в результате которых система возвращается в исходное состояние, называется круговым процессом (циклом). В основе работы всех циклических тепловых машин лежат круговые процессы.

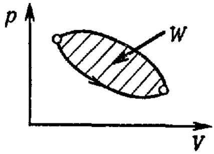


На $p — V$-диаграмме циклический процесс изображается замкнутой кривой. Точки *1* и *2* соединяются двумя различными кривыми. Производимая системой работа при переходах из одного состояния в другое измеряется площадью под соответствующей кривой. Если циклический процесс происходит по направлению часовой стрелки, то площадь, ограниченная кривыми, соответствует работе, производимой системой (тепловой двигатель), а если против часовой стрелки, то во время процесса работа совершается над системой (холодильники и тепловые насосы).



В процессе, происходящем по направлению часовой стрелки, тепловая энергия превращается в механическую:

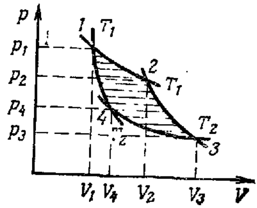
↻: $Q \to W$.



В процессе, происходящем против часовой стрелки, механическая энергия превращается в тепловую:

↺: $W \to Q$.

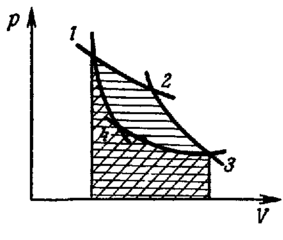
16.7.1. Цикл Карно



В тепловых двигателях стремятся достичь наиболее полного превращения тепловой энергии в механическую. Карно обнаружил, что наиболее благоприятные соотношения получаются в том случае, когда газ совершает определенный цикл. Этот цикл состоит из четырех последовательных термодинамических процессов.

1. Изотермическое расширение (*1—2*):
   $T_1 = \text{const}, \quad V_2 > V_1, \quad p_2 < p_1.$
   Подведенная теплота $Q_{\text{подв}} = Q_{12} = mRT_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.
   Произведенная системой работа $W_{12} = Q_{12}$.
2. Адиабатическое расширение (*2—3*):
   $T_2 < T_1, \quad V_3 > V_2, \quad p_3 < p_2.$
   Подведенная теплота $Q_{23} = 0$.
   Произведенная системой работа $W_{23} = \dfrac{mR}{\varkappa - 1}(T_1 - T_2)$.
3. Изотермическое сжатие (*3—4*):
   $T_2 = \text{const}, \quad V_4 < V_3, \quad p_4 > p_3.$
   Отведенная теплота $Q_{\text{отв}} = Q_{34} = mRT_2 \ln \dfrac{V_4}{V_3}$.
   Совершенная над системой работа $W_{34} = Q_{34}$.
4. Адиабатическое сжатие (*4—1*):
   $T_1 > T_2, \quad V_1 < V_4, \quad p_1 > p_4.$
   Отведенная теплота $Q_{41} = 0$.
   Совершенная над системой работа $W_{41} = \dfrac{mR}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) = -W_{23}$.

Площадь, заключенная между кривыми *1—2—3* и осью абсцисс, соответствует механической работе, произведенной газом при расширении, а площадь, заключенная между кривыми *3—4—1* и осью абсцисс, соответствует механической работе, затраченной на сжатие газа. Разность обеих площадей дает механическую работу, произведенную во время цикла. Отсюда следует, что количество теплоты $Q_{\text{подв}}$, полученное газом от нагревателя при переходе из состояния *1* в состояние *2*, должно быть больше количества теплоты $Q_{\text{отв}}$, отданного газом холодильнику при переходе из состояния *3* в состояние *4*: $|Q_{\text{подв}}| > |Q_{\text{отв}}|$.



Часть полученного газом тепла расходуется тогда на произведение механической работы.

> Превращение теплоты в механическую энергию происходит не полностью, а лишь частично.

16.7.2. Коэффициент полезного действия (КПД) цикла Карно

КПД показывает, какая часть теплоты, полученной газом от нагревателя, превращается в механическую работу.

Если

$Q_{\text{подв}}$ — количество теплоты, полученное газом от нагревателя при более высокой температуре T_1 ($Q_{\text{подв}} > 0$),

$Q_{\text{отв}}$ — количество теплоты, отданное газом холодильнику при более низкой температуре T_2 ($Q_{\text{отв}} < 0$),

η — термический КПД $= \dfrac{\text{Произведенная механическая работа } W}{\text{Подведенное количество теплоты } Q_{\text{подв}}} =$

$$= \frac{W}{Q_{\text{подв}}},$$

то, поскольку $Q = Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}$ ($Q_{\text{отв}} < 0$), получим **КПД тепловых двигателей**

(Т 16.26) $$\boxed{\eta = \frac{Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}}.}$$

В случае цикла Карно это общее равенство можно соответствующим образом преобразовать.

Поскольку процессы *2—3* и *4—1* представляют собой адиабатические процессы, для них из формулы (Т 16.17) следует

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\varkappa-1} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\varkappa-1}.}$$

Таким образом,

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}, \quad \text{а} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Термический КПД запишется тогда в виде

$$\eta = \frac{Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{отв}}} = \frac{mRT_1 \ln (V_2/V_1) - mRT_2 \ln (V_3/V_4)}{mRT_1 \ln (V_2/V_1)}.$$

После упрощения получим **термический КПД цикла Карно:**

(Т 16.27) $$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.}$$

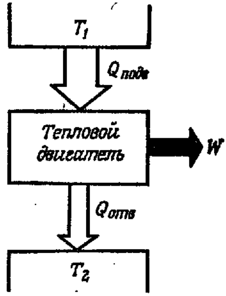
Обратите внимание:

- Из всех циклических процессов цикл Карно обладает наибольшим КПД. Большее значение КПД, хотя и не противоречит первому закону, но невозможно в силу ограничений, накладываемых вторым законом термодинамики (см. разд. 16.8).
- КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и является функцией только температуры холодильника и нагревателя.
- Максимальное значение КПД (идеальный случай) любых тепловых двигателей всегда меньше единицы и определяется по формуле (Т 16.27). В действительности КПД всегда меньше этого значения вследствие потерь и прочих причин. Таким образом, формула (Т 16.27) определяет верхний предел КПД: $\eta_{\text{идеал}}$.

16.7.3. Тепловые машины

Тепловые двигатели

Цикл Карно, происходящий по часовой стрелке, называется прямым циклом Карно. Он лежит в основе работы тепловых машин. Для него типично то, что к рабочему телу, находящемуся при более высокой температуре, подводится теплота от нагревателя. Эта теплота частично превращается затем в механическую энергию. Остаток отдается холодильнику. КПД вычисляется по формуле $\eta = \dfrac{W}{Q_{\text{подв}}}$ [см. (Т 16.26) и (Т 16.27)].

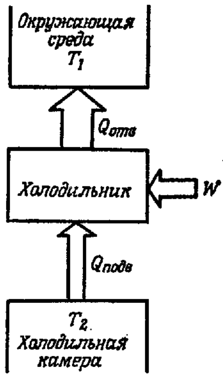


Холодильные машины

Цикл Карно, происходящий против часовой стрелки (обратный цикл Карно), лежит в основе работы холодильных машин. В обратном цикле Карно рабочее тело отбирает теплоту у холодного тела. Эта теплота вместе с теплотой, возникающей дополнительно при совершении необходимой механической работы (работа компрессора), отводится, т. е. передается более горячему телу (окружающей среде).

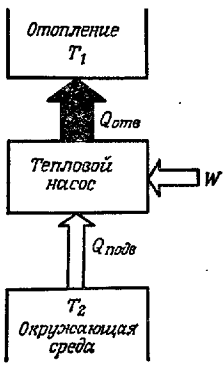
Характеристикой, аналогичной КПД, в данном случае является коэффициент преобразования ε; он обычно превышает единицу. Поскольку полезное действие холодильника заключается в отведении теплоты из холодильной камеры, выражение для коэффициента преобразования ε имеет следующий вид: $\varepsilon_{\text{хол}} = |Q_{\text{подв}}/W|$. По аналогии с выкладками в разд. 16.7.2 получаем для холодильника

(Т 16.28) $$\boxed{\varepsilon_{\text{хол}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.}$$



Тепловой насос

В основе действия теплового насоса также лежит обратный цикл Карно. В отличие от холодильной машины тепловой насос должен отдавать как можно больше тепловой энергии горячему телу (например, системе отопления). Часть этой энергии отбирается у окружающей среды (озера, ре-



ки и т. д.) с более низкой температурой, а остальная энергия возникает за счет механической работы (производимой, например, компрессором). Коэффициент преобразования теплового насоса определяется по формуле $\varepsilon_{нас} = Q_{отв}/W$. Применив выкладки из разд. 16.7.2, получим

коэффициент преобразования теплового насоса

(Т 16.29) $$\boxed{\varepsilon_{нас} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.}$$

Величина $\varepsilon_{нас}$ всегда больше единицы.

16.8. Второй закон термодинамики

Согласно первому закону термодинамики, могут протекать только такие процессы, при которых полная энергия системы остается неизменной (см. разд. 16.1). Например, превращение тепловой энергии целиком в механическую не связано с нарушением первого закона; тем не менее оно невозможно. Второй закон термодинамики еще больше ограничивает возможные процессы превращения.

Теплоту можно превратить в работу только при условии, что часть этой теплоты одновременно перейдет от горячего тела к холодному (принцип действия тепловых двигателей).

Устройство, которое вопреки этому закону получало бы тепловую энергию от нагревателя и производило равное количество механической энергии, называется **вечным двигателем второго рода.** (Пример: камень, который охлаждаясь поднимался бы вверх!).

Чтобы теплота могла перейти от холодного тела к горячему, необходимо затратить механическую работу (принцип действия холодильных машин).

Отсюда следует, что в замкнутой системе в отсутствие каких-либо процессов не может сама по себе возникнуть и разность температур, т. е. теплота не может самопроизвольно перейти от более холодных частей системы к более горячим.

16.8.1. Обратимые и необратимые процессы

Все термодинамические процессы, протекающие в замкнутой системе, можно подразделить на обратимые и необратимые.

Термодинамический процесс **обратим,** если, протекая в обратном направлении, он возвращает систему в исходное состояние без затрат энергии.

В противном случае термодинамические процессы называются **необратимыми.** Они протекают самопроизвольно только в одном направлении.

Примеры обратимых процессов: движение планет, незатухающие колебания маятника, упругий удар, цикл Карно.

Примеры необратимых процессов: затухающие колебания маятника, неупругий удар, процессы с трением, диффузия, теплопередача, теплообмен.

Обратите внимание:

- Большинство процессов в технике представляют собой необратимые процессы или по крайней мере содержат этапы, являющиеся необратимыми процессами.

16.8.2. Энтропия

Из уравнений (Т 16.26) и (Т 16.27) для цикла Карно (обратимого) следует

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ и}$$

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} \text{ и, наконец,}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Это уравнение означает, что количество теплоты, полученное или отданное телом при обратимом процессе, пропорционально температуре.

Отношение Q/T называется **приведенным количеством теплоты.**

Сумма приведенных количеств теплоты при любом обратимом процессе равна нулю:

$$\sum \frac{Q_{\text{обр}}}{T} = 0,$$

или в дифференциальной форме

$$\oint \frac{dQ_{\text{обр}}}{T} = 0 .$$

Обратите внимание:

- Знак $\oint$ означает, что интеграл берется по замкнутому контуру (круговой процесс).

В каждом цикле обратимого процесса все термодинамические параметры принимают исходные значения, т. е. их изменение равно нулю. Поскольку сумма приведенных количеств теплоты также равна нулю, можно определить термодинамический параметр состояния — энтропию S как функцию, дифференциал которой равен

(T 16.30) $$\boxed{dS = \frac{dQ_{обр}}{T}.}$$

Единица СИ энтропии: $[S]$ = Дж/К.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: ккал/К.

Обратите внимание:

- Поскольку в уравнения обычно входит не сама энтропия, а ее изменение, за нулевое значение энтропии в технике обычно произвольно принимают ее значение, соответствующее температуре $T_0 = 273{,}15$ К = 0°С.

Воспользовавшись уравнением (T 16.30), получим следующее выражение для **изменения энтропии** при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

(T 16.31) $$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{dQ_{обр}}{T}.}$$

При обратимом процессе изменение энтропии $\Delta S = 0$.

При необратимом процессе изменение энтропии $\Delta S > 0$.

Понятие энтропии важно не только для циклических процессов. Энтропия играет важную роль в любых термодинамических процессах.

Справочная таблица

Изменение энтропии	Процесс
$\Delta S = 0$	Обратимый, может протекать как в прямом, так и в обратном направлениях
$\Delta S > 0$	Необратимый, самопроизвольно протекает только в одном направлении
$\Delta S < 0$	Не может протекать самопроизвольно, необходим подвод энергии извне

Все процессы в природе протекают в направлении увеличения энтропии.

Использование понятия энтропии позволяет очень просто сформулировать второй закон термодинамики.

(T 16.32) $\boxed{\Delta S \geqslant 0.}$ **второй закон термодинамики**

Энтропия замкнутой системы не может уменьшаться!

Энтропия идеального газа

Изменение энтропии, происходящее при термодинамических процессах в идеальном газе, можно найти, исходя из первого закона термодинамики (Т 16.16) и определения энтропии (Т 16.30).

Если
$\Delta S = S_2 - S_1$ — изменение энтропии,
m — масса газа,
c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (см. табл. 18),
T_1 — начальная температура газа,
T_2 — конечная температура газа,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),
V_1 — начальный объем газа,
V_2 — конечный объем газа,

то

$$dS = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T} \text{ и } dQ = dU + p\,dV, \text{ откуда}$$

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}.$$

Так как $dU = c_v m dT$ (Т 16.7) и $p = mRT/V$ (Т 13.16), имеем $dS = c_v m \dfrac{dT}{T} + mR\dfrac{dV}{V}$. Выполнив интегрирование

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = c_v m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + mR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}, \text{ получим}$$

изменение энтропии идеального газа

(Т 16.33) $$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = c_v m \ln \frac{T_2}{T_1} + mR \ln \frac{V_2}{V_1}.}$$

	ΔS	m	c	T	R	V
СИ	Дж/кг	кг	Дж/(кг · К)	К	Дж/(кг · К)	м³
80	ккал/кг	кг	ккал/(кг · К)	К	ккал/(кг · К)	м³

Обратите внимание:

- Отношения под знаком логарифма определяют знаки слагаемых.
- При адиабатическом процессе $\Delta S = 0$, поскольку $dQ_{\text{обр}} = 0$.
- При изотермическом процессе ($T_1 = T_2$) из формулы (Т 16.33) следует, что $\Delta S = mR \ln (V_2/V_1)$.
- При изохорическом процессе ($V_1 = V_2$) из формулы (Т 16.33) следует, что $\Delta S = c_v m \ln (T_2/T_1)$.

Энтропия и вероятность

Увеличение энтропии системы означает переход в состояние, имеющее бо́льшую вероятность.

Если
S — энтропия,
w — вероятность термодинамического состояния,
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана (см. разд. 17.1.3),

то

(Т 16.34) $\boxed{S = k \ln w.}$ **формула Больцмана**

Обычно интерес представляет только изменение энтропии. При переходе из состояния 1, которому отвечает вероятность w_1, в состояние 2, которому отвечает вероятность w_2, энтропия изменяется от S_1 до S_2. Тогда из формулы (Т 16.34) следует

(Т 16.35) $$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1}.}$$

Необратимые процессы протекают самопроизвольно до тех пор, пока система не достигнет состояния, которому отвечает наибольшая вероятность; энтропия при этом достигает своего максимума.

Примеры:
— полное перемешивание молекул двух газов в результате диффузии;
— выравнивание температур двух тел с различными исходными температурами.

Энтропия характеризует вероятность, с которой устанавливается то или иное состояние. Кроме того, энтропия является мерой хаотичности или необратимости.

17. Кинетическая теория газов

Тепловая энергия — это не что иное, как энергия движения молекул. Поэтому в основе учения о теплоте лежат законы механики.

17.1. Число и масса молекул

17.1.1. Число Лошмидта

В нормальном состоянии ($T_н = T_0 = 273{,}15$ К $= 0$°C, $p_н = 101{,}325$ кПа) в 1 м^3 любого газа содержится одинаковое число молекул.

Число молекул в 1 м^3 называется **числом Лошмидта**

(Т 17.1) $\boxed{N_L = 2{,}6868\cdot10^{25}\ \text{м}^{-3}.}$

Обратите внимание:

- Если газ находится в состоянии, отличном от нормального, то его объем следует пересчитать на нормальный объем по формуле (Т 13.25).

17.1.2. Постоянная Авогадро

В одном моле любого вещества содержится одно и то же число молекул (или атомов).

Это число называется **постоянной Авогадро**

(Т 17.2) $$\boxed{N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1} = \frac{N}{n},}$$

где
N — число молекул,
n — количество вещества в молях.

Обратите внимание:

- Не следует путать постоянную Авогадро с числом Лошмидта.

17.1.3. Постоянная Больцмана

Молярная газовая постоянная R_m [формула (Т 13.17)] и постоянная Авогадро [формула (Т 17.2)] относятся к определенному количеству вещества. Следовательно, их отношение представляет собой универсальную физическую постоянную. Это отношение

$$\frac{R_m}{N_A} = \frac{8{,}31441\ \text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot 6{,}022045 \cdot 10^{23}}$$

называется **постоянной Больцмана**

(Т 17.3) $$\boxed{k = \frac{R_m}{N_A} = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}.}$$

17.1.4. Масса отдельной молекулы

Масса отдельной молекулы $m_м$ любого вещества определяется из отношения $\frac{\text{Масса вещества } m}{\text{Число молекул } N}$ или, поскольку $m = Mn$ (Т 13.18), а $N = N_A n$, из отношения $\frac{\text{Молярная масса } M}{\text{Постоянная Авогадро } N_A}$, т. е.

(Т 17.4) $$\boxed{m_м = \frac{M}{N_A} = \frac{M\ \text{кмоль}}{6{,}022045 \cdot 10^{26}}.}$$

	$m_м$	M
КД	кг	кг/кмоль

Обратите внимание:

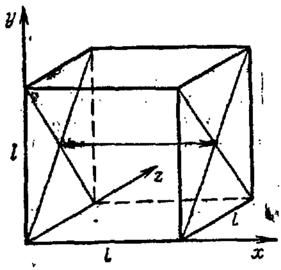
- Численное значение молярной массы M равно относительной молекулярной массе $M_{отн}$, т. е. $\{M\} = M_{отн}$.
- По формуле (Т 17.4) можно определить также массу отдельного атома.

17.2. Давление газа

Рассмотрение основано на модели, в которой молекулы газа представляют собой крошечные упругие шарики. В промежутках между абсолютно упругими соударениями друг с другом или со стенками сосуда молекулы двигаются равномерно и прямолинейно, поскольку никакие силы на них не действуют. Соударения молекул со стенками сосуда и создают давление газа.

Если
p — давление газа,
V — объем газа,
$m = m_м N$ — масса газа,
$m_м$ — масса молекулы,
$\rho = m/V$ — плотность газа,
N — число молекул,
$n = N/V$ — плотность числа молекул,
$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
T — температура газа;

то в кубе объемом $V = l^3$ содержится N молекул газа, причем можно считать, что в направлении каждой из трех осей пространственной системы координат движется $N/3$ молекул.



Предположим, что молекула пролетает со скоростью v путь от одной стенки сосуда до противоположной и обратно, равный $2l$. Время между соударениями с одной и той же стенкой определится тогда по формуле $\Delta t = 2l/v$. Следовательно, в единицу времени происходит $1/\Delta t = v/2l$ ударов о стенку. При каждом ударе скорость молекулы меняет знак, т. е. $+v$ заменяется на $-v$; следовательно, импульс $+m_м v$ заменяется на $-m_м v$. Таким образом, при каждом соударении молекулы со стенкой последней передается импульс $2m_м v$.

За промежуток времени Δt со стенкой соударяется $N/3$ молекул, которые передают ей импульс

$$\Delta q = 2m_м v \cdot \frac{v}{2l}\, \Delta t \cdot \frac{N}{3}.$$

Согласно формуле (М 7.33), сила, действующая на стенку, равна

$$F=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{Nm_{\text{м}}v^2}{3l}.$$

В качестве квадрата скорости следует брать средний квадрат скорости $\overline{v^2}$, поскольку молекулы обладают разными скоростями. Учитывая, что $p=F/l^2$, находим $p=Nm_{\text{м}}\overline{v^2}/3l^3$. Подставив $m=Nm_{\text{м}}$ и $l^3=V$, получим давление газа

(Т 17.5) $\boxed{p=\frac{m\overline{v^2}}{3V}=\frac{\rho\overline{v^2}}{3}.}$

	p	m	V	v	ρ
СИ	Па = Н/м^2	кг	м^3	м/с	кг/м^3

Из формулы $pV=mRT$ (Т 13.16) получаем давление газа $p=mRT/V$. Подставив сюда $m=m_{\text{м}}N$, $R=R_{\text{m}}/M$ и $n=N/V$, найдем $p=nm_{\text{м}}R_mT/M$, или, поскольку $m_{\text{м}}/M=1/N_{\text{A}}$ и $R_{\text{m}}/N_{\text{A}}=k$,

(Т 17.6) $\boxed{p=nkT}$

	p	n	k	T
СИ	Па = Н/м^2	1/м^3	Дж/К	К

В замкнутой системе давление газа пропорционально среднему квадрату скорости, или температуре.

Обратите внимание:

- С помощью формулы (Т 17.5) по легко измеримым величинам p, m и V можно найти среднюю квадратичную скорость молекул (корень квадратный из среднего квадрата скорости $\sqrt{\overline{v^2}}$).

17.3. Скорость молекул

Движение молекул газа подчиняется законам статистической физики. В среднем скорости и энергии всех молекул одинаковы. Однако в каждый момент времени энергии и скорости отдельных молекул могут значительно отличаться от среднего значения.

17.3.1. Закон распределения молекул по скоростям

С помощью теории вероятности Максвеллу удалось вывести формулу для относительной частоты, с которой в газе при данной температуре встречаются молекулы со скоростями в определенном интервале значений.

Если
N — общее число молекул газа,
dN — число молекул, скорости которых заключены в определенном интервале,
v — нижняя граница интервала скоростей,

dv — величина интервала скоростей,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),
T — температура газа,
e = 2,718... — основание натуральных логарифмов,
k = $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
$m_м$ — масса молекулы,

то **закон распределения Максвелла** запишется в виде

$$\boxed{\frac{dN}{N} = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_м}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_м v^2}{2kT}}\, dv.} \tag{Т 17.7}$$

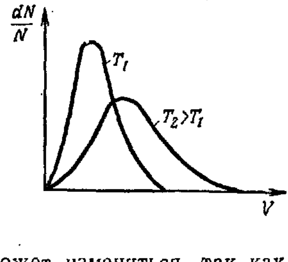
Заменив с помощью выражений (Т 17.3) и (Т 17.4) $m_м/k$ на $M/R_m = 1/R$, формулу (Т 17.7) можно привести к виду, в котором специфические свойства данного газа выражены не через молекулярную массу, а через газовую постоянную R:

$$\boxed{\frac{dN}{N} = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{2RT}}\, dv.} \tag{Т 17.8}$$

	v	R	T
СИ	м/с	Дж/(кг·К)	К

Распределение Максвелла показывает, какая доля dN/N общего числа молекул данного газа обладает скоростью в интервале от v до $v + dv$.

График функции распределения асимметричен. Положение максимума характеризует наиболее часто встречающуюся скорость, которую называют **наиболее вероятной скоростью** v_m. Скорости, превышающие v_m, встречаются чаще, чем меньшие скорости.



С повышением температуры максимум распределения сдвигается в направлении бо́льших скоростей. Одновременно кривая становится более плоской (площадь, заключенная под кривой, не может измениться, так как число молекул N остается постоянным).

Обратите внимание:

- Вычисления по формуле (Т 17.8) целесообразно начинать с нахождения величины $2RT$.

17.3.2. Наиболее вероятная скорость

Для определения наиболее вероятной скорости нужно исследовать на максимум функцию распределения Максвелла (приравнять первую производную нулю и решить относительно v). В результате получаем

(T 17.9) $$\boxed{v_{\text{т}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_{\text{м}}}} = \sqrt{2RT}.}$$

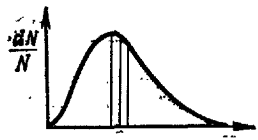
	v	k	T	m	R
СИ	м/с	Дж/К	К	кг	Дж/(кг·К)

17.3.3. Средняя квадратичная скорость

При расчетах используется не мгновенная скорость отдельной молекулы, а некоторое среднее значение. Если определить долю внутренней энергии газа, приходящуюся на одну молекулу (считая, что все молекулы обладают одинаковой энергией), то она оказывается пропорциональной квадрату скорости молекулы ($W \sim v^2$). Квадратный корень из среднего квадрата скорости называется средней квадратичной скоростью.

Если

$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\overline{v^2}}$ — средняя квадратичная скорость,
k $= 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
T — температура газа,
$m_{\text{м}}$ — масса молекулы,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),



$v_{\text{т}} < \bar{v} < v_{\text{ср. кв}}$.

то, приравняв выражения (T 17.5) и (T 17.6), получим $m\overline{v^2}/3V = nkT = (N/V)kT$, или $m\overline{v^2}/3 = NkT$, и после перестановки $\overline{v^2} = 3NkT/m = 3kT/m_{\text{м}}$. Из формул (T 17.3) и (T 17.4) следует $k/m_{\text{м}} = R$; отсюда получаем, что **средняя квадратичная скорость**

(T 17.10) $$\boxed{v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT} = 1,225 v_{\text{m}}.}$$

	v	R	T
СИ	м/с	Дж/(кг·К)	К

17.3.4. Средняя скорость

Еще одно среднее значение мы получим, определив среднюю арифметическую скорость молекул газа

(T 17.11) $$\boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} = 1,128\ v_{\text{m}}.}$$

	v	R	T
СИ	м/с	Дж/(кг·К)	К

17.4. Энергия молекул

17.4.1. Кинетическая энергия отдельной молекулы

В соответствии с формулой (М 7.24) кинетическая энергия отдельной молекулы определяется как $W_к = m_м v^2/2$, причем в качестве v^2 берется среднее значение $\overline{v^2} = 3RT$.

Если
$\overline{W}_К$ — средняя кинетическая энергия отдельной молекулы,
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
T — температура газа,

то $m_м \overline{v^2}/2 = \frac{3}{2} m_м RT$, а поскольку из формулы (Т 17.3) и (Т 17.4) следует $m_м R = k$, получаем, что **средняя кинетическая энергия отдельной молекулы** идеального газа равна

(Т 17.12) $$\boxed{\overline{W}_К = \frac{1}{2} m_м \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT.}$$

	W	k	T
СИ	Дж	Дж/К	К

С помощью формулы (Т 17.9) находим **наиболее вероятную энергию** отдельной молекулы

(Т 17.13) $$\boxed{W_{mк} = \frac{1}{2} m_м v_m^2 = kT.}$$

	W	k	T
СИ	Дж	Дж/К	К

Температура газа пропорциональна средней кинетической энергии его молекул
$T \sim \overline{W}_к$.

Обратите внимание:

- Эта закономерность справедлива также для жидкостей и твердых тел.

В общем случае можно утверждать:

Абсолютная температура является мерой кинетической энергии молекул;
абсолютному нулю температуры (0 К) отвечает равная нулю кинетическая энергия молекул.

17.4.2. Закон равномерного распределения энергии

Формула (Т 17.12) выведена для случая одноатомного идеального газа. Каждая молекула такого газа обладает **тремя степенями свободы**, т. е. может совершать поступательное движение во всех трех направлениях в пространственной системе координат.

Число степеней свободы f определяется числом координат, однозначно задающих состояние движения.

Согласно Клаузиусу и Максвеллу, энергия молекулы равномерно распределяется между всеми степенями свободы (**принцип равнораспределения**).

На каждую степень свободы одноатомной молекулы приходится в среднем энергия $W = kT/2$.

Справочная таблица

Число степеней свободы

Вещество	Тип движения: Поступательное	Вращательное	Колебательное	Всего
Одноатомный газ	3	—	—	3
Двухатомный газ	3	2	—	5
Трехатомный газ*	3	3	—	6
Твердое тело	—	—	6	6
Жидкость		Не определено		

* Исключение: CO_2 имеет столько же степеней свободы, как и двухатомный газ.

17.4.3. Внутренняя энергия и удельная теплоемкость

Под внутренней энергией тела понимается суммарная энергия его молекул.

Если
U — внутренняя энергия,
m — масса,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),
T — температура,
f — число степеней свободы,

то $U = NfkT/2$. Из формул (Т 17.3) и (Т 17.4) следует, что $k = m_м R$ и $U = fNm_м RT/2$. Так как $Nm_м = m$, **внутренняя энергия** газа определяется по формуле

(Т 17.14) $$\boxed{U = \frac{f}{2} mRT}$$

	U	f	m	R	T
СИ	Дж	—	кг	Дж/(кг·К)	К

Приравняв выражения (Т 17.14) и $U = c_v mT$ (Т 16.7), получим

$$c_v mT = \frac{f}{2} mRT.$$

Отсюда находим удельную теплоемкость:

(Т 17.15) $$\boxed{c_v = \frac{f}{2} R.}$$

Из формулы (Т 14.6) следует $c_p = c_v + R$, т. е.

(Т 17.16) $$\boxed{c_p = \frac{f+2}{2} R.}$$

Так как $\varkappa = c_p/c_v$, из формул (Т 17.16) и (Т 17.15) получаем

(Т 17.17) $$\boxed{\varkappa = \frac{f+2}{f}.}$$

Справочная таблица

Вещество	U	c_v, кДж/(кг·К)	c_p, кДж/(кг·К)	$\varkappa = c_p/c_v$
Одноатомный газ	$\frac{3}{2} mRT$	$\frac{3}{2} R = \frac{12{,}47}{M_{отн}}$	$\frac{5}{2} R = \frac{20{,}79}{M_{отн}}$	$\frac{5}{3} = 1{,}667$
Двухатомный газ	$\frac{5}{2} mRT$	$\frac{5}{2} R = \frac{20{,}79}{M_{отн}}$	$\frac{7}{2} R = \frac{29{,}1}{M_{отн}}$	$\frac{7}{5} = 1{,}400$
Трехатомный и многоатомный газы	$3mRT$	$3R = \frac{24{,}94}{M_{отн}}$	$4R = \frac{33{,}26}{M_{отн}}$	$\frac{4}{3} = 1{,}333$
Твердое тело	$3mRT$	$3R = \frac{24{,}94}{M_{отн}}$	$(\approx 3R)$	(≈ 1)

Обратите внимание:

- Данные, приведенные в таблице, имеют только теоретическое значение. Для практических вычислений рекомендуется пользоваться экспериментальными данными, приводимыми в справочниках.

17.5. Число соударений и длина свободного пробега

17.5.1. Среднее число соударений

Молекула газа двигается прямолинейно, пока не произойдет соударение с другой молекулой.

Рассчитаем среднюю частоту соударений (среднее число соударений).

Если

$\bar{z}$ — среднее число соударений $= \dfrac{\text{Число соударений}}{\text{Время}}$,

d — диаметр молекулы,

$\bar{v}$ — средняя скорость молекул,

$n = N/V$ — число молекул в единице объема,

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро,

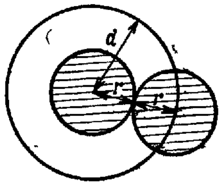
ρ — плотность газа,

M — молярная масса,

T — температура газа,

p — давление газа,

то число соударений молекулы, обладающей скоростью $\bar{v}$ (в предположении, что все остальные молекулы в это время покоятся), определяется числом молекул, центры которых находятся в объеме, пролетаемом молекулой за время Δt. Этот объем представляет собой цилиндр с основанием площадью $d^2\pi$ и длиной $\bar{v}\Delta t$. Число молекул в этом объеме, или число соударений за время Δt, равно $N = nV = nd^2\pi\bar{v}\Delta t$. Отсюда находим $\bar{z} = nd^2\pi\bar{v}$. Учитывая, что остальные молекулы на самом деле двигались, получаем **среднее число соударений**



(Т 17.18) $$\boxed{\bar{z} = \pi\sqrt{2}\, d^2\bar{v}n,}$$

или, поскольку

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{m_м V} = \frac{mN_A}{VM} = \frac{\rho N_A}{M},$$

(Т 17.19) $$\boxed{\bar{z} = \pi\sqrt{2}\, d^2\bar{v}\rho\,\frac{N_A}{M}.}$$

	d	v	ρ	N_A	z	M
КД	м	м/с	кг/м^3	1/кмоль	1/с	кг/кмоль

Так как $N_A = R_m/k$ (Т 17.3), $R_m/M = R$ (Т 13.17) и $\rho = p/RT$ (Т 13.23), из выражения (Т 17.19) следует

(Т 17.20) $$\boxed{\bar{z} = \frac{\pi\sqrt{2}\, d^2 \bar{v} p}{kT}}$$

	d	v	p	k	T
СИ	м	м/с	Па = Н/м²	Дж/К	К

Обратите внимание:

- Среднее число соударений $\bar{z}$ для большинства газов при нормальных условиях составляет от 10^9 до 10^{10} с$^{-1}$.
- Молярная масса M численно равна относительной массе молекул, т. е. $\{M\} = M_{отн}$.
- Выражение $\pi\sqrt{2}\, N_A/M$ можно упростить и привести к виду $\frac{26{,}8}{M_{отн}} \cdot 10^{26}$ кг$^{-1}$.
- Величина $\pi\sqrt{2}/k$ численно равна $3{,}22 \cdot 10^{23}$ К/Дж.

17.5.2. Средняя длина свободного пробега

Расстояние, проходимое молекулой в среднем между двумя соударениями, называется средней длиной свободного пробега. Оно равно отношению пройденного за время Δt пути к числу соударений за это время.

Если

$\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега,
d — диаметр молекулы,
$n = N/V$ — число молекул в единице объема,
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро,
ρ — плотность газа,
M — молярная масса,
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
p — давление газа,
T — температура газа,

то $\bar{l} = \bar{v}\,\Delta t/\bar{z}\,\Delta t = \bar{v}/\bar{z}$, и из формулы (Т 17.18) получаем следующую формулу для средней длины свободного пробега молекулы:

(Т 17.21) $$\boxed{\bar{l} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\, d^2 n},}$$

или, учитывая выражение (Т 17.19),

(Т 17.22) $$\boxed{\bar{l} = \frac{M}{\pi\sqrt{2}\, d^2 N_A \rho}.}$$

	l	d	ρ	N_A	M
КД	м	м	кг/м³	1/кмоль	кг/кмоль

Далее, из формулы (Т 17.20) следует

(Т 17.23) $\boxed{\bar{l} = \dfrac{kT}{\pi\sqrt{2}\, d^2 p}.}$

	$\bar{l}$	d	k	T	p
СИ	м	м	Дж/К	К	Па = Н/м²

Обратите внимание:

- Средняя длина свободного пробега $\bar{l}$ для большинства газов при нормальных условиях составляет $\sim 10^{-7}$ м.
- Молярная масса M численно равна относительной молекулярной массе $M_{\text{отн}}$, т. е. $\{M\} = M_{\text{отн}}$.
- Выражение $M/\pi\sqrt{2}\, N_A$ можно упростить и привести к виду $3{,}74 \cdot 10^{-28} \cdot M_{\text{отн}}$, где масса $M_{\text{отн}}$ выражена в килограммах,
- $k/\sqrt{2}\,\pi = 3{,}11 \cdot 10^{-24}$ Дж/К.

18. Процессы передачи тепла

Все виды передачи тепла подчиняются одному основному правилу: тепло передается от горячего тела холодному.

18.1. Конвекция (перенос тепла потоком)

У теплых жидкостей и газов плотность ρ меньше, чем у холодных, они оказываются легче и поднимаются наверх. При этом движущийся поток жидкости или газа переносит с собой тепло (свободная конвекция). Иногда, однако, причиной движения может быть внешнее воздействие (принудительная конвекция).

С конвекцией мы сталкиваемся, когда рассматриваем, например, следующие явления.

- Дым из трубы.
- Движение воды в паровом отоплении.
- Восходящие потоки воздуха, используемые планеристами.
- Движение воды в системе водяного охлаждения автомобильного двигателя.
- Теплый сухой ветер (фён).
- Течение Гольфстрим.

При низком давлении перенос тепла конвекцией отсутствует вследствие малой плотности газа. По этой причине тщательно вакуумируется пространство между стенками сосудов в термосах (сосудах Дьюара).

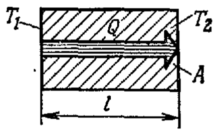
18.2. Теплопроводность

Теплопроводность тела означает его способность проводить тепло. Молекулы участков тела, где температура выше, обладают большей энергией и передают ее соседним молекулам, обладающим меньшей энергией. Это ведет к выравниванию разности температур внутри тела. В отличие от конвекции передача тепла здесь не связана с переносом частиц.

18.2.1. Стационарная теплопроводность

Теплопроводность называется стационарной, если вызывающая ее разность температур ΔT сохраняется неизменной. В противном случае речь идет о нестационарной теплопроводности.

Если:



Q — передаваемое количество теплоты,
A — поперечное сечение проводника тепла,
t — продолжительность процесса теплопроводности,
ΔT — разность температур на концах проводника тепла,
l — длина проводника тепла,
λ — коэффициент теплопроводности материала проводника (см. табл. 28),

то

(Т 18.1) $\boxed{Q = \dfrac{\lambda A t \, \Delta T}{l}.}$

	Q	λ	A	t	T	l
СИ	Дж	Вт/(м·К)	м^2	с	К, °С	м
80	ккал	ккал/(м·ч·К)	м^2	ч	К, °С	м
80	кал	кал/(см·с·К)	м^2	с	К, °С	см

$$1\,\frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot\text{К}} = 1{,}163\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}; \quad 1\,\frac{\text{кал}}{\text{см}\cdot\text{с}\cdot\text{К}} = 418{,}7\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}.$$

Единица СИ коэффициента теплопроводности: $[\lambda] = \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: ккал/(м·ч·К) и кал/(см·с·К).

Отношение Q/t называется **тепловым потоком** Φ.

Единица СИ теплового потока: $[\Phi]$ = ватт (Вт).
Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: ккал/ч.

Обратите внимание:

- В формуле (Т 18.1) и последующих выражениях ΔT может измеряться в кельвинах или градусах Цельсия, поскольку речь идет о разности температур и необходимость в пересчете отпадает.

Явления теплопроводности и электропроводности формально аналогичны друг другу.

Электрическое сопротивление проводника вычисляется по формуле $R = \rho l/A = l/\sigma A$ [см. выражение (Э 28.6)], где ρ — удельное электрическое сопротивление, а σ — удельная проводимость, Соответственно тепловое сопротивление имеет вид

(Т 18.2) $\boxed{R_T = \dfrac{l}{\lambda A}}$.

	R_T	l	λ	A
СИ	К/Вт	м	Вт/(м · К)	м²
80	(ч · К)/ккал	м	ккал/(м · ч · К)	м²

Величина электрического и теплового сопротивления проводника зависит от его длины, площади поперечного сечения и материала, из которого проводник изготовлен.

По аналогии с законом Ома $I = U/R$ из формул (Т 18.1) и (Т 18.2) следует **закон Ома для участка теплопроводящей цепи:**

(Т 18.3) $\boxed{\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_T}}$

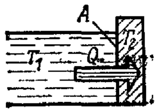
	Ф	T	R_T
СИ	Вт	К, °С	К/Вт
80	ккал/ч	К, °С	ч · К/ккал

Обратите внимание:

- Тепловое сопротивление в формуле (Т 18.3) может состоять из ряда отдельных сопротивлений, включенных параллельно или последовательно. Для вычисления полного сопротивления следует пользоваться правилами вычисления полного сопротивления электрической цепи.

18.2.2. Теплоотдача

Жидкие или газообразные тела, вступающие в контакт с твердым телом, находящимся при другой температуре, либо отдают ему тепло, либо получают тепло от него. Такое явление передачи тепла называется теплоотдачей.



Если
Q — количество теплоты, проходящее через поверхность соприкосновения;
α — коэффициент теплоотдачи,
A — площадь поверхности, через которую происходит теплоотдача,
t — продолжительность процесса теплоотдачи,
ΔT — разность температур поверхности твердого тела и жидкости или газа,
то

(Т 18.4) $\boxed{Q = \alpha A t \Delta T.}$

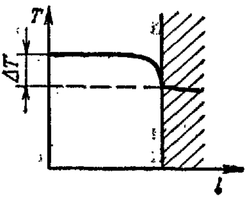
	Q	α	A	t	T
СИ	Дж	Вт/(м² · К)	м²	с	К, °С
80	ккал	ккал/(м² · ч · К)	м²	ч	К, °С

Единица СИ коэффициента теплоотдачи: $[\alpha] = \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: ккал/(м² · ч · К) и кал/(см² · с · К).

Обратите внимание:

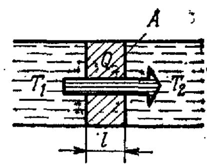
- Численные значения коэффициента теплоотдачи α см. в табл. 29. Они зависят от состава жидкости или газа и скорости их движения, а также от обработки поверхности твердого тела, но не от его состава.
- Разность температур ΔT остается постоянной в процессе теплоотдачи.
- В месте теплоотдачи возникает скачок температуры.
- Величина $1/\alpha A$ представляет собой тепловое сопротивление.



18.2.3. Теплопередача

Если два жидких или газообразных тела, имеющие различную температуру, разделены твердым телом (плоской перегородкой), то процесс передачи теплоты происходит в 3 стадии:

- Теплоотдача из первой среды к поверхности перегородки, описываемая формулой (Т 18.4);
- Теплопроводность через перегородку, описываемая формулой (Т 18.1);
- Теплоотдача с поверхности перегородки к второй среде, описываемая формулой (Т 18.4).



Совокупность трех таких процессов называется **теплопередачей.**

Если

Q — количество теплоты, переносимое через плоскую перегородку,
k — коэффициент теплопередачи,
A — площадь поверхности, через которую совершается теплопередача,
l — толщина перегородки или теплопроводящего слоя твердого тела,
t — продолжительность процесса,
ΔT — разность температур двух сред,
α_1 — коэффициент теплоотдачи на первой граничной поверхности,
α_2 — коэффициент теплоотдачи на второй граничной поверхности,
λ — теплопроводность твердого тела (перегородки) (см. табл. 28),

то с учетом того, что тепловой поток на всех участках теплообмена должен оставаться постоянным, имеем

$$\Phi = \frac{Q}{t} = \alpha_1 A \Delta T_1 = \frac{\lambda}{l} A \Delta T_2 = \alpha_2 A \Delta T_3.$$

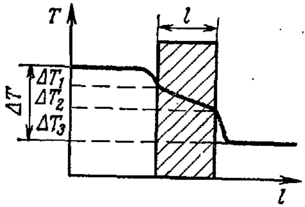
При этом сумма всех разностей температур равна общей разности температур: $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3$. Из этих двух выражений следует

$$\frac{Q}{\alpha_1 At}+\frac{Ql}{\lambda At}+\frac{Q}{\alpha_2 At}=\Delta T.$$

Вынесем Q/At за скобки:

$$\frac{Q}{At}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{l}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=\Delta T.$$

Величина, обратная выражению в скобках, называется **коэффициентом теплопередачи** k:



(Т 18.5) $$\boxed{\frac{1}{k}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{l}{\lambda}.}$$

Таким образом, процесс теплопередачи описывается формулой

(Т 18.6) $$\boxed{Q=kAt\,\Delta T.}$$

	Q	k	A	t	T
СИ	Дж	Вт/(м^2·К)	м^2	с	К, °С
80	ккал	ккал/(м^2·ч·К)	м^2	ч	К, °С

Единица СИ коэффициента теплопередачи: $[k]=\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$.

Единицы, допускавшиеся к применению до 1980 г.: ккал/(м^2·ч·К) и кал/(см^2·с·К).

Обратите внимание:

- Величина $1/kA$ представляет собой тепловое сопротивление.
- Численное значение коэффициента k см. в табл. 30.
- Коэффициент теплопередачи k зависит от толщины перегородки l.
- На каждом из обоих участков теплопередачи возникает скачок температуры.

18.3. Тепловое излучение

При тепловом излучении тепловая энергия переносится от одного тела к другому благодаря испусканию и поглощению электромагнитных волн.

18.3.1. Поглощение

Падающее на тело излучение лишь частично поглощается им, часть излучения отражается или проходит сквозь тело.

Если

Φ_0 — поток (мощность) падающего излучения,

$\Phi_{\text{отр}}$ — поток отраженного излучения,

$\Phi_{погл}$ — поток поглощенного излучения,
$\Phi_{пр}$ — поток прошедшего излучения,

то по определению
коэффициент отражения тела

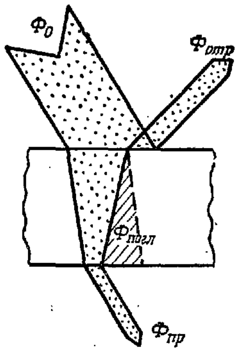
(T 18.7) $\boxed{\rho = \Phi_{отр}/\Phi_0,}$

коэффициент поглощения

(T 18.8) $\boxed{\alpha = \Phi_{погл}/\Phi_0,}$

коэффициент пропускания

(T 18.9) $\boxed{\tau = \Phi_{пр}/\Phi_0.}$



Обратите внимание:

- Величины ρ, α и τ зависят от свойств самого тела и длины волн падающего излучения.

Согласно закону сохранения энергии, $\Phi_{отр} + \Phi_{погл} + \Phi_{пр} = \Phi_0$. Разделив обе стороны равенства на Φ_0, получим

(T 18.10) $\boxed{\rho + \alpha + \tau = 1.}$

Тело, для которого $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\alpha = 1$ (что не реализуется на практике), называется **абсолютно черным телом.**

Абсолютно черное тело поглощает все падающие на него лучи независимо от длины волны излучения и температуры.

18.3.2. Излучение

Любое тело с температурой, отличной от 0 K, испускает излучение. Такое излучение называется температурным, или тепловым излучением.

Излучение абсолютно черного тела превышает излучение любых других тел при данной длине волны и температуре. Его излучательная способность (подобно коэффициенту поглощения) равна единице.

Излучательная способность ε любого тела равна его коэффициенту поглощения α при заданной температуре и длине волны. Это — **закон излучения Кирхгофа:**

(T 18.11) $\boxed{\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T).}$

Если

Φ — поток излучения, испускаемый нечерным (серым) телом с определенной температурой,

$\varepsilon\ (=\alpha)$ — излучательная способность серого тела,

$\Phi_{черн}$ — поток излучения черного тела с той же температурой,

то из закона Кирхгофа следует

(Т 18.12) $\boxed{\Phi = \varepsilon \Phi_{черн}.}$

Мощность (поток) P излучения любого серого тела равна мощности излучения черного тела с той же температурой, умноженной на излучательную способность данного тела.

18.3.3. Закон Стефана — Больцмана

Мощность P излучения, испускаемого нагретым телом, пропорциональна площади излучающего тела A и четвертой степени температуры тела: $P \sim AT^4$. Коэффициент пропорциональности называется **постоянной Стефана — Больцмана:**

(Т 18.13)
$$\boxed{\begin{aligned}\sigma &= 5{,}67032 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)\\ &= 4{,}87559 \cdot 10^{-8}\ \text{ккал}/(\text{ч} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4).\end{aligned}}$$
(до 1980 г.)

Если

P — мощность излучения,

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — постоянная Стефана — Больцмана,

ε — излучательная способность тела (см. табл. 31),

A — площадь излучающей поверхности,

T_1 — температура излучающего тела,

T_2 — температура окружающей среды,

то с учетом излучательной способности серого тела закон Стефана — Больцмана запишется в виде

(Т 18.14) $\boxed{P = \sigma \varepsilon A T_1^4.}$

	P	σ	A	T	ε
СИ	Вт	Вт/(м²·К⁴)	м²	К	—
80	ккал/ч	ккал/(ч·м²·К⁴)	м²	К	—

Одновременно излучающее тело поглощает излучение, испускаемое окружающей средой и имеющее мощность $P = \sigma \varepsilon A T_2^4$. Если излучающая и поглощающая поверхности имеют одинаковую площадь (что бывает не всегда!), закон Стефана — Больцмана запишется в виде

(Т 18.15) $\boxed{P = \sigma \varepsilon A \left(T_1^4 - T_2^4\right).}$

	P	σ	A	T	ε
СИ	Вт	Вт/(м²·К⁴)	м²	К	—
80	ккал/ч	ккал/(ч·м²·К⁴)	м²	К	—

Обратите внимание:

- Произведение $\sigma\varepsilon$ в технической литературе часто называют коэффициентом излучения (зависящим от свойств вещества).
- Мощность излучения, вычисляемая по формулам (Т 18.14) и (Т 18.15), приходится на весь спектр излучения, т. е. на все длины волн.

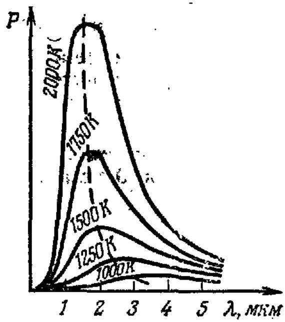
Распределение мощности по длинам волн неравномерно. Мощность излучения, приходящаяся на отдельные интервалы длин волн $d\lambda$, определяется законом Планка (см. разд. 18.3.4).

18.3.4. Закон Планка

Закон Планка описывает мощность излучения черного тела как функцию температуры T и длины волны λ.

Если

dP_λ — мощность, излучаемая в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$,
h $= 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка (квант действия) (см. разд. Ат 35.1),
c $= 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
λ — длина волны излучения,
$d\lambda$ — ширина спектрального интервала,
k $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
T — температура излучающего тела,
A — площадь излучающей поверхности,
e $= 2{,}718\ldots$ — основание натуральных логарифмов,



то мощность излучения в диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, испускаемого с площади A абсолютно черного тела, равна

(Т 18.16) $$\boxed{dP_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\,\frac{A}{e^{hc/k\lambda T} - 1}\,d\lambda.}$$

	P	h	c	k	T	λ
СИ	Вт	Дж·с	м/с	Дж/К	К	м

Обратите внимание:

- Если проинтегрировать выражение (Т 18.16) по λ в интервале от 0 до ∞, то мы получим выражение (Т 18.14) для полной мощности излучения.
- При повышении температуры мощность излучения возрастает (мощность излучения соответствует площади под кривой), а ее максимум сдвигается в сторону меньших длин волн.

18.3.5. Закон смещения Вина

Положение максимума мощности излучения можно определить из выражения (Т 18.16) обычным образом, приравняв нулю первую производную.

Если

$\lambda_{макс}$ — длина волны, при которой мощность излучения максимальна,

T — температура излучающего тела,

то

$$\lambda_{макс} = \frac{1}{4{,}97}\,\frac{hc}{kT},$$

или после подстановки численных значений

$$\text{(Т 18.17)}\quad \boxed{\lambda_{макс} = \frac{2{,}898\cdot 10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К}}{T} = \frac{2898\ \text{мкм}\cdot\text{К}}{T}.}$$

Обратите внимание:

- С повышением температуры доля коротковолнового излучения в спектре увеличивается. Поэтому цвет излучения может служить характернстнкой температуры излучения **(цветовая температура)**.
- Приборы для определения температуры излучателя по излучательной способности называются **пирометрами**.

К КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

19. Механические колебания

Любые колебания представляют собой движение с переменным ускорением; отклонение, скорость и ускорение в этом случае являются функциями времени. Для любых колебаний характерна периодичность, т. е. движение повторяется по истечении времени T, называемого длительностью, или периодом колебания. Колебания возникают в тех случаях, когда системе, способной совершать колебания, сообщается энергия. Необходимо различать:

Незатухающие колебания, которые происходят с постоянной амплитудой Y_m. Предполагается, что в этом случае подводимая энергия сохраняется. Приближенно такие условия имеют место при малых потерях энергии и малом времени наблюдения. Для получения действительно незатухающих колебаний необходимо регулярно восполнять теряемую энергию.

Затухающие колебания с убывающей амплитудой Y_m. Без восполнения энергии любые колебания затухают.

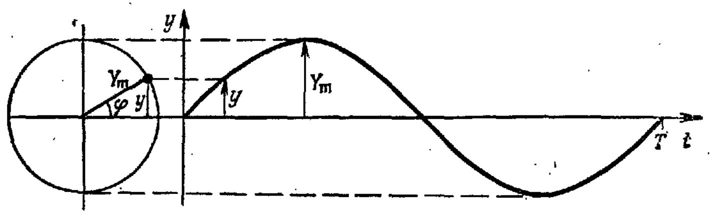
Наиболее важные **величины,** характеризующие колебания:

Отклонение $y = f(t)$	— мгновенное перемещение относительно положения равновесия.
Амплитуда Y_m	— максимальное отклонение, размах колебаний.
Период $T = 1/f$	— длительность полного колебания.
Частота $f = 1/T$	— число колебаний в единицу времени.
Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.	
Фаза $\varphi = \omega t + \varphi_0$.	
Начальная фаза φ_0	— значение фазы при $t = 0$ (начало колебаний).
Время t	— отсчитывается от момента начала колебаний.

В дальнейшем используется понятие фазы. Фаза характеризует мгновенное состояние колебательной системы и определяется двумя параметрами (например, отклонением и временем).

19.1. Незатухающие гармонические колебания

Гармонические колебания можно представить в виде проекции равномерного движения по окружности. Если изобразить графически колебания на диаграмме отклонение — время, то получится синусоидальная кривая. Поэтому часто гармонические колебания называются также синусоидальными колебаниями.



При прохождении положения равновесия, т. е. положения, которое занимает покоящаяся система, колеблющееся тело имеет наибольшую скорость; в точке максимального отклонения (точке поворота) скорость равна нулю.

19.1.1. Уравнение колебаний

При любых колебаниях отклонение системы вызывает появление восстанавливающей силы, которая стремится вернуть систему в положение равновесия. **Линейный закон силы:**

> Гармонические колебания характеризуются следующим соотношением:
> Восстанавливающая сила $F_в$ пропорциональна отклонению y.

Отклонению y отвечает сила F, определяемая жесткостью системы $D = F/y$ (К 19.8), т. е. $F = Dy$. Противоположно направленная восстанавливающая сила равна $F_в = -Dy$. Согласно основному закону динамики (М 7.1),

Восстанавливающая сила = Масса × Ускорение:

$$-Dy = m\ddot{y}.$$

Отсюда после перестановки следует

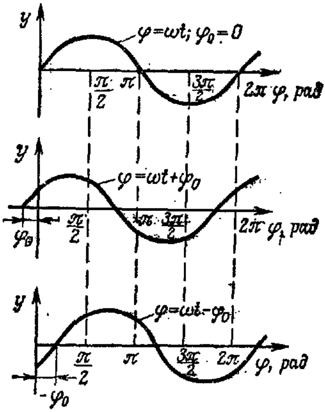
$$\ddot{y} + \frac{D}{m} y = 0.$$

Полагая $D/m = \omega^2$, получаем уравнение незатухающих гармонических колебаний:

(К 19.1) $$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0.}$$

Решение этого дифференциального уравнения дается формулой (К 19.3), что можно доказать, дважды продифференцировав (К 19.3) по t.

19.1.2. Фаза колебаний



Для любых колебаний отклонение y, мгновенная скорость v и мгновенное ускорение a являются функциями времени t, а также фазы φ, поскольку $\varphi = \omega t$ (М 6.54).

При определении фазы необходимо учитывать начальную фазу φ_0, т. е. значение фазы в начальный момент ($t = 0$).

Если
φ — фаза,
φ_0 — начальная фаза,
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,
f — частота,
t — время,

то выполняется соотношение

(К 19.2) $\boxed{\varphi = \omega t + \varphi_0 = 2\pi f t + \varphi_0.}$

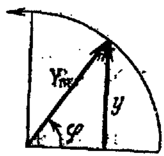
	φ	ω	f	t	φ_0
СИ	рад	1/с	Гц = 1/с	с	рад

Обратите внимание:

- Фаза в (К 19.2) всегда получается в радианах. Пересчет радиан в градусы см. в разд. 6.3.

19.1.3. Отклонение

Если
y — отклонение спустя время t,
Y_m — амплитуда (максимальное отклонение),
φ — фаза,



то решение уравнения колебаний (К 19.1) имеет вид

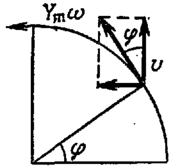
(К 19.3) $\boxed{y = Y_m \sin \varphi.}$

Это же соотношение получается и из геометрического построения, поскольку гармонические колебания можно рассматривать как проекцию равномерного движения по окружности.

Обратите внимание:

- Фаза, определяемая формулой (К 19.2), пересчитывается в градусы следующим образом: $\varphi(^\circ) = \varphi$ (рад) $\cdot 57{,}3^\circ$.

19.1.4. Скорость



Если
v — мгновенная скорость спустя время t,
V_m — максимальная скорость при прохождении среднего положения (амплитуда скоростн),
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,
$\varphi = \omega t + \varphi_0$ — фаза,
t — время,

то, поскольку мгновенная скорость колебательной системы всегда равна вертикальной составляющей скорости движения по окружности $Y_m\omega$, в соответствии с рисунком получаем

$$\cos\varphi = \frac{v}{Y_m\omega}. \quad \text{Согласно (М 6.15),}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}.$$

Из обоих выражений следует

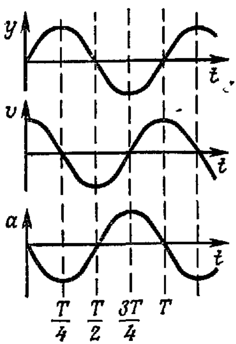
(К 19.4) $$\boxed{v = Y_m \omega \cos\varphi = V_m \cos\varphi.}$$

	v	y	ω
СИ	м/с	м	1/с

В положении равновесия $\varphi = 0°$ или $180°$ и $\cos\varphi = \pm 1$; тогда (К 19.4) принимает вид

(К 19.5) $$\boxed{V_m = Y_m\omega.}$$ Единицы: см. (К 19.4)

19.1.5. Ускорение



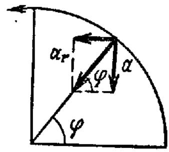
Гармонические колебания представляют собой движение с переменным ускорением, т. е. ускорение не постоянно, а является функцией времени: $a = a(t)$.

Если
a — мгновенное ускорение,
A_m — максимальное ускорение в точке поворота (амплитуда ускорения),
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,
$\varphi = \omega t + \varphi_0$ — фаза,
t — время,

то, поскольку мгновенное ускорение колебательной системы всегда равно вертикальной составляющей центростремительного ускорения $a_r = Y_m\omega^2$, в соответствии с рисунком получаем

$$\sin\varphi = \frac{a}{\omega^2 Y_m}. \quad \text{Согласно (М 6.19),} \quad a = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}.$$

Из обоих выражений следует



(К 19.6) $$\boxed{\begin{aligned} a &= -Y_m\omega^2 \sin\varphi = \\ &= A_m \sin\varphi = \\ &= -\omega^2 y. \end{aligned}}$$

	a	y	ω
СИ	$м/с^2$	м	1/с

В точке поворота $\varphi = 90°$ или $270°$; тогда $\sin\varphi = \pm 1$ и формула (К 19.6) принимает вид

(К 19.7) $$\boxed{A_m = -Y_m\omega^2.}$$ Единицы: см. (К 19.6)

Обратите внимание:

- Знак минус свидетельствует о том, что ускорение направлено противоположно отклонению, т. е. направлено всегда к положению равновесия.

19.2. Собственная частота незатухающих гармонических колебаний

Отличительным признаком гармонических колебаний является пропорциональность восстанавливающей силы отклонению (**линейный закон силы**). Отношение восстанавливающей силы к отклонению наряду с массой колебательной системы определяет собственную частоту.

Если
D — жесткость,
F — сила, вызывающая отклонение y и равная по величине восстанавливающей силе,
y — отклонение,

то аналогично (М 7.5) получаем

(К 19.8) $$\boxed{D = \frac{F}{y}.}$$

	F	D	y
СИ	Н	Н/м	м
КД	Н	Н/см	см
80	кгс	кгс/см	см

Частота гармонических колебаний получается из формулы $D/m = \omega^2$, использованной при выводе уравнения колебаний (К 19.1).

Если
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота,
$f = 1/T$ — частота,
$T = 1/f$ — период, длительность полного колебания,
m — масса колебательной системы,
D — жесткость,

то справедливы следующие соотношения:

(К 19.9)
$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}, \\ f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}. \end{aligned}}$$

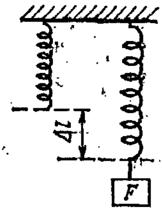
	ω	f	T	D	m
СИ	1/с	Гц = 1/с	с	Н/м	кг

Обратите внимание:

- Чтобы различать затухающие и незатухающие колебания (см. разд. К 19.3), величины ω, f и T для последних часто снабжаются индексом 0.
- Формулы (К 19.9) справедливы для любых незатухающих гармонических колебаний. Жесткость D определяется конкретными свойствами системы.

19.2.1. Линейные колебания пружины

При колебаниях пружины восстанавливающая сила обусловлена ее упругостью. В определенных пределах, согласно закону Гука, вызванная деформацией сила пропорциональна величине деформации. Поэтому упругие колебания являются гармоническими. В случае пружин величина жесткости обычно обозначается через k и именуется коэффициентом упругости пружины.



Если

k — коэффициент упругости пружины,
F — сила, вызывающая деформацию Δl,
Δl — удлинение, прогиб или другое изменение формы,
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота,
$f = 1/T$ — частота,
$T = 1/f$ — период, длительность полного колебания,
m — масса колебательной системы, обычно тела, укрепленного на пружине,

то

(К 19.10)
$$\boxed{k = \frac{F}{\Delta l}}$$

	k	F	l
СИ	Н/м	Н	м
КД	Н/см	Н	см
80	кгс/см	кгс	см

и в соответствии с (К 19.9)

(К 19.11)
$$\boxed{\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}},\\ f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},\\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.\end{aligned}}$$

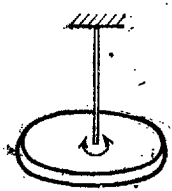
	ω	f	T	k	m
СИ	1/с	Гц = 1/с	с	Н/м	кг

Обратите внимание:

- Масса самой пружины в (К 19.11) не учитывается. При точных расчетах массу m следует увеличить приблизительно на $m_{пр}/3$ ($m_{пр}$ — масса пружины).
- Величины ω, f и T не зависят от амплитуды.

19.2.2. Крутильные колебания

Для крутильных колебаний в принципе справедливы те же закономерности, что и для линейных колебаний. Вместо отклонения y, скорости v и ускорения a используются соответствующие угловые величины: угол поворота φ (не путать с фазой!), угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ (не путать с угловой частотой!) и угловое ускорение $\alpha = \ddot{\varphi}$. Крутильные колебания обусловливаются возникновением **момента силы** M, который должен быть пропорционален углу поворота (углу отклонения).



Если
D^* — угловая жесткость,
M — момент силы,
φ — угол поворота, обусловленный моментом M,
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота,
$f = 1/T$ — частота,
$T = 1/f$ — период, длительность полного колебания,
J — момент инерции тела, совершающего крутильные колебания относительно своей оси,

то выполняются следующие соотношения:

(К 19.12)
$$\boxed{D^* = \frac{M}{\varphi}}$$

	D^*	M	φ
СИ	Н·м	Н·м	рад = 1

и

$$(\text{К 19.13})\quad \boxed{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{D^*}{J}}, \\ f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D^*}{J}}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{D^*}}. \end{aligned}}$$

	ω	f	T	D^*	J
СИ	1/с	Гц = 1/с	с	Н · м	кг · м^2

19.2.3. Колебания маятника

Маятник совершает движение по дуге окружности, при котором момент силы создается силой тяжести.

Математический маятник

Маятник, представляющий собой точечную массу на невесомой нити, нельзя реализовать в действительности. Однако если масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массой m тела и длина нити велика по сравнению с размерами тела, то с достаточной точностью выполняется формула (К 19.14). Математический маятник совершает гармонические колебания, если угол отклонения не превышает примерно 8°.

Если
$T = 1/f$ — период, длительность полного колебания,
l — длина маятника, расстояние от точки подвеса до центра масс,
g = 9,81 м/с^2 (на Земле) — ускорение свободного падения,

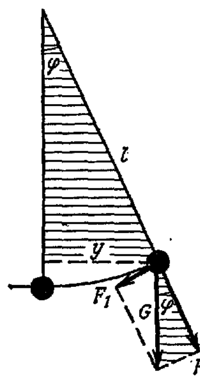
то $F_1/G = y/l$, и, поскольку величину y при малом угле отклонения φ можно приравнять длине дуги, аналогично (К 19.8) получаем

$$D = \frac{F_1}{y} = \frac{G}{l} = \frac{mg}{l};$$

подстановка в (К 19.9) дает

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}, \text{ или}$$

$$(\text{К 19.14})\quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.}$$



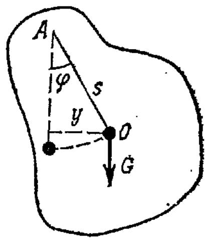
	T	l	g
СИ	с	м	м/с^2

Обратите внимание:

- Период T не зависит от массы тела.
- В указанных пределах ($\varphi < 8°$) период не зависит от амплитуды.

Физический маятник

Маятник, для которого не выполняются условия, определяющие математический маятник, называется физическим маятником (т. е. маятником с распределенной массой).



Если
$T = 1/f$ — период,
J_A — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса A,
m — масса тела,
s — расстояние от точки подвеса A тела до его центра масс O,

то аналогично (К 19.12)

$$D^* = \frac{M}{\varphi} = \frac{Gy}{\varphi} = \frac{Gs \sin\varphi}{\varphi},$$

или, поскольку при малых углах $\sin\varphi/\varphi \approx 1$,

$$D^* = Gs = mgs$$

и аналогично формуле (К 19.13)

(К 19.15) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}}.}$$

	T	J	m	g	s
СИ	с	кг·м²	кг	м/с²	м

Обратите внимание:

- Выражение (К 19.15) справедливо только для амплитуд меньше $\sim 8°$.
- J_A определяется с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера.
- При $J_A = ms^2$ и $l = s$ получается формула для периода мате- математического маятника (К 19.14).

Приведенная длина маятника

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника с тем же периодом колебаний.

Если
l' — приведенная длина маятника,
J_A — момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса A,
m — масса физического маятника,
s — расстояние от центра масс O до точки подвеса A,

то в соответствии с (К 19.14) и (К 19.15)

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}},$$

или

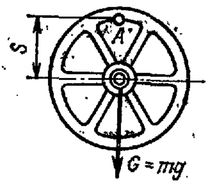
(К 19.16) $$\boxed{l'=\frac{J_A}{ms}.}$$

	l'	J	m	s
СИ	м	кг · м²	кг	м

Обратите внимание:

- На расстоянии l' по вертикали под точкой подвеса вращающегося тела находится **центр качаний.** Усилие, возбуждающее колебания маятника, следует прилагать к этой точке, чтобы избежать реакции в точке подвеса.
- Период колебаний физического маятника не изменится, если поменять местами точку подвеса и центр качаний. Этот принцип используется **в оборотном маятнике,** например, для определения ускорения свободного падения.

Определение момента инерции



С помощью формулы (К 19.15) можно экспериментально определить момент инерции любого тела путем измерения величин s, m и T.

Из формул (К 19.15) и (М 7.55) следует

$$J_O=\frac{mgsT^2}{4\pi^2}-ms^2,\quad \text{или}$$

(К 19.17) $$\boxed{J_O=ms\left(\frac{gT^2}{4\pi^2}-s\right).}$$

	J	m	g	s	T
СИ	кг · м²	кг	м/с²	м	с

Обратите внимание:

- Для определения J_O необходимо подвесить тело в точке, не совпадающей с O, и возбудить его колебания с малой амплитудой.

19.2.4. Энергия колебаний

Энергия системы, колеблющейся без затухания, остается постоянной. Она складывается из потенциальной энергии $W_п$ и кинетической энергии $W_к$. Величины обеих энергий меняются периодически, но в каждый момент $W = W_п + W_к$. Используя (М 7.23) и (М 7.24), получаем

$$W=\frac{Dy^2}{2}+\frac{mv^2}{2}.$$

Если
W — энергия колебательной системы,
D — жесткость,
Y_m — амплитуда, максимальное отклонение,
$\varphi = \omega t + \varphi_0$ — фаза,
то, используя (К 19.3) и (К 19.4), получаем

$$W = \frac{D}{2} Y_m^2 \sin^2\varphi + \frac{m}{2} Y_m^2 \omega^2 \cos^2\varphi.$$

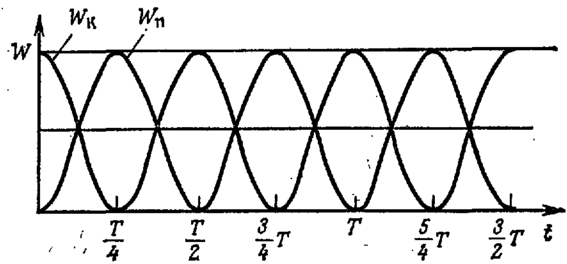
Поскольку $\omega^2 = D/m$, имеем

$$W = \frac{D}{2} Y_m^2 \sin^2\varphi + \frac{D}{2} Y_m^2 \cos^2\varphi$$

и окончательно

(К 19.18)
$$\boxed{W = \frac{D}{2} Y_m^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \frac{DY_m^2}{2} = \frac{mV_m^2}{2}.}$$

	W	D	y	v	m
СИ	Дж = Н·м	Н/м	м	м/с	кг



Обратите внимание:

- В процессе колебаний потенциальная энергия превращается в кинетическую и наоборот. При этом полная энергия остается постоянной. Процесс перехода энергии из одного вида в другой носит периодический характер.
- В точке поворота и при прохождении положения равновесия энергия одного вида равна нулю, в то время как энергия другого вида достигает максимума.

19.3. Свободные затухающие колебания

Вследствие внутреннего трения, сопротивления воздуха и т. п. энергия W колебательной системы постепенно уменьшается. Поскольку $W \sim Y_m^2$ (К 19.19), амплитуда Y_m уменьшается до нуля.

Затуханием называется постепенное уменьшение амплитуды в процессе колебаний.

19.3.1. Уравнение колебаний

Затухание вызывается силой, которая пропорциональна скорости и направлена противоположно ей: $F \sim -v$. Коэффициент пропорциональности называют **коэффициентом вязкого трения** β, т. е. $F = -\beta v = -\beta \dot{y}$.

Единица СИ коэффициента трения: $[\beta] = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$.

Если
y — отклонение,
$\dot{y}$ — скорость,
$\ddot{y}$ — ускорение,
β — коэффициент трения,
$\delta = \beta/2m$ — коэффициент затухания,
$\omega_0 = 2\pi f_0$ — собственная угловая частота незатухающих колебаний,

то основное уравнение динамики (М 7.1) в этом случае гласит:

Восстанавливающая сила + Сила, вызывающая затухание = = Масса $\times$ Ускорение,

$$-Dy - \beta\dot{y} = m\ddot{y}.$$

Отсюда следует

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0.$$

Обозначая

$$\frac{\beta}{m} = 2\delta \quad \text{и} \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2,$$

получаем

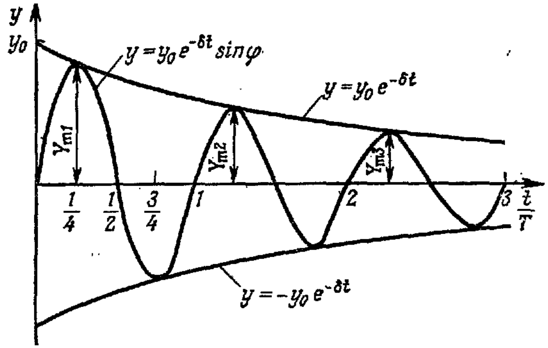
(К 19.19) $\boxed{\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.}$ **дифференциальное уравнение затухающих колебаний.**

Обратите внимание:

- В случае внутреннего (вязкого) трения сила, вызывающая затухание, оказывается с достаточной точностью пропорциональной скорости.
- Внешнее (сухое) трение не зависит от скорости и приводит к иному закону затухания, который не описывается уравнением (К 19.19).

19.3.2. Отклонение

Если
y — отклонение,
y_0 — начальная амплитуда,
e = 2,718... — основание натуральных логарифмов,
$\delta = \beta/2m$ — коэффициент затухания,
t — время,
$\varphi = \omega_{зат}t + \varphi_0$ — фаза,



то решение дифференциального уравнения (К 19.19) имеет вид

(К 19.20) $\boxed{y = y_0 e^{-\delta t}\sin\varphi.}$

	y	y_0	δ	t
СИ	м	м	1/с	с

Обратите внимание:

- Амплитуда экспоненциально уменьшается со ременем.
- Угловая частота $\omega_{зат}$ в определении фазы вычисляется по формуле (К 19.25).

Отношение двух последовательных значений амплитуды остается постоянным. Эти численные значения амплитуд образуют убывающую геометрическую прогрессию.

Если
k — отношение амплитуд,
$\delta = \beta/2m$ — коэффициент затухания,
T — период затухающих колебаний,
Λ — логарифмический декремент,
n — любое целое число,

то $Y_{m,\,i}/Y_{m,\,i+1} = k$. Следовательно, n-я амплитуда определяется формулой

(К 19.21) $\boxed{Y_{m,\,i+n} = \dfrac{Y_{m,\,i}}{k^n}.}$

Поскольку промежуток времени между двумя последовательными амплитудами равен периоду T, из (К 19.20) получаем

(К 19.22) $$\boxed{e^{\delta T} = \frac{Y_{m,\,i}}{Y_{m,\,i+1}},}$$

или

(К 19.23) $$\boxed{e^{n\,\delta T} = \frac{Y_{m,\,i}}{Y_{m,\,i+n}}.}$$

	δ	T
СИ	1/с	с

Показатель экспоненты δT называется **логарифмическим декрементом** Λ. Логарифмирование формулы (К 19.22) дает

(К 19.24) $$\boxed{\Lambda = \delta T = \ln\frac{Y_{m,\,i}}{Y_{m,\,i+1}}.}$$

	Λ	δ	T
СИ	—	1/с	с

Обратите внимание:

- Логарифмический декремент Λ представляет собой натуральный логарифм отношения амплитуд k.

19.3.3. Собственная частота

Если

$\omega_{зат} = 2\pi f_{зат} = 2\pi/T_{зат}$ — угловая частота затухающих колебаний,

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{D/m}$ — угловая частота незатухающих колебаний,

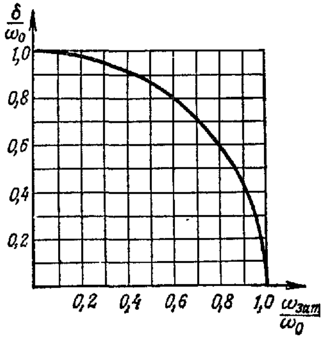
$\delta = \beta/2m$ — коэффициент затухания,

то выражение (К 19.20) будет решением дифференциального уравнения (К 19.19) только при условии

(К 19.25) $$\boxed{\omega_{зат} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.}$$

	ω	δ
СИ	1/с	1/с

В любой колебательной системе затухание приводит к уменьшению частоты и соответственно увеличению пеиода колебаний.

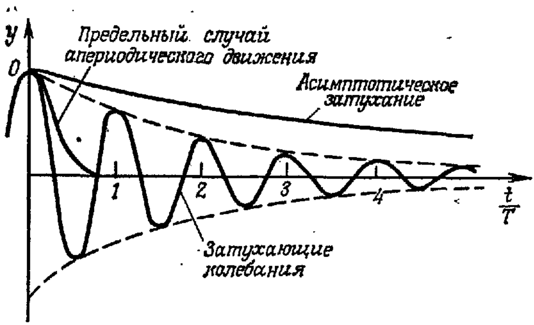


Обратите внимание:

- Частота затухающих колебаний меньше частоты незатухающих колебаний. Она не зависит от амплитуды и поэтому не изменяется в процессе колебаний.
- В большинстве практических случаев величины $\omega_{зат}$ и ω_0 и соответственно $T_{зат}$ и T_0 различаются лишь на доли процента.

19.3.4. Апериодическое движение

Колебания будут затухающими, если в формуле (К 19.25) $\omega_0 > \delta$. Если же $\omega_0 < \delta$, то колебательная система после однократного возмущения асимптотически возвращается в состояние покоя (**асимптотическое затухание**); быстрее всего это происходит при $\omega_0 = \delta$ (**предельный случай апериодического движения**).



Справочная таблица

Незатухающие колебания	$\delta = 0$	$\beta = 0$	
Затухающие колебания	$\delta < \omega_0$	$\beta < 2\sqrt{mD}$	$\omega < \omega_0$
Предельный случай апериодического движения	$\delta = \omega_0$	$\beta = 2\sqrt{mD}$	$\omega = 0$
Асимптотическое затухание	$\delta > \omega_0$	$\beta > 2\sqrt{mD}$	ω — мнимая величина

Обратите внимание:

- В технике часто бывает необходимо предотвратить появление колебаний системы (например, в электрических измерительных устройствах). Для этого следует предусмотреть такое демпфирование (например, демпфирование вихревого тока), чтобы имел место предельный случай апериодического движения.

  Внимание! Для достижения такого демпфирования нельзя использовать внешнее (сухое) трение (например, в опорах), поскольку последнее не зависит от скорости: колебательная система будет «замирать» вблизи положения равновесия. Это имеет место у весов, пружин амортизаторов и т. п.

19.4. Вынужденные колебания

В том случае, когда колебательная система после того, как ей сообщили отклонение, колеблется в дальнейшем сама по себе, говорят о **свободных колебаниях**.

Если же на систему с помощью связи действует извне периодическая сила, которая вызывает колебания системы, то говорят о **вынужденных колебаниях.**

19.4.1. Уравнение колебаний

На колебательную систему действуют три силы:

- восстанавливающая сила $F_{восст} = -Dy$,
- сила, вызывающая затухание $F_{зат} = -\beta\dot{y}$,
- возмущающая сила $F_{возм} = F_{m\,возм}\cos\omega t$.

Основной закон динамики в этом случае гласит:

$$F_{возм} + F_{восст} + F_{зат} = ma = m\ddot{y}.$$

Если

y — отклонение,
$\dot{y}$ — скорость,
$\ddot{y}$ — ускорение,
m — масса колебательной системы,
D $= F/y$ — жесткость,
β — коэффициент трения,
δ $= \beta/2m$ — коэффициент затухания,
$F_{m\,возм}$ — максимальное значение возмущающей силы,
ω — угловая частота колебаний возмущающей силы,
ω_0 — угловая частота незатухающих колебаний системы,
t — время,

то

$$F_{m\,возм}\cos\omega t - Dy - \beta\dot{y} = m\ddot{y},$$

или после подстановки $\beta/m = 2\delta$ и $D/m = \omega_0^2$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_{m\,возм}}{m}\cos\omega t.} \quad \text{(К 19.26)}$$

19.4.2. Отклонение

После начала действия возмущающей силы (которую часто называют также возбуждающей силой) необходимо некоторое время, прежде чем колебания установятся. Тогда говорят, что система находится в установившемся состоянии, которое описывается следующими уравнениями:

Если

y — отклонение в момент времени t,
Y_m — амплитуда колебаний системы,
$F_{m\,возм}$ — максимальное значение возмущающей силы,

ω_0 — угловая частота собственных колебаний системы (резонатора) в отсутствие затухания,
ω — угловая частота колебаний возмущающей силы и установившихся колебаний системы,
m — масса колебательной системы (резонатора),
α — фазовый сдвиг резонатора относительно возмущающей силы,
β — коэффициент трения,
δ $= \beta/2m$ — коэффициент затухания,
t — время,

то решение дифференциального уравнения (К 19.26), отвечающее установившимся колебаниям системы, имеет вид

(К 19.27) $$\boxed{y = Y_m \cos(\omega t - \alpha);}$$

	y	F	m	ω	β
СИ	м	Н	кг	1/с	кг/с

при этом

(К 19.28) $$\boxed{Y_m = \frac{F_{m\,\text{возм}}}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2}}}$$

и

(К 19.29) $$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\omega\beta}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = \operatorname{arctg}\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}.}$$

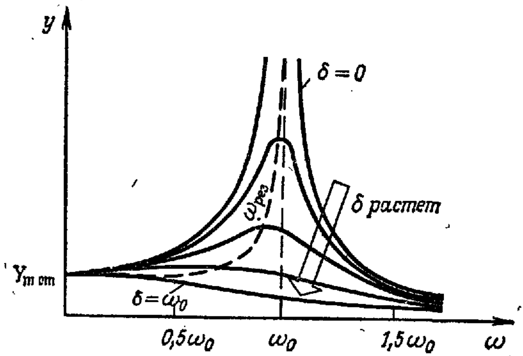
Обратите внимание:

- Амплитуда Y_m колебаний в случае резонатора с затуханием сильно зависит от частоты колебаний возмущающей силы ω и коэффициента трения β и, если $\omega \to \omega_0$ и $\beta \to 0$, может еще до установления колебаний оказаться больше значения, допускаемого механическими условиями.
- Наличие разности фаз указывает на то, что колебания резонатора отстают по фазе от колебаний возмущающей силы, поскольку $\beta \neq 0$ (случай $\beta = 0$ возможен лишь теоретически).
- Частота вынужденных колебаний совпадает с частотой возмущающей силы.

19.4.3. Резонанс

При заданных возмущающей силе $F_{m\,\text{возм}}$ и коэффициенте трения β амплитуда Y_m является функцией только угловой частоты возмущающей силы. При $\omega \approx \omega_0$ она достигает особенно большого значения (**резонанс**). На рисунке показана зависимость Y_m от ω (резонансная кривая). Параметром служит коэффициент затухания δ. При самых малых значениях δ величина Y_m резко возрастает. Если

$\delta > 0$, то в случае резонанса $\omega < \omega_0$; величина $Y_{m\,ст}$ представляет собой статическое отклонение системы под действием постоянной силы $F_{m\,возм}$ $(\omega = 0)$.



Для определения резонансной частоты необходимо найти максимум функции $Y_m = Y_m(\omega)$ и приравнять первую производную нулю; тогда, если

$\omega_{рез}$ — резонансная частота, при которой амплитуда максимальна,
ω_0 — частота собственных незатухающих колебаний системы,
m — масса колебательной системы,
β — коэффициент трения,
δ $= \beta/2m$ — коэффициент затухания,

то для **резонансной частоты** получим

(К 19.30) $$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2};}$$

	ω	m	β	δ
СИ	1/с	кг	кг/с	1/с

Обратите внимание:

- Резонансная частота $\omega_{рез}$ несколько меньше частоты ω собственных колебаний системы с затуханием (К 19.25).
- При $\delta \geqslant \omega_0/\sqrt{2}$ явление резонанса совершенно исчезает. В этом случае при любой частоте возмущающей силы амплитуда колебаний меньше статического отклонения.

Чтобы найти величину амплитуды в резонансном случае, нужно подставить (К 19.30) в (К 19.28).

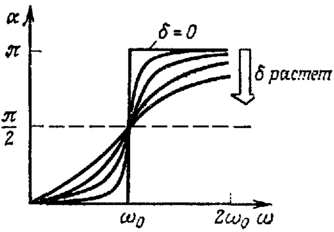
Если
$Y_{m\,рез}$ — резонансная амплитуда,
$F_{m\,возм}$ — максимальное значение возмущающей силы,
m — масса колебательной системы,
ω_0 — частота собственных незатухающих колебаний системы,
ω $=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ — частота колебаний системы с затуханием,
β — коэффициент трения,
δ $=\beta/2m$ — коэффициент затухания,
Λ — логарифмический декремент,

то имеем

(К 19.31) $$\boxed{Y_{m\,рез}=\frac{F_{m\,возм}}{\beta\sqrt{\omega_0^2-\frac{\beta^2}{4m^2}}}=\frac{F_{m\,возм}}{\beta\omega}=\frac{F_{m\,возм}}{2\,\delta m\omega}.}$$

Единицы: см. (К 19.28) и (К 19.30)

Согласно формуле (К 19.29), разность фаз α также зависит от частоты возмущающей силы. На рисунке представлена зависимость α от частоты. Параметром служит коэффициент δ.



Независимо от величины затухания при $\omega=\omega_0$ разность фаз составляет $\alpha=(\pi/2)$ рад $=90°$.

Явление резонанса играет большую роль в технике и повседневной жизни. В большинстве механических устройств под действием внешних периодических сил могут возникать колебания. При резонансе происходит нарастание амплитуды колебаний, и это может привести к разрушениям («резонансная катастрофа»). В случае вращательного движения резонансную частоту называют **критическим числом оборотов**.

Чтобы предотвратить возникновение колебаний со слишком большой амплитудой, следует:

- по возможности устранять периодически действующие силы,
- добиваться большой разности собственной частоты и частоты возбуждающей силы,
- добиваться того, чтобы частота принимала резонансное значение лишь на время, меньшее одного периода колебаний,
- применять демпфирующие элементы.

19.5. Сложение колебаний

Любая колебательная система может одновременно совершать несколько колебаний. Отдельные колебания при этом складываются в результирующее колебание. Сложение колебаний основано на

принципе суперпозиции

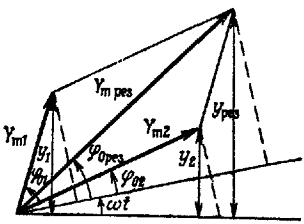
Если тело совершает несколько колебаний, то эти колебания складываются независимо друг от друга, т. е. не влияя друг на друга.

Поскольку отклонения и амплитуды представляют собой векторы, их результирующие можно вычислять известными методами как графически, так и алгебраически. Следует различать:

- сложение колебаний, происходящих в одном направлении,
- сложение колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.

19.5.1. Колебания, происходящие в одном направлении с одинаковой частотой

При наложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении с одинаковой частотой, возникает гармоническое колебание с той же частотой, а его амплитуда зависит от амплитуд и начальных фаз отдельных колебаний.



Результирующее отклонение в каждый момент времени равно алгебраической сумме составляющих отклонений

Если

Y_{m1}, y_1, φ_{01}	— амплитуда, отклонение и начальная фаза колебаний 1,
Y_{m2}, y_2, φ_{02}	— амплитуда, отклонение и начальная фаза колебаний 2,
ω	— частота колебаний,
t	— продолжительность колебаний,
$Y_{m\,рез}$, $y_{рез}$, $\varphi_{0\,рез}$	— амплитуда, отклонение и начальная фаза результирующих колебаний,

то

$$y_{рез} = y_1 + y_2 = Y_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{01}) + Y_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{02}).$$

Многократно применяя теорему сложения, получаем

(К 19.32) $\boxed{y_{рез} = Y_{m\,рез} \sin(\omega t + \varphi_{0рез});}$

при этом

(К 19.33) $\boxed{Y_{m\,рез} = \sqrt{Y_{m1}^2 + Y_{m2}^2 + 2Y_{m1}Y_{m2}\cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}}$

и

(К 19.34) $$\boxed{\varphi_{0\ \text{рез}} = \operatorname{arctg} \frac{Y_{m1} \sin \varphi_{01} + Y_{m2} \sin \varphi_{02}}{Y_{m1} \cos \varphi_{01} + Y_{m2} \cos \varphi_{02}}.}$$

Обратите внимание:

- На рисунке амплитуды представлены векторами. Их направления соответствуют начальным фазам. В течение времени t они поворачиваются на один и тот же угол ωt, поскольку колебания имеют одинаковую частоту. Представление колебаний с помощью вращающихся векторов называется **векторной диаграммой**. Оно позволяет находить амплитуду и отклонение, не прибегая к математическим выкладкам.

В частном случае равных амплитуд ($Y_{m1} = Y_{m2}$) выражения (К 19.33) и (К 19.34) упрощаются:

(К 19.35) $$\boxed{Y_{m\ \text{рез}} = 2Y_{m1} \cos \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}}$$

и

(К 19.36) $$\boxed{\varphi_{0\ \text{рез}} = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}.}$$

Для разности начальных фаз $\Delta\varphi = 0$ или π получаем следующие

Частные случаи

Условия		Результат
$Y_{m1} = Y_{m2}$	$\Delta\varphi = 0$	Отклонения удваиваются
$Y_{m1} \neq Y_{m2}$	$\Delta\varphi = 0$	Отклонения суммируются
$Y_{m1} = Y_{m2}$	$\Delta\varphi = \pi$	Оба колебания взаимно уничтожаются
$Y_{m1} \neq Y_{m2}$	$\Delta\varphi = \pi$	Отклонения вычитаются

Обратите внимание:

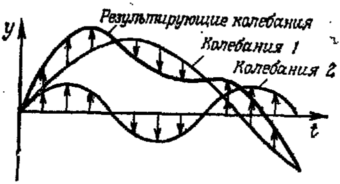
- $\Delta\varphi = \varphi_{01} - \varphi_{02}$.

19.5.2. Колебания, происходящие в одном направлении с разными частотами

При сложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении с разными частотами, возникает **негармоническое колебание**.

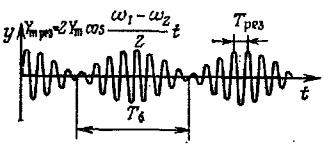
Обратите внимание:

- В рассматриваемом случае результирующее отклонение в каждый момент времени также равно алгебраической сумме отклонений составляющих колебаний.
- С другой стороны, любые негармонические колебания можно рассматривать как результирующее ряда гармонических колебаний и разложить его на эти составляющие. Соответствующий математический прием носит название **анализа Фурье.**



При упрощающем предположении $Y_{m1} = Y_{m2}$ и $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ в результате сложения двух колебаний с **близкими частотами** возникают **биения.**

Если
ω_1 — частота колебаний 1,
ω_2 — частота колебаний 2,
Y_m — амплитуда обоих колебаний,
$y_{рез}$ — отклонение, отвечающее результирующим колебаниям,
t — время,



то

$$y_{рез} = y_1 + y_2 = Y_m(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t).$$

Отсюда с помощью теоремы сложения получаем

$$\text{(К 19.37)}\quad \boxed{y_{рез} = 2Y_m\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right).}$$

Обратите внимание:

- Биения представляют собой колебания с усредненной частотой $(f_1+f_2)/2$. Амплитуда биений периодически изменяется от максимального значения $2Y_m$ до минимального значения 0.
- При каждом обращении амплитуды в нуль фаза скачком меняется на π.

Периодом биений $T_б$ называют промежуток между соседними моментами времени, в которые амплитуда обращается в нуль. Поскольку при аргументе, равном $\pi/2$, $3\pi/2$..., косинус обращается в нуль, имеем

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}T_б = \pi.$$

Отсюда при $\omega = 2\pi f$ следует

$$\frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2} = f_б \pi.$$

Решая это уравнение относительно частоты биений, получаем

(К 19.38) $\boxed{f_б = f_1 - f_2.}$

Частота биений $= \dfrac{\text{Число минимумов амплитуды}}{\text{Время}}$ равна разности частот составляющих колебаний.

Из (К 19.38) при $T_б = 1/f_б$ получаем

$$T_б = \frac{1}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}}$$

и после преобразования имеем

(К 19.39) $\boxed{T_б = \dfrac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}.}$

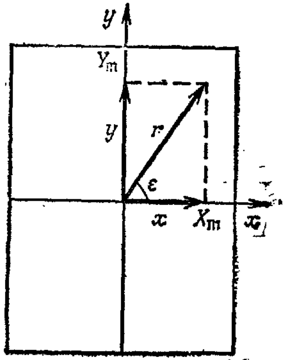
Частота результирующих колебаний получается из (К 19.37):

(К 19.40) $\boxed{f_{рез} = \dfrac{f_1 + f_2}{2} = \bar{f}.}$

Отсюда находим период результирующих колебаний $T_{рез} = 1/f_{рез}$

(К 19.41) $\boxed{T_{рез} = \dfrac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}.}$

19.5.3. Колебания, происходящие в разных направлениях



Пусть система участвует в колебаниях, которые происходят в двух направлениях, а именно вдоль осей x и y прямоугольной системы координат:

$$x = X_m \sin(\omega_x t + \varphi_{0x}),$$
$$y = Y_m \sin(\omega_y t + \varphi_{0y}).$$

Результирующее отклонение в момент t определяется как векторная сумма.

Если

r — результирующее отклонение в момент времени t,

x, y — отклонения составляющих колебаний в момент времени t,
ε — угол между результирующим отклонением и положительным направлением оси x,

то

(К 19.42) $$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

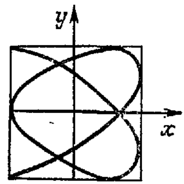
и

(К 19.43) $$\boxed{\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.}$$

Обратите внимание:

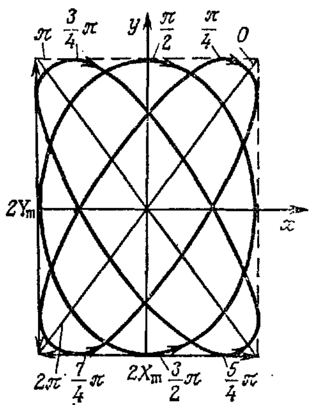
- Величины r и ε представляют собой полярные координаты результирующего отклонения.

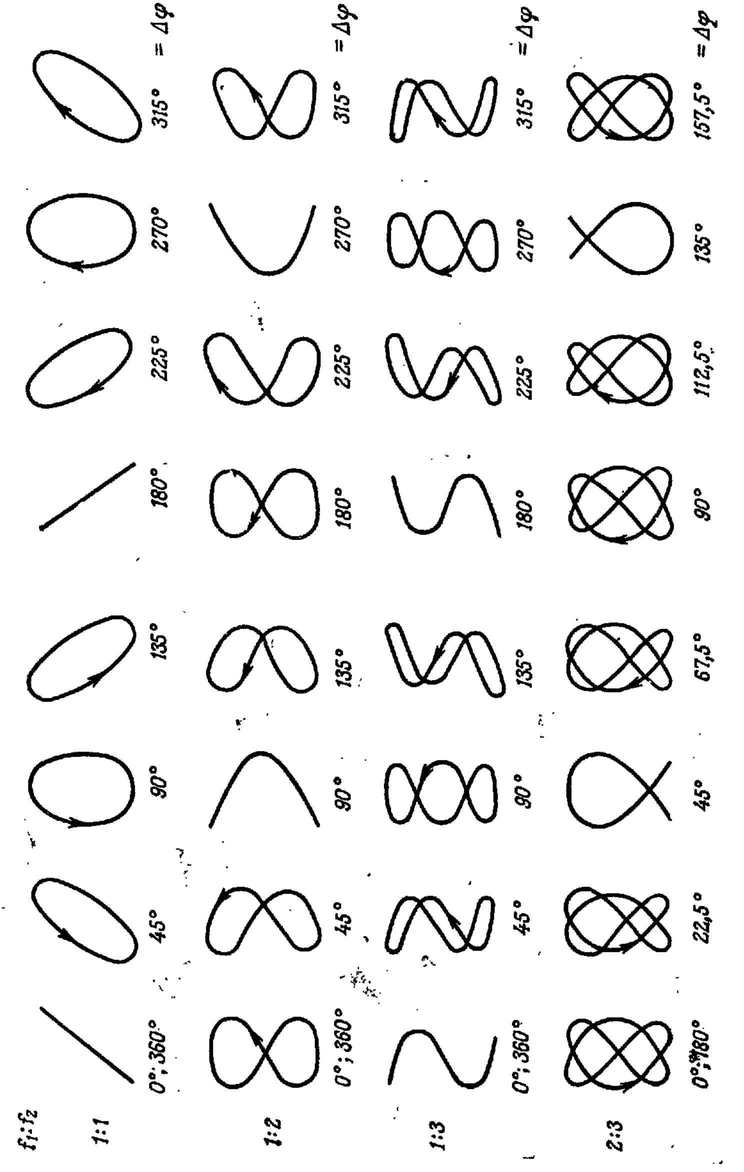
Если соединить результирующие отклонения в различные моменты времени линией, то получится траектория результирующих колебаний (в плоскости x, y). При этом возникают сложные кривые, которые называются **фигурами Лиссажу**. Лишь в случае одинаковых частот получаются эллипсы с различным эксцентриситетом (включая прямую и окружность).



Частные случаи (для $f_1 = f_2$)

Условия	Результат
$\Delta\varphi = 0$	Прямая
$0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$	Наклонный эллипс
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$	Эллипс
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, $Y_m = X_m$	Окружность
$\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$	Наклонный эллипс
$\Delta\varphi = \pi$	Прямая





$f_1 : f_2$
1:1
1:2
1:3
2:3
$\Delta\varphi =$
0°; 360°
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
0°; 180°
22,5°
45°
67,5°
90°
112,5°
135°
157,5°

Обратите внимание:

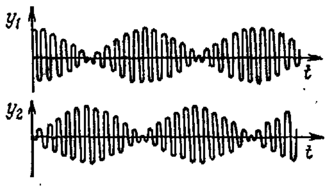
- При разности фаз $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ возникают аналогичные фигуры, но направление обхода меняется на противоположное.
- Фигура Лиссажу остается неизменной, если отношение частот представляет собой рациональное число; в противном случае траектории не повторяются и фигура Лиссажу непрерывно изменяется.
- Форма фигуры Лиссажу зависит от отношения частот и разности начальных фаз.

19.6. Связанные колебания

Связанные колебательные системы влияют друг на друга. Колебания таких систем уже не будут независимы, поскольку системы обмениваются энергией. Связь может быть обусловлена

- упругостью,
- трением,
- инерцией.

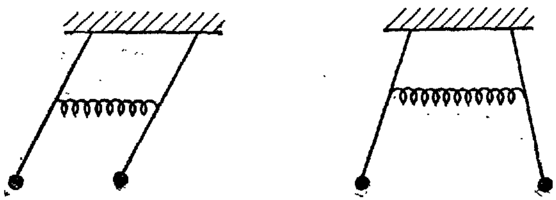
Если одной из систем сообщили энергию и она совершает колебательное движение, то постепенно она передает свою энергию второй системе. Скорость передачи энергии зависит от того, насколько сильна связь, т. е. от степени связи $\varkappa$. Если у обеих систем одинаковая собственная частота, то после того, как система 1 придет в состояние покоя (ее энергия обратится в нуль), изменится направление потока энергии. Обе системы будут совершать биения, сдвинутые по времени на $T_б/2$.



Биения возникают в результате сложения **собственных (нормальных) колебаний** обеих систем.

Имеются два возможных типа колебаний связанных систем, при которых устанавливается обмен энергией:

- Системы колеблются в фазе (синфазно). Наличие связи не меняет частоты, и обе системы колеблются с частотой $f_1 = f_0$.



- Системы колеблются в противофазе ($\Delta\varphi = \pi$). Из-за дополнительной жесткости $D_{св}$, обусловленной наличием связи, частота колебаний уменьшается. Обе системы колеблются в этом случае с частотой f_2.

Если
D — жесткость системы 1, равная жесткости системы 2,
$D_{св}$ — дополнительная жесткость, обусловленная связью,
m — масса системы 1, равная массе системы 2,

то для частот f_1 и f_2 собственных колебаний получаем

(К 19.44)
$$\boxed{f_1 = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D + 2D_{св}}{m}}.}$$

	f	D	m
СИ	Гц	Н/м	кг

Жесткости систем или периоды $T = 1/f$ собственных колебаний определяют **степень связи**

(К 19.45)
$$\boxed{\varkappa = \frac{D}{D + D_{св}} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}.}$$

Обратите внимание:

- Выражения (К 19.44) и (К 19.45) справедливы только для случая, когда массы, собственные частоты и жесткости систем одинаковы.

20. Механические волны

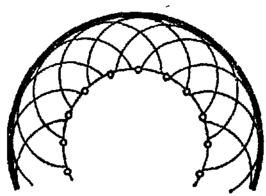
Механическая волна представляет собой колебательный процесс в упругой среде. Такая среда состоит из большого числа связанных друг с другом частиц, совершающих колебания. Если возбуждаются колебания одной из частиц, то она становится центром распространяющейся волны. Кинематическим признаком волнового движения служит распространение фазы колебаний, динамическим — перенос энергии. Скорость обоих этих процессов представляет собой фазовую скорость, или скорость распространения волны.

20.1. Распространение волн

20.1.1. Принцип Гюйгенса

Распространение волн легко понять и объяснить, если обратиться к принципу Гюйгенса.

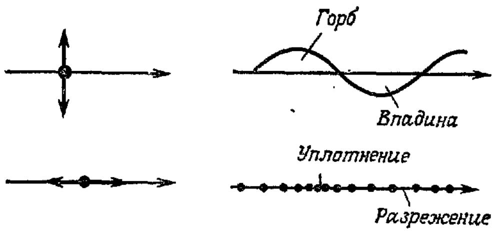
Каждая точка среды, вовлеченная в волновое движение, становится источником новой волны, называемой элементарной волной.



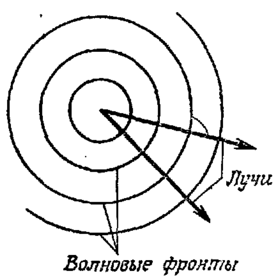
Наблюдаемый волновой фронт представляет собой результат сложения множества элементарных волн. Принцип Гюйгенса справедлив для всех видов волн, в том числе и для электромагнитных.

20.1.2. Типы волн

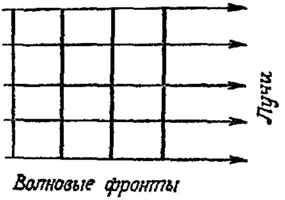
Волны, у которых направление скорости движения частиц перпендикулярно направлению фазовой скорости, называются **поперечными**

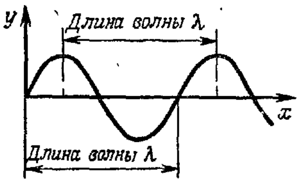


волнами. У этих волн происходит чередование **горбов** и **впадин.** Если направления скорости колебаний и фазовой скорости совпадают, то волны называются **продольными.** У этих волн чередуются области сгущения и разрежения. В соответствии с характером распространения различают **линейные, поверхностные** и **пространственные,** или одно-, двух- и трехмерные волны. Направление распространения волны называют **лучом. Волновой фронт** перпендикулярен лучу. Волновой фронт представляет собой геометрическое место всех частиц, колеблющихся с одинаковой фазой. У поверхностных и пространственных волн, распространяющихся из точечного центра возбуждения, лучи направлены **радиально,** а волновые фронты представляют собой соответственно окружности и сферы. В случае плоского или удаленного источника возникают плоские волны. В них лучи параллельны, а волновые фронты представляют собой плоскости. Расстояние между соседними волновыми фронтами называется **длиной волны** λ.



Длина волны есть расстояние между частицами, колеблющимися с одинаковой фазой. Длина волны не зависит ни от координаты, ни от времени.





Если
c — фазовая скорость, или скорость распространения волны,
f — частота, с которой колеблется каждая частица в волне,
$T = 1/f$ — период, продолжительность полного колебания частицы,
λ — длина волны, расстояние между частицами, колеблющимися с одинаковой фазой,

то в соответствии с (М 6.1) $c = \lambda/T$, или

(К 20.1) $$\boxed{c = \lambda f.}$$

	c	λ	f
СИ	м/с	м	Гц = 1/с

Обратите внимание:

- Выражение (К 20.1) справедливо для всех волн, в том числе и электромагнитных.

Специальные уравнения для определения фазовой скорости в различных средах см. в разд. 20.2.3.

20.2. Линейные синусоидальные волны

Предположим, что волны возбуждаются гармоническими колебаниями и при распространении волн в среде отсутствуют потери энергии.

20.2.1. Волновое уравнение

При использовании ряда исходных предположений, которые мы здесь не упоминаем, для любых механических волн получается следующее волновое уравнение в частных производных:

(К 20.2) $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.}$$

Обратите внимание:

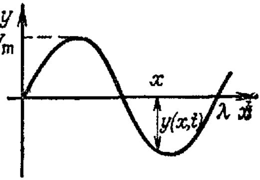
- Согласно уравнению (К 20.2), вторая производная отклонения по времени пропорциональна второй производной по координате.
- Коэффициент c характеризует свойства среды (упругость, плотность и др.). Он совпадает с фазовой скоростью.

20.2.2. Отклонение

Чтобы найти решение уравнения (К 20.2), делают подстановку $y = y\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$.

Если
y — отклонение частицы в точке x в момент времени t,
Y_m — амплитуда возбуждающего колебания и волны,
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота,
t — время,
x — расстояние от источника, пройденное волной расстояние,
c — фазовая скорость,
T — период колебаний,
λ — длина волны,

то



(К 20.3) $$\boxed{y = Y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right).}$$

Данная фаза колебания достигает точки, находящейся на расстоянии x, за время, равное $\frac{\text{Путь } x}{\text{Скорость } c}$. Следовательно, при вычислении отклонения из времени t следует вычесть величину x/c.

При $f = 1/T$ и $f/c = 1/\lambda$ из (К 20.3) следует

(К 20.4) $$\boxed{y = Y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).}$$

Обратите внимание:

- Выражения (К 20.3) и (К 20.4) справедливы для распространения волны в положительном направлении оси x. При распространении в обратном направлении значения x отрицательны и в скобках будет стоять сумма.

Выражение (К 20.4) позволяет определить важный признак волны:

▌ Волна — это периодический процесс во времени и пространстве,

20.2.3. Фазовая скорость

Фазовая скорость зависит от механических свойств среды.

Если
c — фазовая скорость,
F — сила натяжения струны, проволоки или др.,
A — поперечное сечение струны, проволоки или др.,
E — модуль упругости (модуль Юнга, см. табл. 9),
$K = 1/\varkappa$ — модуль всестороннего сжатия,
$\varkappa$ — сжимаемость для жидкостей (см. табл. 4), показатель адиабаты для газов (см. табл. 18),
ρ — плотность (см. табл. 1),

то для **упругой поперечной волны в твердых телах**

(К 20.5) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}};}$$

	c	F	ρ	A
СИ	м/с	Н	кг/м³	м²

для **упругой продольной волны в твердых телах**

(К 20.6) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}};}$$

	c	E	ρ
СИ	м/с	Н/м²	кг/м³

для **продольной волны в жидкостях**

(К 20.7) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa\rho}};}$$

	c	K	$\varkappa$	ρ
СИ	м/с	Па = Н/м²	м²/Н	кг/м³

для **продольной волны в газах**

(К 20.8) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}.}$$

	c	$\varkappa$	p	ρ
СИ	м/с	—	Па = Н/м²	кг/м³

20.2.4. Отражение

При полном или частичном отражении одномерной волны (например, колебаний струны) на границе среда 1 — среда 2 фаза скачком изменяется на π, если среда 2 является более «плотной», т. е. ей отвечает меньшая фазовая скорость.

Скачок фазы на π означает, что горб приходящей волны после отражения превращается во впадину (и наоборот).

20.2.5. Стоячие волны

Две волны, распространяющиеся одновременно в одной и той же среде в противоположных направлениях, при сложении образуют стоячую волну. Предполагается, что обе волны имеют одинаковые амплитуды, частоты и длины волн. Чаще всего стоячие волны возникают при сложении падающей одномерной волны с волной, испытавшей отражение.

Если

$y_{рез}$ — отклонение в результирующей волне,
Y_m — амплитуды складывающихся волн,
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота складывающихся волн,
t — время,
λ — длина волны,
x — координата,

то уравнение падающей волны имеет вид

$$y_1 = Y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

уравнение отраженной волны:

$$y_2 = Y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right).$$

Отсюда для результирующей волны получаем

$$y_{рез} = y_1 + y_2 = Y_m\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

Применяя теорему сложения, находим

$$y_{рез} = 2Y_m \cos 2\pi\frac{x}{\lambda} \sin 2\pi\frac{t}{T},$$

или при $1/T = f$ и $2\pi f = \omega$

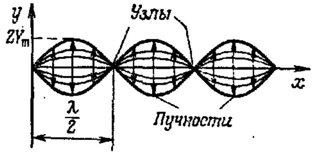
(К 20.9) $$\boxed{y_{рез} = 2Y_m \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t.}$$

Это формула для синусоидального колебания с амплитудой $2Y_m \cos(2\pi/\lambda)x$, которая зависит от координаты. При определенных значениях x, т. е. в некоторых точках, амплитуда равна $2Y_m$, при других определенных значениях x она равна нулю. Эти точки остаются фиксированными на оси x и находятся друг от друга на расстоянии, равном $\lambda/2$.

Обратите внимание:

- Стоячие волны возникают при отражении как от менее плотной, так и от более плотной среды.

● Точки, в которых амплитуда всегда равна нулю, называются **узлами волны**; точки, в которых амплитуда всегда равна $2Y_m$, называются **пучностями волны**.



● В среде, имеющей ограниченный размер l, стоячая волна может образоваться только в том случае, когда величина l кратна целому числу полуволн $\lambda/2$.

20.3. Поверхностные и пространственные волны

20.3.1. Сложение волн

Если в среде распространяется несколько волн, то происходит их сложение (**интерференция**). В этом случае также действует принцип суперпозиции.

Результирующее отклонение в момент времени t в точке x при сложении двух поверхностных волн с одинаковыми частотами и амплитудами определяется выражением

$$y_{\text{рез}} = Y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + Y_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \Delta\varphi\right],$$

или

$$y_{\text{рез}} = Y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + Y_m \sin \omega \left(t - \frac{x + \Delta x}{c}\right).$$

Если

k — целое число (0, ± 1, ± 2, ± 3, ...),

$\Delta\varphi$ — разность фаз двух волн в области суперпозиции (фазовый сдвиг),

Δx — разность хода обеих волн, разность путей, проходимых обеими волнами в области суперпозиции,

λ — длина волны,

то условие **максимального усиления** волн имеет вид

(К 20.10) $\boxed{\Delta\varphi = k \cdot 2\pi}$

или $\boxed{\Delta x = k\lambda,}$

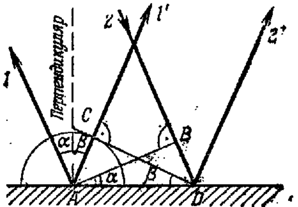
а условие гашения волн

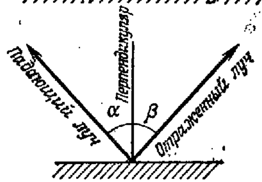
(К 20.11) $\boxed{\Delta\varphi = (2k + 1)\,\pi}$

или $\boxed{\Delta x = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}.}$

20.3.2. Отражение

При падении волны на границу раздела двух сред происходит полное или частичное отражение. Для построения отраженных лучей $1'$ и $2'$ используется принцип Гюйгенса, согласно которому в точке A возникает элементарная волна. В тот момент, когда луч 2 достигает границы раздела в точке D, радиус элементарной волны равен $\overline{AC} = \overline{BD}$. Построив общий волновой фронт, проходящий через C и D, получим новое направление волны.





Если

α — угол падения, т. е. угол между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности в точке падения,

β — угол отражения, т. е. угол между отраженным лучом и перпендикуляром к поверхности,

то закон отражения имеет вид

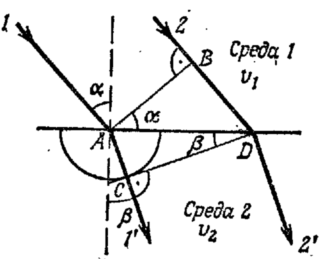
(К 20.12) $\boxed{\alpha = \beta.}$ Оба луча и перпендикуляр лежат в одной плоскости.

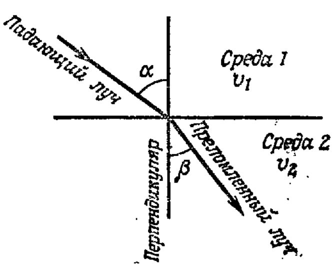
Обратите внимание:

- Закон (К 20.12) справедлив также и в случае электромагнитных волн, например для света (см. разд. 25.2.1).

20.3.3. Преломление

Если луч переходит из одной среды в другую через границу раздела, то изменяется не только скорость распространения, но и направление распространения — луч преломляется. При построении преломленных лучей $1'$ и $2'$ применяется принцип Гюйгенса, согласно которому в точке A возникает элементарная волна. В тот





момент, когда луч 2 достигает поверхности раздела в точке D, радиус фронта элементарной волны равен $\overline{AC} = \overline{BD}\frac{v_2}{v_1}$. Построив общий волновой фронт, проходящий через D и C, получим новое направление волны.

Если
α — угол падения, т. е. угол между падающим лучом и перпендикуляром,
β — угол преломления, т. е. угол между преломленным лучом и перпендикуляром,
v_1 — скорость распространения в среде 1,
v_2 — скорость распространения в среде 2,

то **закон преломления** имеет вид

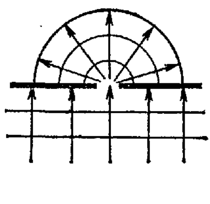
(К 20.13) $$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.}$$ Оба луча и перпендикуляр лежат в одной плоскости.

Обратите внимание:

- Закон (К 20.13) справедлив и для электромагнитных волн, например для света; см. (О 25.5).

20.3.4. Дифракция

Если волна падает на экран с узкой щелью, то за экраном лучи расходятся веерообразно; это так называемая дифракция волн. Дифракцию можно объяснить, используя принцип Гюйгенса. Угол между первоначальным направлением падающей волны и новым направлением луча называется углом дифракции.



Энергия падающей волны неравномерно распределяется по отдельным направлениям. Она тем меньше, чем больше угол дифракции.

Обратите внимание:

- Дифракция света: см. разд. 26.2.

20.4. Характеристики волнового поля

20.4.1. Плотность энергии

Любая волна переносит энергию, которая передается в виде энергии колебательного движения от одной частицы среды к другой.

Количество энергии, приходящейся на единицу объема среды, называется **плотностью энергии** w.

Единица СИ плотности энергии: $[w] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

Если
w — плотность энергии,
ρ — плотность среды,
V_m — максимальное значение скорости колебаний частицы,
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — частота,
Y_m — амплитуда,
dV — объем среды, в котором заключена масса $dm = \rho dV$,
то, согласно (К 19.18), энергия колебаний

$$dW = \frac{\rho V_m^2 dV}{2},$$

и для плотности энергии $w \neq dW/dV$ получаем выражение

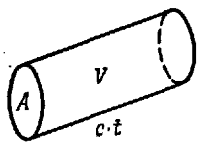
(К 20.14) $$\boxed{w = \frac{\rho V_m^2}{2},}$$ или, поскольку, согласно (К 19.5), $V_m = Y_m \omega$,

(К 20.15) $$\boxed{w = \frac{\rho \omega^2 Y_m^2}{2}.}$$

	w	ρ	v	ω	y
СИ	Дж/м³	кг/м³	м/с	1/с	м

20.4.2. Поток энергии

Если
W — энергия, проходящая через поверхность площадью A за время t,
c — фазовая скорость волны,
w — плотность энергии,
t — время,
A — площадь поверхности,
ρ — плотность среды,
V_m — максимальное значение скорости колебаний,
Y_m — амплитуда,
ω — частота,



то $W = wV$. Это энергия, которая содержится в объеме $V = Act$, т. е. $W = wAct$. Принимая во внимание (К 20.14) и (К 20.15), получаем

(К 20.16) $$\boxed{W = \frac{\rho V_m^2 Act}{2} = \frac{\rho \omega^2 Y_m^2 Act}{2}.}$$

	W	ρ	v	A	c	t	y	ω
СИ	Дж	кг/м³	м/с	м²	м/с	с	м	1/с

20.4.3. Мощность

Для мощности $P = W/t$ из (К 20.16) имеем

$$\boxed{P = wAc = \frac{\rho V_m^2 Ac}{2} = \frac{\rho\omega^2 Y_m^2 Ac}{2}.} \quad \text{(К 20.17)}$$

	P	w	A	c	ρ	v	ω	y
СИ	Вт	Дж/м³	м²	м/с	кг/м³	м/с	1/с	м

20.4.4. Интенсивность

Выражение для интенсивности $I = P/A$ вытекает из (К 20.17):

$$\boxed{I = wc = \frac{\rho V_m^2 c}{2} = \frac{\rho\omega^2 Y_m^2 c}{2}.} \quad \text{(К 20.18)}$$

	I	w	c	ρ	v	y
СИ	Вт/м²	Дж/м³	м/с	кг/м³	м/с	м

Обратите внимание:

- Величины, определяемые формулами (К 20.14)—(К 20.18), а именно плотность энергии w, энергия W, мощность P и интенсивность I, не зависят от координат, т. е. постоянны во всех точках волнового поля только в случае одно-, двух- или трехмерных волн с плоским волновым фронтом.
- Для круговых волн $w \sim 1/r$, а для сферических $w \sim 1/r^2$, где r — расстояние от точки возбуждения волны.

А АКУСТИКА

21. Генерация звука

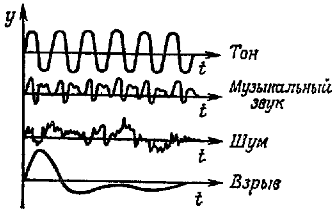
21.1. Природа звука

Звуковые волны представляют собой продольные механические волны. Они испускаются источником звука — колеблющимся телом — и распространяются в твердых телах, жидкостях и газах в виде колебаний давления (волн давления).

Человеческое ухо, как правило, воспринимает частоты от **16 до 20 000 Гц** (см. разд. 23.2.1). Колебания более высокой частоты называются **ультразвуком**, более низкой — **инфразвуком.**

Различают: **музыкальный тон, созвучие (музыкальный звук), шум и взрыв.**

- Музыкальный (чистый) тон — это синусоидальное колебание.
- Созвучие — результат одновременного звучания нескольких музыкальных тонов, т. е. несинусоидальное колебание, возникающее в результате сложения нескольких синусоидальных колебаний. Тон самой низкой частоты определяет общую высоту звука, остальные тона (обертоны) определяют «окраску» (тембр) звука.
- Шум — нерегулярные колебания, смесь многочисленных колебаний примерно одинаковой амплитуды и с самыми разнообразными частотами.



- Взрыв — кратковременное и сильное звуковое воздействие. Между колебаниями источника звука и звуковым ощущением существует следующая взаимосвязь.

Справочная таблица

Характеристика колебаний	Звуковое ощущение
Амплитуда	Громкость
Частота	Высота
Форма	Тембр

21.2. Источники звука

Источниками звука называют колеблющиеся тела (в любых агрегатных состояниях), излучающие звуковые волны. Это может быть струна, стержень, пластина, столб воздуха в трубе, мембрана и т. д.

21.2.1. Колебания струны

В фортепиано, скрипке и других музыкальных инструментах звук возникает в результате колебания струн. Эти колебания могут возбуждаться щипком, смычком или ударом.

Если
f — частота колебаний,
l — длина струны,
F — сила натяжения струны,
ρ — плотность материала струны,
A — площадь поперечного сечения струны,

то, согласно (К 20.1), $f = c/\lambda$. Здесь $\lambda = 2l$, так как на струне возникает стоячая волна с узлами на концах. Таким образом, $f = c/2l$, причем скорость c волны на струне можно считать равной $\sqrt{F/\rho A}$. В результате получаем

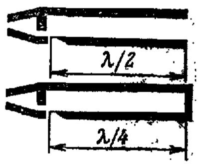
(А 21.1) $$\boxed{f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho A}}.}$$

	f	l	F	ρ	A
СИ	Гц	м	Н	кг/м^3	м^2

Обратите внимание:

- Формула (А 21.1) определяет частоту основных колебаний (основного тона) струны. Кроме того, возможны колебания с более высокими частотами (обертоны). Обертоны влияют на тембр звука, но не меняют частоты воспринимаемого тона.

21.2.2. Колебания столба воздуха



В столбе воздуха, заключенном в трубах духовых музыкальных инструментов, возникают стоячие волны, причем на мундштук инструмента приходится пучность волны. Трубы могут быть открытыми и закрытыми.

Справочная таблица

Труба	На конце	Длина трубы
Открытая	Пучность	Половина длины волны
Закрытая	Узел	Четверть длины волны

Если
f — частота колебаний воздуха в трубе,
c — скорость звука в воздухе,
l — длина колеблющегося воздушного столба,

то для открытой трубы $l = \lambda/2$. Поскольку, согласно (К 20.1), $c = \lambda f$, получаем

(А 21.2) $$\boxed{f = \frac{c}{2l}.}$$

	f	c	l
СИ	Гц	м/с	м

Для закрытой трубы $l = \lambda/4$. Так как $c = \lambda f$, имеем

(А 21.3) $$\boxed{f = \frac{c}{4l}.}$$

	f	c	l
СИ	Гц	м/с	м

Обратите внимание:

- Частота музыкального тона открытой трубы вдвое больше частоты тона в случае закрытой трубы той же длины.

22. Распространение звука

Звук распространяется в виде продольных механических волн. Фазовая скорость этих волн (называемая скоростью звука c) зависит (при достаточно малых амплитудах) только от механических свойств среды и не зависит от частоты.

22.1. Скорость звука

22.1.1. Скорость звука в твердых телах

Если
c — скорость звука в длинном стержне,
E — модуль упругости (см. табл. 9),
ρ — плотность стержня (см. табл. 1),

то

(А 22.1) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.}$$

	c	E	ρ
СИ	м/с	Па = Н/м^2	кг/м^3

Обратите внимание:

- Поскольку скорость звука c выражается через плотность ρ, она зависит от температуры.
- Численные значения скорости звука c см. в табл. 32.

22.1.2. Скорость звука в жидкостях

Если
c — скорость звука в жидкости,
$K = 1/\varkappa$ — модуль всестороннего сжатия; $\varkappa$ — коэффициент сжимаемости (см. табл. 4),
ρ — плотность жидкости (см. табл. 1),
то

(А 22.2) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa\rho}}.}$$

	c	K	$\varkappa$	ρ
СИ	м/с	Па $=$ Н/м^2	м^2/Н	кг/м^3

Обратите внимание:

- Поскольку скорость звука c выражается через плотность ρ, она зависит от температуры.
- Численные значения скорости звука c см. в табл. 32.

22.1.3. Скорость звука в газах

Чередование процессов сжатия и разрежения в определенном участке газа происходит столь быстро, что эти процессы можно считать адиабатическими.

Если
c — скорость звука в газе (см. табл. 32),
$\varkappa = c_p/c_v$ — показатель адиабаты (см. табл. 18),
ρ — плотность газа,
p — давление газа,
R — газовая постоянная (см. табл. 15),
T — температура газа,
то

(А 22.3) $$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}.}$$

	c	$\varkappa$	p	ρ
СИ	м/с	—	Па $=$ Н/м^2	кг/м^3

Если в соответствии с (Т 13.23) принять $\rho = p/RT$, то

(А 22.4) $$\boxed{c = \sqrt{\varkappa RT}.}$$

	c	$\varkappa$	R	T
СИ	м/с	—	Дж/(кг·К)	К

Обратите внимание:

- Скорость звука в газах в широких пределах зависит только от температуры и не зависит от давления газа.

22.1.4. Скорость звука в воздухе

Подставив в формулу (А 22.4) численные значения величин для сухого воздуха при 0°С, найдем

$$c_0 = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 273} = 331{,}2 \text{ м/с}.$$

Экспериментально получено значение 331,6 м/с. При другой температуре воздуха скорость звука можно также определить по формуле (А 22.4).

Если
c — скорость звука при температуре t (в °С),
t — температура воздуха (в °С),
T — абсолютная температура воздуха,

то

$$\frac{c}{331{,}6}=\frac{\sqrt{\varkappa RT}}{\sqrt{\varkappa R\cdot 273}}.$$

Отсюда следует

$$c=331{,}6\sqrt{\frac{T}{273}},$$

и, поскольку $T=t+T_0$, где $T_0=273$ K, имеем

$$c=331{,}6\sqrt{1+\frac{t}{273}}.$$

Это выражение можно упростить и с хорошей точностью записать в следующем виде:

(А 22.5) $$\boxed{c=(331{,}6+0{,}6t)\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.}$$

Обратите внимание:

- Присутствие паров воды лишь незначительно изменяет величину скорости звука по сравнению с сухим воздухом.

22.2. Эффект Доплера

Если источник (излучатель) и приемник звука движутся относительно друг друга, т. е. расстояние между ними увеличивается или уменьшается, то приемник E будет воспринимать частоту, отличную от частоты источника S.

Если
c — скорость звука,
$v_{и}$ — скорость движения источника,
$v_{п}$ — скорость движения приемника,
$f_{и}$ — частота излучения источника,
$f_{п}$ — частота, воспринимаемая приемником,
λ — длина волны звука, испускаемого источником,

то в соответствии с (К 20.1) $f_{и}=c/\lambda$. При определении $f_{п}$ необходимо иметь в виду, что движение источника и движение приемника приводит к различным эффектам, т. е. следует различать эти два случая.

- Удаление приемника E от источника S соответствует уменьшению скорости c звуковой волны относительно приемника. В приведенных выше выражениях необходимо вместо c подставить $c - v_п$.
- Приближение источника к приемнику соответствует уменьшению длины волны на величину, равную пути, который проходит источник S в течение периода колебания. В приведенных выше выражениях λ необходимо заменить на

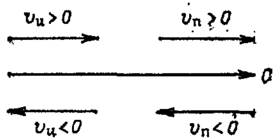
$$\lambda - v_и/f_и.$$

Подставляя полученные выражения в $f_и = c/\lambda$, получаем

$$f_п = \frac{c - v_п}{\lambda - \dfrac{v_и}{f_и}} = \frac{c - v_п}{\dfrac{c - v_и}{f_и}},$$

откуда следует формула для **эффекта Доплера**:

(A 22.6) $$\boxed{f_п = f_и \frac{c - v_п}{c - v_и}.}$$



Переходя к длинам волн λ, получаем

(A 22.7) $$\boxed{\lambda_п = \lambda_и \frac{c - v_и}{c - v_п}.}$$

Обратите внимание:

- При вычислении $v_и$ и $v_п$ надо иметь в виду, что движение в направлении распространения звуковой волны отвечает положительной скорости, в противоположном направлении — отрицательной.
- Для покоящегося источника $v_и = 0$, для покоящегося приемника $v_п = 0$.
- Скорость звука в воздухе дается формулой (A 22.5).

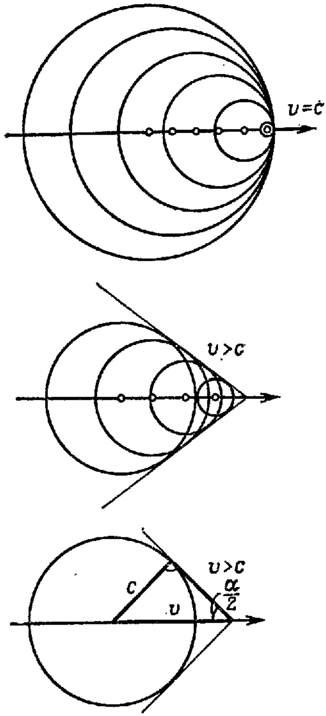
В большинстве случаев $v_и$, $v_п \ll c$; тогда формулу (A 22.6) можно упростить и с хорошей точностью записать в виде

(A 22.8) $$\boxed{f_п = f_и \left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right).}$$

Обратите внимание:

- Δv — относительная скорость источника и приемника. С учетом знаков этих скоростей $\Delta v \equiv v_и - v_п$.

Если скорость источника возрастает до величины c, то в формуле (А 22.7) $\lambda_п = 0$. В точке, где в этот момент времени находится источник, сходятся покоящиеся относительно источника фронты всех волн, излученных в предшествующие моменты времени. При этом давления всех волн складываются и возникает так называемый **«звуковой барьер»**.



При еще большей скорости движения источника (когда он движется со сверхзвуковой скоростью $v > c$) излученные в различные моменты времени волны складываются в результирующую волну с конусообразным волновым фронтом. Весь конус движется со скоростью источника v. Приемник, когда его достигает волновой фронт, регистрирует взрыв, так называемый **сверхзвуковой взрыв**. Сам конус обычно называют конусом Маха.

Как видно из рисунка, угол раствора конуса определяется выражением

(А 22.9) $$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}.}$$

Здесь M — так называемое число Маха. Например, число Маха, равное 2, означает, что тело движется со скоростью, вдвое превышающей скорость звука.

Обратите внимание:

- Конус Маха образуется также и в том случае, когда нет никакого источника звука. Если скорость движения тела больше скорости звука в данной среде, то подобная «ударная волна» возникает вследствие уплотнения среды.

22.3. Сложение звуковых волн

При сложении (интерференции) звуковых волн справедливы те же закономерности, что и в случае волн другой природы (см. разд. 20.3.1). Мы рассмотрим здесь лишь наиболее важные частные случаи.

22.3.1. Гашение звука

Две распространяющиеся в одном направлении звуковые волны с одинаковыми частотами и амплитудами гасят друг друга, если

$$\text{Разность хода} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Если амплитуды волн неоднннаковы, то при тех же условиях происходит ослабление звука.

22.3.2. Усиление звука

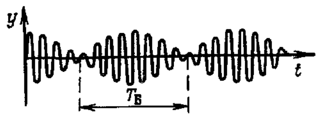
Две распространяющиеся в одном направлении звуковые волны с одинаковыми частотами и амплитудами усиливают друг друга, если

$$\text{Разность хода} = k\lambda \quad (k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots);$$

при этом амплитуда результирующей волны вдвое больше амплитуды каждой из волн. Если амплитуды волн неодинаковы, то при тех же условиях происходит сложение отклонений.

22.3.3. Биеиия

При сложении двух распространяющихся в одном направлении звуковых волн с мало различающимися частотами возникают биения. Амплитуда результирующей волны периодически изменяется.



Если

f_1 — частота первой звуковой волны,
f_2 — частота второй звуковой волны,
$f_б$ — частота биений, т. е. число максимумов или минимумов громкости в единицу времени,
$T_б$ $= 1/f_б$ — период биений,

от

(A 22.10) $$\boxed{f_б = f_1 - f_2 \quad \text{и} \quad T_б = \frac{1}{f_1 - f_2}.}$$

Обратите внимаиие:

- При частоте биений, меньшей примерно 16 Гц, человеческое ухо не воспринимает колебаний громкости, а лишь регистрирует высоту тона, соответствующего этой разности частот.

23. Звуковые измерения

23.1. Характеристики звукового поля

Энергия, излучаемая источником звука, переносится звуковыми волнами, образуя звуковое поле. Для характеристики звукового поля используются величины, отличающиеся от характеристик волновых полей общего типа.

23.1.1. Колебательная скорость

Колебательной скоростью или скоростью частиц называют скорость колебательного движения частиц среды.

Если
v — мгновенное значение колебательной скорости,
f — частота звуковой волны,
Y_m — амплитуда колебаний частицы,
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,
ωt — фаза,

то аналогично (К 19.4)

(А 23.1) $$\boxed{v = Y_m \omega \cos \omega t}$$

Отсюда получаем **максимальную колебательную скорость (амплитуду)**

(А 23.2) $$\boxed{V_m = \omega Y_m = 2\pi f Y_m.}$$

и эффективное значение колебательной скорости

(А 23.3) $$\boxed{\tilde{v} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi f Y_m}$$

Обратите внимание:

- Обычно колебательную скорость частиц не измеряют, а вычисляют по величине звукового давления (см. разд. 23.1.2).

23.1.2. Звуковое давление

Под звуковым давлением p понимают происходящие в звуковой волне периодические изменения давления (сжатия и разрежения).

В газовой среде звуковое давление p налагается на существующее давление газа $p_г$.

Единица СИ звукового давления: $[p]$ = паскаль (Па) $= \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$.

Внесистемная единица: микробар (мкбар) $= 10^{-6}$ бар.

Соотношение между единицами давления

1 бар $= 10^6$ мкбар $= 10^5$ Па; 1 мкбар $= 10^{-6}$ бар $= 0{,}1$ Па
1 Па $= 10$ мкбар $= 10^{-5}$ бар.

Если
ρ — плотность среды (см. табл. 1),
c — скорость звука в среде (см. табл. 32),
ω $= 2\pi f$ — угловая частота,
Y_m — амплитуда колебаний,
V_m — амплитуда скорости, максимальная колебательная скорость частиц,

то для мгновенного значения звукового давления в определенной точке звукового поля получаем

(A 23.4) $$\boxed{p = \rho c \omega Y_m \cos \omega t.}$$ Единицы: см. (A 23.5)

Поскольку, согласно (A 23.2), $\omega Y_m = V_m$, **максимальное звуковое давление (амплитуда давления)** составляет

(A 23.5) $$\boxed{p_m = \rho c \omega Y_m = \rho c V_m,}$$

	p	ρ	c	v	ω
СИ	Па $=$ Н/м^2	кг/м^3	м/с	м/с	1/с
Огр	мкбар	г/см^3	см/с	см/с	1/с

а **эффективное значение звукового давления**

(A 23.6) $$\boxed{\tilde{p} = \frac{p_m}{\sqrt{2}} = \frac{\rho c V_m}{\sqrt{2}}.}$$ Единицы: см. (A 23.5)

23.1.3. Интенсивность (сила) звука

Интенсивностью звука I называют отношение падающей на поверхность звуковой мощности P к площади этой поверхности A:

$$I = \frac{P}{A}.$$

Единица СИ интенсивности звука: $[I] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Если
I — интенсивность звука,
ρ — плотность среды,
c — скорость звука в среде,
v — колебательная скорость частиц,
p — звуковое давление,

то $I = P/A = W/tA$, где W — энергия, падающая на поверхность A за время t. Она равна энергии, содержащейся в объеме $V = Al$, где l — путь, который проходит волна за время t. Таким образом,

$$I = \frac{W}{tA} = \frac{Wl}{tV} \quad \text{и при} \quad \frac{l}{t} = c \quad \text{и} \quad \frac{W}{V} = w \quad (\text{К } 20.14)$$

имеем $I = wc$. Подставляя $w = \frac{\rho V_m^2}{2}$, для интенсивности получаем

(А 23.7) $$\boxed{I = \frac{\rho c V_m^2}{2} = \rho c \tilde{v}^2}$$

	I	ρ	c	v
СИ	Вт/м²	кг/м³	м/с	м/с

или, учитывая (А 23.5), $p_m = \rho c V_m$,

(А 23.8) $$\boxed{I = \frac{p_m^2}{2\rho c} = \frac{p_m V_m}{2} = \tilde{p}\tilde{v} = \frac{\tilde{p}^2}{\rho c}.}$$

	p
СИ	Па = Н/м²

23.1.4. Уровень интенсивности

Для сравнения интенсивностей звука или звукового давления используют уровень интенсивности или уровень звукового давления.

Уровнем интенсивности L_P называется умноженный на 10 логарифм (десятичный) отношения двух интенсивностей звука; уровнем звукового давления L называется умноженный на 20 логарифм отношения звуковых давлений.

В принципе величина L как логарифм отношения безразмерна и потому не имеет единиц измерения. Тем не менее для численного значения логарифма применяют название **децибел (дБ)**. Децибел используют как единицу измерения.

Для указания абсолютного уровня интенсивности вводят стандартный порог слышимости I_0 человеческого уха на частоте $f = 1$ кГц, по отношению к которому указывается интенсивность. **Порог слышимости $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².**

Если
L_P — уровень интенсивности звука,
I — интенсивность звука,
I_0 = 1 пВт/м² — стандартный порог слышимости,

то в соответствии с определением уровня интенсивности звука

(А 23.9) $$\boxed{L_P = 10 \lg \frac{I}{I_0}\ \text{дБ}.}$$

Аналогично определяют абсолютный уровень звукового давления, используя стандартное **пороговое звуковое давление $\tilde{p}_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па** и формулу (А 23.8).

Если
L_p — уровень звукового давления,
$\tilde{p}$ — звуковое давление, уровень которого должен быть определен,
$\tilde{p}_0$ = 20 мкПа — пороговое звуковое давление,

то

$$\text{(А 23.10)} \quad \boxed{L = 20 \lg \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \text{ дБ} = 20 \lg \frac{p_m}{\sqrt{2}\, \tilde{p}_0} \text{ дБ}.}$$

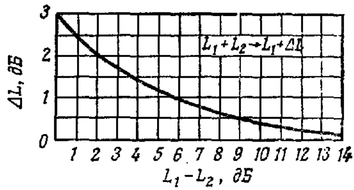
Обратите внимание:

- Согласно соотношению (А 23.8), I_0 и $\tilde{p}_0^2$ взаимно пропорциональны. Коэффициент пропорциональности $1/\rho c$ зависит от свойств среды. Поскольку значение $\tilde{p}_0$ установлено, величина $I_0 \approx 10^{-12}$ Вт/м^2 представляет собой порог слышимости для «нормального» воздуха. Для других сред величину I_0 необходимо вычислять с помощью (А 23.8).
- Значения уровня интенсивности объективны, они позволяют не принимать во внимание зависимость чувствительности человеческого уха от частоты.

Суммарный уровень интенсивности нескольких источников вычисляется через сумму интенсивностей звука или через корень квадратный из суммы квадратов звукового давления $\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}\right)$.

Расчеты показывают, что при сложенни двух волн, имеющих одинаковую интенсивность, уровень интенсивности увеличивается на 3 дБ. В случае n источников звука равной интенсивности L выражение для полного уровня интенсивности имеет вид

$$\text{(А 23.11)} \quad \boxed{L_{\text{полн}} = L + 10 \lg n.}$$



Уровень интенсивности двух источников разной интенсивности можно определить при помощи диаграммы. Она показывает, на сколько децибел возрастает больший уровень L_1 в зависимости от разности ΔL обоих уровней.

В СВЧ-технике уровни мощности и напряжения также задаются в децибелах (дБ). В этом случае

$$\text{(А 23.12)} \quad \boxed{\begin{aligned} &L_P = 10 \lg \frac{P}{P_0} \text{ дБ}, \\ \text{или} \quad &L_U = 20 \lg \frac{U}{U_0} \text{ дБ}, \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{где } P_0 = 1 \text{ мВт} \\ &\text{где } U_0 = 0{,}775 \text{ В} \end{aligned}$$

23.1.5. Относительный уровень интенсивности

Относительным уровнем интенсивности называют разность двух абсолютных уровней: $\Delta L_P = L_{P1} - L_{P2}$.

При этом, учитывая (А 23.9), получаем

$$L_{p1} - L_{p2} = 10\left(\lg \frac{I_1}{I_0} - \lg \frac{I_2}{I_0}\right) \quad \text{и}$$

(А 23.13) $$\boxed{\Delta L_p = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}\ \text{дБ};}$$

аналогичным образом из (А 23.10) для относительного уровня звукового давления имеем

(А 23.14) $$\boxed{\Delta L = 20 \lg \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2}\ \text{дБ} = 20 \lg \frac{p_{m1}}{p_{m2}}\ \text{дБ}.}$$

Обратите внимание:

- Аналогично образуются разности уровней электрической мощности и напряжения. Так сравнивают входные и выходные характеристики усилителей, линий передачи и т. д.

Используемые в строительной технике **коэффициенты звукопоглощения** являются мерой ослабления звуковых волн при прохождении через строительные и звукоизоляционные материалы. Коэффициентом звукоизоляции называют разность уровней интенсивности звука до и после прохождения звукоизоляционного материала: $D = L_{P1} - L_{P2}$. Отсюда следует аналогично (А 23.13)

(А 23.15) $$\boxed{D = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}.}$$

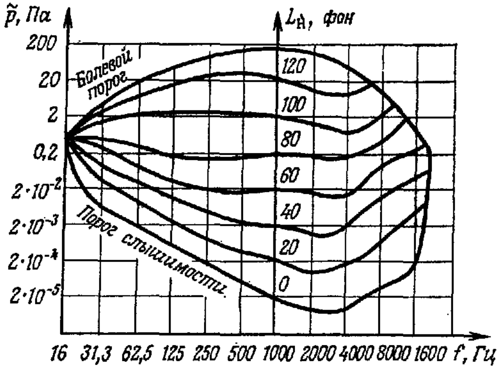
Обратите внимание:

- Численные значения коэффициента звукоизоляции D см. в табл. 33.

23.2. Слух

23.2.1. Диаграмма слуха

Диаграмма, на которой представлены области частот и интенсивностей, воспринимаемые человеческим ухом, называется диаграммой слуха. Нормальное ухо слышит только звуки, характеристики которых лежат внутри указанной области. Нижняя граничная кривая характеризует **порог слышимости** в зависимости от частоты, верхняя кривая — **болевой порог** в зависимости от частоты. Известно, что при одинаковом звуковом давлении и одинаковой интенсивности громкость звуков различной частоты по-разному воспринимается ухом. Поскольку на частоте 1000 Гц ухо воспринимает наибольший диапазон интенсивностей (при 1000 Гц диаграмма слуха имеет наибольшее вертикальное поперечное сечение), в определении громкости используется эта частота.



23.2.2. Громкость

Приведенные в разд. 23.1 характеристики звукового поля представляют собой физические величины, которые объективно существуют и, следовательно, могут быть измерены. Напротив, громкость — это сила звука, воспринимаемая человеком субъективно, она зависит от слуха и является физиологической характеристикой. Громкость измеряется в **фонах**. Фон, так же как и децибел, не является единицей измерения, а представляет собой умноженный на 20 логарифм отношения звуковых давлений.

Если
L_H — громкость,
$\tilde{p}$ — звуковое давление, которое отвечает звуковому тону с частотой 1000 Гц, воспринимаемому как звук с громкостью, равной громкости измеряемого звука,
$\tilde{p}_0 = 20$ мкПа — стандартное пороговое звуковое давление,

то аналогично (А 23.10)

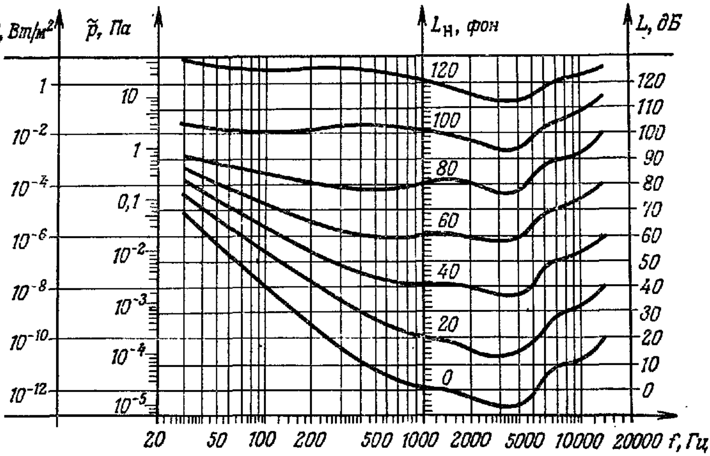
$$L_H = 20 \lg \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \text{ фон} = 20 \lg \frac{p_m}{\sqrt{2}\,\tilde{p}_0} \text{ фон.} \tag{А 23.16}$$

Обратите внимание:

- Для тона с частотой 1000 Гц уровень интенсивности L_P совпадает с громкостью L_H.
- Громкость тона любой частоты вычисляется по звуковому давлению тона с частотой 1000 Гц, воспринимаемого как звук той же громкости.
- Численные значения громкости L_H см. в табл. 34.

- Соотношение (А 23.16) отражает тот факт, что чувствительность к звуку (восприимчивость уха) меняется как логарифм интенсивности звука (**закон Вебера — Фехнера**).
- При наличии нескольких звуковых источников общая громкость определяется как корень квадратный из суммы квадратов звуковых давлений.

На диаграмме представлены «кривые равной громкости». Они позволяют определить, какую величину должны иметь при данной частоте уровень интенсивности звука и звуковое давление, чтобы воспринималась определенная громкость. «Кривые равной громкости» позволяют без вычислений определять громкость $L_н$ для каждого тона по частоте и звуковому давлению или по частоте и уровню интенсивности звука.



23.2.3. Оценка уровня интенсивности звука

С помощью диаграммы можно определять только громкость чистых тонов, т. е. синусоидальных звуковых волн. Если же имеется смесь частот, т. е. звуковые волны несинусоидальной формы, то сравнительные измерения и вычисление с помощью формулы (А 23.16) сильно затрудняются. Тогда вместо громкости определяют так называемый оценочный уровень интенсивности звука. Он определяется с помощью измерителя уровня интенсивности, состоящего из микрофона, усилителя и индикатора. При этом благодаря дополнительному корректирующему элементу частотная характеристика прибора приближается к чувствительности человеческого уха. Разработаны и утверждены международные оценочные кривые, обозначения которых указываются в скобках, например $L_{AI} = 60$ дБ (AI) означает уровень звукового давления в 60 дБ, определенный по оценочной кривой A для импульсного звука.

24. Ультразвук

24.1. Свойства

Звуковые частоты, лежащие выше порога слышимости, называются ультразвуковыми. В качестве границы принимают частоту примерно 20 кГц, хотя эту частоту уже не воспринимают люди пожилого возраста. Особые свойства ультразвука обусловлены высокой частотой и связанной с ней малой длиной волны.

24.1.1. Интенсивность

Поскольку $I = \rho c V_m^2/2$ (А 23.7) и $V_m = 2\pi f Y_m$ (А 23.2), то $I = 2\pi^2 \rho c Y_m^2 f^2$, т. е. $I \sim f^2$. Поэтому высоким частотам ультразвука соответствуют очень большие интенсивности (до 20 Вт/см^2), что приводит к нагреву тел, подвергающихся воздействию ультразвука.

Звуковое давление может достигать нескольких бар. Это позволяет использовать ультразвук для заметного механического воздействия на материал. Возможны следующие применения ультразвука:

- Ультразвуковой массаж,
- Разрушение клеток,
- Создание эмульсий (эмульгирование) воды, масла и др.,
- Обезгаживание металлических расплавов и жидкостей,
- Кавитация (образование пустот) в среде,
- Ультразвуковая пайка алюминия (разрушение окисного слоя),
- Ультразвуковое сверление.

24.1.2. Распространение

Поскольку ультразвуковые волны обладают малой длиной волны, они, как и свет, могут образовывать строго направленные пучки. Для них также справедливы законы отражения. С помощью вогнутого зеркального рефлектора ультразвуковые волны можно направлять из источника в строго определенном направлении. Ультразвук почти не дифрагирует и распространяется прямолинейно. Применения:

- Измерение глубины с помощью эхолота, а также поиск косяков рыб,
- Дефектоскопия материала: ультразвуковые волны отражаются от внутренних трещин и дефектов.

24.2. Генерация ультразвука

Механическая генерация

При помощи камертона с ножками длиной в несколько миллиметров, свистков и сирен получают ультразвуковые колебания вплоть до 200 кГц. Ультразвук более высокой частоты и более высокой интенсивности получают электрическими и магнитными способами.

Магнитные методы

Используя явление **магнитострикции**, можно генерировать ультразвуковые волны с частотами до 50 кГц. У ферромагнитных материалов (никель, железо и др.) под действием магнитного поля происходит незначительное изменение линейных размеров. Так, например, никелевый стержень, помещенный в переменное магнитное поле, совершает продольные колебания с соответствующей частотой. Амплитуда колебаний максимальна в случае резонанса.

Электрические методы

Электрические методы генерации ультразвука основаны на явлении **электрострикции** (обратный пьезоэлектрический эффект). Если к кварцевой пластине приложить переменное напряжение высокой частоты, то пластина будет совершать колебания соответствующей частоты, особенно интенсивные в резонансе. Таким способом можно получать частоты до 10^4 кГц.

В последнее время вместо кварца успешно применяется титанат бария.

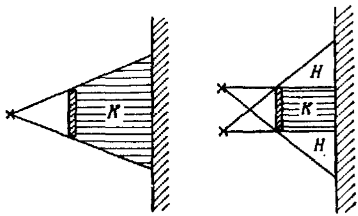
О ОПТИКА

25. Геометрическая оптика

25.1. Распространение света

25.1.1. Прямолинейность распространения света

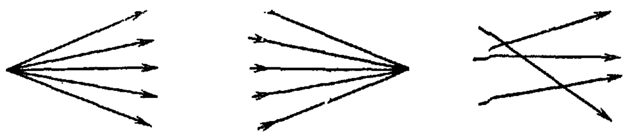
Доказательством прямолинейности распространения света служит образование тени. От точечного источника света возникает полная тень (K). От двух и более источников, а также от протяженного источника света возникает *полная тень* (K) и *полутень* (H).



Лучи, исходящие из одной точки, образуют *расходящийся* пучок (сечение пучка увеличивается).

Лучи, сходящиеся в одну точку, образуют *сходящийся* пучок (сечение пучка уменьшается).

Излучение, не выходящее из одной точки и не сходящееся в точку, называется *диффузным*.



Расходящийся пучок *Сходящийся пучок* *Диффузное излучение*

25.1.2. Скорость света

Первые измерения скорости света:

- 1676 г. Ремер (астрономический метод),
- 1849 г. Физо (первое измерение в пределах Земли),
- 1892 г. Фуко (первое измерение скорости света в других средах, т. е. не в воздухе).

Наиболее точное значение по данным измерений 1972 г.:

Скорость света в вакууме $c = (299\,792\,456{,}2 \pm 1{,}1)$ м/с.

Скорость света в вакууме является универсальной константой и не зависит от частоты. В веществе скорость света меньше, чем в вакууме.

Справочная таблица
Скорости света в различных средах (округленно)

Вещество	v, км/с	Вещество	v, км/с
Вакуум	300 000	Флинтглас	186 000
Воздух	300 000	Сероуглерод	184 000
Вода	225 000	Алмаз	124 000
Кронглас	198 000	Канадский бальзам	198 000

25.2. Отражение света

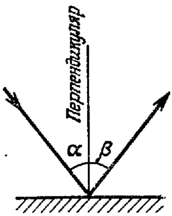
25.2.1. Закон отражения

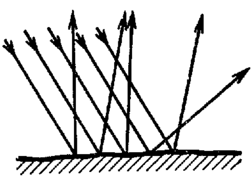
Закон отражения, сформулированный в гл. 20 для механических (акустических) волн [формула (К 20.12)], справедлив и для световых лучей, т. е.

▌ Угол падения α равен углу отражения β.

Обратите внимание:

- Углы падения и отражения измеряются между направлением луча и перпендикуляром к поверхности.
- Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр лежат в одной плоскости.

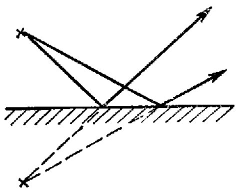




Закон отражения справедлив и в случае шероховатой отражающей поверхности. Параллельный пучок отражается от нее *диффузно*, однако каждый луч подчиняется закону отражения.

25.2.2. Плоское зеркало

Плоское зеркало представляет собой гладкую поверхность, при отражении от которой параллельный пучок остается параллельным. Плоским зеркалом пользуются для получения изображений.



Плоское зеркало создает **мнимое** (кажущееся) изображение. Предмет и его изображение расположены симметрично по отношению к поверхности зеркала.

Наблюдателю кажется, что лучи исходят из точки за зеркалом.

25.2.3. Вогнутое зеркало

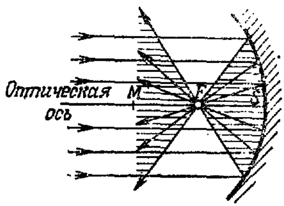
Закон отражения справедлив также для искривленных поверхностей, однако в этом случае в разных точках поверхности зеркала перпендикуляр имеет различные направления. Вогнутое зеркало представляет собой или часть сферы (**сферическое зеркало**) или часть параболоида вращения (**параболическое зеркало**).

Лучи, падающие на поверхность вогнутого зеркала параллельно оптической оси, после отражения собираются в фокусе F.

Расстояние от фокуса F до вершины зеркала S называется **фокусным расстоянием** f.

Если
f — фокусное расстояние вогнутого зеркала,
r — радиус кривизны поверхности зеркала,
то

(O 25.1) $$\boxed{f = \frac{r}{2}.}$$



Фокальная точка делит пополам отрезок, соединяющий центр кривизны M и вершину зеркала S.

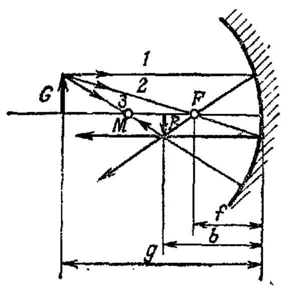
Обратите внимание:

- Сферические зеркала собирают точно в фокальной точке только близкие к оси лучи. Чтобы в фокусе собирались удаленные от оси лучи, следует применять параболические зеркала.

Построение изображения в зеркале

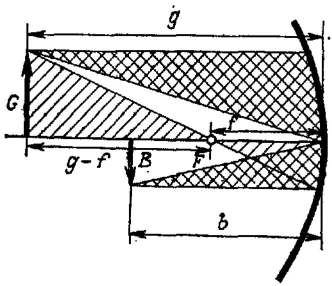
Для построения изображения нужно воспользоваться по меньшей мере двумя из следующих трех лучей:

- луч *1*, параллельный оси; после отражения в зеркале он проходит через фокус;
- фокальный луч *2*; после отражения он идет параллельно оси;
- луч *3*, проходящий через центр кривизны зеркала; при отражении он совмещается с самим собой.



Формула зеркала

Если
f — фокусное расстояние вогнутого зеркала,
g — расстояние предмета до зеркала,
b — расстояние изображения до зеркала,
G — размер предмета,
B — размер изображения,



то в соответствии с рисунком

(O 25.2) $\boxed{G : B = g : b.}$

Далее из рисунка следует, что

$$\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f} = \frac{g}{b}; \quad \frac{g}{f} - \frac{f}{f} = \frac{g}{b},$$

или, после деления на g и соответствующей перестановки,

(O 25.3) $$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}.}$$

Обратите внимание:

- Формулы (O 25.2) и (O 25.3) справедливы только для лучей, близких к оси, так как при выводе этих формул искривленная поверхность зеркала заменяется плоской.
- Действительные изображения перевернуты в отличие от мнимых изображений, которые не перевернуты (прямые).
- Действительное изображение можно наблюдать на экране, мнимое — нельзя.
- В п. 5 приведенной ниже таблицы величина b *отрицательна.*
- Вогнутые зеркала используются в зеркальных телескопах в качестве объективов.
- Если в фокусе зеркала расположен точечный источник света, создающий расходящийся пучок, то после отражения от зеркала возникает почти параллельный пучок (это следует из обратимости хода лучей).

Справочная таблица

Изображение в вогнутом зеркале

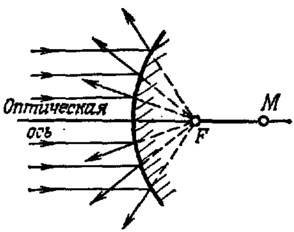
Расстояние до предмета g	Расстояние до изображения b	Размер изображения B	Увеличение β	Вид изображения
1. $g > r$	$r > b > f$	$B < G$	$\beta < 1$	Действительное, перевернутое
2. $g = r$	$b = r$	$B = G$	$\beta = 1$	То же
3. $r > g > f$	$b > r$	$B > G$	$\beta > 1$	»
4. $g = f$	$b = \infty$	$B = \infty$	$\beta = \infty$	»
5. $g < f$	$b < 0$	$B > G$	$\beta > 1$	Мнимое, прямое

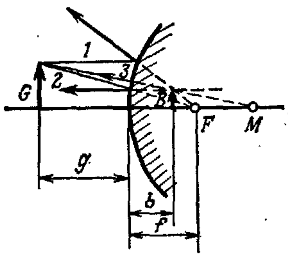
Изображение в выпуклом зеркале

6. g произвольное	$b < 0$	$B < G$	$\beta < 1$	Мнимое, прямое

25.2.4. Выпуклое зеркало

Лучи, падающие на выпуклое зеркало параллельно оптической оси, отражаются таким образом, как если бы они излучались в точке F.





Выпуклое зеркало создает мнимое, прямое и уменьшенное изображение.

Обратите внимание:

- Формулы (О 25.1)—(О 25.3) справедливы и для выпуклых зеркал.

- Фокусное расстояние выпуклого зеркала отрицательно, так как фокус расположен за зеркалом ($f < 0$).
- Расстояние до изображения в таком зеркале также отрицательно ($b < 0$).
- Для построения изображения в выпуклом зеркале нужно, как и в случае вогнутого зеркала, рассмотреть ход по крайней мере двух из трех изображенных на рисунке лучей.

25.3. Преломление света

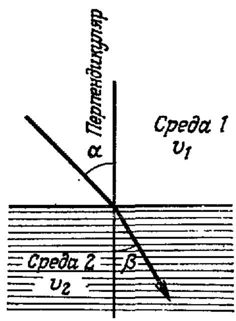
На границе раздела двух сред световой луч не только отражается, но и преломляется, т. е. часть его энергии переходит из одной среды в другую.

25.3.1. Закон преломления

Для световых лучей справедлив закон преломления (К 20.13), сформулированный в гл. 20 для случая механических (акустических) волн.

Если
α — угол падения (отсчитываемый от перпендикуляра),
β — угол преломления (отсчитываемый от перпендикуляра),
c — скорость света в вакууме,
v_1 — скорость света в среде *1*,
v_2 — скорость света в среде *2*,
n — показатель преломления,

то при падении света из **вакуума на границу со средой**



(О 25.4) $$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v_2} = n.}$$

При падении света из произвольной **среды** *1* на границу **со средой** *2*

(О 25.5) $$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.}$$

Обратите внимание:

- Если свет распространяется в противоположном направлении (т. е. из среды *2* в среду *1*), то в формулу (О 25.5) входит обратное отношение показателей преломления.
- Так как скорости света в вакууме c и в воздухе $v_{возд}$ различаются всего на 0,03%, при падении света из воздуха на некото-

рую среду можно пользоваться тем же показателем преломления, что и при падении из вакуума на эту же среду.

- Среда, в которой скорость света меньше, называется **оптически более плотной**, а среда, в которой скорость света больше, — **оптически менее плотной.**
- Значения показателя преломления n см. в табл. 35.

Переход света из оптически менее плотной в оптически более плотную среду

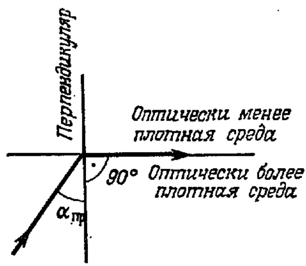
При переходе из среды с большей скоростью света в среду с меньшей скоростью света ($n > 1$) угол преломления меньше угла падения. Преломленный луч приближается к нормали.

Переход света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду

При переходе из среды с меньшей скоростью света в среду с большей скоростью света ($n < 1$) угол преломления больше угла падения. Преломленный луч отклоняется от нормали.

25.3.2. Полное внутреннее отражение света

При переходе из оптически более плотной в оптически менее плотную среду угол падения не может превышать предельного значения $\alpha_{пр}$, так как синус угла преломления не может быть больше единицы.



Если

$\alpha_{пр}$ — предельное значение угла падения,

n — показатель преломления (см. табл. 35),

v_1 — скорость света в более плотной среде,

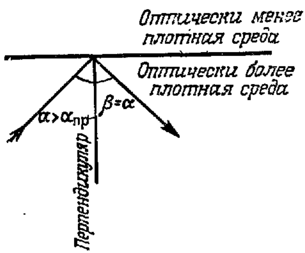
v_2 — скорость света в менее плотной среде,

то, поскольку

$$n = \frac{\sin \alpha_{пр}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \alpha_{пр}}{1},$$

имеем

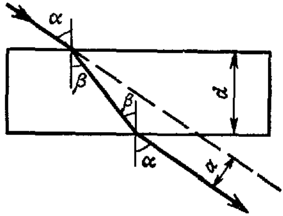
(О 25.6) $$\boxed{\sin \alpha_{пр} = \frac{v_1}{v_2} = n.}$$



Если угол падения $\alpha > \alpha_{пр}$, происходит **полное внутреннее отражение.** При этом вся энергия света отражается в первую, более плотную среду.

25.3.3. Плоскопараллельная пластина

При прохождении света через плоскопараллельную пластину преломление происходит на двух параллельных границах. Поэтому при прохождении через пластину световой луч не меняет направление распространения, а только смещается параллельно самому себе.



Если
a — величина смещения луча,
d — толщина пластины,
α — угол падения на первую границу раздела,
β — угол преломления на первой границе раздела, равный углу падения на вторую границу раздела,

то справедливо рзвенство

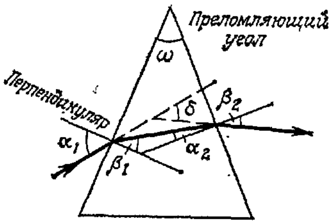
(O 25.7) $$\boxed{a = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}}$$

(предполагается, что среда по обе стороны от пластины одна и та же).

25.3.4. Прнзма

В призме световой луч дважды испытывает преломление на преломляющих гранях и изменяет свое направление. Полное отклонение луча зависит от угла падения света на призму и от преломляющего угла призмы ω.

Если
δ — угол отклонения луча призмой,
α_1 — угол падения на первую грань,
β_2 — угол преломления на второй грани,
ω — преломляющий угол призмы,
n — показатель преломления,



то

(O 25.8) $$\boxed{\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \omega.}$$

Если угол ω мал, то можно пользоваться приближенной формулой

(O 25.9) $$\boxed{\delta = (n - 1)\,\omega.}$$

Обратите внимание:

- Из геометрических соотношений следует, что $\omega = \beta_1 + \alpha_2$.
- При симметричном ходе лучей, когда $\alpha_1 = \beta_2$ и $\beta_1 = \alpha_2$, луч в призме распространяется параллельно ее основанию и угол отклонения минимален.

25.4. Линзы

Линзы изготовляются из стекла, пластмассы и других прозрачных материалов. В **сферических линзах** внешние поверхности образуют часть сферы.

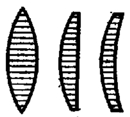
Проходящие через линзу лучи преломляются дважды. При построении хода лучей преломление на обеих границах заменяют одним преломлением в так называемой главной плоскости линзы.

Все расстояния (фокусное расстояние, расстояния до предмета и изображения) отсчитываются от главной плоскости линзы.

25.4.1. Виды линз

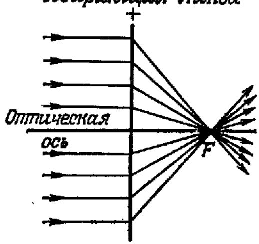
Выпуклые (собирающие) **линзы** ограничены двумя сферическими поверхностями, причем толщина линзы у середины больше, чем у краев. Собирающие линзы могут быть

- двояковыпуклыми (*а*),
- плоско-выпуклыми (*б*),
- вогнуто-выпуклыми (*в*).



а б в

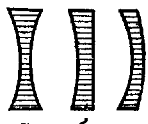
Собирающая линза



Лучи, параллельные оптической оси, после прохождения через собирающую линзу собираются в фокусе F. Расстояние от фокуса до главной плоскости линзы называется фокусным расстоянием f.

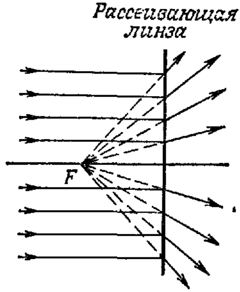
Вогнутые (рассеивающие) **линзы** ограничены двумя сферическими поверхностями, причем толщина линзы у середины меньше, чем у краев. Рассеивающие линзы могут быть

- двояковогнутыми (*а*),
- плоско-вогнутыми (*б*),
- выпукло-вогнутыми (*в*).



а б в

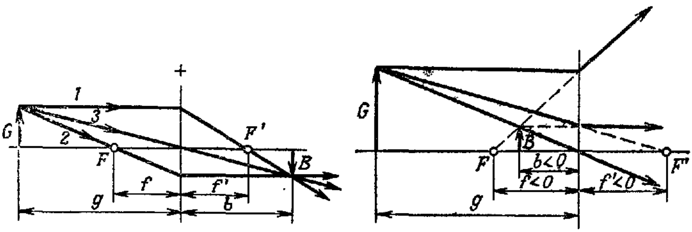
Лучи, параллельные оптической оси, после прохождения через рассеивающую линзу преломляются таким образом, что кажутся выходящими из фокуса F, расположенного перед линзой. Расстояние от фокуса до главной плоскости линзы называется фокусным расстоянием f. У вогнутой линзы оно выражается отрицательным числом и определяет ее рассеивающую способность.



25.4.2. Построение изображения в линзе

Для построения изображения нужно воспользоваться по крайней мере двумя из следующих трех лучей:

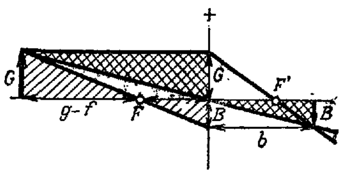
- Луч *1*, **параллельный оси**; после преломления в линзе он проходит через фокус;



- **фокальный** луч *2*; после преломления в линзе он параллелен оси;
- луч *3*, проходящий через **центр линзы; этот луч не меняет после** линзы своего направления.

25.4.3. Формула линзы

Если
β — увеличение линзы,
G — размер предмета,
B — размер изображения,
g — расстояние до предмета,
b — расстояние до изображения,
f — фокусное расстояние,



то в соответствии с рисунком имеем следующую формулу для **увеличения** линзы:

(О 25.10) $$\boxed{\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}.}$$

Далее, из рисунка следует, что

$$\frac{G}{B}=\frac{g-f}{f}=\frac{g}{b}; \qquad \frac{g}{f}-\frac{f}{f}=\frac{g}{b}.$$

После деления на g и перестановки получаем **основную формулу линзы:**

$$\boxed{\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{1}{b}.} \tag{О 25.11}$$

Обратите внимание:

- Если предмет и изображение расположены с одной стороны линзы, то расстояние до изображения отрицательно. Это **мнимое изображение.**
- У рассеивающих линз фокусное расстояние и расстояние до изображения отрицательны.

Справочная таблица

Изображение, образуемое собирающей линзой ($f > 0$)

Расстояние до предмета g	Расстояние до изображения b	Размер изображения B	Увеличение β	Вид изображения
1. $g > 2f$	$2f > b > f$	$B < G$	$\beta < 1$	Действительное, перевернутое
2. $g = 2f$	$b = 2f$	$B = G$	$\beta = 1$	То же
3. $2f > g > f$	$b > 2f$	$B > G$	$\beta > 1$	»
4. $g = f$	$b = \infty$	$B = \infty$	$\beta = \infty$	»
5. $g < f$	$b < 0$	$B > G$	$\beta > 1$	Мнимое, прямое

Изображение, образуемое рассеивающей линзой ($f < 0$)

6. g произвольное	$b < 0$	$B < G$	$\beta < 1$	Мнимое, прямое

25.4.4. Определение фокусного расстояния

Фокусное расстояние линзы зависит от материала линзы и кривизны поверхностей.

Если
f — фокусное расстояние линзы,
n — показатель преломления материала,
r_1 — радиус кривизны более искривленной поверхности,
r_2 — радиус кривизны менее искривленной поверхности,

то в случае тонких линз

(O 25.12) $$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).}$$

Справочная таблица

Виды линз

		f	r_1	r_2
Собирающие	двояковыпуклые	+	+	+
	плоско-выпуклые		+	∞
	вогнуто-выпуклые		+	−
Рассеивающие	двояковогнутые	−	−	−
	плоско-вогнутые		−	∞
	выпукло-вогнутые		−	+

Обратите внимание:

- Радиусы кривизны выпуклых поверхностей положительны, а радиусы кривизны вогнутых поверхностей отрицательны.
- У плоской поверхности радиус кривизны бесконечно велик.
- Формула (O 25.12) справедлива для тонких линз, толщина которых мала по сравнению с диаметром линзы и фокусным расстоянием.

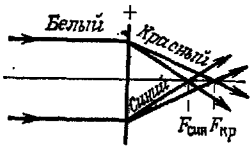
25.4.5. Аберрации

Если нет искажений, то каждой точке изображения однозначно соответствует точка предмета. При этом геометрическое расположение точек изображения должно быть подобно геометрическому расположению точек объекта. Сферические линзы лишь приближенно удовлетворяют этому требованию. Искажения изображения называются аберрациями.

Аберрации можно значительно уменьшить применением системы линз и, в частности, несферических линз.

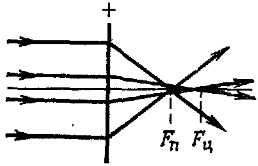
Хроматическая аберрация

Поскольку преломление света линзой зависит от его длины волны (синий свет преломляется сильнее, чем красный), изображение приобретает цветную кайму. Для ослабления хроматической аберрации применяют комбинацию выпуклой линзы из кронгласа с вогнутой линзой из флинтгласа (ахроматическая пара линз, или ахромат). Полная компенсация хроматической аберрации возможна лишь для двух значений длин волн.



Сферическая аберрация

Периферия линзы преломляет лучи сильнее, чем центральная часть, поэтому изображение оказывается нерезким. Для повышения резкости изображения линзы диафрагмируют. Указанная погрешность носит название сферической аберрации. Сферическую аберрацию можно скомпенсировать, применяя соответствующим образом подобранные пары линз.

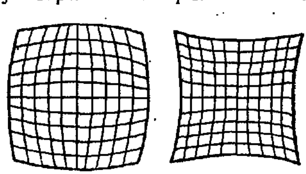


Кривизна поля изображения

Изображение, создаваемое простой линзой, не лежит в одной плоскости; поле изображения имеет вид выпуклой поверхности. Вследствие этого края изображения оказываются нерезкими. Для компенсации такой аберрации применяют специальные линзовые системы (*апланаты*).

Дисторсия

Изображение прямоугольной сетки искажается, приобретая подушкообразную или бочкообразную форму. При этом прямые линии искривляются наружу или внутрь, особенно на краях изображения.



К другим аберрациям относятся:

- астигматизм,
- кома.

Для их коррекции применяют сложные оптические системы, состоящие из трех и более линз. В современных объективах фотоаппаратов и кинокамер все указанные аберрации сведены к минимуму.

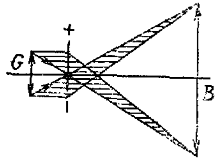
25.5. Оптические приборы

Оптические приборы предназначены для решения двух задач:

- получения изображений (фотоаппарат, проекционный аппарат и т. д.);
- увеличения угла зрения (лупа, микроскоп, подзорная труба и т. д.).

25.5.1. Проекционный аппарат

Для получения изображения в проекционном аппарате используется собирающая линзовая система — объектив. Предмет располагается перед объективом на расстоянии, составляющем от одного до двух фокусных расстояний ($f < g < 2f$). Изображение возникает за объективом на расстоянии, превышающем удвоенное фокусное расстояние ($b > 2f$), и является действительным, увеличенным и перевернутым (см. п. 3 в справочной таблице в разд. 25.4.3). Для регулировки резкости изображения объектив перемещают так, чтобы расстояние до предмета соответствовало расстоянию до изображения.



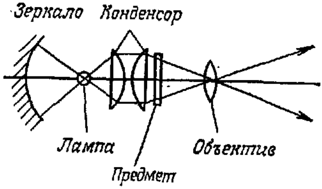
Определим размер проецируемого изображения.

Если
$\beta = B/G$ — увеличение,
b — расстояние до изображения,
f — фокусное расстояние,

то, преобразуя формулы (О 25.10), (О 25.11), получаем

$$\boxed{\beta = \frac{b}{f} - 1.} \qquad (\text{О } 25.13)$$

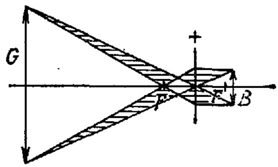
Для получения изображений непрозрачных предметов (журнальных страниц, рисунков и т. п.) используют **эпидиаскопы.** Освещение предмета в таком проекторе требует применения очень мощных ламп.



Для получения изображений прозрачных объектов (диапозитивов) применяются **диапроекторы.** К этому же классу приборов относятся кинопроекторы. Чтобы рационально использовать световой поток, создаваемый источником света в проекторе, применяются специальные приспособления. Лампу накаливания располагают в центре кривизны сферического зеркала. Благодаря этому значительная часть излучаемого назад света направляется вперед на предмет. Перед лампой находится конденсор, состоящий обычно из двух линз. Лампа располагается в фокусе первой линзы, так что лучи, выходящие из первой линзы, образуют параллельный пучок. Вторая линза превращает этот пучок в сходящийся. Объектив располагают приблизительно в фокусе второй линзы конденсора.

25.5.2. Фотоаппарат

Изображение в фотоаппарате создается объективом, который представляет собой собирательную линзовую систему. Расстояние до предмета, как правило, превышает удвоенное фокусное расстояние ($g > 2f$). Изображение действительное, уменьшенное и перевернутое (см. п. 1 справочной таблицы в разд. 25.4.3). Наводка на резкость производится перемещением объектива; таким образом добиваются того, чтобы расстояние до предмета соответствовало расстоянию до изображения.



Для нормального экспонирования пленки необходимо, чтобы на единицу площади приходилась определенная световая энергия. Она определяется продолжительностью освещения (выдержкой) и диаметром отверстия объектива, который регулируется диафрагмой.

Если
d — диаметр объектива (отверстия диафрагмы),
f — фокусное расстояние объектива,

то **относительное отверстие** $1/F$ объектива определяется выражением

$$\boxed{\frac{1}{F}=\frac{d}{f}.} \qquad (О\,25.14)$$

Обратите внимание:

- Наибольшее относительное отверстие объектива (при полностью открытой диафрагме) называется **светосилой.**
- Значение относительного отверстия объектива, определяемое формулой (О 25.14), справедливо лишь при фотографировании бесконечно удаленного объекта, когда $g = \infty$ и соответственно $b = f$. При съемке более близких объектов $b > f$. Тогда относительное отверстие следует определять как $1/F = d/b$, т. е. при неизменном диаметре светового пучка относительное отверстие становится меньше. Последнее особенно важно при съемке очень близких предметов.

Поскольку числитель в формуле (О 25.14) всегда равен единице, на объективах обычно указывают только значения знаменателя относительного отверстия, эти числа для краткости называют просто **«диафрагмой»**. Международным соглашением установлена **последовательность значений диафрагм:**

1,4 — 2 — 2,8 — 4 — 5,6 — 8 — 11 — 16 — 22 — 32.

Эти числа подобраны таким образом, что при переходе к следующему значению площадь отверстия диафрагмы уменьшается в 2 раза. Аналогично составлен ряд значений **продолжительности**

экспонирования (выдержки). На каждом шаге время выдержки удваивается:

1/1000 — 1/500 — 1/250 — 1/125 — 1/60 — 1/30 — 1/15 — 1/8 — 1/4 — 1/2 — 1.

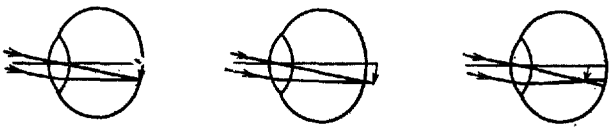
25.5.3. Глаз

Ход лучей в глазу аналогичен ходу лучей в фотоаппарате, причем роль объектива играет выпуклая линза — хрусталик. Однако в отличие от фотоаппарата установка на резкость производится не за счет перемещения объектива, а путем изменения фокусного расстояния хрусталика. Такой процесс происходит рефлекторно без участия сознания и называется **аккомодацией.**

Максимальное расстояние до резко видимого объекта обычно равно бесконечности; минимальное расстояние около 8—10 см. Минимальное расстояние резкого зрения увеличивается с возрастом человека.

Минимальное расстояние, на которое глаз может аккомодироваться без утомления, называется **расстоянием наилучшего зрения** s. Для нормального глаза $s = 25$ см.

При *дальнозоркости* минимальное расстояние возрастает из-за недостаточной преломляющей силы хрусталика. Дальнозоркость может быть скомпенсирована очками с выпуклыми линзами.



При *близорукости* глазное яблоко оказывается удлиненным и удаленные предметы видны не резко. Для компенсации близорукости уменьшают преломляющую силу хрусталика с помощью очков с рассеивающими линзами.

Для характеристики очковых стекол вместо фокусного расстояния f применяется обратная ему величина — **оптическая сила** D, которая измеряется в диоптриях (1 диоптрия = 1/м). Оптическая сила собирающих линз положительна, рассеивающих линз — отрицательна.

Угол зрения

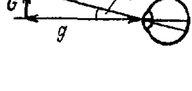
Углом зрения называется угол, под которым виден предмет. Он образован лучами, идущими от крайних видимых точек предмета, и характеризует размер изображения на сетчатке глаза.

Если

G — размер предмета,

g — расстояние до предмета,

δ_0 — угол зрения,



то

(O 25.15) $\boxed{\operatorname{tg}\delta_0=\frac{G}{g}.}$

Разрешающая способность глаза

Оптическая система глаза создает изображение предмета на сетчатке. К сетчатке подходит зрительный нерв, разветвляющийся на множество нервных волокон, оканчивающихся колбочками, которые обеспечивают цветное зрение днем, и палочками, которые обеспечивают черно-белое зрение в сумерках. Глаз способен различать две точки предмета в том случае, когда их изображения попадают на различные колбочки (или палочки). Это соответствует **минимальному углу зрения около 1′.**

Увеличение

Угол зрения можно увеличить с помощью оптических приборов.

Если
B — размер мнимого изображения в оптическом приборе,
b — расстояние до этого изображения,
δ — угол зрения прибора,

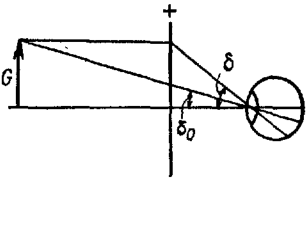
то

(O 25.16) $\boxed{\operatorname{tg}\delta=\frac{B}{b}.}$

Формулы (O 25.15) и (O 25.16) позволяют определить увеличение прибора.

Если
V — увеличение прибора,
δ — угол зрения при наличии прибора,
δ_0 — угол зрения в отсутствие прибора,

то



(O 25.17) $\boxed{V=\frac{\delta}{\delta_0}.}$

Обратите внимание:

- Согласно точной формуле, увеличение определяется как отношение тангенсов углов зрения. Вследствие малости углов зрения значения тангенсов можно заменить значениями аргументов.

25.5.4. Лупа

Лупа представляет собой собирающую линзу. Предмет располагается перед лупой на расстоянии, меньшем фокусного расстояния ($g < f$). Лупа создает мнимое, прямое и увеличенное изображение (см. п. 5 в справочной таблице в разд. 25.4.3). Изображение находится перед лупой, т. е. со стороны предмета ($b < 0$).

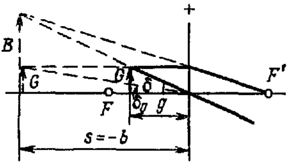
Если
V — увеличение лупы,
f — фокусное расстояние лупы,
s — расстояние наилучшего зрения, равное для нормального глаза 25 см,

то, поскольку без лупы расстояние наилучшего зрения до предмета равно s, а при использовании лупы и неаккомодированном (настроенном на бесконечность) глазе равно f, получаем

$$V = \frac{\delta}{\delta_0},$$

где $\delta \approx \operatorname{tg}\delta = G/f$ и $\delta_0 \approx \operatorname{tg}\delta_0 = G/s$. Отсюда следует формула для **нормального увеличения лупы** (при рассмотрении изображения неаккомодированным глазом):

(О 25.18) $$\boxed{V = \frac{s}{f}.}$$



Часто при рассматривании предметов через лупу глаз аккомодируется на расстояние наилучшего зрения s. При этом изображение находится не в бесконечности, а на расстоянии $s = -b$. Тогда

$$V = \frac{\delta}{\delta_0} \approx \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta_0} = \frac{B/s}{G/s} = \frac{B}{G} = \frac{s}{g},$$

где g вычисляется по формуле $1/f = 1/g - 1/s$, или

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f} = \frac{s+f}{sf}.$$

В итоге получаем формулу для увеличения лупы при аккомодации глаза на расстояние наилучшего зрения

$$V = \frac{s(s+f)}{sf},$$

или

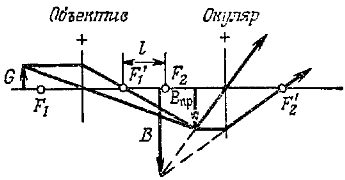
(О 25.19) $$\boxed{V = \frac{s}{f} + 1.}$$

Обратите внимание:

- Чем меньше фокусное расстояние, тем больше увеличение лупы.
- Максимальное увеличение, которое реально можно получить с помощью лупы, составляет 10—15. При большем увеличении качество изображения становится неудовлетворительным.

25.5.5. Микроскоп

Микроскоп состоит из двух собирающих линзовых систем: **объектива** с фокусным расстоянием f_1, равным нескольким миллиметрам, и **окуляра** с фокусным расстоянием f_2, равным нескольким сантиметрам. Предмет помещается непосредственно перед фокусом F_1 объектива. За объективом на расстоянии, превышающем $2f_1$, возникает **действительное увеличенное промежуточное изображение**. Оно располагается непосредственно за фокусом F_2 окуляра. Окончательное изображение, возникающее перед окуляром, будет увеличенным, мнимым и перевернутым (см. п. 3 и 5 справочной таблицы в разд. 25.4.3).



Если
l — оптическая длина тубуса (расстояние между фокальными точками F_1' и F_2),
f_1 — фокусное расстояние объектива,
f_2 — фокусное расстояние окуляра,
s — расстояние наилучшего зрения (25 см для нормального глаза),
V_1 — увеличение объектива, равное $\beta = b/g \approx l/f_1$,
V_2 — увеличение окуляра, равное s/f_2 (как у лупы),
V — общее увеличение микроскопа,

то

$$\boxed{V = V_1 V_2 = \frac{ls}{f_1 f_2}.} \tag{О 25.20}$$

Обратите внимание:

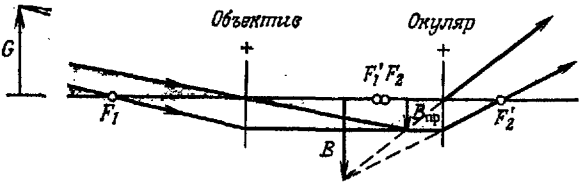
- Вследствие волновой природы света (см. разд. 26.2.4) максимальное увеличение микроскопа не может превышать примерно 2000.

25.5.6. Телескопы и бинокли

Телескопы, бинокли и подзорные трубы предназначены для увеличения угла зрения при наблюдении больших, но очень удаленных предметов.

Телескоп

Телескоп состоит из двух собирающих линзовых систем — **объектива** и **окуляра**. Предмет находится на очень большом расстоянии от объектива. Непосредственно за фокусом объектива перед оку-



ляром возникает промежуточное изображение; его расстояние от окуляра меньше фокусного расстояния последнего. Перед окуляром образуется *увеличенное*, *мнимое* и *перевернутое* окончательное изображение (см. п. 1 и 5 в справочной таблице разд. 25.4.3).

Если
V — увеличение телескопа,
f_1 — фокусное расстояние объектива,
f_2 — фокусное расстояние окуляра,
l — длина телескопа, т. е. расстояние от объектива до окуляра,
то

(О 25.21) $$\boxed{V = \frac{f_1}{f_2}}$$

и

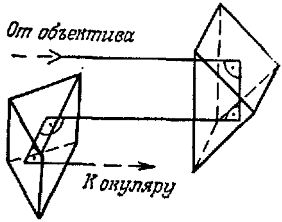
(О 25.22) $$\boxed{l = f_1 + f_2.}$$

Обратите внимание:

- Фокусы объектива и окуляра внутри телескопа $(F_1'$ и $F_2)$ практически совпадают.
- Обычно телескоп настраивают таким образом, что практически параллельные лучи от удаленного предмета после окуляра снова оказываются параллельными. Так возникает мнимое изображение, воспринимаемое неаккомодированным глазом.

Подзорная труба (полевой бинокль)

Принцип действия подзорной трубы аналогичен принципу действия телескопа. Чтобы получить *прямое изображение* предмета, на пути лучей внутри подзорной трубы располагают *оборачивающую линзу*. Расстояние от оборачивающей линзы до промежуточного изображения, создаваемого объективом, равно ее удвоенному фокусному расстоянию. На таком же расстоянии по другую сторону от оборачивающей линзы возникает второе промежуточное изображение (см. п. 2 справочной таблицы в разд. 25.4.3). Вследствие применения оборачивающей линзы длина подзорной трубы возрастает на величину, равную учетверенному фокусному расстоянию этой линзы.

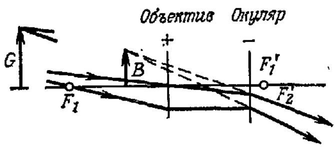


Для переворачивания изображения в призменном (полевом) бинокле используются две призмы, в каждой из которых направление распространения луча изменяется на 180° за счет полного внутреннего отражения. Первая призма изменяет направление луча в вертикальной, а вторая призма — в горизонтальной плоскости.

Увеличение подзорной трубы и полевого бинокля определяется формулой (O 25.21).

Труба Галилея (театральный бинокль)

Подзорная труба Галилея состоит из двух систем линз — собирающей (объектив) и рассеивающей (окуляр). В отличие от обычной подзорной трубы между объективом и окуляром не создается промежуточное изображение. Сходящийся пучок лучей из объектива попадает на окуляр и вновь становится расходящимся.



Труба Галилея дает *мнимое, немного увеличенное, прямое* и *яркое* изображение. Увеличение можно определить по формуле (O 25.21). Длина подзорной трубы Галилея (расстояние от объектива до окуляра) определяется выражением

(O 25.23) $\boxed{l = f_1 - |f_2|.}$

Обратите внимание:

- Положение задних фокальных точек объектива и окуляра (F_1' и F_2') практически совпадает.

25.6. Спектральный состав света

25.6.1. Источники света

Излучение нагретых тел

Каждое нагретое тело излучает электромагнитные волны. Диапазон излучаемых длин волн зависит от температуры. При повышении температуры диапазон длин волн (см. разд. 18.3.5) расширяется и смещается в сторону более коротких волн. При определенной температуре тела его излучение приходится на видимый диапазон (от 390 до 770 нм).

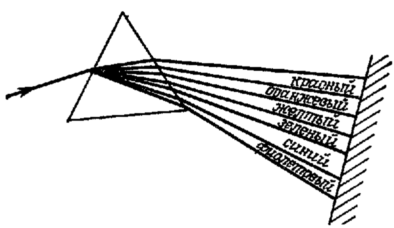
Люминесценция

Свечение, не вызываемое нагреванием тела, называется люминесценцией. Люминесценция возникает при переходе электрона в атоме с более удаленной орбиты на более близкую к ядру орбиту (см. разд. 37.4). Спектр люминесценции содержит линии с определенной длиной волны и зависит от структуры данного атома. Атом может испускать излучение только в том случае, если он находится в возбужденном состоянии, т. е. если электроны предварительно переведены на более высокие орбиты. Существует несколько видов люминесценции, различаемых по способу ее возбуждения.

- Электролюминесценция, возникающая при электрическом возбуждении.
- Хемолюминесценция, сопровождающая, например, процессы гниения.
- Флуоресценция, возбуждаемая более коротковолновым электромагнитным излучением или потоком частиц (электронов, протонов, α-частиц и др.).
- Фосфоресценция — флуоресценция в виде зависящего от температуры послесвечения, возникающего после прекращения облучения.

25.6.2. Дисперсия света

При прохождении света через призму он разлагается на составляющие с различными длинами волн. Причина этого явления состоит в том, что скорость света в веществе призмы зависит от длины волны. Как следует из формулы (О 25.4), показатель преломления и соответственно угол отклонения светового луча призмой зависят от длины волны.



При разложении белого света, т. е. света в видимом диапазоне, содержащего все длины волн, возникает цветовая полоса, которую называют **спектром.** Отдельные цвета этой полосы называются **спектральными цветами.**

Красный — оранжевый — желтый — зеленый — голубой — синий — фиолетовый.

Обратите внимание:

- Смена цвета происходит непрерывно и содержит множество полутонов. Разделение спектра на указанные выше цвета является условными. Каждому цвету соответствует определенный диапазон длин волн (см. справочную таблицу).

Справочная таблица

Области длин волн, отвечающие спектральным цветам

Ультрафиол. —	Фиол. —	Син. —	Зел. —	Желт. —	Оранж. —	Красн. —	Инфракр.
390 —	435 —	495 —	570 —	590 —	630 —	770	нм

25.6.3. Дополнительные цвета

Смешивая все спектральные цвета, мы снова получаем белый свет. Если же из полного спектра исключить один из цветов, то оставшиеся цвета в комбинации не дадут белого света; цвет такой комбинации называется дополнительным по отношению к исключенному цвету. Если к дополнительному цвету добавить ранее исключенный, то опять возникает белый свет.

Дополнительными называются смешанные или спектральные цвета, взаимно дополняющие друг друга до белого.

Справочная таблица

Дополнительные цвета

Исключенный цвет	Красный	Оранжевый	Желтый	Зеленый	Синий	Индиго	Фиолетовый
Цвет остатка	Сине-зеленый	Синий	Фиолетовый	Пурпурный	Оранжевый	Желтый	Желто-зеленый

Обратите внимание:

- Смешанные цвета в нижнем ряду таблицы, за исключением пурпурного, представляют собой спектральные цвета.

25.6.4. Спектры

При разложении света, излучаемого нагретыми твердыми телами, жидкостями или газами, возникает спектр испускания.

Непрерывный (сплошной) спектр

Излучение, испускаемое нагретыми твердыми телами и жидкостями, обладает непрерывным спектром, т. е. содержит все длины волн видимого диапазона без исключения.

Линейчатый спектр

Спектр свечения атомарных газов и паров представляет собой набор отдельных линий с характерными значениями длин волн, обусловленными структурой электронных оболочек атомов данного элемента.

При свечении молекулярных газов и паров возникают так называемые **полосатые спектры** — сгруппированные по определенному закону совокупности спектральных линий.

Количество и расположение линий в спектре излучения газа или пара зависят от структуры химического элемента или соединения. По спектру излучения с помощью **спектрального анализа** можно выявлять наличие отдельных элементов в соединении и определять химический состав вещества.

Спектр поглощения

В отличие от спектра испускания, который получается при разложении излученного телом света, спектр поглощения возникает, когда вещество поглощает из белого света отдельные спектральные линии. При этом получается непрерывный (сплошной) спектр, в котором отсутствуют отдельные спектральные линии.

Твердые тела и жидкости имеют широкие области поглощения. Газы и пары поглощают только излучение с теми длинами волн, которое они сами излучают. Это так называемые линии поглощения. Как и спектр испускания, спектр поглощения используется при спектральном анализе для обнаружения и идентификации веществ.

Наиболее изученным спектром поглощения является солнечный спектр. При прохождении света через газовую оболочку Солнца возникают многочисленные линии поглощения, которые называются **фраунгоферовыми линиями**. Важнейшие из них, обозначаемые буквами от А до К, приведены в спарвочной таблице.

Справочная таблица

Фраунгоферовы линии

Линия	A	B	C	D	E	F	G	H	K
λ, нм	760,8	686,7	656,3	589,3	527,0	486,1	430,8	396,8	393,4
Цвет	Темно-красный	Красный	Красный	Желтый	Зеленый	Сине-зеленый	Синий	Фиолетовый	Фиолетовый

Обратите внимание:

- **Некоторые** из фраунгоферовых **линий (например, А и В) возникают, возможно, при поглощении солнечного света в атмосфере Земли.**

● Длины волн, отвечающие линиям испускания некоторых газов в видимой области, приведены в табл. 36.

26. Волновая оптика

Во многих экспериментах свет проявляет себя как электромагнитная волна. Длины волн видимого света в вакууме лежат в пределах от 390 до 770 нм.

Частота (число колебаний) излучения определенного вида всегда постоянна, тогда как соответствующая ей длина волны зависит от фазовой скорости света в данной среде.

26.1. Интерференция

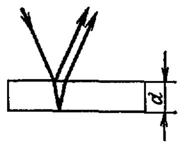
Под интерференцией понимают результат наложения колебаний и волн. Световые волны также интерферируют, если они **когерентны**, т. е. если они возникают из одного и того же волнового цуга в результате отражения, преломления или дифракции.

Интерферирующие лучи проходят различную длину пути. Если разность хода лучей равна четному числу полуволн, то происходит сложение волн и интенсивность увеличивается, если же разность хода равна нечетному числу полуволн, то происходит взаимная компенсация волн и интенсивность уменьшается.

26.1.1. Цвета тонких пленок

Падая на тонкую пленку, световой луч частично отражается от верхней, а частично от нижней поверхностей пленки. Разность фаз отраженных волн зависит от разности хода лучей, которая в свою очередь определяется различием путей и дополнительной разностью хода $\lambda/2$, вызванной изменением фазы на 180° при отражении от передней поверхности пленки (оптически более плотной среды). Оптическая разность хода лучей (при нормальном падении) равна $2dn$, так как скорость света в среде равна c/n.

Если
δ — разность хода при *нормальном* падении,
d — толщина пленки,
n — показатель преломления пленки,
λ — длина волны,



то

(O 26.1) $$\boxed{\delta = 2dn - \frac{\lambda}{2}.}$$

Из условия $\delta = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) следует выражение для длины волны, которой отвечает усиление интенсивности волн:

(O 26.2) $$\boxed{\lambda = \frac{4dn}{2k+1}.}$$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Из условия $\delta = (2k+1)\lambda/2$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ следует выражение для длины волны, которой отвечает взаимное ослабление волн:

$$\boxed{\lambda = \frac{2dn}{k}.} \qquad (k = 1, 2, 3\ \ldots) \tag{O 26.3}$$

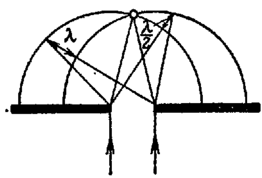
Обратите внимание:

- Если толщина пленки известна, можно определить длину волны, при которой волны гасят друг друга.
- Если известна длина волны, при которой волны гасят друг друга, можно определить толщину пленки.
- Подобные интерференционные эффекты наблюдаются и в тонких слоях воздуха между твердыми телами (например, между стеклянными пластинками). В этом случае также справедливы формулы (O 26.2) и (O 26.3).
- Аналогичные интерференционные явления происходят в тонких пленках на поверхности прозрачных и непрозрачных твердых тел. Поскольку оба луча отражаются от оптически более плотной среды с потерей фазы 180°, разность хода $\delta = 2dn$. Следовательно, условие (O 26.2) отвечает ослаблению, а условие (O 26.3) — усилению волн.

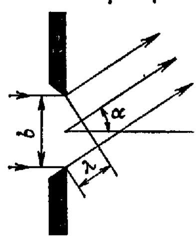
26.2. Дифракция

Подобно механическим волнам (см. разд. 20.3.4) световые волны могут испытывать дифракцию. Например, при падении света на край пластины наблюдается дифракция и свет распространяется в область тени. Наиболее важную роль играет дифракция на проволоке, щели и диафрагме.

26.2.1. Дифракция на щели



На краях щели в соответствии с принципом Гюйгенса образуются вторичные элементарные волны. Для определенных направлений распространения разность хода элементарных волн оказывается такой, что волны при наложении либо усиливаются (максимальная интенсивность), либо ослабляются (минимальная интенсивность).

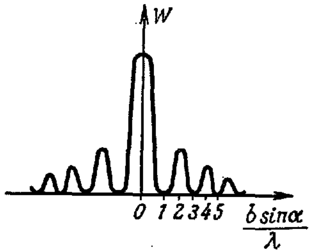


Если
b — ширина щели,
λ — длина волны,
$\alpha_{мин}$ — угол, определяющий направление на дифракционный минимум,
$\alpha_{макс}$ — угол, определяющий направление на дифракционный максимум,

то направление на **дифракционный минимум** определяется выражением

(О 26.4) $$\boxed{\sin\alpha_{\text{мин}} = k\frac{\lambda}{b}.}$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$



Соответственно для направления на **дифракционный максимум** имеем

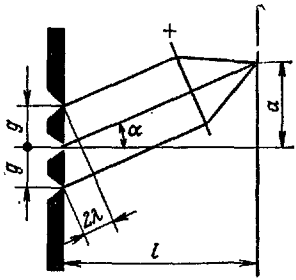
(О 26.5) $$\boxed{\sin\alpha_{\text{макс}} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{b}.}$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$

В направлении падающей волны ($\alpha = 0$) образуется **главный максимум**; амплитуды **вторичных максимумов** существенно меньше амплитуды главного максимума и убывают с ростом порядка k.

26.2.2. Дифракционная решетка

Дифракция на решетке происходит аналогично дифракции на щели. Однако при большом числе близко расположенных параллельных щелей дифракционные максимумы значительно сужаются. Расстояние между соответствующими точками соседних щелей (или сумма ширины щели и промежутка между щелями) называется **постоянной**, или **периодом** g дифракционной решетки. У хороших дифракционных решеток число щелей на 1 мм достигает 1700.



Если

$\alpha_{\text{макс}}$ — угол, определяющий направление на дифракционный максимум,
g — постоянная решетки,
λ — длина волны,
l — расстояние от решетки до экрана,
a — расстояние до максимума k-го порядка,

то в соответствии с рисунком

(О 26.6) $$\boxed{\sin\alpha_{\text{макс}} = k\frac{\lambda}{g},}$$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

где α определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha = a/l$.

Обратите внимание:

- Синус дифракционного угла пропорционален длине волны. Поэтому решетка в отличие от призмы преломляет красный свет сильнее всего.

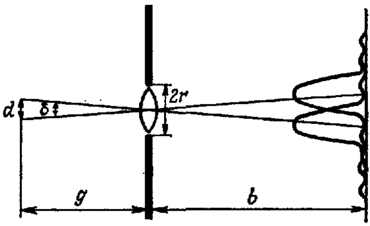
- Чем меньше постоянная решетки, тем больше угол дифракции при фиксированной длине волны.
- Если постоянная дифракционной решетки известна, то по положению дифракционных максимумов можно определить длину волны света.

26.2.3. Дифракционный спектр

Если на дифракционную решетку падает не монохроматический, а белый свет, то дифракционные максимумы, соответствующие различным значениям длины волны, располагаются в различных местах экрана. Таким образом возникает дифракционный спектр. Он называется **нормальным спектром**, так как протяженность цветовых зон соответствует диапазонам их длин волн. При разложении света, например, призмой (дисперсионный спектр) красная область оказывается растянутой по сравнению с синей и фиолетовой. При $k = 1, 2, \ldots$ возникают спектры 1-, 2-го, ... порядка.

26.2.4. Разрешающая способность оптических приборов

В каждом оптическом приборе (в том числе в глазу) на краях диафрагм, оправ и т. д. происходит дифракция света. Вследствие этого точки предмета отображаются не как точки, а в виде маленьких кружков, причем соседние кружки сливаются, так что их невозможно различить. Каждый прибор характеризуется **максимальной разрешающей способностью** (предельным разрешением). Она определяется минимальным углом (минимальным расстоянием), под которым различимы две соседние точки предмета. Это такое расстояние, при котором главный дифракционный максимум одной точки изображения совпадает с первым побочным максимумом соседней точки.



Если
δ — предельное разрешение, минимальный угол зрения,
d — минимальное расстояние между точками предмета, на котором они различимы,
λ — длина волны света,
r — радиус действующей диафрагмы объектива,
n — показатель преломления среды между предметом и объективом микроскопа,
α — угловая апертура, т. е. угол, под которым виден радиус выходного отверстия объектива из точки предмета,
$A = n \sin\alpha$ — численная апертура объектива,

то для разрешающей способности глаза и **подзорной трубы** справедлива формула

(О 26.7) $$\boxed{\delta = 0{,}61\,\frac{\lambda}{r},}$$

а для разрешающей способности **микроскопа** — формула

(О 26.8) $$\boxed{d = 0{,}61\,\frac{\lambda}{n\sin\alpha} = 0{,}61\,\frac{\lambda}{A}.}$$

Обратите внимание:

- Чтобы повысить одновременно разрешающую способность и светосилу подзорной трубы (телескопа), необходимо увеличить диаметр объектива.
- Разрешающая способность человеческого глаза составляет около 1′.
- Микроскопы с большой **численной апертурой** $A = n\sin\alpha$ позволяют разрешать точки на расстоянии порядка $d = \lambda/2$.
- Величина λ/n представляет собой длину световой волны в среде (иммерсионной жидкости) между предметом и объективом микроскопа; она меньше длины волны в воздухе.

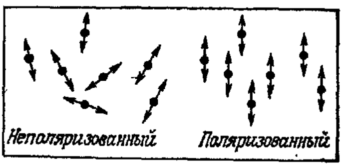
26.3. Поляризация

Поляризованной называется волна, в которой существует предпочтительное направление колебаний. Различают следующие виды поляризации:

- линейная (плоская) поляризация,
- круговая (циркулярная) поляризация,
- эллиптическая поляризация.

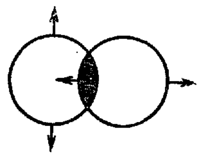
Поляризация возможна только у поперечных волн. Волну с круговой или эллиптической поляризацией можно разложить на две линейно-поляризованные волны.

Свет называется линейно-поляризованным, если в нем происходят колебания только в одном направлении, перпендикулярном направлению распространения. Поляризованными могут быть только поперечные волны.



Естественный свет неполяризован, так как он излучается атомами с совершенно произвольной ориентацией в пространстве. За направление колебаний в линейно-поляризованной световой волне принимают направление колебаний вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$. Направлением поляризации волны называют направление вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ (см. разд. 34.2.2).

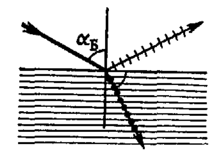
Существуют различные способы получения поляризованного света. Свет представляет собой поперечные волны. Устройства, с помощью которых из естественного получают поляризованный свет, называются **поляризаторами**. Для обнаружения поляризации служат **анализаторы**, которые по своему принципу действия идентичны поляризаторам.



Поляризатор пропускает только компоненту с определенным направлением колебаний, выделяя ее из естественного света. В зависимости от ориентации анализатора поляризованная компонента либо проходит, либо не проходит через него. При скрещенном положении поляризатора и анализатора, когда они повернуты друг относительно друга на 90°, световые волны сквозь них не проходят.

26.3.1. Поляризация при отражении

На границе раздела двух сред часть световых лучей испытывает отражение, а остальные лучи преломляются. Отраженный и преломленный лучи оказываются частично линейно-поляризованными. В отраженном луче колебания происходят преимущественно перпендикулярно плоскости падения, в преломленном — в плоскости падения. При определенном угле падения отраженный луч оказывается полностью линейно-поляризованным.



Закон Брюстера:

> Если угол падения светового луча на границу раздела равен **поляризационному углу** (углу Брюстера), то отраженный луч полностью линейно поляризован. В этом случае отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол.

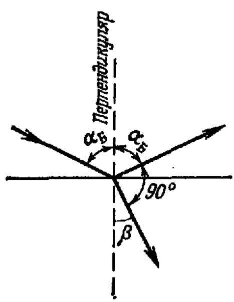
Если

n — показатель преломления,

$\alpha_Б$ — угол Брюстера, т. е. угол падения, при котором происходит полная поляризация,

то в соответствии с рисунком

$$\beta = 90° - \alpha_Б.$$



Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin \alpha_Б}{\sin \beta} = n.$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha_Б}{\sin(90^\circ-\alpha_Б)}=\frac{\sin\alpha_Б}{\cos\alpha_Б}=n$$

и, наконец,

(О 26.9) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha_Б=n.}$

Обратите внимание:

- Для стекла угол Брюстера $\alpha_Б = 57^\circ$.

26.3.2. Поляризация при двойном лучепреломлении

Двойным лучепреломлением называется способность некоторых веществ расщеплять падающий световой луч на два луча — обыкновенный (o) и необыкновенный (e), которые распространяются в различных направлениях с различной фазовой скоростью и поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

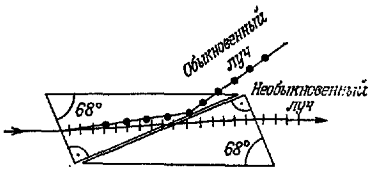
Вещества, в которых фазовая скорость электромагнитных волн зависит от направления распространения, называются **анизотропными**. В материалах с двойным лучепреломлением анизотропия зависит также от поляризации.

В то время как обыкновенный луч подчиняется обычному закону преломления, необыкновенный луч преломляется по иному закону (даже при угле падения $\alpha = 0$).

Двоякопреломляющими свойствами обладают:

- многие кристаллы (исландский шпат, кварц, слюда, турмалин и др.),
- многие прозрачные вещества (стекло, искусственные смолы), находящиеся под действием внутренних или внешних сил,
- некоторые изотропные вещества под действием электрического поля (эффект Керра).

Выделив один из двух преломленных лучей, можно получить поляризованный свет. Его энергия составляет не более 50% энергии падающего луча.



В призме Николя, которая представляет собой специальным образом обработанный кристалл исландского шпата (передние грани отшлифованы под определенным углом, кристалл распилен и склеен канадским бальзамом), обыкновенный луч отводится за счет полного внутреннего отражения от плоскости склейки.

В других поляризаторах один из лучей поглощается в веществе. Этот эффект называется **дихроизмом**. Например, в турмалине при толщине 1 мм обыкновенный луч поглощается почти полностью.

Поляризаторы, имеющие большую площадь при незначительной толщине, называются **поляроидами.** Поляроиды представляют собой искусственные пленки, обладающие сильным дихроизмом; они состоят из расположенных параллельно друг другу игольчатых кристаллов герапатита (сернокислого иодхинина).

Существуют также поляроиды, в которых гигантские молекулы ориентированы благодаря сильному напряжению, в результате чего сохраняется остаточное двойное лучепреломление.

26.3.3. Двойное лучепреломление, вызванное напряжениями

Многие прозрачные изотропные вещества становятся двоякопреломляющими в результате упругих деформаций (сжатия, растяжения, изгиба, кручения). Если такое вещество поместить между скрещенными поляроидами, то в тех местах, где под действием деформаций меняется показатель преломления, будут видны просветления.

Описанный эффект используется для исследования распределения напряжений в сложных или громоздких узлах и конструкциях. На пути лучей между скрещенными поляроидами помещают выполненную в масштабе модель конструкции. При соответствующей нагрузке в местах напряжений возникают просветления. Линии или области одинаковой яркости или цвета (**изохромы**) соответствуют линиям или областям одинаковых напряжений. В качестве материала для моделей в **оптическом методе определения напряжений** применяют прозрачные синтетические материалы, например феноловые смолы.

26.3.4. Вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества (их называют **оптически активными**) способны поворачивать плоскость поляризации распространяющегося через них линейно-поляризованного света. Угол поворота плоскости поляризации пропорционален длине пути света в веществе, а при использовании растворов активного вещества пропорционален их концентрации.

Если
α — угол поворота плоскости поляризации,
α_0 — удельное вращение,
l — длина кюветы с жидкостью (путь света в активной среде),
m — масса оптически активного вещества,
V — объем раствора,

то

(О 26.10) $$\boxed{\alpha = \alpha_0 \frac{lm}{V}.}$$

α	α_0	l	m	V
град	град · см³/(дм · г)	дм	г	см³

Обратите внимаиие:

- Числовые значеиия удельного вращения некоторых веществ, приведенные в справочной таблице, даны для водных растворов при $t = 20°C$ и длины волны света $\lambda = 589{,}3$ нм (D-линия).
- Поскольку угол поворота плоскости поляризации легко измерить, формулу (О 26.10) можио использовать для определения концентрации растворов, например раствора сахара.

Справочная таблица

Удельное вращение некоторых водных растворов

	α_0, град·см³/(дм·г)	Направление вращения
Тростниковый сахар	+66,44	Правое
Виноградиый сахар	+52,50	Правое
Фруктовый сахар	−91,90	Левое

Обратите виимание:

- Направление вращения (правое или левое) отвечает наблюдению навстречу направлению распространения света.

27. Фотометрия

Диапазон электромагнитных волн охватывает около 50 октав[1]), из которых на видимый свет приходится только одна октава. Этот диапазон **длин волн от 390 до 770 нм** и называют светом в узком смысле слова.

Следует различать **общие величины**, характеризующие любое электромагнитиое излучение, и специфические **фотометрические величины**. В то время как первые из них объективно характеризуют общие энергетические свойства излучеиия, вторые выражают субъективное восприятие света человеком.

27.1. Общие величины, характеризующие излучение

Энергия излучения тела обозначается через W или Q_e. Мощность излучеиия (или поглощения) называется также **потоком излучения:**

(О 27.1) $$\boxed{\Phi_e = \frac{W}{t}.}$$

	Φ	W	t
СИ	Вт	Дж	с

[1]) Октава — интервал частот (или длин волн), у которого отношение граничных частот равно 1 : 2.

Если мощность не постоянна во времени, вводится понятие мгновенной мощиости

(О 27.2) $$\boxed{\Phi_e = \frac{dW}{dt}.}$$

Энергия излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности приемиика, иазывается **энергетической экспозицией:**

(О 27.3) $$\boxed{H_e = \frac{W}{A_{пр}}}$$

	H	W	A
СИ	Дж/м²	Дж	м²

или при неравномерном распределении энергии

(О 27.4) $$\boxed{H_e = \frac{dW}{dA_{пр}}.}$$

Мощиость нзлучения, приходящаяся иа едииицу площади поверхности приемника, иазывается **энергетической освещенностью (поверхностной плотностью потока излучения):**

(О 27.5) $$\boxed{E_e = \frac{\Phi_e}{A_{пр}}.}$$

	E	Φ	A
СИ	Вт/м²	Вт	м²

При неравномерном распределеиии излучения, падающего иа поверхность,

(О 27.6) $$\boxed{E_e = \frac{d\Phi_e}{dA_{пр}}.}$$

Мощность источника излучеиия, приходящаяся иа единицу телесного угла, называется **эиергетической силой света (силой излучения)** и обозначается I_e:

(О 27.7) $$\boxed{I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega},}$$

	I	Φ	Ω
СИ	Вт/ср	Вт	ср

или, если излучение неравномерно распределено по телесному углу:

(О 27.8) $$\boxed{I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}.}$$

Наконец, вводится понятие **плотности излучения (энергетической яркости или лучистости)** B_e, которая определяется как поток излучения, приходящийся на единичный телесный угол и единицу поверхности излучателя:

(О 27.9) $$\boxed{B_e = \frac{\Phi_e}{\Omega A_{изл}} = \frac{I_e}{A_{изл}},}$$

	B	Φ	Ω	A
СИ	Вт/(ср · м²)	Вт	ср	м²

или в дифференциальной форме

(О 27.10) $$\boxed{B_e = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega\, dA_{изл}} = \frac{dI_e}{dA_{изл}}.}$$

Обратите внимание:

- Во всех выражениях, где фигурирует площадь $A_{пр}$ или $A_{изл}$, предполагается, что излучение падает на поверхность или излучается перпендикулярно ей. Если это не так, площадь поверхности надо умножить на $\cos\alpha$, где α — угол между направлением распространения излучения и нормалью к поверхности.
- Индекс «е» вводится для того, чтобы отличать общие энергетические величины от фотометрических величин; в остальном обозначения в приведенных выше формулах и соотношения справедливы и для фотометрических величин.

Справочная таблица

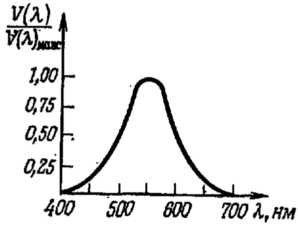
Сравнение величин, характеризующих излучение, и фотометрических величин

Общие величины		Единицы	Фотометрические величины	Единица
Энергия излучения	W, Q_e	Дж	Световая энергия (количество света) W	лм · с
Поток излучения (мощность излучения)	Φ_e	Вт	Световой поток Φ	лм
Энергетическая экспозиция	H_e	Дж/м²	Световая экспозиция H	лк · с
Энергетическая освещенность (поверхностная плотность потока излучения)	E_e	Вт/м²	Освещенность E	лк
Сила излучения (энергетическая сила света)	I_e	Вт/ср	Сила света I	кд
Энергетическая яркость	B_e	Вт/(ср · м²)	Яркость B	кд/м²

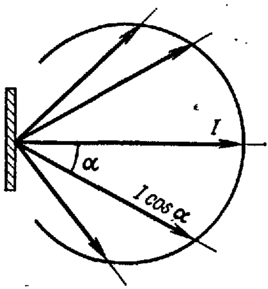
27.2. Фотометрические величины

27.2.1. Спектральная видность

В фотометрии действие света характеризуется не энергией или мощностью излучения, а по его восприятию человеческим глазом, которое зависит от длины волны. Отношение светового потока (который является физиологической величиной) к потоку излучения зависит от длины волны и называется спектральной видностью $V(\lambda)$. На рисунке представлен график относительной спектральной видности, т. е. ее максимальное значение принято равным единице. Максимум спектральной видности соответствует длине волны **555 нм** и составляет **680 лм/Вт**.



При всех других значениях длины волны поток излучения 1 Вт соответствует световому потоку менее 680 лм. Так как у всех источников света бо́льшая часть энергии приходится на длины волн, лежащие вне диапазона видимого света (390—770 нм), их «светоотдача» составляет всего лишь 10—50 лм/Вт.

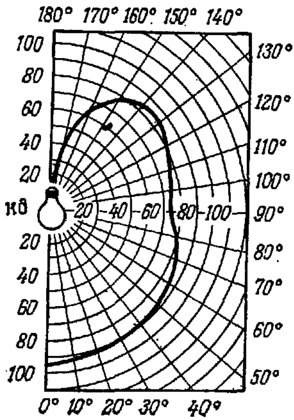


27.2.2. Сила света

Сила света — одна из основных величин международной системы единиц СИ; она измеряется в канделах (кд) и обозначается через I.

Определение основной единицы силы света — канделы.

> Кандела — это сила света, излучаемого черным телом перпендикулярно поверхности площадью 1/60 см² при температуре 2042,5 К (температура затвердевания платины при нормальном давлении).



Сила света обычно зависит от направления; эта зависимость характеризуется **диаграммой направленности** излучателя.

Наиболее правильную диаграмму направленности имеет плоская, диффузно излучающая поверхность. Так как в направлении, составляющем угол α с нормалью к поверхности, сила света равна $I\cos\alpha$, диаграмма направленности представляет собой окружность. Такая излучающая поверхность называется **излучателем Ламберта.**

Диаграммы направленности других излучателей, например, ламп накаливания, имеют менее регулярный характер. На рисунке изображена диаграмма направленности обычной лампы накаливания со световым потоком $\Phi_{\text{полн}} = 1000$ лм (см. разд. 27.2.4). Диаграммы направленности ламп с другим световым потоком (см. табл. 37), можно найти с помощью пересчета.

27.2.3. Яркость

Яркостью B называется отношение силы света к площади светящейся поверхности.

Единица СИ яркости: $[B] = \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: стильб $\left(\text{сб} = \frac{\text{кд}}{\text{см}^2}\right)$.

Если
B — яркость источника или отражающей поверхности,
I — сила света,
A — площадь светящейся поверхности,

то

(О 27.11) $$\boxed{B = \frac{I}{A}.}$$

	B	I	A
СИ	кд/м^2	кд	м^2
80	сб	кд	см^2

Соотношение между единицами: $1\ \text{сб} = 1\ \frac{\text{кд}}{\text{см}^2} = 10^4\frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$.

Обратите внимание:

- В случае наклонной или искривленной излучающей поверхности вместо площади A вводится так называемая **кажущаяся поверхность**, равная проекции излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению распространения.
- Для излучателя Ламберта (см. разд. 27.2.2) яркость не зависит от направления.
- При яркости, превышающей примерно 0,75 кд/см^2, происходит сужение зрачка глаза.

Справочная таблица

Яркость некоторых источников света

Источник	B, кд/см²
Ночное небо	10^{-7}
Облачное небо	до 0,3
Голубое небо	до 1
Луна	0,25
Солнце у горизонта	600
Солнце в полдень	до 150 000
Люминесцентная лампа	0,2—0,4
Пламя свечи	до 1
Вольфрамовая лампа накаливания, матовая	5—40
Вольфрамовая лампа накаливания, прозрачная	200—3 000
Электрическая угольная дуга	до 18 000
Ртутная лампа высокого давления	25 000—150 000
Ксеноновая лампа высокого давления	50 000—1 000 000

27.2.4. Световой поток

Световым потоком Φ называется произведение силы света на величину телесного угла.

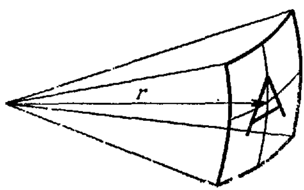
Единица СИ светового потока: $[\Phi]$ = люмен (лм) = кд·ср.

Телесный угол Ω характеризуется отношением площади поверхности, вырезаемой на сфере конусом с вершиной в центре сферы, к квадрату ее радиуса: $\Omega = A/r^2$.

Единица СИ телесного угла: $[\Omega]$ = стерадиан (ср) $= \dfrac{\text{м}^2}{\text{м}^2} = 1$.

Обратите внимание:

- Полный телесный угол составляет 4π ср.
- Телесный угол 1 ср соответствует круговому конусу с углом раскрытия 65,6°.



Если
Φ — световой поток,
I — сила света, постоянная внутри телесного угла Ω,
Ω — телесный угол,

то

(О 27.12) $\boxed{\Phi = I\Omega.}$

	Φ	I	Ω
СИ	лм	кд	ср

В том случае, когда сила света не постоянна в пределах телесного угла, имеем

(О 27.13) $$\boxed{\Phi = \int I\, d\Omega.}$$

Из (О 27.13) следует формула для полного светового потока источника света:

(О 27.14) $$\boxed{\Phi_{\text{полн}} = \int_0^{4\pi} I\, d\Omega.}$$

Обратите внимание:

- Значения полного светового потока важнейших источников света см. в табл. 37.

27.2.5. Световая энергия (количество света)

Световой энергией Q называется произведение светового потока на время его действия.

Единица СИ световой энергии: $[Q]$ = люмен-секунда (лм·с)

Если
Q — световая энергия,
Φ — световой поток,
t — время,
то

(О 27.15) $$\boxed{Q = \Phi t.}$$

	Q	Φ	t
СИ	лм·с	лм	с

Если световой поток Φ не постоянен во времени, то

(О 27.16) $$\boxed{Q = \int \Phi\, dt.}$$

27.2.6. Освещенность

Освещенностью E называется отношение светового потока к площади освещаемой поверхности.

Единица СИ освещенности: $[E]$ = люкс (лк) = лм/м^2.

Если
E — освещенность,
Φ — световой поток, падающий на поверхность A,
A — площадь освещаемой поверхности,

α — угол между направлением распространения света и нормалью к поверхности,

r — расстояние между источником света и освещаемой поверхностью,

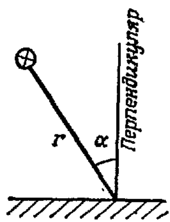
то

(О 27.17) $$\boxed{E = \frac{\Phi}{A},}$$

	E	Φ	A
СИ	лк	лм	$м^2$

или при неравномерном распределении светового потока

(О 27.18) $$\boxed{E = \frac{d\Phi}{dA}.}$$



Заменяя в (О 27.17) Φ на $I\Omega$, где при наклонном падении $\Omega = A\cos\alpha/r^2$, получаем важное соотношение

(О 27.19) $$\boxed{E = \frac{I\cos\alpha}{r^2}.}$$

	E	I	r
СИ	лк	кд	м

Обратите внимание:

- При увеличении расстояния освещенность убывает обратно пропорционально его квадрату.
- Силу света I можно определить по полному световому потоку источника с помощью диаграммы направленности. Численные значения см. в табл. 37.

Справочная таблица

Освещенность, создаваемая естественными источниками

Источник	E, лк
Солнечный свет летом	100 000
Солнечный свет зимой	10 000
Облачное небо летом	5 000—20 000
Облачное небо зимой	1 000—2 000
Полная луна ночью	0,2
Безоблачное ночное небо (без луны)	0,0003

Справочная таблица

Нормальная освещенность (в люксах)

Объект \ Требования к освещению	Низкие	Средние	Высокие
Жилые помещения, общее освещение	40	80	150

Объект \ Вид работы	Грубая	Средняя	Тонкая	Очень тонкая
Производственные помещения, школы				
Только общее освещение	40	80	150	300
Общее освещение	20	30	40	50
и местное освещение	100	300	1000	5000

Объект \ Интенсивность движения	Низкая	Средняя	Высокая	Очень высокая
Переходы и лестницы	15		30	
Улицы и площади	3	8	15	30
Заводские дворы	3		15	

27.2.7. Световая экспозиция

Световой экспозицией H называется произведение освещенности на продолжительность освещения.

Единица СИ световой экспозиции: $[H]$ = люкс·секунда (лк·с).

Если
H — световая экспозиция,
E — освещенность,
t — время,
Q — световая энергия,
A — площадь освещаемой поверхности,

то с учетом того, что $E = \Phi/A$ (О 27.17) и $\Phi t = Q$ (О 27.15), имеем

(О 27.20) $$\boxed{H = Et = \frac{Q}{A}.}$$

	H	E	t	Q	A
СИ	лк · с	лк	с	лм · с	$м^2$

Если освещенность не постоянна во времени, то

(О 27.21) $$\boxed{H = \int E\, dt.}$$

Обратите внимание:

- Экспонометры для фотографии позволяют определять по освещенности время экспонирования (выдержку), необходимое для получения световой экспозиции, обеспечивающей желательное почернение пленки.

27.3. Фотометры

Для измерения фотометрических величин служат фотометры, в которых может использоваться как субъективное сравнение силы света, так и объективные измерения.

27.3.1. Измерение силы света

Сила света определяется путем сравнения. Если два источника света создают на одинаковых поверхностях одинаковую освещенность, то в соответствии с (О 27.19)

$$E = I_1/r_1^2 = I_2/r_2^2$$

или

$$I_1/I_2 = r_1^2/r_2^2.$$

Отсюда для неизвестной силы света I_2 имеем

(О 27.22) $$\boxed{I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}.}$$

Обратите внимание:

- Формула (О 27.22) справедлива только в том случае, когда оба источника света создают одинаковую освещенность на поверхностях и имеют приблизительно одинаковый спектральный состав.

Уравнивание освещенностей, создаваемое обоими источниками, достигается путем изменения расстояния от источников света до поверхности. Как вспомогательные средства используются, например,

- фотометр Бунзена с масляным пятном,
- фотометрический куб Люммера и Бродхуна.

27.3.2. Измерение полного светового потока

Для измерения полного светового потока какого-либо источника света, например лампы накаливания, применяется фотометрический шар Ульбрихта. Это полая сфера, внутренняя поверхность которой имеет высокий коэффициент отражения. Вследствие многократного отражения от стенок неравномерность распределения света сглаживается. Измеряется освещенность одного из участков стенки. Умножая ее на площадь поверхности шара $4\pi r^2$, находят полный световой поток $\Phi_{полн}$ (с точностью до коэффициента отражения стенки).

27.3.3. Измерение освещенности

Для измерения освещенности используются люксметры. Люксметр представляет собой микроамперметр, подключенный к фотоэлементу (как правило, селеновому). Для согласования спектральной чувствительности фотоэлемента V_λ с кривой видности глаза используются фильтры.

В последнее время для измерения освещенности стали применять фотосопротивления (главным образом в экспонометрах для фотографии). Недостаток таких приборов состоит в том, что для их работы необходим источник питания.

Э ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

28. Цепи постоянного тока

28.1. Электрический ток

Электрический ток в проводнике создается так называемыми **свободными электронами**, движущимися с относительно малой скоростью.

Электрический ток способен оказывать:

- тепловое действие,
- химическое действие,
- магнитное действие.

28.1.1. Сила тока

Сила тока представляет собой одну из основных величин международной системы единиц (СИ); она измеряется в амперах (А).

Определение единицы силы тока — ампер:

> Ампер — это сила такого электрического тока, который проходя по двум прямолинейным параллельным бесконечным проводникам, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает на каждом участке длиной 1 м силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

28.1.2. Количество электричества (электрический заряд)

> Электрическим зарядом называется произведение силы тока на время протекания тока.

Единица СИ заряда: $[Q]$ = ампер-секунда (А·с) = кулон (Кл).

Если

Q — заряд, протекающий за время t через поперечное сечение проводника,

t — продолжительность протекания тока,

I — сила постоянного тока (не изменяющаяся за время t),

то

(Э 28.1) $\boxed{Q = It.}$

	Q	I	t
СИ	Кл = А·с	А	с

Если сила тока не постоянна во времени, т. е. $i = i(t)$, где $i(t)$ — мгновенное значение силы изменяющегося во времени тока, то

(Э 28.2) $$\boxed{Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt.}$$

Соотношение между единицами заряда

---

1 ампер-час (А·ч) = 3600 Кл

Наименьшим электрическим зарядом обладают элементарные частицы — электрон (отрицательный заряд) и протон (положительный заряд). Этот наименьший заряд называется **элементарным электрическим зарядом**

(Э 28.3) $$\boxed{e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл.}}$$

О б р а т и т е в н и м а н и е:

- Любой электрический заряд представляет собой целое кратное элементарного электрического заряда e.
- Заряд 1 Кл соответствует заряду приблизительно $6{,}24 \cdot 10^{18}$ электронов.

28.2. Напряжение (разность потенциалов)

28.2.1. Напряжение (ЭДС) источника

Появление электрического тока обусловлено **напряжением (разностью потенциалов)** между полюсами источника. Напряжение источника часто называют **электродвижущей силой (ЭДС)**.

В результате процессов, происходящих в источнике напряжения, у **отрицательного полюса** возникает избыток, а у **положительного полюса** — недостаток электронов. Во внешней цепи электроны перемещаются от участков с их избытком к участкам с их недостатком, т. е. от отрицательного полюса к положительному. Однако еще до того, как была установлена эта закономерность, условились так определять направление тока:

> Ток во внешней цепи течет от положительного полюса к отрицательному.

Справочная таблица

Некоторые используемые на практике напряжения

	U, В
Железоникелевый аккумулятор (один элемент)	1,2
Свинцовый аккумулятор (один элемент)	2
Электрическая сеть автомобиля	6 или 12
Осветительная сеть	127 или 220
Трамвай	550
Электровоз	до 15 000
Линия электропередачи высокого напряжения	380 000 и выше

28.2.2. Падение напряжения

Напряжение между двумя произвольными точками проводника с током называется падением напряжения. Оно составляет часть ЭДС источника.

Напряжением между двумя точками проводника называется отношение мощности, выделяющейся на данном участке проводника, к силе тока, текущего в проводнике.

Единица СИ напряжения: $[U] = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} =$ вольт (В).

Определение единицы напряжения — вольт:

Вольт — напряжение (разность потенциалов) между двумя точками проводника, при котором на этом участке проводника при токе 1 А выделяется мощность 1 Вт.

28.3. Электрическое сопротивление

Электрическое сопротивление определяет силу тока, текущего по цепи при заданном напряжении.

Под сопротивлением R понимают отношение напряжения на концах проводника к силе тока, текущего по проводнику.

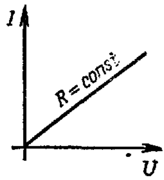
Единица СИ сопротивления: $[R] = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}.$

Определение единицы сопротивления — ом:

Ом представляет собой электрическое сопротивление участка проводника, по которому при напряжении 1 В протекает ток 1 А.

Если
R — сопротивление проводника,
U — напряжение,
I — сила тока,

то в соответствии с **законом Ома**



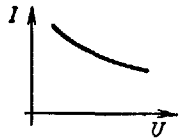
(Э 28.4) $\boxed{R = \frac{U}{I}.}$

	R	U	I
СИ	Ом	В	А

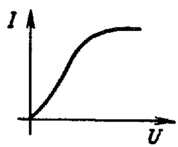
Сила тока в проводнике прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению.

Обратите внимание:

- Закон Ома справедлив и для участка цепи.
- Вольт-амперная характеристика (связь между напряжением и током) имеет вид прямой только для постоянного сопротивления. Однако сопротивление проводников зависит от температуры (см. разд. 28.3.2).



- В газоразрядных лампах напряжение является функцией тока $U = f(I)$. На некотором участке вольт-амперная характеристика $U(I)$ становится падающей, т. е. при увеличении тока напряжение убывает.
- Если число носителей заряда ограничено (как, например, в электронных лампах), то при увеличении напряжения сила тока стремится к определенному максимальному значению (току насыщения). Кривая $I(U)$ имеет область насыщения.



Величина, обратная сопротивлению R, называется **электрической проводимостью** G.

(Э 28.5) $\boxed{G = \frac{1}{R}.}$

	G	R
СИ	См	Ом

Единица СИ проводимости: $[G] = \frac{1}{\text{Ом}} =$ сименс (См).

28.3.1. Удельное сопротивление

Если

R — сопротивление проводника,
ρ — удельное сопротивление материала проводника (см. табл. 39),
l — длина проводника,
A — сечение проводника,

то

(Э 28.6) $$\boxed{R = \frac{\rho l}{A}.}$$

	R	ρ	l	A
СИ	Ом	Ом · м	м	м^2
КД	Ом	Ом · мм^2/м	м	мм^2
КД	Ом	Ом · см	см	см^2

Обратите внимание:

- Удельное сопротивление ρ зависит от температуры (см. разд. 28.3.2).

Величина, обратная удельному сопротивлению ρ, называется **удельной проводимостью σ**:

(Э 28.7) $$\boxed{\sigma = \frac{1}{\rho}.}$$

	σ	ρ
СИ	См/м	Ом · м
КД	См · м/мм^2	Ом · мм^2/м

28.3.2. Зависимость сопротивления от температуры

Удельное сопротивление проводников и непроводников зависит от температуры.

> Сопротивление металлических проводников увеличивается с повышением температуры.
> У полупроводников сопротивление сильно уменьшается при повышении температуры.

У некоторых металлов при температуре, близкой к абсолютному нулю, сопротивление скачком уменьшается до нуля (явление **сверхпроводимости**).

Сопротивление константана (60% Cu, 40% Ni) и манганина (86% Cu, 2% Ni, 12% Mn) очень слабо зависит от температуры. В таблицах значения удельного сопротивления проводников обычно приводятся для температуры 20°C. Сопротивление или удельное сопротивление при других значениях температуры можно найти пересчетом.

Если

ρ_t — удельное сопротивление при температуре t,
ρ_{20} — удельное сопротивление при температуре 20°C (табличное значение),
R_t — сопротивление проводника при температуре t,
R_{20} — сопротивление того же проводника при температуре 20°C,
α — температурный коэффициент сопротивления (значения α при 20°C приведены в табл. 40),
t — температура,

то

(Э 28.8) $$\boxed{\rho_t = \rho_{20}\,[1 + \alpha\,(t - 20°\mathrm{C})],}$$

или

	ρ R	α	t
СИ	как в	1/K	°C
КД	(Э 28.6)		

(Э 28.9) $$\boxed{R_t = R_{20}\,[1 + \alpha\,(t - 20°\mathrm{C})].}$$

Температурным коэффициентом сопротивления называется отношение относительного изменения сопротивления (или удельного сопротивления) к изменению температуры:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R\,\Delta t} = \frac{\Delta \rho}{\rho\,\Delta T}.$$

28.4. Электрическая цепь

В электрической цепи электроны движутся вне источника от отрицательного к положительному полюсу, а внутри источника — от положительного полюса к отрицательному.

Во всех точках неразветвленной электрической цепи сила тока остается одинаковой.

Источник напряжения обладает **внутренним сопротивлением** $R_{\text{внутр}}$. Значения внутреннего и внешнего ($R_{\text{внеш}}$) сопротивлений определяют силу тока. В случае замкнутой цепи закон Ома (Э 28.4) принимает вид

(Э 28.10) $$\boxed{I = \frac{U_{\text{ист}}}{R_{\text{внутр}} + R_{\text{внеш}}}.}$$

	I	U	R
СИ	А	В	Ом

Обратите внимание:

- Падения напряжения внутри источника и во внешней цепи можно вычислить с помощью закона Ома (Э 28.4).
- Если $R_{\text{внеш}} \to 0$, то сила тока в цепи определяется только внутренним сопротивлением источника $R_{\text{внутр}}$, которое обычно очень мало. Чтобы избежать аварии в результате **короткого замыкания**, максимальную силу тока ограничивают предохранителями.

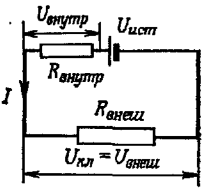
В замкнутой электрической цепи различают следующие напряжения:

Напряжение источника $U_{\text{ист}}$, или ЭДС:

напряжение на полюсах источника при разомкнутой внешней цепи (напряжение холостого хода).

Падение напряжения внутри источника $U_{\text{внутр}}$:

часть ЭДС, падающая на внутреннем сопротивлении источника при замкнутой цепи; $U_{\text{внутр}} = IR_{\text{внутр}}$.



Напряжение на клеммах $U_{\text{кл}}$:

напряжение на полюсах источника при замкнутой внешней цепи или падение напряжения на внешней цепи. Оно меньше ЭДС источника на величину падения напряжения внутри источника.

ЭДС источника равна напряжению на клеммах источника плюс падение напряжения внутри источника.

Если
$U_{\text{кл}}$ — напряжение на клеммах источника,
$U_{\text{ист}}$ — ЭДС источника,
$R_{\text{внутр}}$ — внутреннее сопротивление источника,
$R_{\text{внеш}}$ — общее сопротивление внешней цепи,

то

$$U_{\text{кл}} = U_{\text{ист}} - U_{\text{внутр}} = U_{\text{ист}} - IR_{\text{внутр}} = U_{\text{ист}} - \frac{U_{\text{ист}}R_{\text{внутр}}}{R_{\text{внутр}} + R_{\text{внеш}}},$$

или

(Э 28.11) $$\boxed{U_{\text{кл}} = \frac{U_{\text{ист}}R_{\text{внеш}}}{R_{\text{внутр}} + R_{\text{внеш}}}.}$$

	$U_{\text{кл}}$	$U_{\text{ист}}$	R
СИ	В	В	Ом

При замкнутой внешней цепи можно измерить только напряжение на клеммах источника. Оно соответствует суммарному падению напряжения во внешней цепи.

Напряжение на клеммах источника равно сумме падений напряжения во внешней цепи.

(Э 28.12) $$\boxed{U_{\text{кл}} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots}$$

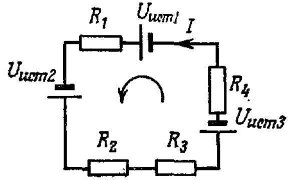
Второе правило Кирхгофа (правило контуров)

Из закона Ома для всей цепи (Э 28.10) следует:

(Э 28.13) $$\boxed{U_{\text{ист}} = I\,(R_{\text{внутр}} + R_{\text{внеш}}) = U_{\text{внутр}} + U_{\text{внеш}}.}$$

В случае замкнутой электрической цепи ЭДС источника равна сумме всех падений напряжения.

Если цепь содержит несколько источников, то их ЭДС алгебраически складываются. Если источники включены навстречу друг другу (т. е. их полярности противоположны), то их ЭДС вычитаются. Для **замкнутого контура** справедлива следующая общая формула (направление обхода контура выбирается произвольно):



(Э 28.14) $$\boxed{\sum U_{ист} = \sum U.}$$

В неразветвленной цепи или в каждом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма ЭДС всех источников равна сумме всех падений напряжения во внутренней и внешней цепи.

Можно дать и другую эквивалентную формулировку этого закона:

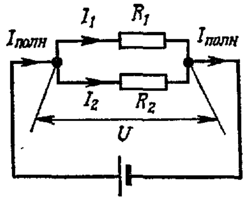
(Э 28.15) $$\boxed{\sum U_{кл} = \sum U_{внеш}.}$$

В неразветвленной цепи или в каждом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма всех напряжений на клеммах равна сумме всех падений напряжения во внешней цепи.

28.5. Разветвление тока

Первое правило Кирхгофа (правило узлов)

В разветвленной цепи сумма токов в отдельных ветвях равна полному току:



(Э 28.16) $$\boxed{I_{полн} = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots .}$$

Отсюда следует:

В каждом узле цепи сумма втекающих токов равна сумме вытекающих токов.

Далее, поскольку $I = U/R$, то

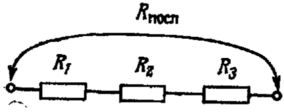
В случае разветвленной цепи токи в ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям ветвей:

(Э 28.17) $$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.}$$

28.6. Соединение сопротивлений

28.6.1. Последовательное соединение сопротивлений

При последовательном соединении сопротивления включены одно за другим, так что через каждое сопротивление протекает полный ток.



При последовательном соединении сопротивлений полное сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений:

(Э 28.18) $$\boxed{R_{посл} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots}$$

Так как через все сопротивления протекает один и тот же ток, падения напряжения на сопротивлениях пропорциональны величинам этих сопротивлений:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

28.6.2. Параллельное соединение сопротивлений

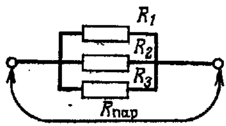
Из закона Ома и правил Кирхгофа следует:

При параллельном соединении величина, обратная полному сопротивлению, равна сумме величин, обратных сопротивлениям ветвей.

(Э 28.19) $$\boxed{\frac{1}{R_{пар}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots}$$

При параллельном соединении двух сопротивлений формула (Э 28.19) упрощается:

(Э 28.20) $$\boxed{R_{пар} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.}$$



О б р а т и т е в н и м а н и е:

- При параллельном соединении полное сопротивление цепи меньше самого малого из сопротивлений ветвей.

Поскольку $1/R = G$ (Э 28.5), из (Э 28.19) следует:

При параллельном соединении электрические проводимости отдельных элементов складываются:

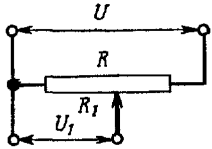
(Э 28.21) $$\boxed{G_{пар} = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots}$$

28.6.3. Делитель напряжения

Если на сопротивлении падает напряжение U, то с части сопротивления можно снять часть полного напряжения.

Если
U_1 — падение напряжения на участке с сопротивлением R_1,
U — падение напряжения на всем сопротивлении R,
R_1 — часть сопротивления,
R — полное сопротивление,

то



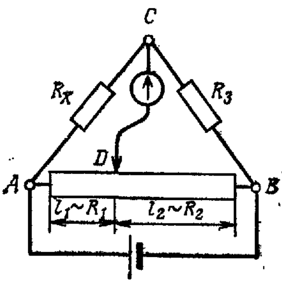
(Э 28.22) $$\boxed{U_1 = U\frac{R_1}{R}.}$$

Обратите внимание:

- Формула (Э 28.22) является строгой только в том случае, когда к делителю напряжения не подключена дополнительная нагрузка, или сопротивление нагрузки бесконечно велико. При конечном, но большом по сравнению с R_1 сопротивлении нагрузки формула (Э 28.22) верна лишь приближенно. В случае малого сопротивления нагрузки через сопротивление R_1 течет только часть полного тока и падение напряжения U_1 значительно меньше определяемого формулой (Э 28.22).

28.6.4. Мост Уитстона

Мост Уитстона предназначен для измерения сопротивлений. Принцип его действия основан на правиле Кирхгофа. Положение движка D на сопротивлении подбирается таким, чтобы ток в гальванометре, включенном в диагональ моста, был равен нулю и соответственно напряжение U_{CD} было равно нулю. В этом случае



$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда для измеряемого сопротивления R_x получаем:

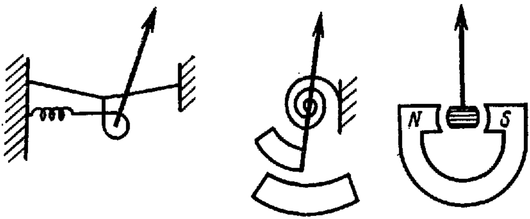
(Э 28.23) $$\boxed{R_x = R_3\frac{R_1}{R_2} = R_3\frac{l_1}{l_2}.}$$

Обратите внимание:

- Сопротивления R_1 и R_2 можно заменить длинами l_1 и l_2 провода только в том случае, когда используется однородный провод.

28.7. Измерение тока и напряжения

В электроизмерительных приборах используются различные действия электрического тока. В **тепловых приборах** протекающий ток нагревает провод, в результате чего его длина увеличивается. Степень удлинения провода зависит от силы тока.

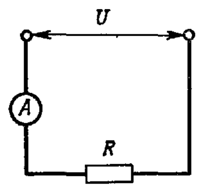


Электромагнитные приборы содержат вращающийся на оси постоянный магнит и жестко закрепленный электромагнит. Если пропустить через катушку электромагнита ток, постоянный магнит отклоняется. Величина отклонения характеризует силу тока. В **магнитоэлектрических приборах** в поле постоянного магнита расположена катушка, вращающаяся вокруг своей оси. Если через катушку пропустить ток, то в результате взаимодействия поля катушки с полем магнита возникает момент силы и катушка поворачивается на угол, пропорциональный силе тока.

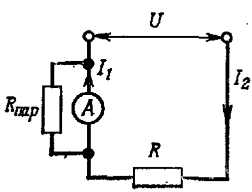
Особо чувствительные приборы магнитоэлектрического типа называются **гальванометрами**. В большинстве измерительных приборов для возврата стрелки в исходное положение используется спиральная пружина.

28.7.1. Прибор для измерения тока (амперметр)

Амперметр включается в цепь **последовательно**, так как весь измеряемый ток должен протекать через прибор. Чтобы амперметр не изменял напряжение на исследуемом объекте, падение напряжения на нем должно быть минимальным, т. е. внутреннее сопротивление должно быть как можно меньше.



Если необходимо измерить ток, превышающий диапазон измерений амперметра, то параллельно амперметру включают шунтирующее сопротивление; через шунт проходит такая часть тока, что ток через прибор не превышает допустимой величины.



Если

$R_{пар}$ — требуемое сопротивление шунта,

$R_{внутр}$ — внутреннее сопротивление амперметра,
I_2 — новый диапазон прибора,
I_1 — прежний диапазон прибора,

то, учитывая, что при параллельном соединении сила тока обратно пропорциональна сопротивлению, получаем

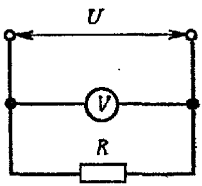
$$\frac{I_1}{I_2 - I_1} = \frac{R_{пар}}{R_{внутр}},$$

или после преобразований

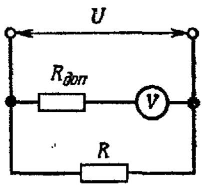
$$\boxed{R_{пар} = \frac{R_{внутр}}{(I_2/I_1) - 1}.} \qquad (Э\ 28.24)$$

28.7.2. Прибор для измерения напряжения (вольтметр)

Вольтметр включается **параллельно** измеряемому напряжению. Внутреннее сопротивление вольтметра должно быть по возможности большим, чтобы ток через прибор не приводил к заметному увеличению полного тока и уменьшению измеряемого напряжения.



Если нужно измерить напряжение, превосходящее диапазон измерений данного вольтметра, то последовательно с вольтметром включается дополнительное сопротивление, на котором создается нужное падение напряжения.



Если
$R_{доп}$ — дополнительное сопротивление,
$R_{внутр}$ — внутреннее сопротивление вольтметра,
U_2 — новый предел измерений,
U_1 — прежний предел измерений вольтметра,

то, учитывая, что через вольтметр и дополнительное сопротивление протекает один и тот же ток, получаем

$$I = \frac{U_1}{R_{внутр}} = \frac{U_2 - U_1}{R_{доп}},$$

откуда

$$\boxed{R_{доп} = R_{внутр}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right).} \qquad (Э\ 28.25)$$

28.8. Работа и мощность электрического тока

28.8.1. Работа электрического тока

Электрическую энергию можно получать из других видов энергии и преобразовывать в другие виды энергии. Для нее справедлив закон сохранения энергии. В проводнике носители заряда движутся под действием электрического поля (см. разд. 29.2).

Если
W — работа электрического тока,
U — напряжение,
I — сила тока,
t — продолжительность протекания тока,
Q — перенесенный током заряд,

то, поскольку при переносе заряда Q совершается работа $W = UQ$, а $Q = It$, получаем

(Э 28.26) $$\boxed{W = UIt = \frac{U^2 t}{R} = I^2 Rt.}$$

	W	U	I	t	R
СИ	Дж = Вт · с	В	А	с	Ом

Соотношение между едииицами работы

1 кВт · ч = 3,6 · 10^6 Дж = 860 ккал; 1 кал = 4,19 Дж; 1 кгс · м = 9,81 Дж

Обратите внимание:

- Соотношение между единицами работы в различных системах см. в табл. П.5.
- Формула (Э 28.26) справедлива при условии, что сила тока постоянна во времени. В этом случае носители заряда движутся с постоянной скоростью и вся электрическая энергия превращается в тепловую (**джоулево тепло**).

28.8.2. Мощность электрического тока

Если
P — мощность электрического тока,
U — напряжение,
I — сила тока,

то в соответствии с формулами $P = W/t$ (М 7.27) и (Э 28.26) получаем

(Э 28.27) $$\boxed{P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R.}$$

	P	U	I	R
СИ	Вт	В	А	Ом

Обратите внимание:

- Соотношение между единицами мощности в различных системах см. в табл. П6.

Справочная таблица

Мощность некоторых электрических приборов

	P, Вт
Лампочка карманного фонаря	0,5—3
Осветительные лампы накаливания	15—200
Люминесцентные лампы	20—80
Электроплитка	500—1 500
Отражательная печь (рефлектор)	500—1 000
Стиральная машина	500—1 000
Электрический утюг	до 1 000
Электрокипятильник	до 1 000
Электрокамин	2 000
Электрическая плита	до 8 000
Двигатель трамвая	150 000
Двигатель электровоза	5 000 000

29. Электрическое поле

В окрестности электрически заряженных тел, например между двумя заряженными телами, существует *электрическое поле*, т. е. на заряженные тела действуют силы.

29.1. Заряд

На поверхности многих диэлектриков (янтаря, стекла, эбонита) при трении возникает электрический заряд. При этом поверхность либо теряет, либо приобретает электроны.

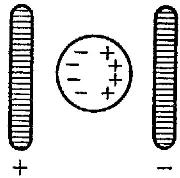
При недостатке электронов тело заряжается **положительно.**
При избытке электронов тело заряжается **отрицательно.**

Между электрически заряженными телами действуют силы.

Одноименно заряженные тела отталкиваются, разноименно заряженные тела притягиваются.

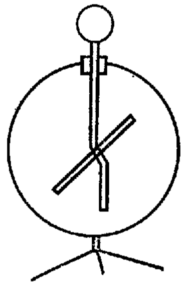
По этой причине у проводников заряд располагается только на поверхности. Внутри проводников нет ни зарядов, ни поля. Заряд распределяется по поверхности тела неравномерно. В сильно искривленных местах плотность заряда больше. На остриях и кромках плотность заряда бывает настолько большой, что происходит ионизация воздуха и заряд стекает — «эффект острия» (см. также разд. 29.2.4).

На незаряженном проводнике электроны распределены равномерно, но под действием электрического поля они собираются с одной стороны тела (явление **электрической индукции**).



Вследствие этого нейтральные (незаряженные) тела притягиваются заряженными, и установить наличие заряда можно только по отталкиванию тел.

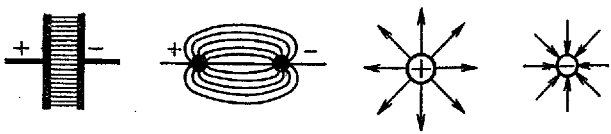
Для обнаружения и измерения величины заряда служат **электрометры**. Они содержат обычно две легкие металлические полоски; одна из них закреплена неподвижно, а вторая — подвижная. Если прикоснуться к электрометру заряженным телом, на обеих полосках возникнут одноименные заряды, которые отталкиваются друг от друга, и подвижная полоска отклоняется.



Все электрические заряды состоят из элементарных зарядов; их величина измеряется в кулонах (Кл = А·с).

Электрическое поле изображают с помощью **силовых линий**.

Линии указывают направление силы, действующей на положительный заряд в данной точке поля.



Свойства силовых линий:

- Силовые линии имеют начало и конец; они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.
- Силовые линии всегда перпендикулярны поверхности проводника.
- Распределение силовых линий определяет характер поля. Поле может быть **радиальным**, **однородным** (если силовые линии параллельны) и **неоднородным** (если силовые линии не параллельны).

29.2. Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля характеризуется силой, которая действует на точечный электрический заряд (пробный заряд), помещенный в это поле.

Напряженностью электрического поля называется отношение **силы, действующей на заряд, к величине заряда.**

Единица СИ напряженности электрического поля:

$$[E]=\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\left(=\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{с}}=\frac{\text{В}\cdot\text{Н}}{\text{Вт}\cdot\text{с}}\right)=\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Напряженность электрического поля — векторная величина; направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением действия силы. Заряд — скалярная величина. Если заряд отрицателен, то направление действия силы и направление вектора напряженности электрического поля противоположны.

Если
E — напряженность электрического поля,
F — сила, действующая на заряд Q,
Q — заряд,

то

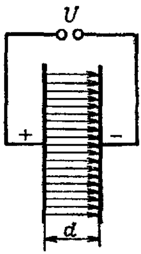
(Э 29.1) $$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}}{Q}.}$$

	E	F	Q
СИ	В/м	Н	Кл = А·с

Обратите внимание:

- В неоднородном поле сила, действующая на заряд в различных точках поля, неодинакова.

При перемещении заряда Q в однородном поле между двумя заряженными параллельными пластинками, согласно (М 7.10), совершается работа $W = Fd = UIt = UQ$. Для характеристики величины этой работы используется специальная единица — **электрон-вольт** (эВ). Чтобы получить работу в электрон-вольтах, нужно выразить заряд в единицах элементарного заряда, а напряжение в вольтах. Из вышеприведенного выражения следует $U/d = F/Q = E$. С помощью этой формулы можно дать другое определение напряженности электрического поля.



Если
E — напряженность однородного электрического поля,
d — расстояние между заряженными пластинами,
U — напряжение между пластинами,

то

(Э 29.2) $$\boxed{E=\frac{U}{d}.}$$

	E	U	d
СИ	В/м	В	м
КД	В/см	В	см

29.2.1. Электрическое смещение

Напряженность электрического поля зависит от величины заряда и конфигурации заряженного тела.

Поверхностной плотностью заряда называется отношение заряда к площади заряженной поверхности.

Единица СИ поверхностной плотности заряда:

$$[\sigma] = \frac{\text{кулон}}{\text{кв. метр}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Если

σ — поверхностная плотность заряда,
Q — заряд поверхности проводника,
A — площадь поверхности проводника,

то

(Э 29.3) $\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}.}$

	σ	Q	A
СИ	Кл/м²	Кл	м²

Наличие зарядов приводит к возникновению сил, которые в свою очередь действуют на заряды, помещенные в электрическое поле. Причина и следствие здесь взаимно переплетаются.

Если
σ — поверхностная плотность заряда,
E — напряженность электрического поля
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(В·м) — электрическая постоянная,

то

(Э 29.4) $\boxed{\sigma = \varepsilon_0 E.}$

	σ	ε_0	E
СИ	Кл/м²	Кл/(В · м)	В/м

С помощью формулы (Э 29.2) можно определить только величину, но не направление электрического поля. Так как силовые линии перпендикулярны поверхности проводника, для определения направления поля надо построить нормаль к поверхности.

Введем векторную величину — **электрическое смещение** $\vec{D}$, модуль которой D равен поверхностной плотности заряда σ.

Если
$\vec{D}$ — вектор электрического смещения,
$\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля,
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(В · м) — электрическая постоянная,

то

(Э 29.5) $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}.}$

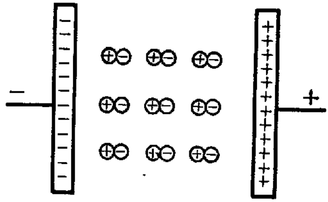
	D	ε_0	E
СИ	Кл/м²	Кл/(В · м)	В/м

Обратите внимание:

- Вектор электрического смещения $\vec{D}$ направлен от положительного заряда к отрицательному.

29.2.2. Диэлектрики

Если в электрическое поле поместить непроводник (**диэлектрик**), то часть электрического смещения будет обусловлена **поляризацией** диэлектрика. Напряженность электрического поля уменьшится от величины $\vec{E}_0$ до $\vec{E}$ (электрическое смещение $\vec{D}$ остается неизменным). Отношение этих значений напряженности электрического поля называется относительной диэлектрической проницаемостью:



$$\varepsilon = \vec{E}_0/\vec{E}.$$

Если напряженность электрического поля $\vec{E}$ поддерживать постоянной, то при внесении в поле диэлектрика электрическое смещение возрастет от $\vec{D}_0$ до $\vec{D}$. В этом случае диэлектрическая проницаемость определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \vec{D}/\vec{D}_0.$$

Если
D — электрическое смещение,
E — напряженность электрического поля,
ε_0 — электрическая постоянная,
ε — относительная диэлектрическая проницаемость (см. табл. 41),
то

(Э 29.6) $$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.}$$

	D	ε_0	ε	E
СИ	Кл/м²	Кл/(В·м)	—	В/м

Произведение $\varepsilon_0\varepsilon$ часто называют **абсолютной диэлектрической проницаемостью:**

(Э 29.7) $$\boxed{\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon.}$$

Обратите внимание:

- Численные значения относительной диэлектрической проницаемости различных диэлектриков приведены в табл. 41.
- Относительные диэлектрические проницаемости вакуума и воздуха равны единице.

29.2.3. Напряженность поля на поверхности шара

С помощью формул (Э 29.3), (Э 29.6) и (Э 29.7) можно определить напряженность поля на поверхности проводника. Если заряд распределен равномерно по поверхности проводника, то $E = D/\varepsilon_a = Q/A\varepsilon_a$. Эта формула справедлива только для шара; из тел другой формы указанная формула применима только к участкам равномерно заряженной поверхности ΔA с зарядом ΔQ.

Если
E — напряженность электрического поля,
Q — заряд поверхности шара,
$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость,
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(В·м) — электрическая постоянная,
ε — относительная диэлектрическая проницаемость (см. табл. 41),
r — радиус шара,

то, учитывая, что $A = 4\pi r^2$, имеем

(Э 29.8) $$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}.}$$

	E	Q	ε_a	r
СИ	В/м	Кл	Кл/(В·м)	м

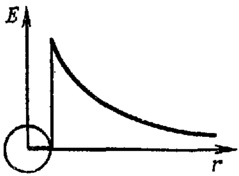
Поскольку, согласно (Э 29.15), $C = 4\pi\varepsilon_a r$, а, согласно (Э 29.10) $Q = CU$, из формулы (Э 29.8) следует выражение для напряженности поля на поверхности шара:

(Э 29.9) $$\boxed{E = \frac{Q}{Cr} = \frac{U}{r}.}$$

	E	Q	C	r	U
СИ	В/м	Кл	Ф	м	В

Обратите внимание:

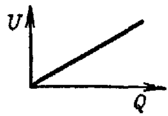
- Формулы (Э 29.8) и (Э 29.9) дают также напряженность поля на расстоянии r от точечного заряда.
- Напряженность поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара.
- $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9 \text{ В} \cdot \text{м/Кл}.$$



У тел с произвольной формой поверхности напряженность поля особенно велика в местах с большой кривизной. Здесь может происходить самопроизвольное стекание зарядов (разряд с острия). С металлического острия, имеющего радиус кривизны около 1 мкм, электроны стекают уже при напряжении в несколько сотен вольт.

29.3. Емкость

Если сообщать телу электрический заряд, то его потенциал относительно какой-либо точки (например, Земли) будет возрастать пропорционально заряду: $U \sim Q$. Коэффициент пропорциональности называется электрической **емкостью** тела. Емкость характеризует способность тела накапливать заряды.



Емкостью C называется отношение сообщенного заряда Q к возникающему в результате этого потенциалу U.

Единица СИ емкости: $[C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} =$ фарад (Ф).

Если

C — емкость тела,
Q — подведенный заряд,
U — потенциал,

то

(Э 29.10) $$\boxed{C = \frac{Q}{U}.}$$

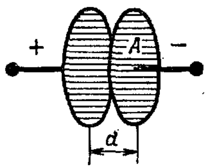
	C	Q	U
СИ	Ф	Кл	В

Соотношение между единицами емкости

1 Ф = 10^6 микрофарад (мкФ) = 10^{12} пикофарад (пФ)

29.3.1. Конденсатор

Конденсатор представляет собой два разноименно заряженных тела, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга. В большинстве случаев это параллельные пластины. Емкость такого плоского конденсатора зависит от площади пластин, расстояния между ними и материала (диэлектрика), заполняющего пространство между пластинами.



Если

C — емкость плоского конденсатора,
A — площадь пластин конденсатора,
d — расстояние между пластинами,
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,
ε — относительная диэлектрическая проницаемость (см. табл. 41),
$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость,

то тогда в соответствии с (Э 29.10) имеем

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{U} = \frac{DA}{Ed} = \frac{\varepsilon_a DA}{Dd}.$$

Отсюда для плоского конденсатора

(Э 29.11) $$\boxed{C = \frac{\varepsilon_a A}{d}.}$$

	C	ε_a	A	d
СИ	Ф	Ф/м	$м^2$	м

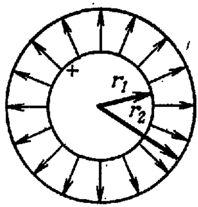
Конденсаторы, применяющиеся в технике, обычно содержат большое число пластин. Емкость в этом случае определяется формулой

(Э 29.12) $$\boxed{C = \frac{z\varepsilon_a A}{d},}$$

где z — число промежутков между пластинами конденсатора.

Сферический конденсатор

Сферический конденсатор состоит из двух концентрических полых сфер. Если расстояние между сферами Δr очень мало, так что площадь обеих сферических поверхностей практически одинакова, то можно пользоваться выражением для емкости плоского конденсатора. Полагая $A = 4\pi r^2$, получаем



(Э 29.13) $$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_a r^2}{\Delta r}.}$$

При большем расстоянии между поверхностями нужно учитывать различие площадей сфер.

Если
C — емкость сферического конденсатора,
r_1 — радиус внутренней сферы,
r_2 — радиус внешней сферы,
$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость,
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,
ε — относительная диэлектрическая проницаемость (см. табл. 41),

то

(Э 29.14) $$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_a \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.}$$

	C	ε_a	r
СИ	Ф	Ф/м	м

Обратите внимание:

- $4\pi\varepsilon_0 = 1{,}113\cdot 10^{-10}$ Ф/м.

Емкость уединенного шара

Емкость уединенного шара определяется выражением (Э 29.14) при $r_2 = \infty$ и $r_1 = r$:

(Э 29.15) $$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_a r.}$$

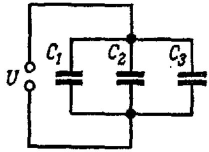
	C	ε_a	r
СИ	Ф	Ф/м	м

Обратите внимание:

- Емкость Земли составляет около 700 мкФ.

29.3.2. Параллельное соединение конденсаторов

При параллельном соединении конденсаторов напряжения на них одинаковы. Полный заряд равен сумме зарядов отдельных конденсаторов.



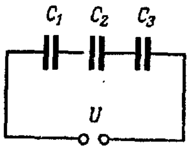
При параллельном соединении конденсаторов полная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

(Э 29.16) $$\boxed{C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$$

29.3.3. Последовательное соединение конденсаторов

Заряды на последовательно соединенных конденсаторах одинаковы. Полное напряжение равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \ldots .$$



При последовательном соединении конденсаторов величина, обратная величине полной емкости, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов:

(Э 29.17) $$\boxed{\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots}$$

При последовательном соединении двух конденсаторов формула (Э 29.17) упрощается:

(Э 29.18) $$\boxed{C_{\text{посл}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.}$$

Обратите внимание:

- При последовательном соединении конденсаторов полная емкость меньше самой малой емкости используемых конденсаторов.

29.4. Сила и энергия

29.4.1. Сила, действующая в электрическом поле

Точечные заряды

Если
F — сила взаимодействия двух точечных зарядов,
Q_1 — величина одного точечного заряда,
Q_2 — величина другого точечного заряда,

r — расстояние между зарядами,
$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость,
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,
ε — относительная диэлектрическая проницаемость (см. табл. 41),

то сила взаимодействия зарядов описывается **законом Кулона**:

(Э 29.19) $$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\frac{Q_1Q_2}{r^2}.}$$

	F	ε_a	Q	r
СИ	Н	Ф/м	Кл	м

Обратите внимание:

- Формула (Э 29.19) с хорошей точностью справедлива и в случае заряженных шаров, если расстояние между ними велико по сравнению с радиусами. В этом случае r — расстояние между центрами шаров.
- $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Заряженные пластины

В соответствии с формулой (Э 29.1) заряженная пластина действует на элемент заряда dQ соседней пластины с силой $dF = EdQ$. Поскольку, согласно (Э 29.10), $dQ = CdU$, а, согласно (Э 29.2), $E = U/d$, получаем $dF = (U/d)CdU$ или $dF = (C/d)UdU$.

Если
F — сила взаимодействия,
A — площадь пластин,
E — напряженность электрического поля,
D — электрическое смещение,
C — емкость,
d — расстояние между пластинами,
U — напряжение между пластинами,
$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость,

то сила взаимодействия определяется интегралом:

$$F = \frac{C}{d}\int_0^U U\,dU = \frac{C}{d}\frac{U^2}{2}.$$

Подставляя выражение для емкости плоского конденсатора (Э 29.11), получаем

(Э 29.20) $$\boxed{F = \frac{\varepsilon_a A U^2}{2d^2}.}$$

	F	ε_a	A	U	d
СИ	Н	Ф/м	м²	В	м

С учетом соотношения $U/d = E$ имеем

(Э 29.21) $$\boxed{F = \frac{\varepsilon_a E^2 A}{2}.}$$

	F	ε_a	E	A
СИ	Н	Ф/м	В/м	м²

Поскольку $\varepsilon_a E = D$ и $D = Q/A$, находим

(Э 29.22) $$\boxed{F = \frac{EDA}{2} = \frac{QE}{2},}$$

	F	E	D	A	Q
СИ	Н	В/м	Кл/м^2	м^2	Кл

29.4.2. Энергия электрического поля

В электрическом поле всегда запасена энергия. Она соответствует работе, затрачиваемой на создание поля (на разделение зарядов), и вновь превращается в работу, когда поле исчезает.

Предположим, что в процессе зарядки ток I остается постоянным, а мгновенное напряжение $u(t)$ линейно зависит от времени. Предположим далее, что напряжение в процессе зарядки увеличивается от 0 до U. Тогда если

W — энергия заряженного конденсатора,
C — емкость конденсатора,
U — напряжение между пластинами конденсатора,

то энергия заряженного конденсатора определяется выражением

$$W = \int_0^t u(t)\, I\, dt,$$

или окончательно

$$W = \frac{UIt}{2} = \frac{UQ}{2}.$$

Так как, согласно (Э 29.9), $Q = CU$, имеем

(Э 29.23) $$\boxed{W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.}$$

	W	C	U	Q
СИ	Дж	Ф	В	Кл

Обратите внимание:

- Выражение (Э 29.23) справедливо для электрического поля любой конфигурации.

Полагая в (Э 29.23) $C = \varepsilon_a A/d$ и $U = Ed$, получаем для **плоского конденсатора**

(Э 29.24) $$\boxed{W = \frac{\varepsilon_a E^2 Ad}{2}.}$$

	W	ε_a	E	A	d
СИ	Дж	Кл/(В · м)	В/м	м^2	м

В случае однородного электрического поля, учитывая, что $Ad = V$ — объем поля и $\varepsilon_a E = D$, можно написать

(Э 29.25) $$\boxed{W = \frac{\varepsilon_a E^2 V}{2} = \frac{DEV}{2}.}$$

	W	ε_a	D	E	V
СИ	Дж	Кл/(В · м)	Кл/м^2	В/м	м^3

Обратите внимание:

- Формула (Э 29.25) справедлива для малых областей неоднородного электрического поля, если в пределах этих областей поле можно рассматривать как однородное.

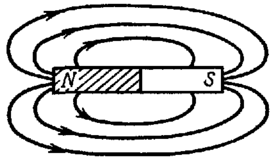
30. Магнитное поле

30.1. Постоянные магниты

Каждый магнит имеет два полюса: **северный** и **южный**. По отдельности магнитные полюсы не существуют. Между полюсами двух магнитов действуют силы.

Одноименные полюсы отталкиваются, разноименные полюсы притягиваются.

Силовое действие магнитов обусловлено существованием магнитного поля.



Магнитные силовые линии указывают направление сил, действующих в этом поле.

Если силовые линии параллельны, то поле однородно. Маленький пробный магнит поворачивается вдоль направления силовых линий.

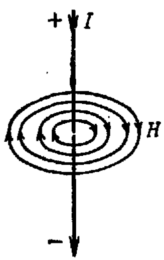
Магнитные силовые линии замкнуты. Вне магнита они направлены от северного полюса к южному.

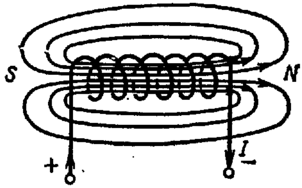
30.2. Электромагнетизм

В окрестности проводника с током всегда существует магнитное поле.

Магнитные силовые линии проводника с током представляют собой концентрические окружности.

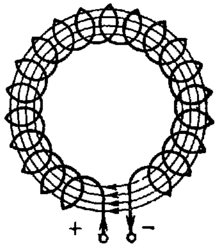
Для определения направления силовых линий используется **правило буравчика:**





Если буравчик ввертывается в направлении тока, то направление его вращения определяет направление силовых линий.

Магнитное поле катушки взникает в результате сложения (суперпозиции) полей, создаваемых отдельными витками.



Внутри относительно длинной **цилиндрической катушки** магнитное поле однородно.

У тороидальной (свернутой в кольцо) катушки отсутствует краевое неоднородное поле.

Внутри тороидальной катушки магнитные силовые линии замкнуты.

30.2.1. Напряженность магнитного поля

Напряженность магнитного поля можно определить с помощью силы, которая действует на помещенный в поле пробный магнит. Так как магнитные полюсы не существуют по отдельности, на северный и южный полюсы пробного магнита действуют противоположно направленные силы, и возникает момент пары сил. Этот момент характеризует величину напряженности поля в данном месте. В магнитном поле цилиндрической катушки он прямо пропорционален числу витков и силе тока и обратно пропорционален длине катушки.

Направление вектора напряженности магнитного поля в каждой точке совпадает с направлением силовых линий. Внутри катушки (магнита) он направлен от южного полюса к северному; вне катушки — от северного к южному.

Цилиндрическая катушка

Если
H — напряженность магнитного поля внутри цилиндрической катушки,
I — сила тока в катушке,
N — число витков (часто обозначается через n или w),
l — длина катушки (т. е. силовых линий в области однородного поля), то напряженность магнитного поля определяется формулой

(Э 30.1) $$\boxed{H = \frac{IN}{l}.}$$

	H	I	N	l
СИ	А/м	А	—	м

Единица СИ напряженности магнитного поля: $[H] = \frac{\text{ампер}}{\text{метр}} \left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)$.

Обратите внимание:

- Произведение IN часто называют числом **ампер-витков.**

● Единица напряженности магнитного поля **эрстед** (Э) не принадлежит к СИ и с 1980 г. не допускается к применению.

$$1\ Э = 79{,}6\ А/м; \quad 1\ А/м = \frac{4\pi}{1000}\ Э = 0{,}01257\ Э.$$

Прямолинейный проводник

Из (Э 30.1) следует, что $Hl = IN$. Напряженность H магнитного поля прямолинейного проводника постоянна вдоль круговой силовой линии.

Если
H — напряженность магнитного поля прямолинейного проводника на расстоянии r от него,
I — сила тока в проводнике,
r — расстояние от проводника в плоскости, перпендикулярной проводнику,

то при $N = 1$ и $l = 2\pi r$ имеем

(Э 30.2) $$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}.}$$

	H	I	r
СИ	А/м	А	м

Виток с током

Если
H — напряженность магнитного поля в центре витка с током,
I — сила тока в проводнике,
r — радиус витка,

то

(Э 30.3) $$\boxed{H = \frac{I}{2r}.}$$

	H	I	r
СИ	А/м	А	м

30.2.2. Магнитодвижущая сила

Магнитодвижущей силой между концами цилиндрической катушки называется произведение напряженности магнитного поля на длину катушки.

Единица СИ магнитодвижущей силы: $[F]$ = ампер (А).

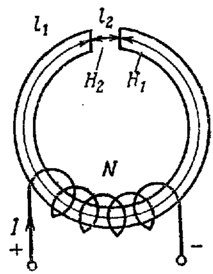
Если
F — магнитодвижущая сила между концами цилиндрической катушки,
H — напряженность магнитного поля внутри катушки,
l — длина катушки,

то, согласно (Э 30.1),

(Э 30.4) $$\boxed{F = Hl = IN.}$$

	F	H	l	I	N
СИ	А	А/м	м	А	—

Формула (Э 30.4) справедлива также для полной магнитодвижущей силы тороидальной катушки. Если напряженность магнитного поля вдоль силовых линий не остается постоянной, например, из-за наличия воздушного зазора, то нужно определить магнитодвижущую силу для каждого участка и потом сложить.



Если
F — магнитодвижущая сила,
H_i — напряженность магнитного поля на участке силовой линии длиной l_i,
l_i — длина участка силовой линии, на котором напряженность магнитного поля постоянна,

то

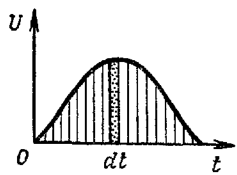
(Э 30.5) $$\boxed{F = IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots = \sum H_i l_i.}$$

Обратите внимание:

- Произведение IN в (Э 30.5) часто называют **полной магнитодвижущей силой.**

Полная магнитодвижущая сила равна сумме всех магнитодвижущих сил вдоль замкнутой силовой линии.

30.2.3. Магнитная индукция (плотность магнитного потока)



Магнитное поле можно количественно характеризовать либо величиной силы, действующей на пробный магнит, либо величиной импульса напряжения, индуцируемого в пробной катушке при наложении или снятии поля.

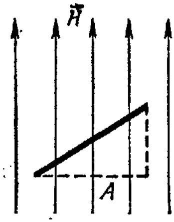
Магнитной индукцией B называется приходящееся на один виток отношение площади под кривой напряжения, индуцированного в катушке, к сечению A катушки.

Единица СИ магнитной индукции:

$$[B] = \frac{\text{вольт-секунда}}{\text{метр}^2}\ \left(\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}\right) = \text{тесла (Тл)}.$$

Если
B — магнитная индукция,
$\int_0^\infty u(t)\,dt$ — площадь под кривой индуцированного напряжения (см. рисунок),

$u(t)$ — мгновенное напряжение,
A — площадь пробной катушки в сечении, перпендикулярном силовым линиям,
N — число витков пробной катушки,
μ_0 $= 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/(А·м) — магнитная постоянная,
H — напряженность магнитного поля,



то

$$\int u(t)\,dt = \mu_0 NAH.$$

Из определения B следует

(Э 30.6) $\boxed{B = \mu_0 H.}$

	B	μ_0	H
СИ	Тл = В·с/м²	В·с/(А·м)	А/м

Магнитная индукция $\vec{B}$ — векторная величина. В вакууме ее направление совпадает с направлением напряженности магнитного поля $\vec{H}$

(Э 30.7) $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.}$

Обратите внимание:

- Формула (Э 30.7) с достаточной точностью справедлива и для воздуха.
- Единица магнитной индукции **гаусс (Гс)** не принадлежит к СИ и с 1980 г. не допускается к применению.

1 Гс = 10^{-4} Тл; 1 тесла (Тл) = 10^4 гаусс (Гс).

30.2.4. Магнитный поток

Магнитным потоком называется произведение магнитной индукции на площадь поперечного сечения поля.

Единица СИ магнитного потока: [Ф] = вольт-секунда (В·с) = = вебер (Вб).

Если
Φ — магнитный поток,
B — магнитная индукция,
$B_н$ — нормальная составляющая магнитной индукции,
A — площадь поперечного сечения поля,

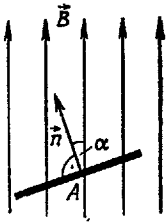
то для однородного поля

(Э 30.8) $\boxed{\Phi = B_н A,}$

	Φ	B	A
СИ	Вб = В·с	Тл = В·с/м²	м²

причем

(Э 30.9) $\boxed{B_н = B\cos(\vec{B}, \vec{n}) = B\cos\alpha,}$



где $\vec{n}$ — направление нормали к площадке A.

В случае неоднородного поля (когда индукция меняется по сечению поля)

(Э 30.10) $\boxed{\Phi = \int B_н \, dA.}$

Обратите внимание:

- В соответствии с (Э 30.8) индукцию B часто называют **плотностью магнитного потока.**
- Единица магнитного потока **максвелл (Мкс)** не принадлежит к СИ и с 1980 г. не допускается к применению.

▌ 1 Мкс $= 10^{-8}$ Вб; 1 вебер (Вб) $= 10^{8}$ Мкс.

30.2.5. Магнитное поле в веществе

Если в магнитное поле поместить вещество, то магнитная индукция и магнитный поток изменятся (при неизменной напряженности магнитного поля). Под действием магнитного поля содержащиеся в веществе магнитные диполи ориентируются в направлении поля и увеличивают магнитную индукцию от B_0 до B и магнитный поток от Φ_0 до Φ. Приращение индукции ΔB называют **намагниченностью** J.

Во всех веществах, кроме ферромагнетиков, намагниченность пропорциональна напряженности поля. Коэффициент пропорциональности называется **магнитной восприимчивостью** $\varkappa$.

Если

J — намагниченность,
H — напряженность магнитного поля,
$\varkappa$ — магнитная восприимчивость,
$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/(А·м) — магнитная постоянная,

то

(Э 30.11) $\boxed{J = \varkappa\mu_0 H.}$

	J	μ_0	H
СИ	Тл = В·с/м²	В·с/(А·м)	А/м

Величина, показывающая, во сколько раз увеличивается (уменьшается) магнитная индукция в веществе, называется **относительной магнитной проницаемостью** μ:

▌ $\mu = B/B_0.$

Если
B — магнитная индукция в веществе,
H — напряженность магнитного поля,
$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/(А·м) — магнитная постоянная,
μ — относительная магнитная проницаемость вещества (см. табл. 42),
то

(Э 30.12) $\boxed{B = \mu_0 \mu H.}$

	B	μ_0	H
СИ	Тл = В·с/м²	В·с/(А·м)	А/м

Произведение $\mu_0\mu$ часто называют **абсолютной магнитной проницаемостью вещества:**

(Э 30.13) $\boxed{\mu_a = \mu_0 \mu.}$

С помощью (Э 30.11), полагая $J = \Delta B$, получаем выражение для магнитной восприимчивости:

$$\varkappa = \frac{J}{\mu_0 H} = \frac{B - B_0}{\mu_0 H} = \frac{B - B_0}{B_0}$$

и, наконец,

(Э 30.14) $\boxed{\varkappa = \mu - 1.}$

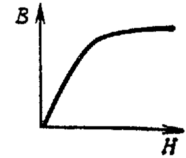
Обратите внимание:

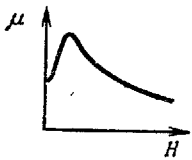
- Вещества с $\mu \gg 1$, $\varkappa > 0$ (например, железо, кобальт, никель) называются **ферромагнетиками**; поле в них значительно усиливается.
- Вещества с $\mu > 1$, $\varkappa > 0$ (например, платина, алюминий, воздух) называются **парамагнетиками**; поле в них лишь очень незначительно возрастает.
- Вещества с $\mu < 1$, $\varkappa < 0$ (например, серебро, медь, висмут) называются **диамагнетиками**; они незначительно ослабляют магнитное поле.
- Выше определенной температуры, зависящей от вида вещества (так называемой **точки Кюри**), ферромагнетики становятся парамагнетиками.

30.2.6. Ферромагнетики

Намагниченность J ферромагнетиков не пропорциональна напряженности поля, а при большой напряженности поля стремится к максимальному значению. Формула (Э 30.11) для ферромагнитных веществ не справедлива, так как в этом случае магнитная восприимчивость не постоянна. В соответствии с (Э 30.14) μ также изменяется; формула (Э 30.12) несправедлива.

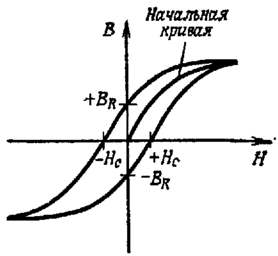
Зависимость магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H описывается **кривой намагничивания.** С ее помощью можно для каждого значения напряженности поля определить значение магнитной проницаемости μ. Так как $\mu = B/\mu_0 H$ (Э 30.12), при возрастании напряженности поля μ сначала увеличивается, затем уменьшается. В таблицах приводятся обычно максимальные значения магнитной проницаемости, отвечающие определенным значениям напряженности магнитного поля.

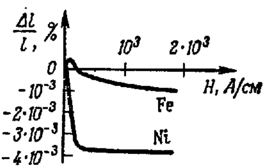




Гистерезис

Петля гистерезиса представляет собой кривую намагничивания ферромагнетиков. Если первоначально ненамагниченное вещество намагнитить до насыщения (**начальная кривая**), а затем уменьшать и потом снова увеличивать напряженность магнитного поля, то изменение индукции не будет следовать начальной кривой: каждому значению напряженности магнитного поля соответствуют два значения магнитной индукции в зависимости от того, увеличивается или уменьшается напряженность поля. Величина индукции B_R, сохраняющаяся при $H = 0$, называется **остаточной индукцией.** Напряженность магнитного поля H_c, при которой индукция B обращается в нуль, называется **коэрцитивной силой.** Вещества с малой коэрцитивной силой называются магнитно-мягкими. Они обладают узкой петлей гистерезиса. Магнитно-жесткие вещества, наоборот, характеризуются большой коэрцитивной силой и широкой петлей гистерезиса.



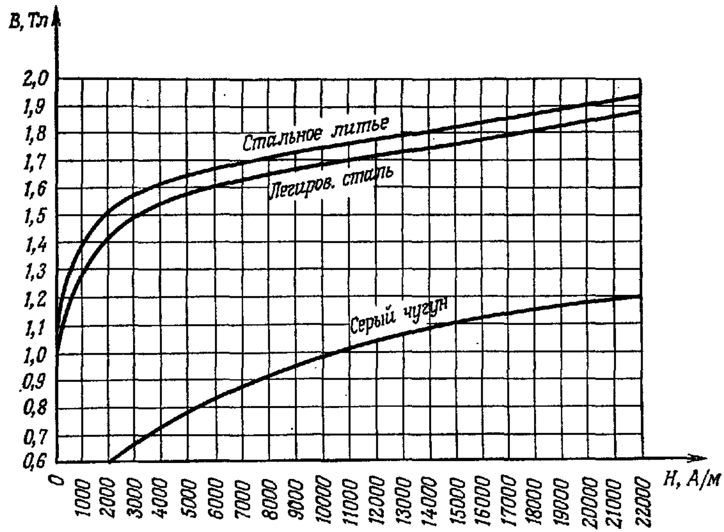


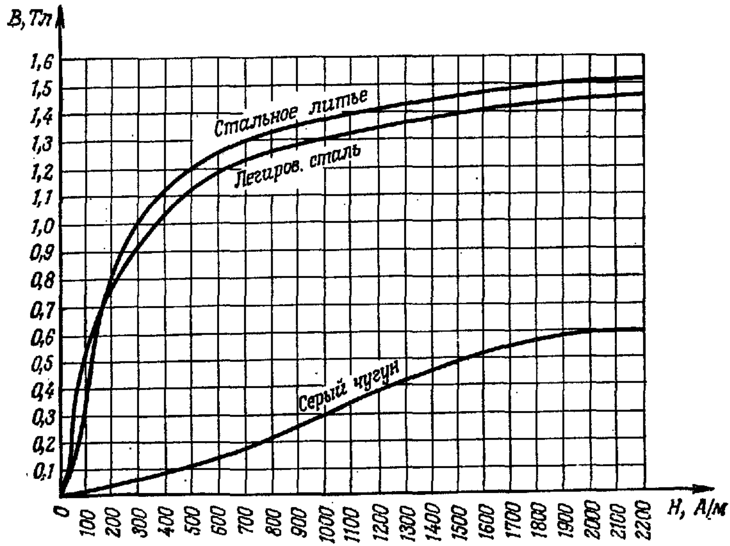
Магнитострикция

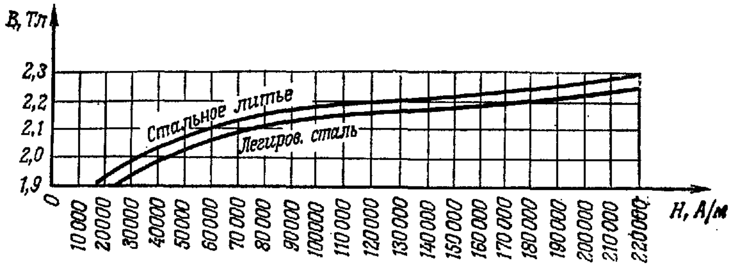
Магнитное поле влияет на размеры ферромагнетиков (например, на длину стержня). При намагничивании происходит некоторое изменение расстояний между атомами. Относительное изменение размеров может быть как положительным, так и отрицательным. Этот эффект используется для получения ультразвука (см. разд. 24).

30.3. Электромагнитная индукция

При изменении магнитного потока, пронизывающего катушку, в ней индуцируется напряжение. Аналогичное явление происходит и при


B, Тл
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
Стальное литье
Легиров. сталь
Серый чугун
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
11000
12000
13000
14000
15000
16000
17000
18000
19000
20000
21000
22000
H, А/м


B, Тл
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Стальное литье
Легиров. сталь
Серый чугун
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100
2200
H, А/м



движении проводника в магнитном поле перпендикулярно силовым линиям. Это явление называется электромагнитной индукцией.

30.3.1. Закон индукции

Индукция всегда возникает вследствие изменения магнитного потока.

Если

U — индуцированное в катушке напряжение,
$\Delta\Phi$ — равномерное приращение магнитного потока,
Δt — продолжительность изменения магнитного потока,
N — число витков в катушке,

то в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея

(Э 30.15) $$\boxed{U = -N\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.}$$

	U	N	Φ	t
СИ	В	—	В·с	с

При неравномерном изменении магнитного потока *мгновенное значение* индуцированного напряжения дается формулой

(Э 30.16) $$\boxed{u = -N\,\frac{d\Phi}{dt}.}$$

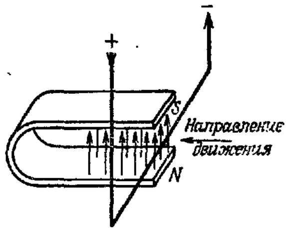
Обратите внимание:

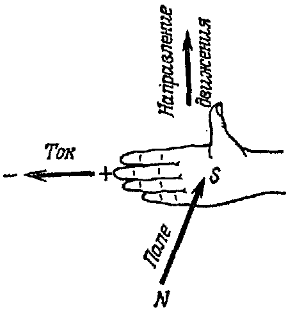
- Знак минус означает, что при увеличении магнитного потока направление индуцированного тока противоположно определяемому правилом буравчика.
- Необходимого изменения магнитного потока можно достичь, изменяя силу тока или меняя положение катушки относительно потока.

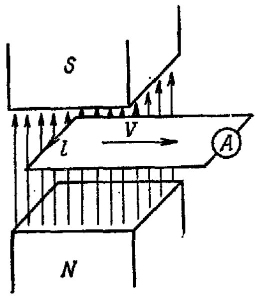
30.3.2. Индукция в движущемся проводнике

Если проводник движется в магнитном поле перпендикулярно силовым линиям, на концах проводника индуцируется напряжение. Возникает индукционный ток, направление которого определяется **правилом правой руки:**

> Если расположить правую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, а отогнутый большой палец указывал направление движения проводника, то остальные выпрямленные пальцы будут показывать направление тока.







Если проводник движется с постоянной скоростью v, то за время Δt он покрывает площадь $l\Delta s$, так что магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi = Bl\Delta s$.

Если
U — напряжение, индуцированное в движущемся проводнике,
v — скорость проводника, равномерно движущегося перпендикулярно силовым линиям,
l — длина проводника,
B — магнитная индукция,

то в соответствии с (Э 30.15) при $N = 1$ имеем

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{Bl\,\Delta s}{\Delta t},$$

или, поскольку $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$,

(Э 30.17) $\boxed{U = -Blv.}$

	U	B	l	v
СИ	В	В·с/м²	м	м/с

30.3.3. Самоиндукция

Изменение магнитного потока индуцирует напряжение не только в других проводниках, но и в самой катушке, создающей это магнитное поле. Это явление называется *самоиндукцией.*

> Под самоиндукцией понимают возникновение дополнительного напряжения индукции в витках катушки, через которую протекает изменяющийся во времени ток.

Для определения направления напряжения индукции пользуются правилом Ленца:

> Возникающее в результате самоиндукции напряжение противоположно порождающему его изменению тока.

Обратите внимание:

- Самоиндукция особенно сильно проявляется при замыкании или размыкании цепи. Она препятствует скачкообразному изменению тока, обусловливает медленное нарастание тока при замыкании цепи и возникновение больших напряжений при размыкании цепи.

Для катушки (и любого другого проводника) напряжение индукции определяется формулой (Э 30.15). Изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ всегда пропорционально изменению тока ΔI в цепи.

Если
U — напряжение индукции,
ΔI — равномерное изменение тока в проводнике,
Δt — продолжительность изменения тока,
L — индуктивность проводника,
$\mu_a = \mu_0\mu$ — абсолютная магнитная проницаемость,

то напряжение индукции, обусловленное изменением тока в той же цепи, дается выражением

(Э 30.18) $$\boxed{U = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t}.}$$

	U	L	I	t
СИ	В	Гн = В·с/А	А	с

Если ток изменяется не равномерно, **мгновенное напряжение** определяется формулой

(Э 30.19) $$\boxed{u = -L\,\frac{dI}{dt}.}$$

> Коэффициент пропорциональности в этих формулах называется **индуктивностью** L цепи и зависит только от конфигурации цепи и материала, находящегося в магнитном поле.

Единица СИ индуктивности: $[L]$ = В·с/А = генри (Гн).

Обратите внимание:

- Индуктивность L называют также коэффициентом самоиндукции.

Индуктивность тороидальной и длинной цилиндрической катушек

Из (Э 30.15) с учетом выражений $H = IN/l$ и $\Phi = \mu_a HA$ получаем

$$U = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\mu_a A\,\Delta H}{\Delta t} = -N\mu_a A\frac{N\,\Delta I}{l\,\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

откуда

(Э 30.20) $$\boxed{L = \frac{\mu_a N^2 A}{l}.}$$

	L	μ_a	N	A	l
СИ	Гн = В · с/А	В · с/(А · м)	—	м²	м

30.3.4. Соединение индуктивностей

При последовательном соединении полная индуктивность $L_{посл}$ равна сумме отдельных индуктивностей:

(Э 30.21) $$\boxed{L_{посл} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots}$$

При параллельном соединении величина, обратная полной индуктивности, равна сумме величин, обратных отдельным индуктивностям:

(Э 30.22) $$\boxed{\frac{1}{L_{пар}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots}$$

При параллельном соединении двух индуктивностей формула (Э 30.22) упрощается:

(Э 30.23) $$\boxed{L_{пар} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.}$$

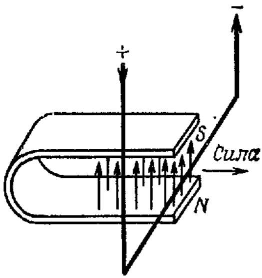
Обратите внимание:

- При параллельном соединении полная индуктивность оказывается меньше, чем наименьшая из отдельных индуктивностей.

30.4. Сила, действующая в магнитном поле, и энергия магнитного поля

30.4.1. Сила, действующая в магнитном поле

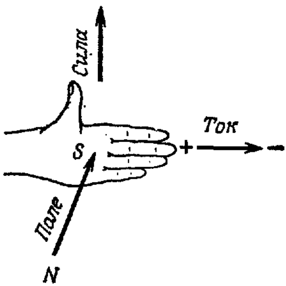
При наложении (суперпозиции) нескольких магнитных полей (например, полей постоянного магнита и проводника с током или двух проводников с током) сила, действующая в результирующем поле, определяется поведением его силовых линий.



Проводник с током в магнитном поле

Для определения направления силы, действующей со стороны магнитного поля на проводник с током, используется **правило левой руки:**

> Если расположить левую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, а выпрямленные четыре пальца совпадали с направлением тока, то отогнутый большой палец укажет направление действия силы.



Величину силы определяют, приравнивая механическую работу перемещения электрической работе, т. е. произведению напряжения индукции на заряд.

Если
F — сила, действующая на проводник с током, находящийся в магнитном поле,
B — магнитная индукция,
l — длина проводника,
I — сила тока в проводнике,

то $W = Fs = UIt$,

или в силу (Э 30.17) $Fs = BlvIt$,

и, поскольку $\dfrac{t}{s} = \dfrac{1}{v}$,

(Э 30.24) $\boxed{F = BlI.}$

	F	B	l	I
СИ	Н	Тл = В·с/м²	м	А

Обратите внимание:

- Направления тока, магнитной индукции и силы взаимно перпендикулярны.

Электрический заряд в магнитном поле

Носители заряда, движущиеся в магнитном поле, создают в нем электрический ток, на который будет действовать сила.

Если
F — сила, действующая на заряд, движущийся перпендикулярно силовым линиям магнитного поля,
B — магнитная индукция,
v — скорость движения носителя заряда,
Q — заряд,

то, используя формулы $F = BIl$ (Э 30.24) и $I = Q/t$, имеем

$$F = Bl\frac{Q}{t},$$

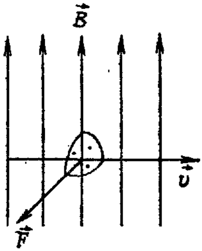
где l — путь, который заряд Q, движущийся со скоростью v, проходит за время t. Отсюда получаем для величины силы

(Э 30.25) $\boxed{F = QvB.}$

	F	Q	v	B
СИ	Н	Кл	м/с	Тл = В · с/м²

Направление и величина силы, которая действует на заряд, движущийся в магнитном поле под произвольным углом к направлению поля, дается выражением

(Э 30.26) $\boxed{\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B},}$



где $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{F}$ образуют правую систему.

Сила Лоренца

В частном случае носителем заряда является электрон. Тогда в формулу (Э 30.26) в качестве Q следует подставить $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. При определении направления движения электронов с помощью правила левой руки следует учитывать, что направление движения электронов противоположно техническому направлению тока.

Величина и направление силы Лоренца определяются соотношением

(Э 30.27) $\boxed{\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B},}$

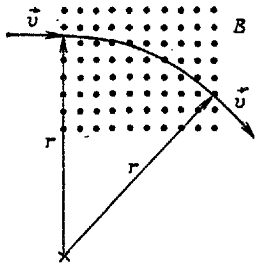
	F	e	v	B
СИ	Н	Кл	м/с	Тл

где $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{F}$ образуют правую систему.

Для электронов, движущихся перпендикулярно магнитному полю, формула (Э 30.27) упрощается:

(Э 30.28) $\boxed{F_L = evB.}$

Так как сила действует перпендикулярно скорости и направлению поля, она создает центростремительное ускорение, т. е. изменяет направление скорости, не меняя ее величины. Поэтому электрон движется в магнитном поле по окружности.



Для определения радиуса круговой траектории электрона приравняем силу Лоренца и центростремительную силу.

Если
r — радиус круговой траектории электрона,
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона,
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
v — скорость электрона,
B — магнитная индукция,

то, приравнивая обе силы, получаем

$$evB = \frac{m_e v^2}{r},$$

и, следовательно,

(Э 30.29) $$\boxed{r = \frac{m_e v}{eB}.}$$

	r	m_e	v	e	B
СИ	м	кг	м/с	Кл	Тл = В · с/м²

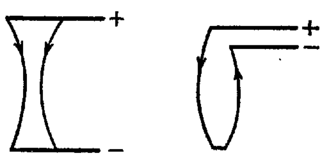
Обратите внимание:

- При больших значениях скорости (выше примерно $2 \cdot 10^7$ м/с) в расчетах нельзя использовать массу покоя электронов m_e, а необходимо учитывать релятивистское увеличение массы (см. разд. 41.4.1).

Два параллельных проводника с током

Два проводника с током взаимодействуют друг с другом, поскольку каждый из них находится в магнитном поле другого.

Если направления токов одинаковы, то параллельные проводники притягиваются, если же направления токов противоположны — отталкиваются.



Если
F — сила, действующая между параллельными проводниками,
$\mu_a = \mu_0 \mu$ — абсолютная магнитная проницаемость,
$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — магнитная постоянная,
μ — относительная магнитная проницаемость (см. табл. 42),
I_1 — сила тока в первом проводнике,

I_2 — сила тока во втором проводнике,
l — длина проводников,
r — расстояние между проводниками,

то на второй проводник, находящийся в поле первого проводника, в соответствии с (Э 30.24) действует сила $F = B_1 I_1 l$, где $B_1 = \mu_0 H_1$. Поскольку напряженность магнитного поля H_1 на расстоянии r от проводника дается выражением $H_1 = I_1/2\pi r$, получаем следующую формулу для силы, действующей между проводниками:

(Э 30.30) $$\boxed{F = \frac{\mu_a I_1 I_2 l}{2\pi r}.}$$

	F	μ_a	I	l	r
СИ	Н	Гн/м	А	м	м

Обратите внимание:

- Из этой формулы следует определение единицы силы тока ампер (А). При $I_1 = I_2 = 1$ А, $\mu = 1$, $r = l = 1$ м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В·с/(А·м) имеем $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Н.

30.4.2. Энергия магнитного поля

В магнитном поле всегда запасена энергия. Она соответствует работе, затрачиваемой на создание поля, и высвобождается, когда поле исчезает.

Если
W — энергия магнитного поля, создаваемого проводником с током,
L — индуктивность проводника,
I — сила тока в проводнике,

то работа, производимая током за время dt (U и I не постоянны), определяется выражением

$$dW = ui\,dt,$$

где $u = L(di/dt)$ — противо-ЭДС, возникающая в результате самоиндукции. Отсюда получаем, что $dW = Li\,di$, и полная энергия равна

$$W = \int_0^I Li\,di,$$

или

(Э 30.31) $$\boxed{W = \frac{1}{2} LI^2.}$$

	W	L	I
СИ	Дж	Гн	А

Обратите внимание:

- Это выражение справедливо для магнитного поля любой конфигурации.

Энергия магнитного поля катушки

Если
W — энергия однородного магнитного поля тороидальной или длинной цилиндрической катушки,
$\mu_a = \mu_0\mu$ — абсолютная магнитная проницаемость,
$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — магнитная постоянная,
μ — относительная магнитная проницаемость,
H — напряженность магнитного поля,
A — площадь сечения поля внутри катушки,
l — длина катушки,

то в соответствии с (Э 30.31), учитывая формулы $L = \mu_0\mu(AN^2/l)$ (Э 30.20) и $H = IN/l$ (Э 30.1), получаем

$$W = \frac{\mu_a A N^2 I^2}{2l}$$

или

(Э 30.32) $$\boxed{W = \frac{\mu_a}{2} H^2 A l.}$$

	W	μ_0	μ	H	A	l
СИ	Дж	Гн/м	—	А/м	$м^2$	м

Учитывая, что $Al = V$ — объем однородного магнитного поля, преобразуем (Э 30.32) к виду

(Э 30.33) $$\boxed{W = \frac{\mu_a}{2} H^2 V,}$$

	W	μ_0	μ	H	V
СИ	Дж	Гн/м	—	А/м	$м^3$

или, поскольку $B = \mu_a H$,

(Э 30.34) $$\boxed{W = \frac{BHV}{2}.}$$

	W	B	H	V
СИ	Дж	Тл $=$ В $\cdot$ с/$м^2$	А/м	$м^3$

Обратите внимание:

- Эти формулы справедливы и в случае малых областей неоднородного поля, если поле в них можно считать однородным.

30.4.3. Характеристики электрического и магнитного полей

В нижеследующей таблице дана сводка величин, уравнений и единиц, описывающих электрические и магнитные поля.

Электрические и магнитные величины

Электрические величины			Магнитные величины		
Величина	Уравнение	Единица	Величина	Уравнение	Единица
Сила тока	$I=\frac{dQ}{dt}$	А	Напряжение индукции	$U=-N\frac{d\Phi}{dt}$	В
Заряд	$Q=It$	Кл=А·с	Магнитный поток	$\Phi=BA$	Вб=В·с
Напряжение	$U=Ed$	В	Магнитодвижущая сила	$F=Hl$	А
Напряженность поля	$E=\frac{U}{d}$	В/м	Напряженность поля	$H=\frac{IN}{l}$	А/м
Электрическое смещение	$D=\frac{Q}{A}$	Кл/м²	Магнитная индукция	$B=\frac{\Phi}{A}$	Тл=В·с/м²
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0 c^2}$	Ф/м	Магнитная постоянная	$\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$	Гн/м
Относительная диэлектрическая проницаемость	ε	—	Относительная магнитная проницаемость	μ	—
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon_a=\varepsilon_0\varepsilon$	Ф/м	Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu_a=\mu_0\mu$	Гн/м
Емкость	$C=\frac{Q}{U}$	Ф=Кл/В	Индуктивность	$L=\frac{\Phi N}{I}$	Гн=В·с/А
Емкость плоского конденсатора	$C=\frac{\varepsilon_a A}{d}$	Ф	Индуктивность тороидальной катушки	$L=\frac{\mu_a A N^2}{l}$	Гн
Энергия поля	$W=\frac{CU^2}{2}$	Дж=Вт·с	Энергия поля	$W=\frac{LI^2}{2}$	Дж=Вт·с
Энергия плоского конденсатора	$W=\frac{\varepsilon_a E^2 V}{2}$	Дж=Вт·с	Энергия тороидальной катушки	$W=\frac{\mu_a H^2 V}{2}$	Дж=Вт·с
Плотность энергии	$w=\frac{\varepsilon_a E^2}{2}=\frac{DE}{2}$	Дж/м³	Плотность энергии	$w=\frac{\mu_a H^2}{2}=\frac{BH}{2}$	Дж/м³

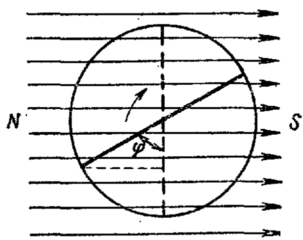
31. Электрические машины

К электрическим машинам относятся генераторы (динамомашины), предназначенные для преобразования механической энергии в электрическую, и электродвигатели, преобразующие электрическую энергию в механическую. Работа генераторов основана на законе электромагнитной индукции, работа электродвигателей — на взаимодействии магнитных полей.

31.1. Генераторы

31.1.1. Генераторы переменного тока

Если для получения электрического напряжения используется проволочная рамка, вращающаяся в магнитном поле, то напряжение индукции не постоянно, а зависит от мгновенного положения рамки в магнитном поле. В соответствии с формулой (Э 30.15) напряжение пропорционально скорости изменения магнитного потока. Согласно выражению $\Phi = BA$ (Э 30.8), магнитный поток пропорционален площади сечения магнитного поля, пересекающего рамку, т. е. $\Phi = BA \cos\varphi$. Аналогичное выражение справедливо для вращающейся катушки.



Если

u — мгновенное значение напряжения индукции,
U_m — амплитуда напряжения, т. е. максимальное напряжение, возникающее дважды за оборот катушки,
$\varphi = \omega t$ — угол поворота катушки, отсчитываемый от начального положения, перпендикулярного направлению магнитного поля,
A — площадь витка,
N — число витков катушки,
T — период вращения катушки,
f — частота вращения,
t — время,

то

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} N = -\frac{d(NBA\cos\varphi)}{dt} = -\frac{d(NBA\cos\omega t)}{dt},$$

откуда

$$u = NBA\omega \sin\omega t.$$

Напряжение индукции меняется во времени по синусоидальному закону. В течение периода оно дважды меняет знак. Поэтому его называют переменным напряжением.

Амплитуда, или максимальное значение напряжения индукции, определяется формулой

(Э 31.1) $\boxed{U_m = NBA\omega.}$

	u	N	B	A	ω
СИ	В	—	Тл = В · с/м²	м²	1/с

Тогда для мгновенного напряжения имеем

(Э 31.2)
$$\boxed{\begin{aligned} u &= U_m \sin \omega t = \\ &= U_m \sin 2\pi f t = \\ &= U_m \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{aligned}}$$

	u	ω	t	f	T
СИ	В	1/с	с	Гц	с

Обратите внимание:

- Величина $\omega = 2\pi f$ называется **угловой частотой.** Частота переменного тока промышленной сети $f = 50$ Гц, и соответственно $\omega = 100\pi$ 1/с.

Если к клеммам вращающейся катушки присоединить внешнюю электрическую цепь, то в ней возникает электрический ток, сила которого изменяется по синусоидальному закону во времени и меняет свой знак (направление) дважды за период. Такой ток называется **переменным током.**

Если
i — мгновенное значение силы тока,
I_m — амплитуда тока,
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,

то по аналогии с (Э 31.2) получаем

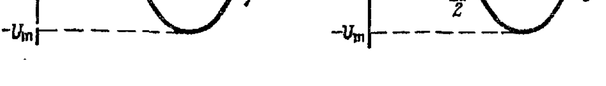
(Э 31.3) $$\boxed{i = I_m \sin \omega t = I_m \sin 2\pi f t = I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}.}$$

Обратите внимание:

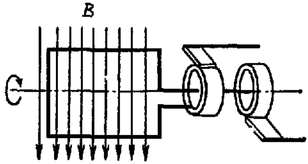
- Если цепь тока содержит реактивные элементы (см. разд. 32.2), то между напряжением и током возникает разность фаз.

График зависимости напряжения u от времени t (или от $\varphi = \omega t$) представляет собой синусоиду.

В любом генераторе переменного тока имеются магнит, создающий требуемое магнитное поле (чаще всего электромагнит; в ге-

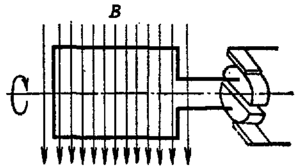


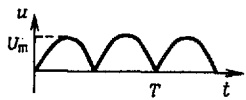
нераторах малой мощности используются постоянные магниты), вращающиеся обмотки и контактные кольца. Для получения достаточно высокого напряжения применяют обмотки с большим числом витков и железные сердечники. Вращающаяся часть генератора называется **ротором**, неподвижная часть — **статором**. В генераторах большой мощности обмотки, в которых индуцируется напряжение, располагаются на статоре, а магниты — на роторе (машина с **внутренними полюсами**). При этом контактные кольца служат лишь для подвода небольшой мощности к электромагнитам.



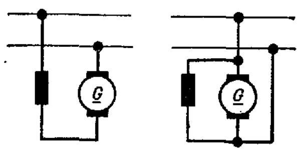
31.1.2. Генератор постоянного тока

Генератор постоянного тока основан почти на том же принципе, что и генератор переменного тока, только вместо двух контактных колец используются два изолированных друг от друга полукольца (**коммутаторы**). Они предназначены для того, чтобы производить переключение в тот момент, когда меняет полярность напряжение ротора. При этом возникает **пульсирующее постоянное напряжение**. Оно не меняет своей полярности, но его величина колеблется по синусоидальному закону.





При использовании вместо проволочной рамки обмотки с железным сердечником и большим числом витков (**двойной Т-якорь**) удается получить более высокое напряжение. Пульсации тока можно уменьшить путем применения **барабанного якоря**. Он состоит из большого числа смещенных относительно друг друга обмоток, соединенных с соответствующими сегментами **коллектора**. Для возбуждения магнитов используется ток, индуцированный в якоре (принцип Сименса). В **сериесных** электрических машинах (называемых также машинами последовательного типа) возбуждающая обмотка и обмотка якоря включены последовательно, т. е. через магниты течет полный ток. В **шунтовых** электрических машинах обе обмотки включены параллельно и через магниты течет только часть полного тока. Запуск обеспечивается только за счет остаточного магнетизма.



31.1.3. Трехфазный генератор

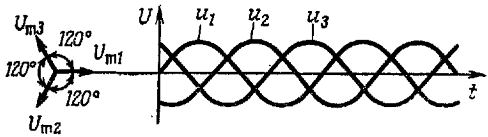
В трёхфазном генераторе имеются три одинаковые обмотки, расположенные под углом 120° друг к другу. В обмотках возникают сдвинутые на 120° переменные напряжения. Это — **трехфазный ток.**

Из соотношения

$$U_m [\sin \omega t + \sin (\omega t + 120°) + \sin (\omega t - 120°)] = 0$$

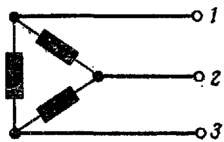
следует:

Алгебраическая сумма трех напряжений (токов) в каждый момент времени равна нулю.



Чтобы сократить число проводов, необходимых для передачи трехфазного тока, обмотки генератора (их называют **фазными обмотками**) соединяют особым образом.

Соединение треугольником

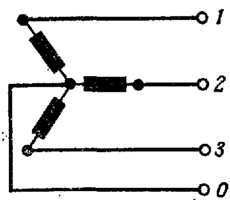


Три фазных обмотки соединяются последовательно, так что образуется замкнутый контур. Для напряжения между обмотками (линейного напряжения) и тока в проводниках справедливы соотношения

(Э 31.4) Линейное напряжение:
$U_{12} = U_{13} = U_{23} =$ Фазное напряжение генератора

и

(Э 31.5) Линейный ток:
$I_1 = I_2 = I_3 = \sqrt{3} \cdot$ (Фазный ток).



Соединение звездой

При соединении звездой все три фазные обмотки соединяются в одной точке — центре звезды. Эта точка заземляется, и провод, соединяющий центр звезды с землей, служит четвертым, так называемым нулевым проводником. При соединении звездой напряжения и токи связаны следующими соотношениями:

(Э 31.6)
| Линейное напряжение: $U_{12} = U_{13} = U_{23} = \sqrt{3}\cdot$ (Фазное напряжение генератора). Фазное напряжение: $U_{10} = U_{20} = U_{30}$ |

и

(Э 31.7)
| Линейный ток: $I_1 = I_2 = I_3 =$ (Фазный ток). Ток в нулевом проводнике: $I_0 = 0$. |

Обратите внимание:

- В осветительной сети фазное напряжение равно 220 В, линейное напряжение равно $\sqrt{3}\cdot 220$ В $= 380$ В.
- Соотношения (Э 31.7) справедливы только при одинаковой нагрузке всех трех фаз.

31.2. Электродвигатели

Электродвигатели имеют в общих чертах то же устройство, что и генераторы, но основаны на обратном принципе действия. Приложенное к обмотке якоря напряжение вызывает ток, который в свою очередь создает магнитное поле, взаимодействующее с магнитным полем возбуждения. При этом возникает сила, вращающая ротор.

Запишем выражение для момента силы (вращающего момента).

Если
M — момент силы, вращающий якорь,
N — число витков обмотки якоря,
I — ток, текущий в якоре,
B — магнитная индукция,
A — площадь витка,
$\omega = 2\pi f$ — угловая скорость вращения,
t — время, отсчитываемое от того момента, когда обмотка занимала положение, перпендикулярное направлению магнитного поля,

то

(Э 31.8) $$\boxed{M = NIBA \sin \omega t.}$$

	M	N	I	B	A	t	ω
СИ	Н·м	—	А	Тл = В·с/м²	м²	с	1/с

Для мощности P имеем

(Э 31.9) $$\boxed{P = NIBA\omega \sin \omega t.}$$

31.2.1. Электродвигатели переменного тока

Синхронный электродвигатель

Синхронный электродвигатель аналогичен генератору переменного тока, у которого частота генерируемого напряжения определяется числом оборотов ротора. В случае синхронного электродвигателя частота переменного напряжения определяет скорость вращения ротора. Синхронный двигатель не разгоняется самостоятельно; при запуске приходится сообщать ему от внешнего источника нужную скорость вращения. При увеличении нагрузки происходит не уменьшение числа оборотов, а остановка двигателя. Синхронный электродвигатель может быть выполнен конструктивно с внутренними или внешними полюсами.

Асинхронный электродвигатель

Асинхронный электродвигатель аналогичен генератору постоянного тока и поэтому может работать от постоянного напряжения как электродвигатель постоянного тока (см. разд. 31.2.2). Он может работать от переменного тока, если изменение направления тока в обмотках магнита и якоря происходит одновременно. Скорость вращения не зависит от частоты. Двигатель вращается асинхронно и часто называется **универсальным электродвигателем**[1]).

31.2.2. Электродвигатели постоянного тока

Электродвигатели постоянного тока аналогичны генераторам постоянного тока. Как и генераторы, они могут быть сериесного и шунтового типа.

Сериесные электродвигатели

Обмотки электромагнита и якоря таких двигателей соединены последовательно. При включении электродвигателя в обмотках якоря и электромагнита течет сильный ток, что создает большой момент силы. Число оборотов двигателя сильно зависит от нагрузки. При недостаточной нагрузке скорость вращения сильно возрастает, и двигатель идет «вразнос».

---

[1]) В отечественной литературе описанный выше двигатель называется коллекторным. Асинхронным называется двигатель с вращающимся магнитным полем (трехфазный или однофазный; см., например, разд. 31.2.3). — *Прим. перев.*

Шунтовые электродвигатели

Обмотки электродвигателя и якоря у шунтовых двигателей включены параллельно. Для ограничения тока в обмотке якоря при запуске двигателя последовательно с якорем включается дополнительное пусковое сопротивление, которое становится ненужным, когда скорость вращения и индуцируемая в якоре противо-ЭДС достигают нужной величины. Так как ток якоря не попадает в обмотку магнита, возбуждение постоянно и число оборотов двигателя слабо зависит от нагрузки.

31.2.3. Электродвигатели с вращающимся магнитным полем

По своему устройству двигатели с вращающимси магнитным полем аналогичны трехфазному генератору с внутренними полюсами. При подаче на три обмотки трехфазного тока возникает **вращающееся магнитное поле,** так как максимумы токов в отдельных катушках смещены во времени. Поэтому ротор двигателя не имеет обмоток; вместо обмоток используется цилиндр из медных стержней (так называемый **ротор-клетка**). Вращающееся магнитное поле создает в короткозамкнутых стержнях якоря ток, магнитное поле которого обусловливает вращение якоря. Число оборотов якоря несколько меньше числа оборотов поля. Разность между ними называется **скольжением.**

Если
$n_р$ — число оборотов ротора,
$n_п$ — число оборотов поля,
то

(Э 31.10) $$\boxed{\text{Скольжение} = \frac{n_п - n_р}{n_р}.}$$

Обратите внимание:

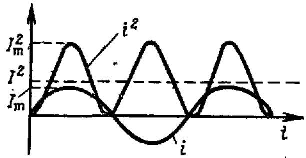
- Скольжение часто измеряется в процентах.
- Для ограничения пускового тока электродвигателя часто обмотки возбуждения двигателя, включенные треугольником, по достижении нужного числа оборотов с помощью специального переключателя включаются звездой.

32. Цепи переменного тока

Цепи переменного тока отличаются от цепей постоянного тока прежде всего тем, что токи и напряжения в них периодически меняются во времени. Если в цепи переменного тока, кроме активных (омических) сопротивлений, имеются емкости или индуктивности, то максимальные значения тока и напряжения не будут совпадать по времени. Вычисления работы и мощности при этом усложняются.

32.1. Эффективные значения тока и напряжения

При вычислении работы и мощности по формулам (Э 28.26) и (Э 28.27) нельзя пользоваться ни мгновенными, ни амплитудными значениями тока и напряжения. Переменный ток считают эквивалентным постоянному току такой же мощности, и таким образом определяют эффективные (действующие) значения напряжения и силы тока.



Так как при постоянном сопротивлении мощность пропорциональна квадрату силы тока или напряжения ($P \sim I^2$ и $P \sim V^2$), эффективное значение выражается через квадраты мгновенных значений. Возводя в квадрат синусоидальную функцию $i(t)$, получаем периодическую кривую $i^2(t)$. Эффективное значение определяется средним по времени от этой функции:

$$I^2 = \overline{i^2} = \frac{I_m^2}{2}.$$

Если
I — эффективная сила тока,
I_m — амплитуда силы тока,
U — эффективное напряжение,
U_m — амплитуда напряжения,

то имеем

(Э 32.1) $$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m;}$$

после умножения на сопротивление получаем

(Э 32.2) $$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 U_m.}$$

Эффективные значения силы тока и напряжения относятся к амплитуде (максимальному значению) как $1 : \sqrt{2}$.

Обратите внимание:

- Формулы (Э 32.1) и (Э 32.2) справедливы только в случае переменного тока синусоидальной формы.
- Эффективные значения тока и напряжения обозначаются в формулах буквами I и U.

32.2. Сопротивление переменному току

Сопротивление проводников, вычисляемое по формуле (Э 28.6), одинаково как для постоянного, так и для переменного тока. Его называют **омическим** или **активным сопротивлением.** Величина активного сопротивления определяется свойствами проводника.

Кроме активных сопротивлений, в цепях переменного тока встречаются так называемые **реактивные сопротивления.** Они отличаются от активных тем, что не преобразуют электрическую энергию в тепло.

Геометрическая сумма активного и реактивного сопротивлений называется **полным сопротивлением.**

32.2.1. Индуктивное сопротивление

Индуктивность L в электрической цепи вызывает запаздывание тока (см. разд. 30.3.5). Вследствие этого ток достигает максимального значения I_m позже напряжения. Если $R = 0$, приложенное напряжение противоположно индуцированному напряжению:

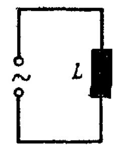
$$u = L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(LI_m \sin \omega t);$$

отсюда

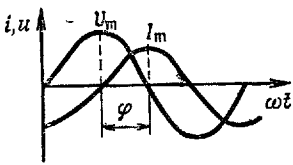
$$u = \omega L I_m \cos \omega t,$$

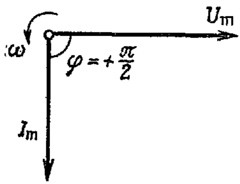
или

$$u = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$



Между напряжением и током возникает **разность фаз** (сдвиг фаз), равная $+\pi/2$.





В цепи переменного тока, содержащей только индуктивность, напряжение опережает ток на $\pi/2$ (или $T/4$).

Обратите внимание:

- **На векторной диаграмме** ток — напряжение векторы вращаются против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Угол между векторами напряжения и тока соответствует сдвигу фаз φ; $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Из написанного выше равенства следует, что амплитуда напряжения $U_m = \omega L I_m$. Сопоставляя это выражение с законом Ома $U_m = RI_m$, мы видим, что величина ωL играет роль сопротивления.

Цепь переменного тока, содержащая индуктивность L, обладает сопротивлением переменному току; оно называется **индуктивным сопротивлением** X_L.

Единица СИ индуктивного сопротивления: $[X_L] = \text{Ом}$.

Если
X_L — индуктивное сопротивление цепи переменного тока,
$\omega = 2\pi f$ — круговая частота переменного тока,
L — индуктивность цепи,

то имеем

(Э 32.3) $$\boxed{X_L = \omega L.}$$

	X	ω	L
СИ	Ом	1/с	Гн = В · с/А

Обратите внимание:

- Индуктивное сопротивление X_L растет с увеличением частоты; для постоянного тока ($f = 0$) оно равно нулю.

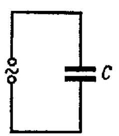
При наличии в цепи только индуктивного сопротивления сила тока определяется выражением

(Э 32.4) $$\boxed{I = \frac{U}{\omega L}.}$$

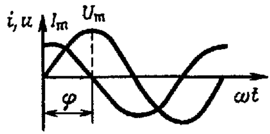
	I	U	ω	L
СИ	А	В	1/с	Гн = В · с/А

32.2.2. Емкостное сопротивление

Конденсатор емкостью C имеет в цепи постоянного тока бесконечно большое сопротивление. Если же приложить к конденсатору переменное напряжение, то он будет периодически перезаряжаться, и в цепи потечет ток. Напряжение на конденсаторе достигает максимального значения в те моменты, когда ток равен нулю. Если $R = 0$, то напряжение на конденсаторе совпадает с приложенным напряжением и $u = q/C$. Мгновенное значение тока определяется выражением

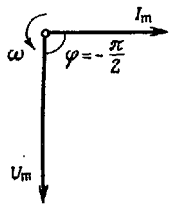


$$i = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{du}{dt} = $$
$$= C\,\frac{d}{dt}(U_m \sin \omega t).$$



Отсюда следует

$$i = \omega C U_m \cos \omega t =$$
$$= \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$



Между напряжением и током имеется разность фаз $-\pi/2$.

В чисто емкостной цепи переменного тока ток опережает напряжение на $\pi/2$ (или $T/4$).

В соответствии с приведенным выше уравнением амплитуда тока $I_m = \omega C U_m$. Сравнение с законом Ома $U = RI$ показывает, что величина $1/\omega C$ играет роль сопротивления.

Цепь переменного тока, содержащая емкость C, обладает сопротивлением переменному току; оно называется **емкостным сопротивлением** X_C.

Единица СИ емкостного сопротивления: $[X_C]$ = Ом.

Если
X_C — емкостное сопротивление цепи переменного тока,
$\omega = 2\pi f$ — круговая частота переменного тока,
C — емкость,

то

(Э 32.5) $$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}.}$$

	X	ω	C
СИ	Ом	1/с	Ф = А · с/В

Обратите внимание:

- При увеличении частоты емкостное сопротивление уменьшается. Для постоянного тока ($f = 0$) оно бесконечно велико.

Ток в цепи, обладающей только емкостным сопротивлением, определяется выражением

(Э 32.6) $$\boxed{I = U\omega C.}$$

	I	U	ω	C
СИ	А	В	1/с	Ф = А · с/В

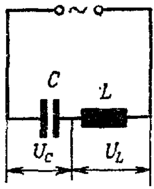
32.2.3. Реактивное сопротивление

Цепи переменного тока часто содержат как емкостные, так и индуктивные сопротивления. Их сложение подчиняется определенным правилам.

Если
U — полное напряжение (эффективное значение),
I — полный ток (эффективное значение),
U_C — напряжение на емкостном сопротивлении,
U_L — напряжение на индуктивном сопротивлении,
I_C — ток через емкостное сопротивление,
I_L — ток через индуктивное сопротивление,
X_C — емкостное сопротивление,
X_L — индуктивное сопротивление,
X — полное реактивное сопротивление,
$B = 1/X$ — реактивная проводимость,

то при **последовательном соединении** L и C имеем

(Э 32.7) $$\boxed{X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

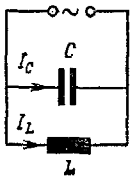


и

(Э 32.8) $$\boxed{U = U_L - U_C = IX_L - IX_C = IX.}$$

При **параллельном соединении** L и C

(Э 32.9) $$\boxed{\begin{gathered}B = B_C - B_L = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} = \omega C - \frac{1}{\omega L},\\ X = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\end{gathered}}$$

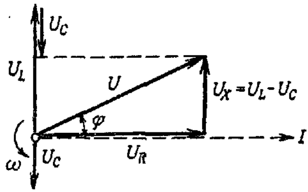


и

(Э 32.10) $$\boxed{I = I_C - I_L = \frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L} = \frac{U}{X} = UB.}$$

32.2.4. Полное сопротивление

В любой цепи переменного тока наряду с чисто реактивным сопротивлением присутствует омическое (активное) сопротивление, которое нужно учитывать при определении полного сопротивления.



Если
Z — полное сопротивление,
R — омическое (активное) сопротивление,
X — реактивное сопротивление,
$Y = 1/Z$ — полная проводимость,
G — активная проводимость,
B — реактивная проводимость,
U — полное напряжение (эффективное значение),
I — полный ток (эффективное значение),

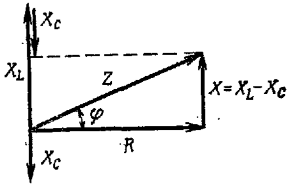
то имеем:

Последовательное соединение R и X

При последовательном соединении активное и реактивное сопротивления складываются геометрически:

(Э 32.11) $$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2}}$$

и

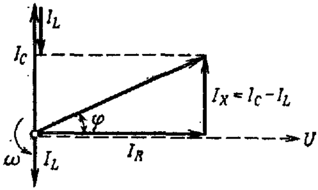


(Э 32.12) $$\boxed{U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}=IZ.}$$

Обратите внимание:

- X определяется по формулам (Э 32.7) и (Э 32.9). Величина U_X определяется как произведение IX.
- Сопротивление Z не зависит от времени. Вектор, изображающий сопротивление на векторной диаграмме, не вращается.

Параллельное соединение R и X

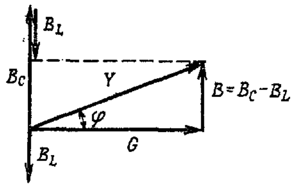


При параллельном соединении активная и реактивная проводимости складываются геометрически

(Э 32.13) $$\boxed{Y=\sqrt{G^2+B^2}}$$

и

(Э 32.14) $$\boxed{I=\sqrt{I_R^2+I_X^2}=UY.}$$

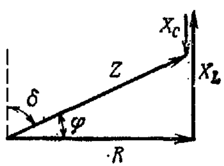


Обратите внимание:

- Величина $B=1/X$ определяется по формулам (Э 32.7) или (Э 32.9). I_X определяется как произведение UB.
- Величина Y не зависит от времени. Вектор, изображающий на векторной диаграмме проводимость, не вращается.

32.2.5. Фазовый сдвиг

При наличии в цепи индуктивного или емкостного сопротивлений сдвиг по фазе между током и напряжением составляет $+\pi/2$ или $-\pi/2$. Если цепь содержит еще и активное сопротивление (полностью устранить которое невозможно), то фазовый сдвиг лежит в пределах $\pi/2 > \varphi > -\pi/2$. Разность фаз φ между током и напряжением изображается на векторной диаграмме для этих величин.



На векторной диаграмме сопротивлений φ — это угол между активным и реактивным сопротивлениями или проводимостями.

В случае **последовательного соединения** R, C и L из формулы (Э 32.7) следует

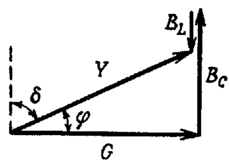
(Э 32.15) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.}$$

	ω	L	C	R	φ
СИ	1/с	Гн = В · с/А	Ф = А · с/В	Ом	рад

В случае **параллельного соединения** R, C и L из формулы (Э 32.9) следует

(Э 32.16) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).}$$

Единицы: см. (Э 32.15)



Во многих случаях (например, при параллельном соединении большой емкости и большого активного сопротивления или последовательном соединении большой индуктивности и очень малого активного сопротивления) фазовый сдвиг оказывается близким к $\pi/2 = 90°$. Из-за трудности определения φ в этих случаях пользуются **углом потерь** δ:

(Э 32.17) $$\boxed{\delta = 90° - \varphi,}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\delta = 1/\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi.$$

32.2.6. Резонанс

Если в цепи переменного тока X_L и X_C равны, то они взаимно компенсируются, и общее реактивное сопротивление X цепи равно нулю.

Если
L — индуктивность цепи, } соединенные последовательно
C — емкость цепи, } или параллельно,
$\omega = 2\pi f$ — угловая частота,
f — частота переменного напряжения,
T — период,

то в цепи переменного тока возникает резонанс при выполнении условия

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Отсюда следует **формула Томсона**

(Э 32.18)
$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}}, \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \\ T &= 2\pi\sqrt{LC}. \end{aligned}}$$

	ω	f	T	L	C
СИ	1/с	Гц	с	Гн = В · с/А	Ф = А · с/В

Различают два вида резонанса:

- Последовательный резонанс, когда емкость и индуктивность соединены последовательно.
- Параллельный резонанс, когда емкость и индуктивность соединены параллельно.

При последовательном резонансе наблюдается максимум тока. Напряжения на реактивных сопротивлениях (L и C) больше полного напряжения **(резонанс напряжений)**.

Полное сопротивление последовательной цепи (контура) на резонансной частоте f (Э 32.18) минимально ($Z = R$). Поэтому такая цепь применяется как **фильтрующая цепь** (фильтр).

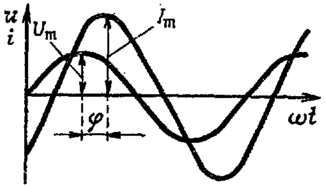
При параллельном резонансе возникает минимум тока. Токи через реактивные сопротивления больше полного тока **(резонанс токов)**.

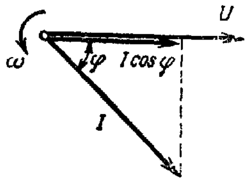
Полное сопротивление параллельной цепи (контура) на резонансной частоте f (Э 32.18) имеет максимум. Поэтому параллельный контур применяют как **заграждающий фильтр**.

32.3. Мощность переменного тока

32.3.1. Активная мощность

Реактивные сопротивления создают в цепи разность фаз между напряжением и током. На векторной диаграмме U и I образуют между собой угол φ. При вычислении активной мощности рассмат-





ривают только произведение эффективного значения напряжения на эффективное значение составляющей тока, совпадающей по фазе с напряжением, т. е. активной составляющей тока.

Если
P — активная мощность,
I — эффективная сила тока,
U — эффективное напряжение,
φ — фазовый сдвиг,

то

(Э 32.19) $\boxed{P = UI \cos\varphi.}$

	P	U	I
СИ	Вт	В	А

Величина $\cos\varphi$ называется **коэффициентом мощности.**

Эффективную мощность можно найти как среднее за период значение мгновенной мощности, которая равна

$$p = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Проинтегрировав это выражение за период и поделив на величину периода, получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega t + \varphi)\, dt =$$

$$= \frac{U_m I_m \cos\varphi}{2} = UI \cos\varphi,$$

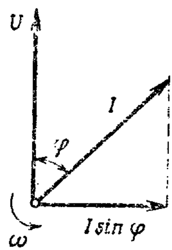
что соответствует выражению (Э 32.19).

Обратите внимание:

- Коэффициент мощности $\cos\varphi$ достигает максимального значения, равного единице, при $\varphi = 0°$ только в том случае, когда цепь не содержит реактивных сопротивлений.
- В цепи, содержащей только реактивные сопротивления, $\varphi = 90°$ и коэффициент мощности $\cos\varphi = 0$. Активная мощность равна нулю (**«безваттный» ток**).

32.3.2. Реактивная мощность

Реактивная мощность равна произведению эффективного напряжения на реактивный ток (составляющую тока, перпендикулярную напряжению).



Если
P_q — реактивная мощность, часто обозначаемая через Q,
I — эффективная сила тока,
U — эффективное напряжение,
φ — фазовый сдвиг,

то

(Э 32.20) $\boxed{P_q = UI \sin \varphi.}$

	P_q	U	I
СИ	вар	В	А

Единица СИ реактивной мощности: $[P_q]$ = вар = В·А.

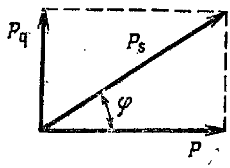
Обратите внимание:

- Для снижения реактивной мощности (реактивные токи приводят к дополнительной нагрузке сети) нужно уменьшать фазовый сдвиг. Это достигается применением дополнительных емкостных элементов, которые частично компенсируют реактивный ток, создаваемый трансформаторами, обмотками электродвигателей и другими индуктивными элементами.

32.3.3. Полная (кажущаяся) мощность

Полная мощность равна геометрической сумме активной и реактивной мощностей.

Если
P_s — полная мощность, часто обозначаемая через S,
P_q — реактивная мощность, часто обозначаемая через Q,
P — активная мощность,
U — эффективное напряжение,
I — эффективная сила тока,



то

(Э 32.21) $\boxed{P_s = \sqrt{P^2 + P_q^2}}$

и

(Э 32.22) $\boxed{P_s = UI.}$

	P_s	U	I
СИ	В·А	В	А

Единица СИ полной мощности: $[P_s]$ = **вольт-ампер** (В·А) = Вт.

Обратите внимание:

- Измеренные в цепи эффективные значения тока и напряжения определяют полную мощность.

32.4. Трансформатор

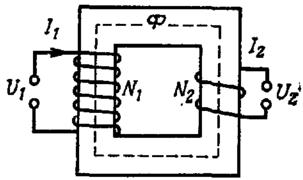
Трансформатор состоит из двух обмоток с разным числом витков, индуктивно связанных друг с другом благодаря наличию железного сердечника.

Коэффициентом трансформации называется отношение числа витков вторичной и первичной обмоток трансформатора.

Трансформатор используется для преобразования величины переменного напряжения. Периодические изменения тока в первичной обмотке вызывают соответствующие изменения магнитного потока, которые во вторичной обмотке индуцируют переменное напряжение. Напряжения на первичной и вторичной обмотках различаются из-за разного числа витков этих обмоток.

Если

N_1 — число витков первичной обмотки,
N_2 — число витков вторичной обмотки,
U_1 — напряжение на первичной обмотке,
U_2 — напряжение на вторичной обмотке,
k — коэффициент трансформации,



то в случае *ненагруженного* трансформатора, т. е. без передачи мощности, имеем

(Э 32.23) $$\boxed{\frac{U_2}{U_1}=\frac{N_2}{N_1}=k.}$$

Если пренебречь потерями мощности, которые в трансформаторах незначительны, то $P_1 = P_2$, откуда, учитывая соотношение $P = UI$, получим

(Э 32.24) $$\boxed{\begin{gathered}U_1I_1 = U_2I_2,\\ \frac{U_2}{U_1}=\frac{I_1}{I_2}=k.\end{gathered}}$$

33. Электрическая проводимость

Проводимость определяется наличием подвижных носителей заряда. Различают

- электронную проводимость (например, в твердых телах, вакууме),
- ионную проводимость (например, в жидкостях и газах).

Механизмы переноса заряда при различных агрегатных состояниях вещества сильно различаются. Однако величина переносимого заряда всегда равна целому числу элементарных электрических зарядов (Э 28.3).

В случае электрической проводимости любого вида носители заряда движутся под действием электрического поля:

- отрицательные заряды движутся от отрицательного полюса к положительному: I_-,
- положительные заряды движутся от положительного полюса к отрицательному: I_+.

Полный ток равен сумме токов, обусловленных обоими видами носителей заряда:

(Э 33.1) $$\boxed{I = I_+ + I_-.}$$

В замкнутой цепи под действием электрического поля носители заряда начинают двигаться ускоренно. Их скорость увеличивается до тех пор, пока ускоряющая сила электрического поля не уравновесится тормозящей силой, обусловленной сопротивлением проводника.

Плотностью n носителей заряда называется отношение числа подвижных носителей заряда N к объему V:

$$n = \frac{N}{V}.$$

За время Δt через поперечное сечение проводника A проходит столько зарядов, сколько их содержится в объеме $A\bar{v}\Delta t$, где $\bar{v}$ — скорость движения через поперечное сечение проводника (дрейфовая скорость). Следовательно, $N = nA\bar{v}\Delta t$. Если у каждого носителя имеется единственный элементарный заряд (что не обязательно для ионов), то переносимый заряд равен

$$Q = Ne = neA\bar{v}\,\Delta t$$

и, поскольку $I = \Delta Q/\Delta t$, имеем

$I = neA\bar{v}$. Так как $I/A = j$, для плотности тока получаем

$$j = ne\bar{v},$$

или, так как

$$I = \frac{U}{R} = \frac{UA}{\rho l} = \frac{\sigma UA}{l} = \sigma EA,$$

имеем

$$j = \sigma E.$$

Плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля: $j \sim E$.

Из выражения $j = ne\bar{v} = \sigma E$ получаем дрейфовую скорость:

(Э 33.2) $$\boxed{\bar{v} = \frac{\sigma E}{ne} = \frac{\sigma U}{nel};}$$

	v	σ	E	n	e	U	l
СИ	м/с	См/м	В/м	1/м^3	Кл = А · с	В	м

здесь

$\bar{v}$ — дрейфовая скорость, т. е. скорость направленного движения носителей заряда,

σ = $1/\rho$ — удельная проводимость,

E — напряженность электрического поля,
n — плотность носителей заряда,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
U — напряжение на концах проводника,
l — длина проводника.

Подвижностью u носителей заряда называется отношение их скорости дрейфа к напряженности электрического поля.

Из (Э 33.2) следует

(Э 33.3) $$\boxed{u = \frac{\bar{v}}{E} = \frac{\sigma}{ne}.}$$

	u	v	E	n	e	σ
СИ	м²/(В·с)	м/с	В/м	1/м³	Кл = А·с	См/м

Для удельной проводимости вещества в общем виде можно записать

(Э 33.4) $$\boxed{\sigma = n_+ e_+ u_+ + n_- e_- u_-}$$ Единицы: см. (Э 33.3)

Обратите внимание:

- Значения n и u у разных видов носителей заряда могут быть различными. Формула (Э 33.4) справедлива и в том случае, когда проводимость обеспечивается только одним из видов носителей заряда (например, электронная проводимость).
- Смысл произведения ne можно понять, обращаясь к соотношению $ne = \frac{Ne}{V} = \frac{Q}{V}$. Его называют **пространственной плотностью зарядов.**
- Для ионов, заряд которых равен *нескольким* элементарным зарядам, соответствующий член в сумме (Э 33.4) следует умножить на зарядовое число иона z.

33.1. Проводимость твердых тел

В зависимости от величины проводимости твердые тела делятся на

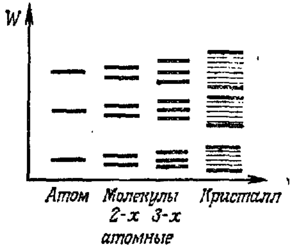
- проводники (металлы),
- полупроводники,
- непроводники (диэлектрики).

Общим для твердых тел является **кристаллическое строение** (исключение составляют некоторые **аморфные** вещества, например стекло). Атомы в кристаллах образуют регулярную пространственную решетку с характерной для каждого вещества структурой.

Электрические свойства твердых тел определяются расположением энергетических уровней электронов.

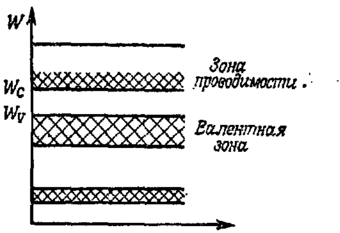
33.1.1. Зонная модель

Электроны в атоме обладают различной энергией. Набор всевозможных значений энергий электронов данного атома представляют с помощью так называемой **схемы**, или **диаграммы энергетических уровней** (см. разд. 37.4.1). В молекулах вследствие взаимодействия между атомами отдельные энергетические уровни расщепляются. В кристаллах взаимодействие, между атомами оказывается настолько сильным, что уровни вырождаются в зоны. Области между зонами соответствуют значениям энергии, которыми электроны обладать не могут, и называются **запрещенными зонами.**

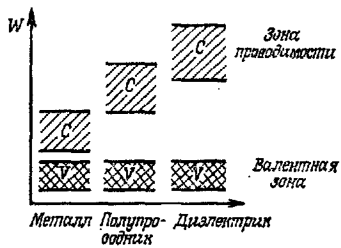


Любая разрешенная энергетическая зона состоит из большого числа близкорасположенных энергетических уровней, на каждом из которых может находиться по два электрона с противоположными спинами.

В энергетических зонах с полностью занятыми уровнями электроны не могут свободно перемещаться, создавая проводимость. Последняя из заполненных энергетических зон называется **валентной зоной.** Она простирается до энергии W_V.



Электрическая проводимость обусловлена свободно движущимися электронами. Их энергетические уровни располагаются в незаполненной разрешенной зоне, которая называется **зоной проводимости.** Эта зона начинается с энергии W_C.



Различие между проводниками, полупроводниками и диэлектриками обусловлено шириной запрещенной зоны между валентной зоной и зоной проводимости. Ширина запрещенной зоны может быть даже равной нулю. В этом случае валентная зона и зона проводимости перекрываются.

33.1.2. Проводимость в металлах

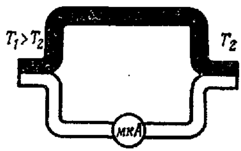
В металлах имеется очень много свободных электронов. На каждые 1—10 атомов кристаллической решетки приходится один свободный электрон, который может свободно перемещаться между атомами. Совокупность свободных электронов называется **электронным газом.** Приложенное к проводнику напряжение создает электрическое поле, под действием которого возникает направленное движение электронов. Их **дрейфовая скорость** (скорость направленного движения) очень мала. В соответствии с (Э 33.2) она составляет миллиметры в секунду.

Сопротивление металлов зависит от температуры, так как с ростом температуры колебания атомов решетки все сильнее и сильнее препятствуют движению электронов. При этом число свободных электронов не зависит от температуры.

При охлаждении металлов их сопротивление постепенно уменьшается, а у некоторых металлов при температурах, близких к абсолютному нулю, сопротивление скачком уменьшается до нуля (**явление сверхпроводимости**); температура, при которой наблюдается внезапное исчезновение сопротивления, называется **критической температурой.**

33.1.3. Термоэлектричество

Некоторые свободные электроны могут покинуть поверхность металла, если их энергия окажется равной или превысит **работу выхода** (см. разд. 33.4.3). Работа выхода зависит от типа материала. При плотном соединении (контакте) двух металлических поверхностей электроны из металла с меньшей работой выхода будут переходить в металл с большей работой выхода. При этом возникает **контактная разность потенциалов,** величина которой зависит от температуры.



Термоэлемент состоит из двух таких соединений (сваренных или спаянных). Если их температуры одинаковы, то контактные напряжения компенсируются. Если контактные соединения имеют различную температуру, то возникает **термо-ЭДС,** вызывающая **термоток.** Его величина зависит от сопротивления цепи, материалов и разности температур. В зависимости от величины термо-ЭДС металлы образуют термоэлектрический ряд напряжений.

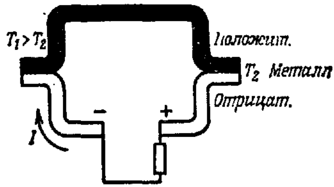
Справочная таблица

Термо-ЭДС некоторых металлов по отношению к меди для разности температур 100 К (температура меди 0°C)

Металл	Bi	Ni	Pt	Hg	Al	Pb	Ag	Cu	Cd	Fe	Sb
U, мВ/К	−8	−2,2	−0,7	−0,7	−0,3	−0,3	−0,05	0	+0,1	+1,0	+4,0

Обратите внимание:

- Термо-ЭДС любой комбинации металлов определяется как разность приведенных выше термо-ЭДС.
- На рисунке показано направление тока термоэлемента. Положительным потенциалом обладает металл, стоящий в ряду правее.



ЭДС наиболее употребительных термоэлементов приведены в следующей таблице.

Справочная таблица

Термо-ЭДС некоторых термопар для разности температур 100 К

Термопара	U, мВ	Термопара	U, мВ
Медь — константан	4,25	Нихром — константан	6,21
Железо — константан	5,37	Платина — платинородий	0,643
Нихром — никель	4,1	Железо — медь	1,05

Температура холодного спая 0 °С.

Обратите внимание:

- Термо-ЭДС приблизительно пропорциональна разности температур только в определенном диапазоне температур.
- Особенно большими термо-ЭДС обладают полупроводниковые термоэлементы.

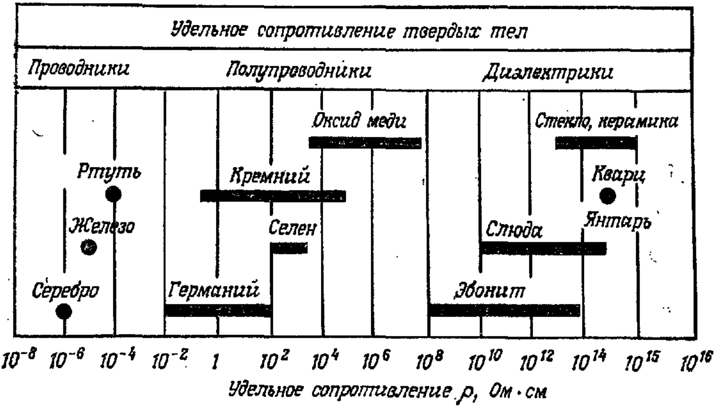
Явление, обратное термоэлектрическому эффекту, называется **эффектом Пельтье**. Если пропускать ток через соединение металлов, аналогичное термоэлементу, то между контактами возникает разность температур. При этом охлаждается контакт, который следует нагревать для получения того же направления термотока.

33.1.4. Полупроводники

При 0 К полупроводники не содержат свободных электронов и поэтому представляют собой диэлектрики. Однако в отличие от диэлектриков у полупроводников при повышении температуры возникает проводимость. Она зависит от ширины запрещенной зоны, т. е. от разности энергий

$$W_C - W_V = \Delta W.$$

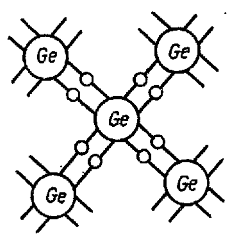
Сопротивление полупроводников уменьшается с ростом температуры.



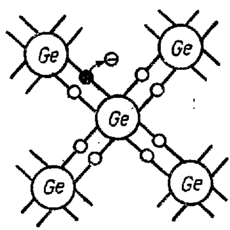
Техническое применение: термисторы и сопротивления с отрицательным температурным коэффициентом.

33.1.5. Собственная проводимость

Важнейшими полупроводниковыми материалами являются германий и кремний. Атомы этих элементов имеют по 4 электрона во внешней электронной оболочке, которые образуют валентную связь с электронами соседних атомов. При подведении энергии (теплоты или света) межатомные связи в решетке теряют электроны; при этом образуется положительный заряд. То место, где в решетке не хватает электрона, называют **дыркой.** Под действием напряжения электроны дрейфуют к положительному полюсу. Дырки движутся к отрицательному полюсу, причем их место занимают свободные электроны.



В чистом полупроводнике, проводимость которого обусловлена тепловым возбуждением, одинаковое число электронов и дырок движется в противоположных направлениях. Проводимость возрастает при повышении температуры.



Потерявшие часть своей энергии электроны захватываются дырками: происходит **рекомбинация.** При неизменной температуре число электронно-дырочных пар постоянно, так как скорость рекомбинации и скорость образования электронов и дырок одинаковы.

Если
n_- $= N/V$ — концентрация электронов,
n_+ — концентрация дырок,
n_0 — коэффициент пропорциональности, характеризующий число атомов решетки в единице объема,
ΔW $= W_C - W_V$ — расстояние между валентной зоной и зоной проводимости,
k $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,
T — температура полупроводника,

то

(Э 33.5) $$\boxed{n_- n_+ = n_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT}}.}$$

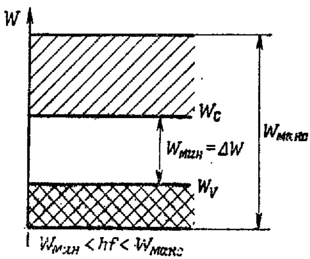
	n	W	k	T
СИ	1/м³	Дж	Дж/К	К

Произведение концентраций электронов и дырок при заданной температуре постоянно.

Обратите внимание:

- В германии при комнатной температуре $n_\pm \approx 2{,}5 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, а плотность атомов равна $4{,}4 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$. Таким образом, одна пара носителей заряда приходится примерно на 10^9 атомов.

Внутренний фотоэффект

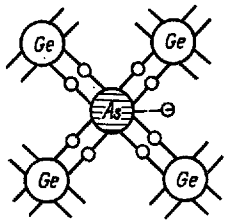


Электрон может перейти из валентной зоны в зону проводимости под действием света. Энергия световых квантов дается выражением $W = hf$ (Ат 35.1). Эта энергия должна превышать ширину запрещенной зоны, однако не должна превосходить интервала между верхним краем зоны проводимости и нижним краем валентной зоны.

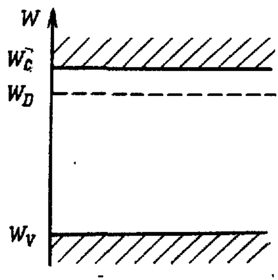
При увеличении числа квантов с подходящей длиной волны или частотой проводимость полупроводниковых материалов возрастает. Техническое применение: фотосопротивления.

33.1.6. Электронная проводимость

Проводимость полупроводника можно увеличить добавлением атомов других элементов (**легирование**). При введении в решетку полупроводника примесей возникает **примесная проводимость** (в отличие от собственной проводимости). Например, при легировании четырехвалентного германия пятивалентным мышьяком (или сурьмой, фосфором) в месте нахождения атома примеси **появляется** лишний свободный электрон. Один атом примеси приходится на 10^5—10^6 атомов решетки полупроводника. Примеси, приводящие к появлению свободных электронов, называются **донорными**. Энергетические уровни донорных электронов W_D лежат ниже зоны проводимости.



В данном случае справедливо выражение (Э 33.5). Поскольку наличие примеси приводит к увеличению приблизительно в 10^3 раз концентрации электронов, во столько же раз должна уменьшиться концентрация дырок: $n_- \approx 10^6 n_+$.

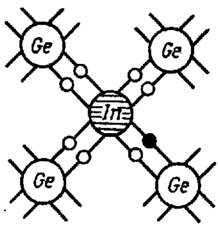


Поскольку $n_- \gg n_+$, электроны называются **основными носителями**, а дырки — **неосновными носителями**; германий в этом случае называют **полупроводником с электронной проводимостью**, или **полупроводником n-типа**.

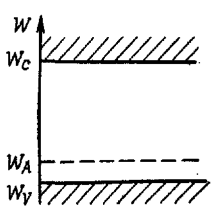
Проводимость в полупроводнике n-типа обусловлена почти исключительно электронами.

33.1.7. Дырочная проводимость

Проводимость полупроводника можно увеличить, легируя его элементами с меньшей валентностью. Если, например, легировать германий трехвалентным индием (либо бором, галлием), то в месте нахождения атома примеси возникает лишняя дырка. Такие примеси, уменьшающие число свободных электронов, называются **акцепторными**. Соответствующий им энергетический уровень лежит немного выше валентной зоны. При увеличении концентрации дырок, согласно (Э 33.5), концентрация электронов уменьшается.



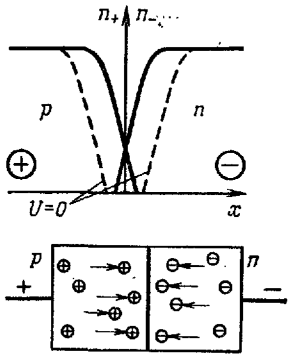
Поскольку $n_+ \gg n_-$, дырки будут основными носителями, а электроны — неосновными. Такой тип полупроводника называют **дырочным полупроводником**, или **полупроводником p-типа**.

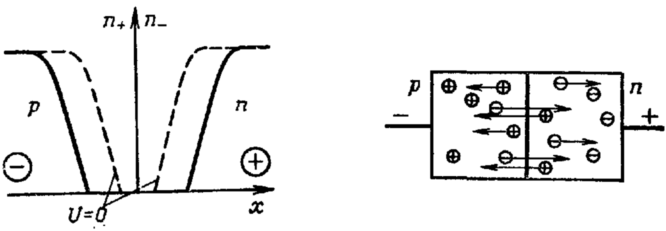


Проводимость в полупроводнике p-типа осуществляется почти исключительно дырками.

33.1.8. p — n-переход

В одном и том же образце полупроводникового материала один участок может обладать p-проводимостью, а другой — n-проводимостью. Между такими областями возникает пограничный слой, через который диффундируют основные носители, стремясь уравнять значения концентрации по обе стороны от слоя. В результате по обе стороны от границы возникает тонкий слой, в котором почти отсутствуют свободные носители заряда. Внешнее напряжение изменяет толщину этого слоя. Если положительный полюс источника напряжения соединен с p-областью, а отрицательный — с n-областью, то большое число основных носителей диффундирует в пограничный слой, где они рекомбинируют. При этом возникает относительно большой **прямой электрический ток.** При обратной полярности основные носители покидают пограничный слой. В рекомбинации участвует лишь небольшое число неосновных носителей и

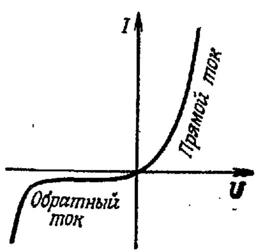




возникает очень слабый **обратный ток.**

> p — n-переход работает как выпрямитель, пропуская ток только из p-области в n-область.

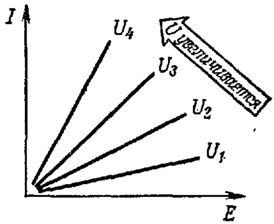
Полупроводниковый прибор с p — n-переходом называется **диодом.** Он служит для выпрямления переменного тока.



Фотодиод

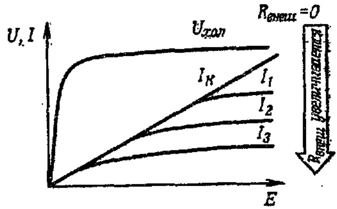
Если на запертый обратным напряжением диод падает свет, то число неосновных носителей возрастает, вследствие чего увеличивается обратный ток.

При использовании фотодиода для измерительных целей важно, чтобы обратный ток был пропорционален освещенности.



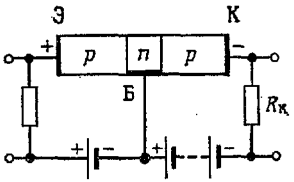
Фотоэлемент

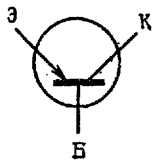
Фотодиод, не потребляющий тока от внешнего источника, представляет собой фотоэлемент. На рисунке показаны графики зависимости напряжения холостого хода и тока короткого замыкания от освещенности. При наличии внешнего сопротивления $R_{внеш} > 0$ ток не пропорционален освещенности.



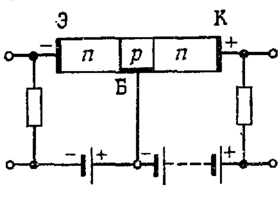
33.1.9. Транзистор

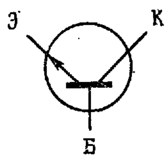
Транзистор представляет собой $p-n-p$- или $n-p-n$-структуру, или соединение противоположно включенных диодов.





Транзисторы $p-n-p$- и $n-p-n$-типа равноценны по своим параметрам. Транзисторы $p-n-p$-типа применяются чаще, потому что они проще в изготовлении.





Дырки (в $p-n-p$-транзисторе), создающие эмиттерный ток, из области эмиттера попадают в очень узкую (10—50 мкм) n-область базы, оттуда бóльшая их часть (95—99%) проходит в p-область к коллектору, образуя **коллекторный ток** $I_к$. Остальные дырки образуют **ток базы** $I_б$, текущий через базу Б.

Для суммы всех токов с учетом их направлений справедливо равенство

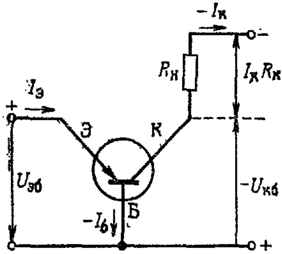
(Э 33.6) $$\boxed{I_э + I_б + I_к = 0.}$$

Обратите внимание:

- Ток, направленный к транзистору, считается положительным, от транзистора — отрицательным, причем направление тока определяется направлением движения положительных зарядов.

Схема с общей базой

В схеме **с общей базой**, изображенной на рисунке, база является общим выводом для входной и выходной цепи.



Если
$I_к$ — ток коллектора,
$I_э$ — ток эмиттера,
A — коэффициент усиления по току,

то

(Э 33.7) $$\boxed{I_к = AI_э,}$$

где $A = 0{,}95$—$0{,}995$.

Хотя коллекторный ток меньше эмиттерного, усиление обусловлено более высоким выходным напряжением по сравнению с входным; $U_{кб} \gg U_{эб}$. Поскольку $I_к \approx I_э$, имеем

$$I_э U_{кб} \sim I_э U_{эб}.$$

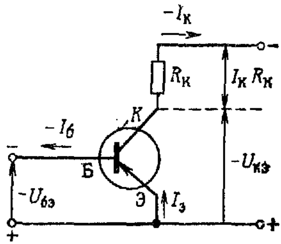
Поэтому транзистор в схеме с общей базой работает как усилитель мощности.

- Небольшие изменения входной мощности вызывают большие изменения выходной мощности.

Схема с общим эмиттером

Схема с общим эмиттером применяется наиболее часто. Эмиттер является общей точкой входной и выходной цепей. Во входной цепи течет очень малый ток базы

$I_б = I_э - I_к$.



Если
$I_к$ — ток коллектора,
$I_б$ — ток базы,
B — коэффициент усиления по току в схеме с общим эмиттером,

то

(Э 33.8) $$\boxed{I_к = BI_б.}$$

Исходя из равенств $B = I_к/I_б$ и $I_б = I_э - I_к$, получаем формулу для определения B:

$$B = \frac{I_к}{I_э - I_к}.$$

Поделим на $I_э$ с учетом, что $\frac{I_к}{I_э} = A$; тогда получим

(Э 33.9) $$\boxed{B = \frac{A}{1 - A}.}$$

Обратите внимание:

- Поскольку $A = 0{,}95$—$0{,}995$, из формулы (Э 33.9) следует, что $B = 20$—200.

Характеристики транзисторов

Функциональная зависимость важнейших величин определяется характеристиками транзистора, которые часто изображаются на одном чертеже. В каждом квадранте приводится своя характеристика

Схема с общей базой
1-й квадрант (выходные характеристики)

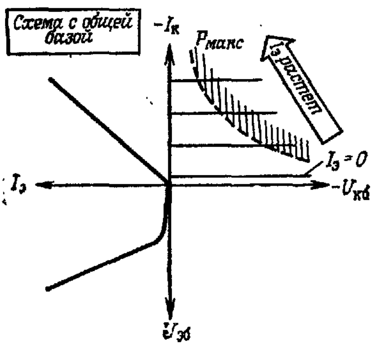
$-I_к = f(-U_{кб})$

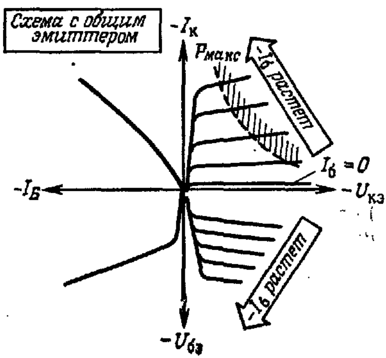
при различных значениях тока эмиттера $I_э$. Значению $I_э = 0$ соответствует обратный ток $I_{кб0}$.

Схема с общим эмиттером

$-I_к = -f(U_{кэ})$

при различных значениях тока базы $I_б$. Значению $I_б = 0$ соответствует остаточный ток $I_{кэ0}$.





2-й квадрант (переходные характеристики или характеристики усиления тока)

$-I_к = f(I_э)$ при $-U_{кб} = 1$ В.

$-I_к = f(-I_б)$ при $-U_{кэ} = 1$ В.

3-й квадрант (входные характеристики)

$I_э = f(U_{эб})$ при $-U_{кб} = 1$ В (характеристика открытого эмиттерного перехода).

$-I_б = f(-U_{бэ})$ при $-U_{кэ} = 1$ В.

4-й квадрант (характеристики обратной связи по напряжению)

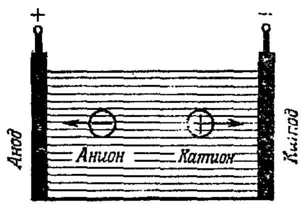
Эту характеристику часто не изображают, так как ее можно получить из других характеристик.

$-U_{кб} = f(U_{эб})$ при различных значениях тока эмиттера $I_э$.

$-U_{кэ} = f(-U_{бэ})$ при различных значениях тока базы $-I_б$.

33.2. Электрический ток в жидкостях.

Носителями электрического тока в жидкостях являются **ионы**, которые образуются при распаде (**диссоциации**) молекул.



Положительные ионы (**катионы**) движутся к отрицательному электроду (**катоду**); отрицательные ионы (**анионы**) движутся к положительному электроду (**аноду**).

33.2.1. Электролиз

Жидкости разделяются на проводящие и непроводящие, или диссоциирующие и недиссоциирующие. Проводящие жидкости называются электролитами. Они разлагаются при прохождении через них тока. К электролитам относятся главным образом водные растворы солей, кислот и щелочей. При электролизе на катоде (отрицательном полюсе) выделяется *металл* или *водород*. *Молекулярный остаток* выделяется на аноде (положительном полюсе).

Если
m — масса выделившегося вещества,
I — сила тока в электролите,
t — продолжительность протекания тока,
k — электрохимический эквивалент электролита (см. табл. 38),
Q — переносимый заряд,

Справочная таблица

Электролиз некоторых веществ

Электролит	Анион	Катион
Соляная кислота (HCl)	Cl_2	H_2
Серная кислота (H_2SO_4)	O_2 (из SO_4)	H_2
Сульфат меди ($CuSO_4$)	O_2 (из SO_4)	Cu
Хлорид цинка ($ZnCl_2$)	Cl_2	Zn
Едкий натр (NaOH)	O_2 (из OH)	H_2

то справедлив **первый закон Фарадея:**

(Э 33.10) $\boxed{m = kIt = kQ.}$

	m	k	I	t	Q
СИ	кг	кг/Кл	А	с	Кл
КД	мг	мг/Кл	А	с	Кл

Если
k — электрохимический эквивалент (см. табл. 38),
m — масса выделившегося вещества,
M — молярная масса (кг/кмоль), равная отношению массы к количеству вещества,
z — валентность,

то при одинаковых количествах электричества масса выделившегося вещества подчиняется **второму закону Фарадея:**

(Э 33.11) $\boxed{m_1 : m_2 = k_1 : k_2 = \frac{M_1}{z_1} : \frac{M_2}{z_2}.}$

При одинаковом количестве электричества масса вещества, выделившегося в результате электролиза различных электролитов, пропорциональна отношению молярной массы к валентности.

Заряд Q, необходимый для выделения 1 моля вещества, для всех электролитов одинаков. Он равен произведению постоянной Авогадро $N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ и элементарного электрического заряда $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл и называется **числом Фарадея:**

(Э 33.12) $\boxed{F = N_A e = 9{,}648456 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль.}}$

Электрохимический эквивалент и число Фарадея связаны соотношением

(Э 33.13) $\boxed{k = \frac{M}{zF}.}$

	k	M	z	F
КД	кг/Кл	кг/кмоль	—	Кл/кмоль

Обратите внимание:

- Молярная масса M численно равна относительной молекулярной массе $M_{отн}$.

33.2.2. Гальванический элемент

В гальванических элементах происходит преобразование химической энергии в электрическую. Так как этот процесс необратим, говорят о **первичных элементах**.

Если опустить металл в электролит, возникает электрический потенциал, величина которого зависит от вещества. При погружении в электролит двух различных металлов между ними возникает разность потенциалов, которая зависит от положения металлов в ряду электрохимических потенциалов.

Справочная таблица

Электрохимические потенциалы (в вольтах) некоторых металлов

	Au	Hg	Ag	Cu	H	Pb	Ni	Cd	Fe	Zn	Mg	Li
U, В	1,4	0,86	0,80	0,34	0,0	0,13	0,24	0,40	0,44	0,76	2,34	3,02
	+					−						

Ток, протекающий через гальванический элемент, приводит к химическим изменениям в электродах, в результате чего возникает противонапряжение (**поляризация**). При этом напряжение на элементе становится меньше значения, указанного в таблице; соответственно уменьшается и сила тока.

33.2.3. Аккумулятор

В аккумуляторах накопление электрической энергии происходит за счет ее превращения в химическую энергию. В отличие от гальванических элементов, которые сразу же готовы к работе, аккумуляторы надо предварительно зарядить. Поэтому их иногда называют **вторичными элементами**.

Свинцовый аккумулятор

Свинцовый аккумулятор состоит из двух свинцовых пластин, погруженных в электролит, представляющий собой 28-процентную серную кислоту. В результате реакции свинца с серной кислотой на поверхности пластин образуется сульфат свинца ($PbSO_4$). Зарядный ток преобразует сульфат свинца в оксид свинца (PbO_2) на аноде и в свинец (Pb) на катоде. Этот процесс сопровождается образованием серной кислоты. Во время зарядки концентрация серной кислоты и ее плотность возрастают. Во время разрядки процесс протекает в обратном направлении.

Процессы в аккумуляторе описываются следующим уравнением:

$$2PbSO_4 + 2H_2O \underset{\text{Разрядка}}{\overset{\text{Зарядка}}{\rightleftarrows}} PbO_2 + 2H_2SO_4 + Pb. \qquad (Э\ 33.14)$$

Анод Катод — Анод — Катод

Средний потенциал одного элемента свинцового аккумулятора при нормальной нагрузке составляет 2 В.

Плотность электролита служит характеристикой степени заряженности аккумулятора.

Железоникелевый аккумулятор

Анод железоникелевого аккумулятора состоит из $Ni(OH)_2$ (гидроксид никеля), катод из $Fe(OH)_2$ (гидроксид железа), в качестве электролита используется 20-процентный раствор едкого кали. Процессы зарядки и разрядки описываются следующим уравнением:

$$2Ni(OH)_2 + Fe(OH)_2 \underset{\text{Разрядка}}{\overset{\text{Зарядка}}{\rightleftarrows}} 2Ni(OH)_3 + Fe. \qquad (Э\ 33.15)$$

Анод — Катод — Анод — Катод

Средний потенциал одного элемента железоникелевого аккумулятора при нормальной нагрузке составляет около 1,2 В.

Обратите внимание:

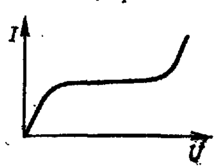
- В никелево-кадмиевых аккумуляторах вместо железа используется кадмий. Реакции протекают аналогично.

33.3. Электропроводность газов

Носителями заряда в газах могут быть ионы и электроны. Ток в газе представляет собой электрический **разряд**.

33.3.1. Несамостоятельный разряд

Ионы в газе возникают в основном под действием внешних агентов (рентгеновского излучения, горячего газового пламени, радиоактивного излучения). Если приложить напряжение, ионы начнут двигаться, т. е. возникнет ток. Он возрастает пропорционально напряжению, пока не достигнет некоторого постоянного значения, называемого **током насыщения**. При этом все образующиеся ионы участвуют в проводимости,



33.3.2. Самостоятельный разряд

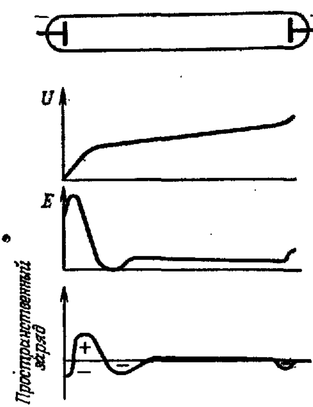
Если продолжать повышать напряжение, то ток снова начнет расти, так как происходит ионизация молекул при их соударении с ионами, имеющими большую энергию (**ударная ионизация**) и число носителей заряда сильно возрастает. Такой разряд называется самостоятельным, потому что он не требует ионизации газа внешним воздействием. При уменьшении давления газа требуемое напряжение снижается. С увеличением тока и числа носителей заряда сопротивление уменьшается.

Для ограничения тока в газовом разряде нужно включать дополнительное сопротивление.

В цепях переменного тока для этого часто применяют **дроссель**, т. е. индуктивное сопротивление.

33.3.3. Тлеющий разряд

При сильно пониженном давлении газа самостоятельный разряд сопровождается свечением. Положительные ионы, ударяясь в катод, вызывают электронную эмиссию. Рекомбинация ионов сопровождается так называемым отрицательным свечением вблизи катода. Положительный столб содержит одинаковое число положительных и отрицательных носителей заряда и является поэтому квазинейтральным (**плазма**). Почти все падение напряжения происходит вблизи катода. На рисунке показано распределение падения напряжения, напряженности поля и пространственного заряда в разрядной трубке.



Примеры применения тлеющего разряда

Газосветные трубки. Цвет свечения зависит от природы заполняющего ее газа.

Лампы дневного света (люминесцентные лампы). Эти лампы заполнены ртутными парами низкого давления или инертным газом и преобразуют с помощью нанесенного на внутреннюю поверхность лампы люминофора невидимое ультрафиолетовое излучение в видимый свет (флуоресценция).

Ртутные лампы. Они заполняются ртутными парами. Чем выше давление паров, тем интенсивнее свечение. «Горным солнцем» называются ртутные лампы с баллоном из кварца, который пропускает ультрафиолетовое излучение.

Неоновые лампы (лампы тлеющего разряда). Они используются в основном для обнаружения напряжения, а также для стабилизации напряжения. Напряжение зажигания больше напряжения гашения.

Импульсные лампы (лампы-вспышки). Они представляют собой трубку из твердого стекла, заполненную инертным газом, например ксеноном. (Давление газа 40—130 мбар, продолжительность разряда 0,1—1 мс.)

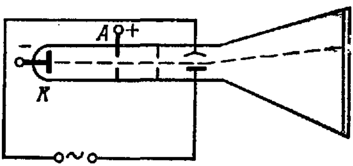
33.3.4. Катодные лучи

Катодные лучи возникают в сильно откачанных трубках (давление менее 10^{-2} мбар), если к электродам приложено постоянное высокое напряжение. Катодные лучи состоят из *электронов*, летящих с большой скоростью.

Свойства катодных лучей:

- Они распространяются прямолинейно.
- Вызывают почернение фотоэмульсий.
- Вызывают свечение стекла, люминофоров и некоторых других материалов.
- Отклоняются магнитным и электрическим полями.

Отклонение электронного луча используется в **электронно-лучевой трубке**: интенсивный поток электронов из катода пролетает анод и попадает на флуоресцирующий экран. Прилагая напряжение к специальным электродам, можно управлять лучом. Такая трубка с подогревным катодом используется в электронном осциллографе.



33.3.5. Каналовые лучи

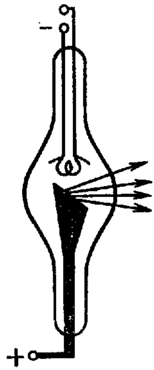
Каналовые лучи — это поток *положительных ионов*, движущихся по направлению к катоду со скоростями от 300 до 3000 км/с.

33.3.6. Рентгеновское излучение

Рентгеновское излучение возникает при соударении катодных лучей с металлической поверхностью. Оно представляет собой электромагнитное излучение с длиной волны в диапазоне 10^{-2} — 10 нм. Коротковолновое рентгеновское излучение называется жестким, длинноволновое — мягким. Излучение имеет две компоненты. При торможении электронов возникает **тормозное излучение**, имеющее сплошной спектр, простирающийся вплоть до определенной максимальной длины волны (см. разд. 37.4.4). Часть электронов переводит атомы металла в возбужденное состояние, в результате чего возникает так называемое **характеристическое излучение** с определенными длинами волн.

Свойства рентгеновских лучей:

- Они распространяются прямолинейно.
- Проникают сквозь непрозрачные для света вещества, такие, как мышцы, дерево и т. д.
- Вызывают флуоресценцию некоторых веществ.
- Вызывают почернение фотоэмульсии.
- Вызывают биологические изменения в живых тканях.
- Не отклоняются электрическим и магнитным полями.



Интенсивность рентгеновских лучей измеряется в кулонах на килограмм (Кл/кг).

Для получения рентгеновского излучения применяются специальные трубки, в которых для достижения большой мощности используются подогревные катоды и аноды с водяным охлаждением.

33.4. Электрический ток в вакууме

33.4.1. Энергия и скорость свободных электронов

Электрическое поле ускоряет электроны в направлении анода благодаря действию силы $F = Ee$ (Э 29.1). Величина ускорения определяется выражением $a = F/m = Ee/m_e$. Скорость и кинетическая энергия электрона в поле непрерывно возрастают.

Энергия электронов измеряется в электрон-вольтах (эВ).

Электрон-вольтом называется энергия, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов 1 В.

Электрон-вольт — внесистемная единица, применяемая в атомной и ядерной физике.

Соотношение между единицами энергии

1 электрон-вольт (эВ) = $1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Дж

Если
U — ускоряющее напряжение,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, равный элементарному заряду,
m_e $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона,
v — скорость электрона,

то, поскольку энергия электронов $m_e v^2/2$ равна работе, затраченной на ускорение, имеем

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

После подстановки всех констант получаем следующее выражение:

(Э 33.16) $$\boxed{v = 594\sqrt{U}\ \text{км/с},}$$

где напряжение U выражено в вольтах.

Эта формула справедлива при не очень больших скоростях. При скоростях электронов, превышающих примерно 20% скорости света в вакууме, следует учитывать релятивистское увеличение массы (см. разд. 41.4.1). Формула (Э 33.16) дает в этом случае завышенные значения.

Если
U — ускоряющее напряжение,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона,
m_{e0} $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона,
m_e — масса электрона, движущегося со скоростью v
c $= 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
v — скорость электрона,

то, поскольку кинетическая энергия равна полной энергии за вычетом энергии покоя, согласно (Ат 35.2), имеем

$$eU = (m_e - m_{e0})\, c^2 = m_{e0}c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Отсюда следует выражение для скорости электронов

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eU}{m_{e0}c^2} + 1\right)^2}}.$$

После подстановки численных значений получаем

(Э 33.17) $$\boxed{v = 2{,}998 \cdot 10^5 \sqrt{1 - \frac{1}{1 + 1{,}957 \cdot 10^{-6} U}}\ \text{км/с},}$$

где напряжение U выражено в вольтах.

Обратите внимание:

- Зависимость массы электрона от скорости при различных значениях ускоряющего напряжения приведена в таблице.

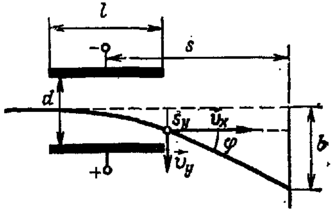
Справочная таблица

Зависимость массы электрона от скорости

Ускоряющее напряжение U, В	Скорость электрона $\frac{v}{c}$	v, км/с	Масса электрона $\frac{m_e}{m_{e0}}$	m, кг
1	$1{,}95 \cdot 10^{-8}$	584	1,000	$0{,}911 \cdot 10^{-30}$
10	$6{,}24 \cdot 10^{-3}$	1 872	1,000	0,911
10^2	0,0198	5 929	1,000	0,911
10^3	0,0625	18 728	1,002	0,913
10^4	0,195	58 455	1,020	0,929
10^5	0,548	174 352	1,196	1,089
$1 \cdot 10^6$	0,941	282 128	2,957	2,694
$2 \cdot 10^6$	0,979	293 519	4,914	4,476
$3 \cdot 10^6$	0,989	296 600	6,870	6,258
$5 \cdot 10^6$	0,996	298 501	10,78	9,824
$8 \cdot 10^6$	0,998	299 252	16,66	$1{,}517 \cdot 10^{-29}$
$1 \cdot 10^7$	0,999	299 438	20,57	1,874
$2 \cdot 10^7$	$1-3{,}1 \cdot 10^{-4}$	299 699	40,14	3,656
$3 \cdot 10^7$	$1-1{,}4 \cdot 10^{-4}$	299 750	59,71	5,439
$5 \cdot 10^7$	$1-5{,}12 \cdot 10^{-5}$	299 777	97,85	8,913
$8 \cdot 10^7$	$1-2{,}02 \cdot 10^{-5}$	299 786	157,6	$1{,}435 \cdot 10^{-28}$
$1 \cdot 10^3$	$1-1{,}3 \cdot 10^{-5}$	299 789	196,7	1,792
$1 \cdot 10^9$	$1-2 \cdot 10^{-7}$	299 792	1958	$1{,}784 \cdot 10^{-27}$

33.4.2. Движение электронов в поперечном электрическом поле

Движение электронов перпендикулярно направлению электрического поля подобно движению тела, брошенного по горизонтали (см. разд. 6.2.4). Траектория имеет вид параболы. Вместо ускорения свободного падения электрон испытывает ускорение, вызванное электрическим полем:



$$a = \frac{eE}{m_e}.$$

Если

v — скорость электронов на входе в поле,
E — напряженность электрического поля,
U — напряжение между пластинами,
l — длина пластин,
d — расстояние между пластинами,

m_e — масса электрона,
s — расстояние от середины конденсатора до экрана,
b — отклонение на экране,

то на выходе из поля движение электрона характеризуется следующими параметрами:

$$v_y = at = \frac{eEt}{m_e}; \quad s_y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEt^2}{2m_e}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eEt}{m_e v}.$$

Отклонение b дается выражением

$$b = s_y + \left(s - \frac{l}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi.$$

После подстановки получим

$$b = \frac{eEt^2}{2m_e} + \left(s - \frac{l}{2}\right)\frac{eEt}{m_e v},$$

где

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v}.$$

Отсюда

$$b = \frac{eEl^2}{2m_e v^2} + \left(s - \frac{l}{2}\right)\frac{eEl}{m_e v^2},$$

или, после преобразований

$$b = \left(\frac{l}{2} + s - \frac{l}{2}\right)\frac{eEl}{m_e v^2}.$$

Полагая $E = U/d$, находим окончательно:

$$\boxed{b = \frac{eUls}{m_e d v^2}.} \quad \text{(Э 33.18)}$$

33.4.3. Электронная эмиссия из металлов

Идеальный вакуум не содержит носителей заряда и является изолятором. В технически достижимом вакууме напряжение, приложенное к двум электродам, само по себе не вызывает электрического тока.

Электрический ток в вакууме может протекать лишь тогда, когда в него введены носители заряда (электроны).

Чтобы электрон покинул металлическую поверхность, необходимо затратить определенную, зависящую от вещества энергию, которая должна превышать так называемую **работу выхода.**

Справочная таблица

Работа выхода некоторых металлов

Металл:	Вольфрам	Молибден	Медь	Цезий на вольфраме	Паста на оксида бария
A, эВ	4,53	4,43	4,39	1,36	0,99
B, $\frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}$	60	55		3,2	1,18

Термоэлектронная эмиссия

При термоэлектронной эмиссии электроны вылетают за счет тепловой энергии. Термоэлектронная эмиссия представляет собой важнейший вид электронной эмиссии.

Число вылетающих электронов зависит главным образом от температуры, а также свойств материала.

Если
j — плотность электронного тока, эмиттированного горячим катодом,
B — постоянная Ричардсона,
T — температура катода,
A — работа выхода материала катода,
k $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана,

то справедливо **уравнение Ричардсона**

(Э 33.19) $$\boxed{j = BT^2 e^{-\frac{A}{kT}}}$$

	j	B	T	A	k
СИ	А/м²	А/(м²·К²	(К	Дж	Дж/К

Обратите внимание:

- Значения работы выхода, приведенные в таблице, можно пересчитать в джоули: 1 эВ $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж.
- Формула (Э 33.19) справедлива только в том случае, когда анодное напряжение достаточно велико и все электроны «отсасываются» из области катода.
- Постоянная Ричардсона представляет собой экспериментальную характеристику материала. Ее значения для некоторых металлов см. в справочной таблице.

Автоэлектронная эмиссия

При напряженности поля более 10^9 В/м создаваемой полем силы достаточно для вырывания электронов с поверхности вещества. Чтобы снизить напряжение, необходимое для создания такого поля, катоду придают форму тонкого острия.

Фотоэлектронная эмиссия (внешний фотоэффект)

Энергии $h\nu$ падающего кванта излучения (см. разд. 35) может оказаться достаточно для высвобождения электрона. Если эта энергия превышает работу выхода, то ее избыток превращается в кинетическую энергию электрона.

Если
m_e $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона,
v — скорость вылетевшего электрона,
h $= 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,
ν — частота излучения,
A — работа выхода,

то

(Э 33.20) $$\boxed{h\nu = A + \frac{m_e v^2}{2}.}$$

	h	A	m	v	ν
СИ	Дж·с	Дж	кг	м/с	Гц = 1/с

Энергия вылетающих электронов увеличивается с ростом частоты излучения.
Число выбитых электронов растет с увеличением интенсивности излучения (с увеличением числа квантов, падающих на поверхность в единицу времени).

Из (Э 33.20) следует, что фотоэмиссия возможна только в том случае, когда частота излучения превышает некоторое граничное значение $\nu_{гр}$, зависящее от A. Это граничное значение равно

(Э 33.21) $$\boxed{\nu_{гр} = \frac{A}{h}.}$$

	ν	A	h
СИ	Гц = 1/с	Дж	Дж·с

Используя формулу $c = \lambda\nu$, можно найти максимальное значение длины волны, соответствующее этой граничной частоте $\nu_{гр}$:

(Э 33.22) $$\boxed{\lambda_{гр} = \frac{ch}{A}.}$$

	λ	c	h	A
СИ	м	м/с	Дж·с	Дж

После подстановки численных значений получаем следующую формулу для длины волны излучения, способного вызвать фотоэмиссию:

(Э 33.23) $$\boxed{\lambda \leqslant \frac{1240}{A}\ \text{нм},}$$

где работа выхода A выражена в электрон-вольтах.

Вторичная электронная эмиссия

Электроны и ионы, движущиеся с достаточно высокой скоростью, при ударе о металлическую поверхность могут вызывать вторичную электронную эмиссию.

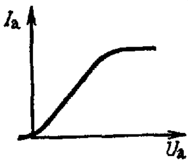
Этот эффект применяется в электронных умножителях, а также фотоэлектронных умножителях, где первичные электроны появляются в результате фотоэмиссии.

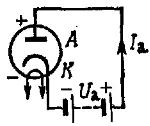
33.4.4. Электронные лампы

Электронные лампы представляют собой вакуумные приборы с подогревным катодом из оксида бария ($t = 700$—$800°C$), откачанные до давления $p < 0{,}1$ мПа. Между анодом и катодом прикладывается **анодное напряжение.**

Диод (двухэлектродная лампа)

Электрическое поле, создаваемое анодным напряжением, вынуждает эмиттированные катодом электроны лететь к аноду. Сила **анодного тока** растет с увеличением анодного напряжения, пока не достигнет насыщения. Характеристика диода нелинейна, а его внутреннее сопротивление не постоянно и в разных точках характеристики принимает различные значения.





Если
R_i — внутреннее сопротивление диода,
ΔU_a — приращение анодного напряжения,
ΔI_a — приращение анодного тока,

то

(Э 33.24) $$\boxed{R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}.}$$

	R	U	I
СИ	Ом	В	А
КД	кОм	В	мА

Управляющее действие анодного напряжения на анодный ток характеризуется **крутизной** S.

Если
S — крутизна характеристики диода,
ΔI_a — приращение анодного тока,
ΔU_a — приращение анодного напряжения,

то

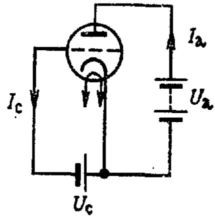
(Э 33.25) $$\boxed{S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_a}.}$$

	S	I	U
СИ	А/В	А	В
КД	мА/В	мА	В

Применение диодов:

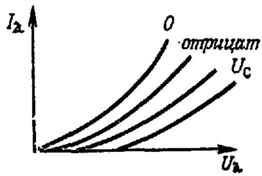
- для выпрямления переменного напряжения,
- для демодуляции,

● для получения регулировочных напряжений.

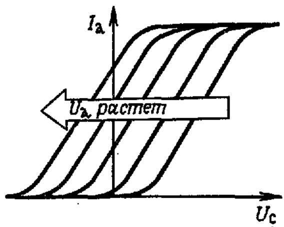


Триод (трехэлектродная лампа)

В дополнение к двум электродам, имеющимся в диоде, триод содержит управляющую сетку, представляющую собой проволочную спираль, расположенную между катодом и анодом. К сетке обычно прикладывается **отрицательное** относительно катода **напряжение смещения.** Положение вольтамперной характеристики $I_a(U_a)$ зависит от сеточного напряжения U_c. В свою очередь положение сеточной характеристики $I_a(U_c)$ зависит от анодного напряжения U_a.



Управляющее действие сеточного напряжения на анодный ток характеризуется крутизной S.



Если
S — крутизна анодно-сеточной характеристики триода,
ΔI_a — приращение анодного тока,
ΔU_c — приращение сеточного напряжения,

то при фиксированном анодном напряжении имеем

(Э 33.26) $$\boxed{S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_c}.}$$

	S	I	U
СИ	А/В	А	В
КД	мА/В	мА	В

Проницаемость лампы D определяется связью между сеточным напряжением и анодным напряжением при постоянном анодном токе.

Если
D — проницаемость триода,
ΔU_c — приращение сеточного напряжения,
ΔU_a — приращение анодного напряжения,

то при постоянном анодном токе

(Э 33.27) $$\boxed{D = \frac{\Delta U_c}{\Delta U_a}}$$

проницаемость D чаще всего измеряется в процентах.

Обратите внимание:

- Малое значение проницаемости D соответствует хорошему управляющему действию сетки.

Внутреннее сопротивление лампы определяется в соответствии с законом Ома.

Если
R_i — внутреннее сопротивление триода,
ΔU_a — приращение анодного напряжения,
ΔI_a — приращение анодного тока,

то при постоянном сеточном напряжении

(Э 33.28) $$\boxed{R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}.}$$

	R	U	I
СИ	Ом	В	А
КД	кОм	В	мА

Из формул (Э 33.26)—(Э 33.28) при постоянных I_a, U_a и U_c следует уравнение Баркгаузена:

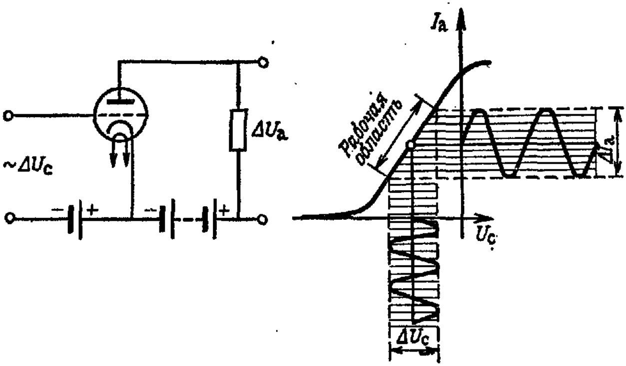
(Э 33.29) $$\boxed{SDR_i = 1.}$$

Величина, обратная проницаемости D, называется **максимальным коэффициентом усиления** μ. Согласно (Э 33.27), имеем

(Э 33.30) $$\boxed{\mu = \frac{1}{D} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_c} = SR_i.}$$

Максимальный коэффициент усиления по напряжению реализуется при $R_a = \infty$. Если сопротивление анодной цепи $R_a < \infty$, то **коэффициент усиления по напряжению** определяется формулой

(Э 33.31) $$\boxed{k = \mu \frac{R_a}{R_a + R_i} = S \frac{R_i R_a}{R_i + R_a}.}$$

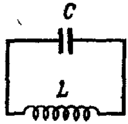


Триод чаще всего используется в качестве усилительной лампы, так как незначительное изменение напряжения на сетке вызывает большое изменение напряжения на аноде и сопротивлении R_a в анодной цепи. Для устранения искажений напряжение смещения подбирается с таким расчетом, чтобы рабочая точка лежала на прямолинейном участке характеристики $I_a(U_c)$.

34. Электромагнитные колебания и волны

34.1. Электромагнитные колебания

При механических колебаниях происходит периодическое изменение потенциальной и кинетической энергии. Аналогично при электромагнитных колебаниях периодически колеблются энергии электрического и магнитного полей. Математическое описание обоих процессов одинаково.



34.1.1. Колебательный контур

Электромагнитные колебания возникают в колебательных контурах, состоящих из конденсатора и катушки индуктивности. Если конденсатору сообщить заряд, то он будет разряжаться через катушку индуктивности. Ток разрядки создает магнитное поле, которое в свою очередь обеспечит заряд конденсатора, имеющий противоположную полярность. Сила тока и напряжение будут изменяться во времени по периодическому закону. Колебания не затухают только при условии, что колебательный контур не содержит активных сопротивлений.

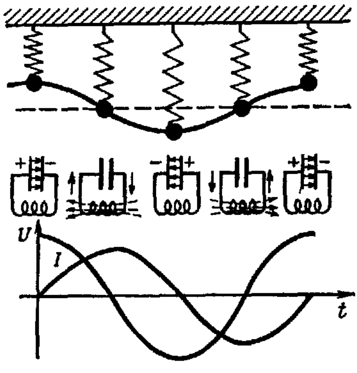


Рисунок позволяет наглядно представить себе аналогию между механическими и электромагнитными колебаниями.

34.1.2. Незатухающие электромагнитные колебания

Для вывода уравнения электромагнитных колебаний целесообразно рассматривать колебания заряда, мгновенное значение которого q на конденсаторе с емкостью C определяет мгновенное значение напряжения u_C. Производная заряда по времени dq/dt определяет мгновенное значение тока через катушку индуктивности L.

В каждый момент времени напряжения на катушке и конденсаторе должны быть равны друг другу, т. е.

$$u_C + u_L = 0,$$

где $u_C = q/C$ и $u_L = L\frac{di}{dt} = L\dot{q}$.

Отсюда следует

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0;$$

после деления на L получаем дифференциальное уравнение незатухающих электромагнитных колебаний

(Э 34.1) $$\boxed{\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0.}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

(Э 34.2) $$\boxed{q = Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) = Q_m \sin\varphi,}$$

где **собственная частота** колебательного контура

(Э 34.3) $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.}$$

	ω	L	C
СИ	1/с	Гн = В · с/А	Ф = А · с/В

Разделив выражение (Э 34.2) на величину емкости C, получим **мгновенное напряжение:**

(Э 34.4) $$\boxed{u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0) = U_m \sin\varphi.}$$

Продифференцировав (Э 34.2) по времени, найдем

$$\frac{dq}{dt} = Q_m\omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

откуда получаем выражение для **мгновенного значения тока:**

(Э 34.5) $$\boxed{i = I_m \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).}$$

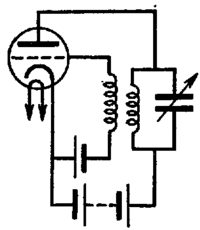
Формулу (Э 34.3) можно получить также, приравняв емкостное и индуктивное сопротивления, поскольку этим условием определяется частота колебаний в колебательном контуре (см. разд. 32.2.6). Таким образом, имеем $1/\omega C = \omega L$, откуда $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Поскольку $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, период колебаний определяется **формулой Томсона**

(Э 34.6) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}.}$$

	T	L	C
СИ	с	Гн = В · с/А	Ф = А · с/В

34.1.3. Возбуждение незатухающих электромагнитных колебаний

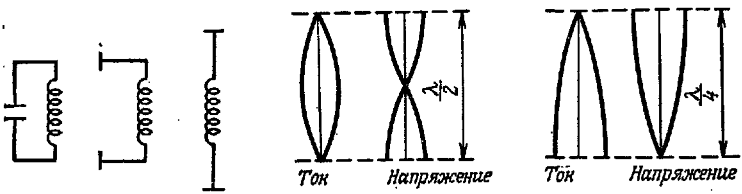
У каждого колебательного контура неизбежно имеется активная составляющая сопротивления. Поэтому колебания в контуре затухают, если только к нему извне не подводится энергия, компенсирующая омические потери. Для получения незатухающих высокочастотных колебаний часто применяют электронные лампы. Чтобы компенсировать затухание колебаний в контуре, включенном в анодную цепь лампы, напряжение с этого контура через катушку связи подается на сетку лампы для управления анодным током. В основу такого метода получения незатухающих колебаний положен принцип, носящий название **обратной связи.**



Так же работают и транзисторные устройства, предназначенные для получения незатухающих колебаний.

34.1.4. Открытый колебательный контур

На высоких частотах емкость конденсатора и индуктивность катушки колебательного контура должны быть малыми. Поэтому в качестве колебательного контура на высоких частотах может использоваться просто отрезок провода. Подобный открытый колебательный контур называется электрическим **вибратором.** Между



концами вибратора течет синусоидальный ток. Подобный вибратор используют в качестве излучателя электромагнитных волн. Чаще всего применяется полуволновый вибратор, в котором возникает стоячая волна с узлом тока по концам и узлом напряжения в середине. Применяют также четвертьволновый вибратор длиной $\lambda/4$, один конец которого заземляется.

34.1.5. Затухающие электромагнитные колебания

В колебательном контуре с затуханием сумма всех напряжений должна быть равна нулю (с учетом падения напряжения на активном сопротивлении R), т. е. $u_R = Ri$, $u_L + u_C + u_R = 0$, где $u_L = L\ddot{q}$ и $u_C = q/C$. Отсюда $L\ddot{q} + \frac{q}{C} + R\dot{q} = 0$.

После деления на L получим дифференциальное уравнение для случая затухающих электромагнитных колебаний:

(Э 34.7) $$\boxed{\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{q}{LC}=0.}$$

Его решение имеет вид

(Э 34.8) $$\boxed{q=Q_m e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi_0),}$$

где δ — **коэффициент затухания:**

(Э 34.9) $$\boxed{\delta=\frac{R}{2L}}$$

и ω — **собственная частота** затухающих колебаний:

(Э 34.10) $$\boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}.}$$

Для случаев резонанса, вынужденных колебаний и апериодического процесса справедливы те же закономерности, что и при описании механических колебаний.

34.2. Электромагнитные волны

34.2.1. Электромагнитные волны в линиях передачи

Подставим в дифференциальное уравнение (К 20.2) в качестве колеблющейся величины вместо отклонения y напряжение u или ток i и введем следующие обозначения:

U_m — амплитуда напряжения,
I_m — амплитуда силы тока,
ω $=2\pi\nu=2\pi/T$ — угловая частота,
t — время,
x — пройденное волной расстояние,
T — период,
λ — длина волны,
c — фазовая скорость электромагнитной волны.

По аналогии с (К 20.3) и (К 20.4) запишем решение дифференциального уравнения в виде:

(Э 34.11) $$\boxed{u=U_m\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)=U_m\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

и

(Э 34.12) $$\boxed{i=I_m\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)=I_m\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right).}$$

Если
C/l — емкость единицы длины линии,
L/l — индуктивность единицы длины линии,

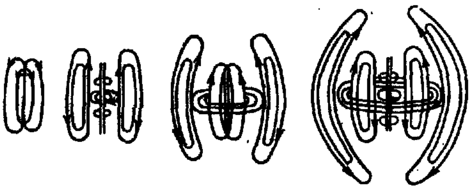
то для фазовой скорости получим

(Э 34.13) $$\boxed{v=\sqrt{\frac{1}{\frac{C}{l}\frac{L}{l}}}\,.}$$

	v	C	L	l
СИ	м/с	Ф = А · с/В	Гн = В · с/А	м

34.2.2. Электромагнитные волны в свободном пространстве

Для замкнутых колебательных контуров характерно незначительное затухание, для открытых — большое, так как часть запасенной в них энергии излучается в свободное пространство. На протяжении периода колебаний электрическое и магнитное поля проходят цикл изменений. Возрастание одного поля сопровождается одновременным убыванием другого; электрическое и магнитное поля ведут себя прямо противоположно. При убывании поля силовые линии не возвращаются обратно к вибратору, а замыкаются сами на себя. Между электрическим и магнитным полями вблизи передатчика существует разность хода $\lambda/4$. На больших расстояниях оба поля синфазны.



Электромагнитные волны в свободном пространстве распространяются со скоростью света. Электрическое и магнитное поля изменяются синфазно. Векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

Скорость распространения электромагнитных волн (фазовая скорость) совпадает со скоростью света и зависит от свойств среды.

Если
v — фазовая скорость (скорость света) в среде,
$\mu_a = \mu_0\mu$ — абсолютная магнитная проницаемость среды,
$\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды,

то

(Э 34.14) $$\boxed{v=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_a\mu_a}}}$$

	v	ε_a	μ_a
СИ	м/с	Ф/м = А · с/(В · м)	Гн/м = В · с/(А · м)

или для вакуума

(Э 34.15) $$\boxed{c=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\cdot 10^8\ \text{м/с}.}$$

Обратите внимание:

- Точное значение скорости света см. в разд. 25.12.

Из формул (Э 34.14) и (Э 34.15) следует

(Э 34.16) $$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.}$$

34.2.3. Спектр электромагнитных волн

Справочная таблица

Электромагнитные волны

Длина волны	Вид волн	
10^6 м = 1000 км 10^5 м = 100 км 10^4 м = 10 км	Сверхдлинные	
10^3 м = 1 км 10^2 м 10 м 1 м	Радиоволны	Длинные Средние Короткие
10^{-1} м = 10 см 10^{-2} м = 1 см 10^{-3} м = 1 мм	СВЧ-волны	Ультракороткие Телевидение Радиолокация
10^{-4} м = 0,1 мм = 100 мкм 10^{-5} м = 0,01 мм = 10 мкм	Инфракрасные волны	
10^{-6} = 1 мкм 10^{-7} = 100 нм	Видимый свет	770 нм 390 нм
10^{-8} м = 10 нм 10^{-9} м = 1 нм	Ультрафиолетовое излучение	
10^{-10} м = 100 пм = 1 Å 10^{-11} м = 10 пм	Рентгеновское излучение	Мягкое
10^{-12} м = 1 пм 10^{-13} м = 1 икс-ед. 10^{-14} м	γ-излучение	Жесткое
	Космические лучи	

Ат АТОМНАЯ ФИЗИКА

35. Кванты

Согласно Планку, любое излучение (в том числе и свет) состоит из отдельных квантов. Вследствие этого энергия излучения всегда равна энергии целого числа квантов. Однако энергия отдельного кванта зависит от частоты.

Если
W — энергия кванта, или квант энергии,
ν — частота излучения,
h $= 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка (квант действия),
то

(Ат 35.1) $\boxed{W = h\nu.}$

	W	h	ν
СИ	Дж	Дж·с	Гц = 1/с

Обратите внимание:

- Кванты излучения, частоты (или длины волн) которых соответствуют области видимого света, называются **световыми квантами.**

35.1. Связь между энергией и массой

Между энергией и массой любого вещества существует связь, которая дается уравнением Эйнштейна.

Если
W — энергия (тела, излучения, поля и т. д.),
m — масса, отвечающая энергии W,
c $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
то

(Ат 35.2) $\boxed{W = mc^2.}$

	W	m	c
СИ	Дж	кг	м/с

Обратите внимание:

- Каждой массе соответствует определенная энергия и наоборот.
- Каждому изменению массы соответствует определенное изменение энергии и наоборот.
- См. также разд. 41.4.4.

35.2. Фотон

Квантование энергии означает, что излучение представляет собой поток частиц. Эти частицы называются **фотонами**, однако они не являются частицами в смысле классической физики.

35.2.1. Масса фотона

Величину массы фотона можно вычислить по формуле (Ат 35.2).

Если
m — масса фотона,
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,
ν — частота излучения,
λ — длина волны излучения,
c — скорость света в вакууме,

то, используя одновременно (Ат 35.1) и (Ат 35.2), получаем $h\nu = mc^2$.
Отсюда

(Ат 35.3) $$\boxed{m = \frac{h\nu}{c^2}.}$$

	m	h	ν	c
СИ	кг	Дж·с	Гц = 1/с	м/с

Поскольку $c = \lambda\nu$ (К 20.1), имеем

(Ат 35.4) $$\boxed{m = \frac{h}{c\lambda}.}$$

	m	h	λ	c
СИ	кг	Дж·с	м	м/с

Обратите внимание:

- Фотоны всегда движутся со скоростью света; они не существуют в состоянии покоя, их масса покоя равна нулю.

35.2.2. Импульс фотона

Используя формулы (Ат 35.3) и (Ат 35.4), можно получить выражение для импульса фотона $p(= mc)$.

Если
p — импульс фотона,
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,
ν — частота излучения,
λ — длина волны излучения в вакууме,
$c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме

то

(Ат 35.5) $$\boxed{p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.}$$

	p	h	ν	c	λ
СИ	(кг·м)/с	Дж·с	Гц = 1/с	м/с	м

Обратите внимание:

- При поглощении или отражении излучения фотоны благодаря наличию у них импульса создают **давление** (давление излучения).

Экспериментальные доказательства квантовых свойств излучения и корпускулярной природы фотона основываются на:

- **фотоэлектрическом эффекте** (см. также разд. 33.4.3): скорость испускаемых фотоэлектронов не зависит от интенсивности света, но зависит от его частоты. Если частота оказывается ниже граничного значения, то электроны не испускаются.
- **эффекте Комптона:** при столкновении фотона с электроном часть энергии и импульса фотона передается электрону. Потеря фотоном энергии приводит к уменьшению его частоты; скорость электрона после соударения определяется на основе закона сохранения импульса.

35.3. Волны материи

Характерный для излучения **корпускулярно-волновой** дуализм де Бройль перенес также на частицы, обладающие массой покоя. Отвечающая частице так называемая **дебройлевская длина волны** зависит от ее массы и скорости.

Выражение «волна материи» нужно понимать в обобщенном смысле, поскольку излучение представляет собой одну из форм существования материи.

Если
λ — дебройлевская длина волны,
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка
m — релятивистская масса частицы (см. разд. 41.4.1); если скорость не превышает примерно 20% скорости света в вакууме, ее в хорошем приближении можно считать равной массе покоя,
v — скорость частицы,
p — импульс частицы,

то, используя (Ат 35.4), получаем

(Ат 35.6) $$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}.}$$

	λ	h	m	v	p
СИ	м	Дж·с	кг	м/с	(кг·м)/с

Потоку любых одинаковых частиц, движущихся с одной и той же скоростью, можно сопоставить определенную дебройлевскую длину волны λ.

36. Атомы

Все твердые, жидкие и газообразные вещества состоят из атомов или молекул. Строение всех атомов основано на общих закономерностях.

36.1. Строение атома и обозначения

Каждый атом состоит из ядра и оболочки (см. разд. 37), в состав которых входят различные элементарные частицы (см. разд. 40).

Справочная таблица

Строение атома

Атом

- Атомное ядро
  - Нуклоны
    - Протоны
    - Нейтроны
- Атомная оболочка
  - Электроны

Элементарные частицы	Протоны	Нейтроны	Электроны
Заряд Q	$+1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	0	$-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя m_0	$1836 m_e$	$1839 m_e$	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг $= m_e$
Обозначение	p	n	e

Общеприняты следующие обозначения:

$^{A}_{Z}$ Символ элемента, например, $^{27}_{13}\mathrm{Al}$, $^{238}_{92}\mathrm{U}$ и др.

Здесь

Z — атомный номер элемента; он равен числу протонов в ядре, числу электронов в оболочке и электрическому заряду ядра,

$A = Z + N$ — массовое число; оно равно числу нуклонов в ядре (числу протонов и нейтронов).

Обратите внимание:

- Часто атомный номер опускают и записывают, например, просто $^{27}\mathrm{Al}$.
- Термином **нуклид** обозначают определенное атомное ядро.

36.1.1. Изотопы (изотопные нуклиды)

Атомные ядра одного и того же элемента могут содержать различное число нейтронов. Такие разновидности называются **изотопами** (изотопными нуклидами) данного элемента.

Изотопы данного элемента отличаются друг от друга только числом нейтронов.

Таким образом, изотопы имеют:

- одинаковый атомный номер Z (одинаковое число протонов),
- различные массовые числа A (различное число нуклонов).

Большинство химических элементов представляет собой смесь различных изотопов.

Пример

Изотопы урана

Атом	Число протонов	Число нейтронов	Число электронов	Распространенность
$^{234}_{92}U$	92	142	92	0,0057%
$^{235}_{92}U$	92	143	92	0,72%
$^{238}_{92}U$	92	146	92	99,27%

36.1.2. Изобары (изобарные нуклиды)

Атомные ядра различных элементов могут иметь одинаковое массовое число A. Такие разновидности называют **изобарами** (изобарными нуклидами).

Таким образом, изобары имеют:

- различные атомные номера Z (различное число протонов),
- одинаковое массовое число A (одинаковое число нуклонов).

Пример

Изобары

Атом	Число протонов	Число нейтронов	Число электронов	Элемент
$^{210}_{81}Tl$	81	129	81	Таллий
$^{210}_{82}Pb$	82	128	82	Свинец
$^{210}_{83}Bi$	83	127	83	Висмут
$^{210}_{84}Po$	84	126	84	Полоний

36.2. Масса

36.2.1. Атомная масса

Для характеристики массы атомов и молекул используют понятие **атомной массы** M. Атомная масса — относительная величина; она определяется по отношению к массе атома углерода $^{12}_{6}C$, которая принимается равной 12,000 000.

Хотя в химии также используются относительные атомные или молекулярные массы $A_{отн}$ и $M_{отн}$, отнесенные к массе атома $^{12}_{6}C$, их нельзя считать идентичными атомной массе M, поскольку они относятся к естественной смеси изотопов соответствующего элемента. Таким образом, они определяют среднюю атомную массу элемента. Однако поскольку изотопы одного элемента обладают разными физическими свойствами, в атомной физике принято указывать атомную массу M каждого изотопа.

Для абсолютного определения атомной массы была введена **атомная единица массы (а. е. м.).**

Атомная единица массы (а. е. м.) равна $^1/_{12}$ массы атома углерода $^{12}_{6}C$.

Отсюда следует, что углерод обладает относительной атомной массой $M = 12{,}000$ и абсолютной атомной массой $m = 12{,}000$ а. е. м. Атомную единицу массы можно перевести в единицу массы СИ — килограмм.

(Ат 36.1)
$$\boxed{\begin{gathered} 1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{12} m_{C_{12}} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \\ 1 \text{ кг} = 6{,}022045 \cdot 10^{26} \text{ а. е. м.} \end{gathered}}$$

Из (Ат. 36.1) следует для массы атома

(Ат 36.2)
$$\boxed{m_a = M \cdot 1 \text{ а. е. м.} = M \cdot 1{,}66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}}$$

Обратите внимание:

- Формула (Ат 36.2) используется также для ядер, элементарных частиц, частиц — продуктов радиоактивных превращений и т. д.

Справочная таблица

Массы некоторых элементарных частиц и атомов

Наименование частицы	Обозначение	Число протонов	Число нейтронов	Число электронов	Масса m, а. е. м.
Электрон	$_{-1}^{0}e$	—	—	1	0,00054858
Протон (ядро атома водорода)	$_{1}^{1}p$	1	—	—	1,00727647
Нейтрон	$_{0}^{1}n$	—	1	—	1,00866501
Атом водорода	$_{1}^{1}H$	1	—	1	1,00782504
Дейтрон (ядро атома дейтерия)	$_{1}^{2}d$	1	1	—	2,01354
Атом дейтерия	$_{1}^{2}H$	1	1	1	2,01410179
α-частица (ядро атома гелия)	$_{2}^{4}\alpha$	2	2	—	4,001488
Атом гелия	$_{2}^{4}He$	2	2	2	4,00260327

Средние атомные массы (относительные атомные массы) всех элементов см. в табл. 43.

36.2.2. Число атомов

Зная массу атома $m_а$, можно вычислить число атомов в любой массе вещества.

Если
N — число атомов определенного вещества,
m — масса этого вещества,
M — атомная масса,

то, поскольку $N = m/m_а$, получаем

(Ат 36.3) $$\boxed{N = \frac{m}{M \cdot 1\ \text{а. е. м.}} = \frac{m}{M \cdot 1{,}66057 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}}.}$$ СИ $\frac{m}{\text{кг}}$

Обратите внимание:

- В большинстве случаев достаточно вместо точной атомной массы M в (Ат 36.3) использовать массовое число A (см. разд. 36.1).

36.2.3. Дефект массы

Массы ядер можно измерить с высокой точностью при помощи масс-спектрометра. Масса атомного ядра всегда оказывается меньше суммы масс нуклонов. Это явление называют **дефектом массы** Δm.

Под дефектом массы понимают разницу между суммой масс всех нуклонов, содержащихся в ядре, и массой ядра.

Если
Δm — дефект массы,
$m_п$ — масса протона,
$m_н$ — масса нейтрона,
Z — число протонов,
$N = A - Z$ — число нейтронов,
$m_я$ — масса ядра,

то

(Ат 36.4) $\boxed{\Delta m = Zm_п + Nm_н - m_я.}$

Обратите внимание:

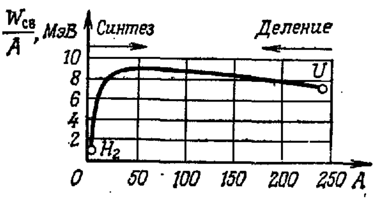
- Дефект массы обусловлен энергией связи ядра $W_{св}$ (см. разд. 36.3), которая выделяется в результате соединения нуклонов в ядра. Массу, соответствующую энергии связи ядра (т. е. дефект массы), можно найти с помощью соотношения Эйнштейна между энергией и массой (Ат 35.2) $W = mc^2$.

36.3. Энергия связи ядра

Нуклоны связаны в ядре благодаря ядерным силам, которые значительно превосходят силы электростатического отталкивания, действующие между протонами. Для расщепления ядра необходимо преодолеть эти силы, т. е. затратить энергию. Соединение нуклонов с образованием ядра, напротив, сопровождается высвобождением энергии, которую называют **энергией связи ядра** $W_{св}$.

Под энергией связи ядра $W_{св}$ понимают энергию, которая высвобождается в процессе образования из нуклонов атомного ядра.

У различных ядер она имеет разное значение. Особенно важную характеристику представляет собой энергия связи, приходящаяся на один нуклон. Как видно из рисунка, наибольшей энергией связи на нуклон обладают изотопы с массовым числом около 50. Очевидно, что выигрыш в ядерной энергии удается достичь только в тех случаях, когда в результате превращения средняя энергия связи на нуклон увеличивается.



Ядерная энергия может выделяться при слиянии легких ядер (реакция синтеза ядер) или расщеплении тяжелых (деление ядер), поскольку в этих процессах увеличивается средняя энергия связи на нуклон.

Взаимосвязь энергии связи ядра и дефекта массы вытекает из соотношения между энергией и массой (Ат 35.2).

Если
$W_{св}$ — энергия связи ядра,
Δm — дефект массы этого ядра,
c $\approx 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,

то

(Ат 36.5) $$\boxed{W_{св} = \Delta m c^2 = (Zm_п + Nm_н - m_я)c^2.}$$

	W	m	c
СИ	Дж	кг	м/с

Используя принятые в атомной физике единицы (атомную единицу массы, а. е. м., и единицу энергии МэВ), после подстановки численного значения для c получаем:

Дефекту массы, равному 1 а. е. м., отвечает энергия связи ядра, равная 931,5037 МэВ.

(Ат 36.6) $$\boxed{\frac{W_{св}}{\Delta m} = c^2 = 8{,}9876\cdot 10^{16}\,\frac{Дж}{кг} = 931{,}5\,\frac{МэВ}{а.\,е.\,м.}.}$$

36.4. Размеры

36.4.1. Радиус электрона[1]

Классическим радиусом электрона называют радиус шара, электрическое поле которого, обусловленное его элементарным зарядом e, обладает энергией, равной по порядку величины энергии покоя электрона.

Если
r_e — классический радиус электрона,
e $= 1{,}6021892\cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
m_e $= 0{,}9109534\cdot 10^{-30}$ кг — масса покоя электрона,
μ_0 $= 1{,}256637\cdot 10^{-6}$ Гн/м — магнитная постоянная,

то

(Ат 36.7) $$\boxed{r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e} = 2{,}817938\cdot 10^{-15}\ \text{м}.}$$

[1] Это условное понятие, заимствованное из представлений классической электродинамики. В действительности же экспериментально пока не удалось обнаружить «размеров» у электрона, хотя точность измерений доведена до 10^{-18} м. Сказанное не имеет отношения к другим элементарным частицам, например, протонам. — *Прим. ред.*

Обратите внимание:

- Часто для обозначения величины 10^{-15} м используется не входящая в СИ единица ферми (ф); правильно: фемтометр (фм).

36.4.2. Радиус ядра

Радиус ядра можно определить экспериментально.

Если
$r_я$ — радиус ядра,
A — массовое число ядра,

то справедлива эмпирическая формула

(Ат 36.8) $$\boxed{r_я \approx 1{,}4\sqrt[3]{A}\ \text{фм} = 1{,}4\cdot 10^{-15}\sqrt[3]{A}\ \text{м}.}$$

Обратите внимание:

- В ядре сконцентрирована почти вся масса атома. Зная массу и радиус ядра, можно вычислить плотность ядерного вещества: она составляет $2\cdot 10^8$ т/см^3.

36.4.3. Радиус атома

Размер атома определяется радиусом наиболее удаленной от ядра электронной орбиты. Он имеет величину порядка 0,1 нанометра (нм) $= 10^{-10}$ м. Приближенно его можно вычислить, используя атомную массу.

Если
$r_а$ — радиус атома,
ρ — плотность вещества,
$m_а$ — масса атома, вычисленная по формуле (Ат 36.2),

то

(Ат 36.9) $$\boxed{r_а \approx 0{,}5\sqrt[3]{\frac{m_а}{\rho}}.}$$

	r	ρ	$m_а$
СИ	м	кг/м^3	кг

37. Атомная оболочка

Чтобы наглядно представить строение атомной оболочки, разработаны различные модели, которые совершенствовались со временем. В модели Резерфорда электроны движутся вокруг атомного ядра подобно планетам вокруг Солнца. Необходимая для этого центростремительная сила обеспечивается электростатическим притяжением между положительно заряженным ядром и отрицательно заряженными электронами.

Однако электрон, движущийся в таком атоме с постоянным центростремительным ускорением, должен согласно законам элекродинамики (как любой движущийся с ускорением заряд) излучать энергию. Бор расширил эту модель, дополнив ее постулатами, обеспечивающими существование определенных орбит, на которых электроны не излучают. Наконец, Зоммерфельд в дополнение к круговым орбитам ввел в модель эллиптические орбиты различной формы и ориентации.

Несмотря на отдельные недостатки, **модель электронных оболочек** сохранила свое значение до наших дней. Однако полное объяснение процессов, происходящих в атомной оболочке, дает **лишь волновая (квантовая) механика.**

37.1. Постулаты Бора

37.1.1. Первый постулат

Электроны могут двигаться вокруг атомного ядра, не излучая, только по определенным орбитам, определяемым из условия квантования.

Если
r — радиус электронной орбиты,
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона,
ω — угловая скорость электрона на орбите,
v — орбитальная скорость электрона
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,
$\hbar = h/2\pi = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
L — момент количества движения (угловой момент) электрона,
n — положительное целое число,

то **условие квантования**, соответствующее (М 7.64), имеет вид

(Ат 37.1) $$\boxed{L = J\omega = m_e r^2 \omega = m_e r v = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar.}$$

Момент количества движения электрона, движущегося вокруг ядра, кратен $\hbar$ — деленной на 2π постоянной Планка.

37.1.2. Второй постулат

Каждой разрешенной условием квантования электронной орбите соответствует определенный энергетический уровень. Переход с более удаленной от ядра орбиты на более близкую орбиту происходит скачкообразно и сопровождается испусканием кванта излучения.

Если
W_m — энергия электрона на орбите m,
W_n — энергия электрона на орбите n,
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,
ν — частота излучения,

то при переходе электрона с орбиты m на орбиту n выделяется энергия W; частота испускаемого излучения в соответствии с (Ат 35.1) определяется соотношением

(Ат 37.2) $$\boxed{W = W_m - W_n = h\nu.}$$

	W	h	ν
СИ	Дж	Дж·с	Гц = 1/с

При переходе электрона на более низкий энергетический уровень испускается квант излучения, частота которого характерна для данного вида атомов.

37.2. Атом водорода

С помощью постулатов Бора можно определить орбитальную скорость, радиус орбиты электрона, а также энергию и частоту кванта излучения. Для атома водорода это можно сделать сравнительно просто и точно, поскольку вокруг ядра движется единственный электрон.

37.2.1. Скорость движения по орбите

Стационарная электронная орбита представляет собой устойчивое состояние и определяется тем, что центростремительная сила равна силе электростатического притяжения между электроном и ядром, т. е.

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Если

n — порядковый номер электронной орбиты (по мере удаления от ядра),

v_n — скорость электрона на n-й стационарной орбите,

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,

$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,

то из записанного выше условия следует $v_n^2 = e^2/4\pi m_e r_n \varepsilon_0$. Используя выражение для радиуса $r_n = nh/2\pi m_e v_n$, вытекающее из боровского условия квантования (Ат 37.1), получаем

(Ат 37.3) $$\boxed{v_n = \frac{e^2}{2n\varepsilon_0 h}.}$$

	v	e	n	ε_0	h
СИ	м/с	Кл	—	Ф/м	Дж·с

После подстановки численных значений постоянных имеем

(Ат 37.4) $$\boxed{v_n = \frac{2{,}18769 \cdot 10^6}{n}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.}$$

Скорости электрона на различных орбитах обратно пропорциональны порядковому номеру орбиты: $v_n \sim 1/n$.

37.2.2. Радиус орбиты

С помощью приведенных в разд. 37.2.1 условий устойчивости и квантования определяются орбитальная скорость и радиус допустимой электронной орбиты. Подставим в выражение $r_n = nh/2\pi m_e v_n$ орбитальную скорость (Ат 37.3).

Если
n — порядковый номер электронной орбиты,
r_n — радиус n-й орбиты,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
m_e $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона,
ε_0 $= 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,
h $= 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,

то

(Ат 37.5) $$\boxed{r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0 n^2}{\pi m_e e^2}.}$$

	r	n	h	ε_0	m_e	e
СИ	м	—	Дж·с	Ф/м	кг	Кл

После подстановки численных значений постоянных имеем

(Ат 37.6) $$\boxed{r_n = n^2 \cdot 5{,}29177 \cdot 10^{-11} \text{ м.}}$$

Радиусы допустимых орбит атома водорода относятся как квадраты порядковых номеров орбит: $1:4:9:16:25:\ldots$, т. е. $r \sim n^2$.

37.2.3. Энергетические уровни

Каждой допустимой электронной орбите отвечает определенный энергетический уровень, энергию которого можно представить в виде суммы потенциальной $W_п$ и кинетической $W_к$ энергий электрона.

Потенциальная энергия $W_п$ при $r = \infty$ принимается равной нулю. Поэтому на конечном расстоянии от ядра ($r < \infty$) энергия будет меньше, т. е. отрицательной. Она соответствует работе, которую необходимо затратить для перемещения электрона с расстояния r на бесконечность против действия электростатической силы притяжения (зависящей от расстояния).

Если
n — порядковый номер электронной орбиты,
$W_п$ — потенциальная энергия электрона на этой орбите,
m_e $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
ε_0 $= 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная,
h $= 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,

то

$$W_п = \int_\infty^r F\,dr = \int_\infty^r \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

С помощью выражения (Ат 37.5) для **потенциальной энергии** получаем

(Ат 37.7) $$\boxed{W_п = -\frac{m_e e^4}{4n^2 \varepsilon_0^2 h^2}.}$$

	W	m	e	n	ε_0	h
СИ	Дж	кг	Кл	—	Ф/м	Дж·с

После подстановки численных значений постоянных имеем

(Ат 37.8) $$\boxed{W_п = -\frac{4{,}35981 \cdot 10^{-18}\ Дж}{n^2} = -\frac{27{,}2116\ эВ}{n^2}.}$$

Потенциальная энергия электрона на орбите обратно пропорциональна квадрату порядкового номера орбиты: $W_п \sim 1/n^2$.

Для **кинетической энергии** электрона справедлива формула (М 7.24): $W_к = mv^2/2$, где v определяется по формуле (Ат 37.3). Кроме того, **кинетическая энергия** может быть рассчитана по формуле

(Ат 37.9) $$\boxed{W_к' = \frac{m_e e^4}{8n^2 \varepsilon_0^2 h^2}.}$$

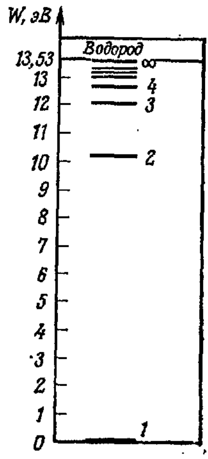
Единицы: см. (Ат 37.7)

Учитывая (Ат 37.7), из (Ат 37.9) получаем

(Ат 37.10) $$\boxed{W_к = -\frac{W_п}{2} = \frac{|W_п|}{2}.}$$

Кинетическая энергия электрона на любой орбите составляет половину его потенциальной энергии.

Полная энергия электрона на n-й орбите $W_n = W_к + W_п$ характеризует данный **энергетический уровень.**



(Ат 37.11) $$\boxed{W_n = -\frac{m_e e^4}{8n^2 \varepsilon_0^2 h^2}.}$$

	W	m	e	n	ε_0	h
СИ	Дж	кг	Кл	—	Ф/м	Дж·с
(н)	эВ					

$$1\ эВ = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}\ Дж,$$

$$1\ Дж = 6{,}24146 \cdot 10^{18}\ эВ.$$

14 Зак. 722

После подстановки численных значений имеем

(Ат 37.12) $$\boxed{W_n = -\frac{2{,}17991 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж}}{n^2} = -\frac{13{,}6058\ \text{эВ}}{n^2}.}$$

Полная энергия электрона на орбите обратно пропорциональна квадрату порядкового номера орбиты:

$$W_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

По формуле (Ат 37.12) можно определить энергии уровней, отвечающих отдельным орбитам. Эти энергии представляют в виде **схемы уровней.** Положение нулевой точки произвольно. Ее выбирают либо при $n = \infty$, либо (как в данном случае) при $n = 1$.

37.2.4. Частота излучения

При переходе электрона с орбиты m, более удаленной от ядра, на более близкую к ядру орбиту n в соответствии с условием Бора испускается энергия

$$\Delta W = W_m - W_n = h\nu.$$

Таким образом, принимая во внимание формулу (Ат 37.11), имеем

$$h\nu = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$ и с помощью (Ат 37.12) получаем

$$h\nu = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \cdot 2{,}17991 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж}.$$ Отсюда находим

частоту

(Ат 37.13) $$\boxed{\nu = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \cdot 3{,}289842 \cdot 10^{15}\ \text{Гц}.}$$

Стоящая за скобками постоянная величина называется **постоянной Ридберга** R:

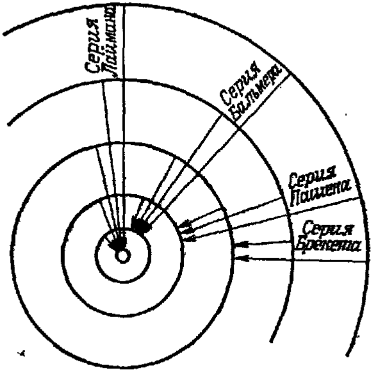
(Ат 37.14) $$\boxed{R = 3{,}289842 \cdot 10^{15}\ \text{Гц}.}$$

Из (Ат 37.13) следует

(Ат 37.15) $$\boxed{\nu = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) R.}$$

37.2.5. Спектр атома водорода

Подставляя для m и n значения 1, 2, 3 ..., с помощью (Ат 37.13) можно получить все частоты, возможные в случае водорода, т. е. спектр водорода.



Справочная таблица
Спектр атома водорода

m	n	Серия	Область спектра	Длина волны* λ, нм
5	1	Лаймана	Ультрафиолетовая	94
4	1			97
3	1			103
2	1			122
7	2	Бальмера	Видимая	397
6	2			410
5	2			434
4	2			486
3	2			656
7	3	Пашена	Инфракрасная	1005
6	3			1094
5	3			1282
4	3			1875
7	4	Брекета	Инфракрасная	2165
6	4			2625
5	4			4051
7	5	Пфунда	Инфракрасная	4652
6	5			7458

* Округленные экспериментальные значения.

Наименьшая длина волны λ (и соответственно наибольшая частота ν) в спектре водорода отвечает $n = 1$ и $m = \infty$. В этом случае энергия кванта равна $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж $= 13{,}6$ эВ — это наибольшая энергия, которую излучает атом водорода. Если электрону, находящемуся на орбите с $n = 1$, сообщить такую энергию, то он перейдет на орбиту с $m = \infty$, т. е. освободится из атома; иными словами, произойдет ионизация атома.

Для ионизации атома водорода необходима энергия 13,6 эВ.

37.3. Квантовые числа

Спектроскопические измерения показывают, что энергии электронов на одной оболочке (K, L, M, ...) слегка различаются; это обусловлено различием формы и расположения их орбит. Электронные орбиты можно классифицировать с помощью квантовых чисел.

37.3.1. Главное квантовое число

Главное квантовое число n соответствует порядковому номеру круговой орбиты: $n = 1, 2, 3, \ldots$.

37.3.2. Орбитальное квантовое число (квантовое число момента количества движения)

Наряду с круговыми орбитами возможны эллиптические орбиты с различным эксцентриситетом. Они удовлетворяют следующим условиям:

- На каждой орбите электрон обладает определенной энергией.
- Момент количества движения электрона на орбите всегда равен целому числу, $h/2\pi = \hbar$ (боровское условие квантования): $L = l\hbar$.

Орбитальное квантовое число l характеризует форму орбиты. Главному квантовому числу n отвечает n орбит различной формы: одна круговая и $(n - 1)$ эллиптических орбит с различным эксцентриситетом.

Квантовое число l может принимать значения 0, 1, 2, 3 ... $(n - 1)$. При этом $l = n - 1$ соответствует круговой орбите, а $l = 0$ — эллипсу с наибольшим эксцентриситетом.

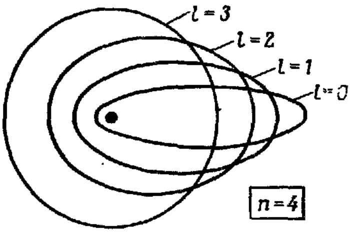
Для обозначения орбит

числа	0 1 2 3 4 5 6 7 ...
заменяют буквами	s p d f g h i k ... ,

В случае эллипса

- большая полуось $a = r_{\text{круговой орбиты}}$
- малая полуось $b = a(l + 1)/n$.

Обратите внимание:



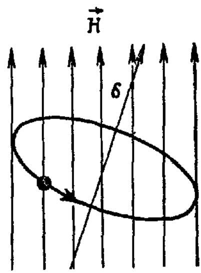
- При движении по эллиптической орбите скорость электрона меняется, а потому меняется и его масса (о релятивистской массе см. разд. 41.4.1). Этим обусловлена небольшая разница энергий электронов на различных эллиптических орбитах.

- Квантовая механика приводит к более точному выражению для орбитального момента количества движения $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$.

37.3.3. Магнитное квантовое число m.

Магнитное квантовое число m характеризует ориентацию плоскости электронной орбиты в пространстве. Это число принимает $(2l+1)$ различных значения.

Движущийся по замкнутой орбите электрон эквивалентен круговому току, магнитное поле которого взаимодействует с внешним магнитным полем. Плоскость электронной орбиты занимает определенные положения, которые характеризуются магнитным квантовым числом.



Ориентация орбиты задается углом δ между направлением магнитного поля и осью, перпендикулярной плоскости орбиты.

Магнитное квантовое число m может принимать значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $\ldots \pm l$, где l — орбитальное квантовое число.

- Угол наклона орбиты определяется условием $\cos\delta = m/l$.

- Квантовая механика дает более точное выражение для этого угла: $\cos\delta = m/\sqrt{l(l+1)}$.

Пример:

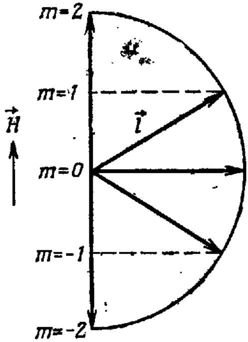
Эллиптическая орбита 4d находящаяся в четвертой оболочке, по форме наиболее близка к окружности. Орбитальное квантовое число $l = 2$. Магнитное квантовое число m может принимать $2\cdot 2 + 1 = 5$ различных значений.

В итоге получаем:

m:	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$\frac{m}{l}$:	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{+1}{2}$	$\frac{+2}{2}$
$\cos\delta$:	-1	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$
δ:	180°	120°	90°	60°	0°

Обратите внимание:

- Если рассматривать орбитальное квантовое число как вектор $\vec{l}$ (характеризующий направление орбитального момента $\vec{L}$), то возможны только такие ориентации орбиты в пространстве, которым отвечает целочисленное значение m проекции вектора $\vec{l}$ на направление магнитного поля.



37.3.4. Спиновое квантовое число s

Спиновое квантовое число s характеризует ориентацию собственного вращения электрона относительно направления его орбитального вращения. Это квантовое число может принимать два различных значения.

Возможные значения s равны $+1/2$ и $-1/2$, причем положительное значение соответствует одинаковому направлению собственного и орбитального вращения, отрицательное — противоположному их направлению.

Значения момента количества движения у электронов, вращающихся влево и вправо, отличаются на $\Delta L_e = h/2\pi = \hbar$ [боровское условие квантования (Ат 37.1)]. Таким образом, для собственного момента количества движения (спина) электрона получаем $L_e = \pm \frac{1}{2}\hbar = s\hbar$.

37.3.5. Заполнение оболочек

Существуют два основных правила:

- Каждый электрон занимает как можно более низкое энергетическое состояние.
- Два электрона в одном и том же атоме должны различаться по крайней мере одним квантовым числом (**принцип Паули**).

Максимальное заполнение каждой оболочки определяется тем, сколько различных значений могут принимать квантовые числа.

Если
z — максимально возможное число электронов на данной оболочке,
n — главное квантовое число,

то

(Ат 37.16) $\boxed{z = 2n^2}$

Справочная таблица

Электронные состояния для n = 1, 2, 3 и 4

Оболочка	n	l	Обозначение	m	s	Число состояний	Число состояний в каждой оболочке
K	1	0	1s	0	±1/2	2	2
L	2	0	2s	0	±1/2	2	8
		1	2p	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
M	3	0	3s	0	±1/2	2	18
		1	3p	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
		2	3d	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
				±2	±1/2	4	
N	4	0	4s	0	±1/2	2	32
		1	4p	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
		2	4d	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
				±2	±1/2	4	
		3	4f	0	±1/2	2	
				±1	±1/2	4	
				±2	±1/2	4	
				±3	±1/2	4	
и т. д.							

37.4. Излучение

При переходе на более низкий энергетический уровень электрон испускает излучение в виде отдельного кванта, частота (длина волны) которого определяются разностью энергий $\Delta W = h\nu$ электронных орбит. Допустимые уровни энергии изображаются в виде **схемы уровней.**

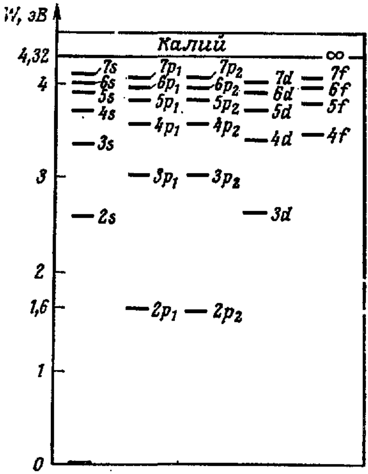
37.4.1. Схема энергетических уровней

Каждый элемент характеризуется своей собственной схемой энергетических уровней. На приведенной в качестве примера схеме указаны лишь энергетические уровни, заметно отличающиеся от соседних.

Схема энергетических уровней предсказывает большее число частот излучения, чем наблюдается в действительности. Существуют правила отбора, согласно которым «разрешены» лишь определенные переходы электронов.

В случае разрешенных переходов орбитальное квантовое число l или спиновое квантовое число s изменяется на единицу.

● Правило отбора: $\Delta l = 1$ или $\Delta s = 1$.



37.4.2. Возбуждение

При переходе электрона на более низкую (более близкую к ядру) орбиту атом излучает энергию. Однако для того чтобы могло произойти излучение, электрону необходимо сообщить энергию с тем, чтобы он перешел на орбиту с более высокой энергией (и более удаленную от ядра). В этом случае говорят о **возбуждении** атома. Как показывает схема энергетических уровней, разность энергий, отвечающих орбитам, расположенным вблизи ядра, очень велика, поэтому излучение не лежит в видимой области. Испускание видимого света связано с переходами лишь внешних электронов атома. Возбудить атомы можно различными способами.

● **Тепловое возбуждение.** Благодаря нагреву усиливается молекулярное движение; при соударениях атомов электроны переходят на более высокие уровни.

● **Фотовозбуждение.** Электроны переходят на более высокие уровни за счет поглощения энергии падающих фотонов (флуоресценция, фосфоресценция).

● **Электрическое возбуждение.** В газоразрядных лампах электроны и ионы двигаются с высокими скоростями и, соударяясь с атомами, переводят их в возбужденное состояние. При достаточно большой передаче энергии электроны переходят вплоть до оболочки $n = \infty$, т. е. происходит ионизация атома.

Видимый свет испускается только внешними электронами атома, возбужденного тепловым, фото- или электрическим способом.

37.4.3. Метастабильные состояния

В силу правил отбора у атомов многих элементов имеются энергетические уровни, с которых электрон не может непосредственно перейти на более низкий уровень. Эти уровни называются метастабильными состояниями. Электрон может перейти на такой уровень при соударении с другим электроном или при каскадном переходе с более высокого уровня.

— Продолжительность пребывания атома в метастабильном состоянии имеет порядок 10^{-3} с.

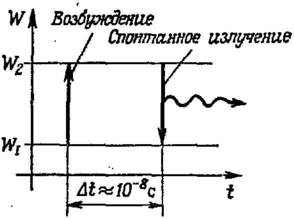
— Продолжительность пребывания атома в возбужденном состоянии имеет порядок 10^{-8} с.

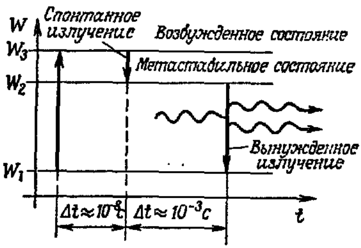
Необходимо различать:

- **Спонтанное излучение,** при котором переход из возбужденного состояния в основное происходит без всякого внешнего воздействия.
- **Вынужденное излучение,** при котором переход из метастабильного состояния в основное вызывается электромагнитным излучением соответствующей частоты.

При достаточно интенсивном возбуждении (так называемой накачке) можно одновременно перевести на метастабильный уровень бóльшую часть атомов; таким образом происходит накопление энергии. На этом основан принцип действия **лазера.**

При переходе большого числа атомов из метастабильного состояния в основное испускается интенсивный узкоколлимированный пучок монохроматического когерентного излучения. Два параллельных зеркала, в которых отражается излучение, образуя стоячие волны, позволяют усилить эффект.





37.4.4. Рентгеновское излучение

Рентгеновское излучение возникает в результате возбуждения атомов электронами высоких энергий, которые проникают в глубь атома и переводят близкие к ядру электроны на более высокие энергетические уровни. При последующем переходе удаленных от ядра электронов на освободившийся уровень испускаются кванты, длины волн которых лежат в рентгеновской области и служат характеристикой материала анода **(характеристическое излучение)**.

Кроме того, налетающие электроны тормозятся, проникая в оболочку, и теряют часть своей энергии в форме электромагнитного излучения с широким спектром частот. Это **тормозное излучение** обладает непрерывным спектром с верхней границей $\nu_{макс}$. **Граничная**

частота соответствует случаю, когда электрон излучает всю энергию.

Если
$\nu_{макс}$ — верхняя граница тормозного излучения,
U — разность потенциалов, в которой движется электрон,
e $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд,
h $= 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка,

то, поскольку кинетическая энергия электрона должна быть равна граничной энергии испущенного кванта, $eU = h\nu_{макс}$, получаем

(Ат 37.17) $$\boxed{\nu_{макс} = \frac{eU}{h}.}$$

	ν	e	U	h
СИ	Гц	Кл	В	Дж·с

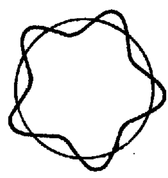
37.5. Квантовомеханическая модель атома

Несмотря на успех атомных моделей Бора и Зоммерфельда, они обладают рядом недостатков. Кроме того, в них содержатся некоторые произвольные положения, которые пришлось ввести для объяснения экспериментальных результатов. Новая модель атома была разработана Шредингером на основе квантовой механики. Согласно де Бройлю, электрону отвечает длина волны $\lambda = h/m_e v$. Поскольку движущемуся вокруг ядра электрону отвечает стоячая волна, длина электронной орбиты должна быть кратна целому числу длин волн, т. е.

(Ат 37.18) $$\boxed{2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{m_e v_n}.}$$

Это условие точно совпадает с условием квантования (Ат 37.1) в первом постулате Бора.

В квантовомеханической модели атома на смену боровским орбитам пришли **пространственные стоячие волны**. Каждой из таких волн отвечает определенная энергия (собственное значение W) и собственная частота. Вместо перехода с одной орбиты на другую происходит переход из одного состояния (которому соответствует определенная пространственная стоячая волна) в другое. Интенсивность волны в различных точках пространства определяет вероятность того, что электрон находится в данной точке.



На узловой поверхности интенсивность волны и соответствующая вероятность найти там электрон равны нулю.

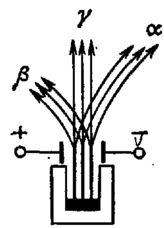
Электрон образует вокруг ядра своего рода заряженное «облако», пространственная плотность которого в некоторой точке соответствует интенсивности волны в этом месте.

38. Радиоактивность

Радиоактивностью называют способность атомов к превращению, которое сопровождается испусканием излучения. На процесс такого превращения нельзя повлиять внешним воздействием. Его называют радиоактивным распадом.

При радиоактивном распаде испускается излучение трех видов.

- **α-излучение.** Оно представляет собой α-частицы $\left({}_2^4\alpha\right)$, т. е. ядра гелия. Вследствие наличия положительного заряда α-частицы отклоняются электрическим и магнитным полями. Скорость, с которой вылетают α-частицы, составляет около 10^7 м/с.
- **β-излучение.** Оно представляет собой электроны, обладающие скоростью от 10^8 м/с до 0,999 *c*. Вследствие наличия отрицательного заряда электроны отклоняются электрическими и магнитными полями в противоположную сторону по сравнению с α-частицами.



- **γ-излучение.** Это электромагнитное излучение с длиной волны приблизительно 10^{-12} м и соответственно частотой около 10^{20} Гц. Оно не отклоняется электрическими и магнитными полями.

При искусственных превращениях ядер могут возникать изотопы, испускающие радиоактивное излучение четвертого типа.

- **β^+-излучение.** Оно представляет собой **позитроны**, т. е. частицы, которые отличаются от электронов только знаком заряда («положительные электроны»).

38.1. Радиоактивный распад

38.1.1. Стабильность ядра

Отношение числа нейтронов N к числу протонов Z увеличивается с ростом массового числа A. Было установлено, что ядра стабильны только при определенном соотношении между числами нейтронов и протонов.

Если
N — число нейтронов в ядре,
Z — число протонов в ядре,
$A = N + Z$ — массовое число,

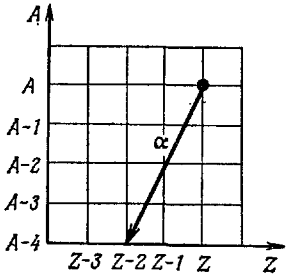
то стабильной связи нуклонов в ядре отвечает соотношение

(Ат 38.1) $$\boxed{\frac{N}{Z} \approx 1 + 0{,}015A^{2/3} \quad \text{и} \quad A < 250.}$$

Из известных к настоящему времени примерно 1700 видов ядер около 270 представляют собой стабильные нуклиды и около 1430 — нестабильные. В природе преобладают четно-четные ядра (с четным числом протонов и нейтронов); они оказываются особенно стабильными.

38.1.2. α-распад

С испусканием α-частиц распадаются только ядра с большим массовым числом A ($A > 200$). При α-распаде массовое число очевидно, уменьшается на 4, а заряд ядра на 2 единицы:



(Ат 38.2) $\boxed{{}^{A}_{Z}K_1 \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha.}$

Пример:

- ${}^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}\alpha,$
- ${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}\alpha.$

38.1.3. β⁻-распад

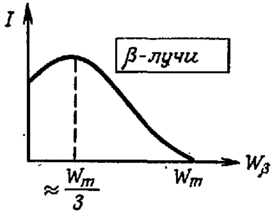
β^--излучение испускают ядра с относительным избытком нейтронов [см. (Ат 38.1)]. Электрон возникает в результате превращения нейтрона в протон:

(Ат 38.3)

Нейтрон $\longrightarrow$	Протон +	Электрон +	Антинейтрино
${}^{1}_{0}n \longrightarrow$	${}^{1}_{1}p$ +	${}^{0}_{-1}e$ +	$\bar{\nu}$.

Обратите внимание:

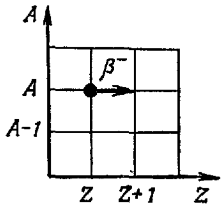
- Антинейтрино (так же, как и нейтрино) не имеет ни массы покоя, ни заряда. Оно уносит часть энергии распада. Вследствие этого возникающие при распаде β^--частицы имеют неодинаковую энергию. В таблицах в большинстве случаев указывается максимальная энергия W_m. Наиболее вероятная энергия составляет около $W_m/3$. Поскольку при β^--распаде испускается электрон, заряд ядра возрастает на единицу, а массовое число не меняется:



(Ат 38.4) $\boxed{{}^{A}_{Z}K_1 \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}K_2 + {}^{0}_{-1}e.}$

Пример:

- $^{90}_{38}Sr \longrightarrow {}^{90}_{39}Y + {}^{0}_{-1}e,$
- $^{214}_{82}Pb \longrightarrow {}^{214}_{83}Bi + {}^{0}_{-1}e.$



38.1.4. β^+-распад

β^+-излучение испускается ядрами с относительным избытком протонов. Позитрон возникает в результате превращения протона в нейтрон:

(Ат 38.5)

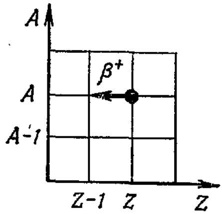
Протон	$\longrightarrow$	Нейтрон	+ Позитрон	+ Нейтрино
$^{1}_{1}p$	$\longrightarrow$	$^{1}_{0}n$	$+\,{}^{0}_{1}e$	$+\,\nu.$

Обратите внимание:

- Нейтрино не имеет ни массы покоя, ни заряда. Оно уносит часть энергии распада. Возникающие при распаде β^+-частицы имеют неодинаковую энергию.

Поскольку при β^+-распаде искускается позитрон, новое ядро K_2 имеет на единицу меньший заряд и то же самое массовое число.

(Ат 38.6) $\boxed{{}^{A}_{Z}K_1 \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}K_2 + {}^{0}_{+1}e.}$



Пример:

- $^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{0}_{+1}e,$
- $^{22}_{11}Na \longrightarrow {}^{22}_{10}Ne + {}^{0}_{+1}e.$

38.1.5. γ-излучение

Испускание γ-квантов сопутствует α- или β-распаду, после которого в ядре осуществляется перестройка: ядро переходит из вобужденного состояния в состояние с меньшей энергией. При этом заряд ядра и массовое число остаются неизменными.

38.2. Закон радиоактивного распада

Распад ядер происходит по закону случая. Но поскольку число атомов, содержащихся в определенном количестве вещества, очень велико, можно сформулировать закон распада.

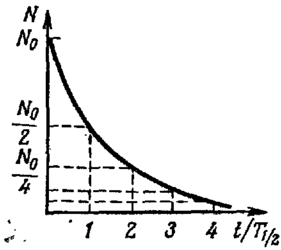
38.2.1. Постоянная распада

Пусть на протяжении времени dt распадается dN ядер. Величина dN пропорциональна числу имеющихся способных к распаду ядер: $dN \sim -Ndt$. Коэффициент пропорциональности называется **постоянной распада** λ.

Постоянная распада характеризует долю dN/N исходных радиоактивных атомов, которая распадается за время dt.

38.2.2. Закон распада

Если
N_0 — число ядер в начальный момент времени,
N — число ядер, не распавшихся по прошествии времени t,
— время,
et — постоянная распада,
λ = 2,71828 — основание натуральных логарифмов,



то после интегрирования уравнения $\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$ имеем

(Ат 38.7) $\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}.}$

Если подставить значение λ из формулы (Ат 38.9), то получим $N = N_0 e^{-t \ln 2/T_{1/2}}$, или упрощенно

(Ат 38.8) $\boxed{N = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}.}$

38.2.3. Период полураспада

Периодом полураспада $T_{1/2}$ называется время, в течение которого распадается половина способных к распаду ядер.

Из (Ат 38.7) следует $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$, откуда

(Ат 38.9) $\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.}$

Обратите внимание:

- Периоды полураспада ряда радиоактивных ядер см. в табл. 44.

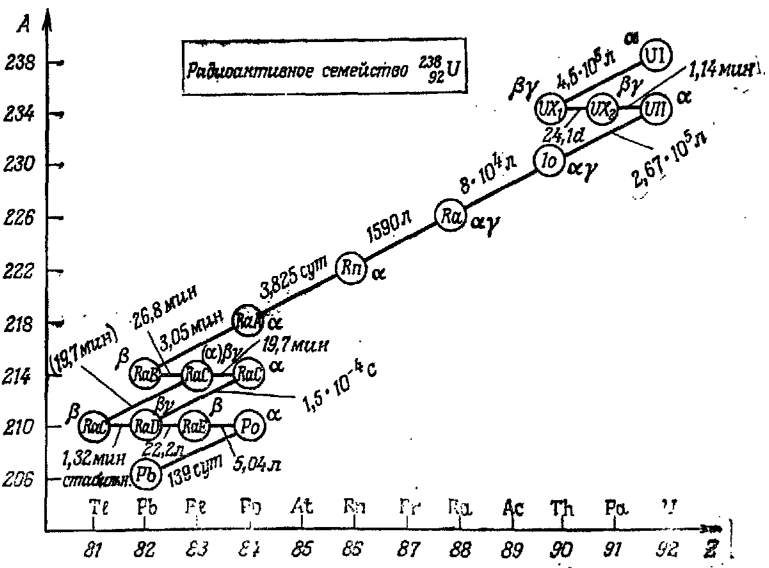
38.3. Радиоактивные семейства

При радиоактивном распаде ядра чаще всего вновь возникает радиоактивное ядро. Существуют целые радиоактивные семейства. У трех из них исходными ядрами являются встречающиеся в природе изотопы урана или тория. Четвертое семейство начинается с искусственно созданного изотопа нептуния. Помимо радиоактивных семейств в природе встречается лишь несколько радиоактивных изотопов.

Справочная таблица

Четыре радиоактивных семейства

Семейство	Исходное ядро	Конечное ядро (стабильное)
Уран — радий	$^{238}_{92}U$ (UI)	$^{206}_{82}Pb$
Уран — актиний	$^{235}_{92}U$ (AcU)	$^{207}_{82}Pb$
Торий	$^{232}_{90}Th$	$^{208}_{82}Pb$
Нептуний	$^{237}_{93}Np$	$^{209}_{83}Bi$



38.4. Активность

Активностью A радиоактивного вещества называется число распадов в секунду.

Единица СИ активности: $[A]$ = беккерель (Бк) = 1/с.

Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: кюри (Ки) = $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Соотношения между единицами активности

1 Ки	$= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк	= 37 ГБк
1 мКи	$= 3{,}7 \cdot 10^{7}$ Бк	= 37 МБк
1 мкКи	$= 3{,}7 \cdot 10^{4}$ Бк	= 37 кБк
1 Бк	$= 2{,}7 \cdot 10^{-11}$ Ки	= 27 пКи
1 кБк	$= 2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ки	= 27 нКи
1 МБк	$= 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ Ки	= 27 мкКи
1 ГБк	$= 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ Ки	= 27 мКи
1 ТБк	= 27 Ки	

Активность A является важным параметром радиоактивного вещества. Она легко вычисляется.
Если

A — активность радиоактивного вещества,
λ — постоянная распада,
$T_{1/2}$ — период полураспада,
N — число ядер данного вещества, способных к распаду,

то при $A = dN/dt$ и $\lambda = dN/Ndt$ получаем

(Ат 38.10) $$\boxed{A = \lambda N = \frac{0{,}693 N}{T_{1/2}}.}$$

	A	T
СИ	Бк = 1/с	с

Число способных к распаду ядер определяется формулой (Ат 36.3). В случае химических соединений существенно число активных ядер, приходящихся на каждую молекулу. Если в веществе имеются испытавшие распад ядра, то его активность будет меньше величины, определяемой формулой (Ат 38.10). Используя формулы (Ат 38.7) или (Ат 38.8) и учитывая, что $A \sim N$, получаем

(Ат 38.11) $$\boxed{A = A_0 e^{-\lambda t} = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}},}$$

где A_0 и A — активности (первоначальная и по прошествии времени t).

38.5. Прохождение радиоактивного излучения через вещество

38.5.1. γ-излучение

Интенсивность γ-излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, если можно пренебречь поглощением.

Обратите внимание:

- Для обеспечения защиты от излучения важно соблюдать условие «максимального удаления от источника».

Ослабление γ-излучения в веществе основано на следующих эффектах:

- **Фотоэффект.** γ-квант проникает в оболочку атома и выбивает электроны, чаще всего из K-оболочки. Этот эффект преобладает при энергии γ-квантов ниже 0,5 МэВ.
- **Эффект Комптона.** γ-квант сталкивается с электроном во внешней оболочке и передает ему часть своей энергии. Вследствие этого изменяется направление движения γ-кванта (комптоновское рассеяние) и уменьшаются его энергия и частота.
- **Образование пар.** γ-квант пролетает непосредственно вблизи ядра. Если его энергия превышает 1,02 МэВ, то он может образовать электрон-позитронную пару.

Ослабление γ-излучения (уменьшение его интенсивности) в веществе можно измерить. Под интенсивностью понимают произведение энергии γ-кванта на число γ-квантов, падающих ежесекундно на поглотитель.

Если
I_0 — интенсивность γ-квантов до прохождения поглотителя,
I — интенсивность после прохождения поглотителя,
d — толщина поглотителя,
μ — линейный коэффициент ослабления,

то **закон поглощения** имеет вид

(Ат 38.12) $$\boxed{I = I_0 e^{-\mu d}.}$$

	μ	d
СИ	1/м	м
КД	1/см	см

Используя формулу (Ат 38. 14) для μ, получаем

(Ат 38.13) $$\boxed{I = \frac{I_0}{2^{d/d_{1/2}}}.}$$

Обратите внимание:

- Линейный коэффициент ослабления μ зависит от энергии излучения и свойств поглощающего материала. Численные значения μ см. в табл. 45 и 46.

Толщину слоя, необходимую для уменьшения интенсивности излучения в два раза, называют **полутолщиной** $d_{1/2}$. Из закона поглощения (Ат 38.12) получаем

(Ат 38.14) $$\boxed{d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}.}$$

	μ	d
СИ	1/м	м
КД	1/см	см

38.5.2. β-излучение

Закон поглощения (Ат 38.12) в хорошем приближении выполняется и для β-излучения. Однако целесообразно преобразовать экспоненту: $\mu d = (\mu/\rho)d\rho = \mu' f$. Преимущество такого преобразования в том, что массовый коэффициент ослабления μ' учитывает плотность поглотителя.

Если
I_0 — интенсивность β-излучения до поглотителя,
I — интенсивность после поглотителя,
$f = d\rho$ — толщина слоя,
μ' — массовый коэффициент ослабления,

то

(Ат 38.15) $\boxed{I = I_0 e^{-\mu' f}.}$

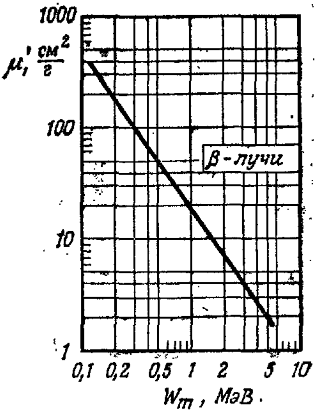
	μ'	f
СИ	м²/кг	кг/м²
КД	см²/г	г/см²

Обратите внимание:

- Массовый коэффициент ослабления μ' зависит от энергии β-частиц. Но поскольку энергия любого β-источника неоднородна, обычно используется максимальное значение W_m.

Величину $\mu' = \mu'(W_m)$ можно определить по приведенной диаграмме. Величину μ' можно вычислить также с помощью эмпирической формулы. При $W_m > 0{,}5$ МэВ в хорошем приближении справедлива следующая формула:

(Ат 38.16) $\boxed{\mu' = \dfrac{22}{W_m^{1,333}},}$



где энергия W_m выражена в мегаэлектрон-вольтах и μ' — в см²/г.

Толщину слоя f, необходимую для ослабления интенсивности излучения вдвое, называют толщиной слоя **половинного ослабления** $f_{1/2}$. Аналогично (Ат 38.14) получаем

(Ат 38.17) $\boxed{f_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\mu'} = \dfrac{0{,}693}{\mu'}.}$

	μ'	f
СИ	м²/кг	кг/м²
КД	см²/г	г/см²

Поскольку β-частицы обладают непрерывным энергетическим спектром, они не имеют определенной глубины проникновения. **Макси-**

мальная глубина проникновения R_m определяется следующими приближенными соотношениями.

Если

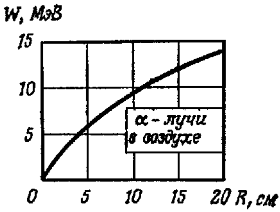
R'_m — максимальная глубина проникновения β-частиц в г/см^2,
$R_m = R'_m/\rho$ — максимальная глубина проникновения в см,
ρ — плотность поглотителя,
W_m — максимальная энергия β-частиц; значения см. в табл. 55,
то

(Ат 38.18)
$$\boxed{\begin{aligned} R'_m &= 0{,}11\left(\sqrt{1+22{,}4W_m^2}-1\right) \\ W_m &= \left(\sqrt{3{,}69\,(R'_m)^2+0{,}81R'_m}\right. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{для } W_m < 3 \text{ МэВ}, \\ &\text{для } R'_m < 1{,}5 \text{ г/см}^2, \end{aligned}$$

(Ат 38.19)
$$\boxed{\begin{aligned} R'_m &= 0{,}542W_m - 0{,}133 \\ W_m &= 1{,}85R'_m + 0{,}245 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\text{для } W_m > 0{,}8 \text{ МэВ}, \\ &\text{для } R'_m > 0{,}3 \text{ г/см}^2; \end{aligned}$$

в этих формулах энергия W_m выражена в МэВ, глубина проникновения R'_m — в г/см^2.

38.5.3. α-излучение



Вследствие сильного ионизующего действия глубина проникновения α-излучения в твердые тела обычно пренебрежимо мала. Глубина проникновения зависит главным образом от начальной энергии α-частиц и от свойств поглотителя. Для воздуха ее можно определить по приведенному графику. Кроме того, ее можно вычислить с помощью эмпирической формулы. При 15°С и 101,3 кПа (до 1980 г.: 760 мм рт. ст.) справедлива следующая формула:

(Ат 38.20)
$$\boxed{R_{возд} = 0{,}476W^{1{,}5},}$$

где энергия W выражена в МэВ, а $R_{возд}$ — в см.

38.6. Измерение интенсивности излучения (дозиметрия)

Действие радиоактивного излучения характеризуется энергией, которая выделяется в облучаемом веществе. Эту характеристику распространяют на все виды **ионизующего излучения**, в том числе рентгеновское, нейтронное и т. д.

38.6.1. Поглощенная доза излучения

Поглощенной дозой D называется отношение поглощенной энергии к массе облучаемого вещества.

Единица СИ поглощенной дозы: $[D]$ = грэй (Гр) = Дж/кг.
Единица, допускавшаяся к применению до 1980 г.: рад $= 10^{-2}$ Дж/кг.

Если
D — поглощенная доза,
W — энергия, поглощенная облучаемым веществом,
m — масса облучаемого вещества,

то при однородном распределении массы и энергии

(Ат 38.21) $$\boxed{D = \frac{W}{m} = \frac{W}{\rho V}.}$$

	D	W	m
СИ	Гр = Дж/кг	Дж	кг

Обратите внимание:

- В качестве единицы **экспозиционной дозы** J до 1980 г. широко применялся рентген (Р). Экспозиционная доза равна отношению заряда Q, образовавшегося вследствие ионизации под действием излучения, к массе ионизованного воздуха:

  $$1 \text{ Р} = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}.$$

  Поскольку известна энергия, необходимая для ионизации воздуха, экспозиционную дозу можно выразить через поглощенную дозу: 1 Р = 8,77 мДж/кг.

38.6.2. Мощность дозы

Мощностью дозы $\dot{D}$ называется отношение поглощенной дозы D к времени t.

Единица СИ мощности дозы: $[\dot{D}]$ = грэй/секунда (Гр/с) = Вт/кг.

Если
$\dot{D}$ — мощность дозы,
D — поглощенная доза,
t — время,

то

(Ат 38.22) $$\boxed{\dot{D} = \frac{D}{t}.}$$

	$\dot{D}$	D	t
СИ	Гр/с	Гр	с

38.6.3. Ионизационная постоянная

Для вычисления поглощенной дозы γ-излучения используют ионизационную постоянную K (называемую также γ-постоянной).

Ионизационная постоянная равна мощности дозы, создаваемой источником γ-излучения активностью 1 Бк на расстоянии 1 м.

Если
$\dot{D}$ — мощность дозы,
K — ионизационная постоянная источника γ-излучения,
A — активность источника γ-излучения
r — расстояние от (точечного) источника излучения,
то

(Ат 38.23) $$\boxed{\dot{D} = \frac{KA}{r^2}}$$

	$\dot{D}$	K	A	r
СИ	Вт/кг	(Дж · м^2)/кг	Бк = 1/с	м

Обратите внимание:

- Мощность дозы убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Справочная таблица

Ионизационные постоянные

	K, Дж·м^2/кг		K, Дж·м^2/кг
Натрий 22	$9{,}95 \cdot 10^{-17}$	Иод 131	$1{,}71 \cdot 10^{-17}$
Натрий 24	$1{,}47 \cdot 10^{-16}$	Цезий 134	$6{,}82 \cdot 10^{-17}$
Железо 59	$4{,}98 \cdot 10^{-17}$	Радий 226	$6{,}35 \cdot 10^{-17}$
Кобальт 60	$1{,}01 \cdot 10^{-16}$	Уран 238	$6{,}89 \cdot 10^{-19}$

38.6.4. Эквивалентная доза

Для защиты от излучения важно знать воздействие радиоактивного излучения на живую ткань. Биологическая доза, которая не является физической величиной, определяется путем умножения поглощенной дозы на **переводной коэффициент** Q.

Если
$D_э$ — эквивалентная доза излучения,
Q — переводной коэффициент,
D — поглощенная доза,
то

(Ат 38.24) $$\boxed{D_э = QD.}$$

	$D_э$	Q	D
О	бэр	бэр/Гр	Гр
80	бэр	бэр/рад	рад

Обратите внимание:

- Эквивалентная доза $D_э$ не является физической величиной, поэтому ее единица измерения бэр не входит в систему единиц.

Справочная таблица

Переводной коэффициент Q

	бэр/Гр	бэр/рад		бэр/Гр	бэр/рад
Рентгеновские лучи	100	1	Медленные нейтроны	300	3
γ-лучи	100	1	Быстрые нейтроны	1000	10
β-лучи	100	1	Быстрые протоны	1000	10
α-лучи	1000	10	Осколки деления	2000	20

Обратите внимание:

- Переводной коэффициент Q прежде назывался относительной биологической эффективностью (ОБЭ).

38.7. Защита от излучения

Поскольку любое ионизующее излучение представляет большую опасность, в законодательном порядке предписываются широкие меры предосторожности. Прежде всего, установлены максимально допустимые эквивалентные дозы.

Максимальная эквивалентная доза $D_э$ составляет 5 бэр в год.

Это значение допустимо лишь в том случае, если, кроме того, соблюдаются следующие предельные значения:

3 бэр за 13 недель при суммарной дозе 5 бэр в год для людей старше 18 лет.

Обратите внимание:

- Эти величины установлены для лиц, которые подвергаются облучению в силу своей профессии и для которых проводится персональный дозиметрический контроль. Для лиц, работающих с ионизующим излучением время от времени, допустимая доза составляет $^1/_{10}$ указанной величины. Для всего остального населения доза не должна превышать $^1/_{100}$ указанной величины.
- Все указанные значения относятся к облучению тела в целом.

38.8. Детекторы радиоактивного излучения

Для обнаружения радиоактивного излучения применяются следующие приборы.

- **Ионизационные камеры**, у которых в пространстве между двумя электродами создается электрическое поле. Попадающие в камеру частицы и излучение вызывают появление носителей заряда; ток насыщения характеризует интенсивность ионизующего излучения.
- **Счетчики Гейгера — Мюллера**, в которых ионизация, создаваемая попадающими в них частицами, вызывает кратковременный разряд. Эти разряды можно усилить и зарегистрировать.
- **Камеры Вильсона**, в которых α- и β-частицы оставляют следы благодаря конденсации находящегося в воздухе перенасыщенного водяного пара.
- **Сцинтилляционные счетчики**: в некоторых веществах излучение возбуждает вспышки света. Эти вспышки можно регистрировать, наблюдая их через увеличительное стекло либо направляя их на фотокатод и регистрируя выбитые электроны с помощью электронного умножителя. Такой сцинтилляционный счетчик представляет собой наиболее чувствительный и эффективный прибор для регистрации излучений.
- **Ядерные эмульсии**, в светочувствительном слое которых излучение вызывает почернение в виде отдельных следов.

39. Искусственное превращение ядер

Превращения ядер (за исключением радиоактивного распада) вызываются внешними причинами. Частицы высокой энергии (α, β, n, p), сталкиваясь с ядром, способны вызвать самые различные превращения. Ядерными «снарядами» могут быть продукты радиоактивного распада, а также высокоэнергичные частицы, полученные с помощью различного рода ускорителей.

39.1. Ускорители частиц

Наряду с *высоковольтными устройствами* (*каскадный генератор, высоковольтный генератор* ван де Граафа и др.) и *линейными ускорителями* широко применяются *циклические ускорители*.

В них используется магнитное поле, которое заставляет частицы двигаться по круговой орбите, а ускоряющее электрическое поле сообщает частицам приращение скорости. Ниже перечислены некоторые типы циклических ускорителей:

- **Циклотрон.** Источник тяжелых частиц находится в центре, откуда они движутся по спиральной обрите с возрастающей скоростью.
- **Синхроциклотрон (фазотрон).** При очень высокой скорости становится заметным релятивистское увеличение массы частиц.

В результате они попадают в ускоряющее поле с запозданием и таким образом выходят из синхронизма. Для устранения этого частота ускорения модулируется.

- **Синхрофазотрон (синхротрон).** Предварительно ускоренные частицы вводятся по касательной к орбите в торондальную камеру. Синхрофазотрон используется в основном для ускорения тяжелых частиц.
- **Бетатрон** — устройство, предназначенное для ускорения электронов.

39.2. Ядерные реакции

При столкновении частицы, обладающей высокой энергией, с ядром-мишенью происходит превращение ядра, сопровождаемое испусканием другой частицы:

$$a + K_1 \longrightarrow K_2 + b, \quad \text{или короче} \quad K_1\,(a,\ b)\,K_2.$$

Пример:

- Первое наблюдавшееся превращение ядра (Резерфорд, 1919 г.):

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}\alpha \longrightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}p \qquad N14\,(\alpha,\ p)\,O17.$$

- Открытие нейтрона (1932 г.):

$$^{9}_{4}Be + ^{4}_{2}\alpha \longrightarrow ^{12}_{6}C + ^{1}_{0}n \qquad Be9\,(\alpha,\ n)\,C12.$$

- Первое использование искусственно ускоренных «снарядов» (протонов) и одновременно первое расщепление ядра (1932 г.):

$$^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}p \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He \qquad Li7\,(p,\ \alpha)\,He4.$$

- Первое получение искусственного радиоактивного нуклида и открытие позитрона (Жолио-Кюри, 1932 г.):

$$^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}\alpha \longrightarrow ^{30}_{15}P^* + ^{1}_{0}n \qquad Al27\,(\alpha,\ n)\,P30^*.$$

- ^{30}P представляет собой источник β^+-излучения, звездочка (*) означает радиоактивность.
- Получение кобальта-60:

$$^{59}_{27}Co + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{60}_{27}Co^* + \gamma \qquad Co59\,(n,\ \gamma)\,Co60^*.$$

- Получение углерода-14:

$$^{13}_{6}C + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{14}_{6}C^* + \gamma \qquad C13\,(n,\ \gamma)\,C14^*$$

или

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{14}_{6}C^* + ^{1}_{1}p \qquad N14\,(n,\ p)\,C14^*.$$

39.3. Деление урана

Ядро урана относится к тяжелым ядрам. В соответствии с графиком в разд. 36.6 средняя энергия связи на нуклон у урана меньше, чем у ядер со средним массовым числом. Поэтому делению ядра урана на два меньших ядра отвечает увеличение энергии связи на нуклон. Такой процесс сопровождается высвобождением энергии. Делению ядер урана отвечает увеличение дефекта массы, т. е. общая масса несколько уменьшается.

В 1938 г. Ган, Штрассман и Мейтнер впервые осуществили деление урана-235 нейтронами:

$$
\begin{aligned}
&{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n &&\longrightarrow {}^{145}_{56}Ba^* + {}^{88}_{36}Kr^* + 3\,{}^{1}_{0}n,\\
&\text{или} &&\longrightarrow {}^{139}_{54}Xe^* + {}^{95}_{38}Sr^* + 2\,{}^{1}_{0}n,\\
&\text{или} &&\longrightarrow {}^{140}_{55}Cs^* + {}^{94}_{37}Rb^* + 2\,{}^{1}_{0}n,\\
&\text{или} &&\longrightarrow {}^{145}_{57}La^* + {}^{97}_{35}Br^* + 4\,{}^{1}_{0}n.
\end{aligned}
$$

Обратите внимание:

- Кроме перечисленных пар, продуктами деления урана могут быть и другие пары ядер. Сумма обоих атомных номеров всегда равна 92.
- Все продукты деления радиоактивны.

39.3.1. Цепная реакция

При делении ядра урана на каждый нейтрон, вызвавший деление, вновь образуются 2 или 3 нейтрона, которые могут вызвать последующее деление ядер. Возникает цепная реакция, при которой число нейтронов быстро возрастает.

Цепной реакцией называется процесс, в котором определенная реакция вызывает последующие реакции такого же типа.

Условия протекания цепной реакции в уране-235:

- Должны отсутствовать примеси, поглощающие нейтроны.
- Количество вещества, способного делиться, должно быть достаточным для того, чтобы образующиеся нейтроны могли соударяться с другими ядрами, а не покидали объем, не испытав взаимодействия. Минимальное количество вещества, необходимое для осуществления цепной реакции, называется **критической массой.**
- Скорость нейтронов должна быть достаточной, чтобы вызвать деление ядер.

Не все из двух-трех нейтронов, освобождающихся в каждом акте деления, вновь соударяются с ядрами урана-235. Число образовавшихся в одном акте деления нейтронов, участвующих в последующих актах деления ядер, называют **коэффициентом размножения** k. Следует различать три случая:

- $k = 1$; число актов деления в единицу времени постоянно, реактор работает с постоянной мощностью;
- $k < 1$; число актов деления в единицу времени убывает, цепная реакция затухает.
- $k > 1$; число актов деления в единицу времени возрастает, мощность реактора возрастает экспоненциально; в результате, если своевременно не уменьшить коэффициент размножения, происходит взрыв.

В тех случаях, когда стремятся получить взрыв (бомбы, взрывные работы), добиваются того, чтобы коэффициент размножения k имел по возможности большое значение.

Природный уран состоит в основном из урана-238, который захватывает быстрые нейтроны, как правило, не испытывая деления. За счет рассеяния на ядрах **замедлителя** нейтроны тормозятся до тепловых скоростей, т. е. до скоростей, по порядку величины равных скорости газовых молекул при нормальной температуре. В качестве замедлителей применяют углерод (графит), тяжелую воду (D_2O) и воду (H_2O). Медленные (тепловые) нейтроны приводят к делению только урана-235. Если нейтроны в процессе замедления захватываются ураном-238, то происходят следующие реакции:

$$^{238}_{92}\mathrm{U}\ (\mathrm{n}, \gamma)\ ^{239}_{92}\mathrm{U}^*\ (\mathrm{e}^-, \gamma)\ ^{239}_{93}\mathrm{Np}^*\ (\mathrm{e}^-, \gamma)\ ^{239}_{94}\mathrm{Pu}^*.$$

В результате этого процесса образуется плутоний-239, который, как и уран-235, может делиться под действием тепловых нейтронов. Таким образом происходит превращение урана-238 в делящийся материал.

Управление цепной реакцией осуществляют, регулируя поглощение нейтронов. Для этого применяют специальные **регулирующие стержни**, вводимые в активную зону реактора. Стержни изготавливают чаще всего из бористой стали или кадмия (они изменяют коэффициент размножения k).

39.3.2. Баланс энергии

В каждом акте деления ядра урана-235 высвобождается энергия порядка 200 МэВ. При этом:

- кинетическая энергия продуктов распада 168 МэВ,
- кинетическая энергия образующихся нейтронов 5 МэВ,
- энергия γ-излучения 5 МэВ,
- энергия γ- и β-излучения продуктов распада 13 МэВ,
- энергия нейтрино 9 МэВ,

При делении ядер, составляющих 1 кг ^{235}U, дефект массы достигает 1 г. Это примерно соответствует энергии:

$9 \cdot 10^{13}$ Дж, или 2500 т каменного угля,

$25 \cdot 10^{6}$ кВт·ч, или 20 000 т взрывчатого вещества тринитротолуола.

39.4. Синтез ядер

При синтезе ядер высвобождается еще большее количество энергии. В термоядерном реакторе будущего могут использоваться следующие реакции:

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \longrightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{T} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} + 4{,}0\ \text{МэВ},$$

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + 3{,}25\ \text{МэВ},$$

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + {}^{3}_{1}\mathrm{T} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + 17{,}7\ \text{МэВ}.$$

Они протекают одновременно, и их можно свести в одну:

$$5\,{}^{2}_{1}\mathrm{D} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}.$$

При образовании примерно 1 г гелия высвобождается энергия порядка 200 МВт·ч.

39.5. Применение радиоактивных нуклидов

В основном используются источники β- и γ-излучений. Методы их применения могут быть различными.

Методы просвечивания

- Контроль заполнения и т. п.
- Бесконтактное измерение толщины и плотности.
- Неразрушающий контроль качества изделий на производстве (гамма-дефектоскопия).

Методы облучения

- Создание ионизации в газах (вакуумметры, предотвращение накопления электростатического заряда и т. п.).
- Создание дефектов в решетках твердых тел (структурные изменения в пластмассах).
- Облучение (лучевая терапия) при опухолевых заболеваниях (кобальт-60).

Методы «меченых атомов» (методы индикации)

- Использование «меченых атомов» в биологических и медицинских исследованиях.
- Контроль износа.

Элементарные частицы

	Название частицы	Символ: Частица	Символ: Античастица	Масса покоя $m_e=1$	Заряд Q	Среднее время жизни, с
	Фотон	γ	γ	0	0	—
Лептоны	Нейтрино	ν		0	0	стабильная
Лептоны	Антинейтрино		$\bar{\nu}$	0	0	»
Лептоны	Электрон	e^-		1	$-e$	стабильная
Лептоны	Позитрон		e^+	1	$+e$	»
Лептоны	Мюон	μ^-	μ^+	207	$\mp e$	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
Мезоны	π-мезон	π^0	π^0	264	0	$0{,}8 \cdot 10^{-16}$
Мезоны		π^-	π^+	273	$\mp e$	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$
Мезоны	η-мезон	η^0	η^0	1074	0	$< 10^{-16}$
Мезоны	K-мезон	K^0	$\overline{K}_0$	974	0	10^{-10}
Мезоны		K^+	K^-	966	$\pm e$	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$
Барионы	Протон	p^+		1836	$+e$	стабильная
Барионы	Антипротон		$\bar{p}$	1836	$-e$	»
Барионы	Нейтрон Антинейтрон	n	$\bar{n}$	1839	0	10^3
Барионы	Λ-гиперон	Λ^0	$\overline{\Lambda}^0$	2183	0	$2{,}6 \cdot 10^{-10}$
Барионы	Σ-гиперон	Σ^+	$\overline{\Sigma}^-$	2328	$\pm e$	$0{,}8 \cdot 10^{-10}$
Барионы		Σ^0	$\overline{\Sigma}^0$	2334	0	$< 10^{-14}$
Барионы		Σ^-	$\overline{\Sigma}^+$	2343	$\mp e$	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$
Барионы	Ξ-гиперон	Ξ^0	$\overline{\Xi}^0$	2573	0	$3 \cdot 10^{-10}$
Барионы		Ξ^-	$\overline{\Xi}^+$	2586	$\mp e$	$1{,}7 \cdot 10^{-10}$
	Ω-гиперон	Ω^-	Ω^+	3278	$\pm e$	$1{,}3 \cdot 10^{-10}$

40. Элементарные частицы

Кроме элементарных частиц, входящих в состав атомов, а именно протонов, нейтронов и электронов, в настоящее время известно свыше 200 элементарных частиц. Многие из них возникают в результате взаимодействия космического излучения с атмосферой Земли. В экспериментах по расщеплению ядер, проводившихся с использованием ускорителей, также был открыт ряд новых частиц. Элементарные частицы делятся на

- лептоны — слабовзаимодействующие частицы,
- адроны (мезоны, барионы) — сильновзаимодействующие частицы.

Существует гипотеза, согласно которой сильновзаимодействующие частицы (адроны) состоят из еще более элементарных частиц (так называемых кварков).

У всех элементарных частиц существуют так называемые **античастицы**, которые обладают противоположными электрическим зарядом и магнитным моментом по сравнению с соответствующей частицей; античастицы обозначаются черточкой над символом.

При столкновении частицы с античастицей происходит их аннигиляция: обе частицы превращаются в γ-излучение или более легкие частицы других типов. Обратный процесс называют процессом образования пар (см. разд. 38.5.1.).

Хотя фотон, или γ-квант, как «частица света» и не имеет массы покоя, он представляет собой одну из элементарных частиц.

Свойства важнейших элементарных частиц приведены в таблице на стр. 444.

Р. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

41. Релятивистская механика

Данные о перемещении, скорости и ускорении имеют смысл только в том случае, когда задана система отсчета. При переходе из одной системы отсчета в другую необходимо пересчитать (преобразовать) и кинематические характеристики.

Если две системы отсчета покоятся относительно друг друга, то при переходе от одной системы к другой изменяются лишь пространственные координаты, тогда как путь, скорости и ускорения остаются неизменными по величине и направлению.

Иначе обстоит дело, если обе системы движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, т. е. с постоянной по величине и направлению скоростью. Такие системы называются **инерциальными.**

Необходимо принципиально различать:

- движение систем с малой относительной скоростью ($v \ll c$): в этом случае справедливы законы **классической механики**;
- движение систем с большой относительной скоростью ($v \lessapprox c$): в этом случае справедливы законы **релятивистской механики.**

Обратите внимание:

- Все формулы релятивистской механики совпадают с формулами классической механики в частном случае $v \ll c$.

41.1. Преобразования Галилея

Преобразования Галилея связывают движение в двух инерциальных системах, движущихся с малой относительной скоростью.

Если

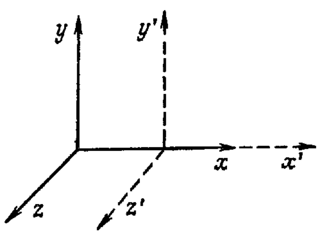
x, y, z — координаты относительно системы S,

x', y', z' — координаты относительно системы S′,

t — время, измеренное в системе S,

t' — время, измеренное в системе S′,

v — скорость системы S′ в направлении оси x, измеренная в системе S,



$\vec{u}$ — скорость тела в системе S,
$\vec{u}'$ — скорость тела в системе S′,
$\vec{a}$ — ускорение тела в системе S,
$\vec{a}'$ — ускорение тела в системе S′,

то кинематические величины связаны преобразованиями Галилея.

41.1.1. Преобразование времени

В обеих системах отсчета время течет одинаково, т. е.

(Р 41.1) $$\boxed{t' = t.}$$

41.1.2. Преобразование пространственных координат

Пространственные координаты точки в обеих системах различаются на величину пути vt, пройденного системой S′ в направлении оси x за время t:

(Р 41.2) $$\boxed{\begin{array}{l} x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z, \\ x = x' + vt. \end{array}}$$

41.1.3. Преобразование скоростей

Скорости тела $\vec{u}$ различаются в обеих системах на величину скорости системы S′ в направлении оси x:

(Р 41.3) $$\boxed{\begin{array}{l} u'_x = \dfrac{x'}{t} = \dfrac{x - vt}{t} = u_x - v; \quad u'_y = u_y; \quad u'_z = u_z, \\ u_x = \dfrac{x}{t} = u'_x + v, \end{array}}$$

где u_x, u_y и u_z — составляющие скорости $\vec{u}$, и u'_x, u'_y и u'_z — составляющие скорости $\vec{u}'$.

41.1.4. Преобразование ускорений

Ускорения тел в направлении оси x в обеих системах одинаковы, поскольку при $v = \text{const}$:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d\left(u_x' + v\right)}{dt} = \frac{du_x'}{dt},$$

(Р 41.4) $$\boxed{a_x' = \frac{du_x'}{dt} = \frac{du_x}{dt} = a_x; \quad a_y' = a_y; \quad a_z' = a_z,}$$

где a_x, a_y и a_z — составляющие $\vec{a}$

и a_x', a_y' и a_z' — составляющие $\vec{a}'$.

Обратите внимание:

- При переходе к инерциальной системе, движущейся с малой скоростью относительно другой системы, остаются **инвариантными** (неизменными) следующие величины: длины, времена и ускорения. Скорости, напротив, изменяются по величине и направлению (если они не совпадают с направлением оси x).

41.2. Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца описывают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой при очень больших скоростях их относительного движения.

Из специальной теории относительности Эйнштейна и соответствующих экспериментов следует:

В любой инерциальной системе отсчета скорость света в вакууме имеет одну и ту же величину для любого направления. Следовательно, скорость света не зависит также от движения источника света.

Уравнения, описывающие преобразование координат и времени события при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, должны учитывать постоянство скорости света.

Если

x, y, z	— пространственные координаты относительно системы S,
x', y', z'	— пространственные координаты относительно системы S′,
t	— время, измеренное в системе S,
t'	— время, измеренное в системе S′,
v	— скорость системы S′ в направлении оси x, измеренная в системе S,
c	$\approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.
β	$= v/c$,

то справедливы следующие соотношения (так называемые преобразования Лоренца):

41.2.1. Преобразованне пространственных координат

(P 41.5)
$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}.}$$

Обратите внимание:

- При $\beta \ll 1$, т. е. $v \ll c$ формула (P 41.5) переходнт в (P 41.2).

41.2.2. Преобразование времени

(P 41.6)
$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.}$$

Обратите внимание:

- При $\beta \ll 1$, т. е. $v \ll c$ (P 41.6) переходит в (P 41.1),
- Поскольку пространственные координиаты и время должиы быть действительными величипами, относительная скорость двух инерциальных систем отсчета не может превышать скорость света в вакууме.

41.3. Релятивистская кннематика

Как видно из формул, время и координаты не инварнантны относительно преобразоваиий Лоренца (в противоположность преобразоваииям Галилея).

41.3.1. Замедление временн

Если два события в системе S пронсходят в одной и той же точке не одновременно, а разделены интервалом времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то интервал $\Delta t' = t_2' - t_1'$ в системе S' в соответствин с (P 41.6) будет определяться формулой

(P 41.7)
$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqslant \Delta t.}$$

Соответственно для Δt получаем

(P 41.8)
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqslant \Delta t'.}$$

$^1/_2$ 15 Зак. 722

Если одна система отсчета движется относительно другой, то временной интервал между двумя событиями в «движущейся» системе отсчета оказывается больше, чем в «неподвижной» системе (парадокс часов).

41.3.2. Сокращение длины

Согласно формуле (Р 41.5), $x' = (x - vt)/\sqrt{1-\beta^2}$ и согласно (Р 41.6), $t'\sqrt{1-\beta^2} = t - \beta x/c$. Если найти t из последнего уравнения и подставить в первое, то получим

$$x' = \frac{x - v\left(t'\sqrt{1-\beta^2} + \beta x/c\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x - \left(vt'\sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 x\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Это выражение можно упростить и привести к виду

$$x' = \frac{x - \beta^2 x}{\sqrt{1-\beta^2}} - vt';$$

окончательно имеем

$$x' = x\sqrt{1-\beta^2} - vt'.$$

Если
v — скорость системы S' в направлении оси x,
x — координата относительно системы S,
x' — координата относительно системы S',
l — длина отрезка (в направлении оси x) в системе S,
l' — длина этого отрезка в системе S',
c $\approx 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
β $= v/c$,
то

$$l' = x_2' - x_1' = \left(x_2\sqrt{1-\beta^2} - vt'\right) - \left(x_1\sqrt{1-\beta^2} - vt'\right),$$

или

(Р 41.9) $$\boxed{l' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2};}$$

соответственно для l получаем

(Р 41.10) $$\boxed{l = \left(x_2' - x_1'\right)\sqrt{1-\beta^2}.}$$

В инерциальной системе отсчета, движущейся относительно данной системы, размеры тела в направлении движения имеют меньшую величину, чем в данной системе. Размеры в перпендикулярном направлении остаются неизменными.

41.3.3. Сложение скоростей

Вследствие замедления времени и сокращения длины скорость в инерциальной системе, движущейся относительно данной системы, также изменяется по величине и направлению.

Если

$\vec{u}'$ — скорость тела (с составляющими u'_x, u'_y, u'_z) относительно системы S′,

$\vec{u}$ — скорость тела (с составляющими u_x, u_y, u_z) относительно системы S,

v — скорость системы S′ относительно системы S в направлении оси x,

t — время, измеренное в системе S,

t' — время, измеренное в системе S′,

то для составляющих скорости имеем

$$u_x = dx/dt; \quad u_y = dy/dt; \quad u_z = dz/dt.$$

Применяя к пространственным координатам преобразование Лоренца, получаем

$$u_x = \frac{\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} + v\frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)\frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(u'_x + v)\frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и $u_y = u'_y \dfrac{dt'}{dt}$, аналогично $u_z = u'_z \dfrac{dt'}{dt}$.

Из (Р 41.6) следует

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{dt'}{dt'} + \frac{\beta}{c}\frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 + \frac{\beta u'_x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

После подстановки в выражение для скорости получим

$$\text{(Р 41.11)} \quad \boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\beta u'_x}{c}}; \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta u'_y}{c}}; \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta u'_z}{c}}.}$$

Из аналогичных соображений следует

$$\text{(Р 41.12)} \quad \boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{\beta u_x}{c}}; \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta u_x}{c}}; \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta u_x}{c}}.}$$

Обратите внимание:

- Скорости, перпендикулярные направлению движения системы S′, также не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца (в противоположность преобразованиям Галилея).
- Из (Р 41.11) следует, что **скорость тела относительно инерциальной системы не может превышать скорость света в вакууме.**

41.4. Релятивистская динамика

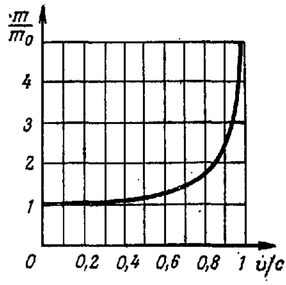
Поскольку $F = ma$, из классической механики следует, что в том случае, когда тело в течение достаточно длительного времени испытывает ускорение, оно может приобрести любую скорость, даже превышающую скорость света. Это противоречие разрешается, если учесть, что ускорение не инвариантно относительно преобразований Лоренца, поскольку масса (наряду с длиной и временем) также испытывает релятивистские изменения.

41.4.1. Преобразование массы

Если
m_0 — масса покоя тела,
m — масса тела, движущегося со скоростью v относительно системы отсчета,
v — скорость тела относительно системы отсчета,
c $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
β $= v/c$,

то по аналогии с преобразованиями Лоренца для длины и времени имеем для **релятивистской массы**

(Р 41.13) $$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.}$$



Обратите внимание:

- Частицы с массой покоя $m_0 > 0$ могут достичь только скорости, меньшей скорости света ($v < c$). Частицы с нулевой массой покоя ($m_0 = 0$) всегда движутся со скоростью $v = c$. При $v < c$ они не существуют.

41.4.2. Преобразование импульса

Поскольку $\vec{p} = m\vec{v}$ (М 7.32), релятивистское изменение массы приводит к изменению импульса.

Если
$\vec{p}$ — импульс тела, движущегося со скоростью $\vec{v}$ относительно системы отсчета,

m_0 — масса покоя тела,
$\vec{v}$ — скорость тела относительно системы отсчета,
c $\approx 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
β $= v/c$,

то для релятивистского импульса получаем

(P 41.14) $$\boxed{\vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.}$$

41.4.3. Преобразование силы

Сила определяется формулой (M 7.35):

$$\vec{F}=\dot{\vec{p}}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

При высоких скоростях в это выражение вместо m следует подставить релятивистскую массу. Тогда, используя формулу (P 41.13), получаем релятивистскую силу (уравнение движения):

(P 41.15) $$\boxed{\vec{F}=\frac{d(m_0\vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt}.}$$

41.4.4. Преобразование энергии

Под действием силы F покоившееся тело ($v_0 = 0$) по прошествии времени t приобретает скорость v и кинетическую энергию $W_к$. Лишь в частном случае классической механики ($v \ll c$) справедлива формула $W_к = mv^2/2$. Следует иметь в виду, что в релятивистской механике $m = m(v)$.

Если
m_0 — масса покоя тела,
m — релятивистская масса тела, движущегося со скоростью v относительно системы отсчета,
$m\Delta = m - m_0$ — релятивистское увеличение массы,
v — скорость тела относительно системы отсчета в направлении действующей силы F,
c $\approx 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме,
β $= v/c$,
F — ускоряющая сила,
W_0 — энергия покоя тела,
$W_к$ — кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью v,
$W_{полн}$ — полная энергия тела, движущегося со скоростью v,

то для изменения кинетической энергии $W_к$ имеем

$$dW_к = F_x dx = \frac{m_0 a_x dx}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} dx,$$

$$dW_к = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} v\, dv.$$

Интегрирование дает

$$W_к = \int_0^v \frac{m_0 v}{(1-\beta^2)^{3/2}} dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2.$$

Отсюда следует

(P 41.16) $$\boxed{W_к = mc^2 - m_0 c^2 = \Delta m c^2 = W_{полн} - W_0.}$$

Обратите внимание:

- Массе покоя тела m_0 соответствует энергия покоя $W_0 = m_0 c^2$. **Эквивалентность энергии и массы справедлива для любого вида энергии**

(P 41.17) $$\boxed{W = mc^2;\ m = \frac{W}{c^2}.}$$

	W	m	c
СИ	Дж	кг	м/с

Каждой массе (или изменению массы) соответствует определенная энергия (изменение энергии): $W \sim m$.

Обратите внимание:

- **Закон сохранения энергии можно также формулировать в виде закона сохранения массы.**
- См. также разд. 35.1.

Т. ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Плотность твердых веществ

Вещество	ρ, кг/дм³	Вещество	ρ, кг/дм³
Алюминий	2,71	Магний	1,74
Бетон	≈ 2,2	Медь	≈ 8,9
Вольфрам	19,1	Медное литье	≈ 8,7
Гранит	2,8	Оконное стекло	2,5
Дедерон	1,1	Пертинакс	1,35
Дуб	≈ 0,8	Песчаник	2,4
Дюралюминий	2,79	Платина	21,5
Железо	7,8	Плексиглас	1,2
Золото	19,3	Пробковая кора	0,15
Инвар	8,7	Свинец	11,34
Иридий	22,4	Серебро	10,5
Каменный уголь	1,4	Сосна	≈ 0,5
Кокс	0,6	Титан	4,5
Латунь	8,6	Цинк	7,1
Лед	0,9	Электрон	1,8

Плотность жидкостей (при 20°С)

Ацетон	0,8	Ртуть	13,5
Бензин (легкий)	0,7	Серная кислота (концентрированная)	1,83
Бензол	0,88	Спирт (ректификат)	0,83
Глицерин	1,26	Этиловый спирт	0,79
Дизельное топливо	1,0	Эфир	0,72
Керосин	0,8		
Молоко	1,03		
Морская вода	1,02		

Таблнца 1 (продолжение)

Нормальная плотность газообразных веществ (при 0°C и 101,3 нПа *)

Вещество	ρ, кг/м³	Вещество	ρ, кг/м³
Азот	1,25	Двуокись углерода	1,98
Аммиак	0,77	Кислород	1,47
Водород	0,09	Окнсь углерода	1,25
Водяной пар (100°C)	0,88	Пропан	2,2
Воздух	1,29	Светильный газ	0,55
Гелий	0,179	Хлор	3,22

* До 1980 г.: 760 мм рт. ст.

Таблица 2

Коэффнциенты трения покоя и трення скольжения μ_0 н μ (приближенные значения)

	Трение покоя μ_0	Трение скольжения μ		
		сухое	со смазкой	с водяной смазкой
Сталь/сталь	0,15	0,1	0,01	
Металл/дерево	0,5...0,6	0,4...0,5	0,03...0,08	0,25
Дерево/дерево	0,65	0,3	0,1	
Кожа/серый чугун	0,56	0,28	0,12	0,28
Кожа/дерево	0,47	0,27		
Сталь/лед				0,014
Автомобнльная шнна/мостовая	0,55	0,5		0,2
Автомобильная шина/асфальт	0,55	0,3	0,15	

Коэффицнент сопротивления двнженню μ_F	
Трамвай	0,006
Железная дорога	0,002
Легковой автомобиль на хорошей грунтовой дороге	0,05
Легковой автомобиль на асфальте	0,015
Грузовой автомобнль на мостовой	0,04
Грузовой автомобнль на асфальте	0,025

Таблица 3

Коэффициент восстановления при ударе (приближенные значения для $v_1 < 3$ м/с)

Вещество	k	Вещество	k
Дерево	1/2	Сталь	5/9
Пробка	5/9	Стекло	15/16
Слоновая кость	8/9		

Таблица 4

Сжимаемость жидкостей $\varkappa$ (при 20°С)

	$\varkappa$	
	1/ГПа	10^{-5} см²/кгс
Ацетон	1,27	12,5
Бензол	0,97	9,5
Вода	0,47	4,6
Глицерин	0,22	2,2
Керосин	0,82	8,0
Ртуть	0,038	0,37
Этиловый спирт	1,17	11,5
Эфир	1,43	14

Таблица 5

Давление воздуха в зависимости от высоты

h, м	p		h, м	p	
	кПа	мм рт. ст.		кПа	мм рт. ст.
0	101,3	760	1000	89,9	674
100	100,1	751	1200	87,7	658
200	99,0	742	1400	85,6	642
300	97,8	733	1600	83,5	627
400	96,6	725	1800	81,5	611
500	95,5	716	2000	79,5	596
600	94,3	708	2200	77,5	582
700	93,2	699	2400	75,6	567
800	92,1	691	2600	73,8	553
900	91,0	682	2800	71,9	539

Таблица 6

Динамическая вязкость

Жидкости (при 20°С),	η, мПа·с	Газы (при 20°С и 101,3 кПа)	η, мПа·с
Ацетон	0,322	Азот	0,0175
Бензол	0,648	Аммиак	0,00995
Вода	1,002	Водород	0,0088
Глицерин	1480	Воздух	0,0182
Ртуть	1,554	Гелий	0,0196
Смола	$3 \cdot 10^{10}$	Двуокись углерода	0,0147
Смазочное масло	от 30 до 5000	Кислород	0,0202
Этиловый спирт	1,20	Метан	0,0108
		Окись углерода	0,0177

Таблица 7

Значение коэффициента в формуле для гидравлического сопротивления

Тонкая плоская пластина, перпендикулярная потоку	1,11
Открытая полусфера, отверстие обращено навстречу потоку	1,33
Открытая полусфера, отверстие обращено по потоку	0,35
Шар	0,1...0,4
Тело обтекаемой формы	0,05
Автомобиль	около 0,4

Таблица 8

Коэффициент поверхностного натяжения σ (при 20°С)

	σ	
	Н/м	дин/см
Ацетон	0,0233	23,3
Бензол	0,0289	28,9
Вода	0,0727	72,7
Глицерин	0,0657	65,7
Керосин (0°С)	0,0289	28,9
Ртуть	0,465	465
Толуол	0,0285	28,5
Этиловый спирт	0,0223	22,3
Эфир	0,0171	17,1

Таблица 9

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ

Вещество	E, 10^{10} Н/м²	E, 10^{5} кгс/см²	μ
Алюминий	7,1	7,1	0,34
Вольфрам	39	40	0,29
Германий	8,1	8,3	0,31
Дюралюминий	7,3	7,4	0,34
Иридий	52,8	53,8	0,26
Кварцевое стекло	7,5	7,6	0,17
Константан	16,3	16,6	0,33
Латунь	9,8	10	0,35
Манганин	12,4	12,6	0,33
Медь	12,3	12,5	0,35
Плексиглас	0,32	0,33	0,35
Полистирол	0,32	0,33	0,35
Свинец	1,6	1,6	0,44
Серебро	7,9	8,1	0,37
Серый чугун	10,8	11	0,22
Сталь	20,6	21	0,28
Стекло	≈ 7	≈ 7	≈ 0,25
Фарфор	5,8	5,9	0,23

Таблица 10

Модуль сдвига G

	G	
	10^{10} Н/м²	10^{5} кгс/см²
Алюминий	2,6	2,7
Германий	3,1	3,2
Дюралюминий	2,7	2,8
Кварцевое стекло	3,2	3,3
Константан	6,2	6,3
Латунь	3,6	3,7
Манганин	4,6	4,7
Медь	4,55	4,64
Свинец	0,57	0,58
Серебро	2,8	2,9
Серый чугун	4,4	4,5
Сталь	8,0	8,2

Таблица 11

Коэффициент линейного теплового расширения твердых тел в интервале (0 ... 100°C)

	α, 10^{-6} К$^{-1}$		α, 10^{-6} К$^{-1}$
Алмаз	1,3	Нихром	18
Алюминий	23,8	Олово	26,7
Бетон	12	Платина	9,0
Бронза	17,5	Платино-иридиевый сплав (0,2 Ir)	8,3
Вольфрам	4,5	Полиамид (дедерон)	110
Высоколегированная сталь	16,0	Поливинилхлорид	80
Железо	12,2	Полистирол	75
Золото	14,2	Полиэтилен	200
Инвар	1,5	Свинец	29,0
Иридий	6,5	Серебро	19,5
Кадмий	31,5	Серый чугун	10,0
Кварцевое стекло	0,6	Сталь	11,7
Константан	15,2	Сталь высоколег.	16,0
Латунь	18,4	Стекло (Иена 16III)	8,1
Марганец	23	Супра-инвар	0,5
Медь	16,5	Фарфор	3,0
Молибден	5,2	Хромистая сталь	10,0
Нейзильбер	18,0	Цинк	29,0
Никель	13,0	Электрон	24,0

Таблица 12

Коэффициент объемного теплового расширения жидкостей (при 20°C)

	β, 10^{-3} К$^{-1}$		β, 10^{-3} К$^{-1}$
Азотная кислота	1,24	Серная кислота	0,55
Ацетон	1,43	Терпентиновое масло	0,97
Бензин	1,00	Толуол	1,08
Бензол	1,06	Ртуть	0,181
Вода	0,18	Ртуть в иенском стекле 16III	0,157
Глицерин	0,59	Ртуть в кварцевом стекле	0,179
Керосин	0,96	Этиловый спирт	1,10
Метиловый спирт	1,19	Эфир	1,62
Пентан в иенском стекле 16III	0,151		

Таблица 13

Плотность дистиллированной воды ρ

t, °C	ρ, кг/дм³	t, °C	ρ, кг/дм³
0	0,999841	16	0,998943
1	0,999900	17	0,998775
2	0,999941	18	0,998596
3	0,999965	19	0,998406
4	0,999973	20	0,998205
5	0,999965	21	0,997994
6	0,999941	22	0,997772
7	0,999902	23	0,997540
8	0,999849	24	0,997299
9	0,999782	25	0,997047
10	0,999701	26	0,996785
11	0,999606	27	0,996515
12	0,999498	28	0,996235
13	0,999377	29	0,995946
14	0,999244	30	0,995649
15	0,999099		

Таблица 14

Коэффициент объемного расширения газов
(в интервале 0 ... 100°C при давлении 101,3 кПа *

	β, 10^{-3}K^{-1}		β, 10^{-3}K^{-1}
Азот	3,672	Двуокись углерода	3,726
Аммиак	3,770	Кислород	3,672
Аргон	3,676	Метан	3,678
Ацетилен	3,726	Неон	3,661
Водород	3,664	Окись углерода	3,667
Воздух	3,665	Этан	3,750
Гелий	3,66		

* До 1980 г.: 760 мм рт. ст.

Таблица 15

Газовая постоянная R

	R			R	
	Дж/(кг·К)	кгс·м/(кг·К)		Дж/(кг·К)	кгс·м/(кг·К)
Азот	297	30,26	Кислород	260	26,49
Аммиак	488	49,78	Метан	519	52,89
Аргон	208	21,23	Неон	412	42,01
Ацетилен	320	32,58	Окись углерода	297	30,28
Бутан	143	14,6	Пропан	189	19,24
Водород	4125	420,6	Пропилен	198	20,16
Водяной пар	461	47,05	Фреон 12	68,7	7,01
Воздух	287	29,27	Этан	277	28,21
Гелий	2078	211,9	Этилен	297	30,25
Двуокись углерода	189	19,27			

Таблица 16

Плотность воздуха ρ (кг/м³) в зависимости от давления и температуры

t, °C	p, кПа								
	96	97	98	99	100	101	101,3	102	103
0	1,224	1,237	1,250	1,263	1,275	1,288	1,293	1,301	1,314
2	1,216	1,228	1,240	1,253	1,266	1,279	1,283	1,291	1,304
4	1,207	1,219	1,232	1,244	1,257	1,270	1,274	1,282	1,295
6	1,198	1,211	1,223	1,236	1,248	1,260	1,265	1,273	1,285
8	1,190	1,202	1,214	1,227	1,239	1,252	1,256	1,264	1,276
10	1,181	1,193	1,206	1,218	1,230	1,243	1,247	1,255	1,267
12	1,173	1,185	1,197	1,210	1,222	1,234	1,238	1,246	1,258
14	1,165	1,177	1,189	1,201	1,213	1,225	1,229	1,238	1,250
16	1,157	1,169	1,181	1,193	1,205	1,217	1,221	1,229	1,241
18	1,149	1,161	1,173	1,185	1,200	1,209	1,212	1,221	1,232
20	1,141	1,153	1,165	1,177	1,188	1,200	1,204	1,212	1,224
22	1,133	1,145	1,157	1,169	1,180	1,192	1,196	1,204	1,216
24	1,126	1,137	1,149	1,161	1,172	1,184	1,188	1,196	1,208
26	1,118	1,130	1,141	1,153	1,165	1,176	1,180	1,188	1,200
28	1,111	1,122	1,134	1,145	1,157	1,168	1,172	1,180	1,192
30	1,103	1,115	1,126	1,138	1,149	1,161	1,164	1,172	1,184
32	1,096	1,107	1,119	1,130	1,142	1,153	1,157	1,165	1,176
34	1,185	1,198	1,210	1,222	1,235	1,247	1,251	1,259	1,272

Таблица 17

Удельная теплоемкость *c* (при 20°C)

	c кДж/(кг·К)	*c* ккал/(кг·К)
Твердые вещества:		
Алюминий	0.896	0,214
Бетон	0,92	0,22
Высоколегированная сталь (V2A)	0,481	0,115
Вольфрам	0,134	0,032
Дерево	2,39	0,57
Железо, чистое	0,465	0,111
Золото	0,130	0,031
Иридий	0,134	0,032
Кварцевое стекло	0,729	0,174
Кирпич	0,92	0,22
Константан	0,410	0,098
Латунь	0,385	0,092
Лед (°C)	2,09	0,50
Медь	0,385	0,092
Молибден	0,251	0,060
Никель	0,448	0,107
Олово	0,218	0,052
Платина	0,134	0,032
Свинец	0,13	0,031
Серебро	0,234	0,056
Серый чугун	0,540	0,129
Стекло (Иена 16 111)	0,779	0,186
Фарфор	0,80	0,19
Цинк	0,389	0,093
Шамот	0,84	0,20
Жидкие вещества:		
Ацетон	2,16	0,516
Бензин легкий	2,09	0,5
Вода	4,19	1,0
Глицерин	2,39	0,57
Машинное масло	1,67	0,4
Метиловый спирт	2,47	0,59
Пентан	2,18	0,52
Ртуть	0,138	0,033
Толуол	1,72	0,41
Этиловый спирт	2,39	0,57

Таблица 18

Удельная теплоемкость газов *c*

	c_p		c_v		$\varkappa$
	кДж/(кг·К)	ккал/(кг·К)	кДж/(кг·К)	ккал/(кг·К)	
Азот	1,038	0,248	0,745	0,178	1,40
Водород	14,27	3,408	10,13	2,420	1,41
Воздух	1,009	0,241	0,720	0,172	1,40
Гелий	5,238	1,251	3,161	0,755	1,66
Двуокись углерода	0,846	0,202	0,653	0,156	1,30
Кислород	0,917	0,219	0,653	0,156	1,40
Окись углерода	1,047	0,250	0,754	0,180	1,40

Таблица 19

Теплота сгорания твердых и жидких веществ

	H			*H*	
	МДж/кг	ккал/кг		МДж/кг	ккал/кг
Антрацит	31	7 400	Бензин	42	10 000
Бурый уголь, брикеты	21	5 000	Бензол	40	9 600
Бурый уголь	14,7	3 500	Дизельное топливо	42,7	10 200
необработанный	8,4	2 000	Керосин	40,8	9 750
Дерево свежее	8	1 900	Мазут	41	9 800
Дерево сухое	15	3 600	Метиловый спирт	19,5	4 660
Древесный уголь	31	7 300	Натуральная нефть	41	9 800
Каменный уголь	29,3	7 000	Спирт	25	5 980
Кокс	29	7 000	Этиловый спирт	27	6 500
Торф сухой	15	3 600	Эфнр	34	8 200

Таблица 20

Теплотворная способность газообразных веществ H_u (при 0°C и 101,3 кПа)

	H			*H*	
	МДж/м^3	ккал/м^3		МДж/м^3	ккал/м^3
Аммиак	14,2	3 390	Окись углерода	12,6	3 020
Ацетилен	56,9	13 600	Пропан	93,4	22 300
Бутан	124	29 500	Пропнлен	88,3	21 100
Бытовой газ	15,9	3 800	Сероводород	23,7	5 660
	20,1	4 800	Этан	64,5	15 400
Водород	10,8	2 580	Этилен	60,0	14 320
Колошниковый газ	3,98	950			
Метан	35,9	8 580			

Таблица 21

Криоскопические и эбулиоскопические постоянные

Растворитель	*K*, 10^3 K	*E*, 10^3 K
Бензол	5,07	2,64
Вода	1,86	0,52
Диэтилэфир	1,79	1,83
Сероуглерод		2,29
Уксусная кислота	3,9	3,07
Хлороформ	4,90	3,80
Четыреххлористый углерод	29,8	4,88

Таблица 22

Температура плавления $t_{пл}$ и удельная теплота плавления q

	$t_{пл}$, °С	q	
		кДж/кг	ккал/кг
Азот	—210,0		
Алюминий	660,1	397	94,8
Аммиак	—77,7		
Ацетон	—94,9	98	23,4
Бензол	5,53	128	30,6
Висмут	271,3	52,2	12,5
Вода	0	333,7	79,7
Водород	—259,2	58,6	14
Вольфрам	3380	192	45,9
Глицерин	18,4	201	48
Двуокись углерода	—56,6		
Диэтилэфир	—116,3	98,4	23,5
Железо чистое	1535	277	66,2
Золото	1063	65,7	15,7
Иридий	2454	117	27,9
Кислород	—218,8		
Кремний	1420	164	39
Латунь	920		
Медь	1083	205	49
Метиловый спирт	—97,7	92	22
Никель	1453	303	72,4
Окись углерода	—205,1		
Олово	231,9	59,6	14,2
Парафин	54		
Платина	1769,3	111	26,5
Ртуть	—38,87	11,8	2,8
Свинец	327,4	23,0	5,5
Серебро	960,8	104,5	25
Серная кислота	10,5	109	26,0
Серый чугун	1200		
Сталь литая	1500		
Углерод	3650		
Цезий	28,64	16,4	3,9
Цинк	419,5	111	26,6
Этиловый спирт	—114,5	108	25,8

Таблица 23

Температура кипения $t_к$ и удельная теплота парообразования r (при давлении 101,3 кПа *)

	$t_к$, °C	r, кДж/кг	r, ккал/кг
Азот	—195,82	198	47,3
Алюминий	2 450	10 900	2 603
Аммиак	—33,4	1 370	327
Ацетон	56,25	525	125
Бензол	80,1	394	94,1
Вода	100	2 256	538,9
Водород	—252,77	454	108
Гелий	—268,94	20,6	4,92
Глицерин	290,5		
Двуокись серы	—10,02	390	93,1
Диметилэфир	—24,8	467	112
Диэтилэфир	34,5	384	91,7
Железо чистое	2 735	6 340	1 514
Золото	2 700	1 650	394
Кислород	—182,97	213	50,9
Криптон	—153,4	108	25,8
Медь	2 590	4 790	1 140
Метан	—161,5	510	122
Метиловый спирт	64,6	1 100	263
Никель	2 800	6 480	1 550
Олово	2 430	2 450	585
Пентан	36,1	360	86
Пропиловый спирт	97,2	750	179
Ртуть	356,58	285	68,1
Свинец	1 750	8 600	2 054
Сера	444,6	290	69,3
Толуол	110,62	364	86,9
Углерод	4 350	$5 \cdot 10^4$	12 000
Фосфор	280	400	96
Фреон 12 (CCl_2F_2)	—24,9	162	38,7
Хлороформ	61,3	279	66,6
Цинк	907	1 755	419
Четыреххлористый углерод	76,6	195	46,6
Этиловый спирт	78,33	840	201

* До 1980 г.: 760 мм рт. ст.

Таблица 24а

Температура кипения воды при определенном давлении

p, кПа	p, ат	t, °C	p, кПа	p, ат	t, °C
0,981	0,01	6,698	147,1	1,5	110,79
1,961	0,02	17,20	196,1	2,0	119,62
3,923	0,04	28,64	245,2	2,5	126,79
9,807	0,1	45,45	294,2	3,0	132,88
19,61	0,2	59,67	392,3	4,0	142,92
29,42	0,3	68,68	490,3	5,0	151,11
39,23	0,4	75,42	588,4	6,0	158,08
49,03	0,5	80,86	686,5	7,0	164,17
58,84	0,6	85,45	784,5	8,0	169,61
68,65	0,7	89,45	882,6	9,0	174,53
78,45	0,8	92,99	980,7	10,0	179,04
88,26	0,9	96,18	1961	20,0	211,38
98,07	1,0	99,09	2452	25,0	222,90
101,3	1,033	100,00	4903	50,0	262,70
			9807	100,0	309,53

Таблица 24б

Зависимость температуры кипения воды от давления *

p, мбар	+ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
940	97,9	,9	,0+	,0+	,0+	,1+	,1+	,1+	,1+	,2+
950	98,2	,2	,3	,3	,3	,4	,4	,4	,4	,5
960	98,5	,5	,6	,6	,6	,6	,7	,7	,7	,8
970	98,8	,8	,8	,9	,9	,9	,0+	,0+	,0+	,0+
980	99,1	,1	,1	,2	,2	,2	,2	,3	,3	,3
990	99,4	,4	,4	,4	,5	,5	,5	,6	,6	,6
1000	99,6	,7	,7	,7	,7	,8	,8	,8	,9	,9
1010	99,9	,9	,0+	,0+	,0+	,0+	,1+	,1+	,1+	,2+
1020	100,2	,2	,2	,3	,3	,3	,4	,4	,4	,4
1030	100,5	,5	,5	,5	,6	,6	,6	,6	,7	,7
1040	100,7	,8	,8	,8	,8	,9	,9	,9	,9	,0+
1050	101,0	,0	,1	,1	,1	,1	,2	,2	,2	,2

* Крестик (+) означает, что перед запятой стоят цифры, указанные в следующей строке.

Таблица 25

Давление насыщения (при 20°C)

	p			p	
	кПа	мм рт. ст.		МПа	ат
Ацетон	24,0	180	Аммиак	857	8,741
Бензол	10,0	75,2	Бутан	209	2,13
Вода	2,34	17,54	Двуокись серы	330	3,37
Диэтилэфир	58,4	438	Метиленхлорид	46,1	0,470
Метиловый спирт	12,9	97	Метилхлорид	489	4,993
Пентан	56,5	424,1	Пропан	837	8,53
Ртуть	$1,63 \cdot 10^{-4}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	Фреон 12	567	5,779
Сероуглерод	40,0	299,7	Фреон 22	917	9,35
Толуол	2,93	22,0	Хлористый водород	4217	43,0
Трихлорэтилен	7,20	54			
Хлороформ	21,3	160			
Четыреххлористый углерод	12,1	91			
Этиловый спирт	5,87	44,0			

Таблица 26

Давление и плотность насыщенных паров воды

t, °C	p		$\rho_{макс}$, г/м³	t, °C	p		$\rho_{макс}$, г/м³
	кПа	мм рт. ст.			кПа	мм рт. ст.	
−5	0,401	3,01	3,25	12	1,401	10,51	10,67
−4	0,437	3,28	3,53	13	1,497	11,23	11,36
−3	0,463	3,47	3,83	14	1,597	11,98	12,08
−2	0,517	3,88	4,14	15	1,704	12,78	12,84
−1	0,563	4,22	4,49	16	1,817	13,63	13,65
0	0,611	4,58	4,85	17	1,937	14,53	14,50
1	0,656	4,92	5,20	18	2,062	15,47	15,39
2	0,705	5,59	5,57	19	2,196	16,47	16,32
3	0,757	5,68	5,95	20	2,337	17,53	17,32
4	0,813	6,10	6,37	21	2,486	18,65	18,35
5	0,872	6,54	6,80	22	2,642	19,82	19,44
6	0,935	7,01	7,27	23	2,809	21,07	20,60
7	1,005	7,54	7,79	24	2,984	22,38	21,81
8	1,072	8,04	8,28	25	3,168	23,76	23,07
9	1,148	8,61	8,83	26	3,361	25,21	24,40
10	1,227	9,20	9,41	27	3,565	26,74	25,79
11	1,312	9,84	10,02	28	3,780	28,35	27,26

Таблица 27

Критическая температура и критическое давление

	$t_к$, °C	$p_к$	
		МПа	ат
Азот	—146,9	3,39	34,6
Аммиак	132,4	11,30	115,2
Ацетилен	35,94	6,26	63,8
Ацетон	235,6	4,72	48,1
Водород	—239,91	1,30	13,23
Водяной пар	374,2	22,11	225,5
Воздух	—140,73	3,78	38,5
Гелий	—267,95	0,229	2,34
Двуокись углерода	75,27	3,04	31,0
Кислород	—118,38	5,08	51,8
Метан	—82,3	4,64	47,3
Окись углерода	—140,1	3,50	35,65
Пропан	96,8	4,26	43,4
Этиловый спирт	243	6,38	65,1

Таблица 28

Теплопроводность λ, Вт/(м·K)

Хорошие проводники тепла		Плохие проводники тепла		Теплоизоляторы	
Серебро	407	Ртуть	8,2	Асбест	0,4—0,8
Медь	384	Котельная накипь	≈ 3	Поливинилхлорид	≈ 0,17
Золото	308	Мрамор	2,8	Кожа	≈ 0,15
Алюминий	209	Лед (0 °C)	2,23	Дерево	0,1—0,2
Латунь	111	Песчаник	≈ 2	Древесный уголь	0,1—0,17
Платина	70	Фарфор	≈ 1,4	Пробка	≈ 0,05
Олово	65	Кварцевое стекло	1,36	Стекловата	≈ 0,05
Серый чугун	50	Бетон	0,7—1,2	Шамот	0,04
Бронза	47—58	Стекло	≈ 0,7	Пенопласт	0,04
Сталь	47	Кирпич	≈～ 0,7	Воздух	0,034
Свинец	35	Вода	0,58	Перо	0,02
				Вакуум	0,00

1 ккал/(м·ч·K) = 1,163 Вт/(м·K); 1 Вт/(м·K) = 0,860 ккал/(м·ч·K).

Таблица 29

Коэффициент теплоотдачи

	α, Вт/(м$^2\cdot$К)
Спокойная вода — металлическая стенка	350 ... 580
Текущая вода — металлическая стенка	$350 + 2\,100\sqrt{v}$ *
Кипящая вода — металлическая стенка	3500 ... 5800
Конденсирующийся водяной пар	10 500
Воздух — гладкая поверхность	$5{,}6 + 4v$ *

* v — скорость в метрах в секунду.

Таблица 30

Коэффициент теплопередачи строительных материалов k, Вт/(м$^2\cdot$К)

Толщина стенки, см	0,3	1	2	5	10	12	15	20	25
Бетон с гравием				4,1	3,5		3,1	2,8	
Деревянная стена			3,8	2,4		1,7			
Железобетон				4,2	3,7		3,3	2,9	
Кирпич						2,9			2,0
Силикатный кирпич						3,1			2,2
Стекло	5,8	5,6							
Шлаковый кирпич						2,7			1,7
Черепичная крыша без уплотнения									12
Черепичная крыша с уплотнением									6
Наружное окно, одинарное									7
Наружное окно, двойное									3,3
Наружная дверь, деревянная									4,1

Таблица 31

Излучательная способность

Материал	ε	Материал	ε
Алюминий, отливка в песке	0,3	Масляная краска	0,78
Алюминий, полированный	0,051	Медь, полированная	0,04
Алюминий, прокатанный	0,081	Медь, черная	0,78
Вода	0,92	Платина, полированная	<0,05
Железо, полированное	0,29	Песок	0,76
Кирпичная кладка	0,93	Сажа	0,95
Листовая сталь, никелированная	0,06	Свинец, оксидированный	0,23
Листовая сталь, оцинкованная	0,25	Серый чугун, необработанный	0,94
Листовая сталь, прокат	0,67	Шамот (1000°С)	0,55

Таблица 32

Скорость звука в различных средах

	c, м/с		c, м/с
Сталь	5100	Стекло	5000
Гранит	3950	Свинец	1300
Кирпичная кладка	3480	Вода (0°С)	1485
Дерево	4000	Двуокись углерода (0°С)	258
Пробка	500	Водород (0°С)	1286
Резина	54	Воздух (0°С)	331,8

Таблица 33

Коэффициент звукоизоляции D строительных материалов

		Толщина d, см	D, дВ
Кирпичная стена, оштукатуренная	1/4 кирпича	9	42
	1/2 кирпича	15	44
	1/1 кирпича	27	50
Древесно-волокнистая плита		2,5	35
Бетонная плита		15 ... 18	48
Клееная фанера		0,5	19
Толстое стекло		0,6 ... 0,7	29
Одинарное окно			15
Двойное окно			30
Одинарная дверь			до 20
Двойная дверь			40

Таблица 34

Громкость звука L

	L, фон		L, фон
Порог слышимости	0	Громкий уличный шум	70
Тиканье часов	10	Крик	80
Шепот	20	Пневматическое сверло	90
Тихая улица	30	Кузнечный цех	100
Приглушенный разговор	40	Клепальный молот	110
Разговор	50	Самолетный двигатель на расстоянии 4 м	120
Пишущая машинка	60	Болевой порог	130

Таблица 35

Показатель преломления n
(относительно воздуха при 20°C и 101,3 кПа для $\lambda = 589,3$ нм)

Вещество	n	Вещество	n
Алмаз	2,4173	Коричное масло	1,604
Аммиак	1,325	Кронглас FK 3	1,46444
Анилин	1,586	BK 1	1,51002
Бензол	1,5014	BK 7	1,51625
Вода	1,33299	K 3	1,51814
Глицерин	1,4695	SK 1	1,61016
Диэтилэфир	1,3529	Плексиглас	1,491
Исландский шпат, необыкновенный луч	1,48643	Полистирол	1,588
Исландский шпат, обыкновенный луч	1,65836	Сероуглерод	1,6277
Каменная соль	1,5443	Флинтглас F 3	1,61279
Канадский бальзам	1,542	SF 4	1,75496
Кварцевое стекло	1,4584	Четыреххлористый углерод	1,4607
Кедровое масло	1,505	Этиловый спирт	1,3617

Таблица 36

Длины волн некоторых важных спектральных линий

λ, нм			λ, нм		
393,3666	Кальций	Ca	535,046	Таллий	Tl
396,8468	Кальций	Ca	546,0740	Ртуть	Hg
404,6561	Ртуть	Hg	576,9596	Ртуть	Hg
410,1735	Водород	H	579,0654	Ртуть	Hg
422,6728	Кальций	Ca	587,5618	Гелий	He
430,7905	Железо	Fe	588,9953	Натрий	Na
434,0465	Водород	H	589,5923	Натрий	Na
435,8343	Ртуть	Hg	610,3642	Литий	Li
438,3547	Железо	Fe	636,2347	Цинк	Zn
441,463	Кадмий	Cd	643,84696	Кадмий	Cd
447,1477	Гелий	He	656,2725	Водород	H
460,7331	Стронций	Sr	667,8149	Гелий	He
468,02983	Железо	Fe	670,7844	Литий	Li
479,9914	Кадмий	Cd	686,72	Кислород	O
486,1327	Водород	H	706,5188	Гелий	He
492,1929	Гелий	He	760,82	Кислород	O
508,5824	Кадмий	Cd	766,4907	Калий	K
527,03602	Железо	Fe	769,8979	Калий	K

Таблица 37

Общий световой поток Ф и светоотдача Ф/*P* некоторых осветительных ламп

	P, Вт	Ф, лм	Ф/*P*, лм/Вт
Бытовые лампы (220 В)	15	110	7,33
(прозрачные, цоколь Е 27)	25	220	8,8
D двойная спираль	40D	415	10,4
	60D	715	11,9
	75D	950	12,7
	100D	1 350	13,5
	150	2 090	13,9
	200	2 920	14,6
(прозрачные, цоколь Е 40)	300	4 900	16,3
	500	8 700	17,4
	1 000	20 000	20,0
	1 500	31 800	21,2
Фотолампы (220 В)			
PR 250 (50 часов)	250	3 420	13,7
PR 500 (100 часов)	500	6 750	13,5
К 200 (8 часов)	200	4 800	24,0
В 500 (100 часов)	500	10 200	20,4
Лампы для проекторов (15 часов)	650	20 000	30,8
Лампы для проекторов (15 часов)	1 000	33 000	33,0
Лампы для проекторов (15 часов)	1 250	42 000	33,6

Табл. 37 (продолжение)

Газоразрядные лампы высокого давления

	I, А	*P*, Вт	Ф, лм	Ф/*P*, лм/Вт
Ртутная лампа высокого давления (без люминофора)				
HQA 80	0,8	90	3 000	33,3
HQA 125	1,15	138	5 250	38,0
HQA 250	2,13	268	11 500	42,9
HQA 400	3,25	426	20 500	48,1
HQA 1000 (с люминофором)	7,5	1 055	52 000	48,3
HQLS 80 (серебристо-белый свет)	0,8	90	3 100	34,4
HQLS 125	1,15	138	5 600	40,6
HQLS 250	2,13	268	12 200	45,5
HQLS 400	3,25	426	21 500	50,5
HQLS 1 000	7,5	1 055	55 000	52,1
HQLS 2 000	8,0	2 080	115 000	55,3

Табл. 37 (продолжение)

Люминесцентные лампы (с люминофором)

		P, Вт	Ф, лм	Ф/P, лм/Вт
LS 20 Вт,	теплый тон,	31	975	31,4
	белый,		950	30,6
	дневной свет		820	26,5
LS 40 Вт,	теплый тон,	50	2600	52,0
	белый,		2800	56,0
	дневной свет		2100	42 0
LS 65 Вт,	теплый тон,	78	4000	51 3
	белый,		4300	55,1
	дневной свет		3340	42,8
LS 120 Вт,	белый,	144	5400	37,5
LUn 40 Вт,	теплый тон, белый	50	2200	44,0
LUn 65 Вт,	теплый тон, белый	78	3400	43,6
Свеча			5 ... 15	
Керосиновая лампа			150	
Газовая лампа			200 ... 1000	
Электронная импульсная лампа-вспышка			до $40 \cdot 10^6$	

Таблица 38

Электрохимический эквивалент k

Вещество	Валентность	k, мг/Кл	Вещество	Валентность	k, мг/Кл
Алюминий	3	0,0932	Никель	3	0,2027
Бром	1	0,8282	Олово	2	0,6150
Водород	1	0,01045	ОН-группа	1	0,1763
Железо	3	0,1929	Платина	4	0,5058
Золото	3	0,6812	Ртуть	1	2,0789
Кислород	2	0,0829	Свинец	2	1,0736
Медь	1	0,6588	Сера	2	0,1661
Медь	2	0,3294	Серебро	1	1,1179
Натрий	1	0,2383	Хлор	1	0,3674
Никель	2	0,3041	Цинк	2	0,3388

Таблица 39

Удельное электрическое сопротивление ρ (при 20°C)

Проводники	ρ, Ом·мм²/м	ρ, Ом·м	Изоляторы (примерное значение)	ρ, Ом·м
Алюминий	0,027	$2{,}7\cdot10^{-8}$	Бакелит	10^{16}
провод	0,0287	$2{,}87\cdot10^{-8}$	Бензол	$10^{15}\ldots10^{16}$
Вольфрам	0,055	$5{,}5\cdot10^{-8}$	Бумага	10^{15}
Графит	8,0	$8{,}0\cdot10^{-6}$	Вода дистиллированная	10^{4}
Железо, чистое	0,1	$1{,}0\cdot10^{-7}$	Вода морская	0,3
Золото	0,022	$2{,}2\cdot10^{-8}$	Дерево, сухое	$10^{9}\ldots10^{13}$
Иридий	0,0474	$4{,}74\cdot10^{-8}$	Земля, влажная	10^{2}
Константан	0,50	$5{,}0\cdot10^{-7}$	Кварцевое стекло	10^{16}
Литая сталь	0,13	$1{,}3\cdot10^{-7}$	Керосин	$10^{10}\ldots10^{12}$
Магний	0,044	$4{,}4\cdot10^{-8}$	Мрамор	10^{8}
Манганин	0,43	$4{,}3\cdot10^{-7}$	Парафин	$10^{14}\ldots10^{16}$
Медь	0,0172	$1{,}72\cdot10^{-8}$	Парафиновое масло	10^{14}
провод	0,0178	$1{,}78\cdot10^{-8}$	Плексиглас	10^{13}
Молибден	0,054	$5{,}4\cdot10^{-8}$	Полистирол	10^{16}
Нейзильбер	0,33	$3{,}3\cdot10^{-7}$	Полихлорвинил	10^{13}
Никель	0,087	$8{,}7\cdot10^{-8}$	Полиэтилен	$10^{10}\ldots10^{13}$
Нихром	1,12	$1{,}12\cdot10^{-8}$	Силиконовое масло	10^{13}
Олово	0,12	$1{,}2\cdot10^{-7}$	Слюда	10^{14}
Платина	0,107	$1{,}07\cdot10^{-7}$	Стекло	10^{11}
Ртуть	0,96	$9{,}6\cdot10^{-7}$	Трансформаторное масло	$10^{10}\ldots10^{13}$
Свинец	0,208	$2{,}08\cdot10^{-7}$	Фарфор	10^{14}
Серебро	0,016	$1{,}6\cdot10^{-8}$	Шифер	10^{6}
Серый чугун	1,0	$1{,}0\cdot10^{-6}$	Эбонит	10^{16}
Угольные щетки	40	$4{,}0\cdot10^{-5}$	Янтарь	10^{18}
Цинк	0,059	$5{,}9\cdot10^{-8}$		

Таблица 40

Температурный коэффициент α (при 20°C)

Металл	α, $10^{-3}\mathrm{K}^{-1}$	Металл	α, $10^{-3}\mathrm{K}^{-1}$
Алюминий	4,3	Ртуть	0,92
провода	3,7	Серебро	3,8
Вольфрам	4,1	Константан	0,03
Золото	3,9	Манганин	0,02
Медь	3,8	Нейзильбер	0,33
Никель	6,5	Никелин	0,23
Платина	3,9	Нихром	0,25

Таблица 41

Диэлектрическая проницаемость ε

Вещество	ε	Вещество	ε
Вакуум	1,0	Пертинакс	4 ... 6
Воздух	1,000594	Слюда	4 ... 10
Парафнн	2,2	Фарфор	4,5 ... 6,5
Полиэтилен	2,2	Игелит	5
Силиконовое масло	2,2 ... 2,8	Полихлорвннил	5
Янтарь	2,2 ... 2,9	Стекло	5 ... 15
Полиэтилен	2,3	Шифер	6 ... 10
Полнстирол	2,3 ... 2,5	Ацетон	21,4
Каучук	2,5 ... 3,0	Этиловый спирт	25,1
Эбонит	2,5 ... 4,0	Метнловый спирт	33,5
Плексиглас	3 ... 4	Вода дистнллированная	31
Бакелит	3 ... 5	Специальная керамика	до 10 000
Дерево	3,5 ... 5,0		
Шеллак	3,6 ... 4		
Гетинакс	3,5 ... 6		

Таблнца 42

Магнитная проннцаемость μ

Вещество		μ
Пермаллой	Ферромагнетик	до 50 000
Алмазная сталь	»	» 15 000
Супермаллой	»	» 10 000
Полосовое железо	»	» 5 000
Чугуниое лнтье	»	» 600
Никель	»	» 300
Твердая сталь	»	» 200
Платина	Парамагнетик	1,00026
Алюминий	»	1,000021
Эбонит	»	1,000014
Воздух	»	1,0000004
Медь	Диамагиетик	0,9999904
Стекло	»	0,999987
Висмут	»	0,999843

Таблица 43

Химические элементы

Z — атомный номер, z — валентность,
Агр. сост. — агрегатное состояние при нормальных условиях: (0 °С; 101,3 кПа),
т — твердое, ж — жидкое, г — газообразное
и — элемент получен искусственным путем
* — радиоактивный элемент
$A_{отн}$ — относительная атомная масса природной смеси изотопов или массовое число наиболее стабильного изотопа радиоактивных элементов

	Символ	Z	$A_{отн}$	z	Агр. сост.
Азот	N	7	14,0067	1 2 3 4 5	г
Актиний *	Ac	89	227	3	т
Алюминий	Al	13	26,9815	3	т
Америций *	Am	95	243	2 3 4 5 6	т и
Аргон	Ar	18	39,948	0	г
Астатин *	At	85	210	1 3 5 7	т
Барий	Ba	56	137,34	2	т
Бериллий	Be	4	9,0122	2	т
Берклий *	Bk	97	247	3 4	т и
Бор	B	5	10,811	3	т
Бром	Br	35	79,909	1 3 5	ж
Ванадий	V	23	50,942	2 3 4 5	т
Висмут	Bi	83	208,980	2 3 5	т
Водород	H	1	1,00797	1	г
Вольфрам	W	74	183,85	2 3 4 5 6	т
Гадолиний	Gd	64	157,25	3	т
Галлий	Ga	31	69,72	1 2 3	т
Гафний	Hf	72	178,49	4	т
Гелий	He	2	4,0026	0	г
Германий	Ge	32	72,59	2 4	т
Гольмий	Ho	67	164,930	3	т
Диспрозий	Dy	66	162,50	3	т
Европий	Eu	63	151,96	2 3	т
Железо	Fe	26	55,847	2 3 4	т
Золото	Au	79	196,967	1 3	т
Индий	In	49	114,82	1 2 3	т
Иод	I	53	126,9044	1 3 5 7	т
Иридий	Ir	77	192,2	1 2 3 4 6	т
Иттербий	Yb	70	173,04	2 3	т

Табл. 43 (продолжение)

	Символ	Z	$A_{отн}$	z	Агр. сост.
Иттрий	Y	39	88,905	3	т
Кадмий	Cd	48	112,40	2	т
Калий	K	19	39,102	1	т
Калифорний*	Cf	98	251	3	т и
Кальций	Ca	20	40,08	2	т
Кислород	O	8	15,9994	2	г
Кобальт	Co	27	58,9332	2 3 4	т
Кремний	Si	14	28,086	2 4	т
Криптон	Kr	36	83,80	0	г
Ксенон	Xe	54	131,30	0	г
Кюрий *	Cm	96	247	3	т и
Лантан	La	57	138,91	3	т
Литий	Li	3	6,939	1	т
Лоуренсий*	Lr	103	260		и
Лютеций*	Lu	71	174,97	3	т
Магний	Mg	12	24,312	2	т
Марганец	Mn	25	54,9381	1 2 3 4 6 7	т
Медь	Cu	29	63,54	1 2 3	т
Менделевий*	Md	101	258		т и
Молибден	Mo	42	95,94	2 3 4 5 6	т
Мышьяк	As	33	74,9216	3 5	т
Натрий	Na	11	22,9898	1	т
Неодим	Nd	60	144,24	3	т
Неон	Ne	10	20,183	0	г
Нептуний*	Np	93	237	2 3 4 5 6	т
Никель	Ni	28	58,71	1 2 3 4	т
Ниобий	Nb	41	92,906	2 3 4 5	т
Нобелий *	No	102	259		т и
Олово	Sn	50	118,70	2 4	т
Осмий	Os	76	190,2	2 3 4 6 8	т
Палладий	Pd	46	106,4	2 3 4	т
Платина	Pt	78	195,09	1 2 3 4 6	т
Плутоний*	Pu	94	244	2 3 4 5 6	т и
Полоний*	Po	84	209	2 4 6	т
Празеодим	Pr	59	140,907	3 4 5	т
Прометий *	Pm	61	145	3	т и
Протактиний*	Pa	91	231	3 4 5	т и
Радий*	Ra	88	226	2	т
Радон*	Rn	86	222	0	г
Рений	Re	75	186,2	1 2 3 4 5 6 7	т
Родий	Rh	45	102,905	1 2 3 4 5 6	т

Табл. 43 (продолжение)

	Символ	Z	$A_{отн}$	z	Агр. сост.
Ртуть	Hg	80	200,59	1 2	ж
Рубидий*	Rb	37	85,47	1	т
Рутений	Ru	44	101,07	2 3 4 5 6 7 8	т
Самарий*	Sm	62	150,35	2 3	т
Свинец	Pb	82	207,19	2 4	т
Селен	Se	34	78,96	2 4 6	т
Сера	S	16	32,064	2 4 6	т
Серебро	Ag	47	107,870	1 2	т
Скандий	Sc	21	44,956	3	т
Стронций	Sr	38	87,62	2	т
Сурьма	Sb	51	121,75	3 4 5	т
Таллий	Tl	81	204,37	1 3	т
Тантал	Ta	73	180,948	2 3 4 5	т
Теллур	Te	52	127,60	2 4 6	т
Тербий	Tb	65	158,924	3 4	т
Технеций*	Tc	43	97	4 6 7	т и
Титан	Ti	22	47,90	2 3 6	т
Торий*	Th	90	232,038	3 4	т
Тулий	Tm	69	168,934	3	т
Углерод	C	6	12,01115	2 3 4	т
Уран*	U	92	238,03	2 3 4 5 6	т
Фермий*	Fm	100	257		т и
Фосфор	P	15	30,9738	1 3 4 5	т
Франций*	Fr	87	223		т
Фтор	F	9	18,9984	1	г
Хлор	Cl	17	35,453	1 3 4 5 7	г
Хром	Cr	24	51,996	2 3 4 5 6	т
Цезий	Cs	55	132,905	1	т
Церий	Ce	58	140,12	3 4	т
Цинк	Zn	30	65,38	2	т
Цирконий	Zr	40	91,22	2 3 4	т
Эйнштейний*	Es	99	254		т и
Эрбий	Er	68	167,26	3	т

Таблица 44

Период полураспада и энергия распада некоторых радиоактивных изотопов (выборочно)

Z			A	$T_{1/2}$	W, МэВ		
					β^-	β^+	γ
1	H	Водород	3	12,3 г	0,018		
6	C	Углерод	14	5730 г	0,158		
7	N	Азот	13	10 мин		1,19	
8	O	Кислород	15	124 с		1,73	
11		Натрий	22	2,6 г		0,54	1,274
			24	15 ч	1,39		1,368 2,753
15	P	Фосфор	32	14,3 сут	1,71		
16	S	Сера	35	87 сут	0,167		
17	Cl	Хлор	36	$3 \cdot 10^5$ г	0,71		
			38	38 мин	4,8		2,2; 1,6
19	K	Калий	42	12,4 ч	3,55		1,52
20	Ca	Кальций	45	164 сут	0,254		
21	Sc	Скандий	46	84 сут	0,36		1,12; 0,89
24	Cr	Хром	51	27,8 сут			0,32
23	V	Ванадий	48	16,1 сут		0,69	1,3; 0,99
25	Mn	Марганец	52	5,7 сут		0,575	1,434 0,938 0,744
			54	314 сут			0,835
26	Fe	Железо	59	45 сут	0,46 0,27		1,29 1,10
27	Co	Кобальт	60	5,26 г	0,31		1,333 1,173
29	Cu	Медь	64	12,8 ч	0,57	0,66	1,34
30	Zn	Цинк	65	246 сут		0,326	1,12
33	As	Мышьяк	76	26,8 сут	2,97 2,41 1,76		0,559 0,657
			77	38,8 сут	0,68		0,52; 0,25
35	Br	Бром	82	35,5 ч	0,44		1,47; 1,31 1,04; 0,83 0,70 0,61; 0,55

Табл. 44 (продолжение)

Z			A	$T_{1/2}$	W, МэВ		
					α	β⁻	γ
36	Kr	Криптон	85	10,6 г		0,67	0,51
38	Sr	Стронций	89	54 сут		1,5	
			90	29 г		0,54	
39	Y	Иттрий	90	64 ч		2,27	
47	Ag	Серебро	111	7,5 сут		1,05	0,34
51	Sb	Сурьма	124	60 сут		2,3	0,60
						0,62	1,69
						0,2	2,09
53	I	Иод	131	8,08 сут		0,61	0,364
						0,33	0,639
54	Xe	Ксенон	133	5,3 сут		0,34	0,081
55	Cs	Цезий	137	30 г		0,52	0,662
58	Ce	Церий	144	284 сут		0,32	0,134 ...
						0,18	
61	Pm	Прометий	147	2,5 г		0,22	
69	Tm	Тулий	170	125 сут		0,97	0,084
						0,88	
74	W	Вольфрам	185	74 сут		0,43	0,125
77	Ir	Иридий	192	74 сут		0,67	0,316
						0,54	0,468 ...
						0,24	
79	Au	Золото	198	2,7 сут		0,96	0,412
84	Po	Полоний	210	138,4 сут	5,31		0,80
86	Rn	Радон	222	3,83 сут	5,49		0,51
88	Ra	Радий	226	1601 г	4,78		0,186
					4,60		
90	Th	Торий	232	$1,41 \cdot 10^{10}$ г	4,01		0,059
91	Pa	Протактиний	231	$3,25 \cdot 10^{4}$ г	5,05 ...		0,36 ...
			233	27,4 сут		0,26	0,42 ...
						0,15	
92	U	Уран	234	$2,5 \cdot 10^{5}$ г	4,77		0,12
					4,72		0,05
			235	$7,1 \cdot 10^{8}$ г	4,35		0,18
					4,56		0,14
			238	$4,5 \cdot 10^{9}$ г	4,19		0,048
93	Np	Нептуний	239	2,3 сут	0,72 ...		0,33 ...
94	Pu	Плутоний	239	$2,44 \cdot 10^{4}$ г	5,15		0,42
					5,13		

Таблица 45

Коэффициент ослабления γ-излучения Co-60

	ρ, кг/дм³	μ, см$^{-1}$
Свинец	11,34	0,53
Сталь	7,7	0,34
Чугун	7,4	0,3
Бетон	3,2	0,14
	2,7	0,12
	2,1	0,09
Кирпич	1,7	0,075
	1,5	0,065

Таблица 46

Коэффициент ослабления γ-излучения

W, МэВ	μ, см$^{-1}$					
	Свинец	Вода	Алюминий	Железо	Графит	Воздух
0,10	65,0	0,171	0,455	2,91	0,342	$2{,}00 \cdot 10^{-4}$
0,15	22,8	0,151	0,371	1,55	0,304	$1{,}76 \cdot 10^{-4}$
0,20	11,1	0,137	0,328	1,15	0,277	$1{,}59 \cdot 10^{-4}$
0,30	4,43	0,119	0,280	0,865	0,241	$1{,}38 \cdot 10^{-4}$
0,40	2,62	0,106	0,249	0,740	0,214	$1{,}23 \cdot 10^{-4}$
0,50	1,80	0,0966	0,227	0,661	0,196	$1{,}12 \cdot 10^{-4}$
0,80	0,999	0,0786	0,184	0,526	0,159	$9{,}13 \cdot 10^{-5}$
1,0	0,798	0,0279	0,165	0,471	0,143	$8{,}21 \cdot 10^{-5}$
1,5	0,591	0,0575	0,135	0,382	0,117	$6{,}68 \cdot 10^{-5}$
2,0	0,518	0,0493	0,116	0,334	0,0999	$5{,}74 \cdot 10^{-5}$
3,0	0,475	0,0396	0,0950	0,284	0,0801	$4{,}63 \cdot 10^{-5}$
4,0	0,472	0,0340	0,0834	0,260	0,0684	$3{,}98 \cdot 10^{-5}$
5,0	0,480	0,0302	0,0761	0,247	0,0603	$3{,}54 \cdot 10^{-5}$
8,0	0,519	0,0242	0,0651	0,233	0,0482	$2{,}87 \cdot 10^{-5}$
10	0,552	0,0220	0,0619	0,233	0,0439	$2{,}62 \cdot 10^{-5}$
15	0,628	0,0193	0,0584	0,241	0,0380	$2{,}31 \cdot 10^{-5}$
20	0,694	0,0180	0,0578	0,250	0,0351	$2{,}19 \cdot 10^{-5}$
30	0,792	0,0170	0,0584	0,269	0,0329	$2{,}08 \cdot 10^{-5}$
40	0,863	0,0166	0,0603	0,285	0,0320	$2{,}06 \cdot 10^{-5}$
50	0,915	0,0166	0,0616	0,299	0,0320	$2{,}08 \cdot 10^{-5}$

Таблица 47

Некоторые основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с
Ускорение свободного падения	$g_н = 9{,}80665$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2)
Газовая постоянная	$R = 8{,}31441$ Дж/(К $\cdot$ моль)
Нормальный молярный объем	$V_н = 22{,}41383$ м^3/моль
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2{,}686754 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная излучения	$\sigma = 5{,}67032 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1{,}25663706144 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Число Фарадея	$F = 9{,}648456 \cdot 10^4$ Кл/моль
Элементарный электрический заряд	$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
	$= 5{,}4858026 \cdot 10^{-4}$ а. е. м.
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
	$= 1{,}007276470$ а. е. м.
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
	$= 1{,}008665012$ а. е. м.
Атомная единица массы	а. е. м. $= 1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблица 48

Буквы греческого алфавита

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ ϰ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю	ϒ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ	тета	Π π	пи	Ω ω	омега

Таблица 49

Тригонометрические функции и углы, выраженные в градусах

α	arc α	sin α	tg α	ctg α	cos α		
0°	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90°
0°10′	0,0029	0,0029	0,0029	343,8	1,0000	1,5679	89°50′
0°20′	0,0085	0,0058	0,0058	171,9	1,0000	1,5650	89°40′
0°30′	0,0087	0,0087	0,0087	114,6	1,0000	1,5621	89°30′
0°40′	0,0116	0,0116	0,0116	85,94	0,9999	1,5592	89°20′
0°50′	0,0145	0,0145	0,0145	68,75	0,9999	1,5562	89°10′
1°	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89°
1°10′	0,0204	0,0204	0,0204	49,10	0,9998	1,5504	88°50′
1°20′	0,0233	0,0233	0,0233	42,96	0,9997	1,5475	88°40′
1°30′	0,0262	0,0262	0,0262	38,19	0,9997	1,5446	88°30′
1°40′	0,0291	0,0291	0,0291	34,37	0,9996	1,5417	88°20′
1°50′	0,0320	0,0320	0,0320	31,24	0,9995	1,5388	88°10′
2°	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88°
2°10′	0,0378	0,0378	0,0378	26,43	0,9993	1,5330	87°50′
2°20′	0,0407	0,0407	0,0407	24,54	0,9992	1,5301	87°40′
2°30′	0,0436	0,0436	0,0437	22,90	0,9990	1,5272	87°30′
2°40′	0,0465	0,0465	0,0466	21,47	0,9989	1,5243	87°20′
2°50′	0,0495	0,0494	0,0495	20,21	0,9988	1,5213	87°10′
3°	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87°
3°10′	0,0553	0,0552	0,0553	18,07	0,9985	1,5155	86°50′
3°20′	0,0582	0,0581	0,0582	17,17	0,9983	1,5126	86°40′
3°30′	0,0611	0,0610	0,0612	16,35	0,9981	1,5097	86°30′
3°40′	0,0640	0,0640	0,0641	15,60	0,9980	1,5068	86°20′
3°50′	0,0669	0,0669	0,0670	14,92	0,9978	1,5039	86°10′
4°	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86°
4°10′	0,0727	0,0727	0,0729	13,73	0,9974	1,4981	85°50′
4°20′	0,0756	0,0756	0,0758	13,20	0,9971	1,4952	85°40′
4°30′	0,0785	0,0785	0,0787	12,71	0,9969	1,4923	85°30′
4°40′	0,0814	0,0814	0,0816	12,25	0,9967	1,4893	85°20′
4°50′	0,0844	0,0843	0,0846	11,83	0,9964	1,4864	85°10′
5°	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85°
6°	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84°
7°	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83°
8°	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82°
9°	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81°
10°	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80°
		cos α	ctg α	tg α	sin α	arc α	α

Табл. 49 (продолжение)

α	arc α	sin α	tg α	ctg α	cos α		
11°	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79°
12°	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78°
13°	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77°
14°	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76°
15°	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75°
16°	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74°
17°	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73°
18°	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	9,9511	1,2566	72°
19°	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71°
20°	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70°
21°	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69°
22°	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68°
23°	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67°
24°	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66°
25°	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65°
26°	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64°
27°	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63°
28°	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62°
29°	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61°
30°	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60°
31°	0,5411	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	1,0297	59°
32°	0,5585	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	1,0123	58°
33°	0,5760	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	0,9948	57°
34°	0,5934	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	0,9774	56°
35°	0,6109	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	0,9599	55°
36°	0,6283	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	0,9425	54°
37°	0,6458	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	0,9250	53°
38°	0,6632	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	0,9076	52°
39°	0,6807	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	0,8901	51°
40°	0,6981	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	0,8727	50°
41°	0,7156	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	0,8552	49°
42°	0,7330	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	0,8378	48°
43°	0,7505	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	0,8203	47°
44°	0,7679	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	0,8029	46°
45°	0,7854	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	0,7854	45°
		cos α	ctg α	tg α	sin α	arc α	α

Таблица 50

Периодическая система элементов

Период	Группа 1	Группа 2	Группа 3	Группа 4	Группа 5
1	1 **H** Водород 1,008				
2	3 **Li** Литий 6,941	4 **Be** Бериллий 9,012	5 **B** Бор 10,81	6 **C** Углерод 12,01	7 **N** Азот 14,01
3	11 **Na** Натрий 22,99	12 **Mg** Магний 24,31	13 **Al** Алюминий 26,98	14 **Si** Кремний 28,09	15 **P** Фосфор 30,97
4	**K** 19 Калий 39,10	20 **Ca** Кальций 40,08	**Sc** 21 Скандий 44,96	**Ti** 22 Титан 47,90	**V** 23 Ванадий 50,94
	Cu 29 Медь 63,55	**Zn** 30 Цинк 65,38	31 **Ga** Галлий 69,72	32 **Ge** Германий 72,59	33 **As** Мышьяк 74,92
5	37 **Rb** Рубидий 85,47	38 **Sr** Стронций 87,62	**Y** 39 Иттрий 88,91	**Zr** 40 Цирконий 91,22	**Nb** 41 Ниобий 92,91
	Ag 47 Серебро 107,9	**Cd** 48 Кадмий 112,4	49 **In** Индий 114,8	50 **Sn** Олово 118,7	51 **Sb** Сурьма 121,8
6	55 **Cs** Цезий 132,9	56 **Ba** Барий 137,3	**La** 57 Лантан 138,9	* **Hf** 72 Гафний 178,5	**Ta** 73 Тантал 180,9
	Au 79 Золото 197,0	**Hg** 80 Ртуть 200,6	81 **Tl** Таллий 204,4	82 **Pb** Свинец 207,2	83 **Bi** Висмут 209,0
7	87 **Fr** Франций [223]	88 **Ra** Радий [226]	**Ac** 89 Актиний [227]	** **Ku** 104 Курчатовий [261]	**Ns** 105 Нильсборий [261]

* **Лантаниды**	58 **Ce** Церий 140,1	59 **Pr** Празеодим 140,9	60 **Nd** Неодим 144,2	61 **Pm** Прометий [145]	62 **Sm** Самарий 150,4	63 **Eu** Европий 152,0	64 **Gd** Гадолиний 157,3
** **Актиниды**	90 **Th** Торий 232,0	91 **Pa** Протактиний [231]	92 **U** Уран 238	93 **Np** Нептуний [237]	94 **Pu** Плутоний [244]	95 **Am** Америций [243]	96 **Cm** Кюрий [247]

Группа 6	Группа 7	Группа 8		
		2 **He** **Гелий** 4,003		
8 **O** Кислород 16,00	9 **F** Фтор 19,00	10 **Ne** Неон 20,18		
16 **S** Сера 32,06	17 **Cl** Хлор 35,45	18 **Ar** Аргон 39,95		
Cr 24 Хром 52,00	**Mn** 25 Марганец 54,94	**Fe** 26 Железо 55,85	**Co** 27 Кобальт 58,93	**Ni** 28 Никель 58,70
34 **Se** Селен 78,96	35 **Br** Бром 79,90	36 **Kr** Криптон 83,80		
Mo 42 Молибден 95,94	**Tc** 43 Технеций [97]	**Ru** 44 Рутений 101,1	**Rh** 45 Родий 102,9	**Pd** 46 Палладий 106,4
52 **Te** Теллур 127,6	53 **I** Иод 126,9	54 **Xe** Ксенон 131,3		
W 74 Вольфрам 183,9	**Re** 75 Рений 186,2	**Os** 76 Осмий 190,2	**Ir** 77 Иридий 192,2	**Pt** 78 Платина 195,1
84 **Po** Полоний [209]	85 **At** Астатин [210]	86 **Rn** Радон [222]		
106 [263]	107 [261]	[Массовое число наиболее стабильного изотопа]		

65 **Tb** Тербий 158,9	66 **Dy** Диспрозий 162,5	67 **Ho** Гольмий 164,9	68 **Er** Эрбий 167,3	69 **Tm** Тулий 168,9	70 **Yb** Иттербий 173,0	71 **Lu** Лютеций 175,0
97 **Bk** Берклий [247]	98 **Cf** Калифорний [251]	99 **Es** Эйнштейний [252]	100 **Fm** Фермий [257]	101 **Md** Менделевий [258]	102 **No** (Нобелий) [259]	103 **Lr** (Лоуренсий) [260]

П ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Приставки к единицам СИ

Приставка	Краткое обозначение	Значение	Приставка	Краткое обозначение	Значение
дека	да	10^{1}	деци	д	10^{-1}
гекто	г	10^{2}	санти	с	10^{-2}
кило	к	10^{3}	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^{6}	микро	мк	10^{-6}
гига	Г	10^{9}	нано	н	10^{-9}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}

Таблица П2

Единицы времени

с	мин	ч	сут	г
1	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$2,78 \cdot 10^{-4}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$3,17 \cdot 10^{-8}$
60	1	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$6,94 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
$3,6 \cdot 10^{3}$	60	1	$4,17 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$
$8,64 \cdot 10^{4}$	$1,44 \cdot 10^{3}$	24	1	$2,74 \cdot 10^{-3}$
$3,15 \cdot 10^{7}$	$5,26 \cdot 10^{5}$	$8,76 \cdot 10^{3}$	365	1

Таблица П3

Единицы давления

Па=Н/м²	ат=кгс/см²	атм	бар	мм рт. ст.	мм вод. ст.= =кгс/м²
1	$1{,}02\cdot10^{-5}$	$9{,}87\cdot10^{-6}$	10^{-5}	$75\cdot10^{-4}$	0,102
$9{,}81\cdot10^{4}$	1	0,968	0,981	736	10^{4}
$1{,}013\cdot10^{5}$	1,033	1	1,013	760	$1{,}033\cdot10^{4}$
10^{5}	1,02	0,987	1	750	$1{,}02\cdot10^{4}$
133	$1{,}36\cdot10^{-3}$	$1{,}32\cdot10^{-3}$	$1{,}33\cdot10^{-3}$	1	13,6
9,81	10^{-4}	$9{,}68\cdot10^{-5}$	$9{,}81\cdot10^{-5}$	$7{,}36\cdot10^{-2}$	1

Таблица П4

Единицы силы

Н	кгс	мкгс	гс	дин
1	0,102	$1{,}02\cdot10^{-4}$	102	10^{5}
9,81	1	10^{-3}	10^{3}	$9{,}81\cdot10^{5}$
$9{,}81\cdot10^{3}$	10^{3}	1	10^{6}	$9{,}81\cdot10^{8}$
$9{,}81\cdot10^{-3}$	10^{-3}	10^{-6}	1	981
10^{-5}	$1{,}02\cdot10^{-6}$	$1{,}02\cdot10^{-9}$	$1{,}02\cdot10^{-3}$	1

Таблица П5

Единицы энергии и работы

Дж	кгс·м	кВт·ч	ккал	эрг	эВ
1	0,102	$2{,}78\cdot10^{-7}$	$2{,}39\cdot10^{-4}$	10^{7}	$6{,}24\cdot10^{18}$
9,81	1	$2{,}72\cdot10^{-6}$	$2{,}34\cdot10^{-3}$	$9{,}81\cdot10^{7}$	$6{,}12\cdot10^{19}$
$3{,}6\cdot10^{6}$	$3{,}67\cdot10^{5}$	1	860	$3{,}6\cdot10^{13}$	$2{,}25\cdot10^{25}$
$4{,}19\cdot10^{3}$	427	$1{,}16\cdot10^{-3}$	1	$4{,}19\cdot10^{10}$	$2{,}61\cdot10^{22}$
10^{-7}	$1{,}02\cdot10^{-8}$	$2{,}78\cdot10^{-14}$	$2{,}39\cdot10^{-11}$	1	$6{,}24\cdot10^{11}$
$1{,}6\cdot10^{-19}$	$1{,}63\cdot10^{-20}$	$4{,}45\cdot10^{-26}$	$3{,}83\cdot10^{-23}$	$1{,}6\cdot10^{-12}$	1

Таблица П6

Едннццы мощности

Вт	кВт	кгс·м/с	л. с.	кал/с	ккал/ч
1	10^{-3}	0,102	$1,36 \cdot 10^{-3}$	0,239	0,86
10^3	1	102	1,36	239	860
9,81	$9,81 \cdot 10^{-3}$	1	$1,33 \cdot 10^{-2}$	2,34	8,43
736	0,736	75	1	176	632
4,19	$4,19 \cdot 10^{-3}$	0,427	$5,69 \cdot 10^{-3}$	1	3,6
1,16	$1,16 \cdot 10^{-3}$	0,119	$1,58 \cdot 10^{-3}$	0,278	1

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Хорст Кухлинг

СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ

Научн. редактор И. Г. Нахимсон
Мл. научн. редакторы Г. Г. Сорокина, Р. Х. Зацепина
Художник В. Е. Самохин
Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор В. П. Сизова
Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 5155

Подписано к печати 11.08.83. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 8,13 бум. л. Усл. печ. л. 27,30. Усл. кр.-отт. 27,30. Уч.-изд. л. 26,83. Изд. № 2/3318. Допечатка тиража 50 000 экз. Зак. № 722. Цена 1 р. 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано с матриц в Ленинградской типографии № головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград Л-52, Измайловский проспект, 29.