Ф. КЛЕЙН

ЛЕКЦИИ ОБ ИКОСАЭДРЕ И РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Перевод с немецкого
А. Л. ГОРОДЕНЦЕВА и А. А. КИРИЛЛОВА

Под редакцией
А. Н. ТЮРИНА

С дополнениями
В. И. АРНОЛЬДА,
Ж.-П. СЕРРА и А. Н. ТЮРИНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1
К48
УДК 51

FELIX KLEIN

VORLESUNGEN ÜBER DAS IKOSAEDER UND DIE AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN VOM FÜNFTEN GRADE

Leipzig, 1884

Клейн Ф. **Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени:** Пер. с нем./Под ред. А. Н. Тюрина.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 336 с.— ISBN 5-02-014197-6.

Посвящена геометрической теории икосаэдра и является уникальной по широте охватываемого материала и мастерству его изложения. Показано, как в геометрии икосаэдра переплелись идеи и конструкции, лежащие в основе целого ряда красивейших теорий, развившихся впоследствии в самостоятельные ветви математики. Изложена основанная на геометрических свойствах икосаэдра теория уравнений пятой степени. На русском языке выходит впервые.

Для студентов, преподавателей, научных работников и любителей математики.

Ил. 15. Библиогр. 26 назв.

Научное издание

КЛЕЙН Феликс

ЛЕКЦИИ ОБ ИКОСАЭДРЕ И РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *В. В. Донченко*. Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*. Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12924

Сдано в набор 05.09.88. Подписано к печати 22.12.89. Формат 84×108/32. Бумага кн.-журнальная. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,85. Усл. кр.-отт. 17,75. Уч.-изд. л. 22,24. Тираж 12 400 экз. Заказ № 337. Цена 1 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

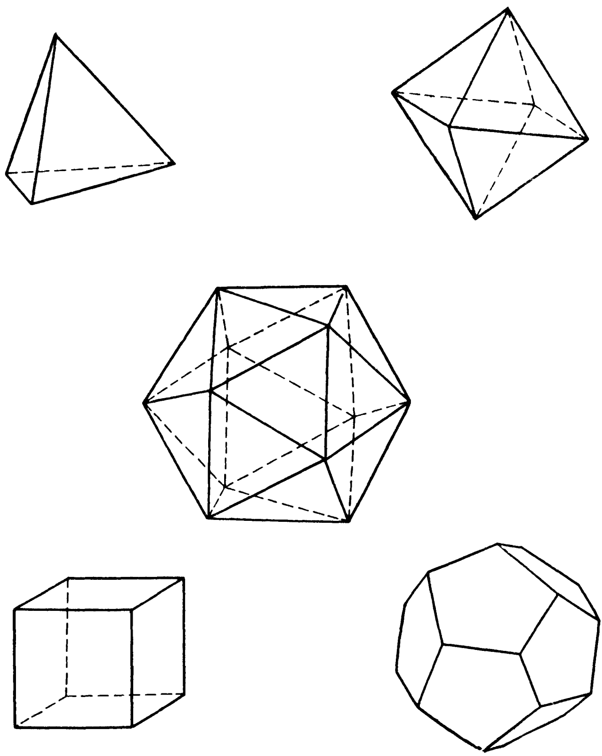
4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

К $\frac{1602040000-150}{053(02)-89}$ 19-89

ISBN 5-02-014197-6

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА (ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ)

Среди пяти платоновых тел икосаэдр занимает особое «живое» место: в природе кристаллов в форме икосаэдра нет, но есть живые организмы (радиолярии).



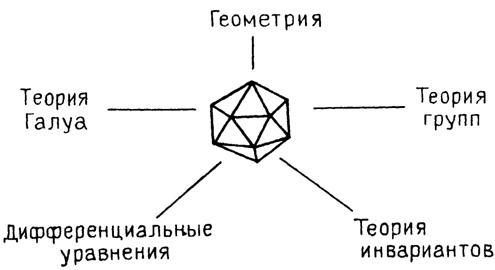
Самая древняя рукотворная модель икосаэдра — игральная кость эпохи Птоломеев, найденная в Египте,— хранится ныне в Британском музее. Новейшая модель —

сплав алюминия и марганца, имеющий квазикристаллическую структуру с осью пятого порядка,— получена совсем недавно, четыре года назад (см. [9] и [10] списка литературы Добавления А).

Нематериальной области принадлежит монография Ф. Клейна «Икосаэдр и решение уравнений пятой степени», перевод которой мы предлагаем читателю. В первой части монографии определено и объяснено место икосаэдра в математике.

Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов,— своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. (Читатель-профессионал с умилением вспомнит свою математическую юность, как легко и весело бежать по своему листу, не подозревая о существовании других. Вспомнит он и о том, как трудно переживается в зрелости потеря общематематического смысла.)

Ф. Клейн трактует икосаэдр как геометрический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий.



(*)

Пять глав первой части монографии — это прохождение по часовой стрелке пяти лучей этой звезды.

Таким образом, математический смысл первой части монографии Ф. Клейна прозрачен и прост. Основную мысль подтекста: «каждый уникальный геометрический (а по Клейну = общематематический) объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра» — мы иллюстрируем в двух Дополнениях А и Б явлением икосаэдра в современных геометрических конструкциях теории особенностей и теории векторных расслоений.

Вторая тема монографии (занимающая половину общего объема) — «решение уравнения пятой степени» — требует обстоятельного математического комментария.

Обратимся к исторической схеме теории Галуа. Естественно считать, что эта теория возникла в тот момент (1770 г.), когда Лагранж предложил классифицировать резольвенты уравнения с помощью групп перестановок корней. В последующие пятьдесят лет эти идеи привели Руффини и Абеля к отрицанию возможности решения общего уравнения степени 5 в радикалах. Наконец, Галуа, имя которого носит теория, прочно связал свойства уравнений со свойствами конечных групп. Еще через пятьдесят лет перед Ф. Клейном встала задача сделать теорию Галуа эффективной, т. е. не только что-то запрещающей (например, решения в радикалах), но позволяющей уравнения решать. Двигаясь «от групп к уравнению», Клейн разбил задачу на конечный набор типовых «проблем форм» и чисто алгебро-геометрическую проблему описания геометрии «многообразий Вандермонда» (терминология В. И. Арнольда), задаваемых в проективном пространстве $\mathbf{P}^{n-1}$ с однородными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ уравнениями

$$\sum x_i = \sum x_i^2 = \ldots = \sum x_i^s = 0.$$

Вторую часть монографии Ф. Клейна можно рассматривать как блестящее приложение этой программы к яркому частному случаю (уравнениям пятой степени). Этим объясняется подробность и многоплановость изложения, а также упорство автора, добивающегося понимания (см. ч. II, гл. III, начало § 2 «...я не пожалею места для их вывода, чтобы подчеркнуть геометрические причины, приводящие к нужным формулам безо всяких вычислений...», начало § 6 «...чтобы правильно скомбинировать уравнения требуется ...трюкачество, что не согласуется с нашим стилем изложения», ..., «мы всегда стремились заранее представить себе в общих чертах результаты вычислений раньше, чем они будут проделаны» и т. д.).

Ф. Клейн был вправе ожидать, что его программа будет приложима и к уравнениям шестой (и произвольной) степени. Однако прямое приложение осложнили два обстоятельства: теоретико-числовые «тонкости» и сложность многомерной бирациональной геометрии.

Теоретико-числовые «тонкости» обнаружил и преодолел Рихард Брауэр в статье: Brauer R. Über die Kleinische Theorie der algebraischen Gleichungen // Math. Ann.— 1934.— Bd 110, № 4.— S. 473—500. Появившаяся здесь концепция «группы Брауэра» прочно вошла в современную алгебраическую геометрию. Она кратко, но ясно отражена в ответах Ж.-П. Серра на вопросы профессора Грея (Университет Новый Южный Уэльс, Австралия) о современных аспектах монографии Клейна. Перевод письма Серра профессору Грею мы приводим ниже. Как математический текст, оно воспроизведено в трудах семинара по теории чисел 1979—1980 гг. в Коллеж де Франс. Мы будем цитировать его в дополнениях как «Письмо Серра».

Качественный скачок сложности геометрических объектов при переходе от уравнений пятой степени к шестой прекрасно иллюстрируют следующие факты: трехмерная «диагональная» кубика не рациональна (но унирациональна), «поверхность Бринга», т. е. пересечение главной квадрики с «диагональной» кубикой,— поверхность типа К3 и т. д. Алгебраические геометры только недавно научились работать с такими объектами.

Это утверждает самое важное свойство монографии Ф. Клейна — ее математическую актуальность. В Добавлении В мы приведем результаты и перспективы геометрических аспектов программы Клейна для уравнений шестой степени.

Наконец, перед тем как читатель обратится к тексту монографии, необходимо, чтобы он четко осознал те трудности, которые неизбежно возникнут при наложении знакомого ему стиля «современной математики» на стиль Ф. Клейна. Следующие замечания, возможно, помогут читателю эти трудности преодолеть:

1. Терминология Клейна по современным меркам неуклюжа и несистематична. В тексте вообще нет привычных рубрик «Определение», «Теорема» или «Доказательство». Одно и то же математическое утверждение может допускать различные формулировки и иметь несколько доказательств. Совсем отсутствуют доказательства от противного. Однако преодоление этого «хаоса» чрезвычайно полезно и приучает схватывать суть дела.

2. Термин «теория» для Ф. Клейна означает «рассмотрение под определенным углом», «новый ракурс» математического объекта. В современном языке «теория» — это скорее утверждение границ математической области, разделение не только методов, но и объектов исследования.

3. Объясняя геометрические конструкции, Ф. Клейн рекомендует (см., например, § 4 главы I ч. I): «Я советую нарисовать..., а лучше сделать модель...». Перед тем как собрать лекции в монографию, Ф. Клейн читал их эрлангенскому научному обществу, т. е. его совет обращен к зрелым, солидным исследователям: математикам, физикам, химикам, инженерам, медикам. В наше время трудно представить себе научного работника, аспиранта или даже студента, клеющего икосаэдр из картона, отливающего его из гипса или полирующего его деревянные грани. Наша надежда — школьники! Остальным придется обратиться к книге-альбому: Веннинджер М. Модели многогранников.— М.: Мир, 1974.

4. Наконец, основное направление мысли Ф. Клейна можно определить как процесс «деспециализации», если под «специализацией» понимать современный алгеброгеометрический термин. Для примера сравним клейновское (см. § 2 гл. IV ч. I) и современное изложение теории Галуа. Современное изложение (см. «Современная алгебра» ван дер Вардена и т. п.) основано на идее

Дедекинда о том, что группа Галуа сопоставляется не уравнению, а полю — алгебраическому расширению поля коэффициентов, задаваемому сравнениями по модулю уравнения. Структура поля отражает структуру уравнения, и после перехода к полю про уравнение можно забыть. Этот подход дает точный учет основных рациональностей, полезен для теории чисел, но почти исключает возможность использования результатов теории функций и дифференциальных уравнений (см. (*)). Нетрудно понять, что клейновская «проблема форм» — деспециализация, и то же направление мысли угадывается в теории нормальных форм Пуанкаре, версальных семейств и во всех видах «модулей».

В заключение отметим, что идея издания этого шедевра математической литературы на русском языке принадлежит Александру Александровичу Кириллову. Без его энтузиазма и настойчивости дело не сдвинулось бы с места («начало — половина дела»). Особой благодарности заслуживает основной переводчик Алексей Львович Городенцев. Его чуткость и бережное отношение к идеям Клейна дают надежду донести до широкого читателя многогранность и единство математического содержания книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрия икосаэдра заняла в последние несколько лет такое важное место почти во всех областях современного анализа, что мне показалось своевременным опубликовать ее систематическое изложение. В случае, если эта попытка окажется удачной, я предполагаю продолжить в том же духе и изложить теорию модулярных эллиптических функций, а также недавние общие исследования об однозначных функциях, инвариантных относительно линейных преобразований. В результате мог бы получиться многотомный трактат, в котором я надеюсь так представить последние достижения науки, чтобы наиболее перспективные области современной математики сделались доступными для многих.

Что касается границ материала, охватываемого настоящей публикацией, то, видимо, уместно отослать читателя к самому изложению. Я хотел бы здесь только лишь обратить внимание на вторую часть, посвященную решению уравнений пятой степени. Прошло уже 25 лет с тех пор, как Бриоски, Эрмит и Кронекер создали современную теорию уравнений пятой степени. Но, несмотря на то, что эти исследования иногда и цитируются, математический мир в целом не осознал еще их подлинного значения. Взяв за основу своего изложения геометрическую теорию икосаэдра и показав, что именно она играет ключевую роль в процессе решения, я предлагаю такой подход к этой проблеме, яснее и проще которого вряд ли можно ожидать.

Особая трудность в реализации моего плана состояла в том, что в описании геометрии икосаэдра участвует много различных математических методов. Поэтому я счел целесообразным не предполагать заранее какой бы то ни было осведомленности о них со стороны читателя, а давать везде, где это необходимо, разъяснения и ссылки, способные служить предварительными ориентирами в рассматриваемой в данный момент области. Чего, однако, я жду от читателя, так это определенной зрелости математического суждения, которое позволило бы ему за краткими и сжатыми утверждениями увидеть общий принцип, воплощенный в конкретном примере. Это — тот же метод, который я применяю и в моих лекциях на более сложные темы. Таким образом я вношу в изложение принципы лекционной практики. Я хотел бы, чтобы в таком же духе интерпретировалось и название, которое я дал этим заметкам.

Я не могу закончить это краткое введение, не выразив особую благодарность моим уважаемым друзьям профессору Ли в Христиании и профессору Гордану в Эрлангене за многочисленные полезные указания и поддержку. Я обязан профессору Ли еще с периода 1869—80 г., когда мы вместе проводили последний период нашей студенческой жизни в Берлине и в Париже как близкие товарищи. В то время мы сообща задумали программу изучения геометрических или аналитических форм, инвариантных относительно действия некоторой группы. Эта цель оказала решающее влияние на наши последующие исследования, хотя они и могли показаться лежащими далеко друг от друга. В то время как я в первую очередь обратился к дискретным группам преобразований, что привело к исследованию правильных многогранников и их связи с геометрией уравнений, профессор Ли занялся более сложной теорией непрерывных групп преобразований и геометрией дифференциальных уравнений.

Мой первый контакт с профессором Горданом был осенью 1876 года. Я в это время уже начал свое исследование икосаэдра (не зная в то время о более ранних работах профессора Шварца, на которые мы ниже будем часто иметь случай сослаться), однако я считаю этот период работы сугубо предварительным. Если из него в конечном счете выросла далеко идущая теория, то это в первую очередь заслуга профессора Гордана. Я не имею здесь в виду его глубокие и тонкие результаты, о которых подробно речь пойдет ниже. Здесь я хочу подчеркнуть то, что нельзя выразить цитатами или ссылками, а именно то, что профессор Гордан поддержал меня, когда я готов был сдаться, и что он с величайшим бескорыстием помог мне преодолеть многие трудности, с которыми я никогда бы не справился один.

Лейпциг, 24 мая 1884 г. *Ф. Клейн*

ЧАСТЬ I
СОБСТВЕННО ИКОСАЭДР

ГЛАВА I
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ТЕОРИЯ ГРУПП

§ 1. Постановка вопроса

Говоря ниже об икосаэдре или вообще о правильных многогранниках, мы будем иметь в виду не пространственные конфигурации, а, как правило, будем ограничиваться поверхностью сферы, проходящей через вершины нашего многогранника, на которую мы перенесем ребра и грани многогранника при помощи проекции из центра этой сферы. Таким образом, нашим ближайшим объектом исследования будут разбиения сферы, а термины и, частично, конструкции пространственной геометрии будут употребляться только для удобства изложения.

К правильным многогранникам, известным еще древним, в наше время обычно добавляют многогранники Кеплера (грани которых частично проникают друг через друга). Если мы хотим перенести их описанным выше образом с помощью центрального проектирования на поверхность сферы, то получится многолистное накрытие сферы. В действительности нетрудно видеть, что существует бесконечное число таких накрытий правильного типа *). Однако в дальнейшем мы не рассматриваем эти сравнительно сложные объекты. Мы ограничимся теми простыми фигурами, которые в описанном выше смысле соответствуют правильным *тетраэдру*, *октаэдру*, *кубу*, *икосаэдру и додекаэдру*. К ним мы добавим еще шестую конфигурацию, соответствующую *правильному плоскому n-угольнику*. На самом деле его также можно рассматривать как правильный многогранник — *диэдр*, две грани

*) См. по этому поводу недавнюю работу: Hess. Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder.— Leipzig, 1883.

которого слиты вместе. В отличие от более привычных нам тел этот многогранник имеет нулевой объем. Если перенести диэдр с помощью центральной проекции на поверхность описанной сферы, мы получим n равноотстоящих точек на большом круге (который можно назвать экватором), соответствующих вершинам диэдра, и n дуг, на которые экватор делится этими точками. Две полусферы, ограниченные экватором, соответствуют двум граням диэдра, которые тем самым становятся различными.

Однако, и это следует подчеркнуть особо, объектом нашего исследования будут в дальнейшем не столько перечисленные фигуры, сколько те *вращения* и *отражения* или, короче, *элементарные геометрические операции*, с помощью которых наши фигуры совмещаются с собой. Фигуры служат нам лишь *основой*, *каркасом*, *с помощью которого мы можем наблюдать данную совокупность вращений или других преобразований*. Поэтому конкретный правильный многогранник будет для нас неотличим от соответствующей *полярной фигуры*, которая самосовмещается при тех же преобразованиях. В этом смысле *октаэдр* не отличим от *куба*, вершины которого соответствуют центрам граней октаэдра, *икосаэдр* — от аналогичного *додекаэдра*. Исходя из того же принципа мы будем наряду с *тетраэдром* рассматривать полярный ему *контртетраэдр* (вершины которого диаметрально противоположны вершинам исходного тетраэдра), наконец, в случае *диэдра* отметим, что два полюса на сфере соответствуют *двум граням диэдра* *). Таким образом, в центре нашего внимания будут четыре фигуры, которые мы будем далее коротко называть *диэдром*, *тетраэдром*, *октаэдром* и *икосаэдром*. То, что в названии этой части присутствует лишь последняя и что именно икосаэдру будет принадлежать основное место в нашем изложении, объясняется тем, что икосаэдр во всех отношениях гораздо более интересен.

Едва лишь мы углубляемся в изучение вращений и других преобразований, сохраняющих названные выше конфигурации, мы неизбежно приходим к богатейшей и очень важной теории, которая была заложена в пионерских работах Галуа **) и которую мы будем именовать

*) Конфигурация диэдра неотличима от фигуры, называемой обычной *двойной пирамидой*.

**) Эти работы 1829 г. опубликованы под названием Oeuvres de Galois в журнале Лиувилля, сер. 1, т. 11, в 1846 г.

теорией групп *). Возникнув из теории уравнений и из рассмотрения перестановок произвольных элементов, теория групп, как уже давно замечено, охватывает все вопросы, в которых речь заходит о замкнутой совокупности операций любой природы. Говорят, что такая совокупность операций образует *группу*, если любые две из этих операций в композиции дают операцию снова из этой же совокупности.

В этом смысле имеет место предположение:

вращения, совмещающие один из правильных многогранников с самим собой, образуют группу.

В самом деле, ясно, что любые два вращения указанного типа, примененные последовательно, снова дают вращение того же типа. Не так обстоит дело с отражениями, переводящими многогранник в себя. *Сами по себе они не образуют группы.* Действительно, два отражения, примененные последовательно, дают не отражение, а вращение. Однако мы снова получим группу, если возьмем отражения вместе с только что упомянутыми вращениями и другими операциями, получаемыми из них суперпозицией. В дальнейшем мы будем лишь эпизодически рассматривать такие группы и называть их *расширенными группами.*

§ 2. Предварительные сведения из теории групп

Прежде чем мы обратимся к специальным группам, встречающимся в связи с правильными многогранниками, полезно ввести некоторые общие понятия, которые были выработаны в других областях теории групп. Я советую читателю, который еще не знаком с этой теорией, кроме краткого изложения, приводимого здесь (которое ниже будет дополнено во многих отношениях), познакомиться с каким-либо более подробным курсом теории групп, опубликованным в последнее время **).

---

*) Хотя в нашем тексте все рассуждения и будут носить чисто теоретико-групповой характер, геометрам, по-видимому, будут интересны замечательные пространственные соотношения, возникающие в конкретных случаях на основании теоретико-групповых свойств и управляемые ими. В этой связи я хочу обратить внимание на работы Рейе (Reye) и Стефаноса (Stephanos), посвященные теории куба, см. Acta Mathematica.— T. 1.— P. 93, 97; Math. Ann.— 1883.— Bd 22.— S. 348.

**) Ср. Serret J. A. Traité d'algèbre superieuve.— 4ed.— Paris, 1879; Jordan C. Traité des substitutions et des èquations algébraiques.— Paris, 1870; Netto E. Substitutionentheorie und

В дальнейшем мы рассматриваем, за некоторым исключением, только конечные группы. Такая группа характеризуется, прежде всего, числом N входящих в нее операций, которое мы будем называть порядком группы. В число этих операций всегда входит тождественная операция, которая обозначается 1.

Далее, мы *определим период данной операции* как число повторений этой операции, нужное, чтобы вернуться к единице. Кроме того, мы вводим понятие *подгруппы* как такой совокупности операций из данной группы, которая сама образует группу. Порядок подгруппы всегда является делителем порядка N основной группы. Простейшей подгруппой (и вообще, можно сказать, простейшей группой) является такая, которая возникает с помощью повторения одной и той же операции. Порядок этой подгруппы равен периоду операции, ее порождающей. Такие группы называются *циклическими*.

Однако простого перечисления этих понятий нам недостаточно; хотелось бы осознать взаимодействие различных операций, подгрупп и т. д. в основной группе. В связи с этим рассмотрим следующие определения. Прежде всего условимся, что произведением двух операций S и T мы будем называть операцию ST, которая состоит в применении сначала S, а потом T. Вообще говоря,

$$ST \neq TS.$$

Если же в специальном случае $ST = TS$, то операции S и T называют перестановочными. Далее,

$$STS^{-1} = T'$$

(где S^{-1} означает операцию, которая в произведении с S дает 1). Если S и T не перестановочны, то T' отлична от T. Мы скажем, что T' получается из T *внутренним автоморфизмом* и что T и T' сопряжены в основной группе. Фактически T' обладает теми же основными свойствами, что и T, например имеет тот же период*).

Заменим теперь T совокупностью операций $T_1, T_2, \ldots$ $\ldots, T_k$, составляющих подгруппу. Тогда, применяя внутренний автоморфизм к каждой T_i, мы получим $T'_i = ST_iS^{-1}$, причем, если $T_iT_k = T_l$, то $T'_iT'_k = T'_l$ **).

---

ihre Anwendung auf die Algebra.— Leipzig, 1882. См. также статьи Дика (Dyck) в тт. 20 и 22 Math. Ann. (1882, 1883) под названием Gruppentheoretische Studien.

*) Если $T' = STS^{-1}$, то $(T')^2 = STS^{-1} \cdot STS^{-1} = ST^2S^{-1}$; вообще $(T')^r = ST^rS^{-1}$. Поэтому если $T^n = 1$, то $(T')^n = 1$, и обратно.

**) Поскольку опять $ST_iS^{-1} \cdot ST_kS^{-1} = ST_iT_kS^{-1}$.

Мы назовем подгруппы T и T' *сопряженными* в основной группе.

Рассмотрим теперь случай, когда две сопряженные подгруппы на самом деле совпадают. Если это верно для любого внутреннего автоморфизма (т. е. все подгруппы, сопряженные с нашей, совпадают с ней), то такую подгруппу мы называем *нормальной*. Каждая группа содержит две нормальные подгруппы: во-первых, саму группу и, во-вторых, простейшую подгруппу, состоящую из одной тождественной операции. Если других нормальных подгрупп нет, группа называется *простой*; в противном случае — *составной*.

В случае *составной* группы нас интересует ее *разложение*. Такое разложение можно получать, рассматривая наибольшую нормальную подгруппу, содержащуюся строго внутри данной группы*), затем наибольшую нормальную подгруппу внутри полученной подгруппы и т. д., пока не придем к единице. Вряд ли необходимо говорить, что этот процесс разложения неоднозначен и может варьироваться в зависимости от обстоятельств.

Помимо этих простейших определений, которые мы ввели, основываясь на конкретных примерах групп, я должен рассмотреть отношение между двумя группами, называемое *гомоморфизмом*. Две группы называются кратноморфными, если между ними можно установить соответствие так, что $S_i S_k$ соответствует $S'_k S'_k$, коль скоро S_i соответствует S'_i, а S_k соответствует S'_k.

Если это соответствие является взаимно однозначным, то мы будем называть такой гомоморфизм *изоморфизмом*. В этом случае обе группы с абстрактной точки зрения идентичны и разница между ними заключается лишь в *обозначении* входящих в них операций. Подгруппы одной из групп в этом случае прямо дают подгруппы другой и т. д. и т. п.

Но сопоставление *может и не быть взаимно однозначным*, и тогда мы называем изоморфизм *кратным*. В этом случае опять каждой подгруппе S-группы соответствует подгруппа S'-группы и обратно, однако эти подгруппы не обязательно содержат одинаковое число элементов. В то же время сопряженным подгруппам одной группы отвечают такие же подгруппы другой. Поэтому нормальные подгруппы одной группы соответству-

*) То есть не входящую ни в какую бо́льшую нормальную подгруппу, отличную от всей группы.

ют нормальным подгруппам другой. В частности, единичной подгруппе S-группы соответствует нормальная подгруппа S'-группы и обратно *).

Ниже мы в основном будем иметь дело с примерами кратных изоморфизмов, при которых каждому S соответствует один S', но каждому S' — два элемента S (так что число S-элементов вдвое больше числа S'-элементов). Такой гомоморфизм мы назовем *полуизоморфизмом.*

§ 3. Циклические группы вращений

Обращаясь теперь к более подробному рассмотрению групп, образованных вращениями, переводящими в себя одну из конфигураций, упомянутых в § 1, мы должны начать с простейших групп вращений — тех, которые *состоят из периодических повторений одного поворота.* Очевидно, для такой группы две точки нашей сферы остаются неподвижными, мы назовем их полюсами; в целом группа, если она имеет n элементов, состоит из n поворотов на углы, равные

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

вокруг оси, соединяющей два полюса.

Ясно, что любые два вращения из этой группы перестановочны между собой. Поэтому каждое вращение и каждая подгруппа, из них составленная, при сопряжении переходят в себя. Существование подгрупп зависит от характера числа n. Если n — простое число, существование собственной подгруппы априори исключается (поскольку ее порядок должен быть делителем n); если n — составное число, то каждому делителю n соответствует ровно одна подгруппа, число элементов в которой равно этому делителю **). Мы получаем разложение нашей группы, если сначала выберем подгруппу, соответствующую наибольшему делителю n, а затем с полученной подгруппой будем поступать таким же образом.

На этом примере можно освоиться с идеей изоморфизма: заметим, что наша группа изоморфна совокупности циклических перестановок n элементов, взятых в

---

*) См. помимо уже упомянутых публикаций, в частности: Capelli. Sopra l'isomorfismo... // Giornale di Mathematiche.— 1878.— Bd 16.

**) Я оставляю это и подобные этому утверждения без доказательства, так как они либо самоочевидны, либо становятся понятны без объяснений после небольшого раздумья.

определенном порядке:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

В самом деле, мы можем установить соответствие между перестановками и вращениями геометрическим способом. Достаточно построить n точек

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1},$$

получаемых из произвольной точки a_0 нашими вращениями, и заметить, что они циклически переставляются между собой при этих вращениях.

Нет необходимости тратить больше времени на эти очевидные вещи. Мы говорили о них, потому что циклические группы являются, так сказать, элементами, из которых строятся все другие группы.

§ 4. Группа вращений диэдра

Перейдем теперь к конфигурации диэдра. Я советую читателю — здесь и в изложении последующих разделов — делать соответствующие рисунки или мысленно представлять себе на модели, которую легко построить, все рассматриваемые конструкции. Факты, о которых пойдет речь, очень просты, и в них легко разобраться при помощи простейших подручных средств, но это обязательно надо сделать, поскольку в противном случае неизбежно возникнут осложнения. Я слишком перегрузил бы это сочинение подробностями, если бы не рассчитывал на активное сотрудничество читателя.

Мы уже назвали экватором большой круг, на котором лежат n вершин диэдра, и отметили два соответствующих полюса. Ясно, что диэдр переходит в себя под действием циклической группы из n вращений, для которой оба полюса неподвижны. Однако группа вращений диэдра этим не исчерпывается. Отметим на экваторе точку посредине между двумя последовательными вершинами диэдра; назовем ее *серединой ребра диэдра*. Диаметр, проходящий через вершину диэдра или через середину его ребра, является осью симметрии второго порядка для диэдра. Всего имеется n таких осей, если n нечетно, каждая из них соединяет вершину с серединой ребра; если n четно, то оси разбиваются на две категории соответственно тому, проходят ли они через вершины или через середины ребра диэдра. Во всех случаях диэдр переходит в себя при поворотах на 180° вокруг каждой из n осей.

Таким образом, помимо циклической группы из n вращений имеется еще n поворотов периода 2.

Группа вращений диэдра не содержит других вращений, кроме перечисленных выше. В самом деле, покажем (способом, который будет употребляться и дальше), что число элементов в группе вращений диэдра равно $2n$. Заметим сначала, что каждая вершина диэдра может быть переведена в любую другую посредством диэдрального вращения, что дает n возможностей, а затем, сохраняя одну вершину неподвижной, мы можем совместить диэдр с собой двумя способами: тождественным преобразованием и поворотом вокруг оси второго порядка, проходящей через рассматриваемую вершину. Ясно, что общее число диэдральных вращений должно быть равно произведению этих двух множителей, т. е. равно $2n$, что и требовалось доказать.

Было бы утомительным для читателя перечислять все подгруппы диэдральной группы. Вместо этого мы покажем, что исходная циклическая группа из n вращений является нормальной подгруппой полной группы диэдра.

Вернемся к определению из § 2. Обозначим символами T, T' вращения вокруг главной оси диэдра, а символом S — любое прочее вращение из группы диэдра. Нам нужно показать, что $STS^{-1} = T'$. Но если S само является вращением вокруг главной оси, то это соотношение очевидно, а если S — поворот около оси второго порядка, то его действие на главную ось состоит в переворачивании ее и компенсируется действием S^{-1}, так что наше соотношение опять выполняется.

Данное доказательство приводит к общему принципу, который самое время сформулировать здесь, тем более что в дальнейшем он будет постоянно применяться. Условимся называть *сопряженными* такие геометрические фигуры в нашей конфигурации, которые получаются друг из друга преобразованиями из нашей группы. Построим все фигуры, сопряженные данной. Пусть T_i — те операции из нашей группы, которые оставляют на месте каждую из построенных фигур. *Тогда T_i образуют нормальную подгруппу рассматриваемой группы.* В самом деле, операция ST_iS^{-1} принадлежит множеству T_i, поскольку действия S^{-1} и S на построенных фигурах компенсируют друг друга. Применение этого принципа к нашему случаю ясно. Достаточно в качестве основных фигур рассмотреть полюсы диэдра. Причем помимо этого общего принципа здесь вступает в игру одно частное обстоятельство: те вращения, которые сохраняют один полюс, сохраняют также и второй.

Аналогичными рассуждениями мы определяем классы сопряженных элементов в диэдральной группе. А именно, в подгруппе главных вращений сопряжены между собой повороты на углы $2k\pi/n$ и $-2k\pi/n$, а среди поворотов на 180° вокруг осей второго порядка для нечетного n все сопряжены друг другу, а для четного n есть два класса.

Первое утверждение соответствует тому, что два сопряженных поворота выглядят одинаково с точки зрения наблюдателей, помещенных в двух полюсах*), а второе — тому, что оси второго порядка либо все сопряжены друг другу, либо для четного n распадаются на два класса сопряженных объектов. В обоих случаях мы применяем общий принцип: *две операции сопряжены, если они действуют одинаковым образом на две сопряженные фигуры.* Я не буду останавливаться на доказательстве этого принципа.

Что касается разложения диэдральной группы, то оно уже содержалось неявно в сказанном выше. В качестве наиболее естественной нормальной подгруппы мы выбираем подгруппу из n вращений вокруг главной оси. Тем самым задача сводится к уже решенной в предыдущем параграфе. Определим теперь, какой группе перестановок изоморфна диэдральная группа. Для этого обозначим n вершин диэдра в естественном порядке символами

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}.$$

Тогда n вращениям вокруг главной оси будут соответствовать циклические перестановки a_ν, переводящие a_ν в $a_{\nu+k}$ (индексы рассматриваются по модулю n). Далее, поворот вокруг оси второго порядка, проходящей через a_0, переводит a_ν в $a_{n-\nu}$. Операции этих двух типов порождают *метациклическую группу***), состоящую из преобразований индексов вида

$$\nu' = \pm\nu + k \pmod n,$$

которая, таким образом, изоморфна диэдральной группе, т. е. совпадает с ней в смысле абстрактных групп.

---

*) Поскольку вращение на угол $2k\pi/n$ вокруг одного полюса совпадает с вращением на угол $-2k\pi/n$ вокруг второго.

**) Так согласно Кронекеру, называется любая группа перестановок $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ вида $\nu' \equiv c n + k \pmod n$.

§ 5. Квадратичная группа

Изложение предыдущих параграфов, как и определение диэдра в § 1, предполагало, что $n > 2$. Если $n = 2$, фигура диэдра теряет смысл как многогранник, поскольку две вершины могут быть соединены бесчисленным множеством больших окружностей. В соответствии с этим мы получаем в качестве группы вращений так называемую *непрерывную группу* *). Хотя теория таких групп весьма интересна и важна во многих отношениях, в наших исследованиях она не будет играть роли. Поэтому в случае $n = 2$ сделаем фигуру диэдра определенной, выбрав из бесчисленного множества больших окружностей, соединяющих две вершины, один экватор, и зафиксируем соответствующие два полюса. Тогда главная ось вместе с двумя осями второго порядка образует ортогональную триаду, и мы получаем в точном соответствии со сказанным в предыдущем параграфе группу из $2n = 4$ вращений. Если ввести обычным образом координаты с помощью этих трех осей, то точки x, y, z переводятся диэдральными вращениями в точки

$$\begin{array}{ccc} x, & -y, & -z; \\ -x, & y, & -z; \\ -x, & -y, & z. \end{array}$$

Ясно, что наша группа состоит, помимо единицы, исключительно из элементов второго порядка и только случайное обстоятельство заставляет нас выделять главную ось среди трех равноправных осей. Поэтому, чтобы не связывать эту группу с конфигурацией диэдра, я буду называть ее квадратичной группой **). Эта группа, как легко проверить, *коммутативна* ***). Поэтому каждый

---

*) Ср. обширные исследования Ли в Norwegischen Archiv (начиная с 1873 г.) и в Math. Ann.— Bd 16. Позднее Пуанкаре в своих исследованиях (которые мы будем часто цитировать) об однозначных функциях, инвариантных относительно линейных преобразований, использовал термин «непрерывная группа» в другом контексте. Он называет так бесконечную группу дискретных операций, среди которых встречаются как угодно малые. Мне, однако, не кажется оправданным это изменение терминологии.

**) Теперь эту группу называют «группа Клейна».— *Примеч. пер.*

***) Легко показать, что два вращения перестановочны, если либо (как в случае квадратичной группы) их оси перпендикулярны, а порядки равны 2, либо (как в случае циклической группы) их оси совпадают.

элемент ее сопряжен только с самим собой *). Разложение квадратичной группы получается, если выбрать любую подгруппу из двух вращений, сохраняющих одну из трех осей.

§ 6. Группа вращений тетраэдра

Мы уже отмечали выше, что при любом вращении, переводящем правильный тетраэдр в себя, двойственный к нему тетраэдр также переходит в себя. Восемь вершин этих двух тетраэдров образуют *куб*. Если же отметить на сфере 6 точек, соответствующих серединам ребер тетраэдра, то получим 6 вершин правильного *октаэдра*. Мы видим, таким образом, тесную связь между группами вращений тетраэдра и октаэдра, которую и намереваемся изучить.

Дополним нашу фигуру, добавив ортогональную триаду диагоналей октаэдра и 4 главных диагонали куба (проходящие через центр сферы).

Применяя теперь принцип, изложенный в § 4, мы сразу видим, что *группа тетраэдра состоит из* 12 *вращений*. В самом деле, четыре вершины тетраэдра сопряжены друг другу и каждая из них сохраняется тремя вращениями — тождественным и двумя поворотами периода 3 вокруг диагоналей куба, проходящих через вершины тетраэдра. Мы видим также, что 8 из 12 вращений имеют период 3. Из них (опять-таки в силу принципа, изложенного в § 4) две четверки сопряжены между собой, а именно те, которые представляют собой поворот в *одном направлении* на угол $2\pi/3$ (или $4\pi/3$) около вершины тетраэдра, которую они оставляют неподвижной. К этим 8 вращениям и единице нужно добавить еще 3 сопряженных друг другу вращения периода 2. Эти три вращения вокруг перпендикулярных диагоналей октаэдра сопряжены, так как переводятся друг в друга любым вращением периода 3. Вместе с единицей эти три вращения образуют квадратичную группу.

Мы заключаем отсюда, что квадратичная группа, полученная таким образом, нормальна в группе тетраэдра. Это следует из того, что 3 сопряженных друг другу диагонали октаэдра переходят в себя при всех вращениях из квадратичной группы и только при них.

*) Это не противоречит тому, что в более обширной группе, которую мы изучим ниже, все три элемента второго порядка будут сопряжены между собой.

Разложение группы тетраэдра мы можем получить, рассматривая квадратичную подгруппу и поступая далее, как сказано в предыдущем параграфе. Я опускаю доказательство того, что других разложений не существует и что помимо квадратичной подгруппы в группе тетраэдра нет подгрупп, отличных от циклических, порождаемых повторением одного и того же вращения *).

Посмотрим теперь, каким образом четыре диагонали куба (которые мы кратко обозначим 1, 2, 3, 4) преобразуются тетраэдральными вращениями. Прежде всего, очевидно, что ни одно такое вращение (кроме единичного) не оставляет на месте все 4 диагонали куба. Таким образом, разным вращениям соответствуют разные перестановки четырех диагоналей куба. Тем самым, группа тетраэдральных вращений просто изоморфна группе соответствующих перестановок диагоналей куба **).

Мы видим, в частности, что вращениям из нормальной квадратичной подгруппы соответствуют следующие перестановки четырех диагоналей:

1, 2, 3, 4;
2, 1, 4, 3;
3, 4, 1, 2;
4, 3, 2, 1.

К ним нужно добавить, чтобы получить полную группу тетраэдра, еще 8 перестановок, которые циклически переставляют 3 из 4 диагоналей. Таким образом получаются ровно те 12 перестановок четырех диагоналей, которые мы привыкли называть четными перестановками.

§ 7. Группа октаэдральных вращений

В случае октаэдральной группы мы имеем, как уже говорилось выше, по существу ту же самую основную конфигурацию, что и в случае тетраэдра. Мы только от-

*) Теоретически, все подгруппы данной группы можно получить, рассматривая сначала циклические подгруппы, а затем комбинируя их друг с другом по две, по три и т. д. Разумеется, в каждом конкретном примере этот процесс можно существенно сократить с помощью подходящих рассуждений.

**) Сравним это с поведением трех диагоналей октаэдра. Поскольку они переходят в себя под действием квадратичной группы, 12 вращений тетраэдральной группы порождают лишь 3 различные перестановки 3 диагоналей, а именно циклические. Таким образом, группа тетраэдра кратно изоморфна циклической группе из трех элементов.

метим на сфере 12 точек, соответствующих серединам ребер октаэдра, и построим 6 диаметров, соединяющих попарно эти точки. Эти 6 диаметров мы назовем перекрестными линиями нашей фигуры.

Разумеется, октаэдральная группа содержит 12 вращений тетраэдральной группы и притом, как мы можем предполагать заранее, в качестве нормальной подгруппы. Это следует из того, что 8 вершин куба единственным образом распределяются между тетраэдром и сопряженным тетраэдром, и это распределение сохраняется двенадцатью тетраэдральными вращениями. *Вдобавок к этому возникают еще 12 вращений, переставляющих тетраэдр с его сопряженным, так что группа октаэдра содержит 24 элемента.* Это 6 попарно сопряженных вращений на угол π вокруг перекрестных линий, затем 6 вращений на углы $\pm\pi/2$ (следовательно, периода 4) вокруг трех диагоналей октаэдра. Они также образуют один класс сопряженных элементов, поскольку 4 вращения вокруг фиксированной диагонали образуют нормальную подгруппу диэдральной группы из 8 элементов. Аналогично два вращения периода 3 вокруг данной диагонали куба сопряжены друг другу и всем остальным вращениям периода 3, так как диагональ куба является главной осью диэдральной группы порядка 6. Вращения периода 2, напротив, распадаются на 2 класса в зависимости от того, является ли их ось диагональю октаэдра или перекрестной линией. Разложение группы октаэдра получается переходом к тетраэдральной, а затем к квадратичной подгруппе. Других разложений не существует, поскольку мы уже перечислили все возможные подгруппы октаэдральной группы.

Наконец, мы видим, что диагонали куба *1*, *2*, *3*, *4* под действием октаэдральной группы из 24 вращений переставляются 24 способами. *Поэтому группа октаэдра просто изоморфна группе всех перестановок 4 элементов.*

§ 8. Группа вращений икосаэдра

Группа икосаэдра, к которой мы теперь переходим, наиболее интересна для нас тем, что она *проста* *) в отличие от групп диэдра, тетраэдра и октаэдра. Она разделяет это свойство с циклическими группами простого порядка.

---

*) В оригинале используется термин «примитивная группа».— *Примеч. пер.*

Для исследования группы икосаэдра вообразим, что на сфере отмечены 12 вершин икосаэдра, 20 вершин двойственного ему додекаэдра и 30 точек, соответствующих серединам ребер икосаэдра. 12 вершин соединяются попарно 6 диаметрами, которые мы будем кратко называть диагоналями икосаэдра. Аналогично 20 вершин додекаэдра соединяются 10 диаметрами — диагоналями додекаэдра. Наконец, введем 15 перекрестных линий, соединяющих середины противоположных ребер.

Убедимся, что общее число вращений икосаэдра равно 60. В самом деле, каждая из 12 (очевидно, попарно сопряженных) вершин остается неподвижной относительно 5 вращений. Таким образом, каждой из 6 диагоналей икосаэдра соответствует 4 (помимо единичного) вращения периода 5, а всего 24 таких элемента. Точно так же 10 диагоналей додекаэдра дают $10 \cdot 2 = 20$ вращений периода 3, а 15 перекрестных линий дают 15 вращений периода 2; если добавить сюда единичное преобразование, получается $24 + 20 + 15 + 1 = 60$, то есть совокупность всех вращений икосаэдра. Из перечисленных вращений 15 элементов периода 2 и аналогично 20 элементов периода 3 образуют один класс сопряженных элементов, поскольку 15 перекрестных линий, как и 10 диагоналей додекаэдра, переводятся друг в друга нашей группой, а вращения на угол $2\pi/3$ и $4\pi/3$ переходят друг в друга при перестановке полюсов вращения. Аналогичные рассмотрения показывают, что вращения периода 5 распадаются на 2 класса сопряженных элементов по 12 вращений в каждом. Первый класс содержит повороты на углы $\pm 2\pi/5$, а второй — на углы $\pm 4\pi/5$ вокруг диагоналей икосаэдра. На основе полученных данных мы можем *перечислить все циклические подгруппы*, содержащиеся в группе икосаэдра. А именно, имеется 15 подгрупп порядка 2, 10 подгрупп порядка 3 и 6 подгрупп порядка 5; циклические подгруппы одинакового порядка попарно сопряжены.

Этого достаточно для доказательства простоты группы икосаэдра. А именно, если бы нормальная подгруппа существовала, она содержала бы либо все, либо ни одной из циклических подгрупп порядка 2 (поскольку они сопряжены друг другу). То же самое справедливо относительно циклических подгрупп порядка 3 и 5. Но в этих подгруппах содержится, не считая единицы, соответственно 15, 20 или 24 элемента. Если обозначить символами η, η' и η'' три числа, которые могут равняться 0 или 1, то порядок предполагаемой нормальной подгруппы равен $1+15\eta+20\eta'+24\eta''$. Но этот порядок должен быть делителем порядка всей группы, т. е. числа 60, откуда с необходимостью либо $\eta=\eta'=\eta''=0$ и подгруппа единичная, либо $\eta=\eta'=\eta''=1$ и подгруппа совпадает со всей группой. Мы доказали, что *группа икосаэдра проста.*

Что касается остальных, нециклических подгрупп, то рассмотрение модели дает прежде всего 6 диэдральных групп с $n=5$ и 10 диэдральных групп с $n=3$. Первые имеют в качестве главных осей диагонали икосаэдра, вторые — диагонали додекаэдра, осями второго порядка для них служат 15 перекрестных линий. Можно было бы по аналогии с этим предположить наличие 15 диэдральных групп с $n=2$, т. е. квадратичных групп. Однако для квадратичных групп нет разницы между главной осью и осями второго порядка. Поэтому мы получаем всего 5 попарно сопряженных квадратичных подгрупп. Это соответствует разбиению 15 перекрестных линий на 5 прямоугольных триад. Наличием этих триад и обусловлено то свойство группы икосаэдра, которое будет для нас важнее всего в дальнейшем. Поскольку существует лишь 5 прямоугольных триад, построенных из 15 перекрестных линий, эти триады должны сохраняться не только соответствующей квадратичной группой, но и целой совокупностью из 12 вращений. Можно показать, что они образуют тетраэдральную группу. В самом деле, 8 вершин куба, соответствующих прямоугольной триаде, содержатся среди 20 вершин додекаэдра*). Таким образом, в икосаэдральной группе содержатся eo ipso 8 вращений периода 3, которые вместе с квадратичной группой образуют группу тетраэдра. Ясно также, что эти 5 тетраэдральных групп сопряжены друг другу.

Оставляя опять без доказательства то, что перечисленными подгруппами исчерпываются все подгруппы группы икосаэдра, укажем только изоморфизм, возникающий из наличия 5 упомянутых выше прямоугольных триад. Можно показать, что каждое вращение периода 5 циклически представляет эти триады в определенном порядке.

Под действием вращения периода 3, с другой стороны, 2 триады остаются на месте, а остальные 3 циклически переставляются. Наконец, вращение периода 2 сохра-

*) В старых коллекциях встречаются модели 5 кубов, пересекающихся таким образом, что их $5\cdot 8=40$ вершин попарно совпадают и образуют 20 вершин додекаэдра.

няет одну триаду неподвижной, а остальные 4 попарно переставляются. Таким образом, группа из 60 вращений икосаэдра просто изоморфна группе из 60 четных перестановок 5 элементов.

Мы могли бы здесь, как и в предыдущих случаях, установить изоморфизм найденных подгрупп с некоторыми группами перестановок и перенести на наш случай результаты, имеющиеся в учебниках относительно групп перестановок. Но мы исследовали наши группы непосредственно, на геометрических моделях. Полезным упражнением является сравнение наших результатов с известными свойствами изоморфных групп.

§ 9. О плоскостях симметрии в наших конфигурациях

Для дальнейшего развития наших исследований полезно построить *плоскости симметрии* наших конфигураций, т. е. те плоскости, относительно которых конфигурация совпадает со своим отражением, а затем рассмотреть *разбиение сферы*, осуществляемое этими плоскостями.

В случае *диэдра* мы можем построить, помимо плоскости экватора, n других плоскостей симметрии, а именно те плоскости, которые кроме главной оси содержат одну из осей второго порядка. С помощью этих $n+1$ плоскостей сфера разбивается на $4n$ конгруэнтных равнобедренных треугольников, у которых два угла равны $\pi/2$, а один угол равен π/n. Эти треугольники сходятся вершинами с равными углами по 4 в каждой вершине диэдра и в каждой середине ребра; в каждом полюсе сходятся по $2n$ треугольников.

В случае правильного *тетраэдра* существует 6 плоскостей симметрии, а именно те, которые, проходя через ребро тетраэдра, пересекают противоположное ребро под прямым углом. Рассмотрим временно сам тетраэдр, ограниченный 4 плоскостями в пространстве. Ясно, что каждый из равносторонних треугольников на этих плоскостях разрезается плоскостями симметрии на 6 поочередно конгруэнтных и симметричных друг другу треугольников. Если перенести это разбиение с помощью центральной проекции на сферу, то получится 24 поочередно конгруэнтных и симметричных треугольника, имеющих каждый углы $\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/2$. В каждой вершине тетраэдра и сопряженного тетраэдра сходятся по 6 треугольников, а в серединах ребер — по 4 с соответственно равными углами.

В случае правильного *октаэдра* в дополнение к плоскостям симметрии тетраэдра, которые остаются таковыми и теперь, возникают еще 3 плоскости, содержащие по 2 из 3 диагоналей тетраэдра. Полученными девятью плоскостями поверхность октаэдра (который мы временно будем рассматривать как твердое тело в пространстве), состоящая из 8 равносторонних треугольников, делится точно так же, как поверхность тетраэдра, рассмотренная выше. Переходя с помощью центральной проекции к сфере, получаем 48 поочередно симметричных и конгруэнтных треугольников с углами $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/2$, которые сходятся по 8 в вершинах октаэдра и по 4 в концах перекрестных линий (серединах ребер октаэдра). Это — то самое разбиение сферы, которое хорошо известно в кристаллографии в случае так называемого сорокавосьмигранника.

Наконец, в случае *икосаэдра* в качестве плоскостей симметрии мы имеем 15 плоскостей, содержащих две из шести диагоналей икосаэдра. Они разбивают каждую из 20 треугольных граней икосаэдра таким же образом, что и выше. Таким образом, получается 120 поочередно конгруэнтных и симметричных треугольников на сфере с углами $\pi/3$, $\pi/5$, $\pi/2$, которые сходятся по 6 в вершинах додекаэдра, по 10 в вершинах икосаэдра и по 4 в серединах ребер. Посмотрим, что есть общего в результатах, полученных во всех четырех случаях. В каждом из них мы имеем дело с разбиением сферы на поочередно конгруэнтные и симметричные треугольники *), которые сходятся по 2ν в тех точках сферы, которые являются неподвижными относительно циклической подгруппы порядка ν. Каждый раз имеется 3 числа ν в соответствии с вершинами основного треугольника. Эти числа в порядке возрастания собраны в следующей таблице, которую надо иметь в виду в дальнейшем:

	ν_1	ν_2	ν_3
Диэдр	2	2	n
Тетраэдр	2	3	3
Октаэдр	2	3	4
Икосаэдр	2	3	5

Мы видим, что общее число треугольников каждый раз вдвое больше порядка соответствующей группы (который

*) Когда мы выше в случае диэдра говорили просто о конгруэнтных треугольниках, это не противоречит сказанному теперь, так как для равнобедренных треугольников конгруэнтность и симметричность равносильны.

мы обозначим буквой N), в наших четырех случаях оно равно соответственно $4n$, 24, 48, 120.

Мы дополним наше исследование, построив также и для случая *циклической группы* некоторые плоскости, которые назовем плоскостями симметрии. Это просто n плоскостей, проходящих через полюсы, которые получаются из одной вращениями из нашей группы. Эти плоскости делят сферу на $2n$ конгруэнтных (или, если угодно, поочередно конгруэнтных и симметричных) луночек с углами $\pi/4$, простирающихся от полюса до полюса.

§ 10. Общие группы точек; фундаментальные области

Мы применим теперь полученные сферические разбиения для более подробного изучения наших групп преобразований. Рассмотрим прежде всего группы точек, которые получаются, если подвергнуть произвольную точку всем N вращениям из нашей группы. Назовем полученную фигуру *точечной конфигурацией или группой точек, принадлежащей нашей группе преобразований.* Предположим для наглядности, что части разбиения сферы заштрихованы поочередно через одну. Ясно, что вращения нашей группы переводят заштрихованную область в любую другую заштрихованную, причем единственным образом. Аналогично обстоит дело и с незаштрихованными областями. В самом деле, число N всех вращений, как уже отмечалось, совпадает во всех случаях с половиной числа областей.

Если теперь задана произвольная точка сферы (которая может лежать в заштрихованной или незаштрихованной области), мы можем на нашем разбиении сферы отметить еще $N-1$ точек, получаемых из исходной $N-1$ неединичным вращением; достаточно в каждой заштрихованной или незаштрихованной области отметить точку, расположенную точно так же, как исходная точка в своей области. В общем случае все N точек, полученных таким образом, различны; они могут частично совпадать, лишь если исходная точка попадает в вершину области. Если в этой вершине встречаются ν заштрихованных (и, разумеется, столько же незаштрихованных) областей, то эта вершина неподвижна при действии циклической группы порядка ν и в целом порождает N/ν различных точек.

Специальные подгруппы точек, возникающие таким образом,— это те самые конфигурации, которые мы рассматривали в предыдущих параграфах при исследовании конкретных групп *).

С группами точек, построенными здесь, связано понятие, которое в дальнейшем будет нам очень полезно. *Назовем фундаментальной областью группы преобразований такую часть пространства, которая содержит ровно одну точку из каждой группы точек* **). Граничные точки такой области естественно связаны попарно преобразованиями группы, так что лишь половина границы принадлежит фундаментальной области. Для рассматриваемых нами групп в качестве фундаментальной области всегда следует брать объединение заштрихованной и незаштрихованой частей.

Если точка однократно пробегает фундаментальную область, соответствующая группа точек однократно покрывает всю поверхность сферы.

§ 11. Расширенные группы

Применяя соображения § 1, мы расширим рассмотренные до сих пор группы, добавив к вращениям отражения относительно плоскостей симметрии.

При этом нам опять будут полезны разбиения сферы, построенные в § 10. В самом деле, *каждая из частей разбиения, заштрихованная или нет, будет теперь фундаментальной областью для расширенной группы и, следовательно, расширенная группа содержит 2N преобразований.* Для доказательства этого утверждения заметим вначале, что, комбинируя вращения из исходной группы с одним фиксированным отражением, можно перевести любую заштрихованную область в любую незаштрихованную. С другой стороны, любое преобразование расширенной группы определяется тем, куда оно переводит одну заштрихованную или незаштрихованную область.

Фундаментальная область для расширенной группы отличается от фундаментальных областей, рассматривавшихся в предыдущих параграфах тем, что она ни в какой мере не произвольна. А именно, ее граничные точ-

*) По поводу общих групп точек, упомянутых в тексте, см. цитированную работу Гесса (Hess), где они используются в теории полиэдров.

**) По поводу различного использования этого понятия (так важного для применения теории групп к геометрии) см. мою работу «Neuen Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie» (Math. Ann.— 1882.— Bd 21).

ки apriori определены тем свойством, что они неподвижны относительно определенных операций из расширенной группы — отражений относительно плоскостей симметрии. Мы можем породить расширенную группу, добавляя к группе вращений отражение относительно той конкретной плоскости, где лежит данная граничная точка. *Поэтому специальные группы из N точек, которые получаются из граничных точек фундаментальных областей действием расширенной группы, являются в то же время общими группами точек в смысле предыдущих параграфов.* Разумеется, специальные группы из N/ν точек, соответствующие вершинам фундаментальных областей, также включаются сюда.

Мы могли бы здесь провести теоретико-групповое исследование расширенных групп, подобное тому, которое было проделано выше для исходных групп. Я предлагаю это читателю в качестве полезного упражнения и ограничусь здесь следующим утверждением. Исходная группа всегда нормальна в расширенной группе, а расширенная группа октаэдра, икосаэдра и диэдра при четном n содержит, кроме того, нормальную подгруппу из двух элементов. Нееднничный элемент этой группы переводит точки сферы в диаметрально противоположные *).

§ 12. Образующие группы икосаэдра

Пока что в наших групповых рассмотрениях мы предполагали, что каждая конкретная группа уже задана нам в определенном виде, и исследовали общие для всех наших групп вопросы об их строении и свойствах входящих в них операций. Однако в дальнейшем большое практическое значение будут иметь и более специальные вопросы. К ним относится задание группы при помощи подходящих образующих элементов, т. е. таких операций, композиции и итерации которых составят всю группу.

Обратимся сначала к группе икосаэдра и вновь воспользуемся разбиением сферы на области (§ 9) и соот-

*) Отмечу еще один интересный факт: расширенная группа октаэдра, состоящая из 48 операций, содержит три различные нормальные подгруппы порядка 24. Это исходная группа октаэдра, расширенная группа тетраэдра, а также группа тетраэдра, пополненная только что упоминавшимся преобразованием центральной симметрии, причем именно эта третья группа, а не расширенная группа тетраэдра будет подгруппой расширенной группы икосаэдра.

ветственно на фундаментальные области (§ 10). Принцип, на котором будет основано наше рассмотрение, неявно уже применялся в предыдущих параграфах: каждая фундаментальная область переводится в любую другую и притом ровно одним преобразованием из нашей группы. Поэтому мы можем занумеровать фундаментальные области элементами группы, выбрав одну из областей в качестве начальной и сопоставив ей 1. При этом мы заодно и перечислим все элементы нашей группы*).

Мы предположим для удобства изложения, что икосаэдр расположен так, что одна из его диагоналей вертикальна. В качестве начальной фундаментальной области мы выберем один из пяти примыкающих к верхнему полюсу сферы равнобедренных треугольников с углами $2\pi/5$, $\pi/3$, $\pi/3$. Этот треугольник является фундаментальной областью для группы икосаэдра, поскольку он составлен из двух соседних областей разбиения из § 9. Пять таких треугольников образуют правильный пятиугольник — одну из граней двойственного додекаэдра. Стороны треугольников, являющихся сторонами этого пятиугольника, мы назовем основными линиями нашей конфигурации.

Обозначим буквой S поворот в определенном направлении вокруг вертикальной оси на угол $2\pi/5$. Тогда 5 *упомянутых фундаментальных областей получаются в естественном порядке из начальной области вращениями*

$$1,\ S,\ S^2,\ S^3,\ S^4,$$

мы обозначим их символами S^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$. Возьмем теперь икосаэдральное вращение T порядка 2. Это поворот вокруг перекрестной линии икосаэдра, одним из концов которой является середина основной линии фундаментальной области 1. Под действием вращения T наши 5 областей S^μ переходят в области $S^\mu T$, также заполняющие грань додекаэдра, а именно ту, которая имеет с исходной общую основную линию. Применяя опять преобразования S, S^2, S^3, S^4, мы получаем остальные 4 пятиугольника, примыкающие к исходному. Таким образом, *фундаментальные области, лежащие в 5 пятиугольниках, примыкающих к начальному, получают обозначения*

$$S^\mu T S^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

*) См. по этому поводу уже цитированные «Теоретико-групповые исследования» Дика (Dyck) в Math. Ann.— Bd 20. Принцип, примененный нами здесь, использован там в контексте общей теории групп.

Обозначим теперь буквой U еще одно икосаэдральное вращение порядка 2 (как мы вскоре убедимся, оно не будет независимым и будет представляться в виде комбинации S и T). Осью U должна быть одна из горизонтальных перекрестных линий; для определенности выберем ту перекрестную линию, которая перпендикулярна к оси T. Ясно, что вращение U переводит 6 верхних пятиугольников в 6 нижних, которые еще не рассматривались. Таким образом, 30 *оставшихся фундаментальных областей получают обозначения*

$$S^{\mu}U,\ S^{\mu}TS^{\nu}U \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Перейдем от фундаментальных областей снова к вращениям. Мы получили именно тот результат, к которому стремились: 60 *икосаэдральных вращений даются следующей схемой:*

$$S^{\mu},\ S^{\mu}TS^{\nu},\ S^{\mu}U,\ S^{\mu}TS^{\nu}U \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Здесь вращения S^{μ}, $S^{\mu}U$ образуют группу диэдра для $n = 5$, принадлежащую вертикальной диагонали икосаэдра, а вращения

$$T,\ U,\ TU$$

вместе с единичным образуют одну из 5 квадратичных подгрупп группы икосаэдра. Если нарисовать картинку (что необходимо для полного понимания сформулированной теоремы) или, что более удобно, действовать с моделью икосаэдра, на которой отмечены различные фундаментальные области и введены соответствующие символы, то мы без труда сможем указать все операции, принадлежащие любой данной подгруппе. Достаточно отметить те фундаментальные области, которые получаются из начальной операциями из нашей подгруппы *).

Остается, как было обещано, выразить U через S и T. Для этого подвергнем фундаментальную область S^3TS^2 преобразованию T. Она перейдет в область S^3TS^2T, принадлежащую одному из нижних пятиугольников. Но мы уже обозначили эту область (как показывает взгляд на фигуру) TS^3U. Поэтому $S^3TS^2T = TS^3U$. Рассмотрим в этом уравнении U как неизвестное. Умножим обе части равенства слева на T, а затем на S^2 и вспомним, что $T^2 = 1$, $S^5 = 1$. Мы получим $U = S^2TS^3TS^2T$, что и дает требуемое выражение.

---

*) Например, я обнаружил, что тетраэдральная группа, содержащая указанную квадратичную подгруппу, состоит из операций 1, T, STS^3, S^3TS, S^2TS^4, S^4TS^2, U, TU, STS^3U, S^3TS^4U, S^4TS^2U.

§ 13. Образующие других групп вращений

Образующие остальных групп вращений могут быть без труда получены тем же способом, который мы применили в случае икосаэдра. Но для первых двух групп — циклической и диэдральной — вопрос настолько прост, что не требует вообще никакого специального метода, а в случае тетраэдра и октаэдра существует способ перечисления операций, основанный на полученном ранее разложении этих групп. Результаты, которые я приведу ниже, проверяются безо всякого труда.

Что касается *циклической группы*, ее операции задаются символами S^{μ} $(\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$, где S означает вращение на угол $2\pi/n$. Группа *диэдра* получается, если добавить вращение T вокруг одной из осей второго порядка и тем самым присоединить операции $S^{\mu}T$ $(\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В частности, операции *квадратичной группы* представляются схемой

$$1,\ S,\ T,\ ST.$$

От квадратичной группы мы поднимаемся до *группы тетраэдра*, добавляя одно из вращений перида 3, которое мы обозначим буквой U. Двенадцать вращений тетраэдра даются следующей таблицей:

$$\begin{array}{llll} 1, & S, & T, & ST; \\ U, & SU, & TU, & STU; \\ U^2, & SU^2, & TU^2, & STU^2. \end{array}$$

Наконец, мы получаем 24 вращения *октаэдра*, добавляя к перечисленным 12 вращениям еще 12:

$$\begin{array}{llll} V, & SV, & TV, & STV; \\ UV, & SUV, & TUV, & STUV; \\ U^2V, & SU^2V, & TU^2V, & STU^2V. \end{array}$$

Здесь V означает любое вращение октаэдра, не принадлежащее группе тетраэдра, например вращение периода 4 вокруг одной из диагоналей октаэдра.

На этом мы заканчиваем предварительные рассмотрения, целью которых было соединение теоретико-групповых идей с простыми геометрическими конфигурациями в такой форме, чтобы в дальнейшем рассуждения из теории групп и геометрические иллюстрации могли дополнять друг друга.

ГЛАВА II

ВВЕДЕНИЕ $x+iy$

§ 1. Обзор содержания этой главы

Существенным шагом в нашем дальнейшем исследовании будет переход к рассмотрению сферы, на которой действуют наши группы вращений и на которой мы строили фундаментальные области и системы точек, как области изменения комплексной переменной $x+iy$. Этот подход, предложенный Риманом и впервые подробно изложенный К. Нейманом в его «Лекциях о римановой теории абелевых интегралов»*), в настоящее время хорошо известен, так что я сразу же перейду к его применениям (вдобавок формулы, которые будут представлены в последующих параграфах, сами по себе являются хорошим введением в эту теорию).

При таком подходе рассматривавшиеся выше системы точек выступают как корни алгебраических уравнений $f(z)=0$, где степень f совпадает с числом точек, если среди последних нет точки ∞, и на единицу меньше в противном случае. Нас будет интересовать, как отражается в свойствах этого уравнения инвариантность соответствующей группы точек относительно некоторых вращений и отражений нашей сферы.

Здесь мы имеем прежде всего следующую теорему: *каждое вращение сферы вокруг ее центра выражается*

---

*) Neiman C. Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.— Leipzig, 1865. Насчет общих приложений метода Римана см. мой трактат «О римановой теории алгебраических функций и их интегралов» (Klein F. Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.— Leipzig, 1882). О связи такого введения с проективной точкой зрения на поверхности второго порядка см. мою работу «Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst» (Math. Ann.— 1875.— Bd 9, в особенности с. 189), на которую я, впрочем, еще буду иметь случай сослаться.

дробно-линейным преобразованием величины z:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{1}$$

В самом деле, точки z и z' пробегают всю комплексную сферу и взаимно однозначно связаны друг с другом; кроме того, поскольку отображение $z \to z'$ конформно*), оно является аналитическим; поэтому, в силу известных теорем анализа, величина z' выражается через z дробно-линейно**). Точно так же мы видим, что отражениям и другим преобразованиям, которые получаются композицией отражения и вращения, соответствует формула вида

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \tag{2}$$

где $\bar{z}$ означает комплексно сопряженное к z число $x - iy$.

Таким образом, наше уравнение $f(z) = 0$ *имеет свойство оставаться неизменным относительно некоторой группы дробно-линейных подстановок* (1) *или, в некоторых случаях, относительно расширенной группы, содержащей помимо подстановок* (1) *соответствующее число подстановок* (2)***).

Я должен теперь ввести еще один аналитический прием, который возникает сам собой при переходе к уравнениям и при изучении различных их свойств и который гораздо удобнее, чем первоначальный подход, основанный на геометрических соображениях. Я говорю об *однородных координатах*. Если мы заменим z на $z_1 : z_2$, то подстановка (1) (и аналогично (2)) распадается на две независимые операции:

$$z_1' = \alpha z_1 + \beta z_2, \quad z_2' = \gamma z_1 + \delta z_2, \tag{3}$$

*) На самом деле мы имеем здесь отношение конгруэнтности, поскольку z' получается из z вращением.

**) К сожалению, фундаментальные теоремы теории функций вроде той, на которую мы сейчас ссылались, приведены в учебниках в такой форме, что осуществляемые функциями преобразования почти не рассматриваются; поэтому для наших целей приходится в каждом случае применять модификацию или комбинацию известных доказательств. Это, однако, не должно затруднить читателя, поскольку мы всегда имеем дело с совершенно элементарными вещами.

***) То же самое, конечно, относится к уравнениям $F(z) = 0$, которые описывают несколько групп точек. Можно рассматривать такие уравнения как обобщение возвратных уравнений элементарного анализа, инвариантных относительно простой группы из двух преобразований $z' = z$ и $z' = 1/z$.

и важное значение приобретает абсолютная величина определителя $\alpha\delta-\beta\gamma$. Вместо *уравнения* $f(z)=0$ или $f\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right)=0$ мы должны рассматривать форму $f(z_1, z_2)$, получаемую умножением на подходящую степень z_2. Эта форма всегда имеет степень, равную числу корней (первое преимущество однородной записи); наличие корня $z=\infty$ сказывается в виде множителя z_2 у f.

Мы видим также, что с переходом к *форме* f возникает еще одно отличие. Форма f не остается абсолютно инвариантной при преобразованиях (3); она может умножаться на множитель и нашей задачей будет определить этот множитель. Кроме того, взяв за основу теорию форм, мы вступаем в тесную связь с тем важным разделом современной алгебры, который получил название *теории инвариантов бинарных форм*. Эта связь будет помогать нам в наиболее сложных случаях, позволяя простым образом получать из одной формы все остальные. Отмечу один результат, являющийся кульминацией описанных здесь рассуждений (см. предпоследний параграф этой главы). Он таков: *для каждой группы дробно-линейных подстановок* (1), *соответствующей нашей группе вращений, можно найти рациональную функцию*

$$Z=R(z), \tag{4}$$

которая, если приравнивать ее различным константам, задает различные группы точек, принадлежащие группе.

В то же время мы приходим при реализации наших групп подстановок к целому ряду новых задач, с которых ниже начинается наше дальнейшее исследование *).

§ 2. О тех дробно-линейных преобразованиях $x+iy$, которые соответствуют вращениям вокруг центра

Запишем уравнение сферы в прямоугольных координатах с началом в центре сферы

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1. \tag{5}$$

*) См. по поводу всего этого уже упоминавшуюся работу «О бинарных формах с линейными преобразованиями в себя» в Math. Ann.— 1875.— Bd. 9. Именно там впервые появился тот подход, который детально изложен в первой и второй главе настоящего текста. Основные результаты я сообщил в июне 1874 г. Эрлангенскому физико-медицинскому обществу (см. отчеты о заседаниях этого общества).

Введем теперь комплексную величину $z = x + iy$, изображая вначале $x + iy$ обычным образом на $\xi\eta$-плоскости (плоскости экватора), а затем отображая эту плоскость с помощью стереографической проекции из полюса $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$ однозначно на поверхность сферы. Мы получаем формулы

$$(6) \qquad x = \frac{\xi}{1-\zeta}; \quad y = \frac{\eta}{1-\xi}; \quad x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$$

или

$$(7) \quad \xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}; \quad \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2}; \quad \zeta = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Поскольку мы хотим определить те дробно-линейные подстановки z, которые соответствуют вращениям сферы, для нас представляют интерес диаметрально противоположные точки сферы (так как при каждом вращении одна из пар таких точек остается неподвижной). Чтобы получить искомое соотношение, изменим в (6) знаки ξ, η и ζ. Тогда для диаметрально противоположной точки $z' = x' + iy'$ получим

$$x' - iy' = \frac{-\xi + i\eta}{1-\zeta}$$

и отсюда, умножая на $x + iy$ и учитывая (5),

$$(8) \qquad (x + iy)(x' - iy') = -1,$$

или, записывая $x + iy$ в виде $re^{i\varphi}$,

$$(9) \qquad x' + iy' = \frac{1}{r} e^{i(\varphi+\pi)}.$$

Диаметрально противоположным точкам отвечают комплексные числа, у которых абсолютные величины обратны друг другу, а аргументы отличаются на π.

Рассмотрим теперь вращение на угол α вокруг оси $0 - \infty$ (перпендикулярной к плоскости экватора) против часовой стрелки, если смотреть извне сферы на ее верхний полюс. Пусть точка z переходит при этом в z'. Нас интересует, как z' связана с z. Ясно, что таким же образом, как $\xi' + i\eta$ с $\xi + i\eta$ при повороте $\xi\eta$-плоскости указанным образом, поскольку знаменатель $1 - \zeta$ в формулах (6) при вращении не меняется. Если направить ось ξ вправо, а ось η от нас, то справедливы хорошо известные формулы

$$\xi' = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha,$$
$$\eta' = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha$$

или

$$\xi' + i\eta' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\xi + i\eta),$$

откуда следует

$$z' = e^{i\alpha} z. \tag{10}$$

Если мы хотим теперь аналогично записать вращение на угол α вокруг оси, соединяющей (ξ, η, ζ) и $(-\xi, -\eta, -\zeta)$, где первая точка играет ту же роль, что и точка ∞ выше (т. е. поворот совершается против часовой стрелки, если смотреть извне на точку (ξ, η, ζ)), то мы должны подставить в (10) вместо z и z' такие дробно-линейные функции аргументов z и z' соответственно, которые обращаются в ∞ в точке (ξ, η, ζ) и в 0 в точке $(-\xi, -\eta, -\zeta)$. Такая дробно-линейная функция определена однозначно с точностью до множителя; она имеет вид

$$C \cdot \frac{z + \dfrac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}}{z - \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}}.$$

Множитель C нет необходимости определять, поскольку он все равно исчезает из окончательной формулы. В самом деле, подставляя в (10) наше выражение для z, получаем независимо от C

$$\frac{z' + \dfrac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}}{z' - \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}} = e^{i\alpha} \cdot \frac{z + \dfrac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}}{z - \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}}$$

или после небольших преобразований

$$e^{\frac{-i\alpha}{2}} \cdot \frac{z'(1 + \zeta) + (\xi + i\eta)}{z'(1 - \zeta) - (\xi + i\eta)} = e^{\frac{i\alpha}{2}} \cdot \frac{z(1 + \zeta) + (\xi + i\eta)}{z(1 - \zeta) - (\xi + i\eta)}. \tag{11}$$

Это — общая формула для вращения, которую мы искали. Если разрешить ее относительно z' и ввести обозначения

$$\xi \sin\frac{\alpha}{2} = a; \quad \eta \sin\frac{\alpha}{2} = b; \tag{12}$$

$$\zeta \sin\frac{\alpha}{2} = c; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = d,$$

где, очевидно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \tag{13}$$

то мы получим

$$z' = \frac{(d+ic)\,z-(b-ia)}{(b+ia)\,z+(d-ic)}\text{*)}. \tag{14}$$

Мы получили при этом (как можно было бы сообразить заранее) *две формулы* для каждого вращения сферы. А именно, вращение не изменится, если увеличить угол α на 2π. При этом все четыре величины в формулах (12) изменяли знак. Это согласуется с тем, что определитель преобразования (14) равен $a^2+b^2+c^2+d^2$. В силу (13) он равен 1, и это составляет для знаков a, b, c, d ровно две возможности.

Одновременно мы получаем удобное правило для вычисления косинуса половины угла поворота, заданного формулой

$$z' = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

и тем самым для определения периода этого преобразования (если вообще мы имеем дело с периодическим преобразованием). А именно, сравнение с (14) дает

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{A+D}{\sqrt{AD-BC}}. \tag{15}$$

§ 3. Однородные линейные подстановки; их композиция

Разложим теперь, как указано в § 1, формулу (14) на две линейных подстановки:

$$\begin{aligned} z_1' &= (d+ic)\,z_1-(b-cd)\,z_2,\\ z_2' &= (b+ia)\,z_1+(d-ic)\,z_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь a, b, c, d в соответствии с формулами (12) представляют собой любые 4 вещественных числа, подчиненных условию

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1.$$

Отметим, что эта же формула с комплексными значениями a, b, c, d, подчиненными тому же условию, задает наиболее общее бинарное линейное преобразование с определителем 1. Поэтому формулы для композиции, кото-

---

*) См. работу Кэли «О соответствии гомографий и вращений» (Cayley A. On the Correspondence of homographies and rotations // Math. Ann.— 1879.— Bd 15), где эта формула впервые явно установлена.

рые мы сейчас установим, имеют более общее значение, что, впрочем, не будет играть роли в наших дальнейших исследованиях.

Чтобы вывести искомые формулы, допустим, что

$$S:\ \begin{cases} z_1' = (d+ic)\,z_1 - (b-ia)\,z_2, \\ z_2' = (b+ia)\,z_1 + (d-ic)\,z_2 \end{cases}$$

— первая подстановка и аналогично

$$T:\ \begin{cases} z_1'' = (d'+ic')\,z_1' - (b'-ia')\,z_2', \\ z_2'' = (b'+ia')\,z_1' + (d'-ic')\,z_2' \end{cases}$$

— вторая. *Мы получаем формулу для композиции* ST, *исключая* z_1', z_2' *из этих двух систем.* Результат запишем снова в виде (16):

$$ST:\ \begin{cases} z_1'' = (d''+ic'')\,z_1 - (b''-ia'')\,z_2, \\ z_2'' = (b''+ia'')\,z_1 + (d''-ic'')\,z_2. \end{cases}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} a'' &= (ad'+a'd)-(bc'-b'c), \\ b'' &= (bd'+b'd)-(ca'-c'a), \\ c'' &= (cd'+c'd)-(ab'-a'b), \\ d'' &= -aa'-bb'-cc'+dd'. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь предполагается, как мы уже говорили в главе 1, что символ ST означает применение сначала S, а затем T.

Мы применим формулы (14), (16), (17) для нахождения групп подстановок, соответствующих группам вращений из предыдущей главы. Однако прежде стоит сказать об общематематическом значении этих формул. Тот факт, что при изучении вращений вокруг фиксированной точки уместно ввести параметры a, b, c, d (или, по крайней мере, их отношения a/d, b/d, c/d), был обнаружен Эйлером *). Однако формула композиции (17) оставалась, по-видимому, долгое время неизвестной, пока она не была открыта Родригесом **) в 1840 г. Гамильтон положил эту же формулу в основание своей теории ква-

*) Novae Commentationes Petropolitanae.— T. 20.— P. 217.

**) Rodrigues. Des lois géométriques qui regissent le déplacement etc. // Journal de Liouville, sér. 1.— T. 5.

тернионов*), поначалу не заметив ее интерпретации для композиции вращений, которая была вскоре обнаружена Кэли**). Однако связь этих формул с композицией подстановок в бинарных формах по-прежнему оставалась незамеченной. Впервые эта связь была найдена Лагерром***). Особенно глубокий смысл она приобрела после римановой интерпретации $x + iy$ как точек на сфере, в частности, благодаря формулам (14)****).

§ 4. Переход к группам подстановок. Циклические и диэдральные группы

Теперь мы найдем те группы линейных однородных подстановок с определителем 1*****), которые по формулам (14) и (16) соответствуют ранее рассматривавшимся группам вращений. Из-за неопределенности знака у величин a, b, c, d этих линейных подстановок будет, разумеется, вдвое больше, чем исходных вращений. Поэтому группы подстановок будут лишь полуизоморфны группам вращений. Вопрос о том, можно ли так модифицировать (например, сузить) группу подстановок, чтобы получился обычный изоморфизм, мы отложим до заключительного параграфа этой главы.

Что касается общих правил, которыми мы будем руководствоваться при описании наших групп подстановок, то мы, естественно, выберем в каждом из случаев наиболее удобную систему координат и воспользуемся результатами об образующих различных групп вращений, полученными нами в § 12, 13 предыдущей главы.

---

*) В самом деле, если ввести кватернионы q, q': $q = ai + bj + ck + d$; $q' = a'i + b'j + c'k + d'$, то их произведение $qq' = q'' = a''i + b''j + c''k + d''$ задается в точности формулой (17) нашего текста. Интересно познакомиться с первыми сообщениями Гамильтона о его исчислении кватернионов, в особенности с его письмом к Грейвсу (Phil. Mag.— 1844.— V. 2.— P. 489).

**) Phil. Mag.— 1843.— V. 1.— P. 141.

***) Laguerre. Sur le calcul des systèmes linéaires // J. École polytechnique.— 1867.— V. 42.

****) См., например, статью: Stephanos. Mémoire sur la représentation des homographies binaires pour des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques // Math. Ann.— 1883.— Bd 22, а также заметку: Stephanos. Sur la théorie des quaternions // Math. Ann.— 1883.— Bd 22.

*****) Линейные однородные преобразования, о которых идет здесь речь, будут далее для краткости называться однородными подстановками, или просто подстановками, если это не будет угрожать недоразумениями.

В случае *циклических* и *диэдральных групп* дело обстоит настолько просто, что нужные формулы выписываются безо всякого труда. Удобно расположить два главных полюса, связанных с этими группами, в точках $z=\infty$ и $z=0$. Тогда для вращений циклической группы

$$a=b=0,\quad c=\sin\frac{\alpha}{2},\quad d=\cos\frac{\alpha}{2},\quad \alpha=\frac{2k\pi}{n},$$

и поэтому $2n$ *однородных подстановок, соответствующих циклической группе порядка* n, *имеют вид*

$$(18)\quad z_1'=e^{ik\pi/n}z_1,\qquad z_2'=e^{-ik\pi/n}z_2\qquad (k=0,1,\ldots,2n-1).$$

Переходя к *диэдральной группе*, выберем одну из осей второго порядка так, чтобы она совпала с осью ξ в нашей системе координат (и тем самым соединяла точки $z=+1$ и $z=-1$ на сфере). Для соответствующего поворота получаем

$$(19)\qquad z_1'=\mp iz_2,\quad z_2'=\mp iz_1,$$

и поэтом с учетом (18) $4n$ *однородные подстановки диэдральной группы порядка* $2n$ *примут вид*

$$(20)\quad \begin{matrix} z_1'=e^{ik\pi/n}z_1, & z_2'=e^{-ik\pi/n}z_2;\\ z_1'=ie^{-ik\pi/n}z_2, & z_2'=ie^{ik\pi/n}z_1\end{matrix}\qquad (k=0,1,\ldots,2n-1).$$

В этих формулах уже учтен двойной знак в (14), так как мы позволяем k меняться от 0 до $2n-1$, а не от 0 до $n-1$.

В частности, для квадратичной группы мы получаем следующие 8 однородных подстановок:

$$(21)\quad \begin{matrix} z_1'=i^kz_1, & z_2'=(-i)^kz_2;\\ z_1'=(-i)^kz_2, & z_2'=i^kz_1\end{matrix}\qquad (k=0,1,2,3).$$

§ 5. Группы тетраэдра и октаэдра

В случае *тетраэдра* и *октаэдра* мы будем использовать две разные системы координат. В первой, которая кажется наиболее естественной, 3 координатные оси ξ, η, ζ просто совпадают с диагоналями октаэдра. Вторая система получается поворотом на 45° вокруг оси ζ, так что $\xi\zeta$-плоскость станет плоскостью симметрии октаэдра (преимущество этой системы выяснится позднее).

Начнем с рассмотрений в первой системе координат. Для квадратичной подгруппы мы можем использовать формулы (21), уже написанные выше. Вспоминая теперь то, что было сказано об образующих группы тетраэдра и октаэдра § 13, мы построим вначале однородные подстановки, соответствующие двум вращениям (U и U^2) периода 3 вокруг одной из диагоналей куба. Очевидно, две диаметрально противоположные вершины куба имеют координаты

$$\xi = \eta = \zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и, поскольку

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = -\cos\frac{2\pi}{3}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sin\frac{2\pi}{3},$$

мы, вновь пренебрегая возникающей здесь неопределенностью в выборе знаков, получим для однородных подстановок, оставляющих эти две вершины на месте,

$$a = b = c = \pm d = \frac{1}{2}.$$

В соответствии с этим мы имеем две подстановки

$$z_1' = \frac{(\pm 1 + i)\, z_1 - (1 - i)\, z_2}{2}, \qquad z_2' = \frac{(1 + i)\, z_1 + (\pm 1 - i)\, z_2}{2}.$$

Комбинируя их должным образом с подстановками (21), мы *получаем для правых частей 24 тетраэдральных подстановок следующие выражения*:

(22)
$$\begin{cases} i^k z_1, & (-i)^k z_2; \\ -(-i)^k z_2, & i^k \cdot z_1; \\ i^k \dfrac{(\pm 1 + i)\, z_1 - (1 - i)\, z_2}{2}, & (-i)^k \dfrac{(1 + i)\, z_1 + (\pm 1 - i)\, z_2}{2} \\ -(-i)^k \dfrac{(1 + i)\, z_1 + (\pm 1 - i)\, z_2}{2}, & i^k \dfrac{(\pm 1 + i)\, z_1 - (1 - i)\, z_2}{2} \\ & (k = 0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

Переход к октаэдральной группе состоит в добавлении вращения V на угол $\pi/2$ вокруг одной из координатных осей, например оси ζ. Для одной из двух соответствующих однородных подстановок мы имеем

$$z_1' = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\, z_1, \quad z_2' = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\, z_2. \tag{23}$$

Поэтому правые части оставшихся 24 октаэдральных линейных подстановок получаются из (22) *умножением выражений, стоящих слева, на* $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, *а выражений, стоящих справа,— на* $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Нет необходимости выписывать их явно.

Что касается второй системы координат, то для получения формул для подстановок в этой системе достаточно использовать уже найденные выражения (22), (23) и т. д. и произвести в них необходимые преобразования, соответствующие переходу от одной системы координат к другой. При этом преобразовании первоначальное отношение $\frac{z_1}{z_2}$ переходит в $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{z_1}{z_2}$ и соответственно $\frac{z_1'}{z_2'}$ в $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{z_1'}{z_2'}$ *).

Заметим еще, что $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=1$. Отсюда, немного подумав, мы приходим к следующему правилу.

Чтобы получить формулы для подстановок в новой системе координат, мы должны в выражениях, стоящих слева в (22), *оставить* z_1 *неизменным, а* z_2 *умножить на* $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, *в выражениях, стоящих справа, следует умножить* z_1 *на* $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, *а* z_2 *оставить без изменения.*

Ввиду простоты этих операций я снова явно не выписываю получаемые выражения.

§ 6. Группа икосаэдра

Нам нужно теперь исследовать однородные подстановки для икосаэдра. Для этого мы выберем систему координат таким образом, чтобы вращение на угол $2\pi/5$, которое выше (в § 12 предыдущей главы) было обозначено буквой S, совершалось в положительном направлении вокруг оси ζ, а перекрестная линия, вокруг которой происходит вращение U (см. там же), совпадала с осью η. Тогда для подстановок, соответствующих вращениям S

*) Мы считаем здесь, что поворот на 90° вокруг оси $O\zeta$ происходит в положительном направлении.

и U мы получаем

$$(24)\qquad S:\begin{cases} z_1' = \pm\, \varepsilon^3 \cdot z_1, \\ z_2' = \pm\, \varepsilon^2 \cdot z_2; \end{cases}\qquad U:\begin{cases} z_1' = \pm\, z_2, \\ z_2' = \pm\, z_1. \end{cases}$$

Вместе эти подстановки порождают группу диэдра, соответствующую вертикальной диагонали икосаэдра *). Буквой ε здесь и в дальнейшем обозначен корень пятой степени из единицы:

$$\varepsilon = e^{2\pi i/5}.$$

Наша договоренность относительно системы координат оставляет две возможности для вращения T, которое мы еще должны рассмотреть. Ось T должна проходить в плоскости $\xi\zeta$ либо в первом и третьем квадранте, либо во втором и четвертом. Мы выберем вторую возможность. Если обозначить буквой γ острый угол, образованный этой осью с $O\xi$, то один из концов оси будет иметь координаты

$$\xi = \sin\gamma, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \cos\gamma,$$

а поскольку речь идет о повороте па $180°$, параметры соответствующего вращения в силу (12) будут

$$a = \mp\sin\gamma, \quad b = 0, \quad c = \pm\cos\gamma,\ \alpha = 0,$$

где, как и повсюду в таких формулах, надо брать одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Возникает вопрос, как вычислить угол γ. Для этого вернемся к параметрам S из (24)

$$a' = b' = 0, \quad c' = \pm\sin\frac{\pi}{5}, \quad d' = \pm\cos\frac{\pi}{5}$$

и формулам композиции (17). Из них мы получаем для параметра d'' операции ST

$$d'' = -aa' - bb' - cc' + dd' = \pm\cos\gamma\sin\frac{\pi}{5}.$$

Но операция ST (как видно из модели икосаэдра) имеет период 3; поэтому d'' должно быть равно $\pm\cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{1}{2}$.

*) Здесь формулы связаны с несколько иной системой координат, чем в (20).

Отсюда, если учесть, что $\cos\gamma$ должен быть положительным,

$$\cos\gamma \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2},$$

или, вводя корень из единицы ε и учитывая, что

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\varepsilon^4 - \varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \sqrt{5},$$

получаем

$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{i\sqrt{5}}$$

и, опять выбирая знак плюс,

$$\sin\gamma = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{i\sqrt{5}}.$$

Подставим эти значения в только что полученные выражения для a, b, c, d и еще раз воспользуемся формулой (16). Мы получим окончательно для двух однородных подстановок, соответствующих вращению T,

$$(26)\qquad T\colon \begin{cases} \sqrt{5}z_1' = \mp(\varepsilon - \varepsilon^4)z_1 \pm (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)z_2, \\ \sqrt{5}z_2' = \pm(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)z_1 \pm(\varepsilon - \varepsilon^4)z_2. \end{cases}$$

Из (24) и (26) строятся все икосаэдральные подстановки. Напомним лишь, что мы расположили их в следующую таблицу:

$$S^\mu,\ S^\mu U,\ S^\mu T S^\nu,\ S^\mu T S^\nu U \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Итак, 120 *икосаэдральных подстановок имеют вид*

$$S^\mu\colon \begin{cases} z_1' = \pm\varepsilon^{3\mu}z_1, \\ z_2' = \pm\varepsilon^{2\mu}z_2; \end{cases}$$

$$S^\mu U\colon \begin{cases} z_1' = \mp\varepsilon^{2\mu}z_2, \\ z_2' = \pm\varepsilon^{3\mu}z_1; \end{cases}$$

(27)

$$S^\mu T S^\nu\colon \begin{cases} \sqrt{5}z_1' = \pm\varepsilon^{3\nu}(-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{3\mu}z_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{2\mu}\cdot z_2), \\ \sqrt{5}z_2' = \pm\varepsilon^{2\nu}(+(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{3\mu}z_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{2\mu}\cdot z_2); \end{cases}$$

$$S^\mu T S^\nu U\colon \begin{cases} \sqrt{5}z_1' = \mp\varepsilon^{2\nu}(+(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{3\mu}z_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{2\mu}z_2), \\ \sqrt{5}z_2' = \pm\varepsilon^{3\nu}(-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^{3\mu}z_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^{2\mu}z_2). \end{cases}$$

Я буду в дальнейшем применять простое правило, с помощью которого здесь (как и в предыдущих случаях) может быть вычислен период данного вращения с помощью формулы (15). Для угла α вращения $S^\mu T S^\nu$ мы получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \mp\frac{(\varepsilon-\varepsilon^4)(\varepsilon^{3\mu+3\nu}-\varepsilon^{3\mu+2\nu})}{2\sqrt{5}},$$

а для угла вращения $S^\mu T S^\nu U$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \mp\frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(\varepsilon^{3\mu+2\nu}-\varepsilon^{2\mu+3\nu})}{2\sqrt{5}}.$$

Отсюда период 2 *имеет* $S^\mu T S^\nu$, *если* $\mu+\nu\varepsilon=0 \pmod 5$, *и* $S^\mu T S^\nu U$, *если* $3\mu+2\nu\equiv 0 \pmod 5$.

Период 3 *имеет* $S^\mu T S^\nu$, *если* $\mu+\nu\equiv\pm 1 \pmod 5$, *и* $S^\mu T S^\nu U$, *если* $3\mu+2\nu\equiv\pm 1 \pmod 5$. *В* 20 *остальных случаях подстановки* $S^\mu T S^\nu$ *и* $S^\mu T S^\nu U$ *имеют период* 5. *К этому следует добавить, как очевидное, что* $S^\mu U$ *всегда имеет период* 2, *а* S^μ (*при* $\mu\neq 0$) — *период* 5.

§ 7. Неоднородные подстановки; рассмотрение расширенных групп

От однородных (линейных) подстановок мы естественно и без дополнительных вычислений переходим к неоднородным (дробно-линейным). Однако поскольку при таком переходе можно изменять определитель, мы сможем несколько сократить наши формулы, сделав их более обозримыми. Я сразу же приведу таблицу окончательных ответов. *Мы получаем следующие неоднородные подстановки:*

(I) *Для циклической группы*

(28) $$z' = e^{2ik\pi/n} z \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1);$$

(II) *для группы диэдра*

(29) $$z' = e^{2ik\pi/n}\cdot z, \quad z' = -\frac{1}{z}\cdot e^{-2ik\pi/n},$$

где k такое же, как и выше;

(III) *для группы тетраэдра в первой системе координат*

(30a) $$z' = \pm z,\quad \pm\frac{1}{z},\quad \pm i\,\frac{z+1}{z-1},\quad \pm i\,\frac{z-1}{z+1},\quad \pm\frac{z+i}{z-i},\quad \frac{z-i}{z+i}$$

и во второй системе координат

$$(30b)\quad z' = \pm z,\quad \pm\frac{i}{2},\quad \pm\frac{(1+i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}z-(1-i)},\quad \pm\frac{\sqrt{2}\cdot z-(1-i)}{(1+i)z+\sqrt{2}},$$
$$\pm\frac{(1-i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot z-(1+i)},\quad \pm\frac{\sqrt{2}\cdot z-(1+i)}{(1-i)z+\sqrt{2}};$$

(IV) *для группы тетраэдра также в двух системах координат*

$$(31a)\qquad z' = i^k z,\quad \frac{i^k}{z},\quad i^k\frac{z+1}{z-1},\quad i^k\frac{z+i}{z-i},\quad i^k\frac{z-i}{z+i};$$

$$(31b)\quad z' = i^k z,\quad \frac{i^k}{z},\quad i^k\frac{(1+i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}z-(1-i)},\quad i^k\frac{\sqrt{2}\cdot z-(1-i)}{(1+i)z+\sqrt{2}},$$
$$i^k\frac{(1-i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}z-(1+i)},\quad i^k\frac{\sqrt{2}z-(1+i)}{(1-i)z+\sqrt{2}},$$

где $k = 0, 1, 2, 3$;

(IV) *для группы икосаэдра*

$$(32)\qquad z' = \varepsilon^{\mu} z,\quad -\frac{\varepsilon^{4\mu}}{z},\quad \varepsilon^{\nu}\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\mu}\cdot z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\mu}\cdot z+(\varepsilon-\varepsilon^4)},$$
$$\varepsilon^{-4\nu}\frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\mu}z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\mu}z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)},$$

где $\varepsilon = e^{2i\pi/5}$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

От этих формул можно сразу перейти к формулам для расширенных групп (как описано в главе I), а именно во всех случаях, кроме (30a), плоскость $\xi\zeta$ является плоскостью симметрии рассматриваемой фигуры. Расширенная группа получается из исходной группы вращений добавлением отражения в одной этой плоскости. Это отражение аналитически выражается формулой

$$(33)\qquad z' = \bar{z},$$

где черта означает комплексное сопряжение. Следовательно, *мы получим формулы для операций расширенной группы, если к формулам* (28)—(32) (*за исключением* (30a)) *добавим еще столько же, заменяя z на $\bar{z}$.*

Я закончу этот параграф двумя краткими историческими замечаниями. Из групп подстановок, описываемых формулами (28)—(32), лишь два частных случая встречались ранее (за исключением циклических групп, которые, разумеется, возникают повсюду). Это группа диэдра для $n = 3$ и группа октаэдра (31a). Первый случай возникал в несколько иной, чем в (29), форме, но только из-за выбора другой системы координат на z-сфере, а именно той, в которой большой круг, до сих пор служивший экватором, становится меридианом вещественных чисел, а вершины диэдра располагаются в точках 0, 1, ∞. Мы приходим к формулам

$$z' = z, \quad \frac{1}{z}, \quad 1 - z, \quad \frac{1}{1 - z}, \quad \frac{z}{z - 1}, \quad \frac{z - 1}{z},$$

которые в проективной геометрии связывают 6 соответствующих значений двойного отношения, а в теории эллиптических функций (что фактически то же самое) — 6 соответствующих значений k^2 (квадрата модуля Лежандра).

Группа (31а) возникает в нескольких местах работы Абеля *). Вопрос здесь состоит в перечислении возможных значений k^2, которые получаются при преобразовании заданного эллиптического интеграла первого рода с помощью линейной подстановки к нормальной форме Лежандра:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2x^2}}.$$

Абель замечает, что все возможные значения выражаются через одно из них следующим образом:

$$k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \left(\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{i + \sqrt{k}}{i - \sqrt{k}}\right)^4, \quad \left(\frac{i - \sqrt{k}}{i + \sqrt{k}}\right)^4.$$

Если извлечь корень четвертой степени и обозначить $\sqrt{k}$ буквой z, мы придем в точности к формулам (31а).

§ 8. Изоморфизмы для групп однородных подстановок

По поводу теоретико-группового анализа полученных групп подстановок достаточно сослаться на аналогичное исследование в первой главе. В самом деле, наши неоднородные группы подстановок просто изоморфны рассмотренным выше группам вращений, а однородные — по крайней мере полуизоморфны, причем среди однородных подстановок две,

$$z_1' = z_1, \qquad z_1' = -z_1,$$
$$z_2' = z_2; \qquad z_2' = -z_2,$$

соответствуют единице.

---

*) См., например, с. 259 первого тома нового издания под редакцией Силова и Ли.

Кроме того, мы исследуем вопрос, если и не принадлежащий абстрактной теории групп, то тесно связанный с ней; этот вопрос мы уже ставили выше в § 4 и ответ на него будет играть важную роль в дальнейшем. Мы нашли для каждой группы из N вращений $2N$ соответствующих однородных подстановок. Спрашивается, нельзя ли из них извлечь N так, чтобы они образовали группу, просто изоморфную исходной группе вращений, или, если это окажется невозможным, добиться такого изоморфизма, изменяя значение детерминанта у некоторых подстановок?

Мы начнем с группы, порожденной одним вращением, то есть с *циклической группы*, которую, однако, будем рассматривать в произвольной системе координат. А именно, рассмотрим вращение на угол $2\pi/n$ вокруг произвольной точки ξ, η, ζ на сфере. Соответствующая линейная подстановка (16)

$$z_1' = (d + ic)\,z_1 - (b - ia)\,z_2,$$
$$z_2' = (b + ia)\,z_1 + (d - ic)\,z_2$$

имеет параметры

$$a = \pm\xi\sin\frac{\pi}{n}, \quad b = \pm\eta\sin\frac{\pi}{n},$$
$$c = \pm\zeta\sin\frac{\pi}{n}, \quad d = \pm\cos\frac{\pi}{n}.$$

Напишем вместо этого, полагая детерминант подстановки равным ρ^2,

$$a_1 = \rho\xi\sin\frac{\pi}{n}, \quad b_1 = \rho\eta\sin\frac{\pi}{n},$$
$$c_1 = \rho\zeta\sin\frac{\pi}{n}, \quad d_1 = \rho\cos\frac{\pi}{n}. \tag{34}$$

Для получения искомого простого изоморфизма потребуем теперь, чтобы n-я степень этой подстановки была тождественным отображением, то есть

$$a_n = b_n = c_n = 0, \quad d_n = 1.$$

Для этого, очевидно, необходимо, чтобы было $\rho^n = 1$. Мы получаем, что *простой изоморфизм между группой вращений и группой подстановок возможен тогда и только тогда, когда величина* ρ *в* (34) *равна корню n-й степени из* -1. При этом значение ρ^2 (детерминанта подстановки) определено или по крайней мере ограничено немногими возможностями. Если n нечетно, мы можем положить $\rho = -1$, и тогда детерминант равен $+1$. Если n четно, значение -1 для детерминанта недостижимо. Так, при $n = 2$ мы должны положить $\rho = \pm i$ и $\rho^2 = -1$.

Рассмотрим теперь *группу диэдра*. Здесь мы имеем прежде всего вращения S^μ (с условием $S^n = 1$), которые, как мы только что видели, можно представить подстановками с детерминантом $\rho^{2\mu}$, где $\rho^n = -1$. Кроме того, имеются вращения $S^\mu T$ периода 2. Чтобы получить простой изоморфизм, мы должны, разумеется, поставить в соответствие вращению T подстановку с детерминантом -1. Но мы знаем, что при перемножении подстановок их детерминанты также перемножаются. Таким образом, $S^\mu T$ представляется подстановкой с детерминантом $-\rho^{2\mu}$. Но этот детерминант также должен равняться -1, ибо $S^\mu T$ имеет период 2. Таким образом, для ρ получаются два условия:

$$\rho^n = -1, \ \rho^{2\mu} = +1 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Это возможно лишь при нечетном n (когда $\rho = -1$). Поэтому *в случае диэдральной группы искомый простой изоморфизм существует при нечетном n и не существует при n четном.*

Для дальнейшего особенно важна отрицательная часть этого предложения, поскольку из нее следует аналогичный запрет для групп тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. *В случае тетраэдра, октаэдра и икосаэдра простой изоморфизм между группами вращений и группами однородных подстановок невозможен*, поскольку все эти группы содержат по крайней мере одну диэдральную подгруппу с четным n — квадратичную подгруппу, а это, как мы видели, исключает возможность изоморфизма.

§ 9. Формы, инвариантные относительно группы. Набор инвариантных форм для циклических и диэдральных групп

Теперь, после того как мы нашли группы однородных подстановок, соответствующие нашим группам вращений, можно, следуя намеченному в § 1 плану, перейти к отысканию тех форм $F(z_1, z_2)$, которые с точностью до численного множителя остаются неизменными при этих подстановках. Такие *инвариантные формы* (этот термин мы в дальнейшем сохраним) задают, если приравнять их нулю, точечные конфигурации, переходящие в себя при всех вращениях из рассматриваемой группы, и это утверждение обратимо. Далее, всякая такая точечная конфигурация распадается на группы сопряженных точек, рассматривавшиеся нами в § 10 предыдущей главы. Следовательно, произвольная инвариантная форма будет произведением инвариантных форм, задающих эти простейшие системы точек. Относительно возникающих таким образом *базисных форм* мы можем сделать некоторые предварительные замечания. Если число элементов в группе равно N, то общая группа сопряженных точек состоит из N различных точек. Поэтому общая базисная форма имеет степень N и зависит от одного существенного (т. е. входящего не в виде общего множителя) параметра, поскольку семейство групп точек одномерно. Но помимо общих групп точек есть и *специальные* группы точек, содержащие меньше N различных точек. В соответствии с этим существуют *специальные базисные формы* степени N/ν, которые, если возвести их в степень ν, можно рассматривать как особый случай общих базисных форм.

Если мы хотим развить дальше эти общие результаты, нам придется выделить случай циклических групп среди прочих.

В случае *циклической группы* среди групп точек есть лишь две специальных, содержащих по одной точке, а именно два полюса. В соответствии с этим имеется две специальных базисных формы первой степени. В той системе координат, которая была введена в § 4 при изучении циклической группы, это просто z_1 и z_2. Но теперь мы легко можем построить общую базисную форму, воспользовавшись одним приемом, особенно полезным для оставшихся случаев. Для этого возведем z_1 и z_2 в степень n и убедимся, что под действием подстановки (18) они умножаются на $(-1)^k$. Поэтому при любом $\lambda_1 : \lambda_2$ выражение $\lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n$ будет инвариантной формой. Поскольку ее степень равна n (числу вращений в группе), это базисная форма. *Ясно без дальнейших доказательств, что это общая базисная форма.* Ибо можно подобрать $\lambda_1 : \lambda_2$ так, чтобы форма $\lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n$ обращалась в нуль в любой заданной точке сферы и, следовательно, соответствовала группе точек, получаемой из данной вращениями нашей группы.

Таким образом, в этом случае мы получаем следующее решение нашей задачи. *Для циклической группы*

(18) *наиболее общей инвариантной формой является*

$$z_1^\alpha z_2^\beta \prod_i \left(\lambda_1^{(i)} z_1^n + \lambda_2^{(i)} z_2^n\right), \tag{35}$$

где α, β — любые целые неотрицательные числа, а $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$ — любые комплексные параметры.

В остальных случаях теория отличается только тем, что кроме общих групп из N точек *существует три специальных группы*, содержащих меньшее число различных точек. Для кратностей, которые должны быть приписаны каждому из этих особых случаев, мы сохраним обозначения ν_1, ν_2, ν_3, введенные в § 9 предыдущей главы. Группы точек, о которых идет речь, содержат соответственно N/ν_1, N/ν_2, N/ν_3 различных точек и порождают три специальных базисных формы F_1, F_2, F_3 тех же степеней. Можно показать, что формы $F_1^{\nu_1}$, $F_2^{\nu_2}$, $F_3^{\nu_3}$ умножаются на один и тот же множитель при каждой однородной подстановке из соответствующей группы. Поэтому *любая линейная комбинация вида*

$$\lambda_1 F_1^{\nu_1} + \lambda_2 F_2^{\nu_2} + \lambda_3 F_3^{\nu_3}$$

является инвариантной формой и (как показывает ее степень) базисной формой.

Но общая базисная форма содержит, как мы говорили, лишь один единственный параметр, в то время как отношение $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ содержит два. Мы заключаем отсюда, что для представления всех базисных форм достаточно рассматривать линейные комбинации вида

$$\lambda_1 F_1^{\nu_1} + \lambda_2 F_2^{\nu_2}$$

и, следовательно, для F_1, F_2, F_3 существует соотношение

$$\lambda_1^{(0)} F_1^{\nu_1} + \lambda_2^{(0)} F_2^{\nu_2} + \lambda_3^{(0)} F_3^{\nu_3} = 0. \tag{36}$$

Исключая $F_3^{\nu_3}$ с помощью этого соотношения, мы получаем окончательно в качестве выражения для общей инвариантной формы

$$F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma \prod_i \left(\lambda_1^{(i)} F_1^{\nu_1} + \lambda_2^{(i)} F_2^{\nu_2}\right), \tag{37}$$

где неотрицательные целые числа α, β, γ и комплексные параметры $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$ вполне произвольны.

В *случае диэдра* общая теория, изложенная здесь, в системе координат из § 4 выглядит настолько просто, что результат можно выписать сразу. Мы имеем

$$N = 2n, \quad \nu_1 = \nu_2 = 2, \ \nu_3 = n$$

и соответственно

$$(38) \qquad F_1 = \frac{z_1^n + z_2^n}{2}, \quad F_2 = \frac{z_1^n - z_2^n}{2}, \quad F_3 = z_1 z_2.$$

Уравнение $F_2 = 0$ задает вершины диэдра, $F_1 = 0$ — середины граней, а $F_3 = 0$ — пару полюсов. Для F_1, F_2 и F_3 имеется в полном согласии с (36) соотношение

$$(39) \qquad F_1^2 - F_2^2 - F_3^n = 0.$$

Что касается *тетраэдра*, *октаэдра* и *икосаэдра*, то нахождение специальных базисных форм требует здесь более тщательного рассмотрения, к которому мы теперь и переходим *).

§ 10. Подготовка к отысканию тетраэдральных и октаэдральных форм

В случае *тетраэдра* и *октаэдра* мы должны различать в соответствии с § 5 два положения системы координат. В первом из них вершины октаэдра (т. е. точки пересечения координатных осей со сферой) имеют значения

$$z = 0, \quad \infty, \ \pm 1, \ \pm i,$$

и поэтому *октаэдр задается уравнением*

$$(40) \qquad z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = 0.$$

Аналогично выпишем уравнения для двух соответствующих тетраэдров и куба, образованного их восемью

---

*) Рассмотренные здесь формы F_1, F_2, F_3 (в некоторых специальных случаях) вместе с соотношениями между ними встречаются впервые в статье: Schwarz. Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine algebraische Function ihres vierten Elementen ist // Borchardt's J.— 1872.— Bd 75. См. также многочисленные сообщения Цюрихского ежеквартального журнала начиная с 1871 г. Причина, по которой я лишь мельком ссылаюсь на эту фундаментальную работу, состоит, во-первых, в том, что в ней точка зрения на формы F совсем отлична от нашей. Отправной точкой служат там некоторые вопросы теории конформных преобразований, о которых мы скажем подробнее в следующей главе. Во-вторых, г-н Шварц не рассматривает ни группы подстановок, ни связь с теорией инвариантов, которую мы здесь так подчеркиваем.

вершинами. Восемь вершин куба имеют координаты

$$\pm\xi = \pm\eta = \pm\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вершины одного из тетраэдров выделяются, если выбрать из 8 возможных комбинаций знаков такие 4, для которых произведение $\xi\eta\zeta$ положительно. Подставляя их в формулы (6), получаем для четырех вершин тетраэдра

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-1}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{3}-1}.$$

Отсюда (перемножая соответствующие линейные формы) получаем *уравнение первого тетраэдра*

$$z_1^4 + 2\sqrt{-3}z_1^2z_2^2 + z_2^4 = 0. \tag{41}$$

Аналогично для *двойственного тетраэдра*

$$z_1^4 - 2\sqrt{-3}z_1^2z_2^2 + z_2^4 = 0 \tag{42}$$

и, наконец, *для куба*, перемножая левые части (41) и (42), получаем

$$z_1^8 + 14z_1^4z_2^4 + z_2^8 = 0. \tag{43}$$

В дальнейшем левые части равенств (40), (41), (42), (43) я буду обозначать t, Φ, Ψ, W соответственно.

Если теперь повернуть систему координат на угол 45° вокруг оси ζ, как мы делали в конце § 5, то эти формы перейдут в другие, имеющие вещественные коэффициенты. Мы обозначим их теми же буквами со штрихом:

$$\begin{aligned} t' &= z_1z_2(z_1^4 + z_2^4),\\ \Phi' &= z_1^4 + 2\sqrt{3}z_1^2z_2^2 - z_2^4,\\ \Psi' &= z_1^4 - 2\sqrt{3}z_1^2z_2^2 - z_2^4,\\ W' &= z_1^8 - 14z_1^4z_2^4 + z_2^8. \end{aligned} \tag{44}$$

Будучи приравнены нулю, эти формы, разумеется, задают октаэдр, тетраэдр, двойственный тетраэдр и куб в новой системе координат.

§ 11. Тетраэдральные формы

В соответствии с разъяснениями, данными в § 9, все наше рассмотрение тетраэдральных форм сводится к двум задачам: во-первых, вычислить постоянные множители, на которые умножаются базисные формы

$$(45)\qquad \begin{aligned} \Phi &= z_1^4 + 2\sqrt{-3}z_1^2z_2^2 + z_2^4,\\ \Psi &= z_1^4 - 2\sqrt{-3}z_1^2z_2^2 + z_2^4,\\ t &= z_1z_2\left(z_1^4 - z_2^4\right) \end{aligned}$$

или соответствующие им формы Φ', Ψ', t' (44) под действием однородных подстановок тетраэдра; во-вторых, найти соотношение, связывающее Φ^3, Ψ^3 и t^2 или Φ'^3, Ψ'^3 и t'^2. Для решения первой задачи мы воспользуемся результатами об образующих группы тетраэдра, полученными в § 13 предыдущей главы и уже использованными в настоящей главе.

Относительно подстановок квадратичной группы (21) формы Φ, Ψ, t, очевидно, вообще не меняются. С другой стороны, при подстановках, соответствующих вращению U периода 3, Φ и Ψ приобретают множители $e^{2\pi i/3}$ и $e^{4\pi i/3}$, а t остается инвариантной. Таким образом, наряду с Φ^3 и Ψ^3 форма $\Phi\Psi = W$ также инвариантна относительно всех подстановок группы, в то время как сами Φ и Ψ сохраняются лишь подстановками из квадратичной группы.

Последнее обстоятельство служит иллюстрацией одного общего принципа, который устанавливается a priori. А именно, *те подстановки однородной группы, которые оставляют неизменной инвариантную форму, должны составлять нормальную подгруппу полной группы подстановок*. Эти замечания применимы, конечно, и к формам Φ', Ψ', t' и W'.

Убедившись в том, что соотношение между Φ^3, Ψ^3 и t^2 действительно имеется*), мы можем найти его, рассматривая лишь первые члены в выражениях Φ^3, Ψ^3 и t^2. Таким образом, без труда приходим к

$$(46\text{a})\qquad 12\sqrt{-3}\,t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0$$

или

$$(46\text{b})\qquad 12\sqrt{3}\,t'^2 - \Phi'^3 + \Psi'^3 = 0.$$

В связи с полученными здесь результатами можно сделать два замечания. Оба они относятся к инвариантам бинарных форм. Первое поясняет ту роль, которую теория инвариантов будет играть в дальнейшем, а второе

*) Поскольку Φ^3, Ψ^3 и t^2 остаются неизменными относительно тетраэдральных подстановок (22).

объясняет место наших результатов в ряду других хорошо известных достижений этой теории.

Предположим, что из форм (45) нам удалось вычислить только одну, а именно Ф. Тогда теория инвариантов дает нам средства вывести из нее другие тетраэдральные формы просто с помощью дифференцирования. Достаточно лишь определить *коварианты* формы Ф. В самом деле, если Ф преобразуется в себя с точностью до множителя, то тем же свойством обладает любой ее ковариант; это немедленно следует из определения коварианта.

У нас Ф — бинарная форма степени 4 и теория инвариантов показывает*), что такая форма обладает лишь двумя независимыми ковариантами: гессианом формы Ф и функциональным определителем этого гессиана с Ф. Первый имеет степень 4, второй — степень 6; кроме того, первый, как можно убедиться, не совпадает с Ф. Отсюда мы сразу заключаем, что гессиан формы Ф, приравненный нулю, задает двойственный тетраэдр, а функциональный определитель — соответствующий октаэдр. Дело в том, что обе эти формы, будучи приравнены нулю, задают группы точек, переходящие в себя при тетраэдральных вращениях, и не существует других таких групп из 4 и 6 точек, кроме указанных (поскольку 4 вершины тетраэдра, также образующие такую группу, уже учтены уравнением $\Phi = 0$). Таким образом, *мы могли бы найти формы* Ψ *и* t *из* (45), *вычисляя гессиан формы* Φ *и его функциональный определитель с формой* Φ. В самом деле, непосредственное вычисление дает

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z_2 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} = 48\sqrt{-3}\,\Psi$$

и

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial\Psi}{\partial z_2} \end{vmatrix} = 32\sqrt{-3}\,t.$$

*) См., например, Clebsch. Theorie der binären algebraischen Formen.— Leipzig, 1872, с. 134 и след. или любой другой учебник по теории инвариантов, например, Salmon, Fiedler. Algebra der linearen Transformationen.— 2 Aufl.— Leipzig, 1877; Faa de Bruno, Walter. Einleitung in die Theorie der binären Formen.— Leipzig, 1881 и др.

Теория инвариантов приобретает в силу сделанных замечаний характеристик *метода вычислений.* Что касается дальнейших наших исследований с помощью теории бинарных инвариантов, то вернемся к общей теории биквадратичных форм. Пусть

$$F = a_0 z_1^4 + 4a_1 z_1^3 z_2 + 6a_2 z_1^2 z_2^2 + 4a_3 z_1 z_2^3 + a_4 z_2^4 \tag{47}$$

есть такая форма. Тогда мы имеем, как уже объяснялось, два коварианта, которые (с подходящими нормировочными множителями) обозначим буквами H и T:

$$H = \frac{1}{144}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial z_2^2} \end{vmatrix}, \quad T = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial z_2} \\ \frac{\partial H}{\partial z_1} & \frac{\partial H}{\partial z_2} \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Кроме того, имеются два инварианта

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \quad g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \tag{49}$$

(где я использовал в левых частях обозначения, к которым мне все равно пришлось бы прибегнуть в связи с теорией Вейерштрасса эллиптических функций). Наконец, в качестве единственного соотношения между этими формами мы имеем

$$4H^3 - g_2 H F^2 + g_3 F^3 + T^2 = 0. \tag{50}$$

Возьмем теперь нашу форму Φ в качестве F, тогда мы получим, во-первых, что

$$g_2 = 0.$$

Если обратиться к геометрическому языку, объясняемому в цитированной книге Клебша (стр. 171), то это означает, что *уравнение* $\Phi = 0$ *задает эквиангармоническую группу точек* *).

Мы находим, далее, для нашей формы Φ

$$H = -\frac{1}{\sqrt{-3}}\Psi, \quad T = 4t, \quad g_3 = \frac{-4}{3\sqrt{-3}}.$$

---

*) Мы придем, конечно, к тому же результату, если будем геометрически интерпретировать двойное отношение 4 комплексных чисел $z = x + iy$, на сфере, как это сделано во вступительной диссертации г-на Ведекинда (Эрланген, 1874) и его заметке на эту тему в Math. Ann.— 1875.— Bd 9.

Следовательно, тождество (46а) включается в общий результат (50) в качестве частного случая, как можно было предполагать. Мы должны, стало быть, сказать, что наши геометрические рассуждения о теории групп приводят в случае тетраэдральных форм не столько к новым алгебраическим результатам, сколько к новому выводу уже известных результатов.

§ 12. Октаэдральные формы

Обращаясь к *октаэдральным формам*, заметим, что мы уже знаем две из трех специальных базисных форм

$$t = z_1 z_2 \left(z_1^4 - z_2^4\right),$$

(51a) $$W = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8$$

или

$$t' = z_1 z_2 \left(z_1^4 + z_2^4\right),$$

(51b) $$W' = z_1^8 - 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8.$$

Легко проверяется, что с точностью до множителя W совпадает с гессианом t. Новая октаэдральная форма получается, если вычислить функциональный определитель t и W. Мы получаем, пренебрегая множителем,

$$\chi = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12},$$

(52) $$\chi' = z_1^{12} + 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 - z_2^{12}.$$

Легко проверяется, что эта форма χ является третьей специальной базисной формой для октаэдра, т. е. будучи приравнена нулю, дает 12 середин ребер октаэдра. В самом деле, уравнение $\chi = 0$ задает 12 точек, переходящих в себя под действием группы октаэдральных вращений. Но χ отлична от t^2 и, стало быть, речь не идет о 6 вершинах октаэдра с кратностью 2, а других возможных конфигураций не существует.

Мы уже видели, что t и W остаются неизменными при всех однородных подстановках тетраэдра. То же самое, следовательно, верно и для χ, поскольку χ, будучи ковариантом, может умножаться лишь на степень детерминанта подстановки, а этот детерминант в нашем случае равен 1. Далее, в § 5 мы порождали группу однородных октаэдральных подстановок, добавляя к тетраэдральным подстановкам единственную подстановку (23), соответствующую вращению V периода 4. Непосредственное вычисление показывает, что эта подстановка (и тем самым все октаэдральные подстановки, не являющиеся тетраэдральными) меняет знак t. Форма W как гессиан (поскольку мы опять имеем дело с подстановками с детерминантом 1) остается неизменной, а χ, как и t, меняет знак, так что произведение χt сохраняется. Таким образом, формы t^4, W^3, χ^2 остаются неизменными при всех одородных октаэдральных подстановках, и следовательно, между ними имеется соотношение. Опять, учитывая лишь некоторые члены в явных выражениях для этих форм (51) и (52), получаем

$$108t^4 - W^3 + \chi^2 = 0. \tag{53}$$

Это соотношение справедливо также и для t', W', χ'.

Форма t уже давно хорошо известна в теории бинарных форм как ковариант шестой степени бинарной формы четвертой степени, имеющей канонический вид

$$a\left(z_1^4 + z_2^4\right) + 6bz_1^2z_2^2.$$

Кроме того, синтетические геометры по многим поводам детально изучали систему точек $t = 0$, или, на их языке, конфигурацию из трех точечных пар, попарно образующих гармонические четверки точек. Клебш в своей «Теории бинарных алгебраических форм» также рассматривал форму t как особый случай общей бинарной формы степени 6 *). Наконец, что касается уравнения (53), оно вместе с аналогичными ему включается в общую формулу теории инвариантов, выражающую квадрат функционального определителя двух ковариантов в виде многочлена от форм меньшей степени.

§ 13. Икосаэдральные формы

Чтобы определить форму 12-й степени, которая, будучи приравнена нулю, задает 12 вершин икосаэдра, мы сначала найдем координаты этих вершин с помощью наших предыдущих результатов (§ 6). Одна из вершин соответствует точке $z = 0$; подставляя это в 60 неоднородных икосаэдральных преобразований (32), мы полу-

---

*) См. с. 447 и след. См. также Бриоски «Об уравнении октаэдра» (Brioscki. Sulla equazione del ottaedro // Transunti Accad. Nar. Lincei, 3.— 1879.— V. 3) или Кэли «Замечание о функции октаэдра» (Cayley. Note on the oktahedron function.— Quart. J. Math.— 1879.— V. 16).

чаем для 12 вершин выражения

(54) $z=0,\quad \infty,\quad \varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4),\quad \varepsilon^{\nu}(\varepsilon^2+\varepsilon^3)$

$$(\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Мы можем, следовательно, в качестве искомой формы взять произведение

$$z_1 z_2 \prod_{\nu} (z_1-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4)\,z_2) \prod_{\nu} (z_1-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\,z_2)$$

или

$$z_1 z_2 \left(z_1^5-(\varepsilon+\varepsilon_4)^5 z_2^5\right)\left(z_1^5-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)^5 z_2^5\right),$$

или окончательно

$$f=z_1 z_2\left(z_1^{10}+11 z_1^5 z_2^5-z_2^{10}\right). \tag{55}$$

Теперь исходя из полученной формы мы можем снова вычислить ее гессиан, а затем функциональный определитель f и этого гессиана. Мы получаем, таким образом, две формы:

$$H=\frac{1}{121}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix}= \tag{56}$$

$$=-\left(z_1^{20}+z_2^{20}\right)+228\left(z_1^{15}z_2^5-z_1^5 z_2^{15}\right)-494 z_1^{10} z_2^{10},$$

$$T=\frac{1}{20}\begin{vmatrix} \dfrac{zf}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial z_1} & \dfrac{\partial H}{\partial z_2} \end{vmatrix}= \tag{57}$$

$$=\left(z_1^{30}+z_2^{30}\right)+522\left(z_1^{25}z_2^5-z_1^5 z_2^{25}\right)-1005\left(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20}\right).$$

Я утверждаю, что уравнение $H=0$ задает 20 вершин додекаэдра, а уравнение $T=0$ задает 30 середин ребер (концов 15 перекрестных линий).

Чтобы доказать это несколько подробнее, чем это было сделано в случае тетраэдра и октаэдра, заметим прежде всего, что H и T как коварианты формы f задают системы из 20 и 30 точек на сфере, которые переходят в себя при всех 60 икосаэдральных подстановках. Однако точки на сфере под действием этих подстановок в общем случае группируются по 60 и это число уменьшается лишь в трех случаях до 12, 20 и 30 — когда мы имеем дело с вершинами икосаэдра, вершинами додекаэдра или серединами ребер соответственно. Любой набор точек, переходящий в себя под действием группы икосаэдра, должен составляться из описанных групп сопряженных точек. Поэтому число точек в таком наборе имеет вид

$$\alpha \cdot 60 + \beta \cdot 12 + \gamma \cdot 20 + \delta \cdot 30,$$

где α, β, γ, δ — целые неотрицательные числа, причем β, γ и δ дают кратности, с которыми наш набор содержит вершины икосаэдра, вершины додекаэдра и середины их ребер.

Но в случае $H = 0$ это число равно 20, а в случае $T = 0$ оно равно 30; в каждом случае имеется единственная возможность для α, β, γ, δ, а именно в первом случае $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma = 1$, во втором — $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$. Это и есть наше утверждение.

Исследуем теперь поведение f, H и T при однородных икосаэдральных подстановках, имея в виду множитель, на который они могут умножаться.

Рассматривая лишь порождающие подстановки (24), (26), мы получаем после некоторых вычислений, что f остается неизменной при всех них. То же самое поэтому верно и для H и T, поскольку мы определили H и T как коварианты f, а детерминант подстановок (27) равен 1. Таким образом, f, H и t ведут себя максимально просто. Между величинами f^5, H^3 и T^2 заведомо существует линейная зависимость. Опять, учитывая начальные члены в выражениях (55), (56), (57), получаем

$$T^2 = -H^3 + 1728 f^5. \tag{58}$$

Мы получили результат, вполне аналогичный тем, которые мы имели в случае тетраэдра и октаэдра. Если мы захотели бы здесь указать связи с общей теорией инвариантов бинарных форм, то в этом случае мы не могли бы сослаться на более ранние работы. Сами формы f, H и T были впервые найдены при изучении правильных многогранников и описанной около них $(x+iy)$-сферы. Основные свойства инвариантности формы f были исследованы мною именно с этой точки зрения в цитированной статье из 9 тома Math. Annalen. Однако на эту тему имеется ряд более поздних работ.

Они связаны с вопросом о *характеризации с точки зрения теории инвариантов формы* f и других форм, которые мы рассматривали. В этом направлении я сам объявил в 9 томе Math. Annalen теорему о том, что форма f, как и введенные выше формы Φ и t, характеризуется тождественным обращением в нуль ее 4-го трансвектанта $(f, f)^4$. Эту теорему г-н Ведекинд дополнил в своей диссертации, показав, что за тривиальными исключениями не существует бинарных форм, для которых 4-й трансвектант с самой собой тождественно равен нулю, кроме форм Ф, t и f *). Г-н Фукс в своих исследованиях по теории форм **) ввел в рассмотрение другое аналогичное свойство: все коварианты этих форм, имеющие меньшую степень или являющиеся степенями форм меньшей степени, тождественно равны нулю. Г-н Гордан показал затем ***), что указанное свойство вполне характеризует формы Ф, t и f. Я упомяну, наконец, последнюю работу Альфана ****). Он исходит из того, что выполняется соотношение

$$\lambda_1^{(0)}F_1^{\nu_1} + \lambda_2^{(0)}F_2^{\nu_2} + \lambda_3^{(0)}F_3^{\nu_3} = 0,$$

и показывает, что оно может иметь место лишь в исследованных нами случаях. Мы можем, таким образом, считать, что наши формы определяются этими тождествами. Эти результаты Альфана тесно связаны, кроме того, с задачей нахождения всех конечных групп бинарных однородных подстановок, которую мы рассмотрим в пятой главе этой части.

§ 14. Фундаментальные рациональные функции

Потратив достаточно времени на инвариантные формы, принадлежащие группе однородных подстановок, уже легко сделать последний шаг и построить такую рациональную функцию аргумента $z = \frac{z_1}{z_2}$, которая остается неизменной при всех дробно-линейных подстановках § 7. В самом деле, для этого достаточно взять отношение двух инвариантных форм одинаковых степеней от z_1 и z_2. В § 1 я говорил, что во всех наших случаях можно

*) W e d e k i n d. Studien im binären Werthgebient.— Carlsruhe, 1876. См. также Бриоски «Об одном классе бинарных форм» (B r i o s c h i. Sopra una classe di forme binaire // Ann. di Mat., 2.— 1877.— T. 8). Позже Бриоски исследовал также те формы восьмой степени, которые пропорциональны своему 4-му трансвектанту. См. C. r. Acad. Sci. Paris.— 1883.— V. 96.

**) См. Göttinger Nachrichten.— Dec. 1875, а также Borchardt's J.— 1876.— Bd 81; Borchardt's J.— 1878.— Bd 85. Простые формы г-на Фукса — это в точности наши базисные формы.

***) G o r d a n. Binäre Formen mit verschwindenden Coordinaten // Math. Ann.— 1877.— Bd 12.

****) H a l p h e n. Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables // Mémoires présentés par divers savants a l'Académie.— 1883.— T. 28. (Работа, представленная на премию Парижской Академии 1880 г.)

построить *одну* такую функцию, которая, если приравнивать ее всевозможным константам, задаст все инвариантные группы точек на сфере. Это означает, как легко понять, что существует рациональная функция указанного вида степени N, где N — число дробно-линейных подстановок в рассматриваемой группе.

Прежде чем мы фактически построим такие *фундаментальные рациональные функции* и тем самым дадим кратчайшее доказательство их существования, полезно обсудить место, занимаемое такими функциями среди всех инвариантных функций.

Я утверждаю, что любая инвариантная функция является рациональной функцией аргумента Z. В самом деле, если $R(z)$ — инвариантная функция, то она принимает одинаковые значения во всех точках, которые получаются из одной с помощью N вращений из нашей группы. Но в этих N точках функция Z также принимает одно значение. Таким образом, z задает алгебраическое соответствие между функциями Z и R, при котором каждому значению Z сопоставляется ровно одно значение R, т. е. R становится однозначной функцией аргумента Z. Без пояснений видно, что и, обратно, всякая рациональная функция аргумента Z будет инвариантной.

Я утверждаю теперь, что описанными свойствами функция Z определяется однозначно с точностью до дробно-линейного преобразования. Действительно, пусть Z' — другая рациональная функция, задающая, если приравнивать ее всевозможным константам, все самосопряженные группы точек. Тогда Z' рационально зависит от Z и Z рационально зависит от Z'. Поэтому Z' обязана быть дробно-линейной функцией аргумента Z: $Z' = \frac{\alpha Z+\beta}{\gamma Z+\delta}$. Наконец, ясно, что любую функцию Z' этого вида мы можем взять с тем же успехом, что и Z, в качестве искомой.

Следовательно, для того чтобы определить ее однозначно, мы должны подчинить фундаментальную рациональную функцию Z трем дополнительным соотношениям.

Для *циклической группы* порядка n можно взять

$$Z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n. \tag{59}$$

Таким образом, Z будет обращаться в нуль в одном из полюсов и в ∞ — в другом, а на экваторе будет по модулю равной единице. В оставшихся случаях мы должны выделить три специальные группы точек, входящие в общие группы с кратностями ν_1, ν_2 и ν_3. По распространенной традиции мы нормализуем нашу Z так, чтобы на этих группах точек она принимала значения 1, 0 и ∞ соответственно. Тогда Z будет иметь вид $c\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}}$, а $Z-1$ — вид $c'\frac{F_1^{\nu_1}}{F_2^{\nu_2}}$, где F_1, F_2, F_3 — три формы, названные нами базисными, а c и c' таковы, что равенство

$$c\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}} - 1 = c'\frac{F_1^{\nu_1}}{F_2^{\nu_2}}$$

и есть тождество, связывающее F_1, F_2, F_3,— этим c и c' однозначно определяются.

Обращаясь теперь к вопросу о явном вычислении функции Z в каждом случае, я использую форму записи, в которой одновременно участвуют Z и $Z-1$,— именно, я полагаю $Z:(Z-1):1$ пропорциональными:

$$cF_2^{\nu_2} : c'F_1^{\nu_1} : F_3^{\nu_3}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей таблице, на которую затем будем часто ссылаться:

1. *Диэдр*:

$$Z:(Z-1):1 = \left(\frac{z_1^n - z_2^n}{2}\right)^2 : \left(\frac{z_1^n + z_2^n}{2}\right)^2 : -(z_1z_2)^n. \tag{60}$$

2. *Тетраэдр*:

$$Z:(Z-1):1 = \Psi^3 : -12\sqrt{-3}\,t^2 : \Phi^3 \tag{61a}$$

или

$$Z:(Z-1):1 = \Psi'^3 : -12\sqrt{3}\,t'^2 : \Phi'^3 \tag{61b}$$

в соответствии с первой или второй системой координат.

3. *Октаэдр*, также в двух системах координат:

$$Z:(Z-1):1 = W^3 : \chi^2 : 108t^4 \tag{62a}$$

или

$$Z:(Z-1):1 = W'^3 : \chi'^2 : 108t'^4. \tag{62b}$$

4. *Икосаэдр*:

$$Z:(Z-1):1=H^3:-T^2:1728f^5. \tag{63}$$

По поводу обозначений см. основные формулы § 11, 12 и 13.

§ 15. Замечания о расширенных группах

В заключение вернемся еще раз к расширенным группам (§ 7). Мы хотим знать, как ведут себя наши фундаментальные рациональные функции относительно этих групп. С аналитической точки зрения расширенные группы получаются добавлением к группам дробно-линейных преобразований подстановки $z'=\bar{z}$, причем в случае тетраэдра мы предполагаем, что выбрана вторая система координат. Но все наши базисные формы имеют в этих предположениях вещественные коэффициенты, а Z также выражается через них с помощью вещественных коэффициентов. Таким образом, мы видим, что *под действием операций расширенной группы, не принадлежащих исходной группе дробно-линейных преобразований, функция Z переходит в комплексно сопряженную.*

Соединяя это утверждение с предложениями, полученными в § 11 предыдущей главы, мы приходим к следующему замечательному результату: *функция Z принимает вещественные значения в тех точках сферы, которые лежат на плоскостях симметрии рассматриваемой конфигурации, и только в этих точках.* Тем самым точки этих плоскостей задаются уравнением $\operatorname{Im} Z=0$.

Оглядываясь назад, мы можем сказать, что наша вторая глава связала геометрические конструкции первой главы с важной областью современной математики — *алгеброй линейных преобразований* и соответствующей *теорией инвариантов*. Точно так же в следующих двух главах мы установим связь наших построений с двумя другими современными теориями: *римановой теорией функций* и *теорией Галуа алгебраических уравнений.*

ГЛАВА III

ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка основных проблем

Исследования предыдущей главы привели нас (см. формулы (59)—(63) предпоследнего параграфа) к некоторой рациональной функции Z аргумента z, которая остается неизменной относительно группы дробно-линейных подстановок и через которую любая другая инвариантная функция рационально выражается. Этот результат естественно приводит к рассмотрению уравнения, которое мы будем называть *уравнением, принадлежащим рассматриваемой группе*. А именно, *мы будем теперь предполагать, что численное значение Z задано произвольно, и будем искать соответствующее z как неизвестное, другими словами, будем рассматривать не Z как функцию аргумента z, а z как функцию аргумента Z.* Уравнение, соответствующее в этом смысле циклической группе, согласно формуле (59) § 14 главы II представляет собой не что иное, как биномиальное уравнение

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = Z. \tag{1}$$

Другие уравнения получаются аналогичным образом из формул (60)—(63). Я запишу их здесь кратко в виде соотношения

$$c\,\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}} = Z, \tag{2}$$

которое мы уже использовали в предыдущей главе. Здесь F_1, F_2 и F_3 означают те три базисные формы, через которые все остальные инвариантные формы выражаются в виде многочленов, а ν_1, ν_2, ν_3 в каждом случае берутся из таблицы, полученной в § 9 предыдущей главы, которую для удобства пользования я приведу здесь еще раз:

	ν_1	ν_2	ν_3	N
Диэдр	2	2		2
Тетраэдр	2	3	3	12
Октаэдр	2	3	4	24
Икосаэдр	2	3	5	60

Я добавил последний столбец, дающий число N, равное в каждом из случаев степени соответствующего уравнения *).

Однако к уравнениям (1) и (2) приводит лишь часть предыдущих исследований. Еще одна проблема возникает при рассмотрении самих инвариантных форм. Под действием линейных подстановок с определителем 1 эти формы остаются неизменными с точностью до множителя. Нетрудно выделить те формы, для которых этот множитель равен 1 и которые мы будем называть абсолютными инвариантами. Мы увидим ниже, что эти абсолютные инварианты в каждом случае являются полиномиальными функциями трех базисных форм. Явные выражения для абсолютных инвариантов и связывающие их тождества таковы:

I. *Циклические группы*:

(4) формы $z_1z_2,\ z_1^{2n},\ z_2^{2n}$;

тождество $(z_1z_2)^{2n} = z_1^{2n}z_2^{2n}$.

II. *Диэдральные группы.*

В этом случае мы имеем формы

$$F_1 = \frac{z_1^n + z_2^n}{2}, \quad F_2 = \frac{z_1^n - z_2^n}{2}, \quad F_3 = z_1z_2$$

и соотношение

$$F_1^2 = F_2^2 + F_3^n.$$

Если обратиться к абсолютным инвариантам, мы получим *для четного* n

(5a) формы $F_3^2,\ F_1^2,\ F_1F_2F_3$;

тождество $(F_1F_2F_3)^2 = F_1^2F_3^2\left(F_1^2 - F_3^n\right)$

*) Обозначение N будет также использоваться иногда для степени уравнения (1).

и *для нечетного n*

$$(5b)\quad \begin{array}{ll} \text{формы} & F_3^2,\ F_1^2F_3,\ F_1F_2; \\ \text{тождество} & (F_1F_2)^2 F_3^2 = \left(F_1^2F_3\right)\left(F_1^2F_3 - F_3^{n+1}\right). \end{array}$$

III. *Группа тетраэдра* *):

$$(6)\quad \begin{array}{ll} \text{формы} & F_1 = t,\ F_2F_3 = W,\ F_2^3 = \Phi^3; \\ \text{тождество} & W^3 = \Phi^3\left(\Phi^3 - 12\sqrt{-3}\ t^2\right). \end{array}$$

IV. *Группа октаэдра*:

$$(7)\quad \begin{array}{ll} \text{формы} & F_2 = W,\ F_3^2 = t^2,\ F_1F_3 = \chi t; \\ \text{тождество} & (\chi t)^2 = t^2\left(W^3 - 108t^4\right). \end{array}$$

V. *Группа икосаэдра*:

$$(8)\quad \begin{array}{ll} \text{формы} & F_1 = T,\ F_2 = H,\ F_3 = f; \\ \text{тождество} & T^2 + H^3 = 1728 f^5. \end{array}$$

Допустим теперь, что в каком-либо из этих случаев заданы численные значения трех наших форм, подчиняющиеся соответствующему тождеству, и требуется *найти отсюда значения переменных* z_1 *и* z_2. Эту задачу мы будем в дальнейшем называть *проблемой форм*. Число решений проблемы форм всегда равно $2N$, где N — степень уравнения, принадлежащего рассматриваемой группе, и все эти решения получаются из любого одного при помощи $2N$ однородных линейных подстановок точно так же, как N решений уравнения получались из любого одного с помощью N дробно-линейных подстановок.

§ 2. Редукция проблемы форм

Решение проблемы форм всегда можно получить из решения соответствующего уравнения при помощи дополнительного извлечения квадратного корня. Например, для циклических групп мы через формы (4) находим правую часть (1):

$$Z = \frac{(z_1z_2)^n}{z_2^{2n}} = \frac{z_1^{2n}}{(z_1z_2)^n},$$

*) В случае тетраэдра и октаэдра я использую, в отличие от предыдущего, нештрихованные буквы.

и, решая (1), находим $z=z_1/z_2$. Наконец, сами z_1, z_2 можно получить, подставляя найденное значение z_1/z_2 в известную форму второй степени z_1z_2 (которую мы теперь обозначим буквой X), откуда

$$(9) \qquad z_2=\sqrt{\frac{X}{z}},\quad z_1=zz_2.$$

В других случаях рассуждение совершенно аналогично. Дело в том, что мы можем не только рационально выразить Z (см. (2)) в терминах форм (5)—(8), но и указать рациональное выражение от этих форм, имеющее степень 2 относительно z_1z_2. В качестве такового я всегда выбираю

$$(10) \qquad X=\frac{F_2F_3}{F_1}.$$

Если мы теперь определим из (2) отношение $z_1/z_2=z$, то, сравнивая с (10), получаем

$$(11) \qquad z_2=\sqrt{\frac{X(z_1,\, z_2)}{X(z,\, 1)}},\quad z_1=zz_2,$$

где $X(z_1,\, z_2)$ означает заданное значение величины (10), а $X(z,\, 1)$ — определенную рациональную функцию аргумента z:

$$\frac{F_2(z,\, 1)\, F_3(z,\, 1)}{F_1(z,\, 1)}.$$

Заодно мы получаем возможность упростить первоначальную проблему форм или, как мы будем говорить, *произвести ее редукцию* *). В силу (9) и (11) значения z_1 и z_2 зависят только от X и Z, которые, в свою очередь, являются рациональными функциями форм (4)—(8). Представим эти значения z_1 и z_2 в (4)—(8). Тогда они будут рациональны по X, поскольку все они имеют четную степень. В то же время они будут рациональны и по Z. Это следует из того, что они являются рациональными функциями аргумента z, не меняющимися при соответствующих N дробно-линейных подстановках. Поэтому в дальнейшем, говоря о проблемах форм, мы не будем предполагать заданными формы (4)—(8) (при этом пришлось бы каждый раз учитывать тождественные соотношения между ними), а будем сразу считать известными

*) На возможность такой редукции мне указал г-н Нётер, который пришел к ней совсем другим способом в своих общих исследованиях о конформных отображениях поверхностей.

X и Z и рассматривать z_1 и z_2 как функции этих двух величин.

Я приведу здесь явные выражения форм (4)—(8) как рациональных функций аргументов X и Z. Их можно легко проверить, рассматривая, с одной стороны, как составлены Z и X из форм (4)—(8), и, с другой стороны, учитывая соотношения между этими формами. Мы получаем:

I. *Для циклических групп*:

$$z_1 z_2 = X, \quad z_1^{2n} = ZX, \quad z_2^{2n} = \frac{X}{Z}. \tag{12}$$

II. *Для диэдра: при четном n*

$$F_3^2 = \frac{X^2 Z - 1}{Z}, \quad F_1^2 = -\frac{X^n \cdot (Z-1)^{(n+2)/2}}{Z^{n/2}}, \tag{13a}$$

$$F_1 F_2 F_3 = -\frac{X^{n+1}(Z-1)^{(n+2)/2}}{Z^{\frac{n}{2}}}$$

и *при нечетном n*

$$F_3^2 = \frac{X^2 Z - 1}{Z}, \quad F_1^2 F_3 = -\frac{X^{n+1}(Z-1)^{(n+3)/2}}{Z^{n+1/2}}, \tag{13b}$$

$$F_1 F_2 = -\frac{X^n (Z-1)^{(n+1)/2}}{Z^{(n-1)/2}}.$$

III. *Для тетраэдра*:

$$F_1 = -\frac{X^3 (Z-1)^2}{432 Z}, \quad F_2 F_3 = -\frac{X^4 (Z-1)^2}{432 Z}, \tag{14}$$

$$F_2^3 = -\frac{X^6 (Z-1)^3}{5184 \sqrt{-3Z}}.$$

IV. *Для октаэдра*:

$$F_2 = 108 \cdot \frac{X^4 (Z-1)^2}{Z}, \quad F_3^2 = 108 \cdot \frac{X^6 (Z-1)^3}{Z^2}, \tag{15}$$

$$F_1 F_3 = 108^2 \cdot \frac{X^9 (Z-1)^5}{Z^3}.$$

V. *Для икосаэдра*:

$$F_1 = 12^9 \cdot \frac{X^{15} (Z-1)^8}{Z^5}, \quad F_2 = -12^6 \cdot \frac{X^{10} (Z-1)^5}{Z^3}, \tag{16}$$

$$F_3 = -12^3 \cdot \frac{X^6 (Z-1)^3}{Z^2}.$$

§ 3. План дальнейших исследований

Основные проблемы, к которым мы пришли выше, стоит теперь обсудить в двух аспектах: с точки зрения теории функций и чисто алгебраически. Откладывая второе до следующей главы, мы обратимся здесь к теоретико-функциональным рассмотрениям.

Во всех наших случаях корень основного уравнения z является алгебраической функцией*) одного параметра Z, а решения z_1, z_2 проблемы форм кроме Z зависят еще от X. Однако эта зависимость настолько проста, что не требует никакого дополнительного исследования, поэтому z_1 и z_2 нас также будут интересовать далее только как функции параметра Z.

Предстоящее рассмотрение естественно разбивается на два этапа: сначала следует дать *качественное описание поведения ветвей* наших функций, а затем указать *способы вычисления их значений* при помощи какого-либо сходящегося итерационного процесса (например, разложения в ряды). Первое достигается в результате исследования *конформного соответствия***), задаваемого нашими функциями (§ 4, 5). При этом мы заодно выясним *вид* тех рядов, которые необходимы для вычисления различных ветвей наших функций (§ 5). Коэффициенты этих рядов можно будет легко найти после того, как мы докажем, что *z как функция параметра Z удовлетворяет простому дифференциальному уравнению третьего порядка, а z_1 и z_2 являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами* (§ 6—9). Явный вид этих уравнений покажет нам (§ 10), что z_1 и z_2 являются специальными случаями *P-функций Римана*, что соединит наши исследования с хорошо известной и активно развивающейся областью современного анализа.

Результаты, которые мы получим, в основном содержатся в упоминавшейся выше работе г-на Шварца***),

---

*) Здесь и часто в дальнейшем речь идет о многозначных функциях.— *Примеч. ред.*

**) Термин «конформное соответствие» (в оригинале Conformen Abbildung) здесь и далее означает «многозначное конформное отображение» = «комплексно аналитическая модель многозначной функции».— *Примеч. ред.*

***) Schwarz. Ueber dienigen Falle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementen darstellt // Borchardt's J.— 1872.— Bd 75.— S. 292—335.

с той только разницей, что порядок изложения материала у Шварца обратен нашему. Сначала для двух частных решений z_1, z_2 дифференциального уравнения гипергеометрического ряда он выводит дифференциальное уравнение третьего порядка, от которого зависит частное $z = z_1/z_2$ двух частных решений этого уравнения. Затем исходя из условия, что z является алгебраической функцией переменной Z, он исследует область значений независимой переменной Z и получает в конце концов основное уравнение, связывающее z и Z*). Мы же, напротив, начинаем с этого уравнения, строим по нему конформное соответствие между Z-сферой и z-сферой, на основании которого выводим дифференциальное уравнение третьего порядка для z, от него переходим к дифференциальному уравнению второго порядка для P-функции или, что в принципе то же самое, для гипергеометрического ряда. На этом последнем шаге мы используем идею, предложенную г-ном Фуксом в его уже упоминавшейся выше работе **),— представить функцию $X(z_1, z_2)$ (т. е. форму, зависящую от z_1 и z_2) непосредственно в терминах Z.

Несомненно, я мог бы сделать предстоящее изложение гораздо более компактным, если бы потребовал от читателя специальных знаний, относящихся к P-функции Римана, или, по меньшей мере, владения основами современной теории линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, развитой г-ном Фуксом. Но несмотря на эту жертву объему мое изложение обладает тем преимуществом, что сравнительно быстро вводит читателя в только что перечисленные области исследований. В этой связи я хотел бы указать на § 3 пятой главы, где будут непосредственно найдены наиболее общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами, которые имеют алгебраические интегралы.

§ 4. Конформное соответствие между z и Z

Приступая к изучению конформного соответствия, задаваемого функцией $z(Z)$, мы будем считать, что комплексные значения $z = x + iy$ принадлежат сфере, тогда как $Z = X + iY$ будут интерпретироваться как точки

*) Я перечислил здесь только те результаты г-на Шварца, которые имеют непосредственное отношение к нашему вопросу.

**) См. сноску на с. 63.

плоскости *). На плоскости Z мы проведем ось вещественных чисел, разбивая ее тем самым на положительную и отрицательную полуплоскости. Кроме того, мы выкинем из нее две точки $Z=0$, ∞, когда будем заниматься биномиальным уравнением (1), и соответственно три точки $Z=1$, 0, ∞ в случае других уравнений.

Глядя на уравнения (1), (2), а также на более подробные формулы (59)—(63) из предыдущей главы, мы видим, что все листы решения в случае биномиального уравнения циклически переставляются при обходе вокруг точек $Z=0$, ∞; в остальных случаях из N имеющихся листов ν_1 штук циклически переставляются в точке $Z=1$, ν_2 штук — в точке $Z=0$ и ν_3 штук — в точке $Z=\infty$. Я утверждаю, что *функция $z(Z)$ не имеет других точек ветвления, кроме только что перечисленных.* Вообще, если рациональная функция **) Z аргумента $z=z_1/z_2$ задана в виде

$$Z=\frac{\varphi(z_1, z_2)}{\psi(z_1, z_2)},$$

где φ и ψ являются целыми однородными функциями степени N соответствующих переменных, то для того чтобы найти те значения z (а стало быть и Z), в которых происходит ветвление, надо приравнять нулю функциональный определитель $(2N-2)$-й степени:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\frac{\partial\psi}{\partial z_2}-\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}.$$

μ-кратное обращение в нуль этого определителя в точке $z=z_0$ соответствует тому, что в точке $Z=Z_0$ циклически переставляются $\mu+1$ ветвей функции $z(Z)$ ***). Если мы вычислим этот функциональный определитель в каждом из случаев (1), (2), то получим только те точки, которые

*) Тем, кто недостаточно хорошо знаком с теорией конформных отображений, лучше всего обратиться к недавно опубликованной книге: Holzmüller. Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandschaft und der conformen Abbildungen...— Leipzig, 1882.

**) Здесь имеется в виду *локально рациональная* функция.— *Примеч. ред.*

***) Сформулированное здесь правило отличается от того, которое приводится в учебнике, использованием однородных координат z_1, z_2. Преимущество этого подхода состоит в том, что конечные и бесконечные значения z объединяются в одной формуле точно так же, как это происходит при геометрической интерпретации z как точки сферы и как этого требует современная концепция бесконечности.

нам уже известны. В случае биномиального уравнения мы получаем попросту $z_1^{n-1} z_2^{n-2} = 0$; в остальных случаях (вспоминая, что ν_1 всегда равно 2, а F_1 суть функциональный определитель F_2 и F_3) мы получаем

$$F_1^{\nu_1-1} F_2^{\nu_2-1} F_3^{\nu_3-1} = 0.$$

Здесь различные корни $F_1 = 0$ приводят к значению $Z = 1$, а корни $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$ — соответственно к $Z = 0$ и $Z = \infty$ *).

Полученных сведений уже достаточно для того, чтобы полностью охарактеризовать структуру исследуемого конформного соответствия. Если называть n-угольником любую лежащую на сфере фигуру, образованную нужным числом вершин, соединенных непрерывными кривыми, и заметить, что каждому значению соответствует N значений z, а каждому z — единственное значение Z, так как Z является рациональной функцией аргумента z, то немедленно получим:

в случае биномиального уравнения (1) *две полуплоскости Z попеременно соответствуют $2N$ лункам на z-сфере с вершинами в полюсах этой сферы* (*т. е. в точках, для которых* $z_1 z_2 = 0$) *и углами π/N, покрывающим сферу полностью и без самопересечений.*

Аналогичным образом в случае (2) *две полуплоскости Z попеременно соответствуют $2N$ треугольникам на z-сфере с углами π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3 при вершинах соответственно в одной из точек, где $F_1 = 0$, в одной из точек, где $F_2 = 0$, и в одной из точек, где $F_3 = 0$.*

Заметим теперь, что все корни (1) и (2) могут быть в обоих случаях получены из какого-либо одного из них при помощи N последовательных линейных преобразований, соответствующих вращениям z-сферы относительно центра. Отсюда сразу следует, что

те N лунок или треугольников, которые в каждом из случаев соответствуют положительной полуплоскости Z, точно так же, как и те N лунок или треугольников, ко-

*) В действительности для установления нашего результата вовсе не обязательно было точно вычислять функциональный определитель, достаточно было бы заметить, что общее количество найденных нами точек ветвления с учетом их кратностей в обоих случаях, для $Z = 0, \infty$ и $Z = 1, 0, \infty$, совпадает со степенью $2N - 2$ функционального определителя (каждому $(\nu - 1)$-кратному корню функционального определителя надо сопоставить ν ветвей, которые переставляются циклически).

торые соответствуют отрицательной полуплоскости Z, конгруэнтны между собой.

Наконец, вспомним теорему, доказанную нами в заключительном параграфе предыдущей главы при помощи расширенных групп. Мы показали тогда, что Z принимает вещественные значения только вдоль больших кругов, высекаемых на сфере плоскостями симметрии наших конфигураций. Теперь же вещественные значения Z разделяют две полуплоскости на Z-плоскости, так что получаем окончательно:

линии, которые ограничивают рассматриваемые нами лунки или треугольники, представляют собой не что иное, как большие круги, отвечающие плоскостям симметрии; поэтому сами лунки или треугольники совпадают с фундаментальными областями расширенных групп, введенными нами в § 11 первой главы.

Я призываю читателя самостоятельно продумать структуру описанных выше формальных соответствий, поскольку у нас здесь нет места для их более подробного обсуждения*). Представление, которое соответствует биномиальному уравнению, конечно же, много изучалось и в других работах, только вместо z-сферы в них рассматривалась плоскость, которая приводится в соответствие со сферой при помощи стереографической проекции**).

В последующих параграфах я буду оставлять в стороне случай биномиального уравнения и циклические группы вообще в связи с теми отличиями, которые отделяют их от остальных случаев; простые результаты, относящиеся к этим группам, я буду давать в качестве примечаний.

§ 5. Общее поведение функций z_1 и z_2; разложения в ряды

Результатом геометрического представления функции $z(Z)$, данного нами в предыдущем параграфе, явилось разбиение z-сферы, многолистно накрывающей Z-пло-

---

*) В частности, один лишь беглый взгляд на конфигурацию, соответствующую *уравнению икосаэдра*, дает такую изящную теорему: *при вещественном значении Z это уравнение всегда имеет четыре и только четыре вещественных корня.*

**) Г-н Кирхгоф в своей книге (K i r c h h o f f. Vorlesungen über mathematische Physik.— Leipzig, 1876) называет серпами (Sicheln) то, что соответствует нашим лункам.

скость, на области однолистности*). В соответствии с этим при изучении поведения функций $z_1(Z)$ и $z_2(Z)$ мы вновь сосредоточим свое внимание на геометрии z-сферы. Оставляя, как это и предполагалось, в стороне случай циклических групп, обратимся к формуле (11), которую перепишем в следующем виде:

$$(17) \qquad z_2 = \sqrt{X \frac{F_1(z,1)}{F_2(z,1)\,F_3(z,1)}}, \quad z_1 = zz_2.$$

Задаваемые этой формулой z_1 и z_2 будут однозначными функциями на поверхности, которая двулистно накрывает z-сферу и имеет ветвление во всех тех точках, где либо $F_1 = 0$, либо $F_2 = 0$, либо $F_3 = 0$ (при этом точка $z = \infty$ тоже учитывается), а потому имеет род

$$(18) \qquad p = -1 + \frac{N}{2}\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3}\right).$$

Сначала мы укажем нули и полюсы (а их, конечно, должно быть одинаковое количество) для каждой из этих функций. Что касается z_2, то она имеет нули — причем на самом деле простые нули**) — во всех точках, где $F_1 = 0$, а также в точке $z = \infty$, т. е. всего в $\frac{N}{\nu_1} + 1$ точках. С другой стороны, z_2 имеет простые полюсы во всех точках, где $F_2 = 0$, а также во всех отличных от $z = \infty$ точках, где $F_3 = 0$, т. е. всего полюсов $\frac{N}{\nu_2} + \frac{N}{\nu_3} - 1$ и это число действительно совпадает с $\frac{N}{\nu_1} + 1$ при рассматриваемых нами значениях N и ν.

С функцией z_1 дело обстоит точно так же с той лишь разницей, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ поменяются местами (в обеих этих точках $F_3 = 0$).

Теперь мы без особого труда можем выяснить характер разложения трех наших функций z, z_1, z_2 в степенные ряды в окрестности каждой из точек $Z = 1$, 0, ∞.

*) Аналогичным образом можно изучать поведение любых однозначных функций $Z = P(z)$. См., например, Hermann. Geometrische Untersuchungen über den Verlauf der elliptischen Transcendenten im complexen Gebiete // Schlömlich's Z.— 1883.— Bd 28.

**) Про функцию, которая принимает значение 0 или ∞ в точке ветвления z_0 двулистной поверхности, говорят, что она имеет в z_0 простой нуль или полюс, если первый член ее разложения в этой точке имеет вид $(z - z_0)^{1/2}$ или $(z - z_0)^{-1/2}$ соответственно. Если $z_0 = \infty$, то вместо $(z - z_0)$ следует взять $1/z$.

Я решу эту задачу лишь в той мере, в какой это нужно для применения в последующих параграфах. Условимся на некоторое время, что под $Z - Z_0$ понимается при $Z_0 = \infty$ величина $1/Z$, а под $z - z_0$ при $z_0 = \infty$ — соответственно $1/z$. Далее, пусть z_0 является одним из значений z, соответствующих Z_0. Тогда непосредственно из приведенного в предыдущем параграфе конформного представления функции z следует такая общая теорема:

В окрестности каждой из точек $Z_0 = 0$, 1, ∞ функция $z - z_0$ обладает разложением в ряд по возрастающим степеням $Z - Z_0$:

$$z - z_0 = a(Z - Z_0)^{1/\nu} + b(Z - Z_0)^{2/\nu} + \ldots, \tag{19}$$

в котором коэффициент a отличен от нуля, а ν имеет значение ν_1, ν_2 или ν_3 в соответствии с тем, какая из точек $Z_0 = 1$, 0, ∞ рассматривается.

Рассмотрим теперь частный случай $Z_0 = \infty$, $z_0 = 0$ и получим соответствующие разложения для функций z_1, z_2. Для этого мы вернемся к формуле (2)

$$c\frac{F_2^{\nu_2}}{F_3^{\nu_3}} = Z$$

и заметим, что в левой части здесь стоит произведение дроби c/z^{ν_3} и рациональной функции аргумента z^{ν_3}, которая при $z = 0$ имеет значение -1 в случае икосаэдра и $+1$ — в остальных случаях. Следовательно, разложение для z имеет вид

$$z = \left(\frac{\pm c}{Z}\right)^{1/\nu_3} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{Z}\right), \tag{20}$$

где знак минус перед c ставится только в случае икосаэдра, а $\mathfrak{P}(1/Z)$ является рядом по целым возрастающим степеням $1/Z$, первый член которого равен $+1$. Рассмотрим теперь формулу (17). Возникающее там отношение $\frac{F_1(z, 1)}{F_2(z, 1)\,F_3(z, 1)}$ распадается, как и выше, в произведение $1/z$ и рациональной функции аргумента z^{ν_3}, которая при $z = 0$ имеет значение -1 для икосаэдра и $+1$ — в остальных случаях. Если мы подставим в (17) вместо z разложение (20), то возникающие в случае икосаэдра знаки минус взаимно уничтожатся, поскольку ν_3 является в этом случае нечетным числом. Таким образом, из (20) и (17) получаются следующие разложения для z_1 и z_2:

$$(21)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{X}\left(\frac{c}{Z}\right)^{\frac{1}{2\nu_3}} \mathfrak{B}_1\left(\frac{1}{Z}\right), \\ z_2 &= X\left(\frac{Z}{c}\right)^{\frac{1}{2\nu_3}} \mathfrak{B}_2\left(\frac{1}{Z}\right), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ являются рядами по целым положительным степеням $1/Z$, начинающимися с члена $+1$.

Мы не будем обращаться к этим формулам вплоть до § 10, но я, тем не менее, напомню здесь, что значение константы c равно -1 в случае диэдра, $+1$ в случае тетраэдра, $1/108$ в случае октаэдра и $1/1728$ в случае икосаэдра.

§ 6. Переход к дифференциальному уравнению третьего порядка

Теперь, как и было намечено выше, мы переходим к рассмотрению того дифференциального уравнения третьего порядка, которому должна удовлетворять функция $z(Z)$. Сам факт существования такого уравнения выводится из того, что *все N ветвей функции z переводятся друг в друга дробно-линейными преобразованиями.* Делается это следующим образом. Пусть η будет вообще любой функцией аргумента Z. Оказывается, что из $\dfrac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ и из первой, второй и третьей производной этой дроби можно составить выражение, в котором константы $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ взаимно уничтожатся. Тем самым мы получаем дифференциальное выражение третьего порядка от функции η, которое остается неизменным при дробно-линейных преобразованиях η. Если в качестве η взять z, то получающееся дифференциальное выражение в силу сформулированного выше свойства будет одним и тем же для всех ветвей функции z. Поэтому наше дифференциальное выражение при $\eta=z$ является однозначной функцией аргумента Z, причем эта функция является рациональной функцией, так как z есть алгебраическая функция аргумента Z. Приравнивая эту функцию нашему дифференциальному выражению, мы и получим дифференциальное уравнение третьего порядка с рациональными коэффициентами, которое имеет частное решение $\eta=z$.

Итак, сначала мы должны построить необходимое дифференциальное выражение третьей степени. Пусть $\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$. Дифференцируя по Z тождество

$$\gamma\eta\zeta - \alpha\eta + \delta\zeta - \beta = 0,$$

получаем соотношения

$$\gamma(\eta'\zeta + \eta\zeta') - \alpha\eta' + \delta\zeta' = 0,$$
$$\gamma(\eta''\zeta + 2\eta'\zeta' + \eta\zeta'') - \alpha\eta'' + \delta\zeta'' = 0,$$
$$\gamma(\eta'''\zeta + 3\eta''\zeta' + 3\eta'\zeta'' + \eta\zeta''') - \alpha\eta''' + \delta\zeta''' = 0,$$

в которых β отсутствует с самого начала, а исключение остальных констант приводит после простых преобразований к уравнению

$$\begin{vmatrix} 0 & \zeta' & \eta' \\ 2\eta'\zeta' & \zeta'' & \eta'' \\ 3\eta''\zeta' + 3\eta'\zeta'' & \zeta''' & \eta''' \end{vmatrix} = 0.$$

После разделения переменных получаем

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2.$$

Следовательно, искомое выражение имеет вид

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2. \tag{22}$$

В дальнейшем оно будет обозначаться символом $[\eta]$ или символом $[\eta]_Z$ *).

Выясним теперь, как изменится $[\eta]_Z$, если вместо Z ввести новую переменную Z_1. Если

$$Z = F(Z_1), \quad Z' = \frac{dZ}{dZ_1}, \ \ldots,$$

то получаем последовательно

$$\frac{d\eta}{dZ_1} = \frac{d\eta}{dZ} Z',$$

$$\frac{d^2\eta}{dZ_1^2} = \frac{d^2\eta}{dZ^2} Z'^2 + \frac{d\eta}{dZ} Z'',$$

$$\frac{d^3\eta}{dZ_1^3} = \frac{d^3\eta}{dZ^3} Z'^3 + 3\frac{d^2\eta}{dZ^2} Z'Z'' + \frac{d\eta}{dZ} Z'''.$$

---

*) Как любезно сообщил мне г-н Шварц, это выражение возникало в исследованиях Лагранжа о конформных отображениях: Lagrange. Sur la construction des cartes géographiques.— Nouveaux Mémories de l'Académie de Berlin, 1779. Дальнейшие ссылки можно найти в уже неоднократно упоминавшемся трактате г-на

Следовательно, нужная нам формула имеет вид

$$(23)\qquad [\eta]_{Z_1} = [\eta]_Z Z'^2 + [Z]_{Z_1}.$$

В частности, если Z зависит от Z_1 дробно-линейно,

$$Z = \frac{AZ_1 + B}{CZ_1 + D},$$

то $[Z]_{Z_1}$ исчезает, и мы получаем просто

$$(24)\qquad [\eta]_{Z_1} = [\eta]_Z \frac{(AD - BC)^2}{(CZ_1 + D)^4}.$$

§ 7. Связь с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

Прежде чем идти дальше, мы установим связь между обсуждавшимся выше дифференциальным уравнением третьего порядка и линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка, тем более что вскоре нам представится случай ею воспользоваться. Допустим, вообще, что задано линейное дифференциальное уравнение с рациональными коэффициентами

$$(25)\qquad y'' + py' + qy = 0.$$

Для двух произвольных частных решений y_1, y_2 этого уравнения положим

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}.$$

Если Z описывает какую-либо замкнутую кривую на плоскости, то y_1 и y_2 заменяются определенными линейными комбинациями y_1 и y_2, и поэтому η может преобразоваться только лишь в дробно-линейную функцию самой себя:

$$\eta \mapsto \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}.$$

Из этого следует, что η удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка обсуждавшегося выше типа,

$$(26)\qquad [\eta]_Z = r(Z),$$

где $r(Z)$ является рациональной функцией Z.

Шварца в Borchardt's J.— Bd 75. В Sitzungberichten der sächsischen Gesellschaft (Januar 1883) я всем ходом изложения попытался продемонстрировать глубочайший смысл дифференциального уравнения третьего порядка $[\eta] = f(z)$, если исходить из приведенного выше в тексте выражения для $[\eta]$.

Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы выразить это $r(Z)$ в терминах коэффициентов p, q из (25). По предположению

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0,$$
$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Комбинируя эти равенства, получаем

(27) $$\left(y_1''y_2 - y_2''y_1\right) + p\left(y_1'y_2 - y_2'y_1\right) = 0.$$

Поскольку

(28) $$\frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2^2} = \eta',$$

мы имеем следующее выражение для логарифмической производной:

$$\frac{y_1''y_2 - y_2''y_1}{y_1'y_2 - y_2'y_1} - 2\frac{y_2'}{y_2} = \frac{\eta''}{\eta'}.$$

Следовательно, (27) можно переписать в виде

(29) $$\frac{\eta''}{\eta'} = -p - 2\frac{y_2'}{y_2}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -p' - 2\frac{y_2''}{y_2} + 2\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^2,$$

что в комбинации с (29) приводит к

$$[\eta] = -\frac{1}{2}p^2 - p' - 2\frac{y_2''}{y_2} - 2p\frac{y_2'}{y_2}.$$

Но, объединяя в правой части этого равенства те члены, которые содержат y_2, мы получим $2q$ ввиду того дифференциального уравнения второго порядка, которому удовлетворяет y_2. *Таким образом, мы получаем*

(30) $$[\eta]_Z = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'.$$

Это и есть искомая нами формула.

Если каждому линейному дифференциальному уравнению второго порядка вида (25) соответствует, как мы только что видели, определенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида (26), то каждому уравнению (26) соответствует, очевидно, бесконечно много уравнений (25). Нужно только положить

$$2q - \frac{1}{2}p^2 - p' = r \tag{31}$$

и в качестве p взять любую (или рациональную, если нам существенно это обстоятельство) функцию Z; после этого q будет определяться уже однозначно (причем q будет рациональной, если p и r были рациональными).

Ясно, что (26) можно полностью решить, если можно полностью решить одно из соответствующих уравнений (25). Наоборот, *решения уравнения* (25) *могут быть легко получены, если известны решения соответствующего уравнения* (26). А именно, интегрируя (27) хорошо известным способом, мы получим

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = ke^{\int p\,dZ}, \tag{32}$$

где буквой k обозначена константа интегрирования. Сравнивая это с (28), получаем ответ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta y_2, \\ y_2 &= \sqrt{\frac{k}{\eta'}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\,dZ}. \end{aligned} \tag{33}$$

Следовательно, если известно решение соответствующего дифференциального уравнения третьего порядка, то для решения дифференциального уравнения второго порядка требуется только одна-единственная квадратура.

§ 8. Явный вид дифференциального уравнения третьего порядка для $z(Z)$

Для того чтобы явно выписать дифференциальное уравнение третьей степени

$$[\eta]_Z = r(Z),$$

частным решением которого является наша функция $z(Z)$, мы воспользуемся разложением $z - z_0$ в ряд по степеням $Z - Z_0$, даваемым формулой (19). Точно выписав это разложение, мы с помощью непосредственного дифференцирования получим ряд для $[z]_Z$. Первые члены этих рядов (которые должны содержать целые степени $Z - Z_0$, поскольку $[z]_Z$ является рациональной функцией Z) в случаях $Z_0=1, 0, \infty$ равны соответственно

$$\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-1)^2},\quad \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2Z^2},\quad \frac{\nu_3^2-1}{2\nu_3^2Z^2}.$$

Я утверждаю теперь, что $[z]_Z$ не имеет полюсов в точках Z_0, не равных 1, 0 или ∞. Действительно, непосредственно из вида конформного соответствия следует, что в этих точках

$$z-z_0=a(Z-Z_0)+b(Z-Z_0)^2+\ldots,$$

где $a\neq 0$, а значит, ряд для $[z]_Z$ содержит лишь целые положительные степени $Z-Z_0$. В соответствии с этими результатами мы положим

$$r(Z)=\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-1)^2}+\frac{A}{Z-1}+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2Z^2}+\frac{B}{Z}+C,$$

где A, B, C следует определить так, чтобы разложение $r(Z)$ в ряд по степеням $1/Z$, возникающее в окрестности точки $Z=\infty$, начиналось с приведенного выше члена $\dfrac{\nu_3^2-1}{2\nu_3^2Z^2}$. *Наши результаты показывают, что A, B, C будут константами, которые однозначно определяются этим условием.* Действительно, мы сразу же получаем

$$C=0,\quad A+B=0,\quad \frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2}+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2}+A=\frac{\nu_3^2-1}{2\nu_3^2}.$$

Подставляя эти значения в $r(Z)$, мы получаем искомое дифференциальное уравнение

$$(34)\quad [\eta]_Z=\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-1)^2}+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2Z^2}+\frac{\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-1}{2Z(Z-1)},$$

где вместо ν_1, ν_2, ν_3 можно подставить их численные значения из нашей таблицы (3)*).

Три особые точки $Z=1, 0, \infty$ входят в это дифференциальное уравнение без присущей им важной симметрии только потому, что одна из них совпадает с $Z=\infty$. Это

---

*) Для биномиального уравнения (1) соответствующее дифференциальное уравнение получается непосредственным дифференцированием:

$$[\eta]_Z=\frac{n^2-1}{2n^2}\cdot\frac{1}{Z^2}.$$

можно исправить, если ввести вместо Z некоторую новую переменную, являющуюся дробно-линейной функцией Z и принимающую в точках $Z=1,\ 0,\ \infty$ три конечных значения $a_1,\ a_2,\ a_3$. Применяя формулу (24) и обозначая новую переменную снова буквой Z, мы получим

$$(35)\qquad [\eta]_Z = \frac{1}{(Z-a_1)(Z-a_2)(Z-a_3)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-a_1)}(a_1-a_2)(a_1-a_3)+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2(Z-a_2)}(a_2-a_3)(a_2-a_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu_3^2-1}{2\nu_3^2(Z-a_3)}(a_3-a_1)(a_3-a_2)\right\}.$$

Как мы видим, в этой формуле желаемая симметрия присутствует.

§ 9. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка для z_1 и z_2.

Результаты § 7 позволяют нам написать наиболее общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами

$$(36)\qquad y''+py'+qy=0,$$

имеющее два частных решения y_1, y_2, отношение которых равно нашему z; надо лишь в соответствии с формулами (31) и (34) взять p, q так, чтобы

$$2q-\frac{1}{2}p^2-p'=\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-1)^2}+\frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2Z^2}+\frac{\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-1}{2Z(Z-1)}.$$

Я утверждаю, что *среди этих дифференциальных уравнений всегда существует одно такое, которому удовлетворяют решения z_1, z_2 нашей проблемы форм.* В самом деле, мы заранее знаем, что z_1 и z_2 должны быть частными решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. А именно, если z_1^0 и z_2^0 — две соответственных ветви наших функций, то все остальные ветви выражаются в виде линейных однородных функций z_1^0, z_2^0, а стало быть, все они удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ \frac{d^2 z_1^0}{dZ^2} & \frac{dz_1^0}{dZ} & z_1^0 \\ \frac{d^2 z_2^0}{dZ^2} & \frac{dz_2^0}{dZ} & z_2^0 \end{vmatrix} = 0,$$

и надо только показать, что коэффициенты при y'', y' и y, возникающие при раскрытии этого определителя, будут рациональными функциями Z. На самом деле это ясно и безо всяких вычислений, поскольку при замене z_1^0, z_2^0 другой парой соответственных ветвей

$$\alpha z_1^0 + \beta z_2^0, \quad \gamma z_1^0 + \delta z_2^0$$

эти коэффициенты остаются неизменными в силу правила мультипликативности для определителей и того обстоятельства, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ по условию проблемы форм. Наша задача теперь состоит в том, чтобы выяснить, какому из уравнений (36) удовлетворяют наши z_1, z_2.

Пусть y_1, y_2 — два решения уравнения (36) таких, что $y_1/y_2 = z$. *Вычислим сначала величину*

$$X(y_1, y_2) = \frac{F_2(y_1, y_2) F_3(y_1, y_2)}{F_1(y_1, y_2)}.$$

Для этого воспользуемся уравнением

$$c\,\frac{F_2^{\nu_2}(z, 1)}{F_3^{\nu_3}(z, 1)} = Z.$$

Дифференцируя его и учитывая, как и выше, что F_1 во всех случаях совпадает с точностью до числового множителя с функциональным определителем F_2 и F_3, мы получим, что для подходящей константы c'

$$c'\,\frac{F_2^{\nu_2-1}(z, 1)\,F_1(z, 1)}{F_3^{\nu_3+1}(z, 1)}\,z' = 1$$

или, если ввести другую константу c'',

$$c'' Z\,\frac{F_1(z, 1)}{F_2(z, 1)\,F_3(z, 1)}\,z' = 1.$$

Положим здесь $z = y_1/y_2$. Тогда

$$c'' Z\,\frac{F_1(y_1, y_2)}{F_2(y_1, y_2)\,F_3(y_1, y_2)}\,(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 1,$$

и, вводя символ X и применяя формулу (32), получаем в итоге

$$X(y_1, y_2) = kc''Ze^{-\int p\,dZ}, \tag{37}$$

что и требовалось. Заметим теперь, что решения нашей проблемы форм z_1, z_2, кроме свойства $z_1/z_2 = z$, должны обладать и тем свойством, что $X(z_1, z_2)$ не зависит от Z. *Следовательно, коэффициент p в соответствующем линейном дифференциальном уравнении следует выбирать так, чтобы уничтожить Z в формуле* (37). Как мы видим, это дает $e^{\int p\,dZ} = Z$ или $p = 1/Z$. Подставляя это значение в (36), мы и получим искомое дифференциальное уравнение. После простых преобразований оно будет иметь следующий вид *):

$$0 = y'' + \frac{y'}{Z} + \frac{y}{4Z^2(Z-1)^2}\left\{-\frac{1}{\nu_2^2} - \frac{Z^2}{\nu_3^2} + Z\left(1 - \frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2}\right)\right\}. \tag{38}$$

§ 10. Связь с P-функциями Римана

Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы получить разложение функций z_1, z_2, а с ними и функции $z = z_1/z_2$ в степенные ряды в окрестности произвольной точки $Z = Z_0$. В самом деле, в § 5 мы определили общий вид этих рядов для каждого из рассматриваемых нами случаев, так что для определения коэффициентов этих рядов, которые пока что оставались неизвестными, мы должны лишь подставить эти разложения в (38). В частности, если мы хотим проделать это в окрестности точки $Z_0 = \infty$, то можем воспользоваться сразу формулами (21).

Я не приведу здесь никаких более точных результатов, относящихся к этому шагу, так же как и не буду обсуждать вопросы, связанные со сходимостью и аналитическими свойствами прогрессий, которые получатся при таком разложении, поскольку все эти сведения без труда получаются из рассмотрения наших функций z_1, z_2 с точки зрения хорошо известной и далеко продвинутой

*) Для z_1, z_2, являющихся решениями проблемы форм в случае циклических групп, мы аналогичным образом получим

$$y'' + \frac{y'}{Z} - \frac{y}{4n^2Z^2} = 0.$$

теории. *Я имею в виду теорию P-функций Римана*

$$P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$$

и представление отдельных ветвей таких функций гипергеометрическими рядами Гаусса *). Я уже говорил, что не предполагаю со стороны читателя никаких специальных знаний, касающихся P-функций. Поэтому я могу определить эти функции тем способом, который наиболее удобен для нашего изложения, а именно как *решение следующего дифференциального уравнения второго порядка*:

$$(39)\qquad 0 = p'' + \frac{p'}{x(1-x)}\{(1-\alpha-\alpha')-(1+\beta+\beta')x\} + \\ + \frac{p}{x^2(1-x)^2}\{\alpha\alpha' - (\alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma')x + \beta\beta' x^2\},$$

где $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'$ всегда предполагается равным единице **). Ясно, что (38) получается как частный случай (39), если положить

$$P = y, \quad x = Z,$$

$$\alpha = -\alpha' = \frac{1}{2\nu_2}, \quad \beta = -\beta' = \frac{1}{2\nu_3}, \quad \gamma = \frac{1}{2\nu_1}, \quad \gamma' = \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1};$$

условие $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ при этом будет выполнено, так как ν_1 во всех случаях равно двум. Подставляя это значение ν_1, мы получаем, что *наши* z_1, z_2 *являются частными случаями функций*

$$(40)\qquad P\begin{Bmatrix} \frac{1}{2\nu_2} & \frac{1}{2\nu_3} & \frac{1}{4} & \\ -\frac{1}{2\nu_2} & -\frac{1}{2\nu_3} & \frac{3}{4} & Z \end{Bmatrix}.$$

---

*) Каждому, кто хочет изучить теорию P-функций, лучше всего в дополнение к работам Гаусса 1812 г.: G a u s s. Disquistiones generales circa seriem infinitum...— Werke, t. III и Куммера: K u m m e r. Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe // Crelle's J.— 1836.— Bd 15 — прочитать работу самого Римана: R i e m a n n. Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen // Göttingen Abh.— 1857.— Bd 7.

**) Это уравнение является простой модификацией того уравнения, которое было получено для $P\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma & \\ \alpha'\beta'\gamma' & x \end{pmatrix}$ Риманом (Werke, S. 75).

Среди общих функций, обозначаемых этим символом, наши z_1 и z_2 могут быть выделены и более явно. Именно для этого мы выводили более точные формулы (21). Если мы умножим z_1 на $Z^{\frac{1}{2\nu_3}}$, а z_2 на $Z^{-\frac{1}{2\nu_3}}$, то получающиеся произведения будут иметь конечные отличные от нуля значения в точке $Z=\infty$ и кроме того будут непрерывны в окрестности этой точки. *Формулами* (21) *задаются только те ряды, которые обозначались Риманом* $P^{(\beta)}$ *и* $P^{(\beta')}$ *в работе, которая только что цитировалась*, с той только разницей, что Риман оставлял неопределенными первые коэффициенты этих разложений. Если же мы придадим им такие значения, как в (21), то получим окончательно: *наши* z_1 *и* z_2 *являются такими из функций* (40), *которые получаются из рядов* $P^{(\beta)}$ *и* $P^{(\beta')}$ *с помощью полного аналитического продолжения.*

Этой теоремой и исчерпывается предмет настоящей главы. Я хотел показать, что наши z, z_1, z_2 относятся к тем функциям, которые *могут быть исчерпывающе описаны* современной теорией функций с ее методами геометрического представления и мощным аналитическим аппаратом. Добившись этого, мы в то же время обосновали ту точку зрения, которой должны будем руководствоваться во второй части нашего изложения, а именно, что имеет смысл сводить — в той степени, в которой это возможно — сложные алгебраические функции к нашим z, z_1, z_2.

Изложение этой главы (в гораздо большей степени, чем материал других глав) может рассматриваться лишь как *введение*. Наше стремление сводить все вопросы к возможно более простым рассуждениям на самом деле тормозит изложение той темы, которая в действительности является для нас основной, а именно, чем будут замечательны линейные преобразования z_1, z_2 и z, рассматривавшиеся в прошлой главе, теперь, когда мы считаем z_1, z_2, z функциями Z и можем изменять последнюю переменную так, чтобы она описывала замкнутые траектории на своей плоскости. Следуя результатам, которые будут получены чуть позже, в § 5 (гл. V), мы вполне могли бы установить связь наших функций с P-функциями непосредственно, минуя предварительный вывод точных дифференциальных уравнений. Этот, а также все другие аналогичные вопросы я оставляю читателю для самостоятельного обдумывания, основанного на его собственных познаниях и наблюдениях.

ГЛАВА IV

АГЕБРАИЧЕСКАЯ СТОРОНА НАШИХ ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМ

§ 1. Предмет настоящей главы

От обсуждения теоретико-функциональной стороны наших основных проблем мы переходим теперь к их анализу с точки зрения теории уравнений, которую я понимаю как совокупность взглядов, относящихся к *рациональным резольвентам*, т. е. тем вспомогательным уравнениям, которым удовлетворяют различные функции корней исследуемого уравнения.

Первый важный раздел этой теории, описывающий *общую природу* всех резольвент, составляют результаты, которые в соответствии с основополагающими идеями Галуа *характеризуют отдельные уравнения или системы уравнений в терминах определенной группы перестановок их корней* и которые сейчас обычно называют теорией Галуа (термин «группа» понимается здесь в том специальном смысле, который объяснялся в первой главе). В следующих ниже § 2—4 я изложу основы этой теории в той степени, в которой это необходимо для понимания дальнейшего материала, отсылая читателя за доказательствами к уже цитированным выше учебникам *), **). Это позволит нам сформулировать наши основные проблемы на языке теории Галуа (§ 5, 6). В частности, мы получим, что все наши уравнения могут быть решены при помощи извлечения корней, за исключением икосаэдрального уравнения, простейшие резольвенты которого имеют пятую и шестую степени. В заключительных замечаниях к настоящей главе (§ 16) я более подробно объясню исключительную важность этого результата.

---

*) См. выше сноску на с. 12

**) Мы очень рекомендуем книгу: Чеботарев Н. Г. Теория Галуа.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.— *Примеч. ред.*

Однако во многих алгебраических задачах недостаточно одного только знания *общей природы* возможных резольвент: *требуется умение явно находить эти резольвенты, причем возможно более простым способом.* Этому посвящена вторая часть данной главы. Здесь мы вновь строго ограничиваемся вопросами, имеющими непосредственное отношение к нашим основным задачам. Я прежде всего покажу (§ 7), как можно явно построить вспомогательные резольвенты, дающие решение диэдрального, тетраэдрального и октаэдрального уравнений. После этого я буду подробно заниматься резольвентами пятой и шестой степеней для икосаэдрального уравнения (§ 8—15). Специальные уравнения пятой и шестой степени, которые при этом получаются, будут играть важную роль в нашем дальнейшем изложении. При этом особое ударение я хотел бы сделать на метод, которым мы будем действовать. Он использует, с одной стороны, теорию функций, а с другой стороны — теорию инвариантов, и оба эти направления, соединенные вместе, способны разрешить многие сложные задачи.

§ 2. О группе алгебраического уравнения

Для того чтобы в соответствии с теорией Галуа снабдить каждое уравнение группой, мы для начала рассмотрим классификацию рациональных функций n независимых переменных величин

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

в соответствии с их поведением по отношению к перестановкам величин x. Ясно, что все перестановки, оставляющие без изменения какую-либо фиксированную функцию, образуют подгруппу группы всех перестановок (возможно, совпадающую с этой группой). Точно так же и наоборот: если задана некоторая группа перестановок величин x, то мы всегда можем построить такие рациональные функции, которые инвариантны относительно перестановок из нашей группы и только их. Мы будем называть эти функции *принадлежащими данной группе перестановок* и классифицировать все рациональные функции теми группами, которым они принадлежат.

Теперь мы должны принять во внимание так называемую *теорему Лагранжа* *). Пусть R и R_1 — такие ра-

*) L a g r a n g e. Réflexions sur la résolution algébrique des équations // Mem. Acad. Berlin.— 1770-71.— T. 3 или Oeuvres, t. 3 (§ 100). [См. также цитированную выше книгу Н. Г. Чеботарева, гл. II, § 2, с. 48.— *Примеч. ред.*]

циональные функции, что R остается неизменной под действием всех перестановок из группы, которой принадлежит R_1 (при этом, конечно, не утверждается, что R также принадлежит этой группе). Пусть, далее, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ будут элементарными суммами степеней:

$$(1) \qquad s_1 = \sum_i x_i, \quad s_2 = \sum_i x_i^2, \ \ldots, \ s_n = \sum_i x_i^n.$$

Тогда теорема утверждает, что R представляется в виде рациональной функции аргументов R_1 и $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Мы можем слегка обобщить эту теорему, взяв вместо R_1 некоторый набор рациональных функций $R_1, R_2, \ldots$, и предположить, что R инвариантна относительно действия всех перестановок, не изменяющих каждую из функций $R_1, R_2, \ldots$ Тогда R будет рациональной функцией аргументов $R_1, R_2, \ldots$ и $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Действительно, мы можем составить такую рациональную комбинацию R' из функций $R_1, R_2, \ldots$, которая не меняется при действии тех и только тех перестановок величин x, которые не изменяют каждую из функций $R_1, R_2, \ldots$ Тогда в соответствии с первым вариантом теоремы Лагранжа мы можем рационально выразить R через R' и $s_1, s_2, \ldots, s_n$, что и доказывает наш усиленный вариант этой теоремы.

Пусть задано уравнение n-й степени

$$f(x) = 0,$$

корнями которого являются независимые переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, рассмотренные выше. Тогда мы, во всяком случае, знаем значения всех сумм s_i из (1), а стало быть, применяя рациональные операции, можем получить вообще все рациональные симметрические функции. Если же задать еще и некоторые несимметричные функции $R_1, R_2, \ldots$ переменной x, то по теореме Лагранжа мы можем получить рациональное выражение для любой функции R, инвариантной относительно всех перестановок, не изменяющих никакую из функций $R_1, R_2, \ldots$ Таким образом, к *основным рациональностям* (как мы их далее будем называть) *всегда относятся все рациональные функции, инвариантные относительно некоторой группы перестановок.*

До сих пор x_i предполагались алгебраически независимыми величинами. Но вся теория переносится и на случай, когда x_i алгебраически зависимы*). При этом

*) Примером такой зависимости является, скажем, задание конкретных значений (или специализация) $x_i = \xi_i$.— *Примеч. ред.*

надо только помнить, что выражение «функция остается неизменной при действии определенной группы перестановок величин x» означает, что функция *не изменяет своих численных значений.* Тогда в любом случае *существует такая группа G перестановок величин x, относительно которой инвариантны основные рациональности и только они. Перестановки из G, не изменяющие какой-либо фиксированной рациональной функции величин x, в этом случае также образуют подгруппу в G, и относительно перестановок из G сохраняет смысл введенная выше классификация рациональных функций и остается справедливой теорема Лагранжа.* Возникающую таким образом группу G Галуа назвал *группой уравнения.*

Трудность теории Галуа заключается не столько в этих теоремах, сколько в самом понятии *основной рациональности*, на котором они базируются. Какие функции мы можем отнести к основным рациональностям? Прежде всего те, которые при перестановках величин x принимают рациональные значения, а также рациональные функции величин s с рациональными численными коэффициентами. Но мы можем считать основными рациональностями и произвольные функции R_1, R_2, ..., если нам из каких-либо соображений удалось вычислить их значения. При этом мы просто *присоединяем* (термин Галуа) эти R_1, R_2, ..., *расширяя* тем самым *область рациональности* (термин Кронекера *), с которой работаем. Поэтому в каком-то смысле утверждение теории Галуа, относящееся к вполне конкретному уравнению $f(x) = 0$ вполне определенной степени, оказывается зависящим от нашей субъективной интерпретации. Если мы сразу же присоединим все корни уравнения $f(x) = 0$, то группа уравнения в этом случае будет состоять из одного только единичного элемента. Следует также осознать, что ограничения, накладываемые на уравнения его группой, неизбежно проявляются в специфике коэффициентов уравнения.

§ 3. Общие замечания о резольвентах

Пусть G вновь обозначает группу данного уравнения $f(x) = 0$, а N — порядок этой группы. Единственное условие, которое мы налагаем на G, состоит в том, чтобы она была транзитивна, т. е. чтобы она содержала перестановки, позволяющие любой корень x_k заменить любым дру-

*) Kronecker. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen // J. Math.— 1881.— Bd 92.

гим корнем x_l. В противном случае уравнение $f(x)=0$ обязательно будет приводимо, т. е. неминуемо распадется на два рациональных множителя, и мы упростим себе задачу, рассмотрев вместо уравнения $f(x)=0$ два уравнения, которые получатся, если приравнять нулю каждый из множителей в отдельности.

Возьмем теперь какую-нибудь рациональную функцию R_0 корней x_i, которая не остается неизменной под действием всех перестановок из группы G, а стало быть, не принадлежит области основных рациональностей. Но она вполне может быть инвариантной относительно некоторого количества ν перестановок из G, которые образуют группу g_0. При действии перестановок из G функция R_0 приобретает всего $N/\nu=n'$ различных значений

$$R_0, R_1, \ldots, R_{n'-1}.$$

Но тогда мы можем написать уравнение, которому удовлетворяют эти различные значения:

$$(R-R_0)(R-R_1)\ldots(R-R_{n'-1})=0.$$

Коэффициенты этого уравнения, очевидно, будут основными рациональностями, поскольку они будут симметрическими функциями R_i, а потому инвариантными для всех перестановок из G. Это уравнение называется *резольвентой* исходного уравнения $f(x)=0$ либо *рациональной резольвентой*, если важно подчеркнуть, что оно задает *рациональную* функцию x.

Выясним, сколько различных типов резольвент имеет данное уравнение $f(x)=0$. В связи с этим сделаем одно предварительное замечание. Если бы вместо R_0 мы выбрали другую рациональную функцию корней, принадлежащую той же самой группе g_0, то по теореме Лагранжа ее можно было бы рационально выразить через R_0 и известные рациональности, *поэтому новая резольвента получалась бы из старой (и, аналогично, старая из новой) при помощи рационального преобразования.* Мы будем рассматривать две резольвенты такого типа как *эквивалентные* с точки зрения нашего подхода к резольвентам.

Однако та же самая резольвента может в определенных случаях возникать и тогда, когда мы исходим из подгруппы, отличной от g_0. Действительно, вместо корня R_0 мы могли бы с тем же успехом положить в основу построения резольвенты и любой другой из корней $R_1, R_2, \ldots$ Тогда вместо группы g_0 появилась бы одна из тех групп, которые оставляют неизменными соответственно функции R_1, R_2, ... и которые мы обозначим g_1, g_2, ... Выясним, как эти g_i связаны с исходной подгруппой g_0. Пусть S_i будет одной из тех перестановок величин x, которые переводят R_i в R_0; тогда всевозможные такие перестановки будут иметь вид S_iT_0, где под T_0 понимается произвольная перестановка из g_0. Применим теперь после S_iT_0 обратное преобразование S_i^{-1}, которое переводит R_0 обратно в R_i. *Получим, что R_i остается неизменной при всех перестановках вида*

$$T_i = S_iT_0S_i^{-1}.$$

Но и наоборот, из любого преобразования T_i, оставляющего на месте R_i, можно тем же методом получить T_0 в виде

$$T_0 = S_i^{-1}T_iS_i.$$

Видно, что эта формула является в точности обращением предыдущей, а стало быть, предыдущая формула описывала все возможные перестановки, оставляющие R_i неизменной, т. е. группу g_i. *Следовательно, группа g_i получается из g_0 сопряжением при помощи S_i.*

Если мы рассмотрим теперь все корни R_0, R_1, ..., то в роли S_i смогут выступать любые перестановки из группы G, поскольку для любого S перестановка S^{-1} переводит R_0 в один из R_i. Поэтому $g_0, g_1, \ldots, g_{n'-1}$ могут быть описаны как совокупность всех подгрупп в G, которые сопряжены подгруппе g_0. Ранее мы называли такие подгруппы *ассоциированными*. Коротко суммируя все вышесказанное, получаем окончательную теорему: *данное уравнение $f(x)=0$ имеет столько различных типов резольвент, сколько в соответствующей ему группе G существует различных классов ассоциированных подгрупп.*

Найдем теперь для каждой из полученных таким образом резольвент ее группу Галуа Г. Я утверждаю, что *она состоит из тех перестановок R_i, которые происходят при действии на x_i всевозможными перестановками из G.* В самом деле, всякая функция величин R, которая остается неизменной при таких перестановках величин R, будет инвариантна также и как функция величин x относительно перестановок группы G, и, наоборот, если существует перестановка величин R, изменяющая какую-то функцию величин R, то найдется перестановка величин x, которая изменяет ее как функцию величин x. Поэтому *всегда существует гомоморфизм между группами G и* Г.

Здесь следует сделать одно важное замечание. По построению этот гомоморфизм будет *изоморфизмом*, но, возможно, *кратным*. Он будет *кратным* тогда и только тогда, когда в группе G существует перестановка величин x, оставляющая неизменной *каждую из функций* R_i; все такие перестановки сами образуют группу γ, которая будет самосопряженной подгруппой в G. Резольвенты, получающиеся в каждом из этих двух случаев, играют существенно разную роль в структуре исходного уравнения.

В первом случае любая рациональная функция величин x_i (в том числе и сами x_i) может быть рационально выражена через R_i и основные рациональности. Таким образом, *исходное уравнение само является резольвентой для построенной резольвенты*: решив одно уравнение, мы решим и другое, и наоборот. Заменяя уравнение $f(x)=0$ на его резольвенту, мы, конечно, видоизменяем первоначальную задачу, но никоим образом не упрощаем ее.

Совершенно иная картина происходит в другом случае. Здесь x_i не будет рациональными функциями величин R_i. Если мы найдем R_i, то исходное уравнение $f(x)=0$ придется еще решать. Только задача эта теперь упрощается, поскольку группа G после присоединения R_i *заменится на группу* γ *). Но в то же время и R_i найти будет проще, чем x_i так как *группа соответствующего уравнения* Г *будет меньше, чем* G. Таким образом, исходная задача разбивается на два шага более простого характера.

Ясно, что резольвенты второго типа являются более важными. Однако они могут появиться лишь тогда, когда группа данного уравнения G является *составной*. В этих случаях, построив разложение группы G, мы сможем шаг за шагом упрощать наше уравнение $f(x)=0$, получив тем самым полную серию резольвент для этого уравнения. Именно так и происходит, когда мы используем резольвенты для решения уравнений третьей и четвертой степени.

§ 4. Резольвента Галуа

В соответствии со сказанным выше все резольвенты, группа Г которых просто изоморфна группе G исходного уравнения $f(x)=0$, приводят, вообще говоря, к эквива-

*) Например, уравнение $f(x) = 0$ может при этом стать приводимым (это произойдет, если γ не будет действовать на x_i транзитивно).

лентной задаче. Но среди таких резольвент есть одна, называемая обычно *резольвентой Галуа*, которая играет важную роль в нашем алгебраическом рассмотрении: *она выделяется тем свойством, что каждый из ее корней изменяется при действии любой перестановки величин* x, *входящей в* G. Таким образом, группы g_0, g_1, ..., которые в указанном выше смысле соответствуют ее корням R_0, R_1, ..., сводятся в этом случае к единичным, и соответственно степень этой резольвенты будет максимальной из возможных, т. е. будет равна N. Но, с другой стороны, эта резольвента имеет то преимущество, что *достаточно найти только один из ее корней*. Действительно, по теореме Лагранжа мы сможем через этот корень и основные рациональности выразить любую рациональную функцию величин x.

Рассмотрим теперь свойства резольвенты Галуа более обстоятельно.

Обратимся сначала к ее группе. При действии любой из операций, входящих в группу G, каждый из N корней

$$R_0,\ R_1,\ \ldots,\ R_{N-1}$$

будет переставлен. Поэтому в G не может быть двух операций, которые переставляют один и тот же корень R_i в одно и то же место R_k, а стало быть, любая операция полностью определяется тем, куда она переводит какой-либо один элемент R_i. Добавляя к этому замечание о транзитивности, уже использовавшееся нами, мы можем сказать:

группа Галуа Γ *резольвенты Галуа будет просто транзитивной.*

Поэтому каждой подстановке мы можем взаимно однозначно сопоставить номер того корня R_k, в который она переводит R_0. В соответствии с этим мы далее будем использовать символ S_k для обозначения такой перестановки.

На основании теоремы Лагранжа различные корни R_0, R_1, ..., R_{N-1} можно рационально выразить через первый корень R_0. Формулы, которые при этом получатся, мы запишем следующим образом:

$$(2)\qquad R_0=\psi_0(R_0),\quad R_1=\psi_1(R_0),\ \ldots,\ R_{N-1}=\psi_{N-1}(R_0).$$

Конечно, $\psi_0(R_0)$ является здесь всего лишь другой формой записи для R_0, используемой для единообразия; остальные ψ_i являются рациональными функциями соответствующих аргументов, определенными однозначно с точностью до тех изменений, которые могут быть внесены при помощи соотношения на R_i, даваемого резольвентой Галуа. Выберем одну из этих функций и, отбросив номера корней, напишем

$$(3) \qquad R' = \psi_i(R),$$

после чего рассмотрим преобразование резольвенты Галуа, задаваемое этой формулой (т. е. уравнение для R', которое получается при исключении R из резольвенты Галуа и уравнения (3)). Получится уравнение N-й степени для R', которое имеет по крайней мере один общий корень R_i с первоначальной резольвентой Галуа. Но, по нашему предположению, резольвента Галуа является *неприводимой*, а значит, все корни этих двух уравнений N-й степени являются общими, т. е. сами уравнения должны совпадать. Следовательно, мы получаем такую теорему:

резольвента Галуа переходит в себя при N рациональных преобразованиях (3).

Поэтому если в формулу (3) подставить вместо R какой-либо корень R_k, то получающийся при этом R' будет равен какому-либо другому корню R_j. Но вместо R_k мы можем написать $\psi_k(R_0)$, а вместо R_j можем написать $\psi_j(R_0)$. Следовательно,

$$\psi_j(R_0) = \psi_i\psi_k(R_0),$$

а значит и вообще

$$\psi_j = \psi_i\psi_k,$$

где мы вновь пренебрегаем теми изменениями, которые могут быть внесены в каждую из функций ψ, входящих в это выражение, с использованием даваемого резольвентой Галуа соотношения для R_i. В этом смысле мы имеем:

N рациональных преобразований (3) *образуют группу.*

Выясним, как эта группа связана с группой Галуа Г. Если в правых частях формул (2) заменять R_0 последовательно на R_0, R_1, ..., R_{N-1}, то в левых частях в соответствии с только что сказанным вновь будут получаться корни R_i, идущие в каждом из случаев в различном порядке. Таким образом мы получим N различных способов упорядочения корней R_i. Теперь можно доказать такое утверждение: *N перестановок, с помощью которых эти упорядочения получаются из первоначального упорядочения, как раз и составляют группу* Г. Для этого нужно доказать, что всякая рациональная функция от величин R

$$F(R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}),$$

которая остается неизменной при любой из рассматриваемых нами N перестановок элементов $R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}$, является основной рациональностью. В самом деле, каждая рациональная функция величин R может быть вследствие (2) записана в виде $\Phi(R_0)$. Если мы теперь будем применять к F наши перестановки, то в результате будем получать или $\Phi(R_1)$, или $\Phi(R_2)$ и т. д., где под Φ всякий раз понимается одна и та же рациональная функция. Таким образом,

$$F = \frac{1}{N}(\Phi(R_0) + \Phi(R_1) + \ldots + \Phi(R_{N-1})),$$

а значит, F является симметрической функцией и действительно может быть рационально вычислена, как и утверждалось.

Исследуем теперь более подробно связь группы Γ с найденной выше группой преобразований (3). Если в правую часть (2) подставить R_k вместо R_0, то в левой части R_k возникнет в первой позиции. Таким образом, упорядочение набора R будет таким же, как и упорядочение, получающееся из первоначального применением операции S_k из Γ. Если теперь вместо R_k всюду в правых частях написать $\psi_k(R_0)$, то можно будет сказать, что

Операция S_k *заменяет* $\psi_i(R_0)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ *на* $\psi_i\psi_k(R_0)$.

Аналогично операция S_l будет заменять $\psi_i(R_0)$ на $\psi_i\psi_l(R_0)$, или, что то же самое, $\psi_i\psi_k(R_0)$ на $\psi_i\psi_k\psi_l(R_0)$, где в обоих случаях i предполагается изменяющимся от 0 до $N-1$. Если же мы сначала применим S_k, а затем S_l, то, соединяя два предыдущих утверждения, получим, что

Операция S_kS_l *заменяет* $\varphi_i(R_0)$ *на* $\psi_i\psi_k\psi_l(R_0)$.

Найденное нами отношение между группами, состоящими из S и ψ, в таком виде еще не является изоморфизмом, так как обозначение S_kS_l предполагает, что сначала применяется S_k, а потом S_l, а запись $\psi_k\psi_l(R_0)$ означает, что сначала вычисляется ψ_l от R_0, а уже от этого значения берется ψ_k. Однако наше отношение легко видоизменить так, чтобы получился изоморфизм. Для этого надо только поставить в соответствие S_k *обратную операцию* ψ_k^{-1}. В самом деле, $(\psi_k\psi_l)^{-1} = \psi_l^{-1}\cdot\psi_k^{-1}$. Следовательно, *Существует простой изоморфизм между группой перестановок S и группой преобразований ψ.*

Сформулированная теорема особенно важна тем, что может быть без всяких дополнительных усилий обращена. Действительно, повторяя предыдущие рассуждения в обратной последовательности, мы получаем:

Если неприводимое уравнение N-й степени переводится в себя N рациональными преобразованиями:

$$R' = \psi_0(R), \quad R' = \varphi_1(R), \ldots,$$

то оно будет резольвентой Галуа для себя самого, и его группа Г *связана с группой преобразований ψ описанным выше образом*).*

Если, имея такое уравнение, мы хотим построить какую-нибудь рациональную функцию его корней, инвариантную относительно перестановки S_k из некоторой подгруппы группы Галуа, для того чтобы использовать эту функцию в качестве корня соответствующей резольвенты, то нам достаточно будет найти рациональную функцию единственной переменной R_0, которая переходила бы в себя при соответствующем преобразовании ψ_k. Действительно, подгруппа, содержащая ψ_k, содержит одновременно и Ψ_k^{-1}, а следовательно, взаимно однозначно изоморфно соответствует подгруппе, содержащей S_k.

§ 5. О наших основных уравнениях

Собранное в предыдущих параграфах довольно подробное изложение основ теории Галуа было сделано мною для того, чтобы теперь проанализировать непосредственно по разработанной выше схеме наши основные уравнения, к коим относятся *биномиальные уравнения*, а также *уравнения диэдра*, *тетраэдра*, *октаэдра и икосаэдра*. Во-первых, они, очевидно, *неприводимы*. Из рассмотрений предыдущей главы, основанных на теории функций, следует, что все N листов алгебраических функций, задаваемых нашими уравнениями, если стоящий в правой части каждого из них параметр Z рассматривается как независимая переменная, связаны друг с другом. *Условие заключительной теоремы предыдущего параграфа здесь в*

---

*) Эту теорему не следует путать (а это иногда случается) с определением *абелевых уравнений*. Для последних тоже существуют N рациональных преобразований $R' = \psi_i(R)$, однако дополнительно предполагается, что они *перестановочны*, т. е. $\psi_i\psi_k = \psi_k\psi_i$.

точности выполнено, поскольку все N корней любого из наших уравнений могут быть получены из какого-нибудь одного произвольно выбранного корня при помощи N рациональных преобразований, а именно с помощью N хорошо знакомых нам *дробно-линейных подстановок*.

Таким образом, мы сразу же получаем, что *наши уравнения совпадают со своими резольвентами Галуа*. Дальнейшие выводы сразу следуют из предыдущих наших результатов о соответствующих группах дробно-линейных (неоднородных) преобразований.

Разберемся сначала с *уравнением октаэдра*. Напомним, что соответствующая группа состоит из 24 октаэдральных подстановок. Наибольшей самосопряженной подгруппой в ней является тетраэдральная группа из 12 подстановок, которая, в свою очередь, содержит квадратичную группу из 4 подстановок, и, наконец, в последней имеется циклическая подгруппа из 2 подстановок. Мы заключаем отсюда, что *октаэдральное уравнение может быть решено при помощи четырех вспомогательных уравнений, группы которых имеют порядки* 24/12, 12/4, 4/2 *и* 2 *соответственно, т. е. состоят из* 2, 3, 2 *и* 2 *перестановок*. Группа, порядок которой есть простое число, обязательно будет циклической. Если добавить к этому тот факт, что согласно Лагранжу каждое циклическое уравнение n-й степени может быть заменено биномиальным уравнением n-й степени*), то получим, что *октаэдральное уравнение может быть решено последовательным извлечением квадратного, затем кубического и, наконец, еще двух квадратных корней*. В § 7 эта теорема будет подтверждена точными формулами.

Что касается *тетраэдрального уравнения*, то мы уже решили его в ходе приведенного выше рассуждения, относившегося к октаэдральному уравнению, поскольку тетраэдральная группа встретилась нам в качестве нормальной подгруппы октаэдральной группы. *Для диэдрального уравнения степени* $2n$ мы получаем, что оно должно редуцироваться к биномиальному уравнению n-й степени после извлечения квадратного корня. И, наконец, про-

*) Уравнение n-й степени называется циклическим, если его группа Галуа циклическая, т. е. состоит из одних лишь циклических перестановок $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Метод Лагранжа состоит, как известно, в том, чтобы в качестве новой переменной ввести величину $x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1}$, где $\varepsilon = e^{2i\pi/n}$.

цесс решения самого биномиального уравнения распадается на несколько шагов тогда и только тогда, когда его степень является составным числом.

Таким образом, *икосаэдральное уравнение*, подобно биномиальному уравнению простой степени, стоит несколько особняком, являясь единственным из наших уравнений, не допускающим упрощения при помощи построения резольвент. Если мы захотим построить для этого уравнения хорошие резольвенты (а мы проделаем это ниже, в § 8), то, как нас учат предыдущие исследования икосаэдральной группы, простейшими из тех, которые здесь могут возникнуть, будут резольвенты пятой и шестой степени. Первая из них соответствует тому обстоятельству, что икосаэдральная группа содержит 5 ассоциированных тетраэдральных групп, вторая — тому, что она содержит 6 ассоциированных диэдральных групп, состоящих из 10 операций каждая. Группы Галуа обеих этих резольвент вновь состоят из 60 перестановок. Из предыдущего можно сразу сказать, что группа резольвенты пятой степени состоит из 60 четных перестановок, а стало быть, произведение разностей корней этой резольвенты должно быть рационально. Мы пока еще не можем дать более точного описания группы резольвенты шестой степени, но сделаем это позже (§ 15).

Коль скоро мы применяем результаты предыдущих исследований в рамках теории Галуа, мы не должны забывать одно важное обстоятельство. Дробно-линейность рациональных функций ψ_i, с помощью которых мы задавали перестановки корней в предыдущем параграфе, предполагает, что коэффициенты, входящие в формулы наших линейных подстановок, являются основными рациональностями. Ясно, что они будут корнями из единицы. Тем самым, *для того чтобы придать аккуратность всем предыдущим утверждениям, мы должны предположить, что эти корни из единицы присоединены.* В частности, в случае икосаэдрального уравнения нам следует присоединить корни пятой степени из единицы, т. е. численные иррациональности, задаваемые уравнением

$$\frac{x^5-1}{x-1}=0.$$

Проиллюстрируем на этом примере, что может произойти в противном случае. Известно, что написанное выше уравнение четвертой степени имеет циклическую группу из четырех перестановок *), содержащую, таким образом, самосопряженную подгруппу из двух перестановок. Следовательно, теперь икосаэдральное уравнение имеет группу из $4 \cdot 60$ перестановок, в ней имеется самосопряженная подгруппа из $2 \cdot 60$ перестановок, а в ней — нормальная подгруппа из 60 перестановок. Эта новая большая группа, конечно же, есть группа Галуа резольвенты икосаэдрального уравнения. В частности, резольвенты пятой степени здесь a priori невозможны, поскольку группа не может содержать более $5! = 2 \cdot 60$ перестановок. И действительно, в формуле для произведения разностей корней резольвенты пятой степени, которую мы установим в § 14, в качестве численных иррациональностей возникает только $\sqrt{5}$, поэтому присоединение отдельных корней пятой степени из единицы очевидным образом необходимо для того, чтобы редуцировать группу этой резольвенты лишь к 60 перестановкам. Мы не будем продолжать эти рассуждения далее, поскольку они завели бы нас слишком глубоко в рассмотрения, связанные с теорией чисел **).

§ 6. О проблемах форм

Теперь мы в нескольких словах обсудим проблемы форм, параллельные нашим уравнениям. В каждом случае они представляют собой системы уравнений с двумя неизвестными z_1, z_2. Основные идеи теории Галуа в полной мере применимы и к этим системам, только вместо корней одного уравнения теперь будут выступать отдельные пары решений (z_1, z_2). В частности, мы можем утверждать, что *наши проблемы форм являются резольвентами Галуа для самих себя.* В самом деле, все $2N$ решений каждой из наших проблем форм получаются из любой одной системы решений с помощью $2N$ линейных однородных подстановок, которые нам заранее известны ***). Здесь ими будут описанные выше группы линей-

*) См., например, Bachmann. Die Lehre von der Kreistheilung.— Leipzig, 1872.

**) В нашем изложении теория Галуа предполагается частично известной, и прямо из нее выводятся свойства икосаэдрального уравнения и т. п. В то же время начинающему можно рекомендовать обратить ход наших рассмотрений и воспользоваться свойствами икосаэдрального уравнения для того, чтобы из этого простого примера извлечь основные идеи теории Галуа.

***) Возникающие здесь корни из единицы будут далее в нашем изложении фигурировать как присоединенные величины.

ных *однородных* подстановок, которые и определяют в этом случае группы Галуа для соответствующей проблемы форм.

Все эти однородные группы будут составными, поскольку содержат самосопряженную подгруппу, состоящую из единицы и подстановки

$$z_1' = -z_1, \quad z_2' = -z_2.$$

Из этого следует, что наши проблемы форм будут решены, если решить сначала уравнение с группой из N перестановок, а затем извлечь квадратный корень. В точности этот результат и был уже получен нами в § 2 предыдущей части, когда мы занимались редукцией проблем форм. Поэтому будет излишним тратить здесь время на дальнейшие подробности.

§ 7. Решение диэдрального, тетраэдрального и октаэдрального уравнений

Вывод обещанных формул для решения диэдрального, тетраэдрального и октаэдрального уравнений мы начнем с рассмотрения *октаэдрального уравнения*. Как и выше, запишем его в виде

$$\frac{W^3}{108t^4} = Z. \tag{4}$$

В качестве корня первого вспомогательного уравнения мы должны взять рациональную функцию аргумента z, которая остается неизменной при 12 тетраэдральных подстановках. Ясно, что проще всего выбрать в качестве такой функции правую часть *тетраэдрального уравнения*. Обозначая ее Z_1, получим

$$\frac{\Phi^3}{\Psi^3} = Z_1. \tag{5}$$

Далее, в качестве неизвестной для второго вспомогательного уравнения, соответствующего *квадратичной группе*, мы возьмем

$$-\frac{(z_1^2 - z_2^2)^2}{4z_1^2 z_2^2} = Z_2, \tag{6}$$

и, наконец, за неизвестную в третьем вспомогательном уравнении примем правую часть *биномиальной* формулы:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = Z_3. \tag{7}$$

Тогда четвертое уравнение возникает просто из вычисления самого отношения $\frac{z_1}{z_2} = z$ по данному Z_3.

Для того чтобы явно написать вспомогательные уравнения для Z_1, Z_2, Z_3 и, наконец, для z_1/z_2, надо только вспомнить, что все рациональные функции аргумента z, остающиеся неизменными при тетраэдральных подстановках, будут рациональными по Z_1; аналогично все рациональные функции аргумента z, не меняющиеся при подстановках из квадратичной группы, будут рациональными по Z_2 и т. д. Если вдобавок учитывать степени рассматриваемых функций, то получим, что Z будет рациональной функцией второй степени аргумента Z_1, Z_1 — рациональной функцией второй степени аргумента Z_2, Z_2 — рациональной функцией третьей степени аргумента Z_3, а само Z_3, как уже отмечалось, суть рациональная функция второй степени аргумента z. Одного взгляда на наши предыдущие формулы достаточно, чтобы выписать эти функции явно. Ими будут соответственно

$$\frac{-12Z_1}{(Z_1-1)^2} = Z, \tag{8}$$

$$\left(\frac{Z_2-\alpha}{Z_2-\alpha^2}\right)^3 = Z_1, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \tag{9}$$

$$-\frac{(Z_3-1)^2}{4Z_3} = Z_2 \tag{10}$$

и, наконец, самоочевидная формула

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = Z_3. \tag{11}$$

Именно эти формулы, если Z_1, Z_2, Z_3 и z последовательно рассматриваются в них как неизвестные, и будут искомыми вспомогательными уравнениями. Мы видим, в частности, что вспомогательное кубическое уравнение (9) требует для своего решения всего лишь извлечения кубического корня, как мы и предполагали *).

Тетраэдральное уравнение можно без лишних неприятностей решить при помощи тех же самых формул. В самом деле, для этого надо последовательно решать

*) Появление в (9) иррациональности α, выделяющее ее из остальных формул, эквивалентно тому, что для редукции циклического уравнения третьей степени к биномиальной форме приходится, как только что отмечалось, прибегать к помощи $\sqrt[3]{3}$.

наши вспомогательные уравнения, только начиная с (9). Общее *диэдральное уравнение*

$$(12)\qquad -\frac{\left(z_1^n - z_2^n\right)^2}{4z_1^n z_2^n} = Z$$

также не представляет никаких трудностей; для того чтобы свести его к биномиальному, надо лишь ввести новую неизвестную

$$(13)\qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = Z_1$$

в точности так, как это было сделано выше для квадратичной группы. Тогда для Z_1 мы получим квадратное уравнение

$$(14)\qquad -\frac{(Z_1 - 1)^2}{4Z_1} = Z,$$

решив которое, сможем вычислить $z = z_1/z_2$ из биномиального уравнения (13).

§ 8. Резольвента пятой степени для икосаэдрального уравнения

Обратившись теперь к икосаэдральному уравнению, мы в первую очередь во всех подробностях исследуем резольвенту пятой степени. Здесь мы сначала воспользуемся теми же самыми основными теоремами, что и в предыдущем параграфе. Отдельная тетраэдральная группа, содержащаяся в группе икосаэдра, оставляет неизменными трехкратно бесконечное количество рациональных функций z двенадцатой степени, которые, как мы удостоверились выше, линейно выражаются через одну произвольную функцию; мы назовем ее r и полностью определим лишь несколько позже. Если в качестве неизвестной выбирается эта r, то искомая резольвента будет иметь вид

$$(15)\qquad F(r) = Z,$$

где F будет рациональной функцией пятой степени с численными коэффициентами, а Z то же, что и в правой части икосаэдрального уравнения. Наша цель состоит в том, чтобы определить F. Конечно, она сразу же будет достигнута, если мы найдем точное выражение r как функции $z = z_1/z_2$ и сравним его с левой частью уравнения икосаэдра. Однако этот путь оказывается несколько более сложным, чем в случаях, разобранных в предыдущем параграфе, и поэтому я предпочел метод, который будет изложен в следующем параграфе и который позволяет находить значение $F(r)$, вообще не прибегая к явным выражениям через z *).

Наряду с этим первым методом, который можно назвать *теоретико-функциональным*, имеется и второй метод — *метод теории инвариантов*. Он связан с однородными заменами z_1, z_2 и соответствующими формами, которые остаются неизменными; поэтому он в первую очередь интересен для *проблемы икосаэдра*, и для нахождения резольвенты икосаэдрального уравнения нам надо будет лишь надлежащим образом видоизменить уже имеющиеся здесь результаты.

В § 1 предыдущей главы мы собрали вместе описания полных систем абсолютно инвариантных форм для каждой из рассматриваемых нами групп однородных преобразований. Для 120 преобразований однородной икосаэдральной группы — это формы f, H, T. В то же время для 24 подстановок однородной тетраэдральной группы это будут соответствующая *октаэдральная форма* t, *ассоциированный куб* W и форма χ двенадцатой степени, вместо которой, однако, мы теперь возьмем форму f, являющуюся линейной комбинацией χ и t^2. Таким образом, наиболее общая абсолютно инвариантная тетраэдральная форма будет произвольной целой функцией аргументов t, W и f (однородных по z_1, z_2).

Пусть G будет такой формой. Если вместе с этим предположить, что G не является инвариантной для икосаэдральных подстановок, то мы при помощи последних получаем из нее 5 различных форм, которые будем обозначать G_0, G_1, ..., G_4. Образуем произведение

$$\prod_{\nu} (G - G_\nu).$$

Коэффициенты при различных степенях G здесь будут симметрическими функциями G_ν, т. е. икосаэдральными формами. *Следовательно, G будет удовлетворять уравнению пятой степени*

$$G^5 + aG^4 + bG^3 + cG^2 + dG + e = 0, \tag{16}$$

коэффициенты которого a, b, c, d, e являются целыми функциями f, H, T. Вычисление этих коэффициентов

*) Этот метод многократно применялся мною для нахождения уравнений, определенных аналогичным образом, в Math. Ann.— 1877.— Bd 12.— S. 175; 1878.— Bd 14.— S. 141, 146.

производится немедленно. Поскольку нам известна степень G_ν по z_1, z_2, то мы a priori знаем, что a, b, c, d, e будут выражаться линейно через *вполне определенные* комбинации из f, H, T, число которых конечно, и все, что нужно для нахождения возникающих здесь неопределенных численных коэффициентов, так это сравнить несколько членов в точных формулах для f, H, T и G.

Теперь для того, чтобы превратить уравнение (16) в резольвенту икосаэдрального уравнения, надо умножить либо соответственно разделить G на такие степени f, H, T, чтобы в результате получалась рациональная функция z_1, z_2 нулевой степени, т. е. рациональная функция z. Если вместо G принять за неизвестное в (16) такую функцию, то коэффициенты a, b, c, d, e при этом сами собой преобразуются в рациональные функции Z.

Таков метод теории инвариантов *). Для его осуществления я сначала вычислю (в § 10) точные значения t и W. Затем в § 11, 12 я дам предварительные уравнения: с одной стороны, для t, а с другой стороны — для произвольной линейной комбинации W и tW; эти уравнения сразу же будут превращены в резольвенты икосаэдрального уравнения. Первое из этих уравнений стоит особенно отметить еще и потому, что оно уже возникло ранее (конечно, из совершенно иных соображений) в исследованиях Бриоски, посвященных решению уравнений пятой степени **); позже мы должны будем поговорить об этом более подробно. Второе будет играть важную роль в нашей теории главного уравнения пятой степени, которое будет изучаться нами во второй главе следующей части, так что уже сейчас мы можем называть его *канонической резольвентой* ***). После всего этого, в § 13, я покажу, как связаны две наши новые резольвенты пятой степени с r-резольвентой (которая строится теоретико-функциональным методом), и, наконец, в § 14 я найду для них значение *произведения разностей*, которое, как мы знаем, должно быть рационально по Z.

---

*) В том виде, как здесь, он был впервые предложен мной в Math. Ann.— 1877.— Bd 12.— S. 517.

**) См. Ann. di Mat., ser 1.— 1858.— T. 1.

***) Впервые, но в несколько более простом виде, каноническая резольвента была описана мною в Math. Ann.— Bd 12.— S. 525. Несомненно, она присутствует и в основаниях параллельных исследований Гордана, которые будут более подробно описаны в следующей части (см., в частности, G o r d a n. Ueber die Auflösung der Gleichungen 5. Grades // Math. Ann.— 1878.— Bd 13.

§ 9. r-резольвента

Для нахождения r-резольвенты (15) мы прежде всего выделим в $F(r)$ числитель и знаменатель, а также введем в рассмотрение выделенное значение $Z=1$ и перепишем (15) в виде

$$(17)\qquad \varphi(r):\psi(r):\chi(r)=Z:(Z-1):1,$$

где φ, ψ, χ являются целыми функциями пятой степени. Сопоставляя эту формулу с самим икосаэдральным уравнением

$$H^3(z):-T^2(z):1728f^5(z)=Z:(Z-1):1,$$

мы замечаем, что условия $\varphi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$ задают те значения r, которые возникают соответственно в 20 точках, где $H=0$, в 30 точках, где $T=0$, и в 12 точках, где $f=0$. Рассмотрение соответствующих фигур даст нам определенные теоремы о линейных множителях в φ, ψ, χ.

В первую очередь понятно, что точки, составляющие конфигурацию $f=0$, переставляются между собой 12 вращениями, оставляющими r неизменным (т. е. 12 вращениями соответствующей тетраэдральной группы). Поэтому r будет принимать одно и то же значение во всех точках $f=0$. *Следовательно*, $\chi(r)$ *должна быть пятой степенью от линейного выражения.* Рассмотрим далее 30 точек, где $T=0$. Среди них, прежде всего, имеется шесть вершин октаэдра, принадлежащего нашей тетраэдральной группе (мы только что обозначили его буквой t). Из рассмотрения модели очевидно, что остальные 24 точки разделяются с помощью тетраэдральных вращений на две группы из 12 ассоциированных точек. *Из этого мы заключаем, что* $\psi(r)$ *содержит один простой линейный множитель и два других множителя, входящих с кратностью два.* Для доказательства заметим, что $\psi(r)$ соответствует члену $T^2(z)$ в икосаэдральном уравнении, а значит, $\psi(r)=0$ должно задавать рассматриваемую конфигурацию из точек, взятую с кратностью два. Однако линейный множитель, обращающийся в нуль в шести вершинах октаэдра, сам по себе имеет здесь нуль второй кратности, а значит, в $\psi(r)$ он должен учитываться только один раз. В то же время два других линейных множителя имеют по тем же самым причинам нули в 12 различных точках, т. е. нули кратности один, и, стало быть, должны входить в $\psi(r)$ с кратностью два. Это согласуется с тем фактом, что линейный множитель, возникающий в $\chi(r)$, берется пятикратно. Рассмотрим, наконец, те точки, где $\varphi(r)=0$ или соответственно $H(z)=0$. Как мы уже знаем, среди них находятся 8 вершин куба W, относящегося к нашей тетраэдральной группе. Тетраэдральная группа разделяет их на два набора по 4 ассоциированные точки, каждая из которых остается неподвижной при трех тетраэдральных поворотах. В дополнение к этим точкам имеется еще 12 точек с $H=0$, которые объединяются в одну группу по отношению к тетраэдральным вращениям. *Следовательно*, $\varphi(r)$ *имеет только три различных линейных множителя*, *два из которых*, *соответствующие* $W=0$, *входят в* $\varphi(r)$ *просто*, *а третий появляется в кубе.*

Наш суммарный результат состоит в том, что формулу (17) можно теперь заменить на такую:

$$(18)\qquad Z:(Z-1):1=c(r-\alpha)^3(r^2-\beta r+\gamma): \\ :c'(r-\delta)(r^2-\varepsilon r+\zeta)^2: \\ :c''(r-\eta)^5,$$

где символами α, β, γ, ..., c, c', c'' обозначены не известные пока что константы.

Задача определения этих констант является корректной только тогда, когда предварительно однозначно задано r. Пусть r будет одной из трижды бесконечного количества рациональных функций двенадцатой степени, инвариантных относительно вращений из тетраэдральной группы. Конкретно, положим $r=t^2/f$, где под t, как и выше, понимается октаэдральная форма, принадлежащая нашей тетраэдральной группе, причем t здесь следует выбрать так, чтобы его запись по степеням z_1, z_2 начиналась с члена $+z_1^6$ и имела одни лишь вещественные коэффициенты *). Тогда первое наблюдение будет состоять в том, что $c''(r-\eta)^5$ в (18) будет равен константе C (поскольку должен обращаться в нуль только при $r=\infty$), в то время как $\delta=0$, а c надо положить равным c'. Далее, мы получаем, что C следует взять равным -1728, так как в соответствии с нашим соглашением $r=t^2/f$ при очень малых значениях z_1/z_2 в качестве

*) То, что оба эти условия могут быть удовлетворены, показывает обращение к нашей фигуре: с одной стороны, каждый из 5 связанных с икосаэдром октаэдров содержит член с z_1^6, поскольку ни один из них не имеет вершины в $z_2=0$; с другой стороны, *меридиан вещественных чисел* является для одного из них большим кругом симметрии.

главной части имеет z_1/z_2, тогда как Z (согласно икосаэдральному уравнению) приближается величиной $\frac{-z_1^5}{1728z_2^5}$. Наконец, мы заключаем, что все коэффициенты в (18) будут вещественными. Таким образом, теперь, *после упрощений, формулу* (18) *можно записать в виде*

$$(19) \qquad Z:(Z-1):1=(r-\alpha)^3(r^2-\beta r+\gamma): \\ :r(r^2-\varepsilon r+\zeta)^2: \\ :-1728,$$

где α, β, γ, ε, ζ — *вещественные константы.*

В соответствии с этой формулой α, β, γ, ε, ζ должны быть определены так, чтобы во всяком случае тождественно выполнялось равенство

$$(20) \qquad (r-\alpha)^3(r^2-\beta r+\gamma)+1728=r(r^2-\varepsilon r+\zeta)^2.$$

Подходящим образом преобразуя это равенство, мы получим, что α, β, γ, ε, ζ определяются им однозначно. А именно, сначала подставив в (20) $r=0$, мы получаем

$$\alpha^3\gamma=1728.$$

Далее, дифференцируя (20) по r, находим

$$(r-\alpha)^2(5r^2-(2\alpha+4\beta)r+(\alpha\beta+3\gamma))= \\ =(r^2-\varepsilon r+\zeta)(5r^2-3\varepsilon r+\zeta),$$

а поскольку $r^2-\varepsilon r+\zeta$ и $(r-\alpha)^2$ должны быть взаимно простыми, мы получаем

$$5\varepsilon=2\alpha+4\beta, \quad 10\alpha=3\varepsilon, \\ 5\zeta=\alpha\beta+3\gamma, \quad 5\alpha^2=\zeta.$$

Следовательно (после исключения ε и ζ),

$$11\alpha=3\beta, \quad 64\alpha^2=9\gamma,$$

что в сочетании с самым первым из найденных соотношений дает

$$\alpha^5=3^5.$$

Но α должно быть *вещественным.* Поэтому $\alpha=3$, а значит, $\beta=11$, $\gamma=64$, $\varepsilon=10$, $\zeta=45$. Стало быть, r-резольвента выглядит так:

$$(21)\qquad Z:(Z-1):1=(r-3)^3(r^2-11r+64): \\ :r(r^2-10r+45)^2: \\ :-1728.$$

§ 10. Вычисление форм t и W

Теперь мы в дополнение к предыдущему проведем вычисление форм t и W, что, с одной стороны, позволит нам точно выразить связь между величиной r, использованной в прошлом параграфе, и $z=z_1/z_2$, стоящим в икосаэдральном уравнении, а с другой стороны, будет необходимой базой для построения резольвент методом теории инвариантов.

В § 12 первой главы мы отметили три вращения

$$T,\ U,\ TU,$$

принадлежащие рассматриваемой нами сейчас группе икосаэдра, которым затем, в § 7 второй главы, мы поставили в соответствие подстановки

$$z'=\frac{(\varepsilon^4-\varepsilon)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z-(\varepsilon^4-\varepsilon)},$$

$$z'=\frac{1}{z},$$

$$z'=\frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{(\varepsilon-\varepsilon^4)z-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

Для пар неподвижных точек этих преобразований мы получаем следующие однородные уравнения:

$$z_1^2-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)z_1z_2-z_2^2=0,$$

$$z_1^2+z_2^2=0,$$

$$z_1^2-2(\varepsilon+\varepsilon^4)z_1z_2-z_2^2=0.$$

Но наш октаэдр t строится в точности по этим трем парам точек. С учетом того, что форма t должна содержать член $+z_1^6$, мы получаем для нее соответствующую формулу

$$(22)\qquad t(z_1,z_2)=(z_1^2+z_2^2)\cdot(z_1^2-2(\varepsilon+\varepsilon^4)z_1z_2-z_2^2)\times \\ \times(z_1^2-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)z_1z_2-z_2^2)= \\ =z_1^6+2z_1^5z_2-5z_1^4z_2^2-5z_1^2z_2^4-2z_1z_2^5+z_2^6.$$

Если мы хотим теперь вычислить соответствующее W, то можем сделать это в соответствии с нашими более ранними результатами, образовав *гессиан* формы $t(z_1, z_2)$. Для удобства наших дальнейших вычислений договоримся, что $W(z_1, z_2)$ выбирается содержащим член $-z_1^8$. Тогда мы получим

$$(23)\quad W(z_1, z_2) = -z_1^8 + z_1^7 z_2 - 7z_1^6 z_2^2 - 7z_1^5 z_2^3 + 7z_1^3 z_2^5 - \\ - 7z_1^2 z_2^6 - z_1 z_2^7 - z_2^8$$

и тем самым первая цель настоящего параграфа достигнута.

Теперь мы подействуем на t и W операциями

$$S^\nu:\ z_1' = \pm\varepsilon^{3\nu} z_1,\quad z_2' = \pm\varepsilon^{2\nu} z_2.$$

При этом возникают соответственно те пять значений, которые уже возникали при наших рассмотрениях уравнений пятой степени и которые мы будем называть t_ν и W_ν. Находим

$$(24)\quad t_\nu(z_1, z_2) = \varepsilon^{3\nu} z_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu} z_1^5 z_2^2 - 5\varepsilon^{\nu} z_1^4 z_2^3 - 5\varepsilon^{4\nu} z_1^2 z_2^4 - \\ - 2\varepsilon^{3\nu} z_1 z_2^5 + \varepsilon^{2\nu} z_2^6,$$

$$(25)\quad W_\nu(z_1, z_2) = -\varepsilon^{4\nu} z_1^8 + \varepsilon^{3\nu} z_1^7 z_2 - 7\varepsilon^{2\nu} z_1^6 z_2^2 - 7\varepsilon^{\nu} z_1^5 z_2^3 + \\ + 7\varepsilon^{4\nu} z_1^3 z_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu} z_1^2 z_2^6 - \varepsilon^{2\nu} z_1 z_2^7 - \varepsilon^{\nu} z_2^8.$$

Выясним здесь, как именно переставляются эти пять значений t_ν или W_ν под действием 120 однородных икосаэдральных подстановок. Конечно, это можно вывести уже из тех утверждений, которые были сделаны нами в § 8 первой части о соответствующих геометрических фигурах; однако представляется полезным связать искомые правила непосредственно с нашими настоящими формулами. 120 однородных икосаэдральных подстановок порождаются при помощи итераций и взятия композиций следующими двумя:

$$S:\ z_1' = \pm\varepsilon^2 z_1,\quad z_2' = \pm\varepsilon^2 z_2;$$

$$T:\ \begin{cases} \pm\sqrt{5}z_1' = -(\varepsilon - \varepsilon^4) z_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_2, \\ \pm\sqrt{5}z_2' = +(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4) z_2. \end{cases}$$

Если мы теперь подставим эти новые значения z_1', z_2' вместо z_1, z_2 в формулы для t_ν (или для W_ν), то возникнут новые формы t_ν', связанные с первоначально заданными формами t_ν с помощью формул (которые получаются после небольших вычислений)

$$(26)\qquad \begin{aligned} &S\colon\ t'_\nu = t_{\nu+1};\\ &T\colon\ t'_0 = t_0,\quad t'_1 = t_2,\quad t'_2 = t_1,\quad t'_3 = t_4,\quad t'_4 = t_3. \end{aligned}$$

Здесь в формуле S индекс берется по модулю 5.

§ 11. u-резольвента

Теперь мы выведем уравнение пятой степени, которому удовлетворяют наши t_ν. В соответствии с формулой (16) напишем

$$t^5 + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0,$$

где a, b, c, ... будут соответственно иметь степени 6, 12, 18, ... В то же время они должны быть целыми функциями f, H, T. Следовательно, a и c должны быть равны нулю, тогда как b, d, e будут соответственно пропорциональны f, f^2 и T. Таким образом, наше уравнение пятой степени приобретает следующий вид:

$$t^5 + kft^3 + \lambda f^2 t + \mu T = 0,$$

где k, λ, μ — численные константы. Для их определения можно либо подставить в это уравнение вместо t значение (22), а вместо f, H, T — установленные ранее значения и, выписав по порядку его члены: z_1^{30}, $z_1^{29}z_2$, ... потребовать, чтобы первые три несократившихся члена обратились в нуль путем надлежащего выбора значений k, λ, μ, либо еще найти старшие нетривиальные члены нужных здесь симметрических функций t_ν (см. (24)) и сравнить их со старшими членами в f, f^2 и T. В обоих случаях получим

$$k = -10,\quad \lambda = 45,\quad \mu = -1$$

и наше уравнение пятой степени запишется в виде *)

$$(27)\qquad t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0.$$

Для того чтобы перейти теперь к резольвенте икосаэдрального уравнения, мы должны положить

$$(28)\qquad u = \frac{12f^2t}{T},$$

*) Это и есть то самое уравнение, которое, как уже говорилось, возникло ранее в работах Бриоски.

где u зависит уже от одного $z = z_1/z_2$. После этой простой подстановки мы получим

$$48u^5(1-Z)^2 - 40u^3(1-Z) + 15u - 12 = 0. \tag{29}$$

В дальнейшем мы будем называть это уравнение *u-резольвентой*.

§ 12. Каноническая Y-резольвента

В предстоящих нам исследованиях уравнений шестой степени особенно важную роль будут играть уравнения, в которых одновременно исчезают третья и четвертая степени неизвестной. К ним, очевидно, относится и то уравнение пятой степени, которому удовлетворяют наши W_ν, поскольку $\sum\limits_\nu W_\nu = \sum\limits_\nu W_\nu^2 = 0$, так как не существует икосаэдральных форм степени 8 или 16. По тем же самым причинам к ним будет относиться и уравнение, которое можно получить и для следующей по старшинству икосаэдральной формы tW, так как на том же, что и выше, основании $\sum\limits_\nu t_\nu W_\nu = 0$ и $\sum\limits_\nu (t_\nu W_\nu)^2 = 0$. Но точно такое же рассмотрение показывает, что и $\sum\limits_\nu W_\nu (t_\nu W_\nu)$ будет тождественным нулем. *Таким образом, нашему классу уравнений пятой степени принадлежат все уравнения, корни которых являются линейными комбинациями W_ν и $t_\nu W_\nu$ с постоянными коэффициентами*:

$$Y_\nu = \sigma W_\nu + \tau t_\nu W_\nu. \tag{30}$$

Перед нами вновь возникает задача вычисления коэффициентов соответствующего уравнения пятой степени при любых σ, τ, и поскольку детали этого вычисления не представляют никакого специального интереса, я сразу сообщу результат. Получим

$$\begin{aligned} Y^5 &+ 5Y^2(8f^2\sigma^3 + T\sigma^2\tau + 72f^3\sigma\tau^2 + fT\tau^3) + \\ &+ 5Y(-8H\sigma^4 + 18f^2H\sigma^2\tau^2 + HT\sigma\tau^3 + 27f^3H\tau^4) + \\ &+ (H^2\sigma^5 - 10fH^2\sigma^3\tau^2 + 45f^2H^2\sigma\tau^4 + TH^2\tau^5) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Чтобы получить из этого резольвенту икосаэдрального уравнения, мы должны вновь прибегнуть к подстановке (28), а также положить

$$v = \frac{12fW}{H}. \tag{32}$$

Тогда формула (30) запишется в виде

$$Y_\nu = mv_\nu + nu_\nu v_\nu, \tag{33}$$

где $m = \frac{\sigma H}{12f}$, $n = \frac{\tau \cdot HT}{144f^3}$.

Подставляя в (31) получающиеся отсюда выражения для σ и τ, мы получим

$$\begin{aligned} ZY^5 &+ 5Y^2\left(8m^3 + 12m^2n + \frac{6mn^2 + n^3}{1-Z}\right) + \\ &+ 15Y\left(-4m^4 + \frac{6m^2n^2 + 4mn^3}{(1-Z)} + \frac{3n^4}{4(1-Z)^2}\right) + \\ &+ 3\left(48m^5 - \frac{40m^3n^2}{1-Z} + \frac{15mn^4 + 4n^5}{(1-Z)^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Это та самая резольвента пятой степени для уравнения икосаэдра, которая далее будет называться *канонической резольвентой.*

§ 13. Связь новых резольвент с r-резольвентой

Выясним теперь связь наших новых резольвент с r-резольвентой из § 10.

Сначала установим соответствие между *теоретико-функциональным методом и методом теории инвариантов*, для чего перепишем (27) в виде

$$T = t(t^4 - 10ft^2 + 45f^2). \tag{35}$$

Затем, возводя в квадрат, деля обе части на f^5 и, наконец, написав r вместо t^2/f, мы получим

$$-1728(Z-1) = r(r^2 - 10r + 45)^2,$$

т. е. уравнение, которое на самом деле эквивалентно (21).

Далее, выразим рационально через r величины

$$u = \frac{12tf^2}{T}, \quad v = \frac{12Wf}{H}.$$

Что касается u, то выражение получается сразу после подстановки вместо T значения (35). Находим

$$u = \frac{12}{r^2 - 10r + 45}. \tag{36}$$

Для получения аналогичного представления v вспомним, что в соответствии с результатами § 10 точки, в которых $H/W = 0$, представляются в то же время и уравнением

$r-3=0$. Поэтому H/W с точностью до множителя совпадает с t^2-3f. Сравнение любых членов их выражений через z_1, z_2 показывает, что этот множитель равен $+1$. Поэтому без всяких дальнейших рассуждений мы получаем, что

$$v = \frac{12}{r-3}. \tag{37}$$

Наконец, подставляя значения (36), (37) в (33), получаем

$$Y_\nu = \frac{12m(r-3)+144n}{(r-3)(r^2-10r+45)}. \tag{38}$$

Конечно, после этого u-резольвента и каноническая резольвента могут быть получены путем исключения r из (21) и (36) или (38) соответственно*).

§ 14. Произведение разностей для u- и Y-резольвент

Теперь мы, опять имея в виду дальнейшие приложения, вычислим произведение разностей u_ν и Y_ν, которое, как мы знаем, будет рационально по Z. Сначала рассмотрим следующее произведение:

$$\prod_{\nu<\nu'} (t_\nu - t_{\nu'}),$$

в котором символ под знаком произведения означает, что перемножаются только те 10 сомножителей, у которых ν меньше, чем ν' (ν и ν' здесь оба принимают значения 0, 1, 2, 3, 4). Как известно, такое произведение равно определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^4 \\ 1 & t_1 & \ldots & t_1^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_4 & \ldots & t_4^4 \end{vmatrix}.$$

*) Таким способом каноническая резольвента была выведена г-ном Кронекером в его статье: Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Göttingen Nachr., 6 Juli 1878, Borchardt's J.— Bd 79.

В соответствии с правилами перемножения определителей умножим последнее выражение на

$$25\sqrt{5}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 \\ 1 & \varepsilon^2 & . & . & . \\ 1 & \varepsilon^3 & . & . & . \\ 1 & \varepsilon^4 & . & . & . \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = e^{2\pi i/5}.$$

При этом получится определитель с вещественными целыми коэффициентами, а именно:

$$5\begin{vmatrix} \sum\limits_\nu \varepsilon^\nu t_\nu & \sum\limits_\nu \varepsilon^\nu t_\nu^2 & \sum\limits_\nu \varepsilon^\nu t_\nu^3 & \sum\limits_\nu \varepsilon^\nu t_\nu^4 \\ \sum\limits_\nu \varepsilon^{2\nu} t_\nu & \sum\limits_\nu \varepsilon^{2\nu} t_\nu^2 & . & . \\ \sum\limits_\nu \varepsilon^{3\nu} t_\nu & . & . & . \\ \sum\limits_\nu \varepsilon^{4\nu} t_\nu & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Он имеет степень 60 по z_1, z_2 и, являясь икосаэдральной формой, должен поэтому быть равен линейной комбинации H^3 и t^5. *Явное вычисление членов, содержащих* z_1^{60} *и* $z_1^{55}z_2^5$, *показывает, что он равен*

$$5^5 \cdot H^3(z_1, z_2).$$

Поэтому первоначальное произведение разностей есть

$$\prod_{\nu<\nu'}(t_\nu - t_{\nu'}) = 25\sqrt{5}H^3(z_1, z_2).$$

Но

$$t_\nu = \frac{Tu_\nu}{12f^2}.$$

Следовательно, произведение разностей u_ν *будет*

$$\prod_{\nu<\nu'}(u_\nu - u_{\nu'}) = -\frac{25\sqrt{5}}{144}\cdot\frac{Z}{(Z-1)^5}. \tag{39}$$

Аналогичным образом вычисляется и *произведение разностей* Y_ν. Отправляясь от (30), находим

$$\prod_{\nu<\nu'}(Y_\nu - Y_{\nu'}) = -25\sqrt{5}\cdot H\{T^2\sigma^{10} + 2^4\cdot 5\cdot 7\cdot f^3T\sigma^9\tau +$$
$$+ 5^2\cdot f\cdot(2^6\cdot 3^5\cdot f^5 - H^3)\sigma^8\tau^2 + 2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot f^4T\sigma^7\tau^3 +$$
$$+ 2\cdot 5\cdot f^2\cdot(2^6\cdot 3^4\cdot 7\cdot f^5 - 31H^3)\sigma^6\tau^4 - T(2^5\cdot 3^4\cdot 7\cdot f^5 +$$

$$+ 11\cdot H^3)\,\sigma^5\tau^5 - 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot f^3\cdot(2^6\cdot 3^4\cdot 7\cdot f^5 - 13H^3)\,\sigma^4\tau^6 -$$
$$- 2\cdot 5^2\cdot fT\cdot(2^5\cdot 3^4\cdot f^5 - H^3)\sigma^3\tau^7 - 3^4\cdot 5\cdot f^4\cdot(2^6\cdot 3^3\cdot 7\cdot f^5 -$$
$$- 11\cdot H^3)\,\sigma^2\tau^8 - 3^2\cdot 5\cdot f^2T\cdot(2^4\cdot 3^4\cdot f^5 - H^3)\,\sigma\tau^9 -$$
$$- (2^6\cdot 3^6\cdot 11\cdot f^{10} - 3^4\cdot 7\cdot f^5H^3 + H^6)\,\tau^{10}\},$$

после чего, переходя к (33), получаем окончательный результат:

$$\text{(40)}\qquad \prod_{\nu<\nu'}(Y_\nu - Y_{\nu'}) = -\frac{25\sqrt{5}}{Z^3}\{2^8\cdot 3^4(1-Z)m^{10} +$$
$$+ 2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot m^9 n + \frac{2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\,(3-Z)\,m^8n^2}{1-Z} + \frac{2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot m^7n^3}{1-Z} +$$
$$+ \frac{2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot(3\cdot 7 - 31\cdot Z)\,m^6n^4}{(1-Z)^2} - \frac{2^5\cdot 3^3\cdot(3\cdot 7 + 2\cdot 11\cdot Z)\,m^5n^5}{(1-Z)^2} -$$
$$- \frac{2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot(3\cdot 7 - 13Z)\,m^4n^6}{(1-Z)^3} - \frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot(3 - 2\cdot Z)\,m^3n^7}{(1-Z)^3} -$$
$$- \frac{3^4\cdot 5\cdot(7 - 11\cdot Z)\,m^2\cdot n^8}{(1-Z)^4} - \frac{3^3\cdot 5\cdot(3 - 2^2\cdot Z)\,mn^9}{(1-Z)^4} -$$
$$- \frac{(3^2\cdot 11 - 3^3\cdot 7\cdot Z + 2^6\cdot 3^2\cdot Z^2)\,n^{10}}{2^2\cdot(1-Z)^5}\Big\}.$$

§ 15. Простейшая резольвента шестой степени

В заключение этой главы для того, чтобы позже указать на простую связь нашего собственного подхода с более ранними исследованиями других математиков, рассмотрим простейшую резольвенту шестой степени для икосаэдрального уравнения, а для ее построения сразу воспользуемся методом теории инвариантов *).

Из интересующих нас шести диэдральных групп, содержащих по 10 вращений, выделим ту, основная главная ось которой проходит через точки $z = 0, \infty$. Мы уже знаем, что простейшей из форм, остающихся полностью неизменными при соответствующих однородных подстановках, будет *квадрат* z_1z_2. Поэтому сначала мы найдем уравнение шестой степени, которому удовлетворяет этот квадрат, а вернее, величина

$$\text{(41)}\qquad \varphi_\infty = 5z_1^2z_2^2,$$

*) См. Math. Ann.— Bd 12.— S. 517, 518.

в которую для удобства введем численный множитель 5, а индекс ∞ поставлен при φ потому, что символы φ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$) будут полезны для соответствующих выражений, относящихся к пяти другим диагоналям икосаэдра. Применяя к φ_∞ однородные икосаэдральные подстановки, соответствующие TS^ν, мы находим эти φ_ν:

$$\varphi_\nu = (\varepsilon^\nu z_1^2 + 2z_1z_2 - \varepsilon^{4\nu}z_2^2)^2. \tag{42}$$

Пусть уравнение шестой степени, которому удовлетворяют наши φ_ν, имеет вид:

$$\varphi^6 + a'\varphi^5 + b'\varphi^4 + c'\varphi^3 + d'\varphi^2 + e'\varphi + f' = 0,$$

тогда a', b', c', ... будут икосаэдральными формами со степенями соответственно 4, 8, 12, ... Отсюда сразу следует, что $a' = b' = d' = 0$, тогда как c', e' и f' должны с точностью до числового множителя совпадать с f, H и f^2 соответственно. Эти множители определяются хорошо известным нам способом с помощью возвращения к точным выражениям f, H и φ через z_1, z_2. Без особого труда мы получим следующее уравнение:

$$\varphi^6 - 10f\varphi^3 + H\varphi + 5f^2 = 0. \tag{43}$$

Уделим немного внимания *группе* этого уравнения. Из предыдущего изложения следует, что она состоит из тех 60 перестановок φ_ν, которые происходят при 120 однородных икосаэдральных подстановках (при этом мы не должны забывать, что с самого начала следует присоединить ε). Все эти подстановки, как мы уже констатировали в § 10, составляются из S и T. Понятно, что S оставляет неизменной φ_∞ и переводит φ_ν в $\varphi_{\nu+1}$. Мы запишем это кратко в виде формулы

$$\nu' \equiv \nu + 1 \pmod 5,$$

а при $\nu = \infty$ новое ν' будет опять равно ∞. С другой стороны, T будет переставлять φ_∞ с φ_0, φ_1 с φ_4, а φ_2 с φ_3, что может быть отражено одной формулой вида

$$\nu' \equiv -\frac{1}{\nu} \pmod 5.$$

В соответствии с известными теоремами из теории чисел *все формулы, получающиеся из этих двух, записываются в виде*

$$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta} \pmod 5,$$

где α, β, γ, δ *являются целыми числами, удовлетворяющими конгруэнции* $(\alpha\delta-\beta\gamma)\equiv 1 \pmod 5$. В действительности таких формул всего 60, поскольку из всех наборов α, β, γ, δ, равных по модулю 5 или различающихся только знаком, здесь учитывается всего один. Поэтому *группа нашего уравнения шестой степени состоит из* 60 *перестановок* φ_ν, *которые возникают из всевозможных формул вида*

$$(44)\qquad \nu' \equiv \frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta} \pmod 5.$$

Но согласно исследованиям Галуа эта группа в точности совпадает с группой *модулярного уравнения шестой степени* для преобразований эллиптических функций пятого порядка. И действительно, в точности те же самые уравнения (43) — только, конечно, в других обозначениях — давно уже были выведены г-ном Кронекером, который довел до конца некоторые идеи Якоби об эллиптических функциях *). К этому обстоятельству мы еще вернемся, причем более подробно.

Для того чтобы превратить (43) в резольвенту икосаэдрального уравнения, положим

$$(45)\qquad \zeta = \frac{\varphi H}{12f^2}.$$

После подстановки получим

$$(46)\qquad \zeta^6 - 10Z\zeta^3 + 12Z^2\zeta + 5Z^2 = 0.$$

Мы усилим этот результат, если построим с его помощью другую резольвенту икосаэдрального уравнения, корни которой не будут изменяться при 10 подстановках из нашей диэдральной группы и будут иметь десятую степень по z. Такой функцией, например, является

$$(47)\qquad \xi = \frac{\varphi_\nu^3}{f},$$

так как числитель и знаменатель в этом выражении имеют общий множитель $\sqrt{\varphi}$, квадратичный по z_1, z_2. Для построения соответствующей резольвенты перепишем (43) следующим образом:

$$(48)\qquad -H = \frac{\varphi^6 - 10f\varphi^3 + 5f^2}{\varphi}.$$

*) См. сноски в первой и третьей главах следующей части, а также ср. с § 8 из следующей главы.

Возводя все в куб и деля обе части на $1728f^5$, получим

$$Z = \frac{(\xi^2 - 10\xi + 5)^3}{-1728\xi}$$

или, переписав все с помощью $Z-1$,

$$(40) \qquad Z:(Z-1):1 = (\xi^2 - 10\xi + 5)^3 : (\xi^2 - 4\xi - 1)^2(\xi^2 - 22\xi + 125) : -1728\xi.$$

Это уравнение можно было бы также вывести без использования точных формул с помощью теоретико-функционального рассмотрения *).

Наконец, я приведу еще формулу, позволяющую рационально выразить ζ из (45) в терминах нашего ξ. В соответствии с (48)

$$\zeta = \frac{\varphi H}{12f^2} = \frac{-\varphi^6 + 10f\varphi^3 - 5f^2}{12f^2}$$

и, следовательно,

$$(50) \qquad \zeta = \frac{-\xi^2 + 10\xi - 5}{12}.$$

§ 16. Заключительные замечания

Изложение последних параграфов в сильной степени ориентировано на те приложения, которые оно получит во второй части.

Можно сразу сказать, что материал настоящей главы окажет решающее влияние на весь дальнейший ход нашей мысли. Поясню это более точно.

В третьей главе этой части мы уже видели, что решение наших основных уравнений может с теоретико-функциональной точки зрения рассматриваться как обобщение элементарной задачи: *извлечь корень n-й степени из величины Z*. Алгебраический подход настоящей главы показал, что иррациональности, вводимые при решении уравнений диэдра, тетраэдра и октаэдра, могут быть вычислены с помощью последовательного извлечения квадратных корней. *В противоположность этому икосаэдральные иррациональности имеют независимый смысл.* Это указывает путь для расширения обычной теории уравнений. Если ранее мы строго ограничивались теми за-

*) См. Math. Ann.— Bd 14 (формула (19) на стр. 143).

дачами, которые могли быть решены путем последовательного извлечения корней, то *теперь мы добавляем еще одну допустимую операцию — решение икосаэдрального уравнения — и спрашиваем, существуют ли среди задач, которые не решаются в радикалах, такие, решение которых может быть осуществлено с помощью икосаэдральных иррациональностей.*

Во второй части с этой точки зрения мы рассмотрим задачу решения общих уравнений пятой степени. Попытка получить решение этих уравнений с помощью икосаэдра представляется тем более естественной, что группа уравнения пятой степени, после присоединения квадратного корня из дискриминанта, будет просто изоморфна группе икосаэдрального уравнения, а также потому, что найденные выше резольвенты пятой степени для икосаэдрального уравнения дают обширное семейство специальных уравнений пятой степени, a priori связанных с икосаэдром.

ГЛАВА V

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ВЗГЛЯД НА ПРЕДМЕТ В ЦЕЛОМ

§ 1. Оценка достоинств предыдущих методов и их обобщение

Теперь, после того как в третьей и четвертой главах мы изучили наиболее существенные стороны наших основных проблем, зададим себе вопрос, в чем кроется истинная причина той замечательной простоты, которая постоянно проявлялась в ходе всего нашего исследования? Я полагаю, никто уже не сомневается в том, что причина эта заключается в следующем свойстве наших проблем: *все их решения можно получить из какого-либо одного при помощи заранее известных линейных подстановок.* Тот геометрический материал, с которого мы начали свое изложение в первой и второй главах и который послужил источником возникновения наших основных проблем, а также иллюстрацией их основных свойств, теперь, после того как он выполнил эту свою функцию, может быть оставлен в стороне *). Приняв во внимание это замечание, естественно спросить, а не могут ли существовать другие уравнения или системы уравнений, которым также присуще названное важнейшее свойство наших основных проблем?

Поэтому мы прежде всего обратимся в той мере, в которой это вообще возможно, к новым конечным группам дробно-линейных подстановок переменной z (или двух однородных переменных z_1, z_2). Однако мы сразу же обнаружим (§ 2), что все такие группы сводятся к

*) При этом мы имеем в виду только настоящий момент и последующее изложение во второй части. Однако для того чтобы полнее представить себе те обобщения, которые будут проделаны, оказывается совершенно необходимым время от времени обращаться к геометрическим иллюстрациям и аргументам; так будет в § 6 настоящей главы, а также всякий раз, когда мы будем иметь дело с трансцендентными функциями.

уже известным нам группам, т. е., говоря попросту, те уравнения и системы уравнений, которыми мы до сих пор занимались, являются единственными представителями подобного рода задач. Этот результат призван придать известный абсолютный смысл нашим предыдущим рассмотрениям, которые, будучи индуктивными по форме, не были с самого начала нацелены на какой-то определенный объект. Мы и в самом деле видим, что наши основные уравнения представляют собой замечательную, четко очерченную область, входящую во многие глубокие математические теории последних лет. В этой связи в § 3 я получу еще несколько простых результатов, благодаря которым мы увидим, что при помощи наших основных уравнений можно без особого труда найти все линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами, имеющие алгебраические полные интегралы. Однако по поводу того, что касается аналогичного смысла наших основных уравнений в теории линейных однородных дифференциальных уравнений порядка n с рациональными коэффициентами, я отсылаю читателя к уже цитированному мемуару Альфана *). Затем в отношении той роли, которую наши основные проблемы играют в теории модулярных эллиптических функций и аналогично в теоретико-числовых исследованиях бинарных квадратичных форм, я могу сослаться на свои собственные результаты **), а также на результаты г-на Гирстера ***).

Наряду с этим наши утверждения допускают обобщения еще по двум направлениям. Первым делом мы можем вместо переменных z_1, z_2 ввести в рассмотрение *большее число однородных переменных* z_1, z_2, ..., z_n и найти все конечные группы линейных подстановок, которые могут существовать в этом случае. Более полно я займусь этим в § 4, 5, а здесь в качестве следствия такого взгляда на предмет замечу только, что результаты предстоящей второй части будут являться лишь одним

---

*) Halphen. Sur la réduction des équations différentielles linéaries aux formes intégrables // Mémoires présentés.— 1880—1883.— T. 28, N 1, где, в частности, имеется подробный список литературы по этому предмету.

**) Math. Ann.— 1878.— Bd 14.— S. 148—160.

***) Gierster. Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante // Math. Ann.— 1879.— Bd 17.— S. 71.

примером приложения общей теории, которая полностью охватывает всю теорию уравнений.

Второе направление для обобщений состоит в том, чтобы *сохранить одну переменную* $z=z_1/z_2$, *но ввести в рассмотрение бесконечные группы линейных подстановок*, которые в последнее время привлекают к себе всеобщее внимание в самых разных областях, особенно благодаря г-ну Пуанкаре *). Конечно, в последующих параграфах я не смогу слишком глубоко осветить круг вопросов, связанных с этой темой. Целью моего изложения будет продвинуться лишь настолько, чтобы сделать понятной роль простейшего в сравнении с другими класса функций, а именно эллиптических модулярных функций. Я докажу здесь (§ 7, 8), что уравнения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра допускают решение в *эллиптических модулярных функциях*, подобно тому как биномиальное уравнение решается в логарифмах, а кубическое уравнение — как и общее уравнение диэдра — в тригонометрических функциях. Я хотел бы обратить внимание на общую схему доказательства, поскольку она выделяет тот подход к теории уравнений,— и, в частности, к теории уравнений пятой степени,— на котором все время концентрировались усилия математиков.

Очевидно также, что мы можем соединить оба намеченных здесь пути для обобщений: можно изучать *трансцендентные функции нескольких переменных, которые переводятся в себя бесконечным количеством линейных преобразований* **). Но я думаю, что более важными для нас являются рассмотрения, которые я проделаю в § 9 и из которых будет следовать, что между нашими двумя типами обобщения реально не существует никакой разницы. Поэтому перспективы, открывающиеся в § 5 после рассмотрения конечных групп, так сказать, неограниченно расширяются.

---

*) См. многочисленные сообщения Пуанкаре в C. r. Acad. Sci. Paris, а также его мемуары в Math. Ann.— Bd 19; Acta Mathematica.— Bd 1, 2 (1881—1883). Кроме того можно справиться в моем эссе: Neue Beiträge zur Rimann'schen Functionentheorie // Math. Ann.— 1882.— Bd 21.

**) В этом направлении идут последние исследования г-на Пикара, см. C. r. Acad. Sci. Paris (1882—1883), а также Acta Mathematica.— Bd 1,2.

§ 2. Описание всех конечных групп дробно-линейных подстановок одной переменной

К задаче нахождения всех конечных групп дробно-линейных подстановок одной переменной можно подходить различными путями. С моим исходным геометрическим методом *) связан аналитический метод г-на Гордана **); имеется также общий подход г-на Жордана ***), позволивший ему решить аналогичную задачу в случае многих переменных. Я воспользуюсь здесь способом, который основывается на теории функции и который уже излагался мною однажды ****). Мы будем исходить из идеи рассмотрения тех уравнений, корни которых получаются друг из друга с помощью подстановок из нашей группы, и легко сможем показать, что эти уравнения практически исчерпываются изучавшимися до сих пор основными уравнениями. По существу, тот же самый метод был позже использован в аналогичной ситуации г-ном Альфаном *****). Кроме этого, описание всех конечных групп дробно-линейных подстановок одной переменной, безусловно, содержится также и в исследованиях г-на Фукса, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка, интегрируемыми алгебраически ******),— исследованиях, которые уже не один раз цитировались нами в главах II и III и с которыми мы еще встретимся в следующем параграфе. Можно сказать, что эти работы г-на Фукса отличаются от моих тем, что он с самого начала выдвигает на передний план методы теории форм, тогда как я исхожу из теоретико-функциональных рассмотрений.

Пусть

$$\psi_0(x)=x,\quad \psi_1(x),\quad \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_{N-1}(x)$$

суть те N дробно-линейных функций, которые, будучи приравненными x', зададут нам группу из N дробно-линейных подстановок переменной x. Пусть, далее, a и b —

*) Math. Ann.— 1875.— Bd 9.

**) Gordan. Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen // Math. Ann.— 1877.— Bd 12.

***) Jordan. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrable algébrique // Borchardt's J.— 1878.— T. 84. Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire // Atti della Reale Accademia di Napoli, 1880.

****) Math. Ann.— 1878.— Bd 14.— S. 149—150.

*****) См. сноску на с. 000.

******) Borchardt's J.— 1875.— V. 81; 1877.— V. 85.

любые две величины, подобранные таким образом, чтобы ни одно из выражений $\psi(a)$ не равнялось b или, что то же самое, никакое $\psi(b)$ не равнялось a. Рассмотрим теперь уравнение

$$(1) \qquad \frac{(\psi_0(x)-a)(\psi_1(x)-a)\ldots(\psi_{N-1}(x)-a)}{(\psi_0(x)-b)(\psi_1(x)-b)\ldots(\psi_{N-1}(x)-b)} = X.$$

Очевидно, что это уравнение имеет степень N и остается неизменным при N подстановках из нашей группы, и при произвольном значении Z соответствующие N корней получаются из любого одного из них при помощи N рассматриваемых нами подстановок. В самом деле, из нашего предположения о том, что ψ_i образуют группу, сразу следует, что при подстановке в (1) вместо x какой-либо $\psi_i(x)$ множители в числителе левой части (1), равно как и множители в знаменателе, просто определенным образом переставятся между собой.

Наше утверждение состоит теперь в том, что *подставив в* (1) *вместо x и X подходящие линейные функции*

$$z = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad Z = \frac{aX+b}{cX+d},$$

мы сможем преобразовать уравнение (1) *в одно из рассмотренных ранее основных уравнений.* Для доказательства мы сначала выясним, при каких значениях X уравнение (1) может иметь кратные корни. Ясно, что если при каком-то значении X некоторое количество ν корней x совпадет, то *все корни x, соответствующие этому X, объединятся в группы по ν штук, совпадающих между собой.* Это доказывается при помощи рассмотрения подстановок ψ в точности так же, как и аналогичная теорема из первой главы, относившаяся к группам вращений и точкам сферы, остающимся неподвижными при определенных вращениях. Допустим, что значениям $X = X_1, X_2, \ldots$ соответствуют в указанном выше смысле ν_1-кратные, ν_2-кратные, ... и т. д. корни. В соответствии с изложенным в § 4 главы III функциональный определитель $(2N-2)$-й степени, составленный из числителя и знаменателя левой части (1), после того как мы превратим их в целые функции x, умножив на знаменатели всех ψ_i, будет иметь N/ν_1 корней кратности $\nu_1 - 1$, N/ν_2 корней кратности $\nu_2 - 1$ и т. д. Следовательно,

$$\sum_i \frac{N}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 2N - 2,$$

что по-другому может быть записано в виде

$$(2)\qquad \sum_i \left(1-\frac{1}{\nu_i}\right)=2-\frac{2}{N}.$$

Наш метод будет состоять в том, чтобы *рассмотреть это уравнение как диофантово уравнение относительно, целых чисел ν_i и N и отыскать все системы его решений.*

Последнее делается исключительно просто. Заметим сначала, что количество ν_i не может быть меньше двух и больше трех (если, конечно, N предполагается бо́льшим единицы). Действительно, если количество ν_i равно 1, то левая часть (2) будет меньше 1, тогда как правая часть при $N>1$ больше либо равна 1. А если количество ν_i не менее 4, то левая часть (2) будет не менее 2, поскольку каждый элемент $1-\frac{1}{\nu_i}$ в сумме из (2) не меньше 1/2, а это невозможно.

Пусть количество ν_i сначала будет равно 2. Тогда вместо (2) можно написать

$$\left(1-\frac{1}{\nu_1}\right)+\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)=2-\frac{2}{N},$$

или

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}=\frac{2}{N}.$$

Ясно, что в нашем случае ни одно из ν_i не может быть больше N, а значит, $\frac{1}{\nu_i}\geqslant\frac{1}{N}$. Отсюда следует, что оба $\frac{1}{\nu_1}$ и $\frac{1}{\nu_2}$ равны $\frac{1}{N}$; *поэтому первой возможной системой решений служит*

$$(3)\qquad \nu_1=\nu_2=N,$$

где N произвольное.

Пусть теперь количество ν_i равно 3, т. е. вместо (2) можем записать

$$(4)\qquad \frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=1+\frac{2}{N}.$$

Я утверждаю, прежде всего, что *по крайней мере одно из ν_i должно быть равно* 2. Действительно, если каждое из ν_i не менее трех, то левая часть (4) будет меньше 1, что невозможно. Пусть, скажем, $\nu_1=2$, тогда для остальных получим

$$\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{N}.$$

Тогда возможно, что одно из ν_2, ν_3 — скажем, ν_2 — также равно 2. Получаем в этом случае

$$\frac{1}{\nu_3}=\frac{2}{N}.$$

Таким образом, вторая система решений имеет вид

$$N=2n;\ \nu_1=2,\ \nu_2=2,\ \nu_3=n, \tag{5}$$

где n — произвольное.

Но если ни одно из ν_2, ν_3 не равно 2, то по меньшей мере одно из них должно быть равно 3, так как в противном случае $\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}$ было бы меньше либо равно 1/2, тогда как оно обязано быть больше 1/2. В соответствии с этим положим $\nu_2=3$. Остается

$$\frac{1}{\nu_3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{N},$$

т. е., во всяком случае, $\nu_3<6$. В то же время значения $\nu_3=3, 4, 5$ вполне могут быть. Им соответствуют $N=12$, 24, 60 и в каждом из этих трех случаев все наши условия полностью удовлетворяются. *Поэтому существуют еще три системы решений, представленные ниже*:

$$\begin{aligned} &N=12; &\nu_1=2, &\quad \nu_2=3, &\nu_3=3;\\ &N=24; &\nu_1=2, &\quad \nu_2=3, &\nu_3=4;\\ &N=60; &\nu_1=2, &\quad \nu_2=3, &\nu_3=5. \end{aligned} \tag{6}$$

Сразу видно, что найденные нами пять систем решений в точности соответствуют пяти нашим основным уравнениям: биномиальному уравнению и уравнениям диэдра, тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

Покажем теперь, что в зависимости от того, какая из систем решений (3), (5) *или* (6) *нашего диофантова уравнения отвечает уравнению* (1), *мы и в самом деле сможем преобразовать его в соответствующее основное уравнение, как мы и хотели.*

Начнем со случая (3). Вместо X мы здесь можем взять

$$Z=\frac{X-X_1}{X-X_2}.$$

Тогда при $Z=0$ и $Z=1$ мы получим N-кратный корень x, а стало быть, наше уравнение (1) можно будет записать в виде

$$\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^N = Z,$$

и надо лишь положить

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = z,$$

чтобы прийти к *биномиальному уравнению*

$$z^N = Z.$$

В остальных случаях следует взять

$$Z = \frac{X-X_2}{X-X_3}\cdot\frac{X_1-X_3}{X_1-X_2}$$

так, чтобы при $Z=1$, 0, ∞ получались соответственно ν_1-кратные, ν_2-кратные и ν_3-кратные корни. Обозначая Φ_1, Φ_2, Φ_3 надлежащие целые функции x, мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$Z:(Z-1):1 = \Phi_2^{\nu_2}(x):\Phi_1^{\nu_1}(x):\Phi_3^{\nu_3}(x),$$

где ν_1, ν_2, ν_3 следует брать из одной из введенных выше систем уравнений. Теперь сопоставим это с соответствующим основным уравнением, которое, как и ранее, запишем в виде

$$Z:(Z-1):1 = cF_2^{\nu_2}(z):c'F_1^{\nu_1}(z):F_3^{\nu_3}(z).$$

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что, *выразив z из этих двух уравнений, мы получим дробно-линейную функцию x*:

$$z = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Для этого мы напомним установленное в § 8 главы III дифференциальное уравнение третьего порядка, которому удовлетворяет z как функция Z:

$$[z]_Z = \frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z-1)^2} + \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2 Z^2} + \frac{\dfrac{1}{\nu_1^2}+\dfrac{1}{\nu_2^2}+\dfrac{1}{\nu_3^2}-1}{2Z(Z-1)}.$$

В точности повторяя все шаги того доказательства, которым мы воспользовались при выводе этого уравнения, мы получим, что x *как функция* Z *в каждом из случаев удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению.* Но мы знаем, что все решения такого дифференциального уравнения являются линейными функциями произвольно взятого одного из них. Поэтому и z будет линейной функцией x, что и требовалось.

Теперь просуммируем коротко полученные только что результаты. Наша цель состояла в том, чтобы описать все конечные группы дробно-линейных подстановок

$$x' = \psi_i(x); \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Мы установили, что все такие группы могут быть получены при помощи наших исходных конечных групп, перечисленных в § 7 главы II, если в приведенные там формулы подставить вместо z произвольное x, задаваемое равенством $z = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, после чего z' должен быть, конечно, заменен соответствующим

$$x' = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}.$$

§ 3. Алгебраически интегрируемые линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Как и намечалось в § 1, мы сейчас прервем основную линию наших рассуждений и обратимся к такой задаче: *описать все линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{7}$$

которые полностью решаются в алгебраических функциях. В действительности эта задача настолько просто решается на основании уже доказанных нами в третьей главе результатов, относившихся к линейным дифференциальным уравнениям третьего порядка, что было бы несправедливо пройти здесь мимо нее.

Сначала мы заменим дифференциальное уравнение (7) дифференциальным уравнением третьего порядка

$$[\eta]z = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p' = r(Z), \tag{8}$$

которому удовлетворяет отношение двух произвольных частных решений y_1, y_2 уравнения (7), точно так же, как мы делали это в § 7 главы III. Очевидно, η будет алгебраическим, если таковыми были y_1 и y_2. Вспоминая формулы (глава III, равенства (33))

$$(9) \qquad y_1 = \eta y_2, \quad y_2 = \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\,dZ},$$

мы видим, что утверждать обратное можно тогда и только тогда, когда $\int p\,dZ$ *является логарифмом алгебраической функции* *). *Это первое условие, которое следует наложить на коэффициент* p. Предполагая в дальнейшем это условие выполненным, мы можем забыть об уравнении (7) и заниматься далее такой задачей: найти все алгебраически интегрируемые уравнения (8), в которых $r(Z)$ обозначает неизвестную, но, во всяком случае, рациональную функцию. Для решения этой задачи мы сначала опишем все *алгебраические интегралы* уравнения (8), т. е. те алгебраические уравнения, дифференцирование которых дает дифференциальные уравнения требуемого вида; описание самих таких дифференциальных уравнений уже легко получится из этого.

Функция $\eta(Z)$, являясь алгебраической функцией Z, будет иметь на Z-плоскости конечное число точек ветвления. Соединим эти точки системой разрезов таким образом, чтобы вместе они образовывали односвязную кривую на Z-плоскости. Фиксируем в качестве начальной некоторую функциональную ветвь η_0, которая является однозначной функцией на плоскости с таким разрезом и удовлетворяет там дифференциальному уравнению (8). Общая функциональная ветвь, удовлетворяющая (8), будет, согласно основному свойству дифференциального выражения $[\eta]_Z$, дробно-линейной функцией нашей η_0. Следовательно, всякий раз при переходе через любой из наших разрезов будет происходить дробно-линейная подстановка η_0, зависящая, конечно, только от того, через какой именно разрез мы проходим. Таким образом, учтя все комбинации и повторения возможных прохождений через разрезы, мы получаем для η_0 *группу дробно-линейных подстановок*. Но мы требуем, чтобы η была *алгебраической функцией* Z, а это означает, что число различных

*) Поскольку p должно быть рациональным, то можно было бы также сказать, что $\int p\,dZ$ обязано быть логарифмом рациональной функции.

ветвей, которые можно получить из η_0 при различных прохождениях через разрезы — а стало быть, и *число линейных преобразований в нашей группе — должно быть конечно*. Таким образом, мы вновь приходим к задаче, которая была поставлена в предыдущем параграфе, и полученные там результаты мы можем здесь выразить следующим образом.

Если η является алгебраической функцией Z, то существует такая дробно-линейная функция аргумента η_0, для которой либо z^N, либо какая-нибудь другая из наших основных функций $cF_2^{\nu_2} / F_3^{\nu_3}$ остается неизменной при прохождении через любой из сделанных по Z-плоскости разрезов.

Такое z, конечно же, будет решением уравнения (8). С другой стороны, всякое содержащее Z алгебраическое выражение, остающееся неизменным при прохождении через наши разрезы, должно быть рациональной функцией Z. Следовательно:

Если уравнение (8) алгебраически интегрируемо, то при подходящем выборе частного решения z соответствующий интеграл будет задаваться одним из уравнений

$$(10)\qquad z^N = R(Z), \quad c\frac{F_2^{\nu_2}(z)}{F_3^{\nu_3}(z)} = R(Z),$$

где $R(Z)$ является рациональной функцией Z.

Теперь, наоборот, вычислим для каждого из уравнений (10) значение $[z]_Z$. Для этого введем на некоторое время обозначение Z_1:

$$z^N = Z_1 \quad \text{или} \quad c\frac{F_2^{\nu_2}(z)}{F_3^{\nu_3}(z)} = Z_1.$$

Тогда из предыдущих результатов получаем соответственно

$$[z]_{Z_1} = \frac{N^2-1}{2N^2Z_1^2},$$

или

$$[z]_{Z_1} = \frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(Z_1-1)^2} + \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2Z_1^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-1}{2Z_1(Z_1-1)}.$$

Вместе с тем в § 6 главы III нами была найдена такая общая формула:

$$[z]_Z = \left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)^2 [z]_{Z_1} + [Z_1]_Z.$$

Подставляя вместо Z_1 его значение $R(Z)$, мы получаем, следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет $\eta = z$:

$$[\eta]_Z = [R]_Z + \frac{N^2-1}{2N^2R^2}\cdot R'^2,$$

(11)

$$[\eta]_Z = [R]_Z + R'^2\left\{\frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(R-1)^2} + \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2R^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}+\frac{1}{\nu_3^2}-1}{2R(R-1)}\right\}.$$

Ясно, что все эти дифференциальные уравнения могут быть записаны в форме (8), поскольку в их правой части тоже стоят рациональные функции Z. Следовательно, *рациональные функции в формулах* (10) *могут быть совершенно любыми, и в этом смысле дифференциальные уравнения* (11), *частными решениями которых будут соответствующие интегралы* (10), *и являются наиболее общими дифференциальными уравнениями рассматриваемого нами вида.* Тем самым задача, которая была сформулирована в начале этого параграфа, полностью решена *).

---

*) После того как г-н Шварц в часто упоминавшемся здесь мемуаре (Borchardt's J.— 1872.— Bd 75) исследовал все возможные случаи алгебраической интегрируемости дифференциальных уравнений для гипергеометрических рядов, задачей описания вообще всех алгебраически интегрируемых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами занялся г-н Фукс в уже цитировавшихся заметках (1875—78 гг.). В связи с его первым сообщением я получил на июньской 1876 г. сессии Эрлангенского Общества тот самый замечательный по простоте результат, который и приведен в настоящей книге (см. также Math. Ann.— Bd 11). Кроме этого по всем нашим вопросам см. Brioschi. La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre // Math. Ann.— 1876.— Bd 11., а также мою вторую заметку: Ueber lineare Differentialgleichungen // Math. Ann.— 1877.— Bd 12. Более глубокие вопросы теории линейных дифференциальных уравнений второй степени аналогичными методами рассмотрены г-ном Пикаром (Picard. Sur certaines équations différentielles linéaires // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1880.— T. 90). Наконец, выше мы уже давали ссылку на исследования Альфана (Halphen) по дифференциальным уравнениям высших порядков.

§ 4. Конечные группы линейных подстановок для большего числа переменных

Приступая здесь к первому из обобщений, предложенных в § 1, я не собираюсь приводить примеры конечных групп линейных подстановок нескольких переменных *), а также вдаваться в различные детали, связанные с такими группами. Вместо этого я в общих чертах объясню, как можно сформулировать наши *основные проблемы* для любой такой группы.

Пусть сначала наша группа записывается в *однородной форме*. Тогда возникнут определенные целые *функции* (*формы*) от переменных $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, которые не изменяются при подстановках из нашей группы. Решается задача определения *полной системы* таких форм, т. е. форм

$$F_1, F_2, \ldots, F_p,$$

через которые все прочие абсолютно инвариантные формы выражаются в виде целых функций. Между формами из полной системы имеются определенные тождества, которые легко устанавливаются. Предположим теперь, что заданы численные значения всех F_i, согласованные с этими тождествами, но в остальном произвольные. Вычисление тех $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, которые соответствуют этим численным значениям, и есть *проблема форм* для нашей группы. Проблема форм имеет ровно столько решений, сколько операций имеется в данной группе, и все эти системы решений получаются из любого одного из них при помощи операций из нашей группы.

Наряду с концепцией теории форм имеется и другая концепция, в которой рассматриваются только лишь *отношения* между $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, т. е. $n-1$ абсолютная переменная и *дробно-линейные* подстановки. Вместо форм $F_1, F_2, \ldots$ теперь надо будет рассматривать определенные *рациональные функции* $Z_1, Z_2, \ldots$, которые являются отношениями нулевой степени, составленными из форм F_i или форм, изменяющихся при однородных подстановках лишь на множитель, и которые следует выбрать так, чтобы все остальные рациональные функции, остающиеся

---

*) О таких примерах см. уже упоминавшиеся работы Жордана, а также мои заметки в Math. Ann.— Bd 4.— S. 346; Bd 15.— S. 251. С некоторыми специальными случаями мы будем иметь дело в гл. III следующей части.

неизменными, рационально выражались через эти Z_i. Далее, выясняются все тождества, которые существуют между Z_i, и задаются численные значения Z_i, согласованные с этими тождествами, а в остальном произвольные. Поставив задачу вычисления отношений между z_i исходя из заданных значений Z_i, мы приходим к системе уравнений, которую я буду называть *системой уравнений, принадлежащей группе*. По отношению к группе неоднородных подстановок эта система имеет свойства, совершенно аналогичные тем, которые имела проблема форм по отношению к однородным подстановкам.

Обеим задачам — *проблеме форм и системе уравнений* — можно отвести соответствующее место в общей схеме теории Галуа. Идеи и результаты § 6 предыдущей главы позволяют придать смысл утверждению: в обоих случаях переход к резольвенте Галуа не изменяет нашу задачу. Ясно также, что решение проблемы форм влечет и решение системы уравнений, тогда как обратное может и не иметь места.

Мы не будем слишком долго задерживаться на наших обобщениях. Однако стоит убедиться, что общая теория уравнений в определенном смысле сводится к изучению только что рассмотренных уравнений. Когда мы имеем дело с уравнением n-й степени $f(x)=0$, мы можем рассматривать его решение как решение подходящей *проблемы форм*, поставленной для переменных x_0, x_1, ..., x_{n-1}, т. е. для корней нашего уравнения. Соответствующая группа линейных подстановок будет в этом случае состоять из тех перестановок величин x, которые образуют «группу Галуа» данного уравнения, а формы F будут составлять полную совокупность тех целых функций x, которые являются «основными рациональностями» в смысле теории Галуа. Эти замечания, конечно же, не вносят никаких принципиальных изменений в существо теории уравнений. Однако теоремы, доказанные нами в предыдущей главе, приобретают теперь новое звучание, превращаясь в простейшие, относящиеся к группам бинарных линейных подстановок примеры общей проблемы. Далее последуют тернарные задачи, и т. д., и т. д. *).

---

*) Сформулированная здесь концепция по существу содержится в моем эссе: K l e i n. Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen // Math. Ann.— 1871.— Bd 4. Кроме этого см. упоминавшийся ранее мемуар в Math. Ann.— Bd 15.

§ 5. Предварительный обзор теории уравнений пятой степени. Формулировка главной алгебраической задачи

Короткие замечания предыдущего параграфа достаточно четко очерчивают основной круг идей, на которых будет построено исследование, предстоящее нам во второй части книги. Основной задачей второй части будет сведе́ние решения общего уравнения пятой степени (после извлечения квадратного корня из его дискриминанта) к решению икосаэдрального уравнения. В соответствии с нашей концепцией уравнение пятой степени приводит к *проблеме форм* от пяти переменных с группой из шестидесяти линейных подстановок. С другой стороны, икосаэдральное уравнение есть «система уравнений» (если, конечно, этот термин позволительно использовать в случае только одной переменной) для группы тоже из шестидесяти подстановок, которая, как мы выясним, просто изоморфна группе исходного уравнения пятой степени. Занимаясь нашими частными вопросами и геометрическими образами, которые пока только начали вырисовываться, мы получили мотивировку, чтобы поставить задачу полного исследования того, *насколько сводятся друг к другу проблемы форм и системы уравнений, имеющие изоморфные группы.* Под изоморфизмом здесь мы понимаем, конечно, не только чисто абстрактный изоморфизм, но и кратный изоморфизм [а также изоморфизм проективных представлений, как, например, в § 8 гл. II.— *Примеч. ред.*]

Такая постановка задачи замечательна еще и тем, что дает четкую программу дальнейшего развития всей теории уравнений. Мы уже отмечали, что простейшими из проблем форм и систем уравнений являются задачи с наименьшим числом переменных. Поэтому если дано уравнение $f(x) = 0$, то сначала естественно выяснить, каково то минимальное число переменных, для которого мы можем построить группу линейных преобразований, изоморфную группе Галуа данного уравнения. После этого мы ставим проблему форм для этой группы и выясняем, какие имеются возможности для сведе́ния решения нашего уравнения $f(x) = 0$ к этой проблеме форм.

Те рамки, которых я хотел бы придерживаться в настоящем изложении, делают невозможным войти глубже в затронутые здесь вопросы. В дальнейшем, рассматривая уравнения пятой степени, я лишь бегло отмечу, каким образом аналогичные рассуждения позволяют сводить уравнения третьей степени к диэдральным уравнениям шестой степени, а уравнения четвертой степени — к октаэдральным уравнениям (или к тетраэдральным уравнениям, если присоединен квадратный корень из дискриминанта). Такие рассмотрения уже возникали ранее в моем эссе *), а также в параллельных исследованиях г-на Гордана **). Обсуждаемые нами принципы развиты настолько, что может быть построена удовлетворительная теория уравнений седьмой и восьмой степеней, группа Галуа которых состоит из 168 перестановок, являющаяся естественным обобщением теории уравнений пятой степени, которая будет здесь представлена в дальнейшем ***).

§ 6. Бесконечные группы линейных подстановок переменной

Сейчас мы переходим ко второму обобщению ставившихся ранее задач. Мы изменим не количество переменных, но количество подстановок и будем теперь исходить из *бесконечных* групп вместо конечных. Я разберу здесь лишь наиболее простые примеры, относящиеся к теории функций, оставляя в стороне точку зрения теории форм ****). Вместо рациональных функций от z, которые оставались неизменными для групп из конечного числа подстановок, здесь мы столкнемся с *трансцендентными*, но, правда, однозначными функциями.

---

*) K l e i n. Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und acheten Grade // Math. Ann.— 1879.— Bd 15.

**) В особенности см. G o r d a n. Ueber Gleichunden siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen // Math. Ann.— 1882.— Bd 20.

***) Если бы мы захотели аналогичным образом рассмотреть уравнения шестой степени, то после присоединения квадратного корня из дискриминанта нам пришлось бы иметь дело с группой из 360 линейных преобразований пространства, описанной мною в Math. Ann.— Bd 14, к которой позже обратился с геометрической точки зрения г-н Веронезе (V e r o n e s e. Sui gruppi P_{360}, Π_{360} della fifura di sei complessi lineari di rette... // Ann. di Mat., ser. 2.— 1883.— T. 11).

****) Можно было бы еще добавить, что особое внимание следует обратить на случай *двоякопериодических* функций, который носит несколько более сложный характер, чем остальные примеры, поскольку здесь не существует какой-либо одной фундаментальной функции, через которую все остальные функции выражаются рационально; напротив, здесь следует рассматривать две функции Z_1, Z_2 (между которыми существует алгебраическое соотношение рода 1).

С таких позиций мы вначале рассмотрим *простые периодические* и *тригонометрические функции.*

Периодическая функция аргумента z удовлетворяет основному уравнению

$$f(z+ma)=f(z), \tag{12}$$

где m может быть любым положительным или отрицательным целым числом. Поэтому у нас возникает группа подстановок

$$z'=z+ma, \tag{13}$$

по отношению к которой z-плоскость хорошо известным образом разбивается на бесконечное число «эквивалентных» параллельных полос, являющихся — в том же смысле, что и ранее,—«фундаментальными областями» для нашей группы. Простейшая из этих функций

$$e^{2i\pi z/a}=Z \tag{14}$$

на такой полосе принимает каждое значение по одному разу, вследствие чего все остальные периодические функции, принимающие в отдельной полосе каждое значение конечное число раз, рационально выражаются через Z. Мы видим, что по отношению к группе (13) это Z играет ту же самую роль, что и обозначавшаяся этим же символом фундаментальная рациональная функция в случае конечных групп. Как и для конечных групп, мы вновь можем говорить об «уравнении», принадлежащем группе. Таким уравнением будет формула (14), если в ней потребовать найти z по заданному Z. Отметим здесь, что $e^{2i\pi z/a}$ можно рассматривать как предельный случай степени с бесконечно возрастающим показателем, а формулу (14) — соответственно как предельный случай *биномиального уравнения.* Для этого надо лишь вспомнить известное определение:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{15}$$

Чтобы осуществить переход к тригонометрическим функциям, добавим к (13) новую подстановку

$$z'=-z, \tag{16}$$

удвоив, таким образом, общее число рассматриваемых подстановок. Для того чтобы получить удобные фундаментальные области для этой новой группы, проведем через точки $z = ma$ прямую, разбивающую каждую из рассматривавшихся до этого параллельных полос на две части. В роли фундаментальной функции (14) теперь выступает следующая функция:

$$e^{2\pi iz/a} + e^{-2\pi iz/a} = 2\cos\frac{2\pi z}{a}; \tag{17}$$

таким образом, в нашем «уравнении» требуется по заданному значению косинуса найти соответствующее значение аргумента. Это уравнение также является предельным вариантом одного из предыдущих. А именно, записав *диэдральное уравнение*

$$\frac{(z_1^n - z_2^n)^2}{4z_1^n z_2^n} = -Z$$

в виде

$$z^n + \frac{1}{z^n} = -4Z + 2,$$

подставим $1 + \frac{x}{n}$ вместо z и заставим n бесконечно возрастать. Тогда левая часть

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

будет стремиться к $2\cos(ix)$.

Помимо этих всем знакомых примеров рассмотрим теперь *эллиптические модулярные функции*, а также некоторые другие связанные с ними функции, впервые введенные г-ном Шварцем в часто цитированном нами мемуаре о гипергеометрических рядах (Borchardt's J.— 1872. — Bd 75). В § 8 главы III было найдено общее для случаев диэдрального, тетраэдрального, октаэдрального и икосаэдрального уравнений дифференциальное уравнение третьего порядка, которому удовлетворяют их корни z:

$$[z]_Z = \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2 (Z-1)^2} + \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2 Z^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - 1}{2Z(Z-1)}, \tag{18}$$

где численные значения ν_1, ν_2, ν_3 следует брать в соответствии со следующей часто использовавшейся нами таблицей:

	ν_1	ν_2	ν_3
Диэдр	2	2	n
Тетраэдр	2	3	3
Октаэдр	2	3	4
Икосаэдр	2	3	5

На самом деле только эти численные значения (как мы только что показали в § 2) удовлетворяют условию $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}>1$. *Функции Шварца возникают, если вместо* ν_1, ν_2, ν_3 *в* (18) *подставить любые другие три значения (для которых тем самым будет выполнено неравенство* $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}\leqslant 1$*)*.

Чтобы получить представление о поведении этих функций, заметим следующее. В третьей главе мы видели, что в случае наших основных уравнений Z-полуплоскость представляется на z-сфере сферическими треугольниками с углами π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3. То же самое будет иметь место и для функций, обсуждаемых нами теперь, коль скоро мы зафиксируем то частное решение (18), которое собираемся рассматривать, а затем обратимся к его аналитическому представлению. Однако если ранее, в соответствии с алгебраическим характером основных уравнений, для покрытия z-сферы было достаточно *конечного числа* сферических треугольников, то теперь на z-сфере разместится — сторона к стороне — *бесконечное число* не налегающих друг на друга треугольников. Здесь следует различать случаи, где $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}$ равно 1 и меньше 1. В первом из них все стороны, являющиеся границами наших сферических треугольников, при продолжении пройдут через одну фиксированную точку z-сферы и, размножая треугольники, мы будем все ближе и ближе подходить к этой точке, но никогда ее не достигнем. Функция $Z(z)$ будет принимать конечное значение всюду, за исключением этой точки.

Во втором случае все граничные линии на сфере будут иметь общую ортогональную окружность. Эта окружность и является пределом, к которому мы будем сколь угодно хорошо приближаться, увеличивая число треугольников, но через который мы никогда не переступим. Поэтому функция $Z(z)$ будет определена только по одну сторону от этой ортогональной окружности, которая в данном случае называется *естественной границей* *).

Что касается соответствующей группы линейных подстановок, то будем считать, что наши сферические треугольники являются попеременно либо заштрихованными, либо незаштрихованными. Тогда группа будет состоять из всех линейных подстановок переменной, которые переводят заштрихованные треугольники в другие заштрихованные треугольники (а незаштрихованные треугольники — в незаштрихованные).

Эллиптические модулярные функции — если ограничиваться их простейшей разновидностью — являются специальным случаем описанных сейчас функций, возникающим при $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = \infty$. В соответствии с таким значением ν_3 один из углов в каждом из лежащих на z-сфере сферических треугольников будет равен нулю. Если естественную границу функции $Z(z)$ на z-сфере отождествить с меридианом вещественных чисел, то можно доказать, что все соответствующие дробно-линейные подстановки переменной задаются *целыми вещественными подстановками*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Пусть g_2 и g_3 будут инвариантами бинарной биквадратичной формы $F(x_1, x_2)$ (см. § 11 гл. II); тогда, как известно, $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ будет соответствующим дискриминантом. Возьмем теперь Z равным абсолютному инварианту $\frac{g_2^3}{\Delta}$. *Тогда $z(Z)$ будет не чем иным, как отношением двух примитивных периодов эллиптического интеграла*

$$\int \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{F(x_1, x_2)}},$$

т. е. $z(Z) = iK'/K$ в обозначениях Якоби **).

---

*) По всем вопросам см. указанный выше мемуар г-на Шварца, в котором вдобавок приводятся соответствующие рисунки.

**) См. статью Дедекинда в Borchardt's J.— 1877.— Bd. 83, а также мою заметку: Ueber die Transformationen der elliptischen Functionen...— Math. Ann.— 1877.— Bd 14. Каждому, кого заинтересует именно эта теория, особенно стоит проконсультировать-

Мы не можем здесь более подробно заниматься разнообразными аспектами затронутой тематики. Хотелось бы только подчеркнуть тот факт, что в развитой нами концепции эллиптические модулярные функции, точно так же как экспонента и косинус, возникают как последние члены в бесконечных сериях функций, задаваемых сходным образом. Положим в формуле (18) $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, а ν_3 — последовательно принимающим все целые положительные значения начиная с 2. Тогда при $\nu_3 = 2$ мы приходим к случаю *диэдра* *), с той только разницей, что ν_2 взято бо́льшим, чем ν_3, тогда как обычно мы упорядочивали эти величины противоположным образом; при $\nu_3 = 3, 4, 5$ мы последовательно получаем случаи *тетраэдра*, *октаэдра* и *икосаэдра* и далее, при больших значениях ν_3, бесконечную серию трансцендентных функций, завершение которой, соответствующее $\nu_3 = \infty$, задается с помощью *модулярных эллиптических функций.*

§ 7. Решение тетраэдрального, октаэдрального и икосаэдрального уравнений в эллиптических модулярных функциях

Предыдущих замечаний при всей их краткости достаточно для того, чтобы понять, откуда возникает возможность *решения тетраэдрального, октаэдрального и икосаэдрального уравнений (а также упоминавшегося специального варианта диэдрального уравнения) с помощью эллиптических модулярных функций.* Рассмотрим сначала *логарифмическое решение биномиального уравнения*

$$z_n = Z$$

или — что совершенно аналогично — *тригонометрическое решение диэдрального уравнения*

$$z^n + z^{-n} = -4Z + 2.$$

Для обоих уравнений мы можем рассмотреть предельный вариант тривиального алгебраического решения, состоящего в том, что сначала из уравнений

$$\zeta^{mn} = Z \quad \text{или} \quad \zeta^{mn} + \zeta^{-mn} = -4Z + 2$$

ся с мемуаром г-на Гурвица: Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen... // Math. Ann.— 1881.— Bd 18.

*) Именно к этому случаю (как объяснялось в § 7 гл. II) приводит вычисление двойного отношения четырех точек или модулей эллиптических функций. Более того, этот случай далее послужит отправной точкой для решения уравнений пятой степени.

(в которых под m понимается произвольное целое положительное число) находится ζ, а затем z берется равным рациональной функции ζ:

$$z = \zeta^m.$$

Трансцендентное решение здесь получится, если взять $m = \infty$. При этом ζ^{mn} преобразуется уже описанным нами путем в e^{ζ}, а $\zeta^{mn} + \zeta^{-mn}$ — в $2\cos(i\zeta)$, тогда как вместо z возникает $e^{\zeta/n}$.

В точности то же самое происходит и при представлении наших основных иррациональностей в терминах эллиптических модулярных функций. Сначала мы убеждаемся, что каждая функция Шварца с показателями ν_1, ν_2, ν_3 единственным образом выражается через любую другую такую функцию, показатели ν_1', ν_2', ν_3' которой кратны исходным ν_1, ν_2, ν_3. В частности, если мы ограничимся серией функций с $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, то для однозначности такого представления нужно лишь, чтобы ν_3' делилось на ν_3. Но это условие всегда выполнено для $\nu_3' = \infty$. *Поэтому все функции из нашей серии допускают однозначное представление в терминах эллиптических модулярных функций, а такое представление и является искомым решением наших уравнений в эллиптических модулярных функциях.*

Здесь я сообщу без доказательств простейшие возникающие при таком рассмотрении формулы — для тетраэдра, октаэдра и икосаэдра *). Запишем каждое из этих трех уравнений в привычном уже для нас виде:

$$\frac{\Phi^3}{\Psi^3} = Z, \qquad \frac{W^3}{108 f^4} = Z, \qquad \frac{H^3}{1728 f^5} = Z.$$

Пусть Z, как и выше, будет равен абсолютному инварианту g_2^3/Δ эллиптического интеграла первого типа с отношением периодов iK'/K, а $q = e^{-\pi K'/K}$. *Тогда для корней октаэдрального уравнения имеется следующая простая формула*:

$$z = q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} q^{2\varkappa^2 + 2\varkappa}}{\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} q^{2\varkappa^2}}, \tag{19}$$

*) См.: Math. Ann.— Bd 14.— S. 157, 158, а также заметку г-на Бьянки: B i a n c h i. Ueber die Normal formen dritter und fünfter Stufe des Elliptiscen Integrals erster Gattung // Math. Ann.— Bd 17, и мою собственную статью: Ueber gewisse Theilwerte der Θ-Functionen // Math. Ann.— Bd 17.

которая получается из известного равенства

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0, q)}{\theta_3(0, q)},$$

если в его правую часть вместо q подставить q^2 *).

Для икосаэдральной иррациональности получится формула

$$(20) \qquad z = q^{\frac{2}{5}} \frac{\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} \cdot q^{5\varkappa^2 - 3\varkappa}}{\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} \cdot q^{5\varkappa^2 - \varkappa}} = q^{\frac{2}{5}} \frac{\theta_1\left(2\pi i \frac{K'}{K}, q^5\right)}{\theta_2\left(\pi i \frac{K'}{K}, q^5\right)},$$

т. е. выражение, совпадающее с $\dfrac{q^{\frac{2}{5}}}{1+q^2}$ с точностью до q^{10}.

Несколько сложнее обстоит дело с решением *тетраэдрального уравнения*. Сначала вместо использовавшегося до сих пор z вводится линейная функция ξ аргумента z, которая имеет нули в вершинах $\Psi = 0$ и полюсы в противоположных вершинах $\Phi = 0$. В этом смысле

$$z = (1+i) \frac{-\xi + (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)\xi + 2}.$$

Только что определенное ξ удовлетворяет уравнению

$$(21\text{a}) \qquad Z = \frac{g_2^3}{\Delta} = 64 \frac{(\xi^3 - 1)^3}{\xi^3 (\xi^3 + 8)^3},$$

трансцендентное решение которого имеет вид

$$(21\text{b}) \qquad \xi = -6q^{2/3} \frac{\sum\limits_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} (2\varkappa+1) \cdot q^{3\varkappa^2 + 3\varkappa}}{\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\varkappa} (6\varkappa+1)\, q^{3\varkappa^2 + \varkappa}}.$$

---

*) Это находится в соответствии со сделанным выше (с. 49 этой книги) замечанием, относившимся к определенным исследованиям Абеля. Для того чтобы полностью понять возникающую здесь связь, вычислим абсолютный инвариант g_2^3/Δ квадратичной формы $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. Получим

$$\frac{(1 + 14k^2 + k^3)^3}{108k^2 (1 - k^2)^4}.$$

Заменяя здесь $\sqrt{k}$ буквой z, мы получим в точности левую часть октаэдрального уравнения, применяемые мною здесь θ_2, θ_3, а также θ_1 являются хорошо известными тета-функциями Якоби.

Таким образом, для каждого из наших трех уравнений мы нашли по одному отдельному корню; остальные соответствующие им корни получатся, если в $q = e^{-\pi K'/K}$ подставить следующее бесконечное семейство значений iK'/K:

$$\frac{\alpha \cdot iK'/K + \beta}{\gamma \cdot iK'/K + \delta},$$

где α, β, γ, δ — вещественные целые числа с определителем 1. *Все такие наборы, которые совпадают по модулю* ν_3 *или различаются одновременной сменой знака, всегда задают один и тот же корень* *).

§ 8. Формулы для непосредственного решения простейшей резольвенты шестой степени для икосаэдра

В соответствии с тем особым значением, которое мы придаем икосаэдральному уравнению, наибольший интерес для нас представляет, конечно, вторая из формул (19)—(21). Мы уже отмечали, что г-ном Кронекером была установлена прямая связь простейшей резольвенты шестой степени, которой обладает икосаэдральное уравнение, с модулярным уравнением шестой степени для преобразований пятого порядка для эллиптических функций (см. § 15 предыдущей главы). С тех пор соответствующая формула была заметно упрощена г-ном Кипертом и мною путем введения рациональных инвариантов **). Так как именно этой формуле будет уделено много внимания в наших исследованиях уравнений пятой степени, то ее тоже стоит сообщить здесь в адаптированном применительно к нашим обозначениям виде и оставив в стороне доказательство.

В § 15 предыдущей главы мы записывали резольвенту, о которой идет речь, в следующем виде (формула (46)):

$$\zeta^6 - 10Z \cdot \zeta^3 + 12Z^2\zeta + 5Z^2 = 0.$$

---

*) ν_3 равно 3 для тетраэдра, 4 для октаэдра и 5—для икосаэдра. Для возникающего здесь специального диэдрального уравнения справедлива точно такая же теорема с $\nu_3 = 2$. По этому поводу см. Math. Ann.— Bd 14.— S. 153, 156.

**) См. Math. Ann.— 1878.— Bd 14.— S. 147; Math. Ann.— 1878.— Bd 15.— S. 86, а также K i e p e r t. Auflösung der Gleichungen 5. Grades; Zur Transformationen theorie der elliptischen Functionen // Borchardt's J.— 1878—1879.— Bd 87, и, наконец, только что упоминавшийся мемуар Гурвица.

Далее, пусть g_2, Δ будут уже встречавшимися нам инвариантами эллиптического интеграла и пусть Z берется равным g_2^3/Δ. Кроме того, пусть Δ' будет тем значением, которое примет Δ в результате некоторого произвольного преобразования пятого порядка. Тогда корнями резольвенты будут

$$\zeta = -\frac{g_2 \sqrt[12]{\Delta'}}{\sqrt[12]{\Delta^5}}. \tag{22}$$

Если мы хотим выразить все в терминах K, iK' и q, чтобы тем самым получить друг из друга все шесть различных корней (22), то мы должны сначала подставить вместо g_2 и $\sqrt[12]{\Delta}$ их значения,

$$\begin{gathered} g_2 = \left(\frac{\pi}{K}\right)^4 \left\{\frac{1}{12} + 20\left(\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3 q^4}{1-q^4} + \frac{3^3 q^6}{1-q^6} + \ldots\right)\right\}, \\ \sqrt[12]{\Delta} = \left(\frac{\pi}{K}\right) q^{1/6} \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1-q^{2\varkappa})^2, \end{gathered} \tag{23}$$

и затем задавать соответственно шесть значений $\sqrt[12]{\Delta'}$:

$$\begin{gathered} \sqrt[12]{\Delta'_\infty} = \frac{5\pi}{K} q^{5/6} \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1-q^{10\varkappa})^2, \\ \sqrt[12]{\Delta'_\nu} = \frac{\pi}{K} \varepsilon^{2\nu} q^{1/30} \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1-\varepsilon^{4\varkappa\nu} \cdot q^{2\varkappa/5})^2, \end{gathered} \tag{24}$$

где $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, а $\varepsilon = e^{2i\pi/5}$. Индексы ν, ∞ здесь выбираются точно так же, как и в § 15 предыдущей главы. Формула (23) в то же время может быть использована и для уточнения результатов предыдущего параграфа; а именно, с ее помощью абсолютный инвариант эллиптического интеграла можно задавать в виде

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{1728 q^2} \frac{\left(1 + 240 \sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \varkappa^3 \frac{q^{2\varkappa}}{1-q^{2\varkappa}}\right)^3}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty} (1-q^{2\varkappa})^{24}}. \tag{25}$$

§ 9. Значение трансцендентных решений

Трансцендентные решения, с которыми мы сейчас познакомились, имеют в первую очередь чисто практическое значение. Логарифмы, тригонометрические функции, а также эллиптические модулярные функции были подробно табулированы, поскольку они играют важную роль и в других разделах анализа. После того как мы свели решение наших уравнений к названным трансцендентным функциям, мы можем воспользоваться этими таблицами, избежав тем самым утомительных вычислений, которые были бы необходимы, если бы мы следовали предложенному в главе III методу решения наших уравнений при помощи гипергеометрических рядов *).

Но есть и более глубокая концепция трансцендентных решений, снимающая оттенок кажущейся их чужеродности в ряду остальных наших исследований и тесно привязывающая их к этим исследованиям.

Чтобы конкретизировать эту мысль, рассмотрим, например, решение икосаэдрального уравнения, даваемое формулой (20). Если подвергнуть iK'/K одной из бесконечного множества соответствующих целочисленных линейных подстановок, то z, согласно этой формуле, испытает одну из 60 линейных икосаэдральных подстановок. *Таким образом, группа преобразований величины iK/K кратно изоморфна группе из* 60 *икосаэдральных подстановок.* Только кратность этого изоморфизма, если так можно выразиться, бесконечно большая: каждой отдельной подстановке iK'/K соответствует одна и только одна подстановка z, тогда как каждой подстановке z соответствует бесконечно много подстановок iK'/K. Вспомним теперь рассуждения из § 5. Там мы ограничивались конечными группами линейных подстановок и спрашивали, насколько сводятся друг к другу те системы уравнений (или проблемы форм), которые имеют изоморфные группы. Сейчас же *мы распространяем эту задачу и на бесконечные группы линейных подстановок и видим, что наши трансцендентные решения являются отдельным примером решения этой обобщенной задачи.* При получении этих решений мы воспользовались определенными результатами о трансцендентных функциях, полученными в других разделах математики. В связи с только что проведенным рассмотрением такой путь нельзя считать удовлетворительной теорией. *Требуется, скорее, некоторый общий подход, дающий как результаты* § 5, *так и полу-*

*) Что касается эллиптических модулярных функций, то здесь тоже возникает одно неудобство, состоящее в том, что таблицы Лежандра для вычисления эллиптических интегралов до сих пор не приведены в соответствие с вейерштрассовской теорией эллиптических функций.

ченные выше трансцендентные решения. Эти наши замечания приводят к постановке всеобъемлющей задачи, которая охватывает и теорию уравнений высших степеней, и законы построения θ-функций. Однако, поставив эту задачу, мы тем самым достигли намеченных в § 5 границ, за которые не может заходить настоящее изложение *).

---

*) Тем не менее здесь нельзя не обратить внимание на определенные результаты г-на Пуанкаре (о некоторых общих функциях, называемых им Z-функциями), идущие в только что намеченном направлении. См. Math. Ann. — 1881. — Bd 19. — S. 562, 563. Я хотел бы далее добавить следующие сходные друг с другом ссылки на работы, в которых более или менее полно представлены те теории, с которыми мы непосредственно имели дело в первой части:

(1) Puchta. Das Octaedr und die Gleichung vierten Grades Denkschr. Wiener Academie, math.-phys. Kl. — 1879. — Bd 91. К этой работе можно обращаться также и на протяжении следующей части всякий раз, когда мы будем заниматься решением уравнений четвертой степени с помощью октаэдрального уравнения.

(2) Cayley. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions // Trans. Cambridge Phil. Soc. — 1880. — V. 13. С помощью «производной Шварца» могут объясняться те дифференциальные выражения третьего порядка, которые были установлены нами в § 6 гл. III.

(3) Васильев. О рациональных функциях, которые аналогичны двояко-периодическим. — Казань, 1880. Г-н Васильев делает здесь интересное замечание о том, что группа икосаэдральных вращений уже рассматривалась Гамильтоном с той точки зрения, что она порождается двумя операциями (Hamilton. Memorandum respecting a new system of non commutative roots of unity // Phil. Mag. — 1856).

ЧАСТЬ II
ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

ГЛАВА I
ИСТОРИЯ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Наша главная задача

Результаты предыдущей части ясно определяют нашу дальнейшую программу — мы будем исследовать возможность решения уравнений пятой степени с помощью икосаэдра. Было бы нетрудно*) сразу сформулировать тот результат, который мне необходимо получить в этой связи, и дедуктивно доказать его. Однако и здесь я тоже предпочитаю использовать индуктивный метод: этим я, с одной стороны, отдаю должное историческому развитию теории уравнений пятой степени, а с другой стороны, получаю возможность пользоваться геометрическими конструкциями. Таким образом, я надеюсь сообщить читателю не только истинность определенных утверждений, но и ход мысли, который к ним привел.

В соответствии со сказанным, сначала мы должны получить представление о предшествующих работах, посвященных уравнениям пятой степени, настолько, насколько они будут использоваться в дальнейшем. Ради краткости я здесь оставлю в стороне все те результаты, с которыми мы не будем иметь дело непосредственно, но которые весомы и значительны с более широкой точки зрения. К ним прежде всего относятся доказательства *Руффини* и *Абеля* невозможности решения общего уравнения пятой степени с помощью конечного числа корней и параллельные работы, также берущие начало от Абеля, в которых описаны все специальные уравнения пятой степени, отличающиеся в этом плане от общего. Помимо этого к ним относятся попытки *Эрмита* и *Бриоски* при-

*) И очень современно.— *Примеч. ред.*

менить к решению уравнений пятой степени теорию инвариантов бинарных форм пятого порядка. Мы будем пользоваться теорией инвариантов, но, как и в первой части, ограничимся рассмотрением только таких форм, которые переходят в себя лишь при определенных линейных подстановках. Наконец, мы оставляем в стороне вопросы о вещественности корней уравнений пятой степени и, в частности, обширные исследования *Сильвестра* и *Эрмита* о зависимости вещественности корней от инвариантов бинарных форм пятого порядка.

Эти ограничения оставляют нам два направления для исследований. Предметом каждого из них является изучение корней общего уравнения пятой степени как функций коэффициентов уравнения. Оба исходят из идеи упростить эти функции так, чтобы вместо пяти коэффициентов уравнения можно было ввести меньшее количество независимых величин. Различаются только используемые для этой цели средства: в первом случае это *преобразование уравнений*, а во втором — построение резольвент.

Метод преобразований, как известно, восходит к Чирнгаузу *). Пусть дано уравнение n-й степени

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0; \tag{1}$$

тогда Чирнгауз полагает

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \mu x^{n-1}, \tag{2}$$

после чего, исключая x из уравнений (1) и (2), получает уравнение относительно y, также имеющее степень n, которое он пытается наделить специальными свойствами путем подходящего выбора коэффициентов α, β, γ, ..., μ. Результаты, которые таким образом можно получить, мы сформулируем сразу для случая $n = 5$. Прежде всего отметим, что если найден y, то x тоже может быть найден, по крайней мере в том случае, когда уравнение относительно y не имеет кратных корней (это свойство, конечно, предполагается выполненным для уравнения (1)). В этом случае уравнения (1) и (2), в которых y теперь уже рассматривается как известная величина, имеют ровно один общий корень x и этот x рационально выражается известным способом.

---

*) Tschirnhaus. Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione // Acta eruditorum.— Bd 2.— Leipzig, 1683.— С. 204 и далее. Уже само название показывает, что Чирнгауз (как впоследствии и Джерард), не осознавал границы применимости своего метода.

Метод построения резольвент применяется к решению уравнений пятой степени столь же давно. Особенно ярким в этом смысле был 1771 год, в котором *Лагранж*, *Мальфатти* и *Вандермонд* независимо друг от друга опубликовали свои очень близкие исследования*). Однако результаты, достигнутые в те годы, состояли скорее в выявлении трудностей, чем в их преодолении. Так продолжалось до тех пор, пока в 1858 г. *Кронекер* не добился существенного сдвига, построив для уравнения пятой степени резольвенту шестой степени**). В предстоящем обзоре методов Кронекера и примыкающих к ним результатов мы ограничимся как раз теми, которые относятся к построению этой резольвенты.

Оба подхода, которые мы только что сравнили друг с другом, имеют дело с чисто алгебраическими проблемами. Однако развитие анализа привело к тому, что оба они оказались тесно связанными с более общей задачей: получить решение уравнения с помощью подходящих трансцендентных функций. В последней главе первой части***) трансцендентные функции имели узко практическое применение, весьма далекое от теоретического исследования уравнений. Однако теперь мы сознательно и последовательно будем обращаться к методам, позволяющим связать решение уравнений пятой степени с теорией *эллиптических функций*, ибо именно они приводят к простому и наглядному истолкованию чисто алгебраических проблем.

В заключение следует отметить, что между двумя методами, которые мы как бы противопоставили друг другу, нет принципиальной разницы. Если с помощью преобразований нам удастся свести наше уравнение пятой степени к другому, содержащему меньшее число параметров, то его резольвенты дают простейшие резольвенты исходного уравнения; обратно, если мы каким-либо образом получили специальную резольвенту для ис-

---

*) Lagrange. Reflexions sur la resolution algébrique des équations.— Mét. Acad. Berlin.— 1770-71; Oeuvres.— T. 3.

Malfatti. De aequationibus quadrato-cubicis disquisit analytica; Tentativo per la resoluzione delle equazioni di quinto grado // Atti Accad. Siena.— 1771-72.

Vandermonde. Mémoire sur la résolution des equations // Mém. Acad. Paris.— 1771.

**) Соответствующие ссылки мы дадим чуть позже.

***) В дальнейшем при ссылках на первую часть я перед арабской цифрой, указывающей номер главы, буду писать римскую цифру I, например для этого случая: I, 5, § 7, 9.

ходного уравнения, то при помощи повторного применения резольвентной конструкции мы можем вернуться к уравнению n-й степени, которое получается из исходного уравнения преобразованием.

§ 2. Элементарные замечания о преобразовании Чирнгауза. Форма Бринга

Для того чтобы получить уравнение n-й степени, которому удовлетворяет y из формулы (2), удобно его коэффициенты, являющиеся симметрическими функциями y, выразить через симметрические функции x. Очевидно, что *коэффициент при* y^{n-k} *является целой однородной функцией степени* k *неопределенных величин* α, β, γ, ..., μ. Поэтому мы должны решить линейное уравнение с n неизвестными, если хотим избавиться от члена, содержащего y^{n-1}, и аналогичное квадратное уравнение, если надо исключить также и y^{n-2}. Это легко сделать: рассматривая $n-2$ неизвестных как параметры, исключим одну из оставшихся неизвестных при помощи линейного уравнения, а последнюю неизвестную выразим из квадратного уравнения. Уравнение, в котором отсутствуют члены с y^{n-1} и y^{n-2}, я буду в дальнейшем называть *главным уравнением*. Таким образом, преобразование Чирнгауза позволяет свести любое уравнение к главному всего лишь с помощью квадратного корня. Однако, как только мы захотим исключить другие члены уравнения, мы сразу же столкнемся с трудностями — ведь при этом мы, вообще говоря, придем к исключающим уравнениям более высоких степеней, и непонятно, как обходиться с ними элементарными методами. Тем не менее более кропотливое исследование позволило получить здесь важный и основополагающий для дальнейшего изложения результат. Если потребовать одновременное обращение в нуль всех коэффициентов при y^{n-1}, y^{n-2}, y^{n-3}, то исключающее уравнение будет иметь шестую степень. Однако можно показать, что при $n > 4$ и подходящем выборе коэффициентов преобразования это уравнение шестой степени может быть при помощи решения квадратного уравнения сведено к уравнению третьей степени.

Сформулированный результат обычно приписывается английскому математику Джерарду, опубликовавшему его во второй части своих «Математических исследований» (Jerard. Mathematical Reslatches.— Bristol; London, 1834). Однако имеется и другая дата, столь же давняя, сколь и сама история изучения уравнений пятой степени. Как заметил *Хилл* в 1861 г. в «Докладах Шведской академии», этот результат был опубликован еще в 1789 г. С. Брингом в диссертации, представленной на рассмотрение в Лундском университете *). Поэтому можно было бы, конечно, связывать этот результат и с именем Джерарда, как это широко распространено в настоящее время, но я буду в дальнейшем говорить об уравнении Бринга, поскольку работа Джерарда не внесла ничего нового в рассматриваемый нами вопрос и наряду с некоторыми интересными результатами она содержала несколько заведомо ложных рассуждений: например, он (так же, как и Чирнгауз) утверждал, что, используя элементарные преобразования, при помощи его метода можно устранить все промежуточные члены не только в уравнении пятой степени, но и в уравнении любой степени, и не отказывался от этого несмотря на полученные в дальнейшем опровержения **). Запишем согласно предыдущему каноническое уравнение пятой степени в следующем виде:

$$y^5+5ay^2+5by+c=0. \tag{3}$$

В форме Бринга тоже имеет смысл оставить коэффициент 5, и кроме того мы во избежание путаницы заменим y на z. Получим

$$z^5+5bz+c=0. \tag{4}$$

Как мы видим, уравнение Бринга все еще содержит первые два коэффициента. Однако один из них сразу можно уничтожить при помощи подстановки $z=\rho t$ с подхо-

*) Полное заглавие гласит: «Meletemata quaedam mathematica circa transformationen aequationen algebraicarum, quae preside E. S. Bring... modeste subjicit S. G. Sommelius». Судя по названию, можно было бы предположить, что автором является Соммелиус, но, как я узнал у г-на Беклунда из Лунда, это было бы ошибкой, поскольку в то время диссертации полностью писались экзаменатором и предлагались кандидату лишь в качестве материала для собеседования. Основные моменты трактата были вновь изложены в уже упоминавшемся докладе Хилла Шведской академии, а также в статье Harley. A contribution to the history... // Quart. J. Math.— 1863.— V. 6, и, наконец, в Grunert's Archiv.— 1864.— V. 41.— P. 105—112 (с комментариями издателя).

**) Дальнейшие публикации Джерарда находились в основном в Philosophical Magazine.— 1835.— V. 7; 1845.— V. 26; 1846.— V. 28; 1852.— V. 3 (n. s.); 1862, 1863.— V. 23, 24, 26, а стало быть (как явствует из номеров томов) были сделаны позже, чем доклад, представленный Гамильтоном в British Association for the Advancement of Science (Reports of British Association, Bristol.— V. 6.). Позднее Кокль (Kockl) и Кэли повторно опровергли утверждение Джерарда (см. Phil. Mag.— 1859—62.— V. 17—24).

дящим ρ. Таким образом, получаем, что *после определенного преобразования Чирнгауза пять корней уравнения пятой степени будут зависеть от одной-единственной переменной величины.* Результат этот особенно важен постольку, поскольку функции одной переменной изучены гораздо полнее, чем функции нескольких переменных. Например, записывая (4), как это делал Эрмит в своих исследованиях, которые мы вскоре рассмотрим, в виде

$$t^5 - t - A = 0,$$

мы, с одной стороны, легко сможем исследовать методом Римана пять корней t как функции величины A, а с другой стороны — вычислить их с любой точностью, найдя их разложения в ряды.

После такого предварительного знакомства с результатами Бринга мы отложим анализ их смысла до того момента, пока наши собственные исследования сами в них не упрутся. Я опускаю перечисление многочисленных комментариев, которые получили за эти годы исследования Бринга и Джерарда. Одним из первых и в то же время наиболее известных изложений их метода является, видимо, книга: Serret. Traité d'algèbre supérieure.— 1 éd.— 1849. Эрмит тоже занимался преобразованием Бринга *), правда, он, как уже отмечалось, ориентировался на приложения к теории инвариантов бинарных форм пятой степени; следует отметить, что все необходимые для преобразования иррациональности Эрмит определял гораздо точнее, чем это обычно делается.

§ 3. Сведения об эллиптических функциях **)

Специальные вопросы теории эллиптических функций, с которыми нам предстоит сейчас познакомиться, относятся к теории преобразований. Обозначим, как это обычно делают, буквой x модуль эллиптического интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{5}$$

и буквой λ — модуль интеграла, получающегося из него

*) Во всеобъемлющем трактате (на который мы часто будем ссылаться) Hermite. Sur l'équation du cinquième degré // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1865.— V. 61; 1866.— V. 62, в особенности с. 877, 965, 1073 т. 61 и с. 65 т. 62.

**) См. Чеботарев Н. Г. Теория Галуа.—М.; Л.: ОНТИ, 1936, гл. II, § 5, п. 7—10 (с. 72).— *Примеч. ред.*

делением на n, где n — нечетное простое число. Тогда, согласно Якоби *) и Зонке **), между величинами $u = u = \sqrt[4]{k}$ и $v = \sqrt[4]{\lambda}$ имеется соотношение степени $n+1$ — так называемое модулярное уравнение

$$f(u, v) = 0, \tag{6}$$

которое при $n = 5$ имеет вид

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0. \tag{7}$$

В этом равенстве u можно различными способами выразить через $q = e - \pi K'/K$; например, так:

$$u = \sqrt{2q^{\frac{1}{8}}} \frac{\sum q^{2m^2+m}}{\sum q^{2m^2}}. \tag{8}$$

Тогда, последовательно заменяя в этой формуле $q^{1/8}$ величинами

$$q^{\frac{n}{8}}, \quad q^{\frac{1}{8n}}, \quad \alpha q^{\frac{1}{8n}}, \ \ldots, \ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{8n}}, \tag{9}$$

где $\alpha = l\,\frac{2\pi i}{n}$, мы получим все $n+1$ значений v, удовлетворяющих при данном u модулярному уравнению (7). Стало быть, *модулярное уравнение является примером уравнения с одним параметром, решаемого в эллиптических функциях* ***). Параметром в нем служит u. Зная u, мы находим соответствующее значение q — либо путем обращения формулы (8), либо вычислив K и K' из (5):

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \tag{10}$$

где $k'^2 = 1 - k^2$, после чего $n+1$ значение v получается при помощи подстановок (9).

Выясним теперь, нельзя ли с помощью модулярного уравнения осуществить решение также и других уравнений. Для этого, как объяснялось в I, 4, надо сначала определить группу модулярного уравнения. Но как раз это

---

*) Jacobi. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. — 1829.

**) Sohnke. Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum // Crelle's J. — 1834. — T. 12.

***) Выше, в I, 5, § 7,8 мы уже встречались и с другими примерами, но они выходят за рамки этого исторического обзора.

и было сделано еще самим *Галуа***). В соответствии с подстановками (9) Галуа обозначает корни модулярного уравнения следующими индексами:

(11) $$v_\infty,\ v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}.$$

Если пренебречь явным видом численной иррациональности **), то группу модулярного уравнения можно описать как совокупность таких перестановок v_ν, которые получаются при помощи замен ν по формуле

(12) $$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta} \pmod n.$$

Частные случаи этой формулы уже рассматривались нами в I, 4, § 15 и I, 5, § 7. Коэффициенты α, β, γ, δ здесь будут произвольными целыми числами, подчиненными конгруэнции

$$\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1 \pmod n.$$

Интерпретируем этот результат, в частности, для $n=5$. Группа (12), как мы уже видели ранее, изоморфна группе 60 вращений икосаэдра, т. е. группе четных перестановок пяти предметов. Отсюда следует, что модулярное уравнение (7) обладает резольвентой пятой степени, дискриминант которой будет квадратом рациональной величины после присоединения определенной численной иррациональности ($\sqrt{5}$, как показал Эрмит). Нельзя ли при помощи преобразования Чирнгауза связать общее уравнение пятой степени с такой резольвентой после присоединения квадратного корня из его дискриминанта? Или, наоборот, возможно ли, присоединив квадратный корень из дискриминанта, построить для общего уравнения пятой степени такую резольвенту шестой степени, которая при помощи некоторого преобразования сводится к модулярному уравнению (7)? Именно в этом и заключаются те самые два подхода к решению уравнений пятой степени в эллиптических функциях, которые были открыты и разработаны Эрмитом и Кронекером соответственно.

Только что была высказана идея подвергнуть преобразованию Чирнгауза само модулярное уравнение. В некотором смысле это проделал еще Якоби, который наряду

---

*) См. Oeuvres de Galois // Liouville's — 1846. — Т. 11.

**) Согласно исследованиям Эрмита единственная возникающая здесь численная иррациональность есть $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n}$.

с модулярным уравнением рассмотрел еще целый ряд других уравнений, способных заменить модулярное. В мои планы не входит детальное ознакомление с естественной и полной теорией возникающего таким образом бесконечного семейства уравнений *), и мы ограничимся лишь одним, особенно важным результатом, который был получен Якоби в 1829 г. **).

Вместо модулярного уравнения он рассматривает там так называемое *уравнение множителя* и другие эквивалентные ему уравнения. Он установил, что, используя одни только численные иррациональности, можно представить все $n+1$ корней каждого из этих уравнений в виде комбинаций $(n+1)/2$ величин. А именно, обозначив эти величины A_0, A_1, ..., $\mathrm{A}_{(n-1)/2}$ и снабдив корни z рассматриваемого уравнения индексами, введенными Галуа, мы получим (после подходящего выбора знака стоящих в левых частях радикалов) следующие формулы:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \sqrt{z_\infty} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\,\mathrm{A}_0}, \\ \sqrt{z_\nu} &= \mathrm{A}_0 + \varepsilon^{\nu}\mathrm{A}_1 + \varepsilon^{4\nu}\mathrm{A}_2 + \ldots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\cdot\nu}\mathrm{A}_{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, а $\varepsilon = e2\pi i/n$. Таким образом, между $\sqrt{z_\nu}$ возникают следующие соотношения:

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\nu} \sqrt{z_\nu} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}\, \sqrt{z_\infty}, \\ \sum\limits_{\nu} \varepsilon^{-N\nu} \sqrt{z_\nu} = 0, \end{cases}$$

где N может быть любым из $(n-1)/2$ невычетов по модулю n. Сам Якоби отметил исключительную важность своего результата, снабдив его коротким комментарием: «C'est un théorème des plus importans dans la théorie algébrique de la transformation et de la division fonctions ellipques» ***).

---

*) Все, что в этой связи относится к свойствам модулярных уравнений, см. в моих исследованиях; K l e i n. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen // Math. Ann.— 1879.— Bd 17.

**) J a c o b i. Notices sur les functions elliptiques // Crelle's J.— 1829.— V. 3.— P. 308; Werke.— Bd 1.— S. 261.

***) «Это одна из важнейших теорем в алгебраической теории преобразований и теории деления эллиптических функций».— *Примеч. ред.*

Наше дальнейшее изложение покажет, насколько справедливым было это замечание. Формулы (13) и (14) приобрели общеалгебраический смысл у Кронекера и Бриоски, которые предложили называть якобиевыми уравнениями $(n+1)$-й степени любые уравнения, корни которых удовлетворяют приведенным соотношениям, вне зависимости от их связи с теорией эллиптических функций*). Существование якобиевых уравнений шестой степени и является, как мы вскоре ясно увидим, ядром кронекеровской теории уравнений пятой степени (это соответствует случаю $n=5$).

§ 4. О работе Эрмита 1858 г.

Теперь у нас есть все необходимое для понимания первой работы Эрмита по этой теме — знаменитого мемуара 1858 года**). Эрмит, так же как и Бетти, уже и раньше занимался доказательствами некоторых принадлежавших Галуа утверждений о группе модулярного уравнения. В случае $n=5$ необходимо было установить, для каких уравнений пятой степени является резольвентой модулярное уравнение (7). Эрмит выяснил это, введя

$$y=(v_\infty-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3) \tag{15}$$

и найдя уравнение, которому этот y удовлетворяет:

(16)

$$y^5-2^4\cdot 5^3u^4(1-u^8)^2y-2^6\cdot\sqrt{5^5}u^3(1-u^8)^2(1+u^8)=0.$$

Это и есть требуемое уравнение пятой степени***). Оно имеет в точности форму Бринга, о которой говорилось выше. Более того, любое уравнение Бринга можно записать в виде (16), подобрав надлежащим образом u. Для этого достаточно сравнить (16) с уравнением Бринга

---

*) Как и во всех своих работах, я следую здесь обозначениям и терминологии синьора Бриоски. Обозначения Кронекера отличаются в основном тем, что он вводит $f^2=z$ и получает уравнения $(2n+2)$-й степени относительно f, в результате чего соотношения между величинами f, соответствующие нашим формулам (14), становятся линейными. Я не думаю, что этот способ имеет какие-либо преимущества.

**) Hermite. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré // C. r. Acad. Sci. Paris. — 1858. — T. 46.

***) Доказательство можно найти в книге: Briot, Bouquet. Théorie des founctions elliptiques. — Paris, 1875. — С. 654 и далее.

вида (5)

$$t^5 - t - A = 0$$

и положить

$$y = 2\sqrt[4]{5^3}\,u\sqrt{1-u^8}\,t. \tag{17}$$

При этом коэффициент A получится равным

$$A = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \cdot \frac{1+u^8}{u^2\sqrt{1-u^8}}. \tag{18}$$

Это возвратное уравнение, и оно легко решается относительно u. Таким образом, *формулы Эрмита позволяют решить любое уравнение Бринга, а стало быть, и общее уравнение пятой степени в эллиптических функциях.*

Как явствует из этого короткого обзора, работа Эрмита не имеет никакого отношения к *алгебраической* теории уравнений пятой степени. Наоборот, она целиком относится к области модулярных эллиптических функций; более того, на ней основывается целый ряд более поздних исследований Эрмита по теории модулярных функций. В нашем дальнейшем изложении эта работа будет упоминаться лишь в общих чертах, поскольку в избранном нами направлении исследований использование эллиптических функций отступит на второй план. Конечно, все бы сразу изменилось, пожелай мы сделать ставку на развитие общих идей заключительного параграфа первой части.

Наряду с первой работой Эрмита стоит упомянуть еще два сообщения, сделанных Бриоски и Жубером. Оба они нашли резольвенту пятой степени для уравнения множителя шестой степени (т. е. для специального якобиева уравнения шестой степени), а стало быть, тоже получили уравнение (16)*). Кронекер, как он сообщил Эрмиту**), тоже занимался построением резольвент подобного типа.

---

*) Brioschi. Sulla risolusione delle equazioni di quinto grado // Annali di Matematica, Ser. I.— Juni 1858.— T. 1.

Joubert. Sur la résolution de l'équation du quatrième degré // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1858.— T. 46; Note sur la résolution de l'équation du cinguiéme degré // C. r. Acad. Sci. Paris. — 1859. T. 48.

**) Письмо Эрмиту, июнь 1858 г., см. C. r. Acad. Sci. Paris.— 1858.— T. 46.

§ 5. Якобиевы уравнения шестой степени

Продолжая наш обзор, обратимся теперь к исследованиям якобиевых уравнений, предпринятым *Бриоски* и *Кронекером* *). Но сначала отметим следующее. Всякий раз, когда два тесно сотрудничающих исследователя вместе работают в одной и той же области, бывает очень трудно установить, что именно было сделано одним, а что другим. Хронологический метод, исходящий из дат отдельных публикаций, применим — разумеется — не всегда. Но, в конце концов, лишь он способен внести хоть какую-то определенность. Поэтому сейчас мы к нему и прибегнем. Я начну с рассказа о работах, которые были опубликованы г-ном Бриоски в первом томе Annali di Matematica, Ser. I.— 1858.

В начале г-н Бриоски доказывает некоторые фундаментальные утверждения, восходящие к Якоби **), а затем переходит к актуальным вопросам, касающимся общего якобиева уравнения шестой степени ***). Его результаты состоят в следующем. Пусть A_0, A_1, A_2 — три величины, фигурирующие в (13) при $n=5$, и пусть далее

$$A = A_0^2 + A_1A_2,$$

$$(19)\quad B = 8A_0^4A_1A_2 - 2A_0^2A_1^2A_2^2 + A_1^3A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5),$$

$$C = 320A_0^6A_1^2A_2^2 - 160A_0^4A_1^3A_2^3 + 20A_0^2A_1^4A_2^4 + 6A_1^5A_2^5 + $$
$$+ A_1^{10}A_2^{10} - 4A_0(A_1^5 + A_2^5)(32A_0^4 - 20A_0^2A_1A_2 + 5A_1^2A_2^2).$$

Тогда общее якобиево уравнение шестой степени будет иметь вид

$$(20)\qquad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 -$$
$$-C(z-A) + 5(B^2 - AC) = 0.$$

Затем Бриоски, намереваясь построить возможно более простую резольвенту пятой степени для этого уравнения, полагает, следуя Эрмиту ****),

$$(21)\qquad y = (z_\infty - z_0)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3).$$

---

*) Ср. с аналогичным обзором Эрмита, сделанным в его уже упоминавшемся мемуаре: H e r m i t e. Sur la équation du cinquième degré // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1866.— V. 62.— P. 245—247.

**) Ann. di Mat., Ser. I.— Mai 1858.— T. 1.— P. 175.

***) Ann. di Mat., Ser. I.— Juni 1858.— T. 1.— P. 256.

****) Ann. di Mat., Ser. I.— Juni 1858.— T. 1.— P. 256.

(Эрмит в частном письме подсказал ему, что квадратный корень из этого выражения уже выражается рационально через А, что и дает возможность перейти к уравнению пятой степени *).) Пусть x — этот квадратный корень; тогда для пяти величин, сопряженных с x, Бриоски устанавливает следующие формулы:

$$x_\nu = -\varepsilon^\nu A_1(4A_0^2 - A_1A_2) + \varepsilon^{2\nu}(2A_0A_1^2 - A_2^3) + \\ + \varepsilon^{3\nu}(-2A_0A_2^2 + A_1^3) + \varepsilon^{4\nu}(4A_0^2 - A_1A_2), \tag{22}$$

а соответствующее уравнение, как он вычислил, имеет вид

$$x^5 + 10Bx^3 + 5(9B^2 - AC)x - \sqrt[4]{\frac{\Pi}{5^5}} = 0, \tag{23}$$

где П — дискриминант якобиева уравнения (20) **).

Уравнение множителя шестой степени для эллиптических функций, на которые впервые обратил внимание Якоби, возникает как частный случай (20). *Бриоски установил, что оно полностью характеризуется условием* $B = 0$, при выполнении которого (23) превращается в уравнение Бринга. *Заслуга Кронекера состоит в том, что он первым обратился к случаю $A = 0$ и получил решение соответствующего уравнения в эллиптических функциях.* У нас нет необходимости приводить здесь подробно его основные формулы, которые он сообщил в своем письме Эрмиту ***) и которые впоследствии Бриоски доказал в своем мемуаре ****).

Чтобы упростить их рассмотрение, мы вместо использованного Кронекером модуля k введем рациональные инварианты эллиптического интеграла g_2, g_3, Δ; выше мы уже познакомились (I, 5, § 5) с формулами для решения обсуждаемого уравнения в этой упрощенной форме. На самом деле *якобиево уравнение шестой степени с* $A = 0$ *есть не что иное, как простейшая резольвента шестой степени, которую мы получили в* I, 4, § 5 *для ико-*

*) Ann. di Mat., Ser. I.— Sept. 1858.— T. 1.— P. 326.

**) В отличие от формулы самого Бриоски я привожу здесь численные коэффициенты, которые были найдены позднее Жубером (Joubert. Sur l'équation du sixième degré // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1867.— V. 64).

***) C. r. Acad. Sci. Paris.— Juni 1858.— V. 46.

****) Brioschi. Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado // Atti Istituto Lombardo.— Nov. 1858.— T. 1.

саэдра. Надо только положить

$$(24) \qquad \mathrm{A}_0 = z_1 z_2, \quad \mathrm{A}_1 = z_1^2, \quad \mathrm{A}_2 = -z_2^2$$

и соответственно

$$(25) \qquad B = -f, \; C = -H.$$

В то же время при $A = 0$ резольвента шестой степени (23) преобразуется к виду

$$(26) \qquad x^5 + 10Bx^3 + 45B^2x - \sqrt[4]{\frac{\Pi}{5^5}} = 0,$$

что согласуется с формулой (27) из I, 4, § 11. Я здесь лишь бегло упоминаю эти связи, поскольку позднее мы вернемся к более обстоятельному их рассмотрению.

Остается рассмотреть последнее направление исследований якобиевых уравнений шестой (а на самом деле и любой) степени, к которому впервые обратился г-н Кронекер в своем алгебраическом сообщении, последовавшем в 1861 г.*), которое впоследствии было развито г-ном Бриоски, особенно в первом томе второй серии Annali di Matematica в 1867**). Задача состоит в том, чтобы из одного якобиева уравнения получить другое при помощи преобразования Чирнгауза. Г-н Кронекер заметил, что это можно сделать в двух случаях: *либо когда оба корня Z_∞, Z_ν преобразованного уравнения, соответствующие корням z_∞, z_ν исходного уравнения удовлетворяют в точности формулам* (13) *и* (14) (в которых ε можно заменить на ε^R с любым квадратичным вычетом R по модулю n — это приведет только к перестановке корней), *либо когда они удовлетворяют другим формулам, получающимся из* (13) *и* (14) *заменой ε на ε^N*, где *N является произвольным невычетом по модулю n.* Предположим теперь, что $n = 5$. Тогда в первом случае можно взять $\sqrt{Z}$ равным, например, $\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial A}$ или $\frac{\partial \sqrt{z}}{\partial B}$. Наиболее общее выражение для $\sqrt{Z}$ является линейной комбинацией этих величин с произвольными по-

*) Monatsberichte der Berliner Akademie.

**) Brioschi. La soluzione più generale delle equazioni del 5 grado // Ann. di Mat., Ser. II.— 1867.— T. 1. См. также Brioschi. Sopra alcune nuove relazioni modulari // Atti della R. Accademia di Napoli.— 1866.

стоянными коэффициентами:

$$Z = \lambda \sqrt{z} + \mu \frac{\partial \sqrt{z}}{\partial A} + \nu \frac{\partial \sqrt{z}}{\partial B}. \tag{27}$$

Для того чтобы разобраться со вторым случаем, обратимся вначале к частному примеру, в котором

$$Z = \frac{1}{z - A} + \frac{C}{5B^2 - AC}, \tag{28}$$

а затем будем преобразовывать возникающее здесь якобиево уравнение в полном соответствии с формулами (27). К подробному описанию этих преобразований мы вернемся позже, а пока что отметим следующее: если выражение A через $\sqrt{Z}$ переписать с использованием формулы (27), то получится целая однородная функция величин λ, μ, ν. Мы можем сделать A нулевым, если положим $\nu = 0$ и определим $\lambda : \mu$ из возникающего здесь квадратного уравнения. Стало быть, *при помощи извлечения квадратного корня общее якобиево уравнение шестой степени может быть преобразовано в уравнение с* $A = 0$.

Впоследствии Бриоски собрал все свои исследования, посвященные специально теории уравнений пятой степени (как те, о которых мы уже упомянули здесь, так и те, о которых мы вскоре будем рассказывать), в Mathematische Annalen *). Это было очень кстати, поскольку его первоначальные публикации были сильно разбросаны, а потому могли оказаться труднодоступными для многих математиков.

Кронекер тоже вернулся впоследствии к общей теории якобиевых уравнений **), но рассматривавшиеся им вопросы выходят за рамки, отведенные нами для настоящего обзора.

§ 6. Кронекеровский метод решения уравнений пятой степени

Познакомившись предварительно с теорией якобиевых уравнений шестой степени, мы легко сможем теперь описать суть того метода решения общего уравнения пятой степени, который был развит Кронекером в его часто

---

*) Brioschi. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Math. Ann.— 1878.— Bd 13.

**) Kronecker. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen // Monatsber. Berliner Akad.— 1879.

цитировавшемся письме к Эрмиту (C. r. Acad. Sci. Paris.— Juni 1858.— V. 46). Якобиевы уравнения шестой степени, как мы уже заметили, тесно связаны с теорией эллиптических функций, которые благодаря формулам (13) и (14) представляют собой замечательно простой тип алгебраических иррациональностей. Частью результата Кронекера является такое утверждение: *для общего уравнения пятой степени после присоединения квадратного корня из его дискриминанта можно построить рациональную резольвенту шестой степени, являющуюся якобиевым уравнением*. Добавляя к этому недавно сделанное замечание, получаем, что *рассматриваемое якобиево уравнение после присоединения только одного квадратного корня может быть преобразовано в якобиево уравнение с* $A = 0$ (*т. е. к нормальной форме, содержащей только один параметр* *)), *которое может быть решено в эллиптических функциях*.

Однако в оригинале Кронекер существенно не выделяет эти два различаемых нами момента. Он ограничивается тем, что вводит функцию

$$(29)\qquad f(\nu; x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{m=0}^{4}\sum_{n=0}^{4} \sin\frac{2\pi n}{5}\left(x_m x_{m+n}^2 x_{m+2n}^2 + \nu x_m^3 x_{m+n} x_{m+2n}\right)$$

пяти корней уравнения пятой степени, в которой параметр ν предполагается определить таким образом, чтобы $\sum f^2 = 0$, и замечает затем, что всевозможные f, получающиеся из (29) при помощи четных перестановок x_ν, удовлетворяют уравнению 12-й степени

$$(30)\qquad f^{12} - 10\varphi f^6 + 5\psi^2 = \psi f^2,$$

которое может быть решено при помощи эллиптических функций. Действительно, если положить в (30) $f^2 = z$, то получим якобиево уравнение с $A = 0$, причем обращение A в нуль соответствует равенству $\sum f^2 = 0$.

Заслуга г-на Бриоски состоит в том, что эту глубокую идею Кронекера он сделал доступной для широкой математической аудитории в ясной и вместе с тем максимально общей форме (см. только что упоминавшийся мемуар:

*) Чтобы получить только один параметр, здесь также надо прибегнуть к замене $z = \rho t$, определив после этого ρ надлежащим образом.

Brioschi: Sul metodo'di Kronecker... // Atti des Istituto Lombardo.— Nov. 1858.— V. 1). Мы не будем сейчас воспроизводить те конструкции, которые были созданы Бриоски в общей теории якобиевых уравнений шестой степени. Единственное, что нам понадобится здесь, так это установленные им общие правила построения корней z, возникающих в формуле (29). Пусть

$$v(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{31}$$

— рациональная функция пяти независимых переменных x_ν, остающаяся неизменной при циклических перестановках $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, и пусть далее

$$v' = v(x_0, x_4, x_3, x_2, x_1). \tag{32}$$

Тогда Бриоски полагает

$$v - v' = u_\infty \tag{33}$$

и образует из этой функции еще пять функций $u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_4$, сначала переставив x_ν по формулам

$$x_0' = x_0,\ x_1' = x_3,\ x_2' = x_1,\ x_3' = x_4,\ x_4' = x_3,$$

а затем применяя к получившейся функции уже упоминавшиеся циклические перестановки аргументов. *Тогда выражения*

$$\left\{\begin{aligned} z_\infty &= \left(u_\infty \sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right)^2, \\ z_0 &= \left(u_\infty + u_0 \sqrt{5} - u_1 + u_2 + u_3 - u_4\right)^2, \\ z_1 &= \left(u_\infty - u_0 + u_1 \sqrt{5} - u_2 + u_3 + u_4\right)^2, \\ z_2 &= \left(u_\infty + u_0 - u_1 + u_2 \sqrt{5} - u_3 + u_4\right)^2, \\ z_3 &= \left(u_\infty + u_0 + u_1 - u_2 + u_3 \sqrt{5} - u_4\right)^2, \\ z_4 &= \left(u_\infty - u_0 + u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}\right. \tag{34}$$

оказываются корнями якобиева уравнения шестой степени, коэффициенты которого остаются неизменными при всевозможных четных перестановках x_ν и, стало быть, являются рациональными функциями коэффициентов исходного уравнения пятой степени и квадратного корня из его дискриминанта. Формулы (34) станут более компактными, если ввести в рассмотрение величины $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, через которые $\sqrt{z}$ выражается по формулам (13).

Сравнение формул немедленно дает

$$
(35)\quad \begin{cases} A_0\sqrt{5} = u_\infty\sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ \frac{1}{2}A_1\sqrt{5} = u_0 + \varepsilon^4 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \varepsilon u_4, \\ \frac{1}{2}A_2\sqrt{5} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^4 u_4, \end{cases}
$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$, так что $\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$. Формулы (29) являются, как уже отмечалось, частным случаем формул (34). Параметр ν, который у Кронекера с самого начала входит в функции u и v, используется им впоследствии для того, чтобы добиться равенства $A = 0$. Синьор Бриоски приводит полный вывод окончательного уравнения шестой степени и еще для одного элемента базиса инвариантов бинарных форм пятой степени.

Только что мы познакомились с простой резольвентой пятой степени для якобиева уравнения шестой степени — резольвентой Бриоски (23). Если же теперь якобиево уравнение шестой степени рассмотреть как резольвенту общего уравнения пятой степени, то мы получим возможность *свести общее уравнение пятой степени к уравнению* (23) (*в котором отсутствует вторая и четвертая степень неизвестной*) *при помощи преобразования Чирнгауза, коэффициенты которого становятся рациональными после присоединения квадратного корня из дискриминанта исходного уравнения* *). Если помимо этого воспользоваться вспомогательным уравнением Кронекера относительно ν, то в уравнении (23) можно сделать A нулевым, после чего оно приобретет вид (26), т. е., как и уравнение Бринга, будет зависеть лишь от одного существенного параметра.

Эрмит, а вслед за ним и Бриоски подробно исследовали и более точные вопросы, связанные с преобразованиями Чирнгауза. С этими работами стоило бы познакомиться и более подробно, если бы, как мы уже говорили, они не были в значительной степени подчинены получению новых инвариантов бинарных форм пятого порядка. Поэтому мы дадим здесь лишь краткие ссылки: в первую очередь, это изящный доклад, сделанный Эрмитом в Борхардте (Journal für Mathematik.— 1861.— Bd 50); затем — его часто упоминавшийся здесь всеобъемлющий

*) Легко заметить, что при выполнении этого условия $\sqrt[4]{\frac{\Pi}{5^5}}$ будет рациональным.

трактат: Hermite. Sur l'équation du cinquième degré// C. r. Acad. Sci. Paris.— V. 62, вторая половина которого (pp. 715, 919, 959, 1054, 1161) посвящена точному выполнению всех необходимых в методе Кронекера вычислений; наконец, ряд замечаний, которыми г-н Бриоски дополнил тогда результаты Эрмита (C. r. Acad. Sci. Paris.— 1866.— V. 63, № 2; 1871.— V. 73, № 2; 1875.— V. 80, № 1)*).

§ 7. О работе Кронекера 1861 г.

Хотя в своем первом письме Эрмиту Кронекер лишь бегло продемонстрировал свой метод решения уравнений пятой степени на примерах, позже он проделал более глубокий анализ основных принципов и возможностей этого метода **). Эту работу мы воспроизведем более подробно и тщательно, поскольку она будет стержнем предстоящего изложения, тогда как сам Кронекер был краток и опускал доказательства.

Кронекер сразу делает четкое разделение решения на алгебраическую и трансцендентную части. Первая и наиболее важная для нас часть представляет собой совокупность всех тех алгебраических операций, которые необходимы для приведения общего уравнения пятой степени к возможно более простой *нормальной форме*; как после этого вычислить корни полученного уравнения — при помощи последовательных приближений, с помощью эмпирических таблиц и т. д. и т. п.— это отдельный вопрос, который в дальнейшем не затрагивается. Стало быть, якобиевы уравнения шестой степени отныне рассматриваются Кронекером только в силу своих специальных алгебраических свойств, а не из-за их связи с эллиптическими функциями.

Затем Кронекер замечает, что следует делать существенное различие между теми иррациональностями, которые вводятся в процессе упрощения алгебраического уравнения. Иррациональности одного типа — их можно назвать *естественными* — рационально зависят от искомых корней x_ν, т. е. относятся к тем, которые в четвертой главе предыдущей части были охарактеризованы как корни

*) См. также статью: Roberts M. Note sur les équations du cinquième degrè.— Ann. di Mat., Ser. 2.— 1867.— T. 1.

**) Речь идет об уже упоминавшемся сообщении Кронекера в Monatsberichte der Berliner Academie.

рациональных резольвент. Помимо них имеются и другие иррациональности, которые можно назвать *побочными*, поскольку они являются иррациональными функциями x_ν. Побочные иррациональности вовсе не обязаны быть более изысканными, чем естественные; например, к ним относится корень из коэффициента решаемого уравнения. Это имело место в только что рассматривавшемся выражении (29): хотя само по себе оно и является естественной иррациональностью, но становится побочной сразу, как только ν будет описанным выше образом определено из квадратного уравнения.

В соответствии с таким разделением г-н Кронекер задается следующим вопросом: *насколько далеко можно продвинуться в решении общего уравнения пятой степени или в специализации общего якобиева уравнения шестой степени, если ограничиться использованием одних только естественных иррациональностей?* Якобиево уравнение шестой степени первоначально содержит три параметра, а именно три величины, обозначавшиеся буквами A, B и C. Кронекер замечает, что *после определенной модификации его метод позволяет заменить их только двумя, не выходя при этом из области естественных иррациональностей*. С другой стороны, Кронекер утверждает, что *получить из общего уравнения пятой степени якобиево уравнение с одним параметром или вообще какую-нибудь резольвенту, содержащую только один параметр, без использования побочных иррациональностей невозможно*.

Первое из этих предложений можно легко доказать непосредственным вычислением. Мы покажем вскоре (а именно в четвертой главе), что наряду с выражениями второй, шестой и десятой степени, обозначавшимися нами буквами A, B, C, в (19) имеется другое рациональное выражение D от $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ пятнадцатой степени, а квадратный корень из него является целой функцией A, B, C. Это D уже встретилось нам в постоянном члене уравнения (23) в форме квадратного корня из поделенного на 5^5 дискриминанта якобиева уравнения. Теперь заменим связанные с резольвентой уравнения пятой степени величины $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ пропорциональными им выражениями нулевой степени $\frac{\mathbf{A}_0^7 A^7}{D}$, $\frac{\mathbf{A}_1 A^7}{D}$, $\frac{\mathbf{A}_2 A^7}{D}$ соответственно. Тогда выражения A, B, C, D заменятся соответственно на $\frac{A^{15}}{D^2}$, $\frac{A^{42}B}{D^6}$, $\frac{A^{70}C}{D^{16}}$, $\frac{A^{105}}{D^{14}}$. Вместо D сюда можно подставить равную ему целую функцию A, B, C. После этого новые A, B, C, D будут на самом деле зависеть лишь от двух параметров, являющихся отношениями нулевой степени:

$$a = \frac{B}{A^3}, \quad b = \frac{C}{A^5}, \tag{36}$$

что и завершает доказательство.

Доказательство второго утверждения гораздо сложнее, и нам придется повременить с ним вплоть до заключительной части основного изложения. Оно является следствием тех свойств, которыми обладают икосаэдральные подстановки, введенные нами ранее, причем вытекает из этих свойств настолько естественно, что становится ясной истинная природа доказываемой теоремы.

Я подхожу к заключительной части работы Кронекера. Следуя идеям Абеля, Кронекер замечает, что в случае уравнений, которые могут быть решены в радикалах, в его методе можно полностью избавиться от побочных иррациональностей. После этого он постулирует указанное требование и для уравнений высших степеней, а именно *в каждом случае он предлагает упрощать исходное уравнение лишь настолько, насколько это возможно при использовании одних только естественных иррациональностей.*

Таким образом, Кронекер не рекомендует делать последний шаг в своем первоначальном методе: переход к случаю $A = 0$, с которым мы недавно познакомились. По мнению Кронекера, теория должна ограничиться сведе́нием заданного уравнения к якобиевому уравнению с двумя параметрами (так, как было показано выше), изучением различных типов редукции, которые здесь возможны, и, наконец, выяснением того, как корни исходного уравнения пятой степени могут быть обратно выражены в терминах получившегося якобиева уравнения шестой степени *).

Я не хочу ограничивать этими рамками наше собственное исследование. Разумеется, следует контролиро-

*) Здесь я хотел бы обратить внимание на заключительный параграф из I, 5. Грубо говоря, использование эллиптических функций можно интерпретировать как введение иррациональностей бесконечного порядка. Поэтому если мы хотим сохранить идею Кронекера, то должны отказаться от изнурительных попыток решить те уравнения с двумя параметрами, которые мы получаем, поскольку они будут теми формами, дальнейшее упрощение которых невозможно!

вать — и это в полной мере будет проделано,— насколько далеко можно продвинуться, используя лишь естественные иррациональности. Однако помимо этого встает вопрос о природе побочных иррациональностей. Каковы, например, простейшие формы, которые можно получить с их помощью? Аналогия с уравнениями, разрешимыми в радикалах, не кажется мне здесь особенно глубокой. Наконец, если применение побочных иррациональностей оказывается иногда излишним, то в неизбежном их появлении в случае уравнений высших степеней, простейшим примером которых и являются уравнения пятой степени, стоит попытаться охарактеризовать степень необходимости и естественности возникающих побочных иррациональностей. Эти исследования полезны еще и потому, что в определенном смысле они, как мы вскоре увидим, дают средства для изучения естественных иррациональностей.

§ 8. Порядок дальнейшего изложения

На этом месте мы прерываем исторический обзор, поскольку обсуждение последующих работ *) целесообразно включить в последующие главы. Цель предстоящего изложения, как мы уже неоднократно отмечали, состоит в том, чтобы наиболее простым и исчерпывающим образом связать решение уравнений пятой степени с теорией икосаэдра. То, что такая связь имеется, можно установить различными путями из уже приведенных результатов: якобиево уравнение с $A=0$ является, как мы видели, резольвентой икосаэдрального уравнения, точно так же, как и форма Бринга в предположении, что отношение m/n из I, 4, § 12 определено так, чтобы пропал член, содержащий Y^2.

Однако мы не собираемся вводить икосаэдр такими окольными путями — наоборот, мы с самого начала дадим последовательное изложение теории уравнений пятой степени таким образом, что икосаэдр будет играть

*) G o r d a n. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Math. Ann.— 1878.— Bd 13; K i e p e r t. Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Borchard's J.— Aug. 1878.— Bd 87; K l e i n. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder // Math. Ann.— 1877.— Bd 12; K l e i n. Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Math. Ann.— Mai 1878.— Bd 14; K l e i n. Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade // Math. Ann.— März 1879.— Bd 15.

в ней основную и яркую роль. При этом, как я уже неоднократно предупреждал, будут свободно применяться конструкции, относящиеся к *проективной геометрии*. Они, несомненно, могут быть полностью заменены чисто алгебраическими соображениями. Тем не менее я считаю, что они исключительно полезны и что аналогичные построения должны сыграть важную роль и в более сложных задачах теории уравнений.

Предстоящее изложение подразделяется на четыре главы.

Наша первая задача состоит в том, чтобы *придать геометрическую форму основной идее теории уравнений*. При этом я буду придерживаться того стиля изложения, который был предложен мной в Math. Ann.— 1871.— Bd 4. В частности, следуя этому стилю, я развиваю геометрическую интерпретацию преобразования Чирнгауза и построения резольвенты. Помимо этого я, ориентируясь на последующее применение, дам краткий обзор геометрии прямых и свойств поверхностей второго порядка.

Следующая, третья глава целиком посвящена теории *главных уравнений пятой степени*, т. е. таких уравнений, в которых отсутствуют третья и четвертая степени неизвестной. На основании теоремы о том, что поверхность второго порядка обладает двумя системами прямолинейных образующих, возникает особенно простая связь рассматриваемых уравнений с икосаэдром, благодаря которой результаты, полученные нами ранее для *канонической резольвенты икосаэдрального уравнения*, приводят к точным формулам для корной главных уравнений. С помощью этой связи мы попутно разработаем способ построения преобразований Чирнгауза, приводящих уравнение к определенному виду, а заодно поймем истинный смысл этих преобразований.

После этого, в четвертой главе, объясняется место икосаэдра в теории *общих якобиевых уравнений шестой степени*. Мы покажем, что последние представляют собой *тернарные проблемы форм* в смысле I, 5, § 4 и получаются из рассмотренных выше бинарных икосаэдральных проблем форм при помощи определенного процесса переноса. Таким образом, все те результаты, относящиеся к якобиевым уравнениям шестой степени, с которыми мы только что познакомились, возникнут сами собой, в более ясном виде и со всеми доказательствами. В частности, при помощи икосаэдра я покажу, как можно более эффективно решить общее якобиево уравнение после присоединения побочного квадратного корня.

К пятой главе предыдущие результаты откроют нам два пути решения общего уравнения пятой степени при помощи икосаэдрального уравнения: мы можем на выбор либо с помощью преобразования Чирнгауза перестроить наше уравнение в каноническую резольвенту пятой степени, либо при помощи построения подходящей резольвенты свести его решение к упомянутой выше тернарной проблеме форм. Первый способ, если угодно, является упрощением метода Бринга, а второй — модификацией метода Кронекера. Вместе с тем мы покажем, что действия, осуществляемые в каждом из двух методов решения, отличаются не по существу, а лишь порядком следования.

Таким образом, появляется теория, позволяющая с единых позиций взглянуть на всю совокупность обсуждавшихся выше работ. При этом мы докажем и теорему Кронекера о неизбежности появления побочных иррациональностей, которая обсуждалась выше и которая является фундаментальным результатом не только в рамках настоящего исследования, но и для всей теории решения уравнений вообще. Небезынтересно, возможно, и то, что в нашей теории уравнение пятой степени вновь встает в один ряд с уравнениями третьей и четвертой степени. Всегда, когда это будет целесообразным, мы будем обсуждать последние в подстрочных примечаниях.

ГЛАВА II
ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

§ 1. Основа геометрической интерпретации

Геометрическая интерпретация уравнений пятой степени, о которой пойдет речь, основана на простой идее рассмотрения корней уравнения x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 как однородных координат точки. Разумеется, при этом только отношения между величинами x_ν приобретают геометрический смысл. Если не накладывать на x_ν никаких ограничений, то мы попадем в четырехмерное проективное пространство, а это вдвойне неудобно: мы должны были бы отказаться от удобной и полной глубокого смысла терминологии трехмерной геометрии и не смогли бы использовать полученные ранее специальные результаты. Поэтому мы наложим на x_ν дополнительное ограничение, которое всегда может быть удовлетворено путем простого вспомогательного преобразования. *Мы условимся, что везде в дальнейшем*

$$\sum_\nu x_\nu = 0, \tag{1}$$

т. е. мы будем рассматривать только уравнения вида

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

в которых отсутствует член, содержащий x^4.

Равенство (1) позволяет интерпретировать отношения между величинами x_ν как координаты точки из обычного трехмерного пространства, а сами x_ν — как так называемые *пентаэдральные координаты*. Пентаэдральные координаты лишь формально отличаются от обычных тетраэдральных координат проективной геометрии; их можно было бы определить, непосредственно добавив к четырем тетраэдральным координатам пятую, которая является линейной комбинацией остальных, так что будет выполняться (1); однако при этом теряется симметрия, на которую в дальнейшем делается основной упор *).

Описанная здесь геометрическая интерпретация особенно удобна при рассмотрении различных способов упорядочивания корней x_ν. Одному и тому же уравнению в этом смысле соответствуют 120, вообще говоря, различных точек пространства, которые известны только лишь в совокупности; решение уравнения тогда будет состоять в том, чтобы найти способ, позволяющий различать отдельные точки этой совокупности.

Точки, о которых идет здесь речь, конечно же, не являются геометрически независимыми. Любая перестановка пентаэдральных координат, например та, которая меняет местами x_k и x_i, может быть геометрически описана как *преобразование всего пространства*, а именно как *коллинеация проективного пространства*, соответствующая формуле

$$x_i' = x_k. \tag{3}$$

120 коллинеаций, которые в этом смысле соответствуют 120 перестановкам величин x_ν, имеют ясное геометрическое описание: *это все те преобразования, которые переводят в себя пентаэдр, задающий систему координат*. Геометрическая зависимость между нашими 120 точками как раз состоит в том, что они все могут быть получены из какой-либо одной посредством этих преобразований.

Я ограничился здесь геометрической интерпретацией одних только уравнений пятой степени. Однако это ограничение совершенно не принципиально: вполне аналогичное геометрическое истолкование возможно и для уравнений n-й степени, только здесь надо будет рассматривать пространство размерности $n-2$; так, например, для уравнений четвертой степени — плоскость, а для уравнений третьей степени — прямую линию. Для того чтобы получить представление о действии группы Галуа уравнения, на самом деле можно вместо всех воз-

*) Введение лишних координат, связанных соответствующим количеством линейных уравнений, оказывается полезным в геометрии и в иных ситуациях, см., например, Serret. Géométrie de direction.— Paris, 1869. В частности, система пентаэдральных координат была, как я полагаю, впервые введена Гамильтоном в его исследованиях по геометрической сети Мёбиуса, строящейся по пяти точкам пространства; см. Hamilton. Elements of Quaternions.— Dublin, 1866.— P. 57—87.

можных перестановок n корней и соответствующих им коллинеаций рассматривать только некоторую их подгруппу. Нет необходимости и далее излагать материал в столь общих предположениях, просто мне хотелось уже сейчас отметить исключительно простой геометрический смысл тех фактов, которые мы будем использовать в гл. IV при исследовании проблемы форм, которая здесь возникает.

§ 2. Классификация кривых и поверхностей

Заметим, что помимо прочих способов мы можем классифицировать кривые и поверхности из нашего пространства (и вообще любые существующие в нем геометрические фигуры) в соответствии с тем, как они ведут себя по отношению к 120 коллинеациям (3). В общем случае неприводимая кривая (или поверхность) не переводится в себя ни одной из 120 операций; тогда она оказывается одной из 120 ассоциированных фигур, имеющих одинаковые свойства по отношению друг к другу и к координатному пентаэдру. Но она может также переходить в себя под действием n преобразований, образующих определенную подгруппу g, содержащуюся во всей совокупности из 120 преобразований. Тогда число ассоциированных с ней фигур будет $120/n$, и каждая из них остается неизменной относительно n преобразований, образующих подгруппу, которая сопряжена с группой g в основной группе. Здесь, очевидно, имеют место те же замечательные свойства, что и обнаруженные нами в четвертой главе первой части при рассмотрении теории резольвент.

Договоримся о терминологии. Мы назовем фигуру *регулярной*, если она переводится в себя всеми 120 коллинеациями, и *полурегулярной*, если это свойство выполняется только для 60 коллинеаций, которые соответствуют четным перестановкам x_ν и которые мы в дальнейшем будем называть *четными коллинеациями*. В остальных случаях мы будем говорить об *иррегулярных фигурах*. Полурегулярные фигуры естественно объединяются в пары, поскольку группа из 60 четных коллинеаций является самосопряженной в основной группе; поэтому если некоторая фигура переходит в себя под действием 60 четных коллинеаций, то этим свойством обладает также и фигура, получающаяся из нее при помощи какой-либо нечетной коллинеации.

Приведенная здесь классификация будет играть важную роль в теории уравнений, поскольку отныне мы будем рассматривать уравнения, содержащие *параметры*. При этом мы будем учитывать только то, как эти параметры влияют на отношения $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$. Тогда если задано уравнение с одним параметром, то 120 соответствующих точек x заметают при вариации параметра кривую в пространстве. Эта кривая переходит в себя при наших 120 коллинеациях, и мы будем называть ее образом уравнения. Аналогично мы получаем, что если число параметров равно двум, то образ уравнения будет поверхностью; эта поверхность также переводится в себя всеми 120 коллинеациями. Вопрос о том, является получающаяся кривая или поверхность неприводимой или нет, очевидно, тесно связан с группой данного уравнения пятой степени. Предположим для определенности, что коэффициенты уравнения зависят от параметров рационально (при этом про численные иррациональности не утверждается ничего, и, таким образом, мы считаем основными рациональностями любые рациональные функции параметров). Тогда группа Галуа нашего уравнения превращается (согласно I, 4) в группу, которую Эрмит называл *группой монодромии*, т. е. в совокупность таких перестановок корней x_ν, которые возникают, если мы, рассматривая x_ν как алгебраические функции параметров, будем изменять аргумент всевозможными способами так, чтобы, выйдя из некоторой начальной точки, он в конце концов возвращался в ту же самую точку. При таком изменении аргумента точка x будет двигаться по одной и той же неприводимой компоненте геометрического образа, соответствующего уравнению, и при надлежащем выборе путей она пройдет через все возможные положения. Мы заключаем отсюда, что *из всех совокупности* 120 *наших коллинеаций ровно столько преобразований переводят рассматриваемую нами компоненту в себя, сколько перестановок имеется в ее группе монодромии.* Эти общие утверждения нетрудно подкрепить конкретными примерами, к рассмотрению которых мы и приступаем.

§ 3. Простейшие частные случаи уравнений пятой степени

Рассмотрим теперь с геометрической точки зрения те простейшие специальные случаи уравнений пятой степени, которые получаются из (2), если один или несколько коэффициентов обращаются в нуль, а остальные коэффициенты — в той степени, в которой они влияют на отношения между корнями — являются параметрами.

Пусть сначала $a = 0$. Тогда из (1) следует *), что

$$\sum_{\nu} x_{\nu}^2 = 0, \tag{4}$$

т. е. мы получаем уравнение, задающее поверхность второго порядка. Если, используя (1), исключить x_4, а затем вычислить дискриминант левой части получившегося уравнения

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0,$$

то получится $+5$ — значение, которое, таким образом, отлично от нуля. Отсюда следует, что наша поверхность второго порядка не распадается на плоскости и не является конусом. Эта *регулярная* (в описанном выше смысле) поверхность будет играть наиболее важную роль в предстоящих геометрических исследованиях. Поэтому я буду называть ее *главной поверхностью* в соответствии с тем, что уравнение, удовлетворяющее условиям (1) и (4), уже было названо нами *главным уравнением*.

Перейдем к следующему случаю: $b = 0$. Вновь используя (1), мы получаем для наших x уравнение

$$\sum_{\nu} x_{\nu}^3 = 0. \tag{5}$$

Мы приходим, таким образом, к поверхности третьего порядка, которая когда-то была названа Клебшем *диагональной поверхностью* **), поскольку она содержит диагонали координатного пентаэдра, т. е. 15 прямых, каждая из которых лежит в одной из пяти пентаэдральных плоскостей и соединяет противоположные вершины четырехугольника, высекаемого в этой плоскости четырьмя другими координатными плоскостями. В соот-

---

*) Здесь и далее мы обращаемся к формулам Ньютона, которые связывают коэффициенты уравнения с суммами степеней его корней $s_{\nu} = \sum_i x_i^{\nu}$. Для нашего уравнения (2) эти формулы имеют вид $s_1 = 0$, $s_2 + 2a = 0$, $s_3 + 3b = 0$, $s_4 + as_2 + 4c = 0$ и т. д.

**) См. обзор, который мы еще будем упоминать и далее: Klein. Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5. Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits // Math. Ann.— 1871.— Bd 4. Помимо этого диагональная поверхность вообще занимает важное место в теории поверхностей третьей степени; см., например, статью: Klein. Ueber die Flächen dritter Ordnung // Math. Ann.— 1873.— Bd 6.

ветствии с этим уравнение, в котором $b=0$, будет называться далее *диагональным уравнением*. Общая резольвента Бриоски, с которой мы познакомились в § 5 предыдущей главы (формула (23)), является в то же время и общим диагональным уравнением; позднее мы более детально обсудим это обстоятельство.

Положим, наконец, a и b одновременно равными нулю. Тогда будет выполнено каждое из соотношений (1), (2) и (3) и вместе с тем уравнение (2) приобретет форму Бринга. *Таким образом, уравнение Бринга представляется кривой, которая является пересечением главной и диагональной поверхностей*. В общем случае поверхность второго порядка пересекается с поверхностью третьего порядка по неприводимой кривой рода 4 и степени 6 *). Позже мы покажем, что эти свойства и в самом деле выполнены для кривой Бринга. Несомненно также, что кривая Бринга является регулярной, поскольку таковыми являются главная и диагональная поверхности.

Остаются еще случаи, в которых обращается в нуль один из коэффициентов c, d. Мы не будем рассматривать эти случаи специально, поскольку в дальнейшем нам не придется с ними сталкиваться. Отметим здесь только, что пространственная фигура, соответствующая случаю $d=0$, распадается на иррегулярные компоненты, коими являются сами плоскости координатного пентаэдра.

§ 4. Уравнения пятой степени, возникающие в связи с икосаэдром

Обратимся теперь к уравнениям пятой степени, которые появились в гл. 4 предыдущей части как резольвенты икосаэдрального уравнения, и выясним, каков их смысл в свете только что представленных идей. Эти уравнения имеют лишь один существенный параметр Z (стоящий в правой части икосаэдрального уравнения), а стало быть, их геометрическими образами будут *кривые*. Как сейчас будет точно установлено, эти кривые распадаются на две регулярные компоненты, а группа монодромии каждой компоненты будет состоять в действительности из 60 икосаэдральных подстановок.

---

*) См., например, Salmon, Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes.— 3 Aufl.— Leipzig: Teubner, 1880.

Рассмотрим сначала так называемую u-резольвенту из I, 4, § 11:

$$(6)\qquad 48u^5(1-Z)^2-40u^3(1-Z)+15u-4=0.$$

Вычисляя суммы степеней, находим

$$s_1=0,\quad s_2=\frac{5}{3(1-Z)},\quad s_3=0,\quad s_4=\frac{5}{36(1-Z)^2};$$

поэтому

$$(7)\qquad s_2^2=20s_4.$$

Из этого следует, что *геометрическим образом* (6) *является кривая* 12-й *степени, получающаяся пересечением диагональной поверхности с поверхностью* (7) *четвертого порядка.* Я утверждаю теперь, что эта кривая распадается на две полурегулярные компоненты шестой степени, каждая из которых представляет собой рациональную пространственную кривую. Действительно, корни уравнения (6) с точностью до переупорядочения, пропорциональны введенным ранее октаэдральным формам

$$(8)\qquad t_\nu(z_1,z_2)=\varepsilon^{3\nu}z_1^6+2\varepsilon^{2\nu}z_1^5z_2-5\varepsilon^{\nu}z_1^4z_2^2-5\varepsilon^{4\nu}z_1^2z_2^4-\\-2\varepsilon^{3\nu}z_1z_2^5+\varepsilon^{2\nu}z_2^6,$$

где z_1 и z_2 связаны с Z при помощи икосаэдрального уравнения

$$(9)\qquad \frac{H^3(z_1,z_2)}{1728f^5(z_1,z_2)}=Z.$$

Если Z является произвольной переменной, то таковой же будет и z_1/z_2. Поэтому если мы, вводя коэффициент пропорциональности ρ, запишем уравнение

$$(10)\qquad \rho x_\nu=t_\nu(z_1,\ z_2)$$

и рассмотрим $z_1:z_2$ как текущий параметр, то мы должны будем получить компоненту нашей пространственной кривой. Ясно, что эта формула задает рациональную, а значит, и неприводимую кривую шестой степени*). Более того, я утверждаю, что *она полурегулярна, и поэтому рассматриваемая нами кривая двенадцатой степени имеет помимо* (10) *еще одну рациональную неприво-*

*) Формулы (10) не могут задавать кратную кривую меньшей степени, поскольку $z_1:z_2$ могут быть рационально выражены через соответствующие x_ν.

димую компоненту шестой степени, которая получается из (10) *при помощи любой нечетной перестановки величин* x_ν.

Для доказательства проверим прежде всего, что кривая (10) и в самом деле выдерживает все четные коллинеации. Действительно, иначе и не может быть, так как кривая двенадцатой степени остается неизменной при всех 120 коллинеациях, а $12 = 2 \cdot 6$, но мы дадим и более строгое доказательство. Будем непрерывно изменять параметр $z_1 : z_2$ таким образом, чтобы, выйдя из некоторого начального значения, он прошел одно за другим все 60 значений, получающихся из начального при помощи икосаэдральных подстановок. Поскольку параметр изменяется непрерывно, точка x будет двигаться все время по одной и той же неприводимой кривой; но, с другой стороны, мы заранее знаем, что t_ν за это время испытывает все возможные четные перестановки. Следовательно, наша кривая действительно переводится в себя четными коллинеациями.

Более того, мы на самом деле доказали и то, что наша кривая не выдерживает действие остальных преобразований, поскольку в противном случае Z, который в соответствии с уравнением (6) является симметрической функцией u_ν, принимал бы одно и то же значение не только в 60, но и в 120 точках нашей кривой шестой степени несмотря на то, что каждое значение Z согласно уравнению икосаэдра (9) достигается только при 60 значениях $z_1 : z_2$.

Это полностью доказывает наше первое утверждение. Мы вполне могли бы доказать его, использовав одни только формулы (9) и (10) и оставив в стороне рассмотрение сумм степеней и формулу (7). Именно так мы и поступим теперь, переходя к обсуждению кривых, составляющих геометрический образ уравнения, которое было названо нами ранее *канонической резольвентой* икосаэдрального уравнения (I, 4, § 12). Обозначая ρ коэффициент пропорциональности, мы можем переписать выражение для его корней Y_ν в таком виде:

$$(11)\qquad \rho Y_\nu = m W_\nu(z_1, z_2) T(z_1, z_2) + \\ + 12 n t_\nu(z_1, z_2) W_\nu(z_1, z_2) f^2(z_1, z_2),$$

где t_ν — наша форма шестой степени f и T — обычные икосаэдральные формы, а W_ν задается следующей формулой:

$$(12) \qquad W_\nu = -\varepsilon^{4\nu}z_1^8 + \varepsilon^{3\nu}z_1^7z_2 - 7\varepsilon^{2\nu}z_1^6z_2^2 - 7\varepsilon^{\nu}z_1^5z_2^3 + \\ + 7\varepsilon^{4\nu}z_1^3z_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu}z_1^2z_2^6 - \varepsilon^{2\nu}z_1z_2^7 - \varepsilon^{\nu}z_2^8.$$

Если мы теперь будем менять $z_1 : z_2$, то при всевозможных значениях $m : n$ точка Y заметет в соответствии с формулой (11) бесконечное семейство рациональных кривых 38-й степени, в которое, кроме того, включаются кривая 8-й степени (при $n = 0$) и кривая 14-й степени (при $m = 0$)*). *Все эти кривые полурегулярны.* Следовательно, для каждой из них имеется вторая рациональная кривая той же степени, получающаяся из первой при помощи любой нечетной перестановки Y_ν, и только после объединения такой пары в одну общую кривую 76-й степени мы получим геометрический образ соответствующей резольвенты. Помимо этого мы видим, что *все наши кривые лежат на главной поверхности*, так как для общей канонической резольвенты $\sum\limits_\nu Y_\nu = 0$. Полное исследование того, *как именно* располагаются на главной поверхности эти кривые и как они ведут себя по отношению к прямолинейным образующим этой поверхности, будет подробно изложено в следующей главе.

§ 5. Геометрическая трактовка преобразования Чирнгауза

Для того чтобы сделать преобразование Чирнгауза доступным для геометрического анализа, мы введем — помня при этом, что в соответствии с (1) мы рассматриваем лишь те уравнения, сумма корней которых равна нулю,— следующие обозначения:

(13)

$$x_\nu^{(1)} = x_\nu - \frac{s_1}{5}, \quad x_\nu^{(2)} = x_\nu^2 - \frac{s_2}{5}, \quad x_\nu^{(3)} = x_\nu^3 - \frac{s_3}{5}, \quad x_\nu^{(4)} = x_\nu^4 - \frac{s_4}{5}$$

(где $x_\nu^{(1)}$ есть, конечно, лишь другая запись x_ν, используемая только для единообразия). Наиболее общее преобразование, которое мы будем рассматривать, имеет вид

$$(14) \qquad y_\nu = px_\nu^{(1)} + qx_\nu^{(2)} + rx_\nu^{(3)} + sx_\nu^{(4)},$$

где p, q, r и s понимаются как неизвестные.

---

*) Я на некоторое время оставлю в стороне вопросы о том, происходит ли вырождение у других кривых и в чем состоит геометрическая причина появления этих вырождений.

До настоящего момента мы рассматривали только такие выражения, которые остаются неизменными под действием некоторого фиксированного набора перестановок или линейных преобразований и которые, таким образом, являются *инвариантами* по отношению к рассматриваемой группе преобразований. В соответствии с этим выражения вида (13) можно называть *ковариантными по* x_ν, так как при преобразованиях они изменяются согласованно с x_ν, так что в результате переходят в выражения того же самого вида. Я не стану объяснять здесь, как по заданной точке $x^{(1)}$ можно получить ковариантные точки $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ с помощью более естественной, геометрической конструкции. Но я хотел бы обратить внимание на то, что в виде (14) произвольная точка y получается из фундаментальных точек $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ при помощи подходящих множителей p, q, r, s в точности так, как это обычно происходит в проективной геометрии (в соответствии с барицентрическим исчислением Мёбиуса *)). *Поэтому p, q, r, s суть не что иное, как новые проективные координаты точки y, ковариантно связанные с координатами x*, или, говоря современным языком, *формула* (14) *вместо первоначальной координатной системы x вводит общую координатную систему* **). Применить преобразования Чирнгауза — это значит подобрать коэффициенты p, q, r, s так, чтобы получающееся в результате преобразования уравнение относительно y обладало специальными свойствами при варьировании его коэффициентов. Говоря геометрически, нам надо заставить точку y двигаться лишь по некоторым предписанным кривым или поверхностям. Мы выпишем уравнения этих кривых или поверхностей и посмотрим, как указать нужное семейство значений p, q, r, s.

В § 2 предыдущей главы уже были сделаны кое-какие элементарные замечания на этот счет. Помимо них

---

*) Если рассматривать $x_\nu^{(i)}$ как коэффициенты матрицы $X = \| x_\nu^{(i)} \|$, то соотношения (14) можно записать в виде

$$\left\| \begin{matrix} y_0 \\ \vdots \\ y_4 \end{matrix} \right\| = X \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}.$$

Смысл столбцов пояснялся в II, 1, § 1 формулами (1) и (2), в которых p, q, r, s совпадали с α, β, γ, ...— *Примеч. ред.*

**) Clebsch. Teorie der binären algebraischen Formen. С. 300 и след.

важную роль здесь будут играть результаты, которые мы только что получили в § 3. Если рассматриваемая основная поверхность или кривая приводима, то, очевидно, достаточно будет выписать уравнение лишь для одной неприводимой компоненты. Пусть m — это количество тех коллинеаций из 120, введенных нами выше, которые сохраняют эту компоненту; тогда коэффициенты уравнений, задающих эту компоненту в новой системе координат, будут таким образом зависеть от $x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, x_\nu^{(3)}, x_\nu^{(4)}$, чтобы оставаться неизменными при действии указанных m перестановок x_ν и только их. Следовательно, эти коэффициенты должны быть симметрическими функциями x_ν, если мы имеем дело с регулярной фигурой, и двузначными функциями (которые после присоединения квадратного корня из дискриминанта станут рациональными), если речь идет о полурегулярной фигуре, и т. п.

Из сказанного выше вытекает, что *преобразование Чирнгауза может быть полезным при решении уравнений пятой степени только в случае регулярных и полурегулярных фигур*. Если бы мы захотели включить в рассмотрение и иррегулярные фигуры, то уже только при написании типических уравнений нам пришлось бы присоединять такие функции x_ν, вычисление которых само по себе представляет определенную проблему. Отчасти здесь вступает в игру то обстоятельство, что группа из 60 четных перестановок пяти элементов проста и поэтому дальнейшие присоединения не приносят существенных уточнений.

§ 6. Конкретные примеры преобразований Чирнгауза

Наиболее пригодный способ задания точки на данной кривой или поверхности n-й степени, моделирующий решение уравнения n-й степени, заключается в том, чтобы пересечь поверхность с известной прямой, а кривую — с известной плоскостью. Применительно к преобразованию Чирнгауза, записанному в виде (14), это приводит к следующей общей конструкции. Рассмотрим два или три набора известных величин

$$P_1, Q_1, R_1, S_1; \quad P_2, Q_2, R_2, S_2; \quad P_3, Q_3, R_3, S_3$$

и положим

$$(15) \qquad p = \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2, \; q = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2, \quad r = \rho_1 R_1 + \rho_2 R_2, \; s = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2$$

либо соответственно

$$(16) \qquad p = \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \rho_3 P_3 \text{ и т. д.}$$

Если подставить эти значения в уравнение нашей поверхности или кривой, то мы получим либо одно уравнение n-й степени относительно $\rho_1 : \rho_2$, либо систему уравнений n-й степени относительно $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3$. Каждый корень этого уравнения или системы уравнений задает нам преобразование Чирнгауза с требуемыми свойствами. При этом очевидно, что иррациональности, необходимые для выполнения такого преобразования, для общей прямой или плоскости будут побочными, так как нет никаких причин для того, чтобы процесс определения точек пересечения данной поверхности с произвольной прямой или данной кривой с произвольной плоскостью был както связан с выделением тех коллинеаций, которые переводят нашу поверхность или кривую в себя.

Следует признаться, что описанный только что механизм мало что дает с практической точки зрения. Так, если бы мы попытались использовать его для тех частных случаев уравнений пятой степени, которые были перечислены в § 3 и § 4, то уже после первых же двух примеров мы бы пришли к вспомогательному уравнению степени большей, чем пять. *Поэтому в дальнейшем столь неопределенная конструкция будет применяться или предполагаться уже примененной только при преобразовании общего уравнения пятой степени в главное уравнение.* Ниже (в пятой главе) мы фактически докажем, что в этом случае наш общий метод и не позволяет получить ничего большего, поскольку нет никакой возможности избавиться от возникающего здесь побочного квадратного корня. В то же время во всех прочих случаях нам удастся найти более простые методы задания преобразований. Изложение предыдущей главы уже частично затрагивало эту тему; здесь мы добавим к нему еще несколько замечаний.

Во-первых, мы уже отмечали выше, когда обсуждали преобразование Бринга, что решение возникающей системы уравнений шестой степени разбивается на два шага: решение системы уравнений второй степени и последующее решение кубического уравнения. Теперь, опираясь на наш метод геометрического представления, мы можем выразить это гораздо точнее (соответствующая подробная теория будет изложена позже). Сначала общее уравнение пятой степени описанным только что методом преобразуется в каноническое уравнение, при этом мы присоединяем один естественный квадратный корень, а также один побочный квадратный корень. Далее срабатывает важнейший геометрический факт: *через каждую точку канонической поверхности проходят две прямолинейные образующие, причем каждая из них пересекает кривую Бринга только в трех точках.* Поэтому для того чтобы перейти от произвольной точки канонической поверхности к точке, лежащей на кривой Бринга, нам достаточно присоединить один квадратный корень, чтобы определить прямолинейную образующую, проходящую через точку канонической поверхности, после чего мы получим кубическое уравнение, определяющее три точки пересечения этой образующей с кривой Бринга. Точные формулы, возникающие на каждом этапе процесса Бринга, мы установим позднее (а именно в следующих двух главах). Отметим здесь еще только тот факт, что *квадратный корень, который позволяет найти пару образующих канонической поверхности, не является побочным; более того, он совпадает с квадратным корнем из дискриминанта уравнения пятой степени.* Иррациональность, возникающая из вспомогательного кубического уравнения, напротив, будет побочной, а само уравнение даже оказывается общим в смысле теории Галуа, т. е. имеет группу, состоящую из шести подстановок.

Теперь мы обсудим уравнения пятой степени, которые были получены Бриоски в связи с якобиевыми уравнениями шестой степени. Мы уже отмечали выше, что имеется общий метод сведе́ния уравнений пятой степени к таким уравнениям при помощи резольвенты Кронекера. Первый шаг здесь состоит в том, что мы должны получить сначала диагональное уравнение пятой степени. Мы уже видели, что для приведения общего уравнения пятой степени к диагональному уравнению побочные иррациональности не нужны — достаточно только присоединить квадратный корень из дискриминанта. Если теперь присоединить побочный квадратный корень, то можно добиться того, чтобы A, фигурирующее в резольвенте Кронекера, стало нулевым. При этом соответствующее диагональное уравнение будет в точности совпадать с *u-резольвентой*, рассмотренной нами в § 4. Его геометрическим образом является кривая 12-й степени, распадающаяся на две полурегулярные неприводимые компоненты шестой степени. Стало быть, наш геометрический метод приводит — после присоединения квадратного корня из дискриминанта — к вспомогательному уравнению шестой степени. Однако, как мы только что видели, здесь достаточно присоединить всего один квадратный корень.

§ 7. Геометрический взгляд на построение резольвент

Алгебраические принципы построения резольвент любых алгебраических уравнений были исчерпывающим образом изложены нами еще в I, 4, и специально для случая уравнений пятой степени к ним ничего нельзя добавить. Мы возвращаемся здесь к этой теме только затем, чтобы дать новые применения нашим геометрическим идеям.

Прежде всего мы должны условиться, что в качестве корней будущих резольвент мы будем использовать только однородные по x рациональные функции $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. В этом случае отношения между теми значениями $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, которые принимает φ при рассматриваемых нами перестановках величин x_ν, не будут изменяться, если все x_ν умножаются на одно и то же λ (соответствующая точка проективного пространства при этом также не меняется), и мы сможем геометрически интерпретировать построение резольвенты, рассматривая $\varphi_0 : \varphi_1 : \ldots : \varphi_{n-1}$ в качестве однородных координат. Отметим, что это ограничение вводится нами исключительно для удобства геометрической интерпретации; глубокого алгебраического смысла оно не имеет и может быть в конце концов отброшено.

Согласно основным принципам аналитической геометрии для геометрической интерпретации здесь имеются два пути. Либо мы рассматриваем введение функций φ как простой *выбор системы координат*, либо, следуя Плюккеру,— как *выбор элементов пространства*. В первом случае φ появляются непосредственно как однородные, но, вообще говоря, криволинейные координаты в пространстве, между которыми обязательно должно быть $n - 4$ соотношения. Во втором случае φ изначально являются независимыми величинами, которые рассматриваются как координаты некоторой геометрической фигуры. На выбор такой фигуры накладывается только одно условие: под действием 60 или 120 введенных выше коллинеаций ее координаты должны испытывать те же самые перестановки, которым подвергаются φ_i как функция x_ν. *Тогда, подставляя вместо φ_i их значения как функций x_ν, мы устанавливаем ковариантное соответствие между точками x и такими фигурами.* Таким образом, процесс решения уравнения пятой степени методом построения резольвент состоит в том, что мы сначала заменяем точку x некоторой другой фигурой, которая ковариантно зависит от x, а затем переходим от фигуры обратно к точке x.

В дальнейшем мы, как правило, будем придерживаться второй, более содержательной геометрической интерпретации резольвент, и именно она будет взята за основу предстоящего изложения. С точки зрения проективной геометрии простейшими пространственными фигурами являются точка, плоскость и прямая. В такой последовательности мы и будем рассматривать резольвенты, которые можно построить с помощью этих фигур при использовании наиболее простых координатных систем.

Введение точки, ковариантной относительно исходного координатного пентаэдра, конечно же, не дает ничего нового — мы возвращаемся к уже разобранному выше преобразованию Чирнгауза, поскольку в этом случае требуется только ввести функции p, q, r, s, инвариантные по x, т. е. являющиеся симметрическими или выдерживающими 60 четных перестановок. Применение ковариантной плоскости дает нам столь же мало. В качестве координат, задающих плоскость, естественно взять коэффициенты u_i задающего эту плоскость уравнения

$$(17)\qquad u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0,$$

в котором u_i предполагаются нормированными (с помощью условия $\sum\limits_\nu x_\nu=0$) так, чтобы $\sum\limits_\nu u_\nu$ тоже равнялось нулю. Но тогда каждой плоскости мы можем ковариантно сопоставить точку, имеющую те же самые координаты. Эта точка будет полюсом нашей плоскости относительно канонической поверхности $\sum\limits_\nu x_\nu^2=0$. Действительно, если $x_0', x_1', \ldots, x_4'$ — координаты полюса и $\sum\limits_\nu x_\nu'=0$, то уравнение полярной плоскости, как легко заметить, имеет вид

$$(18)\qquad x_0'x_0+x_1'x_1+x_2'x_2+x_3'x_3+x_4'x_4=0$$

и, стало быть, совпадает с (17), если мы приравняем u_ν и x'_ν. Набор из этих пяти величин с одинаковым успехом можно интерпретировать и как координаты точки, и как координаты плоскости; поэтому рассматривать случай плоскости отдельно нет никакой необходимости.

Итак, из рассматриваемых нами простейших резольвент остаются лишь те, которые строятся при помощи *прямой*. Прежде чем перейти к этому случаю, я сделаю несколько общих замечаний относительно координат прямых в пространстве и принципов геометрии прямых вообще *). В первую очередь это вызвано тем, что материал этот относится к чистой геометрии и до сих пор остается малоизвестным; кроме того, вместо обычных тетраэдральных координат нам всюду придется использовать пентаэдральные координаты.

§ 8. О координатах прямых в пространстве

Сам принцип координатизации прямых в пространстве, который с одинаковым успехом работает как при использовании тетраэдральных, так и при использовании пентаэдральных координат, был выдвинут Грассманом в первом издании книги: Grassman. Ausdehnungslehre.— Leipzig: Wigand, 1844 **).

Пусть X, Y — две точки, лежащие на прямой; тогда *в качестве однородных координат этой прямой рассматривается совокупность всевозможных миноров второго порядка, составленных из координат этих точек.* Для того, чтобы сохранить традиционные обозначения, мы сначала остановим свой выбор на тетраэдральных координатах в пространстве. Пусть точки X и Y имеют соответственно координаты

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4;\quad Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4;$$

полагая

$$p_{ik} = X_iY_k - Y_iX_k, \tag{19}$$

мы сразу же получаем соотношения

$$p_{ik} = -p_{ki}, \tag{20}$$

---

*) Plücker. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.— Leipzig, 1868, 1869. См. также новое издание книги: Salmon, Fiedler. Analytical Geometry of Space.

**) Переиздано в 1878 г.

из которых следует, что из двенадцати существующих p_{ik} лишь шесть будут линейно независимы, и в качестве таковых мы выберем

(21) $$p_{12},\ p_{13},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{34},\ p_{42}.$$

Легко проверить, что между этими величинами имеется еще одно, дополнительное соотношение

(22) $$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Две прямые p' и p пересекаются тогда и только тогда, когда обращается в нуль соответствующее билинейное соотношение, составленное из их координат:

(23) $$\sum p'_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}},$$

где суммирование ведется по шести комбинациям индексов из (21). Ясно, что это не есть *общее* линейное уравнение относительно p_{ik}, поскольку p'_{ik} здесь сами подчиняются соотношению (22). Общее уравнение может быть записано в виде

(24) $$\sum a_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0,$$

где под a_{ik} понимаются произвольные величины, за которыми сохраняются те же самые индексы, что и в (21). Множества прямых, удовлетворяющих уравнениям подобного вида, были названы Плюккером *линейными комплексами*, а более полное их исследование было проделано Мёбиусом в 1833 г. Мы не станем здесь заниматься другими геометрическими свойствами линейных комплексов, а отметим только, что коэффициенты a_{ik}, если дополнить их символами a_{ki}, вводимыми по аналогии с (20) при помощи формул

(25) $$a_{ki} = -a_{ik},$$

могут быть использованы в качестве *координат линейного комплекса.*

Если выполнено соотношение

(26) $$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$

то a_{ik} могут быть интерпретированы как координаты p'_{ik} из формул (23); комплекс в этом случае является *специальным* и состоит, очевидно, из всех прямых, пересекающих данную фиксированную прямую p'. Если составить линейную комбинацию двух специальных комплексов p' и p'':

$$a_{ik} = \lambda' p'_{ik} + \lambda'' p''_{ik},$$

то получится — за исключением некоторых особых случаев — общий линейный комплекс. *Любой линейный комплекс можно представить в виде подходящей линейной комбинации шести заданных специальных линейных комплексов, если только эти шесть специальных комплексов были линейно независимы, т. е. если их координаты не связаны каким-либо одним линейным однородным уравнением.* В частности, для такого представления подойдут шесть прямых, составляющих стороны тетраэдра.

О традиционной линейной геометрии сказано уже достаточно. При замене координатного тетраэдра на пентаэдр произойдут лишь следующие изменения: увеличится на единицу число координат, и вместе с тем появится новое условие, которое на них накладывается. Рассмотрим точки X и Y такие же, как и выше; теперь их координатами будут

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4;\quad Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,$$

причем $\sum\limits_{\nu} X_\nu = \sum\limits_{\nu} Y_\nu = 0$. *В этом случае мы должны рассмотреть* 20 *определителей*

$$p_{ik} = X_i Y_k - Y_i X_k. \tag{27}$$

Конечно, мы вновь имеем

$$p_{ik} = -p_{ki}, \tag{28}$$

но вместе с тем еще и

$$\sum_i p_{ik} = 0, \text{ а также } \sum_k p_{ik} = 0, \tag{29}$$

где суммирование в каждом случае ведется по тем четырем значениям переменного индекса, которые отличаются от значения фиксированного индекса. Кроме того, мы имеем квадратичное соотношение типа (22) и другие, получающиеся из него с помощью (28) и (29). Мы опять можем говорить о *координатах линейного комплекса.* Ими будут 20 величин a_{ik}, на которые не накладывается никаких условий, кроме линейных соотношений (28) и (29). При этом все то, что говорилось о представлении общего линейного комплекса в виде линейной комбинации специальных комплексов, остается в силе. Все эти вопросы настолько просты, что дальнейшие объяснения вполне могут быть прерваны на этом месте.

§ 9. Резольвента двадцатой степени для уравнения пятой степени

Вернемся теперь к материалу § 7. Мы собирались рассматривать уравнения, связывающие пентаэдральные координаты прямых в пространстве. Вместо этого мы теперь можем сразу рассмотреть более общие уравнения относительно координат линейных комплексов. *В общем случае мы получаем таким способом уравнения* 20-*й степени, корни которых в соответствии с* (28) *и* (29) *связаны линейными соотношениями*

$$a_{ik} = -a_{ki}, \ \sum_i a_{ik} = 0, \ \sum_k a_{ik} = 0. \tag{30}$$

Сразу же бросается в глаза аналогия между этими уравнениями и якобиевыми уравнениями шестой степени (если, следуя Кронекеру, мы рассмотрим последние как уравнения двенадцатой степени относительно $\sqrt{z}$). И это не иллюзия. Точную связь между ними мы подробно исследуем позже в главе V.

Наша цель теперь состоит в том, чтобы сделать a_{ik} подходящими функциями x и тем самым превратить наши уравнения 20-й степени в резольвенты уравнений пятой степени. План, который мы наметили в § 7, состоял в том, чтобы связать линейный комплекс, координатами которого служат a_{ik}, ковариантно с точкой x. Этого проще всего добиться, используя методы § 5, в котором мы построили четыре простейшие ковариантные x точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$; соединяя эти точки, мы получаем шесть простейших ковариантных прямых. Координаты p_{ik} этих прямых

$$p_{ik}^{l,m} = x_i^{(l)} x_k^{(m)} - x_i^{(m)} x_k^{(l)} \tag{31}$$

будут линейно независимы, ибо мы имеем дело с шестью сторонами тетраэдра. Следовательно, *общее значение a_{ik} получается в виде линейной комбинации*

$$a_{ik} = \sum c^{l,m} p_{ik}^{l,m}. \tag{32}$$

Коэффициенты $c^{l,m}$ в этой формуле должны быть симметрическими или двузначными функциями x в зависимости от того, все или только четные перестановки мы собираемся рассматривать; кроме того, они должны быть однородными, чтобы было выполнено исходное соглашение из § 7.

§ 10. Теория поверхностей второй степени

В заключение этой главы я сделаю некоторые замечания относительно *геометрического смысла параметров* для прямолинейных образующих канонической поверхности. Эти параметры являются дробно-линейными функциями проективных координат точки *). Ввести их проще всего, если мы приведем нашу поверхность — каким-либо из бесчисленного множества существующих способов — к виду

$$X_1X_4 + X_2X_3 = 0. \tag{33}$$

В соответствии с этим уравнением мы положим, во-первых,

$$-\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_3}{X_4} = \lambda, \tag{34}$$

во-вторых —

$$\frac{X_1}{X_3} = -\frac{X_2}{X_4} = \mu. \tag{35}$$

Параметр λ остается неизменным при движении вдоль образующей одного из типов, который можно назвать первым; тогда μ не будет меняться при движении вдоль образующей второго типа, и, стало быть, λ и μ *описывают* образующие первого и второго типов соответственно, т. е. они могут быть использованы в качестве *параметров для различения отдельных образующих*. Отметим здесь, что каждая из формул (34), (35) содержит в себе два уравнения, что дает нам возможность несколько расширить определение величин λ и μ, не изменяя в действительности их значения. Например, λ может быть задано в виде следующей комбинации уравнений (34), использующей произвольные величины σ и ρ:

$$\lambda = \frac{-\rho X_1 + \sigma X_3}{\rho X_2 + \sigma X_4}. \tag{36}$$

---

*) Говоря геометрически, введение таких параметров эквивалентно представлению квадрики в виде дважды линейчатой поверхности. Этот факт был положен Штейнером в основу его рассмотрений.

Подобрав образующую второго типа, для которой $\mu = \sigma/\rho$, мы можем добиться того, чтобы и числитель и знаменатель в (36) обратились в нуль. Выбранная таким образом образующая будет называться *базисной для* λ.

Посмотрим теперь, как ведут себя λ и μ по отношению к тем коллинеациям, которые переводят нашу поверхность в себя *). Как известно, такие преобразования разбиваются на две группы в зависимости от их действия на прямолинейные образующие, *они либо переводят каждое из двух семейств образующих в себя, либо переводят эти семейства друг в друга.* Если мы предположим, что коллинеация относится к первой группе, то каждой образующей λ она будет ставить в соответствие одну и только одну образующую λ' и соответственно каждому μ — единственное μ'. *Тогда из основных положений теории функций мы заключаем, что преобразование, соответствующее нашей коллинеации, задается формулами вида*

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad \mu' = \frac{a'\mu + b'}{c'\mu + d'}. \tag{37}$$

Точно так же во втором случае λ' будет дробно-линейной функцией μ, а μ' — дробно-линейной функцией λ. Я не останавливаюсь здесь на доказательстве того, что эти утверждения можно обратить и что, тем самым, коллинеация, индуцирующая подстановку (37) (либо аналогичную подстановку, переводящую λ и μ друг в друга), совершенно однозначно восстанавливается по этим формулам.

Заметим далее, что λ, μ могут быть использованы для определения координат точек на нашей поверхности **). В самом деле, через каждую точку поверхности проходит ровно одна образующая первого типа и ровно одна образующая второго типа, и мы можем взять в качестве координат этой точки соответствующие λ и μ. При этом целесообразно λ заменить на $\lambda_1 : \lambda_2$, а μ — на

---

*) См. Math. Ann.— 1875.— Bd 9.— S. 188. Теоремы, которые мы будем далее использовать, широко применяются и в других современных исследованиях, а их подробные доказательства завели бы нас чересчур далеко.

**) См. статью Плюккера в Crelle's Journal.— 1847.— V. 36; систематическое исследование кривых вида (38) было практически одновременно проделано в работах Кэли (C a y l e y // Philos. Mag.— 1861.— V. 22) и Шаля (C h a s l e s // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1861.— V. 53).

$\mu_1 : \mu_2$, для того чтобы сделать их однородными. Любое однородное алгебраическое уравнение

$$(38) \qquad f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0,$$

имеющее степень l по λ_1, λ_2 и степень m по μ_1, μ_2, задает кривую степени $l + m$, лежащую на нашей поверхности и пересекающуюся m раз с образующей первого типа и l раз — с образующей второго типа. Формулы (34) и (35) мы можем соединить в одну:

$$(39) \qquad X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \lambda_1\mu_1 : -\lambda_2\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_2.$$

Если теперь подставить это значение X в уравнение какой-нибудь поверхности n-й степени

$$(40) \qquad F(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

то мы получим кривую пересечения этой поверхности с нашей поверхностью, причем эта кривая будет задана в форме (38) и будет иметь одинаковую степень n по каждой паре переменных. Точно так же и, наоборот, каждая кривая (38), имеющая одинаковые степени по λ и μ, может быть при помощи (39) представлена как полное пересечение нашей поверхности второй степени с подходящей поверхностью (40)*).

Найдем, наконец, линейные координаты p_{ik} наших образующих λ и μ, взяв за основу, как и в (33), тетраэдральную систему координат. Полагая в (39) сначала $\mu_1 = 0$, а затем $\mu_2 = 0$, мы получим две точки, лежащие на одной и той же образующей λ:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 0 : 0 : \lambda_1 : \lambda_2;$$
$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \lambda_1 : -\lambda_2 : 0 : 0.$$

---

*) *Предложенная Риманом интерпретация комплексных чисел как точек на сфере является частным случаем обсуждаемого в тексте введения координат* λ, μ. А именно, поскольку все прямолинейные образующие сферы являются мнимыми, каждая точка сферы будет точкой пересечения двух сопряженных друг другу образующих. Если мы теперь введем надлежащие λ, μ и те λ, которые проходят через точки сферы, обозначим посредством $x + iy$, то соответствующие им μ будут равны $x - iy$. *Следовательно, для задания вещественной точки на сфере требуется указать только одно значение* $x + iy$, а это и приводит в точности к способу Римана, детали которого мы, однако, не обсуждали в этой книге. Ср. Math. Ann.— 1875.— Bd 9.— S. 189.

Теперь мы по формулам (19) найдем соответствующие значения p_{ik}:

(41)

$$p_{12}=0,\ p_{13}=\lambda_1^2,\ p_{14}=\lambda_1\lambda_2,\ p_{34}=0,\ p_{42}=\lambda_2^2,\ p_{23}=-\lambda_1\lambda_2.$$

Точно так же для образующей μ мы получим

(42)

$$p_{12}=-\mu_1^2,\ p_{13}=0,\ p_{14}=\mu_1\mu_2,\ p_{34}=\mu_2^2,\ p_{42}=0,\ p_{23}=\mu_1\mu_2.$$

Предположим теперь, что нам задано уравнение линейного комплекса

$$\sum A_{ik}\frac{\partial P}{\partial p_{ik}}.$$

Подставляя в него выражения (41) и (42), мы получаем пару квадратных уравнений

$$A_{42}\lambda_1^2+(A_{23}-A_{14})\lambda_1\lambda_2+A_{13}\lambda_2^2=0, \tag{43}$$

$$-A_{34}\mu_1^2+(A_{23}+A_{14})\mu_1\mu_2+A_{12}\mu_2^2=0. \tag{44}$$

Таким образом, *общий линейный комплекс содержит две и только две образующие каждого из типов.*

Однако может случиться и так, что одно из уравнений будет тождественным нулем. Это накладывает три линейных условия на A_{ik}, так что в этом случае только три из этих параметров могут быть произвольны.

Следовательно, *каждое семейство прямолинейных образующих нашей поверхности принадлежит трехмерному семейству линейных комплексов* *).

Вывод точных формул для этих семейств я опускаю.

---

*) См. цитированную книгу Плюккера «Neue Geometrie des Raumes...».

ГЛАВА III

ГЛАВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Обозначения и основная лемма

Очередная глава, к которой мы теперь переходим, занимает центральное место во всем нашем изложении. Она посвящена изучению главных уравнений пятой степени, основанному на простой связи последних с икосаэдром. Главная идея, вынесенная нами из предыдущей главы (и в особенности из тех результатов, которые относились к преобразованию Чирнгауза), будет состоять в том, чтобы *использовать прямолинейные образующие канонической поверхности.* Каноническое уравнение я, как и раньше, буду записывать здесь в виде

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0, \tag{1}$$

где коэффициент 5 при α и β поставлен для удобства. Я приведу здесь также выражение для дискриминанта такого уравнения. Если мы воспользуемся формулой для дискриминанта общего уравнения пятой степени, которая достаточно громоздка и обычно предполагается известной *), то получим для (1)

$$\prod (y_i - y_k)^2 = 3125\nabla^2, \tag{2}$$

где мы для краткости обозначили символом ∇^2 следующее выражение:

$$\nabla^2 = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4. \tag{3}$$

Мы сразу же воспользуемся результатами заключительного параграфа предыдущей главы, считая, что семейство прямолинейных образующих первого и второго типа на канонической поверхности параметризуются,

*) См., например, F a a d i B r u n o. Einleitung in die Theorie der binären Formen.— Leipzig, 1881.— S. 317.

как и выше, переменными λ и μ соответственно. Пусть

$$(4) \qquad y_0, \ y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4$$

являются корнями (1), записанными в определенном порядке. Допустим теперь, что нам удалось построить 60 образующих λ первого типа и 60 образующих μ второго типа, каждая из которых содержит одну из 60 точек главной поверхности с координатами, получающимися из (4) при помощи четных перестановок y_ν. Поскольку λ и μ, как мы знаем, являются дробно-линейными функциями y_ν, уравнения 60-й степени, которым удовлетворяют 60 рассматриваемых нами значений λ и μ, будут *рациональными резольвентами* 60-й степени исходного главного уравнения, а их коэффициенты будут соответственно рациональными функциями α, β, γ, ∇. Я утверждаю теперь — а в этом и заключается та лемма, которая необходима для предстоящего изложения,— что *полученные нами резольвенты 60-й степени при подходящем выборе параметров λ и μ должны превратиться в икосаэдральные уравнения, а стало быть, без ущерба для общности могут быть записаны в виде*

$$(5) \qquad \frac{H^3(\lambda)}{1728 f^5(\lambda)} = Z_1, \quad \frac{H^3(\mu)}{1728 f^5(\mu)} = Z_2,$$

где Z_1 и Z_2, каждое в отдельности, зависят от α, β, γ, ∇.

Доказательство немедленно получается из наших предыдущих результатов. Коллинеации, сохраняющие поверхность второй степени, были разделены выше на две группы в соответствии с тем, сохраняют ли они каждое из двух семейств прямолинейных образующих или переводят эти семейства друг в друга. Поскольку 120 коллинеаций, отвечающих перестановкам y_ν, переводят каноническую поверхность в себя, у нас отпадает необходимость рассматривать действие *сразу всех* этих коллинеаций на прямолинейные образующие. Если те коллинеации, которые сохраняют тип образующих, не составляют всей совокупности из 120 рассматриваемых нами преобразований, то они должны составлять ее половину. Эта половина является группой и самосопряжена в основной группе. Стало быть, это в точности подгруппа четных перестановок. Поэтому *в любом случае* — и в этом состоит первый результат — 60 *четных перестановок переводят каждое из двух семейств прямолинейных образующих главной поверхности в себя.* Вспомним теперь, что согласно формулам (37) из II, 2, § 10 действие таких коллинеаций на образующие состоит в дробно-линейной замене параметров λ и μ. Следовательно, 60 *значений* λ, *задаваемых нашей резольвентой* 60-*й степени, будут дробно-линейными функциями с постоянными коэффициентами какого-либо одного значения и аналогично для значений* μ. Другими словами, *наши уравнения относительно* λ *и* μ *переходят в себя при действии группы из* 60 *линейных подстановок.* Наша лемма отсюда уже немедленно следует на основании результатов из I, 5, § 2, надо лишь заметить, что имеется простой изоморфизм между обсуждаемой группой линейных подстановок параметров λ, μ и группой четных перестановок y_ν. Те переменные λ, μ, которые присутствуют в канонических формулах (5), будут в действительности некоторыми линейными функциями первоначальных параметров λ, μ; мы будем называть их *нормальными параметрами*, помня, однако, о том, что они могут быть выбраны 60 различными способами при помощи тех 60 линейных подстановок, которые переводят каждое из уравнений (5) в себя.

Теперь, после того как наша первая лемма доказана, мы можем сделать еще один шаг в этом же направлении. Возвращаясь вновь к обсуждавшейся только что задаче, я утверждаю, что *каждое нечетное преобразование переводит прямолинейные образующие главной поверхности одного типа в образующие другого типа.* Действительно, если бы все 120 коллинеаций переводили каждое из двух семейств образующих в себя, то мы бы получили группу из 120 линейных подстановок, задаваемых все той же формулой (37), которая должна была бы быть просто изоморфна группе из 120 перестановок пяти символов, что невозможно в силу I, 5, § 2. Из этого следует, что если мы каким-либо способом представили λ, параметризующее семейство образующих первого типа, в виде дробно-линейной функции величин y_ν, то выражение для μ, параметризующего образующие второго типа, можно получить при помощи произвольной нечетной перестановки y_ν, входящих в формулу для λ. В частности, *применяя всевозможные нечетные перестановки* y_ν *в выражении для какого-либо нормального параметра* λ, *мы получим выражение для всех* 60 *нормальных параметров* μ. При таких перестановках коэффициенты α, β, γ, очевидно, не изменяются, а ∇ изменяет свой знак. Поэтому *величины* Z_1 *и* Z_2, *входящие в уравнение* (5), *различаются только знаком при* ∇. Нашим результатам можно придать несколько иную форму, если рассмотреть те 60 точек, которые получаются из (4) при помощи всевозможных *нечетных* перестановок. Тогда для нахождения образующих первого и второго типа, проходящих через эти точки, имеются уравнения

$$(6)\qquad \frac{H^3(\lambda)}{1728f^5(\lambda)}=Z_2,\qquad \frac{H^3(\mu)}{1728f^5(\mu)}=Z_1\ ^{*)}.$$

§ 2. Выбор нормального параметра λ

Формулы для нормального параметра λ, которые мы сейчас получим, можно было бы весьма легко и просто проверить. Тем не менее я не пожалею места для их вывода, чтобы подчеркнуть геометрические причины, приводящие к нужным формулам без всяких вычислений.

Мы видели ранее (I, 2, § 6), что в качестве порождающих операций группы икосаэдра можно взять следующие две:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &S\colon\ z'=\varepsilon z,\\ &T\colon\ z'=\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}. \end{aligned}$$

---

*) Доказательство изложенных здесь результатов, а также результатов двух последующих параграфов впервые было представлено мною в двух докладах Эрлангенскому Обществу 13 ноября 1876 г. и 15 января 1877 г. (Weitere Mittheilungen über das Ikosaeder, I, II). Для сопоставления я хотел бы добавить к ним соответствующие рассуждения для уравнений третьей и четвертой степени. Пусть три корня уравнения третьей степени удовлетворяют условию $\sum\limits_{\nu} x_\nu=0$, т. е. лежат на одной прямой, которую можно параметризовать одной переменной λ. Шесть перестановок корней действуют на λ линейными подстановками диэдрального типа, так что λ можно ввести таким образом, что он будет удовлетворять *диэдральному уравнению* шестой степени.

Для уравнений четвертой степени геометрическое представление переносится на плоскость, а к условию $\sum\limits_{\nu} x_\nu=0$ добавляется условие $\sum\limits_{\nu} x_\nu^2=0$, которое вполне заслуженно можно назвать «главным уравнением». Точки этой коники также параметризуются одной переменной λ, а при 24 перестановках корней происходят линейные замены параметра. Поэтому его можно ввести так, чтобы он удовлетворял *октаэдральному уравнению* (а после присоединения квадратного корня из дискриминанта исходного уравнения четвертой степени — *тетраэдральному уравнению*).

Далее было показано (I, 4, § 10), что октаэдральные формы при таких заменах испытывают следующие перестановки:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &S\colon\ t'_\nu = t_{\nu+1},\\ &T\colon\ t'_0 = t_0;\ t'_1 = t_2;\ t'_2 = t_1;\ t'_3 = t_4;\ t'_4 = t_3. \end{aligned}$$

Точно такие же формулы перестановок выполняются для корней определенных резольвент пятой степени для икосаэдрального уравнения, построенных нами в I, 4 и, в частности,— скоро мы к этому вернемся — для корней канонической резольвенты. Нашим будущим формулам тоже хотелось бы придать такой же вид, чтобы они примыкали к этим формулам как можно ближе. *Для этого мы из* 60 *возможных нормальных значений* λ *выберем такое, которое преобразуется по формулам* (7), *если* y_ν *испытывают две перестановки* (8). Этим фиксируется значение λ, но еще не вид λ как функции величин y_ν. Во-первых, нам надо решить, какая именно образующая второго типа выбирается в качестве базисной для λ в смысле II, 2, § 10. Во-вторых, мы можем изменять числитель и знаменатель λ, добавляя к ним произвольные кратные $\sum y_\nu$ (которая равна нулю). Представим необходимые уточнения.

При линейной замене λ или μ два значения переменной, т. е. две образующие первого или соответственно второго типа, остаются неизменными. Рассмотрим, в частности, преобразование S и в качестве базисной для λ выберем одну из двух образующих второго типа, остающихся на месте под действием S. Пусть при этом $\lambda = p/q$, где p и q — пара линейных функций y, а при действии S p и q переходят в p' и q'. По нашему предположению, уравнения $p' = 0$, $q' = 0$ задают ту же самую прямую, что и $p = 0$, $q = 0$. Поэтому для любого y

$$p' = ap + bq + m\sum_\nu y_\nu,$$

$$q' = cp + dq + n\sum_\nu y_\nu.$$

Но во всех точках главной поверхности $\frac{p'}{q'} = \lambda'$ должно в соответствии с формулой (7) совпадать с $\varepsilon\lambda$, а точки главной поверхности нельзя выделить среди всех точек пространства какими-либо линейными соотношениями координат. Поэтому предыдущие уравнения должны преобразовываться в более простые:

$$p' = \varepsilon d p + m \sum_{\nu} y_{\nu},$$

$$q' = d q + n \sum_{\nu} y_{\nu},$$

где основными неизвестными являются d, m и n. Эти уравнения можно модифицировать следующим образом:

$$p' + \frac{m}{\varepsilon d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu} = \varepsilon d \left(p + \frac{m}{\varepsilon d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu}\right),$$

$$q' + \frac{n}{d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu} = d \left(q + \frac{n}{d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu}\right).$$

Теперь, не нарушая равенства $\lambda = p/q$, можно заменить возникшие здесь выражения $p + \frac{m}{\varepsilon d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu}$, $q + \frac{n}{d - 1} \sum_{\nu} y_{\nu}$ соответственно на p и q. Получим просто

$$p' = \varepsilon d p, \quad q' = d p. \tag{9}$$

Мы пришли к следующему результату: *можно так выбрать* $\lambda = p/q$, *чтобы при действии перестановки* S *выполнялись формулы* (9), *причем сделать это можно двумя способами* (смотря по тому, какая из двух образующих второго типа была взята в качестве базисной).

Между тем известно (и, сверх того, легко доказывается), что линейная функция от величин y_{ν}, которая при действии перестановки S всего лишь умножается на постоянный множитель, является не чем иным, как одним из выражений Лагранжа:

$$\begin{aligned}
p_1 &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4,\\
p_2 &= y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4,\\
p_3 &= y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4,\\
p_4 &= y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4,
\end{aligned} \tag{10}$$

к которым следовало бы также добавить $\sum_{\nu} y_{\nu}$ как выражение, вообще не изменяющееся, если бы только оно не было, как в нашем случае, тождественным нулем. При действии S p_k преобразуются по формулам $p_k' = \varepsilon^{4k} p_k$; поэтому для λ могут быть лишь три выражения, удовлетворяющие соотношениям (9),

$$\lambda = c_1 \frac{p_1}{p_2}, \quad \lambda = c_2 \frac{p_2}{p_3}, \quad \lambda = c_3 \frac{p_3}{p_4}, \tag{11}$$

причем из них стоит рассматривать только первое и третье, а второе надлежит отбросить, поскольку можно показать, что линии пересечения плоскостей $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$, а также $p_3 = 0$ и $p_4 = 0$ и в самом деле лежат на главной поверхности, а прямая $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ — нет. Лучше всего сделать это, введя в уравнение главной поверхности вместо y_ν величины p_k. Из (9) с учетом условия $\sum\limits_\nu y_\nu = 0$ мы получаем

$$5y_\nu = \varepsilon^{4\nu} p_1 + \varepsilon^{3\nu} p_2 + \varepsilon^{2\nu} p_3 + \varepsilon^{\nu} p_4, \tag{12}$$

откуда

$$25 \sum_\nu y_\nu^2 = 10 (p_1 p_4 + p_2 p_3).$$

Поэтому *уравнение главной поверхности в координатах Лагранжа будет иметь вид*

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0, \tag{13}$$

непосредственно из которого и следует справедливость последнего утверждения. Кроме того, из (13) вытекает, что

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4},$$

а стало быть, λ, *вводимое по первой из формул* (11): $\lambda = c_1 \dfrac{p_1}{p_2}$, *можно было бы ввести и по формуле* $\lambda = -c_1 \dfrac{p_3}{p_4}$.

Теперь осталось лишь определить стоящий здесь множитель c_1. Если в соответствии с формулами (8) подействовать на y_ν перестановкой T и получающееся при этом новое λ' подставить в формулу (7), то возникающее соотношение не будет выполняться тождественно, так как прямолинейная образующая второго типа, служащая для введения λ, не остается на месте при действии T. Однако это равенство можно сделать верным, если принять во внимание соотношения $\sum\limits_\nu y_\nu = \sum\limits_\nu y_\nu^2 = 0$. Путем сравнения соответствующих членов в обоих частях мы получаем для c_1 значение -1. Следовательно, *искомое нормальное* λ *таково*:

$$(14)\qquad \lambda = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4},$$

что в точности соответствует значению параметра λ, установленному нами в последнем параграфе предыдущей главы (формула (34))*).

§ 3. Выбор нормального параметра μ

Нормальный параметр μ, который мы ищем для образующих второго типа, должен был получаться из λ при помощи нечетной перестановки y_ν. Это требование будет выполнено, если в соответствии с заключительным параграфом предыдущей главы (формула (35)) положить

$$(15)\qquad \mu = -\frac{p_2}{p_4} = \frac{p_1}{p_3}.$$

Действительно, это значение получается при замене y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 соответственно на y_0, y_3, y_1, y_4, y_2 либо при циклической перестановке (y_1, y_3, y_4, y_2).

Очевидно, однако, что формулу (15) можно получить из (14) и несколько иначе, а именно заменив всюду в (14) ε на ε^2. Конечно, такое изменение распространяется тогда и на подстановки S и T в (7), и на все получающиеся из них икосаэдральные подстановки. *Поэтому, несмотря на то, что при действии каждой отдельной четной перестановки y_ν параметры λ и μ преобразуются по-разному, совокупность всех таких преобразований будет в обоих случаях одна и та же; соответствие между этими двумя множествами задается с помощью замены ε на ε^2.* Эта теорема лежит в основе всего дальнейшего. Применяя рассматриваемую операцию к выражению

---

*) Если в упомянутых выше случаях уравнений третьей и четвертой степени мы захотим аналогичным образом найти корни *диэдрального* и соответственно *тетраэдрального* уравнения, то получим $\lambda = \dfrac{x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2}{x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha x_2}$ и $\lambda = \sqrt{2}\,\dfrac{x_0 + i x_1 + i^2 x_2 + i^3 x_3}{x_0 + i^2 x_1 + i^4 x_2 + i^6 x_3} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{x_0 + i^2 x_1 + i^4 x_2 + i^6 x_3}{x_0 + i^3 x_1 + i^6 x_2 + i^9 x_3}$, где $\alpha^3 = i^4 = 1$, так что в этом случае также возникают отношения выражений Лагранжа.

для μ, мы не получим вновь λ, а получим $-\frac{1}{\lambda}$, т. е. значение, которое возникает, если подействовать на λ икосаэдральной подстановкой, ранее обозначавшейся буквой U. Ей соответствует одновременная замена y_1 на y_4, а y_2 на y_3.

Привлечем теперь формулу (39) из II, 2, § 10. После замены λ на $\lambda_1 : \lambda_2$, а μ на $\mu_1 : \mu_2$ мы получаем с ее помощью

$$(16) \qquad p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = \lambda_1\mu_1 : -\lambda_2\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_2$$

или, вводя коэффициент пропорциональности ρ,

$$(17) \qquad \rho y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2.$$

§ 4. Каноническая резольвента икосаэдрального уравнения

Найдя нормальные параметры λ, μ для любого главного уравнения пятой степени, мы теперь применим эти формулы, в частности, к канонической резольвенте пятой степени для икосаэдрального уравнения, которую мы построили ранее (I, 4, § 12), считая, что задано произвольное икосаэдральное уравнение

$$(18) \qquad \frac{H^3(z_1, z_2)}{1728 f^5(z_1, z_2)} = Z.$$

Результат, который при этом получится, будет особенно простым и в то же время наиболее важным для дальнейшего нашего продвижения.

Каноническая резольвента определялась с помощью

$$(19) \qquad Y_\nu = m v_\nu + n u_\nu v_\nu,$$

где

$$(20) \qquad u_\nu = \frac{12 f^2 t_\nu}{T}, \qquad v_\nu = \frac{12 f W_\nu}{H}$$

и под f, H, T понимаются фундаментальные формы для икосаэдра, а под t_ν и W_ν — многократно встречавшиеся нам формы шестой и восьмой степеней соответственно. Заметим здесь, что W_ν и $t_\nu W_\nu$ могут быть записаны таким образом:

$$(21)\qquad W_\nu = (\varepsilon^{4\nu}z_1 - \varepsilon^{3\nu}z_2)(-z_1^7 + 7z_1^2z_2^5) + \\ + (\varepsilon^{2\nu}z_1 + \varepsilon^{\nu}z_2)(-7z_1^5z_2^2 - z_2^7),$$

$$(22)\qquad t_\nu W_\nu = (\varepsilon^{1\nu}z_1 - \varepsilon^{3\nu}z_2)(-26z_1^{10}z_2^3 + 39z_1^5z_2^8 + z_2^{13}) + \\ + (\varepsilon^{4\nu}z_1 + \varepsilon^{\nu}z_2)(-z_1^{13} + 39z_1^8z_2^5 + 26z_1^3z_2^{10}).$$

Поэтому Y_ν в формуле (19) приобретает следующий вид:

$$(23)\qquad Y_\nu = (\varepsilon^{4\nu}z_1 - \varepsilon^{3\nu}z_2)R + (\varepsilon^{2\nu}z_1 + \varepsilon^{\nu}z_2)S,$$

где R и S являются линейными функциями m и n. Выражения Лагранжа (которые мы здесь тоже будем обозначать большими буквами) становятся такими:

$$(24)\qquad P_1 = 5z_1R,\ P_2 = -5z_2R,\ P_3 = 5z_1S,\ P_4 = 5z_2S,$$

и мы получаем просто

$$(25)\qquad \lambda = \frac{z_1}{z_2},\qquad \mu = \frac{R}{S}.$$

Отсюда следует вывод: *параметр* λ *равен неизвестному* $z_1 : z_2$ *из икосаэдрального уравнения, или, говоря геометрически, точка*

$$(26)\qquad y_\nu = mv_\nu(\lambda) + nu_\nu(\lambda)v_\nu(\lambda)$$

при всевозможных значениях m *и* n *заметает образующую первого типа.* Если в качестве переменной здесь рассматривается λ, то, как мы видели в четвертом параграфе предыдущей главы, точка y_ν очертит полурегулярную рациональную кривую, имеющую в общем случае степень 38. Для доказательства мы вводили коэффициент пропорциональности ρ и заменяли формулу (26) следующей:

$$(27)\qquad \rho y_\nu = mW_\nu(\lambda_1, \lambda_2)T(\lambda_1, \lambda_2) + \\ + 12nt_\nu(\lambda_1, \lambda_2)W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)f^2(\lambda_1, \lambda_2).$$

Здесь мы в качестве попутного замечания можем геометрически объяснить причину того, что порядок только что полученных кривых падает до 14 при $m = 0$ и до 8 при $n = 0$. А именно, *в первом случае из общей кривой 38-й степени выпадает фигура, составленная из 12 образующих первого типа* $f(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, *взятая дважды, а во втором случае — фигура* $T(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, *взятая* *один раз*. Помимо этого наблюдения мы получаем для наших кривых (27) еще и следующие теоремы. Ясно, что *наши кривые ровно один раз пересекают образующую первого типа, а стало быть,* 37 *раз — образующую второго типа*. В самом деле, для каждого значения λ формула (27) дает ровно одну точку кривой. Более того, мы видим, что *через каждую точку произвольной образующей* λ *проходит ровно одна кривая* (27), *т. е. главная поверхность покрывается не пересекающимися друг с другом кривыми* (27). Действительно, точка на образующей λ определяется соответствующим μ, задающим образующую второго типа, проходящую через эту точку. Но если $\lambda : \mu$ задано, то соответствующее $m : n$ выражается через него *линейно*.

Добавим к этому еще два замечания, которые пригодятся нам в дальнейшем. Во-первых, что касается m, n, то через заданные в соответствии с формулой (26) y_ν линейно выражается не только их отношение, но и каждое из них в отдельности. Эти формулы не изменятся, если сделать какую-либо четную перестановку y_ν, ибо при икосаэдральных заменах λ величины $u_\nu(\lambda)$ и $v_\nu(\lambda)$, входящие в правую часть (26), испытывают те же самые перестановки, что и y_ν, входящие в левую часть. Поэтому *рациональные выражения* m, n *через* y_ν *таковы, что они не изменяются при четных перестановках* y_ν; *иными словами,* m, n *представляются в виде рациональных функций величин* α, β, γ, ∇.

Во-вторых, рассмотрим соотношение между λ и μ, даваемое формулами (25). Если сделать какую-либо икосаэдральную замену λ, то μ, поскольку оно зависит от соответствующих Y_ν, подвергнется действию другого икосаэдрального преобразования, которое получается из первого заменой ε на ε^2 — в точности так, как мы видели это в предыдущем параграфе. Следуя терминологии, введенной на этот счет г-ном Горданом, изменение μ характеризуется как *контраградиентное* к изменению λ. Тем самым формулы (25) преподносят нам бесконечное множество рациональных функций λ, контраградиентных по отношению к λ в указанном смысле *).

---

*) Доказанные здесь теоремы, так же как и принципы решения главного уравнения пятой степени, немедленно вытекают из докладов, сделанных г-ном Горданом и мною Эрлангенскому обществу 21 мая 1877 г. Г-н Гордан исходил из совершенно иных соображений, к которым мы еще вернемся впоследствии. Мой собственный доклад тоже в определенной степени отличался от предло-

§ 5. Решение главного уравнения пятой степени

В § 1, 2, найдя λ как функцию y_ν, мы тем самым уже привели способ решения главного уравнения пятой степени путем сведения его к икосаэдральному уравнению

$$\frac{H^3(\lambda)}{1728 f^5(\lambda)} = Z_1. \tag{28}$$

Если мы хотим получить удобное выражение y_ν в терминах одного из корней λ, то удобно, очевидно, воспользоваться формулой (26). Чтобы сделать более четкой связь этой формулы с рассматриваемым уравнением (28), я буду записывать ее, снабдив m и n индексами 1:

$$y_\nu = m_1 v_\nu(\lambda) + n_1 u_\nu(\lambda) v_\nu(\lambda); \tag{29}$$

когда мы впоследствии будем рассматривать μ вместо λ, вместо Z_1, m_1 и n_1 должны будем писать Z_2, m_2, n_2 соответственно. *Для завершения решения главного уравнения пятой степени нам, очевидно, осталось лишь представить Z_1, m_1 и n_1 в виде рациональных функций заданных величин α, β, γ, ∇.*

Позднее мы увидим, как a priori следует производить необходимые для этого вычисления. А здесь мы воспользуемся гораздо более элементарным методом. В I, 4, § 12 мы, считая m, n, Z произвольно заданными, нашли точное выражение для канонической резольвенты икосаэдрального уравнения, а в § 14 вычислили квадратный корень из ее дискриминанта. Но из результатов предыдущего параграфа следует, что каждое главное уравнение пятой степени после того, как определено значение ∇, может быть единственным способом представлено в виде канонической резольвенты. *Таким образом, m_1, n_1 и Z_1 могут быть эффективно вычислены путем простого сравнения коэффициентов общей канонической резольвенты и квадратного корня из ее дискриминанта с коэффициентами α, β, γ главного уравнения* (1) *и соответствующим значением* ∇. При этом ∇, как и в I, 4, § 14, всегда будет определяться по формуле

$$25\sqrt{5}\,\nabla = \prod_{\nu<\nu'} (y_\nu - y_{\nu'}), \tag{30}$$

которая полностью согласуется с формулами (2) и (3) предыдущей главы. Сравнив для начала только наборы

женного здесь варианта и во многих аспектах он был сложнее. По всем этим вопросам см. мой мемуар: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder // Math. Ann.— Aug. 1877.— Bd 12.

коэффициентов, получаем

$$(31)\qquad \begin{aligned} Z\alpha &= 8m^3 + 12m^2n + \frac{6mn^2+n^3}{(1-Z)},\\ \frac{Z\beta}{3} &= -4m^4 + \frac{6m^2n^2+4mn^3}{(1-Z)} + \frac{3n^4}{4(1-Z)^2},\\ \frac{Z\gamma}{3} &= 48m^5 - \frac{40m^3n^2}{(1-Z)} + \frac{15mn^4+4n^5}{(1-Z)^2}. \end{aligned}$$

Я написал здесь Z, m, n вместо Z_1, m_1, n_1 потому, что Z_2, m_2 и n_2 удовлетворяют в точности таким же уравнениям.

Дальнейшие вычисления состоят в следующем *). Из первого уравнения в (31) находим

$$(32)\qquad \frac{n^2}{(1-Z)} = \frac{12\beta m+\gamma}{12\alpha},$$

в то же время можно написать:

$$(33)\qquad \begin{cases} -m\gamma + \dfrac{n^2\beta}{1-Z} = -\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{1}{Z}\left(4m^2-\dfrac{n^2}{1-Z}\right)^3,\\ \alpha^2 - \dfrac{4}{81}\dfrac{1-Z}{n^2}(3m\alpha+2\beta)^2 = \dfrac{1}{Z}\left(4m^2-\dfrac{n^2}{1-Z}\right)^3 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\alpha^2 - \frac{4}{81}\cdot\frac{1-Z}{n^2}(3m\alpha+2\beta)^2 = \frac{4}{9}\left(m\gamma+\frac{n^2\beta}{1-Z}\right).$$

Нужно лишь подставить сюда значение $\dfrac{n^2}{1-Z}$ из (32), и получится квадратное уравнение относительно m. После умножения на знаменатель оно будет иметь вид

$$(34)\qquad 16m^2(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma) - \frac{4}{3}m(11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2) + \frac{1}{9}(64\alpha^2\beta^2-27\alpha^3\gamma-\beta\gamma^2) = 0.$$

Решая его, находим

$$(35)\qquad m = \frac{(11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2)\pm\alpha\nabla}{24(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)},$$

*) Используемый в тексте процесс исключения неизвестных заимствован мною из лекций Гордана, читанных зимой 1880—1881 гг. Г-н Киперт (Kiepert) тоже применял аналогичное сравнение с канонической резольвентой, см. K i e p e r t, Auflösung der Gleichungen fünften Grades. // Göttinger Nachrichten.— 17. Juli 1879; Borchardt's J.— 1879.— V. 87.

где ∇^2, как легко проверить, в точности соответствует (3), а выбор знака $+$ или $-$ пока что не определен. Из найденного значения m легко получаются значения и всех остальных неизвестных. Чтобы найти Z, достаточно в первое из уравнений (33) подставить вместо $\frac{n^2}{1-Z}$ выражение (32). Получим

$$(36) \qquad Z = \frac{(48\alpha \cdot m^2 - 12\beta m - \gamma)^3}{64\alpha^2 (12(\alpha\gamma - \beta^2) m - \beta\gamma)}.$$

Соответственно для нахождения n надо переписать первое из уравнений (31) в виде

$$\left(12m^2 + \frac{n^2}{1-Z}\right) n = \alpha Z - 8m^3 - 6m \frac{n^2}{1-Z},$$

считая m и Z уже известными. Окончательный ответ:

$$(37) \qquad n = -\frac{96\alpha m^3 + 72\beta m^2 + 6\gamma m - 12\alpha^2 Z}{144\alpha m^2 + 12\beta m + \gamma}.$$

Для того чтобы выяснить, какой знак ∇ соответствует в формуле (35) (а стало быть, и в (36), (37)) образующей λ, т. е. значениям m_1, n_1 и Z_1, мы сравним (30) с аналогичным произведением разностей корней, вычисленным для исходной резольвенты. Здесь достаточно рассмотреть лишь какой-нибудь специальный случай. Положим в общей резольвенте $m = 1$, $n = 0$. В соответствии с формулами (31) имеем тогда

$$\alpha = \frac{8}{Z}, \quad \beta = -\frac{12}{Z}, \quad \gamma = \frac{144}{Z}.$$

Но в то же время на основании I, 4, § 14

$$\prod_{\nu<\nu'} (Y_\nu - Y_{\nu'}) = -25\sqrt{5} \cdot \frac{12^4 (1-Z)}{Z^3},$$

поэтому по формуле (30)

$$\nabla = -\frac{12^4 (1-Z)}{Z^3}.$$

Далее, по формуле (35) m в этом случае будет равно

$$\frac{-11 \cdot 2^8 - 3 \cdot 12^3 Z \pm 4 \cdot 12^3 (Z-1)}{2^{12} - 7 \cdot 2^3 Z},$$

и коль скоро мы предположили, что $m = 1$, мы должны взять знак минус в формуле (35).

Итак, окончательно

$$m_1 = \frac{(11\alpha^3\beta + 2\beta^2\gamma - \alpha\gamma^2) - \alpha\nabla}{24(\alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma)}, \tag{38}$$

где Z_1 *и* n_1 *находятся по формулам* (36) *и* (37), *а соответствующие значения* m_2, n_2 *и* Z_2 *получаются из этих значений изменением знака у* ∇.

§ 6. Процесс Гордана

Преимущество изложенного только что метода нахождения m_1, n_1 и Z_1 состоит в том, что он сводит все дело к доказанным ранее результатам совершенно элементарным образом. Но нельзя отрицать, что для того чтобы правильно скомбинировать уравнения (31), требуется хотя и не слишком изощренное, но все-таки трюкачество, и потому этот метод не вполне согласуется с использовавшимся до сих пор стилем изложения, в котором мы всегда стремились заранее представить себе в общих чертах результаты вычислений, прежде чем они будут проделаны. Поэтому я остановлюсь здесь на некоторых моментах того способа вычислений, который первоначально был осуществлен г-ном Горданом*), тем более что некоторые из них тесно связаны с теми идеями, которые используются в нашем подходе к решению уравнений.

Для начала уясним те трудности, которые препятствуют непосредственному вычислению Z_1, m_1 и n_1. Пусть, например, мы исходим из уравнения

$$Z_1 = \frac{H^3(\lambda)}{1728 f^5(\lambda)},$$

где вместо λ мы можем подставить его значение:

$$\lambda = -\frac{p_1}{p_2}.$$

При этом Z_1 становится рациональной функцией пяти корней $y_0, y_1, \ldots, y_4$, остающейся неизменной при любых четных перестановках y_ν. Но теперь это последнее свойство выполнено лишь для y_ν, связанных соотношениями $\sum\limits_\nu y_\nu = 0$ и $\sum\limits_\nu y_\nu^2 = 0$, и перестает выполняться,

*) Помимо уже упоминавшихся работ см. сообщение Гордана на собрании естествоиспытателей Мюнхена в сентябре 1877 г., а также обширный трактат: Gordan. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade // Math. Ann.— Jan. 1878.— Bd 13.

если y_ν рассматриваются как произвольные переменные величины. Иначе говоря, Z_1 является *условным инвариантом* для четных перестановок y_ν, но не является *формальным инвариантом*. Но все те обычные правила обращения с симметрическими функциями, с которыми мы встречались, годились лишь в случае формальной симметричности, и поэтому здесь их нельзя использовать непосредственно.

Г-н Гордан преодолел эту трудность, рассмотрев общим образом y_ν как функции *независимых переменных*, удовлетворяющие соотношениям $\sum\limits_\nu y_\nu = 0$ и $\sum\limits_\nu y_\nu^2 = 0$. После этого он имел дело только с функциями независимых переменных и действовал с ними почти так же, как мы обходились выше с симметрическими функциями.

Независимые переменные, вводимые г-ном Горданом, представляют собой не что иное, как наши однородные параметры λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2. Ранее мы уже выразили через эти величины, с одной стороны, отношения между p_k, а с другой стороны — отношения между y_ν (формулы (16), (17)). Г-н Гордан, считая заданными абсолютные значения λ и μ, немедленно выводит нужные формулы, записав их в следующем виде:

$$(39) \qquad p_1 = 5\lambda_1\mu_1, \; p_2 = -5\lambda_2\mu_1, \; p_3 = 5\lambda_1\mu_2, \; p_4 = 5\lambda_2\mu_2,$$

в результате чего y_ν оказываются равными таким выражениям:

$$(40) \qquad y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2.$$

Прежде чем продолжить далее вычисление Гордана, мы выразим все заданные и искомые величины в терминах введенных здесь λ и μ.

Сначала я приведу формулы для коэффициентов α, β, γ исходного уравнения пятой степени и для соответствующего ∇. Вот они:

$$(41) \qquad \alpha = -\frac{\sum\limits_\nu y_\nu^3}{15} = -\lambda_1^3\mu_1^2\mu_2 - \lambda_1^2\lambda_2\mu_2^3 - \lambda_1\lambda_2^2\mu_1^3 + \lambda_2^3\mu_1\mu_2^2,$$

$$(42) \qquad \beta = -\frac{\sum\limits_\nu y_\nu^4}{20} = -\lambda_1^4\mu_1\mu_2^3 + \lambda_1^3\lambda_2\mu_1^4 + 3\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1^2\mu_2^2 - \\ - \lambda_1\lambda_2^3\mu_2^4 + \lambda_2^4\mu_1^3\mu_2,$$

$$(43)\quad \gamma = -\frac{\sum_{\nu} y_\nu^5}{5} = -\lambda_1^5(\mu_1^5+\mu_2^5) + 10\lambda_1^4\lambda_2\mu_1^3\mu_2^2 -$$

$$-10\lambda_1^3\lambda_2^2\mu_1\mu_2^4 - 10\lambda_1^2\lambda_2^3\mu_1^4\mu_2 - 10\lambda_1\lambda_2^4\mu_1^2\mu_2^3 + \lambda_2^5(\mu_1^5-\mu_2^5),$$

$$(44)\quad \nabla = \frac{\prod_{\nu<\nu'}(y_\nu - y_{\nu'})}{25\sqrt{5}} = \lambda_1^{10}(\mu_1^{10} + 11\mu_1^5\mu_2^5 - \mu_2^{10}) +$$

$$+\lambda_2^{10}(-\mu_1^{10} - 11\mu_1^5\mu_2^5 + \mu_2^{10}) + \lambda_1^9\lambda_2(25\mu_1^8\mu_2^2 - 50\mu_1^3\mu_2^7) +$$

$$+\lambda_1\lambda_2^9(-50\mu_1^7\mu_2^3 - 25\mu_1^2\mu_2^8) + \lambda_1^8\lambda_2^2(-75\mu_1^6\mu_2^4 + 25\mu_1^2\mu_2^9) +$$

$$+\lambda_1^2\lambda_2^8(-25\mu_1^9\mu_2 - 75\mu_1^4\mu_2^6) + \lambda_1^7\lambda_2^3(-50\mu_1^9\mu_2 - 150\mu_1^4\mu_2^6) +$$

$$+\lambda_1^3\lambda_2^7(150\mu_1^6\mu_2^4 - 50\mu_1\mu_2^9) + \lambda_1^6\lambda_2^4(150\mu_1^7\mu_2^3 + 75\mu_1^2\mu_2^8) +$$

$$+\lambda_1^4\lambda_2^6(75\mu_1^8\mu_2 - 150\mu_1^3\mu_2^7) + \lambda_1^5\lambda_2^5(11\mu_1^{10} - 504\mu_1^5\mu_2^5 - 11\mu_2^{10}).$$

Что касается искомых величин, то выражение для Z_1 как функции λ нам уже известно:

$$(45)\qquad Z_1 = \frac{H^3(\lambda_1, \lambda_2)}{1728 f^5(\lambda_1, \lambda_2)},$$

а величины m_1 и n_1 тоже легко выражаются через λ и μ. А именно, в соответствии с нашим определяющим уравнением имеем

$$y_\nu = m_1 v_\nu(\lambda_1, \lambda_2) + n_1 u_\nu(\lambda_1, \lambda_2) v_\nu(\lambda_1, \lambda_2)$$

или, иначе,

$$y_\nu = 12m_1\frac{f(\lambda_1, \lambda_2) W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)}{H(\lambda_1, \lambda_2)} +$$

$$+ 144n_1\frac{f^3(\lambda_1, \lambda_2) t_\nu(\lambda_1, \lambda_2) W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)}{H(\lambda_1, \lambda_2) T(\lambda_1, \lambda_2)},$$

и, подставив вместо y_ν их значения (40), мы получим

$$(46)\qquad m_1 = \frac{M_1}{12 f(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad n_1 = \frac{N_1 T(\lambda_1, \lambda_2)}{144 f^3(\lambda_1, \lambda_2)},$$

где M_1 и N_1 обозначены следующие две *линейные по* μ_1, μ_2 формы:

$$(47)\quad M_1 = \mu_1(\lambda_1^{13} - 39\lambda_1^8\lambda_2^5 - 26\lambda_1^3\lambda_2^{10}) -$$

$$- \mu_2(26\lambda_1^{10}\lambda_2^3 - 39\lambda_1^5\lambda_2^8 - \lambda_2^{13}),$$

$$(48)\qquad N_1 = \mu_1(7\lambda_1^5\lambda_2^2 + \lambda_2^7) + \mu_2(-\lambda_1^7 + 7\lambda_1^2\lambda_2^5).$$

Теперь на основании только что полученных формул (41)—(48)*) *мы должны явно выразить* Z_1, m_1 *и* n_1 *через* α, β, γ, ∇.

§ 7. Преобразования λ и μ; инвариантные формы

Теперь мы должны выяснить, как изменяются λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2 при перестановках y_ν. Однако эти изменения определяются неоднозначно. Из четырех величин λ, μ одна является зависимой, так же как это было при рассмотрении абсолютных значений y_ν. Мы видели выше, что при двух четных перестановках y_ν, обозначавшихся ранее буквами S и T, отношение λ_1/λ_2 испытывало икосаэдральные подстановки, обозначавшиеся теми же буквами, а μ_1/μ_2 преобразовывалось по формулам, которые получаются из формул для λ_1/λ_2 с помощью замены ε на ε^2. Мы отметили также, что при циклической перестановке (y_1, y_3, y_4, y_2) отношение λ_1/λ_2 переходит в μ_1/μ_2, а повторение этой операции переводит μ_1/μ_2 в $-\lambda_2/\lambda_1$. *Исходя из этих теорем, мы бы хотели теперь указать такие линейные однородные преобразования величин* λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 *с определителем* 1, *с помощью которых было бы удобно задавать необходимые перестановки посредством формул* (40). Для этого запишем сначала действие однородных икосаэдральных подстановок с определителем 1:

$$(49)\qquad S: \lambda_1' = \varepsilon^3\lambda_1, \quad \lambda_2' = \varepsilon^2\lambda_2, \quad \mu_1' = \varepsilon\mu_1, \quad \mu_2' = \varepsilon^4\mu_2;$$

$$(50)\qquad T: \begin{cases} \sqrt{5}\lambda_1' = -(\varepsilon-\varepsilon^4)\lambda_1 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\lambda_2, \\ \sqrt{5}\lambda_2' = (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\lambda_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\lambda_2, \\ \sqrt{5}\mu_1' = (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\mu_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\mu_2, \\ \sqrt{5}\mu_2' = (\varepsilon-\varepsilon^4)\mu_1 - (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\mu_2, \end{cases}$$

---

*) Для краткости мы опускаем выражения для ассоциированных с Z_1, m_1 и n_1 величин Z_2, m_2, n_2.

Для проверки приведенных формул для M_1 и N_1 достаточно лишь заметить, что определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial M_1}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial M_1}{\partial \mu_2} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \mu_2} \end{vmatrix}$$

попросту равен $H(\lambda_1, \lambda_2)$.

где формулы для μ опять получены из формул для λ путем замены ε на ε^2 *).

Сделав эти подстановки в формуле (40), мы и в самом деле получим

$$S\colon y'_\nu = y_{\nu+1};$$

$$T\colon y'_0 = y_0,\quad y'_1 = y_2,\quad y'_2 = y_1,\quad y'_3 = y_4,\quad y'_4 = y_3.$$

Конечно, группа перестановок y_ν, являющихся композициями S и T, будет лишь *полуизоморфна* группе соответствующих преобразований λ и μ, поскольку имеется 120 таких преобразований и только 60 перестановок y_ν. Это обстоятельство объясняется тем, что в множестве преобразований λ, μ имеется подстановка

$$\lambda'_1 = -\lambda_1,\quad \lambda'_2 = -\lambda_2,\quad \mu'_1 = -\mu_1,\quad \mu'_2 = -\mu_2,$$

которая не изменяет y_ν как билинейные функции λ, μ.

Введем преобразование

$$\mu'_1 = \lambda_1,\quad \mu'_2 = \lambda_2,\quad \lambda'_1 = \mu_2,\quad \lambda'_2 = -\mu_1, \tag{51}$$

которое для краткости будем называть *заменой λ на μ*. По формуле (40) ей соответствует

$$y'_\nu = y_{2\nu},$$

т. е. ранее использовавшаяся нечетная перестановка. Как и выше, повторное применение (51) дает

$$\lambda'_1 = \lambda_2,\quad \lambda'_2 = -\lambda_1,\quad \mu'_1 = \mu_2,\quad \mu'_2 = -\mu_1,$$

т. е. однородную икосаэдральную замену, обозначавшуюся нами буквой U.

Вместо симметрических и двузначных функций аргументов y_ν мы теперь всецело сосредоточим наше внимание на рациональных и, в частности, целых однородных функциях (формах) аргументов λ_1, λ_2, которые не изменяются при подстановках (49), (50) соответственно. В случае преобразований (49) и (50) такие формы будут называться просто *инвариантами*; если вдобавок они инвариантны и относительно (51), то мы будем говорить о *полных инвариантах*. Может случиться так, что инвариант всего лишь меняет знак при замене (51); тогда мы будем называть его *знакопеременным*. Если инвариант не является ни полным, ни знакопеременным

---

*) Здесь $\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$ — это не следует забывать при выборе знаков.

ным, то посредством (51) ему можно поставить в соответствие другой инвариант, причем это соответствие будет симметричным, поскольку двукратное применение (51) будет уже икосаэдральной подстановкой, а стало быть, вернет нас к исходному инварианту.

Ясно, что α, β и γ суть полные инварианты, а ∇ — знакопеременный инвариант. Использовавшиеся выше формы $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$, $T(\lambda_1, \lambda_2)$, M_1 и N_1 относятся к более общему типу. Первые три мы теперь будем обозначать f_1, H_1 и T_1, а формы, получающиеся заменой λ на μ, будут обозначаться f_2, H_2, T_2 и M_2, N_2.

§ 8. Общие замечания о предстоящих вычислениях

Задача, которую мы поставили в последнем утверждении из § 6, состояла в том, чтобы получить рациональное выражение некоторых *рациональных инвариантов* через α, β, γ и ∇. В этой связи возникает следующий вопрос: какие из целых инвариантных функций (форм) представляются целыми функциями аргументов α, β, γ, ∇? Очевидно, те и только те, которые будут целыми функциями аргументов y_ν, т. е. в точности те формы, которые имеют одинаковую степень по λ_1, λ_2 и по μ_1, μ_2, так как, с одной стороны, каждая целая функция y_ν задает целую функцию одинаковой степени по λ и μ, а с другой стороны — любая форма, имеющая одинаковую степень по λ и μ, может быть записана в виде целой функции величин $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$, $\lambda_2\mu_1$, $\lambda_1\mu_2$, а они, в свою очередь, с точностью до численного множителя совпадают с p_1, p_2, p_3, p_4 и, стало быть, являются целыми функциями y_ν *).

Исходя из этой теоремы, умножим числитель и знаменатель данного *рационального* инварианта, который мы хотим представить в виде рациональной функции величин α, β, γ, ∇, на подходящий множитель так, чтобы преобразовать его к виду, в котором и числитель и знаменатель, рассматриваемые отдельно, стали бы инвариантными формами одинаковой по λ и μ степени, а затем представим их как целые функции величин α, β, γ, ∇.

Что касается таковых целых функций, то следует заметить, что *каждая инвариантная форма, имеющая одинаковую степень по λ и μ, может быть разложена в сум-*

*) Ср. с аналогичным замечанием из заключительного параграфа прошлой главы.

му полного и знакопеременного инвариантов. В самом деле, пусть F_1 — такая форма, а F_2 — соответствующая ей форма, получающаяся заменой λ на μ. Тогда мы запишем просто

$$F_1 = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_1 - F_2}{2}, \tag{52}$$

где, очевидно, $\frac{F_1 + F_2}{2}$ суть полный инвариант, являющийся целой функцией величин α, β, γ, а $\frac{F_1 - F_2}{2}$ — знакопеременный инвариант, распадающийся в произведение ∇ и целой функции величин α, β, γ.

Эти несколько результатов позволяют преодолеть все трудности, возникающие при непосредственном вычислении величин m_1, n_1 и Z_1.

§ 9. Новое вычисление величины m_1

В наших новых обозначениях

$$m_1 = \frac{M_1}{12f_1}. \tag{53}$$

Сначала мы умножим здесь числитель и знаменатель на такую инвариантную форму, чтобы они имели одинаковую степень по λ и μ. Проще всего (хотя это и не единственно возможный путь) в качестве такого множителя выбрать f_2. Получим, таким образом,

$$m_1 = \frac{M_1 f_2}{12 f_1 f_2}. \tag{54}$$

Знаменатель в этой формуле будет полным инвариантом, а числитель мы разложим описанным выше способом. Получим

$$m_1 = \frac{(M_1 f_2 + M_2 f_1) + (M_1 f_2 - M_2 f_1)}{24 f_1 f_2}. \tag{55}$$

Таким образом, вычисление m_1 сводится к замене двух полных инвариантов $M_1 f_2 + M_2 f_1$, $f_1 f_2$, а также одного знакопеременного инварианта $M_1 f_2 - M_2 f_1$ надлежащими целыми функциями величин α, β, γ и α, β, γ, ∇ соответственно.

Для решения этой задачи мы сначала сравним степени по λ и μ у всех возникающих здесь форм, а затем обратимся к их явным выражениям, полученным нами в § 6. Рассматривавшиеся только что инварианты $M_1f_2+M_2f_1$ и т. д. имеют соответственно степени 13, 12 и 13 по λ и μ. С другой стороны, α, β, γ и ∇ имеют по этим же самым переменным степень 3, 4, 5 и 10 соответственно. Отсюда, во-первых, следует, что $M_1f_2+M_2f_1$ должно быть линейной комбинацией членов $\alpha^3\beta$, $\alpha\gamma^2$ и $\beta^2\gamma$; во-вторых, что f_1f_2 может быть лишь комбинацией членов α^4, β^3 и $\alpha\beta\gamma$; наконец, $M_1f_2-M_2f_1$ будет произведением $\alpha\nabla$ на числовой множитель. Для нахождения пока еще не определенных численных значений коэффициентов мы вместо каждой из форм подставим ее явное выражение через λ и μ, упорядочим члены по убыванию степеней λ_1 и возрастанию степеней λ_2, и после этого будет достаточно сравнить лишь несколько старших членов. Для полноты картины я приведу здесь выражения интересующих нас форм, правда, с учетом лишь тех нескольких первых членов, которые нам реально понадобятся. Как мы видели в § 6,

$$\begin{aligned}M_1f_2+M_2f_1 &= \lambda_1^{13}(\mu_1^{12}\mu_2+11\mu_1^7\mu_2^6-\mu_1^2\mu_2^{11})+\\&\quad+\lambda_1^{12}\lambda_2(-26\mu_1^{10}\mu_2^3+39\mu_1^5\mu_2^8+\mu_2^{13})+\ldots,\\ f_1f_2 &= \lambda_1^{11}\lambda_2(\mu_1^{11}\mu_2+11\mu_1^6\mu_2^6-\mu_1\mu_2^{11})+\ldots,\\ M_1f_2-M_2f_1 &= \lambda_1^{13}\mu_1^{12}\mu_2+\ldots;\end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned}\alpha^3\beta &= \lambda_1^{13}\mu_1^7\mu_2^6+\lambda_1^{12}\lambda_2(-\mu_1^{10}\mu_2^3+3\mu_1^5\mu_2^8)+\ldots,\\ \alpha\gamma^2 &= \lambda_1^{13}(2\mu_1^7\mu_2^6+2\mu_1^2\mu_2^{11})+\lambda_1^{12}\lambda_2(0)+\ldots,\\ \beta^2\gamma &= \lambda_1^{13}(\mu_1^{12}\mu_2+2\mu_1^7\mu_2^6+\mu_1^2\mu_2^{11})+\lambda_1^{12}\lambda_2(0)+\ldots,\\ \alpha^4 &= \lambda_1^{12}\mu_1^8\mu_2^4+4\lambda_1^{11}\lambda_2\mu_1^6\mu_2^6+\ldots,\\ \beta^3 &= -\lambda_1^{12}\mu_1^3\mu_2^9+3\lambda_1^{11}\lambda_2\mu_1^6\mu_2^6+\ldots,\end{aligned}$$

$$\alpha\beta\gamma = \\ =-\lambda_1^{12}(\mu_1^9\mu_2^3+\mu_1^3\mu_2^9)+\lambda_1^{11}\lambda_2(\mu_1^{11}\mu_2+10\mu_1^6\mu_2^6-\mu_1\mu_2^{11})+\ldots,$$

$$\alpha\nabla=-\lambda_1^{13}\mu_1^{12}\mu_2+\ldots$$

Сравнивая эти значения, немедленно получаем

$$\begin{aligned}&M_1f_2+M_2f_1=11\alpha^3\beta+2\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2,\\ &f_1f_2=\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma,\\ &M_1f_2-M_2f_1=-\alpha\nabla,\end{aligned}\tag{56}$$

а значит, окончательно

$$(57)\qquad m_1 = \frac{(11\alpha^3\beta + 2\beta^2\gamma - \alpha\gamma^2) - \alpha\nabla}{24(\alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma)},$$

т. е. в точности то же значение, что и в формуле (38).

Точно так же можно было бы, конечно, найти и значения n_1 и Z_1, только потребовались бы несколько более громоздкие вычисления, поскольку здесь мы сталкиваемся с выражениями более высокой степени по λ и μ; правда, можно было бы (как мы это уже делали в подобных ситуациях ранее) разбить вычисление на много мелких шагов (ср. с работой самого Гордана). Однако мы не будем здесь входить в детали этих вычислений, поскольку в § 5 уже были получены простые формулы для n_1 и Z_1, а существо вычислительного метода Гордана вполне проясняется на примере m_1.

§ 10. Геометрическая интерпретация теории Гордана

В предыдущих параграфах теория Гордана была представлена с чисто алгебраической точки зрения. Чтобы теснее связать ее с прочими нашими результатами, мы отметим здесь вкратце ее геометрические аспекты. Для этого следует интерпретировать отношения $\lambda_1 : \lambda_2$ и $\mu_1 : \mu_2$ как координаты на главной поверхности точно так же, как и в последнем параграфе предыдущей главы. Уравнение $F(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$ в этом случае будет определять кривую, лежащую на главной поверхности, число точек пересечения которой с прямолинейными образующими первого и второго типов равно степени F по μ и по λ соответственно. Если F является инвариантом, то эта кривая переходит в себя при действии 60 четных коллинеаций и, следовательно, является полурегулярной в случае, если она неприводима. Если при этом инвариант F полный или знакопеременный, то кривая будет регулярной.

Если мы интерпретируем таким образом инварианты, возникавшие в предыдущих параграфах, то получим кривые, смысл которых либо уже был нам известен, либо немедленно обнаруживается. Кривые $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ уже возникали у нас как кривые пересечения главной поверхности с диагональной поверхностью *). Условие

*) Сделанное ранее утверждение о том, что кривая $\alpha = 0$, т. е. кривая Бринга, не имеет простых двойных точек, а стало быть, неприводима и имеет род 4, теперь можно легко доказать с помощью представления α в виде (41).

$\nabla = 0$, очевидно, задает кривую, распадающуюся на десять плоских сечений. Условия $f_1 = 0$, $H_1 = 0$ и $T_1 = 0$ задают определенные конфигурации из 12, 20 и 30 образующих первого типа соответственно. Что за кривые задаются условиями $M_1 = 0$ и $N_1 = 0$? Сразу ясно, что *здесь мы имеем дело с теми самыми кривыми 14-й и 8-й степеней соответственно, которые представлялись ранее формулами типа*

$$\rho y_\nu = t_\nu(\lambda_1, \lambda_2) W_\nu(\lambda_1, \lambda_2), \tag{58}$$
$$\rho y_\nu = W_\nu(\lambda_1, \lambda_2).$$

В самом деле, мы вновь получим эти же уравнения, если выразим μ_1/μ_2 как рациональную функцию λ_1/λ_2 из соотношений $M_1 = 0$ и $N_1 = 0$ и подставим найденные значения в формулы (40):

$$y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2.$$

Точно так же уравнение

$$mT(\lambda_1, \lambda_2) N_1 + 12nf^2(\lambda_1, \lambda_2) M_1 = 0 \tag{59}$$

определяет то самое семейство кривых 38-й степени, которое рассматривалось в § 4 предыдущей главы (формула (27)).

Теперь можно вновь обратиться, в частности, и к вычислению m_1, проделанному в прошлом параграфе. Изначально мы имеем согласно (53)

$$m_1 = \frac{M_1}{12f_1},$$

т. е. m_1 является функцией на главной поверхности, имеющей нуль вдоль кривой 14-й степени $M_1 = 0$ и полюс вдоль 12 образующих первого типа, на которых $f_1 = 0$. Записывая, как и в (54),

$$m_1 = \frac{M_1 f_2}{12 f_1 f_2},$$

мы, очевидно, дополняем пару кривых $M_1 = 0$, $f_1 = 0$ кривой $f_2 = 0$, т. е. конфигурацией из 12 образующих второго типа, до полного пересечения главной поверхности с некоторой другой поверхностью, которую можно, в частности, взять такой, чтобы она оставалась на месте под действием 60 четных коллинеаций, т. е. задавалась условием обращения в нуль целой функции величин α, β, γ

и ∇. Таким образом, структура формулы (57) и многочисленных ее производных становится вполне понятной. Я оставляю читателям аналогичное истолкование формул (36) и (37) для n_1 и Z_1.

§ 11. Алгебраические аспекты (по Гордану)

Мы изложили теорию Гордана в том виде, в котором она первоначально появилась, т. е. как прямой метод вычисления величин, возникающих при решении уравнений пятой степени. Однако в своем всеобъемлющем трактате, опубликованном в 13-м томе Mathematische Annalen, г-н Гордан поставил перед собой более высокую цель, а именно выдвинул *задачу отыскания полной системы инвариантных форм и выяснения всех имеющихся между ними соотношений*. На этом пути он построил 36 различных систем форм, причем системы, не совпадающие с α, β, γ и ∇, связаны при помощи перестановок λ и μ. У нас нет возможности подробно разобрать здесь эти результаты, но мы должны остановиться на методах, которые г-н Гордан использовал для их вывода. Вспомним, как мы ранее получали формы $H(\lambda_1, \lambda_2)$ и $T(\lambda_1, \lambda_2)$ из формы $f(\lambda_1, \lambda_2)$ при помощи имеющегося в теории инвариантов процесса дифференцирования. Именно этим способом и получает г-н Гордан свои формы, исходя из «основной бибинарной формы от двух серий независимых переменных»

$$\alpha = -\lambda_1^3\mu_1^2\mu_2 - \lambda_1^2\lambda_2\mu_2^3 - \lambda_1\lambda_2^2\mu_1^3 + \lambda_2^3\mu_1\mu_2^2.$$

Выясним сначала, как этим способом можно получить основную икосаэдральную форму $f(\lambda_1, \lambda_2)$. Считая λ_1, λ_2 константами, рассмотрим α как бинарную форму третьего порядка от двух оставшихся переменных μ_1, μ_2. Я утверждаю тогда, что f *с точностью до численного множителя будет совпадать с дискриминантом этой формы третьего порядка*. Это проверяется непосредственным вычислением. В соответствии с общими правилами мы сначала должны вычислить гессиан α; при этом с точностью до множителя получится квадратичный по μ инвариант

$$(60)\quad \tau = \mu_1^2(-\lambda_1^6 - 3\lambda_1\lambda_2^5) + 10\mu_1\mu_2\lambda_1^3\lambda_2^3 + \mu_2^2(3\lambda_1^5\lambda_2 - \lambda_2^6),$$

который нам еще пригодится в последующем. Затем мы вычисляем определитель τ и с точностью до численного множителя действительно получаем

$$f=\lambda_1^{11}\lambda_2+11\lambda_1^6\lambda_2^6-\lambda_1\lambda_2^{11}.$$

Посмотрим теперь, как г-н Гордан получает формулы обращения, найденные нами — отчасти случайно — на основании результатов, установленных ранее в I, 4, § 12 при построении канонической резольвенты икосаэдрального уравнения. Отправным пунктом в методе Гордана служат инварианты, зависящие от μ_1 и μ_2 *линейно*. Гордан показал, что существуют четыре различных инварианта этого типа и два из них, имеющие наименьшие степени по λ, в точности равны нашим M_1 и N_1 *). Но по формулам (40) сами y_ν являются линейными по μ_1, μ_2 формами:

$$y_\nu=\varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1-\varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1+\varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2+\varepsilon\lambda_2\mu_2,$$

так что мы сразу можем написать

$$ay_\nu=b_\nu M_1+c_\nu N_1, \tag{61}$$

где коэффициенты a, b_ν и c_ν определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} y_\nu & M_1 & N_1 \\ \dfrac{\partial y_\nu}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial M_1}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial N_1}{\partial\mu_1} \\ \dfrac{\partial y_\nu}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial M_1}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial N_1}{\partial\mu_2} \end{vmatrix}=0.$$

Здесь a, являясь функциональным определителем M_1 и N_1, само является инвариантом; выше мы видели, что a совпадает с $H(\lambda_1, \lambda_2)$. С другой стороны, b_ν и c_ν, так же как и y_ν, обязаны быть пятизначными. Вычисляя их как функциональные определители y_ν и N_1 и y_ν и M_1 соответственно, мы получим в точности величины, обозначавшиеся нами ранее $W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)$ и $t_\nu(\lambda_1, \lambda_2)W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)$. На самом деле формула (61), переписанная в прежних обозначениях, приобретает вид

$$H(\lambda_1, \lambda_2)y_\nu=W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)M_1+t_\nu(\lambda_1, \lambda_2)W_\nu(\lambda_1, \lambda_2)N_1, \tag{62}$$

---

*) Один из этих четырех инвариантов, будучи умноженным на H_1, включается в семейство $mT_1N_1+12nf_1^2M_1$, которое и задает те самые кривые 38-й степени, рассматривавшиеся выше. Среди этих кривых помимо $M_1=0$ и $N_1=0$ имеется третья кривая, степень которой вырождается до меньшего числа, а именно до 18.

что равносильно формуле (46) выше. Метод, которым получил эту формулу Гордан, в представленной здесь форме является, можно сказать, обращением нашего способа. Дальнейшие вычисления в обоих подходах совпадают. Для того чтобы выразить y_ν через λ и другие известные величины, M_1 и N_1 в (62) заменяются выражениями

$$m_1 = \frac{M_1}{12f_1}, \quad n_1 = \frac{N_1T_1}{144f_1^3},$$

имеющими степень один по λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, которые затем выражаются как рациональные функции α, β, γ, ∇ в точности так же, как мы это видели на примере m_1 в § 9.

Отметим также и еще один указанный Горданом вариант формулы (62), который можно легко получить следующим образом. Так как y_ν являются билинейными формами по λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2, то для задания y_ν вполне допустимо считать λ_2 произвольным, поскольку отношение $\lambda_1 : \lambda_2$ можно найти из соответствующего икосаэдрального уравнения, а кроме него и λ_2 для задания y_ν нужно знать еще только μ_1 и μ_2. Последние *можно найти из линейных по* μ_1, μ_2 *инвариантов* M_1 *и* N_1, *если представить их в виде рациональных функций величин* λ_1, λ_2 *и* α, β, γ, ∇. В самом деле, при этом получатся два линейных уравнения относительно μ_1, μ_2. Если решить их относительно μ_1 и μ_2 и подставить найденные значения в формулу для y_ν, то вновь получим тот же результат, что и раньше, который коротко записывается в виде формулы (62).

Все это можно сформулировать иначе следующим образом. Полагая $M_1 = 0$, мы задаем на многообразии однородных пар $\mu_1 : \mu_2$ элемент, *контраградиентный* к $\lambda_1 : \lambda_2$, или — выражаясь более общими терминами — *ковариантный* к $\lambda_1 : \lambda_2$ элемент. Аналогично, полагая $N_1 = 0$, мы получаем второй такой элемент. Наша задача состоит в том, чтобы на многообразии $\mu_1 : \mu_2$ найти элемент, заданный условием $y_\nu = 0$. Она решается формулой (62), выражающей y_ν в виде линейной комбинации двух наших ковариантных элементов M_1 и N_1, что соответствует той самой «теореме о типичном представлении», которая применялась выше при обсуждении преобразования Чирнгауза.

Сформулированный здесь метод рассуждений еще появится в более общем виде чуть позже.

§ 12. Нормальное уравнение относительно r_ν

Выше, во время общего обзора разнообразных подходов к решению уравнений пятой степени, мы различали *метод построения резольвент* и *преобразование Чирнгауза*, заметив, однако, что всегда можно перейти от одного из этих способов к другому. Решая главное уравнение пятой степени непосредственным сведением его к икосаэдральному уравнению, мы следовали методу построения резольвент. Если вместо этого мы хотим воспользоваться преобразованием Чирнгауза, то в качестве *нормального уравнения*, из которого мы исходим, следует взять одну из резольвент пятой степени, построенных нами для икосаэдрального уравнения в 1, 4.

В этом смысле наиболее приспособленной для наших целей представляется r-резольвента, полученная в I, 4, § 9, которую мы записывали в виде

$$(63)\qquad Z:(Z-1):1=(r-3)^3(r^2-11r+64): \\ :r(r^2-10r+45)^2-1728.$$

В самом деле, в I, 4, § 13 мы уже выразили u_ν и v_ν в виде рациональных функций r_ν:

$$u_\nu=\frac{12}{r_\nu^2-10r_\nu+45},\quad v_\nu=\frac{12}{r_\nu-3}.$$

Подставляя эти значения в нашу формулу

$$y_\nu=m_1v_\nu+n_1u_\nu v_\nu,$$

мы немедленно получаем выражение y_ν через корни нормального уравнения (63):

$$(64)\qquad y_\nu=\frac{12(r_\nu-3)m_1+144n_1}{(r_\nu-3)(r_\nu^2-10r_\nu+45)}.$$

Осталось лишь выяснить, как $r_\nu=\dfrac{t_\nu^2(\lambda_1,\lambda_2)}{f(\lambda_1,\lambda_2)}$ выражается через y_ν. Так же как и при вычислении m_1 в § 9, мы приведем здесь только часть выкладок. Пусть для краткости $t_\nu(\lambda_1,\lambda_2)=t_{\nu,1}$, $t_\nu(\mu_1,\mu_2)=t_{\nu,2}$. Тогда мы можем написать

$$r_\nu=\frac{t_{\nu,1}^2f_2}{f_1f_2}=\frac{(t_{\nu,1}^2f_2+t_{\nu,2}^2f_1)+(t_{\nu,1}^2f_2-t_{\nu,2}^2f_1)}{2f_1f_2}.$$

Здесь, как мы знаем, $f_1f_2=\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma$. Совершенно аналогичным образом, с помощью явных выражений через λ и μ, мы можем найти и оба слагаемых в числителе. Предположим на время, что вместо λ и μ подставлены их выражения через y_ν; тогда *оба этих слагаемых будут целыми функциями* y_ν, *не изменяющимися соответственно при всех и только при четных перестановках тех четырех* y_ν, *индексы которых отличаются от индекса, фиксированного нами в левой части.* Суммы степеней этих четырех y_ν будут целыми функциями величин y_ν, α, β, γ, а их произведение разностей будет равно $\frac{5\nabla}{y_\nu^4+2\alpha y_\nu+\beta}$, где $y_\nu^4+2\alpha y_\nu+\beta$ суть производная (Differentialquotient) левой части исследуемого нами главного уравнения, деленная на 5. *Следовательно,* $t_{\nu,1}^2 f_2 + t_{\nu,2}^2 f_1$ *будет целой функцией величин* y_ν, α, β, γ, а $t_{\nu,1}^2 f_2 - t_{\nu,2}^2 f_1$ *будет произведением такой целой функции на величину* $\frac{\nabla}{y_\nu^4+2\alpha y_\nu+\beta}$. Я не вижу необходимости разбирать детали дальнейших вычислений*), и поэтому приведу только окончательный ответ:

$$
\begin{aligned}
(65)\qquad 2(\alpha^4-\beta^3+\alpha\beta\gamma)r_\nu = \{&(\alpha\gamma+2\beta^2)y_\nu^4+(\alpha^3-\beta\gamma)y_\nu^3 - \\
&-5\alpha^2\beta y_\nu^2+(4\alpha^2\gamma+13\alpha\beta^2)y_\nu+(11\alpha^4+9\alpha\beta\gamma)\} - \\
&-(\alpha y_\nu^3+\beta y_\nu^2+\alpha^2)\frac{\nabla}{y_\nu^4+2\alpha\cdot y_\nu+\beta}.
\end{aligned}
$$

Собирая все вместе, мы получаем следующий результат: *формула* (65) *задает преобразование Чирнгауза, переводящее данное главное уравнение* (1) *в нормальное уравнение* (63), *и если мы умеем решать последнее, то формулы* (64) *дают нам точные выражения для искомых* y_ν.

§ 13. Преобразование Бринга

Столь подробные формулы предыдущего параграфа были приведены мною потому, что из них — как я сейчас покажу — можно извлечь все необходимое для осуществления преобразования Бринга**). Пусть y_0, y_1, y_2, y_3, y_4; $y_0', y_1', y_2', y_3', y_4'$ — координаты двух точек главной поверхности, находящихся на одной образующей первого типа. Тогда мы знаем Z и r_ν***), совпадающие у соответ-

*) См. Math. Ann.— Bd 12.— S. 556.

**) Аналогичные формулы есть в статье: Gordan // Math. Ann.— Bd 13.— S. 400.

***) Вернее, Z_1 и $r_{\nu,1}$, как мы писали в предыдущем параграфе.

ствующих этим точкам канонических уравнений, а для того чтобы различать прочие величины, которые здесь возникают, мы будем помечать их штрихом: α', β', γ', ∇', m_1', n_1' в случае второго уравнения, и писать просто α, β, γ, ∇, m_1, n_1 в случае первого. Я утверждаю теперь, что *для преобразования одного из наших уравнений в другое достаточно дважды воспользоваться формулами* (64) *и* (65). Будем для краткости писать (64′) и (65′) для обозначения формул (64) и (65) в случае штрихованных переменных. Тогда цепочка необходимых здесь преобразований заключается, очевидно, в следующем. Сначала r_ν выражается по формуле (65) через y_ν, а y_ν' выражается по формуле (64′) через r_ν — это и дает искомое преобразование; затем, наоборот, с помощью (65′) мы найдем r_ν как функцию y_ν' а y_ν — по формулам (64) — как функцию r_ν.

Теория Бринга есть частный случай описанного только что общего метода. Прямолинейная образующая первого типа, проходящая через данную точку y, пересекает кривую $\alpha = 0$ в трех точках, и, выбирая одну из этих точек в качестве y', мы и получим преобразование Бринга. Аналитически это проявляется в том, что мы должны подобрать такие m_1' и n_1', чтобы в каноническом уравнении, соответствующем y', исчез член, содержащий y'^2. Взглянув на общую каноническую резольвенту (I, 4, § 12), мы сразу же получим кубическое уравнение относительно m_1' и n_1' — то самое вспомогательное кубическое уравнение, которое требовалось в теории Бринга:

$$8m^3 + 12m^2 n + \frac{6mn^2 + n^3}{1 - Z} = 0. \tag{66}$$

Было заранее ясно, что это уравнение зависит не от выбора отдельной точки y, а лишь от выбора образующей первого типа, на которой лежат эта точка и 60 образующих, получающихся из нее при помощи четных коллинеаций. На этом исчерпывается материал, относящийся к теории Бринга. Разве что стоит отметить, что в случае $\alpha = 0$ формула (65) выводится крайне просто *). Полез-

*) Подобно тому как преобразование Бринга осуществляется при помощи кубического уравнения (66), эта задача решается с помощью уравнения четвертой степени: по данному каноническому уравнению надо построить другое с $\beta' = 0$. На эту задачу впервые обратил внимание, кажется, Джерард (J e r a r d // Math. Res.— 1834.).

но еще обратить внимание и на тот факт, что квадратный корень из дискриминанта трехчленного уравнения, которое получается после преобразования Чирнгауза, нам уже известен.

§ 14. Нормальное уравнение Эрмита

Теперь, после того как мы получили столь простое доказательство теории Бринга, попробуем проделать то же самое для той нормальной формы, которая была положена в основу решения уравнения пятой степени в эллиптических функциях Эрмитом. Она, как мы видели в II, 1, § 4, имеет следующий вид:

$$(67)\quad Y^5-2^4\cdot 5^3u^4(1-u^8)^2Y-2^6\cdot\sqrt{5^5}u^3(1-u^8)^2(1+u^8)=0$$

где $u^8=k^2$. Возникает вопрос, является ли это уравнение специальным случаем общей канонической резольвенты пятой степени для икосаэдрального уравнения, который возникает, если в его правой части положить Z равным

$$(68)\qquad \frac{g_2^3}{\Delta}=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$

точно так же, как это делалось в I, 5, § 7 при решении икосаэдрального уравнения в модулярных эллиптических функциях; интересно также, почему Эрмит положил в основу своих исследований именно форму Бринга — ведь любое главное уравнение пятой степени можно решить в эллиптических функциях (с привлечением икосаэдрального уравнения), и в этом смысле форма Бринга ничем не лучше бесчисленного множества прочих канонических уравнений с одним параметром.

Для ответа на эти вопросы мы подставим в (66) вместо Z задаваемую формулой (68) функцию величины k^2. В результате *кубическое уравнение* (66) *получится приводимым*. Это немедленно проверяется подстановкой

$$m:n=3k^2:2\cdot(2-5k^2+2k^4).$$

В соответствии с этим положим

$$(69)\quad m=3k^2(1+k^2),\quad n=2(1+k^2)(2-5k^2+2k^4).$$

После сокращений, которые произойдут при вычислении коэффициентов канонической резольвенты из I, 4, § 12, мы получим уравнение

$$(70)\quad y^5 - 2^4\cdot 3^8\cdot 5k^{10}(1-k^2)^2 y - \\ - 2^6\cdot 3^{10}k^{12}(1-k^2)^2(1+k^2) = 0.$$

Чтобы получить в точности уравнение Эрмита, надо еще сделать подстановку

$$(71)\qquad y = \frac{\sqrt{5}}{9k^{9/4}}Y.$$

Таким образом, первый из наших вопросов получает утвердительный ответ. Что же касается второго вопроса, то разгадка здесь кроется в том, что Эрмит *пользовался лишь инвариантом k^2, не применяя инвариантов g_2 и g_3.* Если мы сейчас найдем Z_1, которое соответствует уравнению Эрмита, или, что то же самое, уравнению (70), то после выбора подходящего знака у ∇ *) мы вернемся обратно к величине g_2^3/Δ. Но и значение Z_2 тоже вычисляется крайне просто. Изменив знак у ∇ в формуле для Z_1, получим

$$(72)\qquad Z_2 = \frac{(1+14k^2+k^4)^3}{108k^2(1-k^2)^4}\ ^{**)}.$$

Как доказывается в теории эллиптических функций, написанное значение есть одно из трех значений, получающихся для g_2^3/Δ при преобразовании второй степени эллиптического интеграла. К сожалению, мы не в состоянии достаточно глубоко проследить возникающую здесь связь кривой Бринга и преобразованиями второй степени эллиптических функций ***).

Удовлетворившись тем, что к доказанным нами теоремам прибавились формулы Эрмита и Бринга, мы прервем на этом наши исследования главных уравнений. В пятой главе мы еще вернемся к обсуждавшимся здесь результатам и попытаемся выяснить их теоретическое значение с более общей точки зрения.

---

*) Для (70) следует взять

$$\nabla = 2^{12}\cdot 3^{20}k^{24}(1-k^2)^4(1-6k^2+k^4).$$

**) См. только что цитированную работу Гордана или мое сообщение (тоже уже упоминавшееся) в Rendiconti des Istituto Lombardo (26. April 1877).

***) См. мой мемуар: Ueber die Transformationen der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades // Math. Ann.— 1878.— Bd 14, в особенности с. 166 и далее.

ГЛАВА IV

ПРОБЛЕМА ФОРМ ДЛЯ A_i И ЯКОБИЕВЫ УРАВНЕНИЯ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Объект предстоящих исследований

В предыдущей главе рассматривались две бинарные переменные λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2, испытавшие одновременные икосаэдральные преобразования и преобразование, которое мы называли заменой λ на μ. Нами были исследованы определенные билинейные формы от λ и μ, обозначавшиеся y_ν. При описанных преобразованиях переменных λ, μ формы y_ν сами подвергались линейным преобразованиям простейшего вида, а именно перестановкам, т. е. вся совокупность y_ν испытывала некоторые перестановки. Постановка соответствующей *проблемы форм для* величин y_ν приводит нас к уравнению, которому должны удовлетворять y_ν, т. е. к *главному уравнению*. Поэтому с этой точки зрения можно сказать, что *в предыдущей главе мы занимались проблемой форм, возникающей при рассмотрении одновременных замен λ и μ.*

В этой главе мы будем иметь дело с совершенно аналогичной задачей, причем более простого характера, чем предыдущая. Ранее одновременные преобразования λ и μ были, как мы говорили, *контраградиентными*. Теперь же мы будем рассматривать *две пары переменных*

$$\lambda_1, \lambda_2; \quad \lambda_1'\lambda_2',$$

которые будут испытывать одновременные, причем всегда одинаковые, икосаэдральные преобразования. Таким образом, эти переменные можно называть *коградиентными.* Из них мы вновь образуем определенные билинейные формы, а именно симметрические функции

$$(1) \qquad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_2\lambda_1'), \ \mathbf{A}_1 = \lambda_2\lambda_2', \ \mathbf{A}_2 = -\lambda_1\lambda_1',$$

являющиеся коэффициентами квадратичной формы

(2) $$A_1 z_1^2 + 2A_0 z_1 z_2 - A_2 z_2^2,$$

которая возникает как произведение двух множителей $\lambda_2 z_1 - \lambda_1 z_2$ и $\lambda_2' z_1 - \lambda_1' z_2$. Если применить к λ и λ' 120 однородных икосаэдральных подстановок либо поменять их местами, то A_i испытают действие 60 тернарных линейных преобразований, поскольку ни одно из A_i не изменяется как при перестановке λ и λ', так и при одновременном изменении знака у λ_1, λ_2, λ_1', λ_2' *). Таким образом, *мы будем заниматься тернарной проблемой форм, возникающей для описанных выше преобразований.*

Проблема форм для A_i, как уже говорилось, существенно проще *проблемы форм для* y_ν. В самом деле, все необходимые здесь рассуждения и вычисления можно проделать для обычной икосаэдральной проблемы форм (с одной парой переменных), а из них получить нужные нам результаты с помощью определенного *принципа переноса*, хорошо известного в современной алгебре **). Поэтому решение нашей задачи оказывается почти что упражнением в умении применять некоторые фундаментальные теоремы *теории инвариантов*. По этой же схеме мы могли бы разобрать случаи и 3, и 4 пар переменных, подвергаемых икосаэдральным подстановкам или действию любой другой группы когредиентных преобразований. Из возникающего таким образом бесконечного количества *проблем форм* мы выбрали одну нашу лишь только потому, что намерены использовать ее в дальнейшем для решения уравнений пятой степени. Мы вскоре обнаружим, что *общие уравнения Якоби шестой степени, лежащие в основе кронекеровской теории уравнений пятой степени, являются резольвентами проблемы форм для* A_i. Поэтому, рассматривая вместо якобиевых уравнений проблему форм для A_i, мы получаем простейший путь к тому, чтобы, исходя из наших принципов, объяснить многочисленные результаты, доказанные различными способами для уравнений Якоби шестой степени, а значит, и к тому, чтобы выработать единый общий взгляд на

---

*) Следовательно, группа преобразований A_i просто изоморфна группе 60 обычных (неоднородных) икосаэдральных подстановок.

**) Принцип переноса, о котором здесь идет речь,— это в точности тот принцип, изложению которого посвящен мемуар Гессе (Hesse // Crelle's J.— 1866.— Bd 66).

уравнение пятой степени, основа которого есть не что иное, как рациональная теория икосаэдра *).

Сказанным выше и определяется порядок дальнейшего изложения. Прежде всего мы дадим точную постановку проблемы форм для A_i (при этом мы вновь будем свободно пользоваться геометрической интерпретацией). Изучая далее соответствующие резольвенты, мы перейдем к уравнениям Якоби шестой степени и, в частности, к исследованиям Бриоски и Кронекера. Конец главы я посвящу решению нашей проблемы форм и покажу, что она после присоединения одного побочного квадратного корня сводится к икосаэдральному уравнению, что вполне аналогично изложенной в прошлой главе теории Гордана **).

§ 2. Преобразования величин A_i; инвариантные формы

Для того чтобы выяснить, как преобразуются наши A_i, мы вновь обратимся к образующим S, T, U группы икосаэдральных подстановок. Для λ_1 и λ_2 у нас есть формулы

$$(3)\qquad \begin{aligned} &S\colon\ \lambda_1' = \pm\varepsilon^3\lambda_1, \quad \lambda_2' = \pm\varepsilon^2\lambda_2;\\ &T\colon \begin{cases} \sqrt{5}\lambda_1' = \mp(\varepsilon-\varepsilon^4)\lambda_1 \pm (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\lambda_2,\\ \sqrt{5}\lambda_2' = \pm(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\lambda_1 \pm (\varepsilon-\varepsilon^4)\lambda_2; \end{cases}\\ &U\colon\ \lambda_1' = \pm\lambda_2,\ \lambda_2' = \pm\lambda_1. \end{aligned}$$

Выписав точно такие же формулы и для λ_1', λ_2' ***), мы

*) Обсуждавшиеся выше (II, 1, § 3) общие уравнения $(n+1)$-й степени точно так же, как и уравнения Якоби шестой степени, могут быть заменены соответствующими проблемами форм для $\frac{n+1}{2}$ переменных $A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$. Для случая $n = 7$ я проделал это в Math. Ann.— 1877.— Bd 17, см., в частности, с. 268—275.

**) Основные моменты предстоящего изложения присутствовали в моем сообщении Эрлангенскому Обществу 18 ноября 1876 г. («Weitere Untersuchungen über das Icosaeder, I»), кроме того см. вторую часть моего мемуара, изданного под тем же названием в Math. Ann.— 1877.— Bd 12. Здесь к ним добавятся прежде всего результаты § 8—13.

***) Я надеюсь, что путаницы здесь не возникнет. Буквы λ_1' и λ_2', которые были использованы выше в левой части формул (3), конечно же, имели совершенно иной смысл.

получим следующие формулы для замен $\mathbf{A}_i$:

$$S\colon\ \mathbf{A}_0' = \mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}_1' = \varepsilon^4\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2' = \varepsilon\mathbf{A}_2;$$

$$(4)\qquad T\colon \begin{cases} \sqrt{5}\mathbf{A}_0' = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \\ \sqrt{5}\mathbf{A}_1' = 2\mathbf{A}_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\mathbf{A}_1 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\mathbf{A}_2, \\ \sqrt{5}\mathbf{A}_2' = 2\mathbf{A}_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\mathbf{A}_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\mathbf{A}_2; \end{cases}$$

$$U\colon\ \mathbf{A}_0' = -\mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}_1' = -\mathbf{A}_2,\ \mathbf{A}_2' = -\mathbf{A}_1.$$

Все эти преобразования, как и в (3), имеют определитель $+1$, а вся совокупность из 60 подстановок получается из них по старой схеме (I, 1, § 12):

$$(5)\qquad S^\mu,\ S^\mu T S^\nu,\ S^\mu U,\ S^\mu T S^\nu U,$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Что касается инвариантных форм (т. е. целых однородных функций $\mathbf{A}_i$, остающихся неизменными при заменах (5)), то к ним в первую очередь относится определитель формы (2):

$$(6)\qquad A = \mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2.$$

В самом деле, его выражение через λ, λ' имеет вид $\lambda_1; (\lambda_2' - \lambda_2); \lambda_1')^2$ и, стало быть, он остается инвариантным при любых одновременных однородных преобразованиях λ и λ' с определителем 1. Я утверждаю, что *кроме формы A искомая нами полная система инвариантных форм содержит еще ровно три формы, степени которых равны* 6, 10 *и* 15 *соответственно*. А именно, если $A = 0$, то $\lambda_1' = M\lambda_1$ и $\lambda_2' = M\lambda_2$, где M — произвольное число, и из (1) следует

$$(7)\qquad \mathbf{A}_0 = -M\lambda_1\lambda_2,\quad \mathbf{A}_1 = M\lambda_2^2,\quad \mathbf{A}_2 = -M\lambda_2^2,$$

а искомые нами формы превращаются в формы, пропорциональные формам только лишь от λ_1, λ_2, степень которых по λ вдвое больше степени исходных форм по $\mathbf{A}$ и которые, помимо всего прочего, преобразуются в себя при икосаэдральных заменах λ. Но вся совокупность таких икосаэдральных форм порождается формой 12-й степени $f(\lambda_1, \lambda_2)$, формой 20-й степени $H(\lambda_1, \lambda_2)$ и формой 30-й степени $T(\lambda_1, \lambda_2)$. Обращая эти формы, мы и получим наше утверждение. Более того, можно сказать, что между искомыми формами будет существовать единственное соотношение, соответствующее уравнению

$$T^2 = 1728f^5 - H^3 \tag{8}$$

и превращающееся в (8), если положить $A = 0$.

Я обозначу три искомые нами формы соответственно буквами B, C и D. Доказывая их существование с помощью икосаэдральных форм f, H и T, мы уже применим тот самый *алгебраический принцип переноса*, о котором говорилось выше. Сейчас мы используем его более существенным образом для получения некоторых предварительных выражений для B, C и D. Речь здесь идет о *процессе поляризации* в определенном, приспособленном для наших нужд, виде. Если $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ — произвольная форма, не изменяющаяся при икосаэдральных заменах λ_1, λ_2, а λ_1', λ_2' — коградиентные к λ_1, λ_2 переменные, то все поляризации

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\lambda_1' + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\lambda_2',$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1^2}\lambda_1'^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\lambda_1'\lambda_2' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_2^2}\lambda_2'^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

будут инвариантны по отношению к одновременным заменам λ и λ'. Образуем, в частности, *поляризации шестого, десятого и пятнадцатого порядков для форм* $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$ *и* $T(\lambda_1, \lambda_2)$ *соответственно*. Получающиеся при этом инвариантные формы будут симметричны по λ, λ', а значит, будут представляться целыми функциями A_0, A_1, A_2. Записывая их в таком виде, мы и получим искомые выражения для B, C и D. Действительно, эти формы будут инвариантны относительно подстановок (4) и (5) и будут иметь степени 6, 10 и 15 по A; кроме того, при выполнении соотношений (7) они превратятся в формы, пропорциональные формам $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$ и $T(\lambda_1, \lambda_2)$ соответственно. Я приведу здесь сразу конечные результаты вычислений. С точностью до общего численного множителя получим

$$B' = 16\mathrm{A}_0^6 - 120\mathrm{A}_0^4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + 90\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2^2 + \\ + 21\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_1^5 + \mathrm{A}_2^5) - 5\mathrm{A}_1^3\mathrm{A}_2^3,$$

$$C' = -512\mathrm{A}_0^{10} + 11520\mathrm{A}_0^8\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 - 40320\mathrm{A}_0^6\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2^2 + \\ + 33600\mathrm{A}_0^4\mathrm{A}_1^3\mathrm{A}_2^3 - 6300\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1^4\mathrm{A}_2^4 - 187(\mathrm{A}_1^{10} + \mathrm{A}_2^{10}) +$$

$$+126A_1^5A_2^5+A_0(A_1^5+A_2^5)(22176A_0^4-18480A_0^2A_1A_2+ \\ +1980A_1^2A_2^2),$$

$$D=(A_1^5-A_2^5)(-1024A_0^{10}+3840A_0^8A_1A_2-3840A_0^6A_1^2A_2^2+ \\ +1200A_0^4A_1^3A_2^3-100A_0^2A_1^4A_2^4+A_0(A_1^5+A_2^5)\times \\ \times(352A_0^4-160A_0^2A_1A_2+10A_1^2A_2^2)+2A_1^5A_2^5+A_1^{10}+A_2^{10}).$$

Первые две формы потому обозначены здесь мною B', C' (а не B и C), что в дальнейшем я модифицирую их, добавив слагаемые, содержащие в качестве множителя A, поскольку только после этого я сумею установить соотношение, выражающее D^2 в виде целой функции A, B и C. Накладывая условия (7) и взяв для простоты $M=1$, мы в полном согласии с вышесказанным получим для наших форм

$$(10)\quad B'=21f(\lambda_1,\lambda_2),\quad C'=187H(\lambda_1,\lambda_2), \\ D=T(\lambda_1,\lambda_2)\text{*)}.$$

§ 3. Геометрическая интерпретация и нормировка инвариантных выражений

Теперь для прояснения дальнейшего изложения и привлечения более глубоких идей из области теории функций мы обратимся к геометрической интерпретации. Действуя по аналогии с предыдущей главой, мы интерпретируем $A_0:A_1:A_2$ как проективные координаты точки на плоскости, а их преобразования — как плоские коллинеации **). Каждая инвариантная форма от A,

---

*) В учебниках по теории инвариантов приведенный здесь нами метод вычислений называется (по предложению г-на Гордана) *трансвекцией квадратичных форм* (2). Действительно, с точностью до численного множителя B', C' и D будут соответственно 6-*м*, 10-*м* и 15-*м трансвектантами форм* (2) *над* f, H *и* T. Я не придерживался здесь такой терминологии и символики только потому, что не хотел требовать от читателя специальных знаний по этому предмету.

**) Конечно, таким же образом можно рассматривать и любую другую *проблему форм*. В предыдущей части мы лишь потому поступили иначе (интерпретируя бинарную проблему форм с помощью точек $(x+iy)$-сферы), что *интуитивно* хотели иметь перед глазами элементарный геометрический образ не только действительных, но и комплексных значений переменных.

Поэтому я добавлю здесь и другую интерпретацию *проблемы форм для* A_i. Пусть $A_0=z$, $A_1=x+iy$, $A_2=x-iy$, где x, y, z

будучи приравненной нулю, задает плоскую кривую, переходящую в себя при таких коллинеациях. Таким образом, прежде всего имеем конику $A=0$, которую назовем *фундаментальной коникой*. Если в соответствии с формулой (7) (положив $M=1$) написать

$$\mathbf{A}_0 = -\lambda_1\lambda_2, \quad \mathbf{A}_1 = \lambda_2^2, \quad \mathbf{A}_2 = -\lambda_1^2,$$

то получится выражение точки, проходящей эту конику, через параметр λ_1/λ_2. Следовательно, пара параметров λ_1/λ_2 и λ'_1/λ'_2 изображается парой переменных точек на фундаментальной конике. *Это в точности те две точки, через которые проходят две касательные к фундаментальной конике, проведенные из точки* **A**. Действительно, поляра точки **A** относительно коники $A=0$ задается уравнением

$$2\mathbf{A}_0\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}'_2 = 0,$$

которое будет удовлетворено, если вместо **A** подставить выражение (1), а вместо $\mathbf{A}'$ — выражение (7), в котором λ следует заменить на λ'.

На фундаментальной конике естественно выделены конфигурации из 12, 20 и 30 сопряженных точек, задаваемые уравнениями $f(\lambda_1, \lambda_2)=0$, $H(\lambda_1, \lambda_2)=0$ и $T(\lambda_1, \lambda_2)=0$ соответственно, иными словами, это точки пересечения фундаментальной квадрики с инвариантными кривыми $B=0$, $C=0$ и $D=0$. Теперь соединим прямыми неподвижные пары точек наших коллинеаций. Для форм f, H, T мы получим при этом соответственно 6, 10 и 15 прямых линий. Построив для каждой из этих прямых ее полюс относительно фундаментальной коники,

---

рассматриваются как пространственные прямоугольные координаты точки, лежащей на сфере. Поскольку A теперь равно $x^2+y^2+z^2$ и 60 преобразований $\mathbf{A}_i$ имеют единичный определитель, мы видим, что эти преобразования задаются *вращениями сферы относительно начала координат*. Такие вращения обязаны быть самосовмещениями определенного икосаэдра. Шесть *фундаментальных точек* (которые вскорости будут введены в нашем тексте) при такой интерпретации соответствуют шести диаметрам, соединяющим пары противоположных вершин этого икосаэдра, а уравнение $D=0$ (про которое мы скоро докажем, что оно распадается на 15 линейных компонент) задает 15 плоскостей симметрии нашей конфигурации.

Эту новую интерпретацию можно было бы скомбинировать с аналогичным представлением λ и λ' как точек сферы, но я не буду входить в это, поскольку подробности завели бы нас слишком далеко.

мы получим на плоскости еще три самосопряженные конфигурации из 6, 10 и 15 точек.

Рассмотрим теперь уравнение

$$A = A_0^2 + A_1A_2 = 0.$$

Ясно, что две точки, являющиеся пересечениями координатных прямых $A_0 = A_1 = 0$ и $A_0 = A_2 = 0$, удовлетворяют этому уравнению и, кроме того, являются нулями формы f и остаются на месте при коллинеации S (см. формулы (4)). Поэтому $A_0 = 0$ — одна из шести прямых, соответствующих форме f, а точка $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ — ее полюс. Согласно сказанному при 60 коллинеациях A_0 может принимать только 12 значений, задаваемых формулами

$$(11) \qquad \pm A_0, \ \pm(A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2)$$

при различных выборах знака. А в соответствии с этими формулами лишь следующие пять точек могут быть объединены с точкой $A_1 = A_2 = 0$ в одну группу из шести точек:

$$(12) \qquad A_0 : A_1 : A_2 = 1 : 2\varepsilon^{4\nu} : 2\varepsilon^\nu.$$

Построенные таким образом точки я буду называть *фундаментальными точками плоскости.* Соединяя первую из этих точек с пятью оставшимися, мы получим пять прямых

$$\varepsilon^\nu A_1 - \varepsilon^{4\nu} A_2 = 0.$$

Левые части этих уравнений очевидным образом входят в качестве множителей в полученное выше выражение для D. Но кривая $D = 0$ инвариантна отнсительно перестановок фундаментальных точек. *Поэтому кривая* $D = 0$ *распадается на* 15 *прямых, соединяющих всевозможные пары фундаментальных точек.* Легко проверить, что этому соответствует такое алгебраическое разложение:

$$D = \prod_\nu (\varepsilon^\nu A_1 - \varepsilon^{4\nu} A_2) \prod_\nu \left((1+\sqrt{5}) A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2\right) \times$$
$$\times \prod_\nu \left((1-\sqrt{5}) A_0 + \varepsilon^{4\nu} A_1 + \varepsilon^\nu A_2\right)$$
$$(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Можно было бы доказать много изящных теорем об этих пятнадцати прямых; эти прямые соединяют пары точек, соответствующие форме T; они пересекаются по три в тех 10 точках, которые были построены по парам, соответствующим форме H, и т. д.*). Я не буду здесь заниматься этими теоремами более подробно, поскольку в дальнейшем не буду ими пользоваться; кроме того, в них легко усмотреть геометрические свойства соответствующих точечных конфигураций, связанных с икосаэдром.

Что касается кривых $B' = 0$ и $C' = 0$, то между ними и шестью фундаментальными точками нет никаких выделенных соотношений. *Этим обстоятельством мы и воспользуемся при замене B' и C' другими выражениями.* Вместо B' мы введем такую линейную комбинацию B' и A^3, чтобы кривая $B = 0$ проходила через фундаментальную точку $\mathrm{A}_1 = 0$, $\mathrm{A}_2 = 0$, а стало быть — как инвариантная кривая — и через все остальные фундаментальные точки. Точно так же вместо C' мы введем такую линейную комбинацию C', A^2B и A^5, чтобы условие $C = 0$ задавало кривую, для которой точка $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = 0$ (а значит, и все остальные фундаментальные точки) была особой точкой максимально возможного порядка. В результате, сокращая общие численные множители, получим

$$
(14)\quad \begin{cases}
B = \dfrac{-B' + 16A^3}{21} = 8\mathrm{A}_0^4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 - 2\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_1^3\mathrm{A}_2^3 - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \mathrm{A}_0(\mathrm{A}_1^5 + \mathrm{A}_2^5), \\
C = \dfrac{-C' - 512A^5 + 1760A^2B}{187} = \\
= 320\mathrm{A}_0^6\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2^2 - 160\mathrm{A}_0^4\mathrm{A}_1^3\mathrm{A}_2^3 + 20\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1^4\mathrm{A}_2^4 + 6\mathrm{A}_1^5\mathrm{A}_2^5 + \mathrm{A}_1^{10} + \\
\qquad + \mathrm{A}_2^{10} - 4\mathrm{A}_0(\mathrm{A}_1^5 + \mathrm{A}_2^5)(32\mathrm{A}_0^4 - 20\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + 5\mathrm{A}_1^2\mathrm{A}_2^2).
\end{cases}
$$

Ясно, что точка $\mathrm{A}_1 = 0$, $\mathrm{A}_2 = 0$ (как и остальные фундаментальные точки) лежит на кривой $B = 0$, причем является обыкновенной двойной точкой. Поскольку можно показать, что других двойных точек у $B = 0$ нет, эта кривая имеет род 4. Аналогично кривая $C = 0$ имеет в каждой фундаментальной точке двойную особенность типа точки возврата, т. е. четырехкратную точку, а значит, является кривой рода 0.

---

*) Клебш, столкнувшись однажды во время аналогичных, хотя и по-иному представленных рассмотрений с описанной здесь фигурой, высказал следующее утверждение: *шесть фундаментальных точек задают конфигурацию десятки шестиугольников Брианшона* (см. Clebsch. Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5. Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits // Math. Ann.— 1871.— Bd 4).

Подставляя в наши новые B и C значения из формулы

$$(7) \qquad \mathbf{A}_0 = -\lambda_1\lambda_2, \quad \mathbf{A}_1 = \lambda_2^2, \quad \mathbf{A}_2 = -\lambda_1^2,$$

мы получим

$$(15) \qquad B = -f(\lambda_1, \lambda_2), \quad C = -H(\lambda_1, \lambda_2),$$

что можно сравнить с (10).

Итак, уравнение, выражающее D^2 через A, B и C, с точностью до членов, содержащих A в виде множителя, имеет вид

$$D^2 = -1728B^5 + C^3.$$

Обращаясь к явным выражениям (9) и (14), мы, проследив за достаточным количеством начальных членов, подобно тому, как это делалось в предыдущей главе *), получим точную формулу

$$(16) \quad D^2 = -1728B^5 + C^3 + 720ACB^3 - 80A^2C^2B + \\ + 64A^3(5B^2 - AC)^2.$$

§ 4. Проблема форм для $\mathbf{A}_i$ и ее редукция

Возникающая перед нами проблема форм полностью задается полученными выше точными формулами (6), (9) и (14) для A, B, C и D и соотношением (16). *Допустим, что в соответствии с формулой* (16) *тем или иным образом заданы некоторые значения A, B, C и D; наша задача состоит тогда в том, чтобы определить отвечающий им набор значений* $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$. Так как A, B, C и D составляют полную систему инвариантных форм, все решения нашей задачи получаются из любого одного при помощи 60 подстановок (5). Действительно, если найти общее число решений, пользуясь теоремой Безу, то получится 60, поскольку для каждого набора значений A, B, C имеется $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ наборов значений $\mathbf{A}_i$, которые ввиду того, что A, B и C являются четными функциями, разбиваются на пары, различающиеся одновременной переменой знака у $\mathbf{A}_i$, и так как D является нечетной функцией, то лишь половина этих 120 значений приводит к правильному значению D. Но 60 решений получаются, как уже говорилось, применением к

*) См. Brioschi // Ann. di Mat. Ser. 2.— 1867.— T. 1.— P. 228.

произвольному одному решению преобразований (5)'. Следовательно, можно сказать, что *после присоединения* ε *наша проблема форм является своею собственной резольвентой Галуа, а стало быть, имеет группу, просто изоморфную группе вращений икосаэдра.*

Руководствуясь I, 5, § 4, рассмотрим теперь ассоциированную с нашей проблемой форм систему уравнений. Очевидно, что 60 значений отношения $A_0 : A_1 : A_2$ определяются из уравнений

$$\frac{B}{A^3} = Y, \quad \frac{C}{A^5} = Z, \tag{17}$$

если нам известны величины Y и Z *). Искомые точки A представляют собой полное пересечение следующих двух кривых шестой и десятой степеней соответственно:

$$B - YA^3 = 0, \quad C - ZA^5 = 0.$$

Решения исходной проблемы форм рационально выражаются через 60 *решений системы двух последних уравнений.* Действительно, положим

$$\frac{D}{A^7} = X, \tag{18}$$

и если $A_0 : A_1 : A_2 = \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2$ — одно из решений системы уравнений, то, очевидно,

$$A_0 = \rho\alpha_0, \quad A_1 = \rho\alpha_1, \quad A_2 = \rho\alpha_2, \tag{19}$$

где под ρ понимается следующее выражение:

$$\rho = \frac{A^7(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{D(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)},$$

что и доказывает наше утверждение.

В этом месте имеется существенное различие между рассмотренной нами ранее *бинарной проблемой форм* и *тернарной проблемой форм*, которой мы занимаемся сейчас. В первом случае (как мы видели в I, 3, § 2) для решения проблемы форм следовало присоединить один квадратный корень. Это, конечно же, соответствует тому, что группа однородных бинарных подстановок была тогда лишь *полуизоморфна* группе неоднородных подстановок, тогда как сейчас имеется *полный изоморфизм*. В то же

*) Y и Z здесь в точности совпадают с величинами, обозначавшимися соответственно буквами a и b в формуле (36) из II, 1, § 7.

время обе задачи имеют и одну общую сторону. В первом случае мы могли осуществить, как мы говорили, *редукцию проблемы форм*, заменяя три фигурировавшие в задаче величины F_1, F_2, F_3, связанные одним уравнением, двумя независимыми переменными X и Y, которые, с одной стороны, сами являются рациональными функциями F_1, F_2, F_3, а с другой стороны — наоборот, F_1, F_2, F_3 рационально выражаются через X и Y. Именно этот результат и был получен нами сейчас для проблемы A-форм путем перехода к новым переменным X, Y, Z, введенным формулами (17) и (18). Величины X, Y, Z были определены нами как рациональные функции A, B, C, D, однако и наоборот, A, B, C и D допускают рациональное выражение через X, Y и Z. В самом деле, разделив обе части в (16) на A^{14}, мы после простых преобразований, использующих (17) и (18), получим

$$(20)\qquad A=\frac{X^2}{Z^3-1728Y^5+720Y^3Z-80YZ^2+64(5Y^2-Z)^2},$$

тогда как

$$(21)\qquad B=YA^3,\quad C=ZA^5,\quad D=XA^7.$$

Формулы (21) и будут тем, что мы желаем.

Теперь будет поучительно провести дальнейшую аналогию с *проблемой форм, относящейся к y_ν*, которая в виде канонического уравнения пятой степени исследовалась в предыдущей главе. При этом мы всегда предполагали, что кроме коэффициентов канонического уравнения α, β и γ задано также значение квадратного корня из дискриминанта, т. е. ∇, квадрат которого есть целая функция α, β и γ. Мы получили тогда 60 систем решений y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, которые опять-таки полностью определялись (рационально) значениями соответствующих отношений $y_0:y_1:y_2:y_3:y_4$. Это обусловливалось тем, что, как и сейчас, из известных величин можно было составить отношения, имеющие степень 1 по y_ν, например β/α или γ/β. Проблему форм для y_ν тоже можно редуцировать, правда, сделать это не так уж просто. *На самом деле такая редукция и была проделана при помощи величин m, n и Z, участвующих в канонической резольвенте икосаэдрального уравнения.* В I, 4, § 12, 14 мы получили рациональные выражения для α, β, γ и ∇ через m, n и Z, а в II, 3 мы изложили универсальный метод, позволяющий представить m, n и Z в виде рациональных функций α, β, γ, ∇.

Если в проблеме форм для $\mathbf{A}_i$ положить $A = 0$, то она решается непосредственно с помощью икосаэдрального уравнения

$$\frac{H^3(\lambda_1, \lambda_2)}{1728 f^5(\lambda_1, \lambda_2)} = \frac{C^3}{1728 B^5}.$$

Действительно, определив из него $\lambda_1 : \lambda_2$, мы по формуле (7) получим

$$\mathbf{A}_0 : \mathbf{A}_1 : \mathbf{A}_2 = -\lambda_1\lambda_2 : \lambda_2^2 : -\lambda_1^2,$$

а тем самым и абсолютные величины $\mathbf{A}_i$, задаваемые формулой (19) выше.

§ 5. Простейшие резольвенты проблемы А-форм

Рассмотрим теперь простейшие резольвенты для нашей проблемы форм. Из того, что нам известно о группе этой задачи, очевидно, что речь пойдет о резольвентах пятой и шестой степени. Наша цель состоит в том, чтобы найти *простейшие* целые рациональные функции **A**, которые при действии известных нам подстановок принимают соответственно пять или шесть значений. *Здесь нам опять пригодится принцип переноса, обсуждавшийся в* § 2: *мы возьмем простейшие целые функции* λ_1, λ_2, *принимающие пять или шесть значений при действии однородных икосаэдральных подстановок, затем построим их поляризации по отношению к* λ_1', λ_2', *являющиеся целыми симметрическими по* λ, λ' *функциями, и, наконец, вместо симметрических комбинаций* λ *и* λ' *мы подставим их выражение через* **A**.

Простейшими пятизначными функциями величин λ_1, λ_2 будут

$$t_\nu(\lambda_1, \lambda_2) = \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^6 + 2\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^5\lambda_2 - 5\varepsilon^{\nu}\lambda_1^4\lambda_2^2 - \\ - 5\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^2\lambda_2^4 - 2\varepsilon^{3\nu}\lambda_1\lambda_2^5 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_2^6,$$

$$W_\nu(\lambda_1, \lambda_2) = -\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^8 + \varepsilon^{3\nu}\lambda_1^7\lambda_2 - 7\varepsilon^{2\nu}\lambda_1^6\lambda_2^2 - 7\varepsilon^{\nu}\lambda_1^5\lambda_2^3 + \\ + 7\varepsilon^{4\nu}\lambda_1^3\lambda_2^5 - 7\varepsilon^{3\nu}\lambda_1^2\lambda_2^6 - \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\lambda_2^7 - \varepsilon^{\nu}\lambda_2^8;$$

к ним можно добавить также t_ν^2 и $t_\nu W_\nu$. Беря поляризации t_ν и W_ν соответственно третьего и четвертого порядков и подставляя выражения через **A**, мы получаем искомые *простейшие пятизначные функции величин* **A**:

$$(23)\quad \begin{gathered}\delta_\nu = \varepsilon^\nu (4A_0^2A_2 - A_1A_2^2) + \varepsilon^{2\nu}(-2A_0A_2^2 + A_1^3) + \\ + \varepsilon^{3\nu}(2A_0A_1^2 - A_2^3) + \varepsilon^{4\nu}(-4A_0^2A_1 + A_1^2A_2), \\ \delta'_\nu = \varepsilon^\nu(-4A_0^3A_2 + 3A_0A_1A_2^2 - A_1^4) + \\ + \varepsilon^{2\nu}(-6A_0^2A_2^2 + A_0A_1^3 + A_1A_2^3) + \varepsilon^{3\nu}(-6A_0^2A_1^2 + \\ + A_0A_2^3 + A_1^3A_2) + \varepsilon^{4\nu}(-4A_0^3A_1 + 3A_0A_1^2A_2 - A_2^4).\end{gathered}$$

При желании иметь большее количество пятизначных функций к уже найденным можно добавить еще δ_ν^2 и $\delta_\nu\delta'_\nu$, возникающие из t_ν^2 и $t_\nu W_\nu$. Резольвента, отвечающая δ_ν, будет подробно обсуждаться чуть позже.

В роли резольвенты шестой степени для икосаэдрального уравнения (I, 5, § 15) мы брали только одно уравнение, корни которого φ определялись формулами

$$(24)\qquad \varphi_\infty = 5\lambda_1^2\lambda_2^2,\quad \varphi_\nu = (\varepsilon^\nu\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \varepsilon^{4\nu}\lambda_2^2)^2.$$

Применяя наш принцип переноса, мы получим из них корни резольвенты шестой степени для проблемы **A** — форм:

$$(25)\qquad z_\infty = 5A_0^2,\quad z_\nu = (\varepsilon^\nu A_2 + A_0 + \varepsilon^{4\nu}A_1)^2.$$

Видно, что это в точности те же соотношения, которыми определяется уравнение Якоби и которые уже приводились нами в II, 1, § 3. Единственная разница между ними состоит в том, что вместо ε^ν теперь везде стоит $\varepsilon^{4\nu}$ и наоборот, но это соответствует только лишь другому способу нумерации z_ν. Более того, вернувшись к формулам, обсуждавшимся в II, 1, § 5, мы увидим, что введенные выше величины A, B и C в точности совпадают с обозначавшимися этими же буквами величинами, фигурировавшими там. Поэтому без всяких хлопот мы получили, что искомая нами резольвента записывается в виде известного нам уравнения Якоби

$$(26)\quad 0 = (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - \\ - C(z-A) + (5B^2 - AC).$$

Остается лишь выяснить, какое место занимает это уравнение в нашей системе понятий и насколько полно наша проблема форм сводится к уравнению (26). (В частности, какую роль при переходе к (26) играет форма D.)

§ 6. Общее уравнение Якоби шестой степени

Линейные функции величин $\mathbf{A}_i$, квадраты которых возникают в (25) как корни z_ν уравнения Якоби шестой степени, уже встречались нам в формулах (11). Мы выяснили тогда, что *нули этих функций суть поляры шести фундаментальных точек относительно коники* $A = 0$, т. е. определенные прямые, вообще говоря, не проходящие через наши фундаментальные точки. Но вместо них можно рассмотреть другие кривые, которые содержат фундаментальные точки. В самом деле, ясно, что все коники

$$z_\nu - A = 0 \quad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

проходят через точку $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0$. Следовательно, *каждая из коник*

$$z_\infty - A = 0, \quad z_\nu - A = 0$$

проходит через пять фундаментальных точек, которые помечены индексами, отличающимися от индекса, участвующего в уравнении коники. Рассмотрим теперь в качестве неизвестных величины $z_\nu - A$. Принимая во внимание предыдущую теорему и определение форм B и C, данное нами в § 3, мы сразу же можем написать уравнение для новых неизвестных величин. Рассмотрим, например, сумму

$$\sum (z_i - A)(z_j - A)(z_k - A),$$

в которой индексы пробегают всевозможные наборы попарно различных значений. Эта сумма задает третий коэффициент искомого уравнения, а стало быть, является инвариантной формой шестой степени от $\mathbf{A}_i$ и имеет нули второго порядка во всех фундаментальных точках, а потому с точностью до численного множителя совпадает с B. Действуя в том же духе, получим:

$$0 = (z - A)^6 + kA(z - A)^5 + lB(z - A)^3 + \\ + mC(z - A) + (nB^2 + pAC),$$

где k, l, m, n, p — пока неизвестные коэффициенты, которые, однако, легко находятся, если обратиться к точным выражениям участвующих здесь форм через $\mathbf{A}_i$. Совпадение с формулой (26) очевидно. Замечу еще, что при $A = 0$ уравнение (26) превращается в давно известную нам резольвенту шестой степени для икосаэдрального уравнения. Для этого мы согласно (15) и (24) должны взять

$$A=0,\quad B=-f,\quad C=-H,\quad z=\varphi.$$

Группа Галуа уравнения (26) на самом деле уже была определена нами в I, 4, § 15, где мы занимались случаем $A=0$, и мы здесь просто сошлемся на этот результат. Эта группа содержит 60 перестановок и просто изоморфна группе замен $\mathbf{A}_i$. Следовательно, $\mathbf{A}_i$ должны рационально выражаться через z. Это выражение проще всего получить, вычисляя из равенств (25) квадраты и попарные произведения $\mathbf{A}_i$, а затем находя отсюда отношения $\mathbf{A}_0:\mathbf{A}_1:\mathbf{A}_2$. Далее вычисления будут точно такими же, как и в § 4. При этом помимо A, B, C, от которых только и зависят коэффициенты (26), нам, очевидно, придется привлечь также и D. Мы приходим к следующему выводу.

Уравнение Якоби (26) *будет эквивалентно проблеме форм для* $\mathbf{A}_i$, *если предположить, что кроме его коэффициентов задано также значение* D, *т. е. задан квадратный корень из определенной целой функции* (16) *величин* A, B *и* C.

Посмотрим теперь, как можно получить рациональное выражение D^2 через корни z. Для этого из (25) найдем всевозможные разности величин z_ν как функции $\mathbf{A}_i$ и разложим их, как разности двух квадратов, в произведения линейных множителей, которые с точностью до численного коэффициента входят также и в выражение (13) для D. Имеем, например,

$$z_\nu - z_{2\nu} = \\ =(\varepsilon^\nu-\varepsilon^{4\nu})(\varepsilon^\nu\mathbf{A}_1-\varepsilon^{4\nu}\mathbf{A}_2)\left((1\pm\sqrt{5})\mathbf{A}_0+\varepsilon^\nu\mathbf{A}_1+\varepsilon^{4\nu}\mathbf{A}_2\right),$$

где $\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и для $\nu=2,\ 3$ следует взять $+\sqrt{5}$, а для $\nu=1,\ 4$ — соответственно $-\sqrt{5}$. Перемножая все такие разности, получим в левой части корень из дискриминанта (26), обозначавшийся нами в II, 1, § 5 буквой Π, а произведение численных множителей в правой части даст при D^2 коэффициент $\pm\sqrt{5^5}$. Поэтому

$$(27)\qquad D^2=\sqrt{\frac{\Pi}{5^5}},\quad\text{или}\quad D=\sqrt[4]{\frac{\Pi}{5^5}}.$$

Мы видим, что D возникает здесь как побочная иррациональность, т. е. как иррациональная функция z. Этого не произойдет, если мы, следуя г-ну Кронекеру, возьмем $\sqrt{z}$ в качестве неизвестных для (26), с самого начала выразив A_0, A_1 и A_2 линейно через $\sqrt{z}$. При таком подходе становится очевидным, что наша проблема форм не определяется полностью заданием уравнения (26),— значение D тоже следует явно указывать. Именно поэтому я и считаю, что теория не должна ставить во главу угла уравнение Якоби. Более правильно исходить из проблемы А-форм, как мы и сделали.

§ 7. Резольвента Бриоски

Связь наших результатов с открытиями Бриоски и Кронекера станет еще более понятной, если мы исследуем простейшую резольвенту пятой степени, корнями которой служат величины δ_ν из (23). *При этом мы получим в точности резольвенту Бриоски, о которой говорилось в* II, 1, § 5, ибо явное сравнение показывает, что δ_ν совпадают с величинами, обозначавшимися тогда (формулы (22)) x_ν.

Для получения требуемого уравнения выясним вначале геометрический смысл функций δ_ν. Заметим прежде всего, что все δ_ν обращаются в нуль при $A_1 = A_2 = 0$. Поэтому, приравнивая их нулю, мы получим кривые третьей степени, проходящие через все фундаментальные точки. Помимо этого, произведение всех δ_ν, являясь инвариантной А-формой пятнадцатой степени, обязано с точностью до числового множителя совпадать с D. Но мы знаем, что условие $D = 0$ задает пятнадцать прямых, соединяющих всевозможные пары фундаментальных точек. Поэтому *уравнение* $\delta_\nu = 0$ *задает тройку прямых, содержащих все фундаментальные точки*. Тем самым мы установили существование следующего разложения:

$$(28)\qquad \delta_\nu = (\varepsilon^{4\nu}A_1 - \varepsilon^\nu A_2)\left((1+\sqrt{5})A_0 + \varepsilon^{4\nu}A_1 + \varepsilon^\nu A_2\right)\times \\ \times\left((1-\sqrt{5})A_0 + \varepsilon^{4\nu}A_1 + \varepsilon^\nu A_2\right).$$

Отсюда следует, в частности, что произведение $\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ в точности совпадает с D (а не только с точностью до множителя). Что касается остальных симметрических функций величин δ_ν, то

$$\sum_\nu \delta_\nu = 0, \quad \sum_\nu \delta_\nu^3 = 0,$$

поскольку не существует инвариантных А-форм третьей и девятой степени. Из того, как δ_ν соотносятся с фундаментальными точками, следует, что

$$\sum_{\nu} \delta_{\nu}^{2} = kB, \quad \sum_{\nu} \delta_{\nu}^{4} = lB^{2} + mAC,$$

где k, l, m — численные коэффициенты, подлежащие определению. Вычисляя их обычным образом, мы получим в итоге уравнение

$$\delta^{5} + 10B\delta^{3} + 5(9B^{2} - AC)\delta - D = 0, \tag{29}$$

которое прекрасно согласуется с уравнением Бриоски*) и с формулой, выведенной нами в I, 4, § 11 для частного случая $A = 0$. Дискриминант (29) является, конечно же, полным квадратом. Произведение $\prod_{\nu<\nu'} (\delta_{\nu} - \delta_{\nu'})$ представляется в виде целой функции A, B и C, которая при $A = 0$ совпадает с $-25\sqrt{5}C^{3}$ (согласно I, 4, § 14).

Уравнение (29) особенно интересно и потому, что в смысле ранее введенной терминологии оно является *общим диагональным уравнением пятой степени*. Для такой геометрической интерпретации достаточно заметить, что формулы (23) для δ_{ν} благодаря тому, что δ_{ν} удовлетворяют соотношениям $\sum_{\nu} \delta_{\nu}^{2} = 0$ и $\sum_{\nu} \delta_{\nu} = 0$, *задают однозначное соответствие между диагональной поверхностью и плоскостью* **A**. Это частный случай хорошо известного соответствия, установленного *Клебшем* и *Кремоной* для общей кубической поверхности**) и изучавшегося Клебшем в случае диагональной поверхности ровно в том же виде, в каком оно возникло у нас***). Поскольку по формулам (23) общие гиперплоские сечения диагональной поверхности представляются на **A**-плоскости кубическими кривыми, пересекающимися в шести фундаментальных точках, то эти шесть точек и будут базисными точками указанного соответствия. Формула (29) показывает, что пересечение диагональной и главной поверхностей соответствует кривой $B = 0$ на **A**-пло-

---

*) В первоначальном мемуаре Бриоски значения численных коэффициентов были несколько иными, но впоследствии они были исправлены г-ном Жубером, см. J o u b e r t. Sur l'equation du sixième degré // C. r. Akad. Sci. Paris.— 1867.— V. 64, № 1, в частности, с. 1237—1240.

**) См. S a l m o n, F i e d l e r. Analytische Geometrie des Raumes.— 3 ed.— 1879-80.

***) См. цитировавшийся выше мемуар: K l e i n. Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution... // Math. Ann.— 1871.— Bd 4.

скости, а объединение кривых $A=0$ и $C=0$ представляет ту самую пару кривых шестой степени, лежащих на диагональной поверхности, которые параметризуются с помощью t_ν (см. II, 2, § 4). Это вполне согласуется с тем, что (как мы видели в II, 3, § 3) род кривых $B=0$, $A=0$ и $C=0$ равен соответственно 4, 0 и 0.

§ 8. Предварительные замечания о рациональных преобразованиях нашей проблемы форм

Из перечислявшихся ранее результатов, относящихся к теории уравнений Якоби шестой степени, вне нашего внимания остались лишь те, которые связаны с описанием возможно более общих рациональных относительно $\sqrt{z}$ преобразований, позволяющих получать из одного уравнения Якоби другое. Не входя более в историю этих результатов, я сразу дам их вывод, основанный на развитых нами самими взглядах. Задача состоит в том, чтобы *наиболее общим образом определить три величины* $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, *которые являются рациональными однородными функциями* $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *и при заменах величин* $\mathbf{A}_i$ *по формулам* (2) *подвергаются таким же заменам* *). Последнее условие не следует понимать как требование того, чтобы каждое отдельное преобразование величин $\mathbf{A}_i$ совпадало с вызванным им преобразованием величин $\mathbf{B}_i$; мы требуем лишь совпадения совокупностей таких преобразований. До сих пор мы встречались лишь с двумя примерами такого совпадения. Первый состоит в том, что формулы, по которым преобразуются $\mathbf{B}_i$, *в точности совпадают* с соответствующими формулами для $\mathbf{A}_i$. Второй состоит в том, что формулы для $\mathbf{B}_i$ получаются из формул для $\mathbf{A}_i$ *заменой* ε на ε^2. Мы говорили, что в первом случае $\mathbf{B}_i$ являются *когредиентными*, а во втором — *контраградиентными* переменными.

В § 10 я покажу, как можно заранее узнать, какой из этих случаев имеет место, а также докажу, что других возможностей здесь по существу и нет. А пока мы примем это как эмпирический факт и посмотрим, как он проявляется в конкретных формулах.

*) Post factum окажется, что требование *полной однородности* не является существенным ограничением и, в принципе, может быть отброшено. Но мы сохраняем его в нашем изложении для того, чтобы иметь возможность пользоваться геометрическим языком. Ср. с аналогичным замечанием в II, 2, § 7.

Для этого мы сначала обратимся к неоднократно возникавшей перед нами в предыдущих главах соответствующей задаче о функциях бинарной переменной. Пусть $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — однородные рациональные (но не обязательно целые) функции λ_1, λ_2:

$$\varkappa_1 = \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad \varkappa_2 = \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2), \tag{30}$$

где функции φ_1 и φ_2 подобраны так, чтобы при однородных икосаэдральных заменах λ величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ преобразовывались когредиентно или контраградиентно. В этой ситуации мы можем построить бинарную форму от двух пар переменных:

$$F(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = \mu_1\varphi_2(\lambda_1, \lambda_2) - \mu_2\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2). \tag{31}$$

Очевидно, она не изменяется, если λ_i испытывают икосаэдральные подстановки, а μ_i — соответственно когредиентные или контраградиентные подстановки, поскольку она равна $\mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1$, а μ_1, μ_2 и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ подвергаются одинаковым преобразованиям с определителем, равным единице. Обратно, пусть мы имеем инвариантную в этом смысле форму $F(\lambda, \mu)$, линейную по μ и однородную по λ_1, λ_2. Тогда функции

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial F}{\partial \mu_2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial F}{\partial \mu_1} \tag{32}$$

будут обладать нужными нам свойствами. Таким образом, мы свели нашу задачу к *задаче описания всех инвариантных форм F*.

Отметим теперь следующие факты. Если нам удалось найти две системы решений $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$ задачи (30), то определитель $\varkappa_1\varkappa_2' - \varkappa_2\varkappa_1'$ будет инвариантен относительно всех икосаэдральных замен λ. Вместе с тем он равен функциональному определителю пар соответствующих форм F и F'

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial F}{\partial \mu_2} \\ \dfrac{\partial F'}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial F'}{\partial \mu_2} \end{vmatrix}$$

и, являясь рациональной функцией λ, он должен рационально выражаться через икосаэдральные формы $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$, $T(\lambda_1, \lambda_2)$. Предположим теперь, что нам известны какие-либо две требуемые формы F_1 и F_2 с ненулевым функциональным определителем. Тогда из тождества

$$\begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \mu_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} = 0$$

и только что установленной теоремы следует, что любая нужная нам форма F является линейной комбинацией F_1 и F_2 следующего вида:

$$F = R_1F_1 + R_2F_2, \tag{33}$$

где R_1 и R_2 будут рациональными функциями величин $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$ и $T(\lambda_1, \lambda_2)$. Наоборот, если предположить теперь, что R_1, R_2 суть функции такого вида, а от F потребовать лишь однородность по λ_1, λ_2, то F будет являться формой нужного нам вида. Таким образом, *если известны две формы F_1, F_2, то общее решение нашей задачи дается формулой* (33). В обоих случаях — и когредиентном и контрагредиентном — предположение этой теоремы выполняется. В самом деле, для каждого из случаев в качестве F_1 и F_2 мы можем взять младшие формы F_1 и F_2, т. е. формы, имеющие минимально возможную степень по λ. Для контрагредиентного случая ими будут формы N_1 и M_1, использовавшиеся в предыдущей главе:

$$\begin{aligned} F_1 &= N_1 = \mu_1(7\lambda_1^5\lambda_2^2 + \lambda_2^7) + \mu_2(-\lambda_1^7 + 7\lambda_1^2\lambda_2^5), \\ F_2 &= M_1 = \mu_1(\lambda_1^{13} - 39\lambda_1^8\lambda_2^5 - 26\lambda_1^3\lambda_2^{10}) + \\ &\qquad + \mu_2(\lambda_1^{10}\lambda_2^3 - 39\lambda_1^5\lambda_2^8 - \lambda_2^{13}). \end{aligned} \tag{34}$$

Для когредиентного случая это следующие формы:

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2, \\ F_2 &= \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\mu_2. \end{aligned} \tag{35}$$

Тем самым в случае бинарных форм наша задача полностью решена *).

---

*) Что касается контрагредиентного случая, то с частным решением нашей задачи мы уже сталкивались в формуле (25) из II, 3, § 4.

§ 9. Описание рациональных преобразований

Возвращаясь к случаю $\mathbf{A}_i$, мы должны сначала проделать шаг, аналогичный переходу от (30) к (31). Иными словами, вместо того чтобы искать величины $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, в том или ином смысле *ковариантные* величинам $\mathbf{A}$, мы хотим искать *инварианты*, зависящие от двух наборов переменных. Возможность такой замены геометрически объясняется тем, что в плоскости $\mathbf{B}$ лежит инвариантная коника

$$\mathbf{B}_0^2 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = 0,$$

которая позволяет ковариантно сопоставить каждой точке $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ прямую — поляру этой точки относительно нашей коники:

$$2\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0' + \mathbf{B}_2\mathbf{A}_1' + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_2' = 0\ ^{*)}.$$

Таким образом, если формулы

$$(36)\qquad \begin{gathered} \mathbf{B}_0 = \varphi_0(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2), \quad \mathbf{B}_1 = \varphi_1(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2), \\ \mathbf{B}_2 = \varphi_2(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \end{gathered}$$

задают величины, ковариантные величинам $\mathbf{A}$, *то построенная по ним форма*

$$F(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_0', \mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2') = 2\varphi_0\mathbf{A}_0' + \varphi_2\mathbf{A}_1' + \varphi_1\mathbf{A}_2'$$

будет инвариантной в предположении, что $\mathbf{A}'$ *преобразуются точно так же, как и* $\mathbf{B}$. *Обратно, если* F — *инвариантная в указанном смысле форма, то формулы*

$$(38)\qquad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_0'}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_1'}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_2'}$$

будут искомыми ковариантными формулами.

Заметим теперь, что любая инвариантная форма F представляется в виде линейной комбинации любых трех линейно независимых форм:

$$(39)\qquad F = R_1F_1 + R_2F_2 + R_3F_3,$$

где R_1, R_2 и R_3 будут рациональными функциями инвариантных форм, зависящих лишь от $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, т. е. рациональными функциями величин A, B, C и D. И наоборот, взяв в формуле (39) в качестве R_1, R_2 и R_3 рациональные функции описанного типа, мы всегда получим

---

*) $\mathbf{A}_0'$, $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$ имеют здесь смысл переменных координат на $\mathbf{B}$-плоскости.

инвариантную форму F нужного вида, причем F можно считать однородной по $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, если это необходимо. *Стало быть, мы опять свели задачу к отысканию трех инвариантных форм F_1, F_2, F_3, имеющих наименьшие возможные степени по* $\mathbf{A}$.

В коградиентном случае эта задача решается непосредственно при помощи процесса поляризации, который уже использовался ранее при построении форм A, B и C. *А именно, положим*

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 2\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0' + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2', \\
F_2 &= \frac{\partial B}{\partial \mathbf{A}_0}\mathbf{A}_0' + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{A}_1}\mathbf{A}_1' + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{A}_2}\mathbf{A}_2', \\
F_3 &= \frac{\partial C}{\partial \mathbf{A}_0}\mathbf{A}_0' + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{A}_1}\mathbf{A}_1' + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{A}_2}\mathbf{A}_2'.
\end{aligned} \tag{40}
$$

В контраградиентном случае мы вновь применим принцип переноса из § 2. Для начала мы построим три формы

$$\Omega_i(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$$

четной степени $2n$, которые имеют наименьшую возможную степень по λ, вторую степень по μ и инвариантны при контраградиентных икосаэдральных заменах и λ, и μ. *Затем мы введем λ' и μ', взяв n-кратную поляризацию наших форм по λ и однократную поляризацию по μ. Наконец, вместо симметрических функций величин λ мы подставим их выражение через* $\mathbf{A}$, *а вместо симметрических функций величин μ — их выражение через $\mathbf{A}'$ в соответствии с формулами*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_2\lambda_1'), \ \mathbf{A}_1 = \lambda_2\lambda_2', \ \mathbf{A}_2 = -\lambda_1\lambda_1'; \\
&\mathbf{A}_0' = -\frac{1}{2}(\mu_1\mu_2' + \mu_2\mu_1'); \ \mathbf{A}_1' = \mu_2\mu_2', \ \mathbf{A}_2' = -\mu_1\mu_1' \text{ *)}.
\end{aligned} \tag{41}
$$

Наиболее подходящие для наших целей формы Ω_i можно взять из уже цитировавшейся ранее работы Гордана. В качестве Ω_1 мы возьмем форму T, которую мы

*) Конечно, в коградиентном случае мы могли бы действовать точно так же. Однако при этом мы бы не получили ничего нового по сравнению с только что приведенными формулами, а лишь еще раз бы проделали все те поляризации, которые были осуществлены при нахождении A, B, C и D.

уже писали в § 11 предыдущей главы (формула (60)):

(42)

$$\Omega_1 = \mu_1^2(-\lambda_1^6 - 3\lambda_1\lambda_2^5) + 10\mu_1\mu_2\lambda_1^3\lambda_2^3 + \mu_2^2(3\lambda_1^5\lambda_2 - \lambda_2^6).$$

В качестве Ω_2 мы возьмем функциональный определитель фундаментальной формы α (также использовавшейся в прошлой главе) и формы N_1:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial\mu_2} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial N_1}{\partial\mu_2} \end{vmatrix}.$$

Получим

(43) $$\Omega_2 = \mu_1^2(-10\lambda_1^8\lambda_2^2 + 20\lambda_1^3\lambda_2^7) + 2\mu_1\mu_2(-\lambda_1^{10} + 14\lambda_1^5\lambda_2^5 + \lambda_2^{10}) + \mu_2^2(-20\lambda_1^7\lambda_2^3 - 10\lambda_1^2\lambda_2^8).$$

Наконец, в качестве Ω_3 возьмем квадрат N_1:

(44) $$\Omega_3 = \{\mu_1(-7\lambda_1^5\lambda_2^2 - \lambda_2^7) + \mu_2(\lambda_1^7 - 7\lambda_1^2\lambda_2^5)\}^2.$$

Применяя наш процесс переноса сначала к форме Ω_1, мы с точностью до численного множителя получим первую простейшую инвариантную форму F_1 третьей степени по $\mathbf{A}$:

(45) $$F_1 = 2\mathbf{A}_0'(2\mathbf{A}_0^3 + 3\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) - \mathbf{A}_1'(3\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_1^3) - \mathbf{A}_2'(3\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^3).$$

Проделав то же самое с формой Ω_2 (43), мы для упрощения вычтем из результата подходящее кратное формы AF_1:

(46) $$F_2 = 2\mathbf{A}_0'(-8\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + 6\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 - \mathbf{A}_1^5 - \mathbf{A}_2^5) + \mathbf{A}_1'(16\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_2^2 - 8\mathbf{A}_0^2\mathbf{A}_1^3 - 4\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^3 - 2\mathbf{A}_1^4\mathbf{A}_2) + \mathbf{A}_2'(16\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_2^2 - 8\mathbf{A}_0^2\mathbf{A}_2^2 - 4\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^3\mathbf{A}_2 + 2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^4).$$

Поступив так же, как и выше, с формой Ω_3, мы отнимем из результата кратные формам A^2F_1 и AF_2 и получим, наконец,

(47) $$F_3 = 2\mathbf{A}_0'(32\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 - 4\mathbf{A}_0^2(\mathbf{A}_1^5 + \mathbf{A}_2^5) - 16\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^3\mathbf{A}_2^3 + 3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1^5 + \mathbf{A}_2^5) + \mathbf{A}_1'(-32\mathbf{A}_0^5\mathbf{A}_2^2 + 48\mathbf{A}_0^4\mathbf{A}_1^3 - 32\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^3 - 4\mathbf{A}_0^2\mathbf{A}_1^4\mathbf{A}_2 + 14\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^4 - 3\mathbf{A}_1^5\mathbf{A}_2^2 -$$

$$- \mathbf{A}_2^7) + \mathbf{A}_2' (- 32\mathbf{A}_0^5\mathbf{A}_1^2 + 48\mathbf{A}_0^4\mathbf{A}_2^3 - 32\mathbf{A}_0^3\mathbf{A}_1^3\mathbf{A}_2 -$$
$$- 4\mathbf{A}_0^2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^4 + 14\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1^4\mathbf{A}_2^2 - 3\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^5 - \mathbf{A}_1^7).$$

Подстановка найденных F_1, F_2, F_3 в (39) задает по формулам (33) полное решение поставленной задачи и в контраградиентном случае.

§ 10. Теоретико-групповой смысл коградиентности и контраградиентности

Вернемся теперь к теоретико-групповым вопросам, возникшим в начале § 8. Приведенное там условие означает, что группа преобразований величин **B** просто изоморфна группе преобразований величин **A**. Поэтому задача заключается в том, чтобы выяснить, сколькими различными способами можно осуществить изоморфизм группы из шестидесяти икосаэдральных подстановок

$$(48) \qquad V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_{59}$$

с самой собой. Коградиентность и контраградиентность дают два примера подобных изоморфизмов. Мы покажем, что никаких других существенных изоморфизмов, кроме этих двух, не существует.

Однако сначала я должен объяснить, какие изоморфизмы будут рассматриваться нами как несущественные. Таковыми будут изоморфизмы, получающиеся с помощью *сопряжений* (см. I, 1, § 2), т. е. перестановок набора (48), заменяющих каждое V_k на $(V')^{-1}V_kV'$ для некоторого V' из набора (48), одного и того же для всех k. В самом деле, выбор другой системы координат приводит во всех рассматривавшихся нами задачах именно к такому изоморфизму. Заменив переменную z, на которую мы действуем икосаэдральными подстановками (48), другой переменной $z' = V'(z)$, мы получим, что для z' все V_k заменятся на $(V')^{-1}V_kV'$. Точно так же будет и в случае тернарных замен $\mathbf{A}_i$.

Намереваясь и здесь воспользоваться нашим принципом переноса, мы рассмотрим сначала образующие икосаэдральной группы — преобразования S и T. Первое из них имеет период 5, а второе — период 2 (см. I, 1, § 12). Искомый изоморфизм полностью определяется указанием того, какие преобразования S' и T' соответствуют нашим S и T. Но S' при этом обязано иметь период 5, а в I, 1, § 8 мы видели, что группа икосаэдра содержит

24 элемента с периодом 5, причем 12 из них сопряжены с S, а другие 12 — с S^2. Таким образом, изменяя при необходимости исследуемый изоморфизм с помощью подходящего сопряжения, *мы можем считать S' равным либо S, либо S^2*. В этом случае S' не будет изменяться при замене всех V_k на $S^{-\nu}V_kS^{\nu}$ (где $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$). Рассмотрим теперь пятнадцать элементов порядка 2, присутствующих в (48). Подходящим образом выбрав ν в описанном выше сопряжении, мы можем перевести любой элемент порядка 2 в один из следующих трех:

$$T,\ TU,\ U,$$

где U — преобразование, описанное в I, 1, § 8 (ср. с I, 2, § 6). Следовательно, *если указанным только что образом выбрать S', то в качестве T' можно взять один из трех элементов*: T, TU, U. Воспользуемся теперь условиями на периоды, полученными в I, 2, § 6. В соответствии с ними период ST равен 3, а стало быть, $S'T'$ тоже должно иметь период 3. Вместе с тем мы видим, что периоды ST, STU, SU, S^2T, S^2TU и S^2U равны соответственно 3, 5, 2, 5, 3 и 2. Поэтому $S'T'$ совпадает либо с ST, либо с S^2TU. Поэтому *для нашего изоморфизма остались только две возможности*: *либо $S' = S$ и $T' = T$, либо $S' = S^2$ и $T' = TU$*. Взглянув на соответствующие икосаэдральные подстановки, мы сразу же заметим, что S^2 и TU получаются из S и T заменой ε на ε^2. *Следовательно, мы имеем только два существенных изоморфизма*: *когредиентный и контрагредиентный, что и утверждалось.*

Вопрос, который мы только что разобрали для группы икосаэдра, можно, очевидно, поставить и для другой группы. Кроме того, для решения проблем форм, относящихся к другим исследовавшимся нами группам, могут понадобиться алгебраические результаты, аналогичные полученным в § 8, 9. Я не буду излагать их здесь во всех подробностях, поскольку это уведет нас в сторону от нашей темы (см., однако, I, 5, § 5). Замечу лишь, что когредиентный случай (который, естественно, присутствует для всех групп) всегда может быть решен с помощью поляризаций, если только среди инвариантов нашей проблемы форм найдется инвариантная форма второй степени. Это имеет место, в частности, для проблем форм, соответствующих простым перестановкам переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ и записываемых, таким образом, в виде уравнения n-й степени с независимыми коэффициентами.

В этом случае мы вместо применявшейся в § 9 коники $\mathbf{B}_0^2+\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ можем воспользоваться инвариантом $\sum\limits_{\nu} x_\nu^2$ и для каждой инвариантной относительно действия нашей группы формы φ составить дифференциальные отношения $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}$, которые будут ковариантны к $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Если в качестве φ мы возьмем здесь суммы степеней x_ν, то опять получим, очевидно, *преобразование Чирнгауза*. Таким образом, формулы (38) и старинная конструкция Чирнгауза охватываются одним общим методом решения проблем форм определенного класса. Этот факт можно сопоставить с тем, что уже говорилось ранее по поводу соответствия между точками и плоскостями (см. I, 2, § 7)*).

§ 11. Пролог к решению нашей проблемы форм

Сохраняя на время аналогию с преобразованием Чирнгауза, рассмотрим R_1, R_2 и R_3, входящие в (39), как неопределенные коэффициенты. Тогда, вычисляя для соответствующих $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ значение формы $\mathbf{B}_0^2+\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$, мы получим квадратичную форму от этих коэффициентов, которую можно многими различными способами сделать нулевой, подбирая подходящие R_1, R_2 и R_3. Но тогда, как мы знаем, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ можно найти непосредственно из икосаэдрального уравнения. Проделав это, мы вновь воспользуемся формулами (38) и (39), только на этот раз поменяв в них местами буквы **A** и **B**, т. е. выразив $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ через $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$. Нужные для этого коэффициенты R_1, R_2, R_3 обязательно будут рациональными функциями изначально заданных A, B, C и D и тех иррациональностей, которые возникают из уравнения $\mathbf{B}_0^2+\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2=0$. Следовательно, *после присоединения этих иррациональностей* проблема форм *для* $\mathbf{A}_i$ *решается при помощи икосаэдрального уравнения* **).

*) Приведенные здесь рассуждения можно еще несколько обобщить. Для того чтобы при решении проблемы форм можно было бы использовать построение поляр, не нужно требовать существования инвариантной *квадратичной* формы от x_ν. Достаточно существования инвариантной *билинейной* формы от x_ν, $\dot{x}_\nu$. В этом смысле годится формула (35), в которой такой формой служит определитель $\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2$.

**) Все эти моменты уже были отмечены нами при обсуждении уравнений Якоби шестой степени в II, 1, § 6.

В действительности этот общий метод я изложил здесь лишь для того, чтобы продемонстрировать возможные применения формулы (39). Способ, которым мы решим проблему форм для $\mathbf{A}_i$ (т. е. сведем ее к икосаэдральному уравнению), будет гораздо более простым. *У нас есть выражения*

$$(49)\quad 2\mathbf{A}_0 = -(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_2\lambda_1'),\ \mathbf{A}_1 = \lambda_2\lambda_2',\ \mathbf{A}_2 = -\lambda_1\lambda_1',$$

и *мы попробуем решить нашу задачу в предположении, что* λ_1/λ_2 *или* λ_1'/λ_2' *является корнем некоторого икосаэдрального уравнения.* Геометрически это означает, что мы хотим найти точку $\mathbf{A}$ по одной из тех двух точек на конике $A = 0$, через которые проходят касательные к этой конике, проведенные из точки $\mathbf{A}$, тогда как в изложенном выше общем методе (здесь мы предполагаем, что все рассматриваемые нами функции однородны по $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$) точке $\mathbf{A}$ сопоставлялась *какая-нибудь* ковариантная точка на конике $A = 0$, но ее координаты $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ рассматривались не с точностью до пропорциональности, а в абсолютном смысле.

Аналогия между этой задачей и той, которую мы, следуя схеме г-на Гордана, решили в предыдущей главе, очевидна. В обоих случаях, как мы уже знаем, речь идет о проблемах форм, неизвестными в которых являются билинейные формы от двух пар переменных, испытывающих одновременные ковариантные икосаэдральные подстановки; в обоих случаях мы сводим нашу задачу к икосаэдральному уравнению, которому удовлетворяет одна из этих пар. Поэтому сейчас мы можем точно следовать идеям, развитым в § 6—11 предыдущей главы. При этом каждый отдельный шаг здесь будет настолько простым, что представляется излишним подробно останавливаться на каждом результате.

Мы начнем с того, что выпишем целые однородные функции величин λ_1, λ_2 и λ_1', λ_2', остающиеся неизменными при одновременных (в данном случае — когредиентных) заменах обеих пар переменных, т. е. напишем инвариантные формы. Две простейшие, линейные по λ' формы даются формулами (35)

$$(50)\quad \begin{aligned} \lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1' &= \sqrt{A}, \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}\lambda_1' + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}\lambda_2' &= \mathbf{P}. \end{aligned}$$

То, что первая форма действительно равна $\sqrt{A}$, без труда проверяется, а $\mathbf{P}$ в правой части второго равенства поставлено просто для сокращенного обозначения этой формы. Как отмечалось в § 2, кроме этих форм инвариантными будут и все прочие формы, полученные путем поляризации форм $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $H(\lambda_1, \lambda_2)$, $T(\lambda_1, \lambda_2)$*). Хорошо известные нам A, B, C и D являются симметричными по λ, λ' комбинациями перечисленных форм.

Рассмотрим теперь операцию *замены* λ *на* λ', т. е. замену λ_1, λ_2 на λ_1', λ_2' и наоборот. Инвариантная форма, не изменяющаяся при таком преобразовании, является целой функцией A, B, C, D; если же она меняет при *замене* λ *на* λ' свой знак, то она будет произведением такой целой функции на $\sqrt{A}$ из (50). Инвариантную форму, имеющую одинаковые степени по λ и по λ', всегда можно представить в виде

$$F(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1', \lambda_2') = G(A, B, C, D) + \sqrt{A}H(A, B, C, D), \tag{51}$$

где G и H — целые функции, определяемые из равенств

$$\begin{aligned} 2G &= F(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1', \lambda_2') + F(\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2), \\ 2\sqrt{A}H &= F(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1', \lambda_2') - F(\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{52}$$

Общий ход нашего решения будет следующим. Сначала мы должны будем построить икосаэдральное уравнение

$$\frac{H^3(\lambda_1, \lambda_2)}{1728 f^5(\lambda_1, \lambda_2)} = Z, \tag{53}$$

из которого определяется $\lambda_1 : \lambda_2$, а затем при помощи известных величин выразить в терминах λ_1, λ_2 и $\sqrt{A}$ инвариант $\mathbf{P}$ из (50). Для осуществления этих двух шагов надо надлежащим образом воспользоваться формулами (51) и (52). Далее, рассматривая формулы (50) как линейные уравнения относительно λ', мы определим из них λ_1' и λ_2'. Наконец, *подставив в* (49) *все найденные нами значения, мы и получим требуемые формулы для* $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$. При этом $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ обязательно возникнут в виде определенных линейных комбинаций инвариантов $\mathbf{P}$ и $\sqrt{A}$.

§ 12. Соответствующие формулы

Для конкретного воплощения изложенных выше идей мы должны теперь написать все точные формулы, необходимые для нашего метода. Как и в предыдущей главе,

*) Далее я больше не буду повторять, что перечисленные формы образуют полную систему инвариантных форм.

я обозначу здесь индексом 1 формы, зависящие от λ, и индексом 2 — формы, получающиеся из них *заменой* λ *на* λ'. Бо́льшие индексы будут обозначать степени функций, получающихся из соответствующих форм, если входящие в них величины рассмотреть как функции величин $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$.

Начнем с того, что вычислим Z, или, вернее, Z_1, входящий в (53). Получим последовательно

$$(54)\qquad Z_1=\frac{H_1^3}{1728f^5}=\frac{H_1^3f_2^5}{1728f_1^5f_2^5}=$$

$$=\frac{\left(H_1^3f_2^5+H_2^3f_1^5\right)+\left(H_1^3f_2^5-H_2^3f_1^5\right)}{3456f_1^5f_2^5}=$$

$$=\frac{G_{60}(A,B,C)+\sqrt{A}DG_{44}(A,B,C)}{3456\{G_{12}(A,B,C)\}^5}.$$

Кроме (51) и (52) я воспользовался здесь тем, что из четырех данных величин A, B, C, D лишь D имеет нечетную степень, и тем, что D^2 является целой функцией A, B и C. Здесь остается только заменить A, B, C, входящие в целые функции G_{12}, G_{44}, G_{60}, их выражениями через $\mathbf{A}_i$. Конечно, при этом получатся выражения весьма угрожающего вида, которые я опускаю, поскольку никакого особого интереса они собой не представляют.

Теперь займемся вычислением $\mathbf{P}$, точнее $\mathbf{P}_1$. Форма $\mathbf{P}_1$ имеет степень 11 по λ и 1 по λ', и для применения того метода, которым мы только что вычислили Z_1, мы должны сначала умножить $\mathbf{P}_1$ на такой множитель, зависящий только от λ_1, λ_2, чтобы полученная форма имела одинаковую степень 1 и по λ, и по λ'. В соответствии с этим положим

$$(55)\qquad \rho_1=\frac{\mathbf{P}_1H_1}{T_1},$$

и мы вновь получаем

$$(56)\qquad \rho_1=\frac{\mathbf{P}_1H_1}{T_1}=\frac{\mathbf{P}_1H_1T_2}{T_1T_2}=$$

$$=\frac{(\mathbf{P}_1H_1T_2+\mathbf{P}_2H_2T_1)+(\mathbf{P}_1H_1T_2-\mathbf{P}_2H_2T_1)}{2T_1T_2}=$$

$$=\frac{DG_{16}(A,B,C)+\sqrt{A}G_{30}(A,B,C)}{2\Gamma_{30}(A,B,C)},$$

где опять остается лишь выписать выражения G_{16}, G_{30} и

Γ_{30} через $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$. Подставляя в (55), находим

$$(57)\qquad \mathbf{P}_1=\frac{T_1}{H_1}\cdot\frac{DG_{16}(A, B, C)+\sqrt{A}G_{30}(A, B, C)}{2\Gamma_{30}(A, B, C)}.$$

Теперь в соответствии с нашим планом надо выразить λ_1' и λ_2' через $\sqrt{A}$ и $\mathbf{P}$. Получающиеся формулы таковы:

$$(58)\qquad \begin{aligned}\lambda_1'&=-\frac{\sqrt{A}}{12f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}+\mathbf{P}_1\frac{\lambda_1}{12f_1},\\ \lambda_2'&=+\frac{\sqrt{A}}{12f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}+\mathbf{P}_1\frac{\lambda_2}{12f_1}.\end{aligned}$$

Сравнивая их с (49), получаем окончательный ответ:

$$(59)\qquad \begin{aligned}2\mathbf{A}_0&=-\sqrt{A}-2\mathbf{P}_1\frac{\lambda_1\lambda_2}{12f_1},\\ \mathbf{A}_1&=+\frac{\sqrt{A}}{12f_1}\cdot\lambda_2\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}+\mathbf{P}_1\frac{\lambda_2}{12f_1},\\ \mathbf{A}_2&=-\frac{\sqrt{A}}{12f_1}\cdot\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}-\mathbf{P}_1\frac{\lambda_1}{12f_1},\end{aligned}$$

где вместо $\mathbf{P}_1$ следует подставить выражение (57).

Наш метод решения может быть во многих отношениях видоизменен, если мы захотим более тесно связать его с изложением предыдущей главы. Например, подставим в (59) вместо $\mathbf{P}_1$ величину ρ_1 из (55) так, чтобы $\mathbf{A}_i$ зависели теперь только от $\sqrt{A}$, ρ_1, λ_1, λ_2, сформулируем соответствующую проблему форм для $\mathbf{A}_i$, в которой эти три величины считаются заданными произвольно, и сравним ее с нашей исходной проблемой форм. При этом мы получим уравнения относительно ρ_1 и Z_1, которые могут быть использованы для их явного вычисления. Помимо этого мы могли бы, как и в предыдущей главе, придать геометрическую интерпретацию каждому шагу нашего решения. Я оставлю все это читателю, а в заключение хочу еще обратить внимание на появление в нашем решении $\sqrt{A}$. В смысле введенной ранее терминологии это побочная иррациональность, т. е. величина, не выражающаяся рационально через искомые $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *). Вскоре мы увидим, что от иррациональностей такого типа нельзя избавиться в процессе сведения проблемы форм для $\mathbf{A}_i$ к уравнению икосаэдра.

---

*) Аналогичным образом понятие побочной иррациональности может быть распространено и на общие проблемы форм.

ГЛАВА V
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Два метода решения

Обращаясь к общим уравнениям пятой степени, мы ставим конкретную задачу — *дать исчерпывающее описание процесса нахождения их решений**). Для ее решения мы сначала должны построить функцию $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda$ пяти величин $x_0, x_1, \ldots, x_4$, подчиненных единственному соотношению $\sum\limits_{\nu} x_\nu = 0$, которая бы испытывала икосаэдральные преобразования при перестановках величин x_ν. Построением такой функции, основанным на ее геометрической интерпретации, мы сейчас и займемся, отодвинув пока на второй план важный вопрос о том, каким образом мы собираемся впоследствии получить рациональные выражения искомых x_ν через λ.

Рассмотрим, как и выше, $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ как координаты точки в пространстве, а λ — как величину, параметризующую семейство образующих первого типа *главной поверхности* $\sum\limits_{\nu} x_\nu^2 = 0$. Наша задача состоит в том, чтобы *ковариантно сопоставить каждой точке пространства определенную образующую* λ (*ковариантность*, как всегда, означает, что соответствие между точками и образующими не должно изменяться, когда мы одновременно действуем на них четными коллинеациями).

Первое решение этой задачи само собой возникает из уже полученных ранее результатов. А именно, *мы сначала ковариантно сопоставим точке* x *точку* y, *лежащую на главной поверхности, а затем возьмем в качестве* λ *ту образующую первого типа, которая проходит через эту точку*. Алгебраически это выражается в том, что *мы*

*) Все результаты этой главы по существу содержатся в моих работах из Mathematische Annalen.— Bd 12, 14, 15; но здесь они впервые объединены в одно последовательное изложение.

подходящим преобразованием Чирнгауза превращаем наше уравнение пятой степени в главное уравнение, а затем решаем его, следуя методу, изложенному в третьей главе этой части.

О преобразовании Чирнгауза, которое нужно для описанного только что решения, в общих чертах уже говорилось в II, 2, § 6. Оно осуществляется следующим образом. Точке x сопоставляется прямая в пространстве, соединяющая две ковариантные к x рациональные точки, а в качестве y выбирается одна из двух точек пересечения этой прямой с канонической поверхностью. В общем случае для разделения двух этих точек требуется присоединить *побочный* квадратный корень. При желании мы можем при описании предыдущей конструкции вообще оставить в стороне точку y. Наш метод тогда состоит попросту в том, чтобы воспользоваться одной из двух образующих первого типа, лежащих на главной поверхности и пересекающихся с прямой, ковариантной к x. Появление побочного квадратного корня вызвано тем, что наряду с одной образующей первого типа, названной нами λ, всегда возникает и другая образующая, ассоциированная с первой, которую мы временно обозначим λ'. При такой формулировке появляется возможность отодвинуть на один шаг присоединение побочной иррациональности. *Вместо того чтобы сразу получить икосаэдральное уравнение относительно λ, мы можем сначала найти систему уравнений, из которой определяются симметрические функции аргументов λ, λ', и только потом перейти от этой системы к упомянутому икосаэдральному уравнению.* Но это означает в точности возврат к результатам, изложенным в четвертой главе. Действительно, наши λ и λ' являются контрградиентными переменными, и поэтому система уравнений, о которой идет речь, будет системой уравнений относительно A_i; более того, она, как мы вскоре увидим, легко приводится к однородному виду, т. е. к проблеме форм для A_i. Получающееся в результате икосаэдральное уравнение будет в этом случае тем самым икосаэдральным уравнением, которое использовалось нами в предыдущей главе для решения проблемы A-форм. *Тем самым мы наряду с первым методом, основанным на результатах* II, 3, *получили теперь и второй метод, основанный на результатах* II, 4.

Но можно пойти и дальше, поскольку приведенное выше описание второго метода было дано в слишком специальной ситуации. Возвращаясь к изложенному в

II, 2, § 9, мы видим, что при реализации второго метода точке x можно ковариантно сопоставлять не одну прямую, а *общий линейный комплекс*. При этом λ и λ' будут теми двумя образующими канонической поверхности, которые оказываются лежащими в этом комплексе. Это обобщение нисколько не усложнит те формулы, которые будут даны позднее при точном изложении второго метода, а поэтому в дальнейшем мы будем иметь дело именно с такой постановкой задачи и будем лишь мимоходом возвращаться к той специальной формулировке, с которой мы начали.

В следующих параграфах перед нами будет стоять двойная задача. Во-первых, мы должны получить точные формулы, необходимые при решении уравнений пятой степени теми двумя способами, в осуществимости которых мы только что убедились. Во-вторых, нам надо сопоставить с нашими результатами все те теоремы, которые были собраны нами в II, 1. В этом отношении с самого начала очевидна связь нашего первого метода с *методом Бринга*, а второго метода — с *методом Кронекера*. Кроме того, применяя полученные ранее теоремы об икосаэдральных подстановках (см. I, 2, § 8), дадим доказательство фундаментальных результатов Кронекера, отмеченных нами в II, 1, § 7.

§ 2. Реализация первого метода

Для точного изложения нашего первого метода предположим, что данное уравнение пятой степени имеет вид

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

в котором, как всегда, $\sum\limits_\nu x_\nu = 0$. В соответствии с II, 2, § 5 рассмотрим

$$y_\nu = px_\nu^{(1)} + qx_\nu^{(2)} + rx_\nu^{(3)} + sx_\nu^{(4)}, \tag{2}$$

где $x_\nu^{(k)} = x_\nu^k - \frac{1}{5}\sum\limits_\nu x_\nu^k$, и вычислим $\sum\limits_\nu y_\nu^2$. При этом должна получиться целая однородная функция второй степени величины p, q, r, s:

$$\Phi(p, q, r, s), \tag{3}$$

коэффициенты которой будут целыми симметрическими функциями величин x_ν, а стало быть, целыми функциями величин a, b, c, d из (1).

Мы хотим найти систему решений уравнения $\Phi=0$, *которая бы оставалась неизменной при четных перестановках величин* x_ν.

Заметим прежде всего, что искомые p, q, r, s могут и не представляться рациональными функциями величин $x_0, x_1, \ldots, x_4$. Из излагавшегося недавно доказательства следует, что для реализации нашего метода требуется по меньшей мере одна побочная иррациональность, а именно побочный квадратный корень*). Вернемся теперь к описанной выше геометрической конструкции *ковариантной прямой*. Все необходимые здесь формулы были даны нами в II, 2, § 6. Пусть

$$P_1, Q_1, R_1, S_1; \quad P_2, Q_2, R_2, S_2$$

— два набора величин, которые являются рациональными функциями x_ν, не изменяющимися при четных перестановках аргументов, и которые, таким образом, должны быть рациональными функциями коэффициентов a, b, c, d из (1) и квадратного корня из соответствующего дискриминанта. Тогда, как и ранее, мы полагаем в (2)

$$(4)\qquad \begin{aligned} p &= \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2, \quad q = \rho_1 Q + \rho_2 Q_2, \\ r &= \rho_1 R_1 + \rho_2 R_2, \quad s = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2. \end{aligned}$$

При этом Φ (формула (3)) превращается в бинарную квадратичную форму от ρ_1, ρ_2, коэффициенты которой являются рациональными функциями известных величин, и, положив $\Phi=0$, мы найдем ρ_1 и ρ_2 из получившегося квадратного уравнения, при этом и будет введен наш побочный квадратный корень. Подставив после этого найденные ρ_1, ρ_2 в (4) и (2), мы придем к искомому каноническому уравнению относительно y_ν, которое будем для удобства записывать в виде

$$(5)\qquad y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0.$$

Это дает нам все необходимое для непосредственного при-

*) Наоборот, если бы нам удалось доказать непосредственно утверждение об иррациональности p, q, r и s, то это дало бы новое доказательство неизбежности появления побочного квадратного корня. В самом деле, если бы икосаэдральное уравнение можно было вывести из (1) без его помощи, то мы могли бы построить одну из целочисленного множества канонических резольвент для этого икосаэдрального уравнения и возникающие при этом формулы и давали бы преобразование (2) с инвариантными относительно четных перестановок и рациональными по x_ν величинами p, q, r, s.

менения результатов II, 3. Если найти с их помощью величину y из (5), то соответствующие x_ν мы получим, обращая формулы (2).

Здесь я заодно сделаю некоторое замечание, касающееся обращения преобразования Чирнгауза. В этом месте обычно принято говорить (и в II, 1, § 1 мы поступили точно так же), что поскольку искомые x_ν будут общими корнями (1) и (2), то они могут быть рационально выражены через y_ν. Однако духу нашего изложения более соответствует рассмотрение вместо формулы, обратной к (2), другой эквивалентной ей формулы:

$$x_\nu = p' y_\nu^{(1)} + q' y_\nu^{(2)} + r' y_\nu^{(3)} + s' y_\nu^{(4)}, \tag{6}$$

в которой $y_\nu^{(k)} = y_\nu^k - \frac{1}{5}\sum_\nu y_\nu^k$, а p', q', r' и s' являются рациональными функциями величин ρ_1, ρ_2, a, b, c, d и квадратного корня из дискриминанта (1), элементарно вычисляемыми обычным образом. В этом случае нахождение x_ν может быть следующим образом описано геометрически: сначала по первой имеющейся точке $y = y^{(1)}$ мы строим еще четыре ковариантные ей точки, а затем при помощи инвариантных множителей определяем по ним x *).

Обратим теперь внимание на то, что в представленном выше решении уравнения пятой степени вычисление x_ν через корни λ итогового икосаэдрального уравнения происходит в два шага. Сначала методом II, 3 мы представляем y_ν в виде линейной комбинации пятизначных функций v_ν и $u_\nu v_\nu$ аргумента λ, где

$$u_\nu = \frac{12 f^2(\lambda)\, t_\nu(\lambda)}{T(\lambda)}, \quad v_\nu = \frac{12 f(\lambda)\, W_\nu(\lambda)}{H(\lambda)},$$

а затем уже x_ν представляются в виде линейной комбинации y_ν. Ясно, что эти два шага можно объединить в один: *можно строить точку x по четырем точкам, которые ковариантны образующей λ*. Простейшими рациональными функциями аргумента λ, икосаэдральные преобразования которых и определят нужные нам четыре

---

*) Принятый нами геометрический стиль изложения является, конечно, лишь отражением алгебраического хода решения, в котором переменные подбираются так, чтобы всегда выполнялось *правило однородности*, т. е. чтобы отношения между y_ν зависели только от *отношений* между x_ν. Это замечание следовало бы на самом деле повторять на протяжении всего дальнейшего изложения, но мы не будем этого делать ради краткости.

точки, являются (согласно результатам I, 4) следующие:

$$u_\nu,\quad v_\nu,\quad u_\nu v_\nu,\quad r_\nu = \frac{t_\nu^2(\lambda)}{f(\lambda)}.$$

Здесь $\sum\limits_\nu u_\nu = \sum\limits_\nu v_\nu = \sum\limits_\nu u_\nu v_\nu = 0$, тогда как $\sum\limits_\nu r_\nu$ нулю не равна. Поэтому вместо r_ν мы введем комбинации $r_\nu - \frac{1}{5}\sum\limits_\nu r_\nu$. Тогда

$$x_\nu = p'' v_\nu + q'' u_\nu + r'' u_\nu v_\nu + s''\left(r_\nu - \frac{1}{5}\sum_\nu r_\nu\right), \tag{7}$$

где природа коэффициентов p'', q'', r'' и s'' та же, что и в (6).

Последняя формула добавлена мною исключительно для полноты картины, поскольку главное достоинство нашего первого метода и состоит, как мне кажется, в том, что, будучи представленным с помощью формулы (6), он распадается на два отдельных шага, причем первый из них, касающийся сведе́ния общего уравнения пятой степени к каноническому уравнению, является более чем элементарным. К тому же формула (6) может оказаться более простой, чем формула (7). А именно, если P_1, Q_1, ..., R_2, S_2 из (4) будут зависеть лишь от a, b, c, d, но не от квадратного корня из соответствующего дискриминанта, то квадратный корень из дискриминанта исчезнет и из коэффициентов (6), в то время как в коэффициентах (7), так же как и в правой части икосаэдрального уравнения, он всегда неизбежно присутствует.

§ 3. Анализ методов Эрмита и Бринга

Прежде чем двигаться дальше, мы сравним наш первый метод с тесно связанными с ним способами решения уравнений пятой степени, предложенными Брингом и Эрмитом. Эти способы уже обсуждались нами во всех подробностях в II, 3, § 13, 14. Сейчас же я возвращаюсь к ним для того, чтобы продемонстрировать, что *наш первый метод является существенным упрощением метода Бринга.* Так же как и мы, Бринг преобразовывает данное уравнение пятой степени в главное уравнение и так же, как и мы, использует при этом прямолинейные образующие, лежащие на главной поверхности. Однако Бринг слишком усложняет этот процесс, считая, что для получения нормального уравнения, содержащего только один параметр, следует ввести еще одну побочную иррациональность, возникающую из вспомогательного кубического уравнения. Я, в свою очередь, предлагаю оставить в стороне этот путь, заменив его нашим первым методом, который, *однако, несет в себе основную идею метода Бринга.* Достигнутое нами улучшение ярче всего проявляется при рассмотрении рода кривых, возникающих при геометрической интерпретации: семейство прямолинейных образующих того или иного типа на главной поверхности параметризует кривая рода нуль, тогда как род кривой Бринга равен четырем*).

Сделанные здесь критические замечания в общем и целом относятся также и к подходу Эрмита. *Решать главное уравнение пятой степени с помощью эллиптических функций проще всего, пользуясь формулой для корней икосаэдрального уравнения, данной в* I, 5, § 7.

Для того чтобы использовать в своем решении форму Бринга, Эрмит вместо рационального инварианта g_2^3/Δ, которому равна правая часть икосаэдрального уравнения, вынужден применять соответствующее k^2. В самом деле, как мы показали в II, 3, § 14, вспомогательное кубическое уравнение Бринга становится приводимым, если k рассматривается как известное. Еще одно достигнутое нами существенное упрощение, которое я хотел бы отметить, состоит в том, что возможность решения икосаэдрального уравнения в эллиптических функциях у нас следует *прямо из вида* этого уравнения (см. I, 5, § 7).

§ 4. Подготовка к решению вторым методом

Для осуществления нашего второго метода нужна геометрическая конструкция квадратного уравнения относительно пары образующих первого типа, лежащих на главной поверхности и принадлежащих определенному линейному комплексу. Как раз эта задача и была решена нами в II, 2, § 10 для любой поверхности второго порядка, но *при специальном выборе системы координат.*

---

*) Из общей теории кривых рода 4 можно извлечь (подробности я опускаю), что для задания точки на кривой Бринга (при использовании в качестве нормальной формы для уравнений пятой степени трехчленного уравнения $y^5 + \beta y + \gamma = 0$) действительно необходимо решить лишь вспомогательное кубическое уравнение.

Мы тогда предполагали, что наша поверхность задается уравнением

$$(8) \qquad X_1X_4 + X_2X_3 = 0,$$

а параметризация семейства образующих первого типа вводится с помощью формулы

$$(9) \qquad \lambda = -\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Обозначая $A_{\mu\nu}$ координаты линейного комплекса, мы получили уравнение

$$(10) \qquad A_{42}\lambda_1^2 + (A_{23} - A_{14})\lambda_1\lambda_2 + A_{13}\lambda_2^2 = 0.$$

Я добавлю к этому и формулы, получающиеся при рассмотрении образующих второго типа. Находим определение параметра μ:

$$(11) \qquad \mu = -\frac{X_2}{X_4} = \frac{X_3}{X_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

а соответствующее квадратное уравнение имеет вид

$$(12) \qquad -A_{34}\mu_1^2 + (A_{23} + A_{14})\mu_1\mu_2 + A_{12}\mu_2^2 = 0.$$

Вспомним теперь, каким образом вводились параметры на главной поверхности (см. II, 3, § 2, 3). Они задавались теми же самыми формулами (8), (9) и (11), в которых вместо X_1, X_2, X_3 и X_4 стояли выражения Лагранжа:

$$(13) \qquad p_\mu = x_0 + \varepsilon^\mu x_1 + \varepsilon^{2\mu} x_2 + \varepsilon^{3\mu} x_3 + \varepsilon^{4\mu} x_4.$$

Поэтому формулы (10) *и* (11) *остаются неизменными при переходе к системе координат Лагранжа.*

В II, 2, § 9, где мы привели наиболее общий способ ковариантного сопоставления линейного комплекса точке x, никаких специальных условий на координаты не накладывалось. Формула для координат ковариантного комплекса

$$(14) \qquad a_{ik} = \sum_{l,m} c^{l,m}\left(x_i^{(l)}x_k^{(m)} - x_i^{(m)}x_k^{(l)}\right)$$

(в которой $c^{l,m}$ могут быть любыми рациональными функциями a, b, c, d и квадратного корня из соответствующего дискриминанта), так же как и координаты самой точки x, были написаны нами относительно фундаментального пентаэдра. Поэтому наша первая задача будет состоять в том, чтобы сделать замену координат: *надо* *выяснить, какие координаты $A_{\mu\nu}$ будет иметь комплекс* (14), *если мы вместо x_ν введем p_ν по формулам* (13). Те p, которые при этом будут соответствовать точкам $x^{(l)}$, $x^{(m)}$, я также буду обозначать $p^{(l)}$, $p^{(m)}$. Получим тогда

$$(15)\quad p_\mu^{(l)}p_\nu^{(m)} - p_\nu^{(l)}p_\mu^{(m)} = \\ = \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{\mu i+\nu k} - \varepsilon^{\nu i+\mu k}\right)\left(x_i^{(l)}x_k^{(m)} - x_k^{(l)}x_i^{(m)}\right),$$

где при суммировании в правой части из каждой пары комбинаций (i, k), (k, i) учитывается только одна. Умножим теперь каждое из шести различных равенств, получающихся из (15) для всевозможных $l \neq m$, на $c^{l,m}$ (из формулы (14)), а потом сложим их. При этом в левой части возникнут искомые $A_{\mu\nu}$, а в правой части соответствующие шестерки членов объединяются в a_{ik} по формуле (14). Таким образом, *искомые формулы для замены координат будут иметь вид*

$$(16)\qquad A_{\mu\nu} = \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{\mu i+\nu k} - \varepsilon^{\nu i+\mu k}\right)a_{ik}.$$

Подставим теперь эти $A_{\mu\nu}$ в (10) и (12). Возникающие при этом квадратные уравнения я запишу в том виде, с которым мы имели дело в II, 4,

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}_1\lambda_1^2 + 2\mathrm{A}_0\lambda_1\lambda_2 - \mathrm{A}_2\lambda_2^2 = 0,\\ &\mathrm{A}'\mu_1^2 + 2\mathrm{A}_0'\mu_1\mu_2 - \mathrm{A}_2'\mu_2^2 = 0,\end{aligned}$$

где

$$(18)\qquad \begin{aligned} 2\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_{23} - A_{14} &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{2i+3k} - \varepsilon^{3i+2k} + \varepsilon^{4i+k} - \varepsilon^{i+4k}\right)a_{ik},\\ \mathrm{A}_1 = A_{42} &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{4i+2k} - \varepsilon^{2i+4k}\right)a_{ik},\\ \mathrm{A}_2 = -A_{13} &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{3i+k} - \varepsilon^{i+3k}\right)a_{ik},\end{aligned}$$

и аналогично

$$(19)\qquad \begin{aligned} 2\mathrm{A}_0' &= -A_{23} - A_{14} = \\ &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{3i+2k} - \varepsilon^{2i+3k} + \varepsilon^{4i+k} - \varepsilon^{i+4k}\right)a_{ik},\\ \mathrm{A}_1' = A_{34} &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{3i+4k} - \varepsilon^{4i+3k}\right)a_{ik},\\ \mathrm{A}_2' = A_{12} &= \sum_{i,k}\left(\varepsilon^{i+2k} - \varepsilon^{2i+k}\right)a_{ik}.\end{aligned}$$

§ 5. О преобразованиях A и A′. Некоторые формулировки

Геометрические рассмотрения, положенные в основу нашего подхода, ясно показывают, что при четных перестановках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 отношения между введенными только что A_0, A_1, A_2 подвергаются тем же самым линейным преобразованиям, что и введенные в предыдущей главе величины, обозначавшиеся этими же буквами. Столь же очевидно, что отношения между только что введенными A_i' преобразуются контраградиентно отношениям между A_i. Я утверждаю, что это соответствие будет иметь место и в том случае, если мы рассмотрим не отношения между A_i, а сами A_i. Это утверждение можно легко доказать из общих соображений, и позже (в § 9) мы укажем, как это делается, но пока довольствуемся его непосредственной проверкой при помощи формул. Достаточно, очевидно, рассмотреть лишь две операции S и T, поскольку остальные получаются из них при помощи итераций и композиций. S и T были введены нами в II, 3, § 2 как следующие четные перестановки:

$$
\begin{aligned}
&S\colon\ x_\nu' = x_{\nu+1};\\
(20)\qquad &T\colon\ x_0' = x_0,\ x_1' = x_2,\ x_2' = x_1,\ x_3' = x_4,\ x_4' = x_3.
\end{aligned}
$$

Им соответствуют определенные перестановки a_{ik}, входящих в (14), и, приняв их во внимание, мы получим следующие формулы для замен A_i из (18):

$$
\begin{aligned}
&S\colon\ A_0' = A_0,\quad A_1' = \varepsilon^4 A_1,\quad A_2' = \varepsilon A_2;\\
(21)\qquad &T\colon \begin{cases} \sqrt{5}A_0' = A_0 + A_1 + A_2,\\ \sqrt{5}A_1' = 2A_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon+\varepsilon^4)A_2,\\ \sqrt{5}A_2' = 2A_0(\varepsilon+\varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_2,\end{cases}
\end{aligned}
$$

т. е. в точности те же формулы, что и в II, 2, § 2 *). Что же касается контраградиентности A_i' из формулы (19), то здесь достаточно заметить, что значения A_i' получаются из A_i, если в последних ε всюду заменяется на ε^2.

Допустим теперь, что построены инвариантные формы от A и A′, подобные тем, которые рассматривались

---

*) Конечно же, буквы A_0', A_1' и A_2' применены в (21) в совершенно ином смысле, чем в (19). Поскольку я не буду более возвращаться к формуле (21), то надеюсь, что к путанице это не приведет.

в предыдущей главе: это либо выражения A, B, C, D, зависящие только от $\mathbf{A}$, либо зависящие и от $\mathbf{A}$, и от $\mathbf{A}'$ линейные по $\mathbf{A}'$ функции F_1, F_2, F_3, рассматривавшиеся в II, 4, § 9 (см., в частности, формулы (45) — (47)). Если вместо $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ в них подставить их выражения через x, то всякий раз будут получаться рациональные функции x, не изменяющиеся при четных перестановках аргументов. Элементарным методом, на котором я не буду останавливаться, такие функции переписываются в виде рациональных функций коэффициентов a, b, c, d уравнения (1) и квадратного корня из его дискриминанта. Точное описание нашего второго метода, таким образом, заключается в следующем. Сначала мы получаем *точную постановку* проблемы форм *для* $\mathbf{A}_i$; при этом используются лишь значения только что упоминавшихся величин A, B, C и D. После этого мы в соответствии с изложенным в двух заключительных параграфах предыдущей главы присоединяем побочную иррациональность $\sqrt{A}$ и сводим эту проблему форм к *икосаэдральному уравнению* относительно λ. В результате остается лишь получить обратное выражение для корней x_0, x_1, …, x_4 в терминах λ. Этому посвящен следующий параграф.

§ 6. Формулы обращения для второго метода

Есть по меньшей мере три способа для решения последней задачи, и какой из них выбрать зависит от того, хотим ли мы получить решение сразу либо предпочитаем разбить его на два или на три шага.

В первом случае можно сразу воспользоваться формулой (7), которую я перепишу здесь еще раз, отбрасывая стоявшие ранее над символами p, q, r, s штрихи:

$$x_\nu = pu_\nu + qv_\nu + ru_\nu v_\nu + s\left(r_\nu - \frac{1}{5}\sum_\nu r_\nu\right). \tag{22}$$

Здесь p, q, r, s — рациональные функции величин a, b, c, d, квадратного корня из дискриминанта (1) и побочного квадратного корня $\sqrt{A}$.

Во втором случае мы сначала выразим через корень λ икосаэдрального уравнения наши величины $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ (это было со всеми подробностями проделано в II, 4, § 12). После этого мы воспользуемся младшими пятизначными функциями $\mathbf{A}_i$. Согласно § 5 предыдущей главы таковыми будут

$$\delta_\nu,\ \delta'_\nu,\ \delta^2_\nu,\ \delta_\nu\delta'_\nu.$$

Здесь снова $\sum\limits_\nu \delta_\nu = \sum\limits_\nu \delta'_\nu = \sum\limits_\nu \delta_\nu\delta'_\nu = 0$, а $\sum\limits_\nu \delta^2_\nu$ отлично от нуля, и для определения x_ν мы вместо δ^2_ν рассмотрим комбинации $\delta^2_\nu - \frac{1}{5}\sum\limits_\nu \delta^2_\nu$. При этом мы опять получим формулы вида

$$(23)\qquad x_\nu = p'\delta_\nu + q'\delta'_\nu + r'\left(\delta^2_\nu - \frac{1}{5}\sum_\nu \delta^2_\nu\right) + s'\delta_\nu\delta'_\nu,$$

в которых p', q', r' и s' будут рациональными функциями величин a, b, c, d и квадратного корня из дискриминанта (1), *но уже не будут содержать побочный квадратный корень* $\sqrt{A}$.

Наконец, в третьем способе мы прежде всего опять выразим величины $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ через корни икосаэдрального уравнения λ, но затем, вместо того чтобы сразу вычислить по ним x, мы сначала найдем соответствующие $\mathbf{A}'_0$, $\mathbf{A}'_1$ и $\mathbf{A}'_2$ из (19). Это делается с помощью зависящих и от $\mathbf{A}$, и от $\mathbf{A}'$ форм F_1, F_2, F_3, коэффициенты которых являются целыми функциями величин a, b, c, d и квадратного корня из дискриминанта (1) и из которых $\mathbf{A}'$ могут быть найдены как неизвестные, входящие *линейно*, аналогично тому, как это уже делалось нами ранее. После этого мы воспользуемся простейшими пятизначными функциями аргументов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, симметричными по $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$. Первая такая функция получается возведением в квадрат величин y_ν из II, 3:

$$y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 - \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2,$$

и применением к результату *процесса переноса*, постоянно использовавшегося в предыдущей главе. При этом получится билинейная форма

$$(24)\qquad \chi_\nu = 2\mathbf{A}'_0(\varepsilon^{4\nu}\mathbf{A}_1 + \varepsilon^{\nu}\mathbf{A}_2) + \mathbf{A}'_1(-2\varepsilon^{3\nu}\mathbf{A}_0 + \varepsilon^{2\nu}\mathbf{A}_1 - \varepsilon^{4\nu}\mathbf{A}_2) + \mathbf{A}'_2(-2\varepsilon^{2\nu}\mathbf{A}_0 - \varepsilon^{\nu}\mathbf{A}_1 + \varepsilon^{3\nu}\mathbf{A}_2).$$

В роли остальных трех функций, обладающих нужными свойствами, мы возьмем степени χ^2_ν, χ^3_ν и χ^4_ν. Следует отметить, что ни одна из сумм степеней $\sum\limits_\nu \chi^2_\nu$, $\sum\limits_\nu \chi^3_\nu$, $\sum\limits_\nu \chi^4_\nu$ здесь не будет равна нулю. Поэтому формулы, соответствующие формулам (22) и (23), лучше написать с дополнительным членом t'':

$$(25) \qquad x_\nu = p''\chi_\nu + q''\chi_\nu^2 + r''\chi_\nu^3 + s''\chi_\nu^4 + t'',$$

где p'', q'', r'', s'' и t'' вновь будут рациональными функциями величин a, b, c, d и квадратного корня из дискриминанта (1). *Но можно добиться и того, чтобы они стали рациональными функциями одних только a, b, c и d.* Для этого лишь надо в самом начале нашего решения выбрать $c^{l,m}$ в формулах (14) зависящими от одних только a, b, c, d.

Я не останавливался особенно на деталях, поскольку все приведенные здесь результаты совершенно автоматически получаются из изложенных ранее. Наиболее эффективным мне, бесспорно, представляется третий способ. Разбив описанным выше образом вычисление x_ν на три отдельных шага, мы трижды используем одну и ту же стандартную технику, с различными сторонами которой мы познакомились в трех предыдущих главах.

§ 7. Связь с Кронекером и Бриоски

Мы уже много раз говорили, что наш второй метод решения уравнений пятой степени является лишь *модификацией и дальнейшим развитием метода Кронекера*. В самом деле, как мы хорошо видели в II, 4, наша проблема A-форм может быть заменена (в указанном в II, 4 смысле) своей простейшей резольвентой шестой степени, т. е. *уравнением Якоби*. Тем не менее в деталях здесь имеются многочисленные различия, из которых я отмечу здесь только два, причем второе из них является наиболее важным.

Прежде всего заметим, что способ, которым в своем первом письме Эрмиту г-н Кронекер сводит общее уравнение Якоби шестой степени к случаю $A = 0$ *) или, как мы бы теперь сказали, к *икосаэдральному уравнению*, отличается от способа, примененного нами в предыдущей главе. *В изложении г-на Кронекера величины $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ содержали линейно входящий параметр ν, который впоследствии подбирается так, чтобы $A = \mathbf{A}_0^2 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ обратилось в нуль.* Эту идею, конечно, можно совместить и с нашими формулами, с самого начала снабдив величины $c^{l,m}$ из формул (14) линейно входящим параметром ν.

*) См. II, 1, § 6.

Тогда вместо того, чтобы с помощью побочного квадратного корня разделить пару общих для канонической поверхности и нашего линейного комплекса образующих первого типа *сразу для всех* значений параметра ν, мы будем считать, что наш комплекс *варьируется в линейном пучке*, а затем зафиксируем его положение тем условием, что он должен проходить через две рассматриваемых нами образующих первого типа, лежащих на канонической поверхности. Это условие и несет в себе побочный квадратный корень. В предыдущем изложении я отказался от этого подхода потому, что он применим лишь в случае, когда проблема A-форм трактуется как резольвента данного уравнения пятой степени, тогда как я хотел исследовать ее вне зависимости от этого.

Во-вторых, мы видим, что *все общие формулы, полученные г-ном Бриоски (и подробно представленные нами в* II, 1, § 6) *для реализации общего метода Кронекера, отличаются от наших формул* (18). Для построения своих $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ г-н Бриоски использовал шесть линейно независимых величин u_∞, u_0, u_1, ..., u_4, тогда как мы использовали двенадцать величин a_{ik}, между которыми имеются определенные соотношения: $a_{ik}=-a_{ki}$ и $\sum\limits_i a_{ik}=\sum\limits_k a_{ik}=0$. Когда наряду с $\mathbf{A}$ мы захотели рассматривать еще и $\mathbf{A}'$, мы с успехом воспользовались все теми же a_{ik}, в то время как г-ну Бриоски пришлось бы привлечь шесть новых величин u'_∞, u'_0, $u'_1, \ldots, u'_4$. Я не буду более продолжать это сопоставление, относящееся лишь к внешнему виду формул. Но я замечу здесь, что *как наши собственные формулы, так и формулы г-на Бриоски имеют максимально возможную общность*. А именно, a_{ik} и соответственно $c^{l,m}$ (формула (14)) могут быть однозначно восстановлены по произвольно заданным $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ — для этого всего лишь надо сделать обратное к осуществленному в § 4 преобразование координат.

Необходимые для этого вычисления таковы. Сначала мы из формул (18) и (19) выразим координаты $A_{\mu,\nu}$:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
A_{12} &= \mathbf{A}'_2, & A_{34} &= -\mathbf{A}'_1,\\
A_{13} &= -\mathbf{A}_2, & A_{42} &= \mathbf{A}'_1,\\
A_{14} &= -\mathbf{A}_0-\mathbf{A}'_0, & A_{23} &= \mathbf{A}_0-\mathbf{A}'_0.
\end{aligned}
$$

После этого мы заменим формулы (13) на обратные:

$$
(27)\qquad 5x_i=\varepsilon^{-i}p_1+\varepsilon^{-2i}p_2+\varepsilon^{-3i}p_3+\varepsilon^{-4i}p_4.
$$

Отсюда

$$25\left(x_i^{(l)}x_k^{(m)}-x_k^{(l)}x_i^{(m)}\right)=$$
$$=\sum_{\mu,\nu}\left(\varepsilon^{-\mu i-\nu k}-\varepsilon^{-\nu i-\mu k}\right)\left(p_\mu^{(l)}p_\nu^{(m)}-p_\nu^{(l)}p_\mu^{(m)}\right),$$

где при суммировании из каждой пары комбинаций (μ, ν), (ν, μ) берется только одна. Теперь мы умножим каждое равенство на $c^{l,m}$ и сложим их вместе (по шести различным комбинациям (m, l)):

$$25a_{ik}=\sum_{\mu,\nu}\left(\varepsilon^{-\mu i-\nu k}-\varepsilon^{-\nu i-\mu k}\right)A_{\mu,\nu}, \tag{28}$$

что и дает искомые формулы.

В заключение я хотел бы еще раз коротко сформулировать ту *геометрическую идею*, которая лежит в основе нашей интерпретации метода Кронекера и которая, по всей видимости, имеет огромное значение. Первое, что мы делаем,— это заменяем точку x общим линейным комплексом, переходя, таким образом, от уравнения пятой степени к уравнению двадцатой степени, корни которого связаны соотношениями $a_{ik}=-a_{ki}$; $\sum\limits_i a_{ik}=\sum\limits_k a_{ik}=0$. Во-вторых, мы с помощью формул (18) и (19) относим этот комплекс к другой координатной системе. Не буду сейчас входить в подробности, касающиеся смысла величин $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ *), замечу лишь, что первое из двух уравнений (17) тривиально выполняется, когда все $\mathbf{A}_i$ равны нулю, а второе — когда равны нулю все $\mathbf{A}'$. Поэтому на главной поверхности для образующих первого типа $\mathbf{A}_0=\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2=0$, а для образующих второго типа $\mathbf{A}_0'=\mathbf{A}_1'=\mathbf{A}_2'=0$. Для чего мы делали преобразование координат? С его помощью мы получили возможность заменить уравнение двадцатой степени относительно a_{ik} *проблемой форм для* $\mathbf{A}_i$ *или* $\mathbf{A}_i'$. Действительно, мы видели, что при 60 четных коллинеациях $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_0'$, $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$ преобразуются как тернарные формы. Заметим теперь, что это свойство нашей конструкции можно было бы предсказать заранее. В самом деле, мы знаем, что при четных коллинеациях каждая из двух систем пря-

*) См. мою заметку: Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten // Math. Ann.— 1869.— Bd 2. В частности, обратите внимание на то, что при $\mathbf{A}_0^2+\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_0'^2+\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'$ наш комплекс становится специальным, т. е. соответствует прямой.

молинейных образующих канонической поверхности переходит в себя. *Поэтому при таких коллинеациях должны переходить в себя и оба трехмерных семейства линейных комплексов, содержащие эти системы образующих.* Сформулированное выше свойство величин **A**, **A'** отсюда сразу следует, если знать, что каждой коллинеации пространства соответствует определенная замена линейных координат. Таким образом, *возможность сведения уравнения относительно a_{ik} к тернарной проблеме форм совершенно очевидна с точки зрения элементарной интуиции линейной геометрии*, и мне бы хотелось, чтобы наш второй метод рассматривался, в частности, и с этих позиций.

§ 8. Сравнение двух наших методов между собой

Два наших метода решения уравнений пятой степени хотя и были противопоставлены нами один другому, но являются, тем не менее, тесно связанными, как это вытекает из рассуждений § 1 настоящей главы. Здесь мы покажем, что различие между ними имеется лишь в одном малосущественном месте, и икосаэдральное уравнение, к которому сводит данное уравнение пятой степени один из методов, всякий раз может быть получено и при помощи другого метода.

Подобный переход от первого из наших методов ко второму сразу ясен. При сопоставлении точке x ковариантной точки y, лежащей на главной поверхности, мы сначала (см. § 2) строили ковариантную к x прямую, а потом пересекали ее с главной поверхностью. *Выберем теперь в качестве линейного комплекса, фигурирующего во втором методе, именно эти прямые.* Для этого надо лишь вычислить соответствующие a_{ik}. Тогда одно из двух икосаэдральных уравнений, к которым сводится возникающая здесь проблема **A**-форм, будет, очевидно, совпадать с икосаэдральным уравнением, используемым для нахождения y_ν.

Рассуждение в обратную сторону не намного сложнее. Допустим, что, используя второй метод, мы сопоставили данному уравнению пятой степени икосаэдральное уравнение, т. е. сопоставили соответствующей точке x прямолинейную образующую λ главной поверхности. *Тогда мы можем многими различными способами задать какую-либо рациональную точку, лежащую на этой образующей.* Достаточно, например, сделать y_ν пропорциональными $W_\nu(\lambda)$ или другому выражению, также дающему резольвенту интересующего нас вида для икосаэдрального уравнения. Такая точка y всегда будет ковариантно соответствовать точке x, и мы *немедленно получаем преобразование Чирнгауза*, сопоставляющее точке x точку y на канонической поверхности. Полагая в основу нашего первого метода именно это преобразование, мы, несомненно, вернемся к исходному икосаэдральному уравнению.

В этом смысле можно сказать, что *мы нашли только один путь для решения уравнений пятой степени*, *а различие между нашими двумя методами состоит*, *как и утверждалось*, *лишь в последовательности выполнения отдельных шагов*. В первом методе мы сразу же присоединяем побочный квадратный корень, а во втором методе мы не вводим его до тех пор, пока не возникает необходимость разделить две системы образующих. Помимо этого первый метод обладает, как уже говорилось, тем преимуществом, что с самого начала имеет дело с совершенно элементарными вещами.

И все же общей для обоих наших методов основой явилась прежде всего теория икосаэдра, и затем рассмотрение прямолинейных образующих канонической поверхности. У меня нет никаких сомнений в том, что именно первая дает нам правильное *нормальное уравнение*, к которому следует сводить решение общих уравнений пятой степени. В то же время я считаю, что введенные нами геометрические конструкции в других задачах окажутся столь же полезными, сколь полезными они были здесь. Я полагаю, что удается построить общую алгебраическую теорию проблем форм, из которой бы наша редукция уравнений пятой степени к икосаэдру вытекала как простое следствие и отпадала бы необходимость в специальном ее обосновании. Я попытался сделать это *), сводя вопрос об установлении связи между проблемой форм для $\mathbf{A}_i$ и уравнением пятой степени (а формулы Бриоски подходят для этой цели столь же хорошо, как и наши формулы с a_{ik}) единственно лишь

*) K l e i n. Ueber die Auflösung gevisser Gleichungen von siebenten und achten Grade // Math. Ann.— 1879.— Bd 15 (в частности, см. § 1—5). Использованный там способ изложения предполагает, что каждой перестановке x_ν соответствует единственное преобразование $\mathbf{A}_i$; хотя на самом деле имеет место взаимная однозначность, это не оказалось необходимым для выполнения алгебраического хода решения.

к тому факту, что четным перестановкам x_i можно простым и естественным способом сопоставить преобразования $\mathbf{A}_i$. Я не буду вникать в этот предмет глубже потому, что мне не хотелось бы еще раз пускаться во все те пространные рассуждения, которые я изложил в I, 5 (§ 4, 5, 9). Я готов скорее ограничиться геометрическими конструкциями частного вида, полагая, что они позволяют достигнуть более глубокого понимания общей теории.

§ 9. О необходимости побочного квадратного корня

Мы подошли к концу нашего изложения. То, что нам осталось еще добавить, касается неизбежности появления того самого побочного квадратного корня, который в первом из наших методов возникал в преобразовании Чиргауза, а во втором — при решении проблемы А-форм. Мы прежде всего покажем, что без такого квадратного корня и в самом деле нельзя обойтись, если мы хотим свести общее уравнение пятой степени к икосаэдральному уравнению. Затем мы выведем отсюда упоминавшуюся нами в II, 1, § 7 *теорему Кронекера*, которая утверждает, что общее уравнение пятой степени вообще не имеет рациональных резольвент, содержащих только один параметр.

Для получения первого результата мы сейчас докажем следующее утверждение. Пусть x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 — пять переменных величин, а φ и ψ — две их целые функции, не имеющие общих делителей. Утверждается, что *φ и ψ нельзя выбрать так, чтобы*

$$\lambda = \frac{\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)}{\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)} \tag{29}$$

испытывало икосаэдральные преобразования при четных перестановках x_ν.

Доказательство сразу же получится, как только мы заметим, что ввиду произвола в выборе x_ν этот вопрос, первоначально относившийся к *функциям*, переводится на язык *форм*. А именно, если бы при любых четных перестановках x_ν соответствующие преобразования λ имели вид

$$\lambda' = \frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\alpha\varphi + \beta\psi}{\gamma\varphi + \delta\psi}, \tag{30}$$

то, принимая во внимание произвольную природу x_ν, мы могли бы сразу же написать

$$(31)\qquad \varphi' = C(\alpha\varphi + \beta\psi), \quad \psi' = C(\gamma\varphi + \delta\psi)$$

для подходящей константы C. Но это говорит о том, что при четных перестановках x_ν целые функции φ и φ преобразуются *билинейно*. Но как было обстоятельно доказано в I, 2, § 8, любая группа *бинарных преобразований*, изоморфная группе икосаэдра, обязана содержать более 60 операций, в то время как четным перестановкам x_ν может соответствовать лишь не более 60 различных преобразований целых рациональных функций φ и ψ. Это противоречие и доказывает невозможность выбора функции (29)*). Противоречие, очевидно, не исчезнет, даже если мы будем считать, что $\sum\limits_\nu x_\nu = 0$, поскольку любое уравнение пятой степени можно привести к уравнению с $\sum\limits_\nu x_\nu = 0$ *рациональным* преобразованием.

Чтобы яснее почувствовать суть этого доказательства, обратимся к теории главных уравнений пятой степени. Здесь кроме условия $\sum\limits_\nu x_\nu = 0$ мы имеем также и $\sum\limits_\nu x_\nu^2 = 0$. Запишем равенство (30) в виде

$$(32)\qquad \varphi'(\gamma\varphi + \delta\psi) = \psi'(\alpha\varphi + \beta\psi).$$

В случае главных уравнений не требуется, чтобы две поверхности

$$\varphi'(\gamma\varphi + \delta\psi) = 0, \quad \psi'(\alpha\varphi + \beta\psi) = 0$$

полностью совпадали; *нужно лишь, чтобы они пересекались с главной поверхностью по одной и той же кривой, как раз и задаваемой этими условиями.* Ранее мы потребовали, чтобы φ и ψ, равно как φ' и ψ', не имели общих делителей. Теперь же мы должны потребовать, чтобы нельзя было вынести общий множитель и из любых линейных комбинаций наших функций с величинами, кратными $\sum\limits_\nu x_\nu$ и $\sum\limits_\nu x_\nu^2$. Тем не менее вполне может так случиться, что кривые пересечения главной поверхности с поверхностями $\varphi' = 0$ и $\psi' = 0$ будут иметь общие компоненты, только эти компоненты не должны составлять всего этого пересечения, так как в этом случае мы не

*) Здесь и далее см. мой неоднократно цитированный мемуар в Math. Ann.— 1877.— Bd 12, а также мое сообщение Эрлангенскому обществу от 15 января 1877 г.

смогли бы написать формулы (31), которая и дает противоречие. К сожалению, я не могу здесь подробно проработать только что сказанное мною, а также показать, что эти соображения на самом деле включают в себя наш предыдущий подход к теории главных уравнений пятой степени.

Доказательство, которое мы дали для нашего первого утверждения, без особых изменений переносится и на все остальные случаи. Прежде всего, вместо общего уравнения пятой степени мы сразу же можем рассмотреть проблему форм для $\mathbf{A}_i$ и получить, что при сведении этой задачи к икосаэдральному уравнению невозможно избежать применения побочного квадратного корня $\sqrt{A}$ или эквивалентной ему иррациональности. Далее, мы получаем, что общее уравнение четвертой степени нельзя свести к октаэдральному, а после присоединения квадратного корня из дискриминанта — к тетраэдральному уравнению при помощи построения рациональных резольвент *). Помимо этого можно найти и другие важные применения доказанного результата. В этой связи я лишь замечу, что описанные в § 5 свойства $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ могут быть получены только что описанным образом.

---

*) Что касается уравнений *четвертой степени*, то их решение с помощью *октаэдрального* (или *тетраэдрального*) уравнения осуществляется способом, который является в некотором смысле смесью двух различных методов решения уравнений пятой степени и который я вкратце опишу здесь. Корни x_0, x_1, x_2, x_3, как и выше, интерпретируются как *тетрагональные* координаты на плоскости. Тогда возникает главная коника $\sum\limits_{\nu} x_{\nu}^2 = 0$ и в II, 3, § 2 мы показали, что лежащая на ней точка непосредственно определяется из октаэдрального (или тетраэдрального) уравнения. Теперь мы произвольной точке плоскости x ковариантно сопоставим точку y на главной конике, проведя из x две возможные касательные к этой конике и выбрав из двух точек касания одну. После этого можно написать октаэдральное (или тетраэдральное) уравнение, которому удовлетворяет y, затем, обращая формулы, найти x и т. д. и т. п.— совершенно аналогично изложенному в двух заключительных параграфах предыдущей главы.

В случае уравнений третьей степени вся эта громоздкая процедура исчезает (см. II, 3, § 3). В самом деле, как мы видели в I, 2, § 8, возникающая здесь диэдральная группа из шести подстановок может быть прекрасно записана в однородной форме без всякого увеличения числа входящих в нее подстановок. Поэтому та явная причина появления побочных иррациональностей, которую мы обнаруживаем в случае уравнений пятой и четвертой степеней, здесь отсутствует.

§ 10. Специальные уравнения пятой степени, допускающие рациональную редукцию к икосаэдральному уравнению

Мы должны на некоторое время прервать общие рассмотрения, для того чтобы упомянуть о тех специальных уравнениях пятой степени, которые составляют исключение из доказанной только что теоремы. В II, 2, § 4 мы дали геометрическую интерпретацию резольвент пятой степени и увидели, что они могут изображаться двумя полурегулярными пространственными кривыми рода нуль. Наша задача сейчас состоит в том, чтобы обратить этот результат. Пусть

$$F(x, Z) = 0 \tag{33}$$

— уравнение пятой степени с одним параметром, допускающее подобную интерпретацию. *Я утверждаю, что его можно свести к икосаэдральному уравнению при помощи рационального преобразования.*

Доказательство будет по существу тем же самым, что и рассуждение, в несколько иной форме уже приводившееся нами в II, 3, § 1 при рассмотрении канонических уравнений. По нашему предположению, пять корней (33) могут быть представлены в виде рациональных функций некоторой вспомогательной величины λ

$$x_\nu = R_\nu(\lambda) \tag{34}$$

таким образом, что при надлежащих изменениях λ x_ν будут испытывать всевозможные четные перестановки. Теперь нам следует воспользоваться одним результатом из теории рациональных кривых, согласно которому параметр λ всегда можно ввести как рациональную функцию от x, т. е. так, чтобы каждой точке кривой соответствовало только одно значение λ *). Чтобы не вводить лишних обозначений, я буду в дальнейшем считать, что λ, фигурирующее в (33), уже было введено таким способом. Тогда всякое взаимно однозначное преобразование нашей кривой в себя и, в частности, каждая четная перестановка x_ν задает преобразование параметра λ, имеющее однозначное обратное, а потому обязательно *линейное* преобразование. Таким образом, по группе из 60 четных перестановок x_ν мы строим просто изоморфную ей

*) Доказательство этой теоремы см. в статье: Lüroth // Math. Ann.— 1875.— Bd 9.

группу линейных преобразований λ. В силу I, 5, § 2 при этом обязана получиться группа икосаэдра. Если вместо λ ввести в качестве параметра подходящую линейную функцию $\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$, то мы получим эту группу в неоднократно приводившемся нами каноническом виде. *Такое λ' является рациональной функцией x и определяется непосредственно при помощи икосаэдрального уравнения, что и доказывает наше утверждение.*

Добавим к уже сказанному ряд отдельных замечаний. Во-первых, видно, что эта теорема с несущественными изменениями может быть повторена для проблем A-форм, а если рассмотреть вместо икосаэдра октаэдр или тетраэдр, то и для уравнений четвертой степени. Во-вторых, отметим, что для уравнений пятой степени может и не существовать рациональной пространственной кривой, которая переходит в себя при всех перестановках x_ν. И, наконец, заметим, что появление рациональных инвариантных кривых (как мы их называли) возможно лишь для тех проблем форм, группа которых просто изоморфна одной из групп линейных замен переменных, рассмотренных нами до этого.

§ 11. Теорема Кронекера

Теперь у нас имеются все необходимые средства для доказательства часто упоминавшейся здесь теоремы Кронекера. Мы хотим доказать, что *нельзя для любого заданного уравнения пятой степени построить рациональную резольвенту, содержащую только один параметр, присоединяя один лишь квадратный корень из дискриминанта.*

Заметим сначала, что благодаря тому, что группа четных перестановок пяти предметов является простой *), сформулированная выше теорема допускает другую формулировку, которая вначале кажется более точной. А именно, из общих соображений ясно, что, применяя еще раз конструкцию резольвенты к произвольной резольвенте пятой степени $F(X)=0$, мы можем добиться того, чтобы $\sum\limits_{\nu} X_\nu = 0$. При этом корни X_ν здесь будут определенным образом соответствовать корням x_ν исходного уравнения и это соответствие будет сохраняться при

*) Определение см. в I, 1, § 2.

любых четных перестановках x_ν. Поэтому, как и ранее, мы можем написать

$$X_\nu = px_\nu^{(1)} + qx_\nu^{(2)} + rx_\nu^{(3)} + sx_\nu^{(4)}, \tag{35}$$

где $x_\nu^{(k)} = x_\nu^k - \frac{1}{5}\sum_\nu x_\nu^k$, а p, q, r и s рационально зависят от коэффициентов исходного уравнения и квадратного корня из его дискриминанта. Поэтому все, что мы теперь должны доказать, состоит в следующем: *из общего уравнения пятой степени нельзя получить уравнение пятой степени, содержащее только один параметр, при помощи преобразования Чирнгауза* (35).

Для этого сначала следует выяснить, какая геометрическая интрепретация вообще может быть у уравнений с одним параметром. Совокупность всевозможных значений x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 должна образовывать связный континуум. Поэтому если мы заставим x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 произвольным образом меняться в формулах (35), то точка X пройдет, во всяком случае, *неприводимый* кусок. Если добавить сюда предположение о том, что получающиеся уравнения зависят только от одного параметра, то этот неприводимый кусок обязан быть *кривой*. Я утверждаю, что *полученная таким образом неприводимая кривая должна переходить в себя при* 60 *четных коллинеациях*. Действительно, благодаря принятому нами соглашению о коэффициентах p, q, r, s, возникающих в (35), четные перестановки x_ν будут соответствовать четным перестановкам X_ν, и вместе с тем любую перестановку x_ν (в том числе и любую четную перестановку) можно получить, непрерывно изменяя x_ν, начиная с их исходного положения.

Теперь мы вернемся к специальному результату из предыдущего параграфа. А именно, ясно, что *описанная только что кривая X должна быть, во всяком случае, рациональной*. В самом деле, мы можем считать, что x_0, x_1, x_2, ..., x_4 в (35) каким-либо образом рационально зависят от параметра λ, но тогда и X_ν становятся рациональными функциями этого λ (при этом нас не должны беспокоить те специальные случаи, в которых эта зависимость сократится в формулах (35), поскольку совершенно ясно, что этого всегда можно избежать). Таким образом, выполнены все условия теоремы из предыдущего параграфа, и мы заключаем, что *можно найти такую рациональную функцию X_ν, которая при четных перестановках X_ν испытывает икосаэдральные преобразо-*

вания. В силу (35) эта функция была бы также рациональной функцией и x_ν, тоже испытывающей икосаэдральные преобразования при четных перестановках x_ν. Но в § 9 мы ясно показали, что таких рациональных функций x_ν не существует. Стало быть, мы пришли к противоречию и поэтому должны отбросить предположение о существовании преобразования Чирнгауза (35) с указанными выше свойствами, что и требовалось доказать.

Я закончу несколькими более общими наблюдениями из теории уравнений.

Во-первых, заменяя всюду в предыдущем изложении икосаэдр на октаэдр или на тетраэдр, можно безо всякого изменения повторять наши рассуждения и в случае *уравнений четвертой степени* до тех пор, пока не придем к утверждениям, связанным с простотой соответствующей группы. Группа уравнения четвертой степени является составной. Поэтому если мы хотим наблюдать эффект Кронекера, то мы должны потребовать, чтобы *группа рассматриваемой резольвенты была просто изоморфна группе из двадцати четырех или соответственно двенадцати перестановок величин* x_0, x_1, x_2, x_3. Если опустить это условие, то рациональная резольвента общего уравнения четвертой степени вполне может оказаться содержащей лишь один параметр. Эмпирическое доказательство этого факта дается самым обычным решением уравнения четвертой степени. В самом деле, это решение как раз и опирается на вспомогательное однопараметрическое уравнение, а точнее — на биномиальное уравнение.

В случае *уравнений третьей степени*, конечно, и речи не может быть о каком-либо утверждении типа теоремы Кронекера — это ясно видно из предыдущих замечаний.

В случае *уравнений высших степеней* я, чтобы не быть многословным, ограничусь только одним замечанием, сохранив для простоты предположение, которое мы сделали для уравнений четвертой степени. В этом случае для общего уравнения (за некоторыми тривиальными исключениями) однопараметрической резольвенты не существует по той простой причине, что согласно наблюдению, сделанному нами в § 10, среди соответствующих инвариантных кривых не может быть рациональных.

ДОПОЛНЕНИЕ А
ПИСЬМО СЕРРА

Принстон, март 17—25, 1978

Дорогой М. Грей!

Я прошу прощения за задержку с ответом на Ваши вопросы, касающиеся монографии Клейна об икосаэдре. Просматривая ее время от времени в течение последних недель, я так и не мог что-либо написать.

Прежде всего, я не смог найти никакого современного изложения этого материала и сомневаюсь, что таковое вообще возможно. Самое близкое к нашему времени — гл. XIII книги Диксона «Современные алгебраические теории» (1930). Кроме этого см. «Конечные группы линейных подстановок» Вимана (Enzykl, Math. Wiss., I, B.3, *f*), «Алгебру II» Г. Вебера и особенно «Учебник алгебры II» Р. Фрике (1926), который показался мне более понятным, чем Клейн.

Я надеюсь, что больше информации Вы получили от Арнольда, Фрида, Брискорна и Хирцебруха: они могли бы рассказать Вам о соотношениях в A_5, исключительной системе корней E_8 и поверхности $x^2+y^3+z^5=0$ (см., например, недавние статьи Наруки в Invent. Math. и Math. Ann.).

Теперь несколько замечаний о тематике книги Клейна.

1. *Поля определения.*

Пусть $G=A_5$ — группа икосаэдра. По существу, Клейн доказывает, что G регулярно действует на кривой X рода нуль и что фактор X/G также имеет род нуль. При этом он не уточняет поля определения — в этом нет необходимости, поскольку он использует точные формулы, содержащие лишь вполне безобидные иррациональности. Тем не менее представляет интерес взглянуть на этот вопрос более внимательно.

Заметим сначала, что каждой кривой (на которой действует G) можно сопоставить квадратный корень из 5, который тем самым должен принадлежать основному полю k, если только X и элементы из G были определены над k (в этом случае я буду говорить, что X есть «G-кривая над k»). В самом деле, при расширении основного поля до его алгебраического замыкания действие G даст вложение $G \to \mathrm{PGL}_2$, и если $c \in G$ — фиксированный элемент порядка 5, то ему будет соответствовать матрица A (определенная с точностью до умножения на скаляр), собственные значения λ и μ которой таковы, что λ/μ — примитивный корень пятой степени из единицы. Полагая $x = 1 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}\right)$, мы получим, что $x^2 = 5$ и что x внутренним образом связан с c (т. е. не зависит ни от выбора представляющей матрицы, ни от выбора расширения полей).

Таким образом, если мы хотим задать G-кривую над k, то мы должны потребовать, чтобы k содержало квадратный корень из 5. Сделаем это и фиксируем один из таких корней: обозначим его $\sqrt{5}$. Ограничимся теми G-кривыми, которым соответствует именно этот квадратный корень. Тогда можно доказать, что *такая G-кривая над k действительно существует, причем она единственна с точностью до единственного изоморфизма* (т. е. если X и X' — две такие кривые, то существует единственный изоморфизм $f: X \to X'$ такой, что $f \circ g = g \circ f$ для всех $g \in G$). Утверждения о единственности просты, особенно последнее, равносильное тому, что централизатор G в PGL_2 сводится к $\{1\}$. Утверждение о существовании можно было бы получить из единственности стандартным алгебро-геометрическим методом «спуска». Но можно использовать и более точный способ, см. ниже.

Если у нас есть G-кривая X над k, то возникают два естественных вопроса.

а) Верно ли, что X изоморфна проектной прямой $\mathbf{P}^1$, т. е., что X имеет k-рациональную точку, или, что равносильно, что G можно вложить в $\mathrm{PGL}_2(k)$?

б) Верно ли, что факторкривая X/G изоморфна $\mathbf{P}^1$? (Напомню, что кривая рода 0 не всегда изоморфна $\mathbf{P}^1$ над основным полем! Имеется «препятствие», представленное алгеброй кватернионов.)

Ответ на б) — «да», и это просто: на X/G есть три канонические точки, в которых накрытие $X \to X/G$ имеет ветвления порядков 2, 3 и 5, и в силу своей единственности эти точки рациональны над k, но кривая рода 0, имеющая рациональную точку, изоморфна $\mathbf{P}^1$, что и требовалось. При желании можно нормировать изоморфизм между X/G и $\mathbf{P}^1$ так, чтобы три канонические точки соответствовали точкам $0, 1$ и ∞, — Клейн так и поступает.

Ответ на а) более интересен: X не всегда изоморфна $\mathbf{P}^1$. Более того, кватернионная алгебра, соответствующая X, есть стандартная алгебра кватернионов $H_k = k \otimes H$, порожденная элементами i, j с соотношениями $ij = -ji$, $i^2 = -1$ и $j^2 = -1$. *Поэтому X изоморфна $\mathbf{P}^1$ тогда и только тогда, когда H_k «расщепляется» (т. е. становится изомофной алгебре матриц $M_2(k)$)*, или, что равносильно, тогда и только тогда, когдаа -1 *является суммой двух квадратов в k.*

Чтобы показать это, можно, например, точно описать вложение $G = \mathrm{A}_5$ в проективную группу H_k, т. е. в H_k^*/k^* (которая, если говорить на языке Галуа, есть «скрученная форма» PGL_2). Это, я уверен, можно сделать, используя явные формулы, выведенные Кокстером,— у меня нет сейчас точных ссылок, но они приводились в недавней работе М.— Ф. Вигнера в Crelle. Другой способ состоит в использовании представления группы G как группы Кокстера в трехмерном пространстве. Этот метод работает над $\mathrm{Q}(\sqrt{5})$ и дает вложение G в $\mathrm{SO}_3(f)$, где f — некоторая квадратичная форма от трех переменных над $\mathrm{Q}(\sqrt{5})$. Далее надо проверить, что поле кватернионов, связанное с f, есть на самом деле H_k. Оба способа дают одновременно и явную конструкцию G-кривой X. Итак,

Если нам нужна какая-либо G-кривая X над k, то необходимо лишь, чтобы $\sqrt{5} \in k$; если мы хотим вдобавок, чтобы $X \simeq \mathbf{P}^1$, то необходимо, чтобы -1 была суммой двух квадратов в k.

Отметим, что обоим условиям можно удовлетворить, присоединив к k квадратичные иррациональности $\sqrt{5}$ и $\sqrt{-d}$ с произвольным $d > 0$, так что они не опасны с точки зрения «решения уравнений». И еще одно замечание на этот счет. Если вместо A_5 нас интересует $G = \mathrm{A}_4$ или S_4, то ситуация аналогична и более проста: условие $\sqrt{5} \in k$ пропадает, G-кривая X всегда существует, единственна и изоморфна $\mathbf{P}^1$ тогда и только тогда, когда кватернионная алгебра H_k расщепляется.

Выше я, конечно, предполагал, что характеристика k равна 0. Если Вас интересует случай char $k = p \neq 0$, то здесь происходит вот что: если $p \neq 2$, то G-кривая X существует для $G = \mathrm{A}_4$, S_4 и для $G = \mathrm{A}_5$ при $\sqrt{5} \in k$, если $p = 2$, то она существует для $G = \mathrm{A}_4$ и для $G = \mathrm{A}_5$ при $\sqrt[3]{1} \in k$, и ее не существует при $p = 2$, $G = \mathrm{S}_4$. Во всех случаях, когда кривая существует, она будет k-изоморфна $\mathbf{P}^1$, поскольку группа Брауэра конечного поля будет нулевой.

Отметим также следующее. Допустим, что мы определили кривую X над $\mathrm{Q}(\sqrt{5})$, и пусть K — ее поле функций. Действие $G = \mathrm{A}_5$ на X порождает действие G на K, при котором поле констант $\mathrm{Q}(\sqrt{5})$ остается неподвижным. Это действие можно продолжить *до действия* S_5 на K так, чтобы элементы из $\mathrm{S}_5 \backslash \mathrm{A}_5$ действовали на $\mathrm{Q}(\sqrt{5})$ посредством замены $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ («полуалгебраическое действие»). Иными словами, рассматривая X *как кривую над* $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$-неприводимую, но распадающуюся на две компоненты над $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$), мы имеем на X действие S_5. Я упомянул об этом действии по двум причинам:

1) оно естественно возникает с точки зрения модулярных форм (см. ниже);

2) есть очень простая модель такого действия, а именно следующая: рассмотрим квадрику Y, заданную в проективном пространстве уравнениями

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 0.$$

На Y есть естественное действие S_5 (перестановками координат). Обозначим теперь буквой X «множество прямых» на Y. Хорошо известно, что на X есть естественная структура (приводимой) кривой, которая над полем квадратного корня из дискриминанта (каковым здесь является $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$) распадается на две компоненты, имеющие каждая род 0. Действие S_5 на Y определяет действие S_5 на X, которая в данном случае и является «нашей» кривой X (аналогично, кривая рода 0 с действием S_4 может быть задана как коника $x_1 + x_2 + \ldots + x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_4^2 = 0$).

2. *Решение уравнения пятой степени.*

Предположим, что $\sqrt{5}$ принадлежит k, и пусть X и $X \backslash G \simeq \mathbf{P}^1$ те же, что и выше. Если z — k-точка на X/G, то ее прообраз на X, вообще говоря, не рационален над k. Говоря точнее, поле рациональности для подъема $x \in X$ точки $z \in X/G$ есть расширение Галуа поля k, группа Галуа которого есть подгруппа в G (это, в частности, может быть и сама группа G). Можно спросить: *получаются ли таким способом все расширения Галуа поля k с группой $G = \mathrm{A}_5$?* Если так, то G-накрытие $X \to X/G$ будет совершенно аналогично квадратичному накрытию $x \to x^2 (\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1)$, которое дает все квадратичные расширения.

В сущности именно на этот вопрос и ответили Эрмит и Клейн. Ответ, как Вы увидите,—«почти что да».

Сначала преобразуем этот вопрос в более геометрический. Обозначим k'/k заданное расширение с группой Галуа G (оно ассоциировано с уравнением пятой степени, дискриминант которого — полный квадрат). Естественный гомоморфизм

$$\mathrm{Gal}(k'/k) \simeq G \to \mathrm{Aut}(X)$$

позволяет нам определить действие $\mathrm{Gal}(k'/k)$ на X. При помощи «спуска» (см. например статью Вейля о спуске поля констант в Amer. J. Math (приблизительно 1955 г.) или мою книгу «Когомология Галуа») мы получаем скрученную кривую $X_{k'}$, и легко видеть, что *k'/k получается из накрытия $X \to X/G$ тогда и только тогда, когда $X_{k'}$ имеет рациональную точку над k.*

Поскольку у $X_{k'}$ род 0, последнее условие означает, что кватернионная алгебра $H_{k'}$, связанная с $X_{k'}$, *расщепляется над* k. Это выполнено не всегда — можно построить контрпримеры. Однако этому условию можно удовлетворить *при помощи подходящего квадратичного расширения поля* k, а на самом деле при помощи многих таких расширений. В этом (как указал мне Вейль) и состоит причина проявления «побочных иррациональностей», о которых идет речь в последних параграфах книги Клейна. Но так как квадратичные иррациональности рассматривались Эрмитом, Клейном и прочими как допустимые, то Вы видите, почему я сказал, что ответ на поставленный выше вопрос —«почти что да»!

Для придания всему этому более конкретной формы необходимо иметь более простое описание скрученной кривой $X_{k'}$ и соответствующей кватернионной алгебры $H_{k'}$. Тут есть два пути — один использует когомологии, другой — квадратичные формы.

I) Хорошо известно, что группа когомологий $\mathrm{H}^2(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ является циклической группой второго порядка. Она содержит единственный нетривиальный элемент ξ, который соответствует центральному расширению G, дающему в результате «бинарную икосаэдральную группу» порядка 120. Поскольку $G = \mathrm{Gal}(k'/k)$, мы получаем элемент $\xi_{k'} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(k'/k), k'^*) \subset \mathrm{Br}(k)$. Можно проверить (sauf erreur...), что класс $H_{k'}$ равен $(-1, -1) + \xi_{k'}$, где $(-1, -1)$ — класс стандартной алгебры кватернионов.

II) Допустим, что k'/k задано как замыкание Галуа расширения k_1/k пятой степени. Рассмотрим k_1 как пятимерное векторное пространство над k и обратимся к проективной квадрике $Y_{k'}$, заданной с помощью уравнений

$$\mathrm{Tr}(z) = 0, \ \mathrm{Tr}(z^2) = 0 \qquad (\text{где } z \in k_1).$$

Эта квадрика получается из квадрики (*) скручиванием Галуа, и поэтому ее «кривая прямых» и будет скрученной кривой $X_{k'}$. Из этого и из элементарной геометрии (и соответственно алгебры) квадрик (соответственно квадратичных форм) мы заключаем, что имеют место утверждения.

II а) Класс $H_{k'}$ есть сумма $(-1, -1)$ и *инварианта Витта* квадратичной формы $\mathrm{Tr}(z^2)$, заданной на подпространстве элементов со следом 0 в k_1. Иными словами, $H_{k'}$ есть единственная кватернионная алгебра с нормой, пропорциональной этой 4-форме.

IIб) $X_{k'}$ *имеет рациональную точку тогда и только тогда, когда ее имеет* $Y_{k'}$, *т. е. тогда и только тогда, когда в* k_1 *существует ненулевой элемент* z *с* $\mathrm{Tr}(z) = \mathrm{Tr}(z^2) = 0$.

В более конкретных терминах это означает, что мы получаем на наш исходный вопрос ответ «да» всякий раз, когда k'

может быть порождено корнями уравнения пятой степени вида $X^5 + aX^2 + bX + c = 0$, т. е. *уравнения, не содержащего членов с* X^4 *и* X^3. Это согласуется с результатами Эрмита и Клейна.

Вместо предположения о том, что $G = \mathrm{A}_5$ и $\sqrt{5} \in k$, я мог бы считать, что $\sqrt{5} \notin k$, $G = \mathrm{S}_5$ и квадратичное подполе в k'/k есть $k(\sqrt{5})$. Результат был бы тот же, что и в II б).

3. *Связь с модулярными формами.*

Здесь можно сказать немногое. Если мы рассмотрим поле K_5 модулярных форм уровня 5 с коэффициентами в $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{1})$, то как теперь хорошо известно (см. например книгу Симуры или Делиня и Рапопорта, либо «Эллиптические функции» Ленга) на K_5 есть «полулинейное» действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$, полем инвариантов которого является поле $\mathbf{Q}(j)$ модулярных форм уровня 1. Кроме того, род K_5 равен 0. Рассмотрим теперь в K_5 подполе, неподвижное под действием центра группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$ (имеющего порядок 2), и обозначим его K_5'. Этому полю соответствует кривая X рода 0 с полем констант $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, на которой действует группа $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$. Так как эта группа изоморфна S_5', то мы воссоздали здесь ситуацию из п. 1.

С этой точки зрения вопрос из п. 2 сводится к следующему. Предположим, что $\sqrt{5} \in k$ (либо соответственно $\sqrt{5} \notin k$) и пусть k'/k будет расширением Галуа с группой A_5 (соответственно с группой S_5 и квадратичным подполем $k(\sqrt{5})$). Существует ли $j \in k$ такое, что k' порождается j-инвариантами $j_1, j_2, \ldots, j_6$ шести эллиптических кривых, получающихся из кривой с инвариантом j изогениями порядка 5 (т. е. решениями «уравнения преобразований пятого порядка» $T_5(X, j) = 0$)? Ответ тот же самый, что и в п. 2: «да» тогда и только тогда, когда кватернионная алгебра H_k расщепляется.

Что касается модулярной интерпретации «главной поверхности» Y: $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 0$, то см. Фрике, с. 124, 139 и т. д.

На этом я вынужден остановиться. Я сознаю, что приведенные выше замечания — не более, чем беглый взгляд на некоторые стороны нашего предмета. Книга Клейна (и книга Фрике) охватывает слишком многое! Это и инварианты, и гипергеометрические функции, и все на свете — изобилие великолепнейших формул! Не собираетесь ли Вы воскресить что-либо из этого? Если да, то пришлите мне копию.

Ваш Ж.-П. Серр.

ДОПОЛНЕНИЕ Б

> «... надеюсь, что больше информации Вы получили от Арнольда...»
>
> Из «Письма Серра», с. 285.

Группа икосаэдра не является кристаллографической (см., например, Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.— М.: Наука, 1980). Но к 1984 году экспериментаторам-кристаллографам удалось получить искусственные сплавы с квазикристаллической структурой и икосаэдральной симметрией ([9], [10]). Это было сенсацией и предопределило интерес к потоку исследований и изобретений, основанных на квазикристаллической симметрии. (Например, знаменитый физик и математик Р. Пенроз (Р. Пенроуз) запатентовал несколько образцов комнатных обоев.)

Иное осмысление роли квазикристаллической симметрии в математике содержит следующая статья Владимира Игоревича Арнольда в журнале Physica D — Nonlinear Phenomena (1988):

ЗАМЕЧАНИЯ О КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ (*В. И. Арнольд*)

Кроме экспериментальной кристаллографии, квазикристаллическая симметрия встречается в нескольких математических теориях, связанных с совсем другими физическими задачами,— в теории особенностей систем лучей геометрической оптики, в конструкции Синая марковских разбиений в эргодической теории динамических систем, в численных экспериментах по итерациям отображений плоскости и в статистическом исследовании топологии линий уровней квазипериодических функций Гамильтона. В этой статье я объясню некоторые из этих связей между на первый взгляд отдаленными предметами.

§ 1. Разбиения и покрытия Пенроза

Рассмотрим тор $T^n = R^n/Z^n$ и «иррациональное» подпространство R^k в R^n, не содержащее отличных от 0 целых точек.

Определение. *Разбиением Пенроза* называется разбиение тора на конечное число призм, основания которых параллельны заданному иррациональному подпространству (Пенроз, видимо, не рассматривал таких разбиений).

Пример. Разбиение Пенроза тора T^2 на 3 прямоугольника изображено на рис. 1.

Замечание. Такие разбиения на прямоугольники, стороны которых параллельны сжимающемуся и расширяющемуся инвариантным многообразиям аносовского отображения тора, играют важную роль в построеии Синая марковских разбиений в эргодической теории диффеоморфизмов Аносова [1].

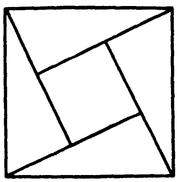


Рис. 1

Рассмотрим следы разбиения Пенроза на аффинном k-мерном подпространстве, параллельному данному иррациональному пространству R^k (для простоты мы можем предположить, что это подпространство общего положения, т. е. что оно не содержит вершин призм). Следы являются многогранниками, получающимися из оснований призм параллельными переносами.

Определение. *Квазипериодическим покрытием Пенроза**) k-мерного пространства называется его разбиение на многогранники, индуцированное из разбиения Пенроза на торе, как это объяснено выше.

Пример. Рассмотрим разбиение трехмерного пространства на равные кубы с целочисленными вершинами. Кубы, пересекающие заданную иррациональную плоскость R^2, образуют бесконечное многогранное тело, ограниченное двумя бесконечными многогранными поверхностями с квадратными гранями трех типов, которые получаются параллельными переносами из трех граней куба, имеющих общую вершину.

Спроектируем одну из этих поверхностей на плоскость R^2 вдоль прямой, проходящей через эту вершину и направленной внутрь куба. Проекции граней образуют квазипериодическое покрытие плоскости параллелограммами трех типов (полученными параллельным переносом из трех параллелограммов).

Теорема 1. *Проекции образуют покрытие Пенроза на плоскости.*

---

*) Это частный случай покрытий, рассматривавшихся Пенрозом.

Доказательство. Рассмотрим множество таких точек x трехмерного пространства, что аффинная плоскость P, параллельная заданной иррациональной плоскости R^2 и содержащая x, покрыта проекцией фиксированной грани F многогранной поверхности вдоль данного направления l. Докажем, что это множество представляет собой призму, основание которой параллельно P.

Заметим, что условие «F является одной из граней объединения кубов, пересекающих P» есть условие только на P, а не на x. Оно определяет слой между двумя плоскостями, параллельными P. Если x — точка плоскости, лежащей внутри этого слоя, то она покрыта проекцией грани F вдоль направления l тогда и только тогда, когда она принадлежит объединению прямых, параллельных l и пересекающих F. Следовательно, точка x входит в произведение F и l и лежит в слое между параллельными плоскостями. Такие точки x образуют призму с основанием, параллельным P.

Каждая точка x покрыта проекцией одной из граней, F, на P. Итак, мы разбили P на призмы, определенные выше. Это разбиение периодично и, следовательно, определяет разбиение Пенроза трехмерного тора. След этого разбиения на P есть квазипериодическое покрытие плоскости параллелограммами — проекция разбиения многогранной поверхности на грани.

Следовательно, эти параллелограммы образуют покрытие Пенроза.

Теорема 2. *Существуют квазипериодические покрытия Пенроза плоскости конгруэнтными ромбами с углами* 60° *и* 120°, *которое не вычислимо никакой машиной Тьюринга.*

Доказательство. Спроектируем многогранную границу вдоль диагонали куба. Мы получим покрытие плоскости параллелограммами трех типов. Эти параллелограммы порождены тремя векторами u, v, w такими, что

$$u+v+w=0.$$

Такие параллелограммы можно одновременно преобразовать в ромбы с углами 60° и 120° аффинным преобразованием плоскости. В результате мы получим искомое покрытие ромбами.

Исходная иррациональная плоскость восстанавливается по порядку ромбов покрытия. Поэтому среди построенных покрытий несчетное количество различных. С другой стороны, множество всех программ всех машин Тьюринга счетно. Следовательно, большинство квазипериодических покрытий Пенроза, которые мы построили, не допускают построения никакой машиной Тьюринга.

Рассуждения, с помощью которых доказана теорема 1, применимы и в более общей ситуации. Рассмотрим иррациональное подпространство R^k в n-мерном пространстве. Кубы, пересекающие R^k, образуют многогранное тело. Рассмотрим его k-мерные грани. Их проекции в R^k вдоль некоторого $(n-k)$-мерного направления l определяют покрытие R^k многогранниками, которые являются пересечениями параллелепипедов.

Теорема 3. *Построенное покрытие является покрытием Пенроза.*

Доказательство. Как в доказательстве предыдущей теоремы I, многогранное тело (а значит, и его грани) определяется аффинной плоскостью P. Заданное множество S его k-мерных граней принадлежит к границе объединения кубов, пересекающих P, тогда и только тогда, когда P пересекает ортогональное P $(n-k)$-мерное пространство в точке, принадлежащей некоторому многограннику $a(P,S)$. Точка x из P покрыта проекциями граней, принадлежащих S, тогда и только тогда, когда x принадлежит произведению l на некоторый k-мерный многогранник $b(l,S)$. Призма разбиения Пенроза, содержащая x, есть произведение $a \times b$.

То же доказательство применимо и для более сложных алгоритмов, определяющих покрытие иррационального пространства P. Основное в этом доказательстве то, что условие, накладываемое на x, разбивается на два условия, из которых первое накладывается лишь на P, а второе — лишь на проекцию точки x вдоль направления l. Всякий алгоритм с этим свойством определяет квазипериодическое покрытие Пенроза на P.

Пример. Рассмотрим пятимерное пространство с его целочисленной решеткой, порожденной базисными векторами $e_1, \ldots, e_5$. Циклические перестановки базисных векторов определяют группу пятого порядка, действующую на R^5. Это представление разбивается в прямую сумму трех вещественных неприводимых представлений (в соответствии с разбиением характеров на три группы $(\exp(\pm 2\pi i/5), \exp(\pm 4\pi i/5), 1)$.

Двумерная плоскость первого представления иррациональна (не содержит ненулевых целых точек). Конструкция теоремы 3 определяет покрытие Пенроза на этой плоскости. Это покрытие инвариантно относительно группы циклических перестановок. Итак, мы построили квазипериодическое покрытие Пенроза на двумерной плоскости, имеющее симметрию пятого порядка.

Аналогичная конструкция, определяющая квазипериодическое покрытие Пенроза трехмерного пространства с симметрией икосаэдра, описана ниже (в § 3).

§ 2. Функции Пенроза

Определение. *Функцией Пенроза* *) на n-мерном торе называется функция, постоянная на каждой призме разбиения Пенроза.

Квазипериодической функцией Пенроза называется ограничение функции Пенроза определенной на n-мерном торе, на иррациональное подпространство R^k накрывающего тор n-мерного пространства.

Теорема 4. *Каждая квазипериодическая функция допускает сколь угодно точные аппроксимации квазипериодическими функциями Пенроза той же периодичности.*

Действительно, квазипериодическая функция является ограничением на R^k функции, определенной на T_n. Легко построить сколь угодно мелкое разбиение Пенроза на T^n. Поэтому можно приблизить любую (непрерывную) функцию на T^n функцией Пенроза с любой точностью (равномерно). Ограничение этой функции Пенроза на R^k и есть искомая квазипериодическая функция Пенроза.

Эта простая теорема объясняет, почему многие квазипериодические функции определяют узоры, столь похожие на покрытия Пенроза (узор составляют линии уровня, или критические точки функции, или результаты какой-либо другой локальной алгоритмической переработки функций).

Если начинать с функции, допускающей какую-либо группу симметрий, то полученный при действии естественного алгоритма узор тоже будет иметь такую же симметрию. Приближая функцию функцией Пенроза с такой же симметрией, мы получаем новый источник симметричных покрытий Пенроза.

Пример. В своем исследовании резонансного взаимодействия частиц с электромагнитной волной Заславский, Сагдеев и др. ([2], [3]) рассматривали функцию Гамильтона $H=\sum \cos a_k$, $0 \leqslant k < q$, где a_k — линейная функция на плоскости, равная скалярному произведению с радиус-вектором k-й вершины правильного q-угольника.

При $q = 2, 3, 4, 6$ функция H периодична, для других значений q квазипериодична. Она очевидным образом симметрична относительно поворотов на углы, кратные $2\pi/q$.

Критические точки функции H образуют сеть, которая очень похожа на сеть вершин покрытия Пенроза той же симметрии.

В действительности H — это приближение к другой модели, которая тоже порождает покрытия Пенроза,— модели «стохастической паутины».

*) Пенроз таких функций, кажется, не рассматривал.

Чтобы получить «стохастическую паутину», рассмотрим отображение $T = AB$ плоскости на себя, где A — поворот на угол $2\pi p/q$ и $B(x, y) = (x, y + \varepsilon \sin 2\pi x)$. Вычислительный эксперимент показывает, что при подходящих начальных условиях и при малых ε последовательность образов начальной точки при итерациях отображения T заполняет «паутину» из тонких окрестностей линий, имеющую симметрию q-го порядка и выглядящую как покрытие Пенроза.

Чтобы объяснить этот эксперимент, рассмотрим отображение T^q. Оно ε-близко к тождественному преобразованию и оно сохраняет площади. Поэтому с погрешностью порядка ε^2 оно является преобразованием фазового потока гамильтоновой системы. Гамильтониан легко вычисляется и оказывается описанной выше функцией H.

Стандартная теория возмущений гамильтоновых систем [4] предсказывает, что на расстоянии порядка ε от большинства замкнутых линий уровня функции H имеются в точности инвариантные относительно T^q замкнутые кривые. Разрушение сепаратрис превращает их в стохастическую паутину. Итак, стохастическая паутина близка к объединению критических линий уровня функции H. Как это объяснено выше, узор, образованный критическими точками и линиями, естественно должен напоминать покрытие Пенроза.

Легко сформулировать и доказать математические теоремы, придающие предыдущим словам точный смысл. Но это можно сделать по-разному. В качестве примера рассмотрим точки локального максимума функции H. Очевидно, $H \leqslant q$. Выберем $\varepsilon > 0$ и отберем те точки локального максимума, где $H \leqslant q - \varepsilon$. Чем меньше ε, тем больше узор, образованный точками максимума, похож (после надлежащего сжатия) на узор, образованный вершинами покрытия Пенроза с симметрией порядка q.

Насколько я знаю, стохастическая топология квазипериодических функций (даже таких простых, как H) слабо изучена. Например, рассмотрим какую-либо «экстенсивную» характеристику f функции H в шаре радиуса R (скажем, число точек локального максимума или число компонент множества уровня $H = c$, или эйлерову характеристику множества $H = c$). Для квазипериодической функции H k переменных рассмотрим предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{f(R, c)}{R^k} = \bar{f}(c).$$

Должны существовать «эргодические» теоремы, утверждающие, что предел $\bar{f}$ существует и является хорошей функцией c, исключая лишь некоторые «критические» значения. Особенности

f в критических значениях должны вычисляться по исходной периодической функции H n переменных и по расположению иррационального k-мерного подпространства относительно целочисленной решетки n-мерного пространства.

Для случая, когда исходная периодическая функция является тригонометрическим многочленом, должны существовать оценки средней топологической сложности его многообразий уровня в терминах многогранника Ньютона функции и в терминах числа одночленов, составляющих многочлен, как в [5], [6].

Первые шаги в этом направлении сделаны недавно С. М. Гусейн-Заде.

§ 3. Квазикристаллическая симметрия и теория особенностей

Квазипериодические функции трех переменных, имеющие икосаэдральную симметрию, были открыты в теории особенностей систем лучей в 1982 году, почти в то же время они были обнаружены и кристаллографами.

Математическая задача в теории систем лучей на первый взгляд очень далека от кристаллографии. Рассмотрим область на плоскости, ограниченную гладкой кривой, имеющей простую точку перегиба (как у полукубической параболы).

Такая точка перегиба имеет общее положение, т. е. не исчезает при малом шевелении граничной кривой.

Рассмотрим расстояние фиксированной точки области от всех ее точек, т. е. длину кратчайшего пути, проходящего внутри области, соединяющего фиксированную точку с произвольной конечной точкой, принадлежащей области. Эта функция расстояния, рассматриваемая как функция конечной точки, непрерывна, но не обязательно гладка.

Одна из типичных особенностей функции расстояния — это ее особенность в точке перегиба границы. Оказывается, эта особенность связана с икосаэдром и ее изучение привело математиков к обнаружению квазипериодических функций с симметрией икосаэдра.

Связь функции расстояния с икосаэдром была обнаружена О. П. Щербаком [7] в 1982 году. История теоремы Щербака (и сама формулировка впервые) изложена на с. 78—79 в статье: Арнольд В. И. Особенности семейств лучей // УМН.— 1983.— Т. 38, № 2.— С. 77—147 *). Группа симметрий икосаэдра порожде-

---

*) «Письмо Серра» (см. с. 285) сыграло определенную роль при написании этой статьи. Это отмечено во французском издании монографии: Arnold V., Varchenko A., Goussein-

на отражениями в пятнадцати зеркалах (плоскостях симметрии) икосаэдра в R^3. Поэтому орбиты действия этой группы на комплексифицированное пространство $\mathbf{C}^3$ образуют снова трехмерное комплексное пространство $\mathbf{C}^3$ (координатами в котором являются базисные инварианты группы симметрий икосаэдра). Нерегулярные орбиты (те, которые состоят из меньшего числа точек, чем другие) образуют поверхность в пространстве орбит. Эта поверхность нерегулярных орбит называется *дискриминантной поверхностью.*

Дискриминантная поверхность — это образ зеркал при отображении факторизации, сопоставляющем точке исходного пространства содержащую ее орбиту. Эта поверхность имеет сложные особенности.

Присутствие какой-либо группы отражений в какой-либо задаче обычно обнаруживается благодаря дискриминантной поверхности. Особенности дискриминантной поверхности обычно легко узнаются в особенностях бифуркационных множеств, связанных с задачей.

В нашем случае бифуркационное множество — это график функции расстояния. Теорема Щербака утверждает, что этот график локально диффеоморфен дискриминантной поверхности группы симметрий икосаэдра (в окрестности точки перегиба общего положения на границе области). Изображение этого графика имеется в [13] на с. 76 (рис. 70), а в неявной форме — уже в курсе анализа Лопиталя (ср. [14], рис. 37 на с. 262).

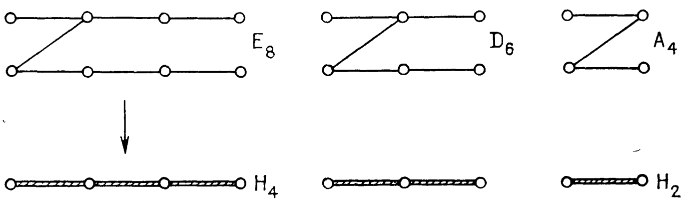
Доказательство теоремы Щербака зависит от связи группы симметрии икосаэдра H_3 с так называемой кристаллографической группой отражений (или группой Вейля) D_6 (связанной с простой алгеброй Ли $D_6 \approx O(6)$ и с простой особенностью $x^2y + y^5 + z^2$).

Группа Вейля D_6 порождена отражениями в шестимерном евклидовом пространстве и сохраняет некоторую кристаллографическую решетку (множество целочисленных комбинаций шести независимых векторов). В доказательстве своей теоремы Щербак фактически строит разложение этого шестимерного пространства на два ортогональных трехмерных пространства, инвариантных относительно двух неприводимых вещественных представлений группы симметрий икосаэдра H_3.

Эти два трехмерных пространства иррациональны по отношению к целочисленной решетке D_6. Ограничения подходящих D_6-периодических функций на эти иррациональные подпространства и дают квазипериодические функции трех переменных с икосаэдральной симметрией.

Z a d e S. Singularités des applications differentiables.— 2-e partie: Monodromie et comportement...— М.: Мир, 1986.

Дальнейшие подробности об этих трехмерных пространствах см. в статье Варченко и Чмутова [8], где аналогичные конструкции проведены для всех групп отражений (включая H_4, группу симметрий правильного 600-гранника в четырехмерном евклидовом пространстве, связанную с E_8 как H_3 с D_6 и как H_2 с A_4). Эти связи можно изобразить картинками:



В теории особенностей с каждой группой отражений связываются свои специальные функции. Из теории Щербака — Варченко — Чмутова следует, что специальные функции трех переменных, связанные с группой симметрий икосаэдра, являются ограничениями на иррациональное пространство периодических функций 6 переменных. Таким образом, эти функции квазипериодичны, определяют квазикристаллическую структуру в трехмерном пространстве и порождают его квазипериодические покрытия Пенроза, имеющие икосаэдральную симметрию.

Естественно, специалисты по теории особенностей не знали о работе [9], пока я не обнаружил [10] и связь между обеими теориями в мае 1985 года.

В последнее время теорема Щербака об икосаэдре и ее обобщение [12] на другие группы Кокстера были обращены А. Б. Гивенталем. Он указал задачу теории особенностей, ответ которой совпадает в точности со списком всех групп Кокстера, порожденных отражениями в евклидовом пространстве (конечных и неприводимых, кристаллографических или нет). А именно, Гивенталь [11] рассматривает лагранжевы многообразия с особенностями, диффеоморфные прямым произведениям плоских кривых. С лагранжевым многообразием пространства кокасательного расслоения связано многозначное особое решение уравнения Гамильтона — Якоби (график оптической длины пути вдоль лучей лагранжева многообразия, рассматриваемого как система лучей). Гивенталь доказывает, что особенности решения уравнения Гамильтона — Якоби просты (не имеют модулей) тогда и только тогда, когда их графики диффеоморфны дискриминантам конечных неприводимых групп Кокстера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— С. 187.
2. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. // Письма в ЖЭТФ.— 1987.— № 7.— С. 349—353.
3. Черников А. А., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Захаров М. Ю., Заслаский Г. М. // Nature.— 1987.— V. 325, N 6113.— P. 559—563.
4. Арнольд В. И. // УМН.— 1963.— Т. 18, № 6.— С. 96—196.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гивенталь А. Б., Хованский А. Г. // Math. Phys. Rev., Sov. Sci. Rev. C.— 1984.— V. 4.— P. 67—92.
6. Хованский А. Г. // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1981.— V. 292.— P. 937—940.
7. Щербак О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, № 3.— С. 1—13.
8. Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, № 3.— С. 1—13.
9. Schechtman D., Bleck I., Gratias D., Cahn J. W. // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 83.— P. 1953.
10. Schechtman D., Gratias D., Cahn J. W. // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1985.— V. 300, N 18.— P. 909—914.
11. Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения.— М.; 1986.—(Деп. ВИНИТИ от 5 июня 1986 г., № 4130-В.).
12. Щербак О. П. // УМН.— 1988.— Т. 43.
13. Арнольд В. И. Теория катастроф.— 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
14. Динамические системы.— 5: Теория катастроф // Итоги науки и техники: Совр. пробл. мат. фунд. направл.— 1986.— С. 219—277.

«... оставляю читателю для самостоятельного обдумывания, основанного на его собственных познаниях и наблюдениях».

Ф. Клейн «Икосаэдр...», с. 118.

Основные понятия, терминологию и конструкции теории векторных расслоений на проективных пространствах можно найти в монографии: Оконек, Шнайдер, Шпиндлер. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.— М.: Мир, 1984.

§ 1. История

Создавая в конце 60-х годов Д. Мамфордом теория тета-структур и проективных моделей абелевых многообразий позволила получить большинство результатов классической теории тета-функций над произвольным полем констант. В поисках приложений своей теории к классической области (над полем $\mathbf{C}$) Мамфорд исследовал следующую проблему.

Целочисленная кососимметрическая форма, изображающая первый класс Черна поляризации L на абелевой поверхности A приводится к нормальной форме вида

$$c_1(L) = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ \hline -\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & 0 & 0 \end{array} \right\| \in H^2(A, \mathbf{Z}) \tag{1}$$

$$\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}^+, \quad \delta_1 \mid \delta_2$$

Пара (δ_1, δ_2) называется типом поляризации и по ней вычисляется размерность $h^0(A, L)$ и размерность проективного пространства $\mathbf{P}^N = \mathbf{P}(H^0(A, L)^*)$, в которое A отображается сечениями обратимого пучка L.

(ПМ) При каких (δ_1, δ_2) существует абелева поверхность A, для которой класс L типа (δ_1, δ_2) определяет вложение $A \to \mathbf{P}^N$?

Замечание. Согласно Лефшецу, класс дивизоров L типа (δ_1, δ_2) определяет вложение *любой* абелевой поверхности в том и только в том случае, если $\delta_1 \geqslant 3$, так что вопрос стоит только для типов с $\delta_1 = 1$ и 2.

Положительное решение (ПМ) для простейшего нетривиального случая $(\delta_1, \delta_2) = (1, 5)$ приводит к гладкой абелевой поверхности $A \subset \mathbf{P}^4$ степени 10. Если такая поверхность существует, то равенство Серра для дуализирующих пучков

$$\omega_A = \operatorname{ext}^2_{\mathbf{P}^4}\left(\mathcal{O}_A, \omega_{\mathbf{P}^4}\right) \tag{2}$$

влечет равенство

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbf{P}^4}\left(J_A(5), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}\right) = \mathbf{C}, \tag{3}$$

где J_A — пучок идеалов поверхности $A \subset \mathbf{P}^4$, а также существование двумерного векторного расслоения E на $\mathbf{P}^4$ и его сечения $s \in H^0(E)$ с нулями на A $((s)_0 = A)$, представленных нетривиальным расширением вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \xrightarrow{s} E \to J_A(5) \to 0. \tag{4}$$

При помощи этой тройки легко вычисляется полином Чженя $c(E)$: если h — класс гиперплоскости в $\mathbf{P}^4$, то

$$c(E) = 1 + 5h + 10h^2.$$

Этот полином не раскладывается на линейные множители с целыми коэффициентами и, следовательно, E неразложимо.

Наоборот, если:

1) построить двумерное векторное расслоение E на $\mathbf{P}^4$ с $c(E) = 1 + 5h + 10h^2$;

2) доказать, что существует сечение $s \in H^0(E)$ с гладкой поверхностью нулей $S = (s)_0$,

то $S = A$ — абелева поверхность; $\mathcal{O}_A(1) = L$ имеет тип $(1, 5)$ и A не является образом регулярной проекции из $\mathbf{P}^5$. (Это дает точная тройка

$$0 \to TS \to T\mathbf{P}^4|_S \to N^S_{\mathbf{P}^4} \to 0 \tag{5'}$$

и равенство

$$c(TS) = (1 + h|_S)^5(1 + 5h|_S + 10h^2|_S)^{-1} = 1. \tag{5''}$$

Поэтому (ПМ) для $(1, 5)$ имеет положительное решение.

В 1973 году Мамфорд и Хоррокс (см. [8]) построили двумерное векторное расслоение F_{H-M}, для которого F_{H-M} (3) обладает свойствами 1) и 2) и тем самым получили положительное решение (ПМ) для типа (1, 5).

К концу семидесятых годов оказалось, что большинство задач проективной (классической) геометрии эквивалентны задачам о существовании (или описании свойств) векторных расслоений на проективных пространствах. (Наиболее яркий пример: проверка постулатов Альфана в теории пространственных кривых (см. [7]).)

В Дополнениях ко второму изданию «Теории инвариантов» (см. [10], с. 181) Д. Мамфорд пишет:

«Вопрос о существовании нетривиальных двумерных векторных расслоений на $\mathbf{P}^n$, $n \geqslant 5$,— самая интересная из нерешенных проблем проективной алгебраической геометрии...»

Вопрос о двумерном (неразложимом) расслоении на $\mathbf{P}^5$ до сих пор открыт. Но и на $\mathbf{P}^4$ существенно отличных от F_{H-M} двумерных расслоений найти не удалось ([5]).

Замечание. Имеются только стандартные «подкрутки» $F_{H-M}(d)$, «сдвиги» $g^*F_{H-M}(d)$, $g \in \mathrm{PGL}(5, \mathbf{C})$ и «подъемы» $\varphi^*F_{H-M}(d)$ для морфизмов φ: $\mathbf{P}^4 \to \mathbf{P}^4$.

С другой стороны, исследуя геометрию F_{H-M}, Барт обнаружил тесную связь F_{H-M} с пучками куммеровых поверхностей в $\mathbf{P}^3$, т. е. с красивейшей теорией пучков квадратичных комплексов. (См. [1], теория квадратичных комплексов венчает монографию [6].)

Так был открыт уникальный объект проективной геометрии — расслоение Мамфорда — Хоррокса F_{H-M}. Его описание не требует никаких «технических ухищрений», и мы приведем его в следующем параграфе, в § 3 исследование его геометрии приведет нас к икосаэдру.

История открытия F_{H-M} имеет поучительный конец. Прежде всего в 1984 г. Раманан полностью решил проблему (ПМ).

Теорема Раманана. (ПМ) *имеет положительное решение для типов* $(1, \delta_2), \delta_2 \geqslant 5$, $(2, \delta_2), \delta_2 \geqslant 4$ (см. [11]).

Ее доказательство вполне «классическое» и в случае (1, 5) Раманан использовал пятилистное накрытие якобиана.

Вскоре Чилиберто обнаружил работу Комессатти, опубликованную в 1919 году, в которой построено двухпараметрическое семейство якобианов (параметризованное поверхностью Гильберта), вложенных как гладкие поверхности степени 10 в $\mathbf{P}^4$. Точнее имеет место

Теорема Комессатти ([4]). 1) *Пусть* $A = J(C_0)$ — *якобиан кривой* C_0 *рода* 2 *и* $C_0 \subset J(C_0)$ — *стандартное вложение. Если* $J(C_0)$ *содержит кривую* C_1 *с* $C_1^2 = 2$, $C_1C_0 = 3$, *то полный линей-*

ный ряд $|C_0+C_1|$ *задает вложение* $J(C_0)$ *как поверхности степени* 10 *в* $\mathbf{P}^4$.

2) $J(C_0)$ *содержит* C_1 *с* $C_1^2=2$, $C_1C_0=3$, *если*

$$\mathbf{Q}(\sqrt{5})\subseteqq \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(J(C_0)). \tag{6}$$

(Простое доказательство этой теоремы и красивые геометрические следствия из нее можно найти в работе Герберта Ланге [9].)

Таким образом, (ПМ) для типа $(1,5)$ была решена еще в 1919 году, а в 1960 году (см. [12]) Ж.-П. Серр мог констатировать существование F_{H-M}!

§ 2. Конструкция F_{H-M}

1. Пятимерное векторное пространство. Пусть $V=\mathbf{C}^5$ с базисом $\{e_i\}$, $i\in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_5$. Внешний квадрат V можно представить в виде прямой суммы

$$\wedge^2 V=f^+(V)\oplus f^-(V), \tag{1}$$

где $f^{\pm}$ — вложения V в $\wedge^2 V$:

$$f^+\left(\sum v_ie_i\right)=\sum v_ie_{i+2}\wedge e_{i+3},\qquad i\in\mathbf{Z}_5,$$

$$f^-\left(\sum v_ie_i\right)=\sum v_ie_{i+1}\wedge e_{i+4}.$$

Легко видеть, что $f^+(V)\cap f^-(V)=0$ и $\dim\wedge^2 V=10$. Отсюда следует справедливость равенства (1).

Каждый вектор $x\in V$ определяет точную последовательность

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[r] & V \arrow[r, "\wedge x"] & \wedge^2 V \arrow[r, "\wedge x"] & \wedge^3 V \arrow[r, "\wedge x"] \arrow[d, equal] & \wedge^4 V \arrow[r, "\wedge x"] \arrow[d, equal] & \wedge^5 V \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & & \wedge^2 V^* \arrow[r] & V^* \arrow[r] & \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

Вертикальные равенства определены с точностью до $\alpha\in\mathbf{C}^*$ и с этой же точностью последовательность автодуальна. Ее середину можно «раздвинуть»:

$$\begin{tikzcd}
\wedge^2 V \arrow[rrr, "\wedge x"] \arrow[d, equal] & & & \wedge^3 V \\
\wedge^2 V \arrow[r] & \wedge^2(V/\mathbf{C}x) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \wedge^2(V/\mathbf{C}x)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \wedge^3 V \\
 & \wedge^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[r, "G_x"] & \left(\wedge^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)}\right)^*, &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

где $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}(V)$, $T\mathbf{P}^4$ — касательное расслоение, а изоморфизм G_x задается квадрикой Плюккера, т. е. спариванием $w \wedge w$.

Такое «расширение» не нарушает автодуальности и мы автодуально продолжаем последовательность в обе стороны:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f^{\pm}"] \arrow[rrrr, bend left, "\pi_{\pm}"] \arrow[rrrrr, bend right, "C^{+}_{-}"'] & \overset{2}{\wedge} V \arrow[r] & \overset{2}{\wedge} T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[r, "G_x"] & (\overset{2}{\wedge} T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)})^* \arrow[r] & \overset{3}{\wedge} V \arrow[r, "{}^t f^{\pm}"] & V^*
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Эта последовательность не точна и не комплекс, а гомоморфизмы $\pi_{\pm}$ и C^{+}_{-} обладают следующими свойствами:

1) $\pi_{\pm}(v) = f^{\pm}(v) \wedge x$;

$$2)\ \langle \underbrace{{}^t f^{\pm}(w)}_{\in V^*},\ \underbrace{v}_{\in V} \rangle = \underbrace{\underset{\in \wedge^3 V}{w} \wedge f^{\pm}(v)}_{\in \wedge^5 V = \mathbf{C}}; \tag{4}$$

3) для любых двух векторов $u, v \in V$

$$\langle C^{+}_{-}(u), v \rangle = f^{+}(u) \wedge x \wedge f^{-}(v) = f^{+}(u) \wedge f^{-}(v) \wedge x, \tag{5}$$

$$\langle C^{-}_{+}(u), v \rangle = f^{-}(u) \wedge f^{+}(v) \wedge x.$$

По определению $f^{\pm}$ (см. (1))

$$f^{+}(u) \wedge f^{-}(v) = \sum_{i,j} \underbrace{u_i v_j e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{j+1} \wedge e_{j+4}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ при } j=i+1,\, i+2, \\ i-1,\, i-2}} =$$

$$= \sum u_i v_i e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4}, \qquad i \in \mathbf{Z}_5.$$

Сле ствие 1. 1) *$f^{+}(u) \wedge f^{-}(v) = f^{+}(v) \wedge f^{-}(u)$, т. е. $C^{+}_{-} = C^{-}_{+}$;*

2) *если $x = \sum x_i e_i$, то*

$$\langle C^{+}_{-}(x), x \rangle = \sum x_i^3,$$

$$C^{+}_{-}(x) = \sum x_i^2 e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4} = \sum x_i^2\, {}^t e_i,$$

$$C^{+}_{-}(x) = 0 \Rightarrow x = 0;$$

3) $f^{+}(x)\wedge f^{-}(x)=\sum x_i^2\,{}^te_i,$

$$f^{+}(x)\wedge f^{-}(x)=0\Rightarrow x=0.$$

2. Монада. Для расслоений на $\mathbf{P}^4=\mathbf{P}(V)$ рассмотрим операцию τ:

$$E^{\tau}=E^{*}(-1). \tag{6}$$

Тогда расслоение $\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)$ является τ — инвариантным:

$$(\wedge^2T\mathbf{P}^4)\wedge(\wedge^2T\mathbf{P}^4)=\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(5)$$
$$\Downarrow$$
$$\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)=(\wedge^2T\mathbf{P}^4)^{*}(2)=(\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3))^{\tau}.$$

Этот изоморфизм

$$\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\xrightarrow{G}(\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3))^{\tau} \tag{7}$$

над каждой точкой $\mathbf{P}(x)\in\mathbf{P}^4$ совпадает с изоморфизмом G_x (2).

Рассмотрим изоморфизм

$$\begin{pmatrix}\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\\ \oplus\\ \wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\end{pmatrix}\xrightarrow{\widetilde{G}}\begin{pmatrix}\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\\ \oplus\\ \wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\end{pmatrix}^{\tau}, \tag{8}$$

$$\widetilde{G}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G(w_2)\\ -G(w_1)\end{pmatrix},$$

т. е. $\widetilde{G}=G\otimes\omega$, где $\omega=\begin{Vmatrix}0&1\\-1&0\end{Vmatrix}$ — стандартная косая корреляция на $\mathbf{C}^2$.

При помощи канонического эпиморфизма

$$V\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}\xrightarrow{\text{can}}T\mathbf{P}^4(-1)$$

покомпонентно пополним (8) до τ-инвариантной четверки

$$\begin{pmatrix}\wedge^2V\\ \oplus\\ \wedge^2V\end{pmatrix}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1)\xrightarrow{\begin{smallmatrix}\wedge^2\text{can}(-1)\\ \wedge^2\text{can}(-1)\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\\ \oplus\\ \wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\end{pmatrix}\xrightarrow{\widetilde{G}}\begin{pmatrix}\wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\\ \oplus\\ \wedge^2T\mathbf{P}^4(-3)\end{pmatrix}^{\tau}\xrightarrow{\begin{smallmatrix}{}^{\tau}\wedge^2\text{can}(-1)\\ {}^{\tau}\wedge^2\text{can}(-1)\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}\wedge^3V\\ \oplus\\ \wedge^3V\end{pmatrix}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}$$

И, наконец, эту четверку пополним до τ-инвариантной шестерки

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1) \arrow[d, "(f^+ \oplus f^-)\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1)"] \arrow[dddd, bend left=60, "p"] \\
(\Lambda^2 V \oplus \Lambda^2 V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1) \arrow[d, shift right=8, "\Lambda^2 \mathrm{can}(-1)"'] \arrow[d, shift left=8, "\Lambda^2 \mathrm{can}(-1)"] \\
\Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \oplus \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \arrow[d, "\widetilde{G}"] \arrow[ddd, bend right=60, "p^\tau"'] \\
(\Lambda^3 T\mathbf{P}^4(-3) \oplus \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3))^\tau \arrow[d, shift right=8, "\Lambda^2 \mathrm{can}(-1)^\tau"'] \arrow[d, shift left=8, "\Lambda^2 \mathrm{can}(-1)^\tau"] \\
(\Lambda^3 V \oplus \Lambda^3 V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \arrow[d, "{}^t(f^- \oplus (-f^+)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}"] \\
V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \arrow[d, equal] \\
(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1))^\tau
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

Сквозные гомоморфизмы шестерки (9) дают тройку

$$
V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1) \xrightarrow{\mathrm{p}} \begin{matrix} \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \\ \oplus \\ \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{p}^\tau} V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}. \tag{10}
$$

Предложение 1. 1) *p — вложение над каждой точкой* $\mathbf{P}(x) \in \mathbf{P}^4$. 2) (10) — *комплекс, т. е.* $p^\tau p = 0$.

Доказательство. 1) Послойно p совпадает с прямой суммой гомоморфизмов $\pi_\pm$ из (3):

$$
\begin{tikzcd}
 & \Lambda^2 V \arrow[r] & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[ddr] & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[r] & \Lambda^3 V \\
V \arrow[r, "f^+ \oplus f^-"] \arrow[rrrr, bend right=50, "p_x = (\pi_-,\, -\pi_+)"'] & \oplus \quad \oplus & \oplus & \oplus^{\,*} & \\
 & \Lambda^2 V \arrow[r] & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[uur] & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4_{\mathbf{P}(x)} \arrow[r] & \Lambda^3 V
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

Согласно (4) а) $p_x(v) = (f^-(v)\wedge x, \ -f^+(v)\wedge x)$. Если $f^\pm(v)\wedge \wedge x = 0$, то $f^\pm(v) = v_\pm \wedge x$, $v_\pm \in V$. Но тогда $f^+(v)\wedge f^-(v) = 0$, что противоречит утверждению 3) следствия 1.

2) $\langle p^\tau p(v), \ u\rangle_x = (f^+(v)\wedge f^-(u)\wedge x - f^+(u)\wedge f^-(v)\wedge x) = 0$

в силу утверждения 1) следствия 1.

Следствие 2. 1) *Когомология комплекса* (10) — *двумерное векторное расслоение*

$$F_{H-M} = \ker p^\tau / \mathrm{im}\, p. \tag{12}$$

2) F_{H-M} *является* τ-*инвариантным:*

$$F^\tau_{H-M} = F_{H-M}. \tag{13}$$

3. Дисплей монады. Пусть $K = \ker p^\tau$. Тогда комплекс (10) можно расписать в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & F_{H-M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1) \arrow[r, "p"] & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \arrow[r] & K^\tau \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & & \oplus & & \\
 & & \Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) \arrow[d, "p^\tau"] & & \\
 & & V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \arrow[r, equal] \arrow[d] & V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

которая называется дисплеем монады (комплекса) (10).

Вычислим полином Черна F_{H-M}. Правая вертикаль дисплея (14) дает

$$c(F_{H-M}) = c(K^\tau).$$

Нижняя горизонталь дисплея (14) дает

$$c(K^\tau) = c(\Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3))^2 (1-h)^5.$$

Для упрощения выкладок можно ограничить все расслоения на $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^4$. Тогда

$$\begin{aligned}
&T\mathbf{P}^4 |_{\mathbf{P}^2} = T\mathbf{P}^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1),\\
&\Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3) |_{\mathbf{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1) \oplus \Omega\mathbf{P}^2(1) \oplus \Omega\mathbf{P}^2(1),\\
&c(\Lambda^2 T\mathbf{P}^4(-3)) |_{\mathbf{P}^2} = (1-h)(1+h)^{-2},\\
&c\left(K^\tau |_{\mathbf{P}^2}\right) = (1-h)^{-3}(1+h)^{-4},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$c\left(F_{H-M}\big|_{\mathbf{P}^2}\right) = (1-h)^{-3}(1+h)^{-4},$$
$$c\,(F_{H-M})\big|_{\mathbf{P}^2}^{-1} = \left(1+h-3h^2\right),$$
$$\Downarrow$$
$$c\,(F_{H-M}(3)) = \left(1+5h+10h^2\right).$$

Нижняя горизонталь дисплея (14) и равенство $h^0(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)) = 0$ дает $h^0(K^\tau) = 0$, а отсюда правая вертикаль дисплея (14) дает

$$H^0(F_{H-M}) = 0, \tag{16}$$

т. е. F_{H-M} стабильно.

Полином Черна дает возможность вычислить эйлерову характеристику от всех подкруток F_{H-M}:

$$\chi\,(F_{H-M}(d)) = \sum(-1)^i h^i = \frac{1}{12}\left(d^4+8d^3-d^2-68d-60\right). \tag{17}$$

Подкручивая дисплей монады (14) на $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(d)$, можно вычислить все когомологии всех подкруток $F_{H-M}(d)$:

d	h^0	h^1	h^2	h^3	h^4
$d \geqslant 4$	$\chi(F_{H-M}(d))$	0	0	0	0
3	4	2	0	0	0
2	0	10	0	0	0
1	0	10	0	0	0
0	0	5	0	0	0
-1	0	0	0	0	0
-2	0	0	$\boxed{2}$	0	0
-3	0	0	0	0	0
-4	0	0	0	5	0
-5	0	0	0	10	0
-6	0	0	0	10	0
-7	0	0	0	2	4
$d \leqslant -8$	0	0	0	0	$\chi(F_{H-M}(d))$

Пользуясь тем же дисплеем, можно показать, что $F_{H-M}(3)$ порождается своими сечениями всюду на $\mathbf{P}^4$, кроме 25 прямых L_{ij}, $i, j \in \mathbf{Z}_5$:

$$L_{ij} = \{x_i = x_{i+2} + \varepsilon^j x_{i+3} = x_{i+1} + \varepsilon^{3j} x_{i+4}\},$$
$$\varepsilon \in \mathbf{C}, \quad \varepsilon^5 = 1. \tag{18}$$

Отсюда легко показать (как это делают Мамфорд и Хоррокс в [8]), что для общего сечения $s \in H^0(F_{H-M}(3))$ его нули $(s)_0 = -S$-составляют гладкую поверхность в $\mathbf{P}^4$, т. е. (см. (5) § 4) абелеву поверхность.

Полином $c(F_{H-M})$ не раскладывается на линейные множители с целыми коэффициентами, а значит, F_{H-M} не раскладывается в прямую сумму одномерных расслоений.

§ 3. Поверхность плоскостей подскока F_{H-M}

Согласно теореме Барта — Грауэрта — Мюллиха для стабильного двумерного расслоения F с $c_1(F) = -1$:

1) для общей прямой $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^4$

$$F|_{\mathbf{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1);$$

2) для общей плоскости $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^4$

$$h^0\left(F|_{\mathbf{P}^2}\right) = 0;$$

3) для общей гиперплоскости $\mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^4$

$$h^0\left(F|_{\mathbf{P}^3}\right) = 0.$$

Плоскость $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^4$ называется плоскостью подскока для расслоения F, если $h^0\left(F|_{\mathbf{P}^2}\right) > 0$.

Многообразие S_{H-M} всех плоскостей подскока расслоения F_{H-M} — собственное подмногообразие грассманова многообразия $G(3, V)$ трехмерных подпространств пространства V:

$$S_{H-M} \subset G(3, V); \tag{1}$$

оно представляет собой важнейший геометрический инвариант (а на самом деле эквивалент) расслоения F_{H-M}.

Дисплей монады (14) дает возможность вычислить S_{H-M} в терминах гомоморфизмов $f^{\pm}$ ((1) § 2).

Верхняя горизонталь и левая вертикаль дисплея (14) дают для любого подпространства $W \subset V$

$$H^0(F_{H-M}|_{\mathbf{P}(W)}) = H^0(K|_{\mathbf{P}(W)}) =$$
$$= \ker\left(H^0(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)|_{\mathbf{P}(W)} \oplus H^0(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)|_{\mathbf{P}(W)} \xrightarrow{H^0(p^\tau)}\right.$$
$$\to V^* = H^0\left(V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}\right). \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Отсюда сразу следует отсутствие гиперплоскостей подскока. Действительно,

$$\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}^3} = \Omega\mathbf{P}^3(1) \oplus T\mathbf{P}^3(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^0\left(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}^3}\right) = 0 \Rightarrow h^0\left(F_{H-M}\big|_{\mathbf{P}^3}\right) = 0.$$

Для вычисления $h^0\left(p^\tau\big|_{\mathbf{P}^2}\right)$ вспомним, что $\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)$ вкладывается в тривиальное расслоение $\wedge^3 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}$ (см. (2) § 2) и гомоморфизм $h^0(p^\tau)$ мы можем представить в виде композиции

$$\begin{pmatrix} H^0\left(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}(W)}\right) \\ \oplus \\ H^0\left(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}(W)}\right)\end{pmatrix} \begin{matrix}\xrightarrow{q} \\ \\ \xrightarrow{q}\end{matrix} \begin{pmatrix}\wedge^3 V \\ \oplus \\ \wedge^3 V\end{pmatrix} \xrightarrow{(t_{f^+},\, t_{f^-})} V^*. \qquad (3)$$

Вычислим q для $W = \mathbf{C}^3$: пусть векторы $x_1, x_2, x_3 \in V$ порождают W и $w = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ — разложимая форма:

$$\mathbf{P}(w) \in G(3, V) \subset \mathbf{P}(\wedge^3 V) = \mathbf{P}^9. \qquad (4)$$

Ограничение

$$T\mathbf{P}^4\big|_{\mathbf{P}(W)} = T\mathbf{P}^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}^2} = \underset{\substack{\| \\ \wedge^2 T\mathbf{P}^2(-3)}}{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-2) \oplus 2T\mathbf{P}^2(-2)$$

Отсюда $H^0\left(\wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}(W)}\right) = \mathbf{C}$ и индуцировано вложением

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \wedge^2 T\mathbf{P}^2(-3) & \to & \wedge^2 T\mathbf{P}^4(-3)\big|_{\mathbf{P}^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^3 W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} & \to & \wedge^3 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \end{array} \qquad (5)$$

С л е д с т в и е 3. 1) *Вложение* $i\colon W \to V$ *индуцирует вложение* $\wedge^3 i\colon \wedge^3 W \to \wedge^3 V$ — *это и есть гомоморфизм* q *из* (3).

2) *Форма* w (4) *определяет на* V *две линейные формы*

$$\lambda_w^{\pm}\colon V \to \mathbf{C}, \qquad (6)$$

$$\lambda_w^{\pm}(v) = f^{\pm}(v) \wedge w.$$

3) $S_{H-M} = \left\{\mathbf{P}(w) \in G(3, V) \mid \mathbf{P}\lambda_w^+ = \mathbf{P}\lambda_w^-\right\}$.

Пусть $(\lambda : \mu)$ — однородные координаты на проективной прямой $\mathbf{P}^1$. Тогда для каждой точки $(\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1$ определен эпиморфизм

$$\wedge^3 V \xrightarrow{t(\lambda f^+ + \mu f^-)} V^* \to 0$$

и четырехмерное подпространство

$$\mathbf{P}\ker({}^t(\lambda f^+ + \mu f^-)) \subset \mathbf{P}(\wedge^3 V). \tag{7}$$

Объединение всех таких подпространств определяет образ $i(\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1) \subset \mathbf{P}(\wedge^3 V) = \mathbf{P}^9$ при вложении Сегре i: $\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^9$, которое задает полный линейный ряд сечений $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1}(1, 1)$.

Следствие 4. $S_{H-M} = G(3, V) \cap i(\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1)$.

Замечание. Если S_{H-M} — гладкая поверхность, то представление ее в виде пересечения многообразий Сегре и Грассмана дает богатую информацию о ее геометрии:

1) S_{H-M} регулярна и проективно нормальна;

2) $\deg S_{H-M} = 25$.

Действительно,

3) проекция π: $\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$, ограниченная на S_{H-M}, расслаивает S_{H-M} на кривые $C_{(\lambda : \mu)} \subset \mathbf{P}^4$ степени 5, через которые проходит четырехмерный ряд квадрик; значит, $C_{(\lambda : \mu)}$ — нормальная эллиптическая кривая;

4) канонический класс

$$K_{S_{H-M}} = 3C_{(\lambda : \mu)}$$

и т. д.

Но вернемся к нашим конкретным $f^\pm$ (см. (1) § 2). Пусть $w = \sum\limits_{i<j<k} t_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k$ — разложимый тривектор, т. е. $\mathbf{P}(w) \in G(3, V)$. Тогда, согласно следствию 3, $\mathbf{P}(w)$ определяет плоскость подскока $\mathbf{P}(W)$ в том и только в том случае, когда найдется точка $(\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1$ такая, что

$$\lambda t_{i,\, i+1,\, i+4} + \mu t_{i,\, i+2,\, i+3} = 0, \quad i \in \mathbf{Z}_5. \tag{8}$$

Действительно,

$$f^+(v) \wedge w = \sum v_i t_{i,i+1,i+4},$$

$$f^-(v) \wedge w = \sum v_i t_{i,i+2,i+3}$$

и эти формы пропорциональны только тогда, когда выполнены равенства (8).

При фиксированной точке $(\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1$ пять линейных уравнений (8) определяют $\mathbf{P}^4 \subset \mathbf{P}^9 = \mathbf{P}(\wedge^3 V)$, а когда точка $(\lambda : \mu)$ пробегает $\mathbf{P}^1$, они определяют вложение

$$i_{H-M}\colon \mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^9 = \mathbf{P}(\wedge^3 V), \tag{9}$$

т. е. многообразие Сегре $i_{H-M}(\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1) \subset \mathbf{P}^9$:

$$i_{H-M}((v_0, \ldots, v_4) \times (\lambda : \mu)) \to \sum t_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k, \tag{10}$$

где $t_{ijk}=0$ всегда, кроме

$$t_{i,\,i+1,\,i+4}=\mu v_i,\quad t_{i,\,i+2,\,i+3}=-\lambda v_i. \tag{11}$$

Вспомним, как задается грассманово многообразие $G(3,V)$ в $\mathbf{P}^9=\mathbf{P}(\wedge^3 V)$ квадратичными соотношениями Плюккера: на коэффициенты t_{ijk} тривектора $w=\sum t_{ijk}e_i\wedge e_j\wedge e_k$ накладывается пять квадратичных соотношений

$$t_{i,\,i+2,\,i+3}t_{i,\,i+3,\,i+4}-t_{i,\,i+2,\,i+4}t_{i,\,i+1,\,i+3}+t_{i,\,i+2,\,i+3}t_{i,\,i+1,\,i+4}=0,\quad i\in\mathbf{Z}_5. \tag{12}$$

Ограничивая эти квадрики на подпространство $\mathbf{P}^4_{(\lambda:\mu)}$ с координатами $(v_0,\,\ldots,\,v_4)$, получим

$$Q_i(\lambda:\mu)=\lambda\mu v_i^2+\lambda^2 v_{i+2}v_{i+3}-\mu^2 v_{i+1}v_{i+4},\quad (i\in\mathbf{Z}_5).$$

Таким образом, кривая $C_{(\lambda:\mu)}=\mathbf{P}^4_{(\lambda:\mu)}\cap G(3,\,V)\subset\mathbf{P}^9$ задается системой уравнений

$$\begin{aligned}
Q_0(\lambda:\mu)&=\lambda^2 v_1v_4+\lambda\mu v_0^2-\mu^2 v_2v_3=0,\\
Q_1(\lambda:\mu)&=\lambda^2 v_2v_0+\lambda\mu v_1^2-\mu^2 v_3v_4=0,\\
Q_2(\lambda:\mu)&=\lambda^2 v_0v_1+\lambda\mu v_2^2-\mu^2 v_4v_0=0,\\
Q_3(\lambda:\mu)&=\lambda^2 v_4v_2+\lambda\mu v_3^2-\mu^2 v_0v_1=0,\\
Q_4(\lambda:\mu)&=\lambda^2 v_0v_3+\lambda\mu v_4^2-\mu^2 v_1v_2=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Матрица из их частных производных, т. е. матрица поляр, имеет вид

$$M=\begin{Vmatrix}
2\lambda\mu v_0 & \lambda^2 v_2 & -\mu^2 v_4 & -\mu^2 v_1 & \lambda^2 v_3\\
\lambda^2 v_4 & 2\lambda\mu v_1 & \lambda^2 v_3 & -\mu^2 v_0 & -\mu^2 v_2\\
-\mu^2 v_3 & \lambda^2 v_0 & 2\lambda\mu v_2 & \lambda^2 v_4 & -\mu^2 v_1\\
-\mu^2 v_2 & -\mu^2 v_4 & \lambda^2 v_1 & 2\lambda\mu v_3 & \lambda^2 v_0\\
\lambda^2 v_1 & -\mu^2 v_3 & -\mu^2 v_0 & \lambda^2 v_2 & 2\lambda\mu v_4
\end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Эта матрица содержит всю информацию об $S_{H-M}=i_{H-M}(\mathbf{P}^4\times\mathbf{P}^1)\cap\cap G(3,V)$. Прежде всего, легко видеть, что S_{H-M} — гладкая поверхность, расслоенная на эллиптические кривые $C_{(\lambda:\,\mu)}$, задаваемые как кривые степени 5 в $\mathbf{P}^4$ уравнениями (13).

Кривая $C_{(\lambda:\mu)}$ гладка в точке $(v_0,\,\ldots,\,v_4)\in\mathbf{P}^4$ в том и только в том случае, когда ранг матрицы (14) равен 3. Первым вычислил ранг матрицы M австралийский математик Росс Мур. Он показал, что $\operatorname{rk}M\geqslant 3$ для любого $v=(v_0,\,\ldots,\,v_4)$ для всех $(\lambda:\mu)$, кроме тех, которые удовлетворяют уравнению

$$\lambda^{10}+11\lambda^5\mu^5-\mu^{10}=0, \tag{15}$$

и (0, 1), (1, 0).

Таким образом, для расслоения

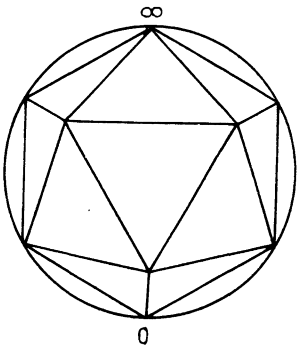
$$S_{H-M} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{P}^1 = (\lambda : \mu),$$

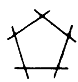
$$\pi_1^{-1}(\lambda : \mu) = C_{(\lambda:\mu)}, \tag{16}$$

все слои $C_{(\lambda:\mu)}$ — гладкие эллиптические кривые, кроме двенадцати точек на $\mathbf{P}^1$

$$(\lambda : \mu) = 0,\ \infty,\ -\varepsilon^{-k}\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right),\ \varepsilon^5 = 1,\ \ k \in \mathbf{Z}_5. \tag{17}$$

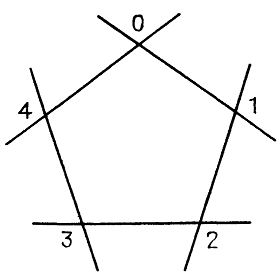
Если на комплексной сфере $\mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \infty$ отметить двенадцать точек (17), то мы получим вершины вписанного икосаэдра!



Для каждой вершины икосаэдра $(\lambda : \mu)$ кривая $C_{(\lambda:\mu)} =$ 

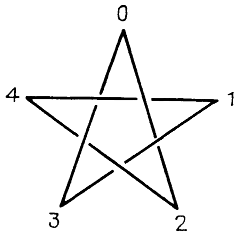
колесо из пяти прямых. Его точки пересечения можно пронумеровать квадриками (13). Тогда:

1) в шестерке вершин 0, $-\varepsilon^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}_5$, имеет место конфигурация $(i+2,\ i+3)$



(18)

2) в шестерке вершин $\infty, -\varepsilon^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}_5$, имеет место конфигурация $(i+1,\ i+4)$

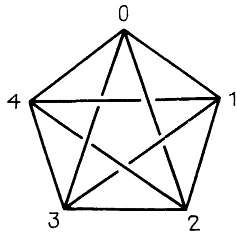


(18′)

При проекции $S_{H-M} \subset \mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^1$ на $\mathbf{P}^4$

$$S_{H-M} \xrightarrow{\pi_4} \mathbf{P}^4$$

склеиваются только вершины пятиугольников $C_{(\lambda\,:\,\mu)}$(18) и $C_{(\mu\,:\,\lambda)}$ (18′) в «пифагорейский герб»



(19)

давая шесть пятерок особых точек поверхности $\pi_4(S_{HM})$.

Этой информации оказалось уже достаточно, чтобы отождествить S_{H-M} с поверхностью Сиоды S(5) и описать все ее проективные модели: $\mathrm{S}(5) \subset \mathbf{P}^9$, $\pi_4(\mathrm{S}(5)) \subset \mathbf{P}^4$ и т. д. (см. [2]).

На векторном пространстве $V = \mathbf{C}^5$ с координатами $\{e_i\}$ (см. (1)) действует группа Гайзенберга H_5 ступени 5, порожденная образующими

$$\sigma\colon e_k \to e_{k-1},\quad \tau\colon e_k \to \varepsilon^{-k} e_k,\quad \varepsilon^5 = 1.$$

Нормализатор N группы H_5 в SL(5, C) имеет порядок 15 000 и

$$N = \mathrm{H}_5 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}_5).$$

Легко видеть, что $N \subset \mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$ сохраняет F_{H-M}, а на $H^0(F_{H-M}(3))$ группа Гайзенберга H_5 действует тривиально. Значит, SL(5, C) действует на $H^0(F_{H-M}(3))$, а группа икосаэдра действует на

$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}H^0(F_{H-M}(3))$. Легко видеть, что это неприводимое представление, которое оставляет на месте единственную (главную) квадрику Q_2 и единственную кубику Q_3 — диагональную кубику Клебша. Кривая пересечения

$$B = Q_2 \cap Q_3 \tag{20}$$

— это кривая Бринга, т. е. $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}H^0(F_{H-M}(3))$ мы можем интерпретировать как гиперплоскость в $\mathbf{P}^4$ с однородными координатами $(x_0, \ldots, x_4)$, задаваемую уравнением $\sum x_i = 0$. Квадрика Q_2 и кубика Q_3 задаются уравнениями

$$\sum x_i^2 = 0, \qquad \sum x_i^3 = 0. \tag{21}$$

Теперь каждая точка $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}H^0(F_{H-M}(3))$ изображает абелеву поверхность — нули соответствующего сечения. Диагональная кубика Клебша Q_3 есть образ модулярной поверхности Гильберта $H(\sqrt{5})$.

Естественно предположить, что Q_3 изображает поверхность Комессатти (см. конец § 1 и заключительные замечания работы [3]).

Главная квадрика $Q_2 = \mathbf{P}^1_\lambda \times \mathbf{P}^1_\mu$ (здесь λ и μ — просто значки для различения одинаковых прямых сомножителей) содержит кривую Бринга B, заданную формулой (20) и определяет две ее проекции

$$\begin{tikzcd}
& Q_2 = \mathbf{P}^1_\lambda \times \mathbf{P}^1_\mu \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& \cup & \\
\mathbf{P}^1_\lambda & B \arrow[l, "p_\lambda"'] \arrow[r, "p_\mu"] & \mathbf{P}^1_\mu
\end{tikzcd} \tag{22}$$

Пусть $w_\lambda = (dp_\lambda)_0$ — дивизор ветвления трехлистного накрытия $B \xrightarrow{p_\lambda} \mathbf{P}^1_\lambda$, а $w_\mu = (dp_\mu)_0$ — дивизор ветвления трехлистного накрытия $B \xrightarrow{p_\mu} \mathbf{P}^1_\mu$. Тогда легко видеть, что $w_\lambda \cup w_\mu$ состоит из 24 различных точек и как дивизор на B

$$w_\lambda \cup w_\mu = B \cap Q_4, \tag{23}$$

где $Q_4 \subset \mathbf{P}^3$ — диагональная квартика, задаваемая уравнением $\sum x_i^4 = 0$. (На языке Клейна приводимое регулярное многообразие $w_\lambda \cup w_\mu \subset \mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^4$ изображает уравнение $y^5 + c = 0$.)

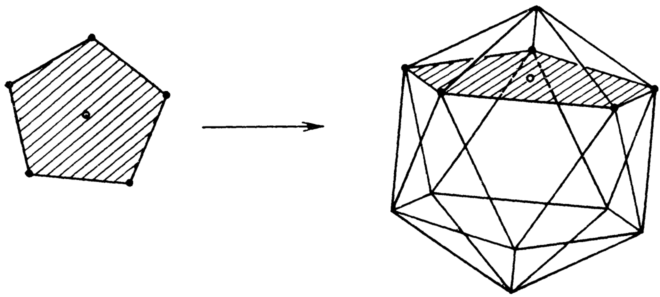
Образ дивизора ветвления $p_\lambda(w_\lambda)$ (соответственно $p_\mu(w_\mu)$) — двенадцать вершин икосаэдра на сфере $\mathbf{P}^1_\lambda$ (соответственно $\mathbf{P}^1_\mu$). Клейн показал, что p_λ и p_μ — разные накрытия с одинаковым набором точек ветвления (вершины икосаэдра) и дал следующее точное описание этих накрытий.

1. Как топологическую поверхность рода 4 B можно склеить из двенадцати одинаковых правильных пятиугольников вдоль сторон так, чтобы в каждой вершине сходилось пять пятиугольников. У полученной фигуры будет 30 ребер и 12 вершин.

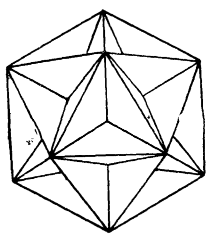
2. Фигуру B можно отобразить внутрь сферы $S^2 \subset R^3 - \{0\}$:

$$\varphi_\lambda \colon B \to R^3 - \{0\}, \tag{24}$$

так, что вершины перейдут в вершины икосаэдра, а правильные пятиугольники — в «диагональные» пятиугольники икосаэдра:



Видимая оболочка образа $\varphi_\lambda(B)$ совпадает при этом с «Большим додекаэдром» (см. Виннинджер «Модели многогранников» модель № 21):

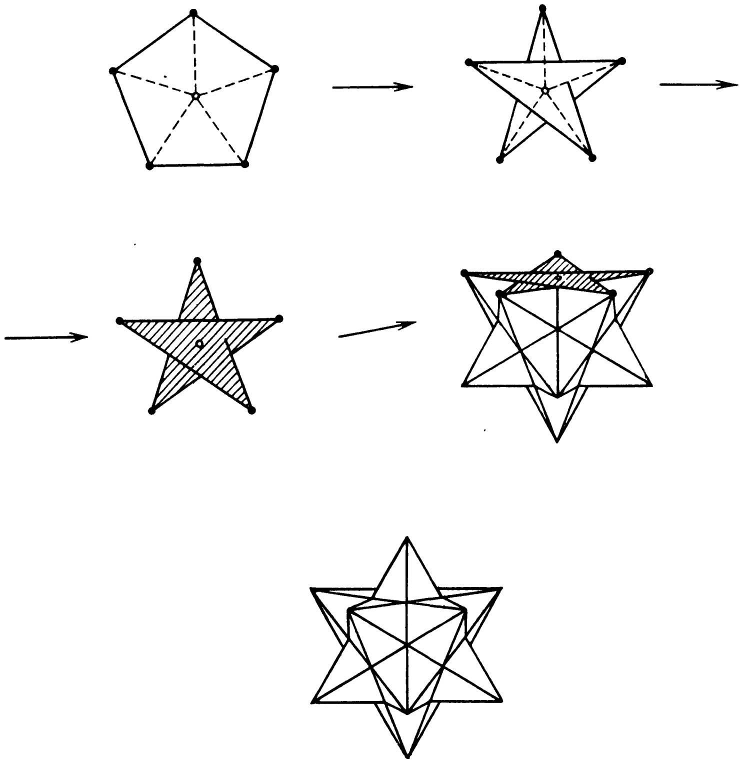


Отображение p_λ будет композицией отображения φ_λ и проекции из центра сферы $\{0\} \in R^3$ на ее поверхность. Точки ветвления совпадут с вершинами B, а в вершины икосаэдра кроме них перейдут еще центры правильных пятиугольников.

3. Фигуру B можно отобразить внутрь сферы $S^2 \subset \mathbf{R}^3 - \{0\}$:

$$\varphi_\mu \colon B \to R^3 - \{0\}, \tag{25}$$

так, что вершины перейдут в вершины икосаэдра, ребра — в диагонали, а правильные пятиугольники — в невыпуклые звезды в «диагональных» пятиугольниках икосаэдра



Видимая оболочка образа $\varphi_\mu(B)$ совпадает при этом с «малым звездчатым додекаэдром» (см. Виннинджер, модель 20).

Отображение p_μ будет композицией отображения φ_μ и проекции из центра сферы на ее поверхность.

Точки кривой Бринга $B = Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbf{P}H^0(F_{H-M}(3))$ изображают абелевы поверхности. Какие?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barth W. Kummer surfaces associated with the Horrocks — Mumford bundle // Proceedings of the Angers conference.— 1979.— P. 28—48.
2. Barth W., Huler K., Moore R. Shioda's modular surface S(5) and the Horrocks — Mumford bundle // Proceedings of the

Tat conference on algebraic vector bundles over algebraic variety.— Bombay, 1984.
3. Barth W., Huler K., Moore R. Regenerations of Horrocks — Mumford Surfaces // Math. Ann.— 1987.— Bd 227.— S. 735—785.
4. Comessatti A. Sulle superficie de Jacobi semplicemente singolare // Mem. Soc. Ital. Sci. (dei XL) (3).— 1919.— V. 21.— P. 45—71.
5. Decker W., Schreyer F. O. On the uniqueness of the Horrocks — Mumford bundles // Math. Ann.— 1986.— Bd 273.— S. 415—443.
6. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. I, II.— М.: Мир, 1982.
7. Gruson L., Peskine C. Postulation des courves gauches // Lect. Notes Math.— 1983.— V. 997.
8. Horrocks G., Mumford D. A rank 2 vector bundle on P_4 with 15 000 symmetries // Topology.— 1973.— V. 12.— P. 63—81.
9. Lange H. Jacobian surfaces in P_4 // J. Math. Bend.— 1986.— V. 372. P. 71—86.
10. Mumford D., Fogarty J. Geometric invariant theory.— Second England Edition.— Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer — Verlag, 1982.— Appendix to ch. 5, p. 181.
11. Ramanan S. Ample divisors on abelian surfaces // Proc. London Math. Soc.— 1925.— V. 51.— P. 231—245.
12. Serre J. P. Sur les modules projectifs // Seminar Dubreil — Pisot, 1960/61, exposé 2.

«...особенно «Учебник алгебры II» Р. Фрике (1926), который показался мне более понятным, чем Клейн».

Из «Письма Серра», с. 285.

Обращаясь к теории уравнений шестой степени, мы надеемся, что читатель хорошо усвоил материал монографии Ф. Клейна. В этом случае заполнение пробелов набрасываемого пунктира аналогий превратится в занимательную игру. В противном случае необходимо обратиться к «Учебнику» Фрике, цитированному в эпиграфе.

Аналогом однородной группы икосаэдра для уравнений шестой степени является группа Валентинера G_V, которая в однородных координатах проективной плоскости (z_1, z_2, z_3) порождается элементами

$$u=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad V=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix},$$

$$S=\begin{Vmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{\rho}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\rho^2\\ -\frac{\rho^2}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4}\rho\\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\rho^2 & \frac{1}{2}\end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\varepsilon^5=1,\ \rho^3=1.$$

Центр группы Валентинера — скалярные матрицы вида

$$\rho^m\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}, \tag{2}$$

а сама G_V — нетривиальное центральное расширение

$$1\to\mathbf{Z}_3\to G_V\to A_6\to 0 \tag{3}$$

знакопеременной группы A_6.

У группы Валентинера есть одна единственная инвариантная форма шестой степени

$$F = z_1^6 + z_2^6 + z_3^6 + \frac{3}{2}(\eta - 3)\left(z_1^4 z_2^2 + z_1^4 z_3^2 + z_2^4 z_1^2 + z_2^4 z_3^2 + \right.$$

$$\left. + z_3^4 z_1^2 + z_3^4 z_2^2\right) + 6(\eta + 2) z_1^2 z_2^2 z_3^2, \qquad (4)$$

$$\eta = \frac{1 - i\sqrt{15}}{2}.$$

Кривая C_V, задаваемая уравнением $F = 0$, — гладкая кривая рода 10.

На этой кривой действует группа A_6, и 360-листное накрытие

$$C_V \to C_V / A_6 = \mathbf{P}^1 \qquad (5)$$

разветвлено только в трех точках (скажем, 0, 1, ∞): четырехкратное в 0, двукратное в 1 и пятикратное в ∞.

Базис инвариантов тернарных форм для группы G_V состоит из формы F и следующих форм Φ, Ψ и X:

$$3^2 \cdot 5^2 \bar{\eta} \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_3 \partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_3^2} \end{vmatrix},$$

$$-2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \bar{\eta} \Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_3 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_3 \partial z_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_3^2} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} & 0 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

$$X = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_1} & \frac{\partial F}{\partial z_2} & \frac{\partial F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial z_3} \end{vmatrix}.$$

Эти формы связаны уравнением

$$X^2 = \Psi^3 + 3\Psi(3^8 \cdot \Phi^5 + 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5\Phi^4 \cdot F^2 + 2^4 \cdot 3^5 \cdot 31\Phi^3 F^4 -$$

$$-2^7\cdot 3^5\cdot 5\cdot 11\Phi^2F^2+2^{10}\cdot 3^5\cdot 5\Phi F^8+2^{10}\cdot 31\cdot F^{10})+$$
$$+2^2\cdot 3^6\cdot F(3^6\cdot 5\Phi^7-2^2\cdot 3^7\cdot 5\Phi^6F^2+2^4\cdot 3^3\cdot 773\cdot \Phi^5F^4-$$
$$-2^6\cdot 3^5\cdot 11\Phi^4\cdot F^3+2^{12}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\Phi^3F^8-2^{13}\cdot 3^2\cdot 5^2\Phi^2F^{10}+$$
$$+2^{16}\cdot 3^6\cdot 5\Phi F^{12}-2^{18}\cdot 5F^{14}). \qquad (7)$$

Отсюда получается резольвента шестой степени (которую можно назвать резольвентой Джербалди)

$$Z^6+6(\eta+2)FZ^5+\left[\frac{3}{2}(\eta-3)\Phi+6(11\eta+1)F^2\right]Z^4-$$
$$-[3(\eta+15)\Phi F+4(51\eta-55)F^3]Z^3-$$
$$-Z^2\left[\frac{3}{16}(11\eta+1)\Phi^2+\frac{3}{2}(29\eta+39)\Phi F^2-3(53\eta-145)F^4\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{16}\Psi+\frac{3}{16}(123\eta-127)\Phi^2F-16(7\eta+5)\Phi F^3\right]Z+\Phi^3=0. \qquad (8)$$

Все эти формулы и факты (а также представление A_6 в виде конгруэнц-фактора группы дробно-линейных преобразований с коэффициентами в целых числах поля $Q\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ можно найти во второй части «Учебника алгебры II» Роберта Фрике.

В работе 1905 года (Math. Ann.— 1905.— Bd. 61.— S. 50) Клейн указал, как свести произвольное уравнение шестой степени с группой Галуа A_6 к резольвенте (8).

Пусть $x_1, \ldots, x_6$ — корни уравнения как однородные координаты $\mathbf{P}^5$. Чтобы построить «ковариантные точки», достаточно найти три функции z_1, z_2, z_3 шести переменных $x_1, \ldots, x_6$ такие, что проективизация этой тройки при четной перестановке $x_1, \ldots, x_6$ преобразуется соответствующим элементом группы Валентинера. При этом разрешаются элементарные побочные иррациональности — квадратные и кубические корни.

Пусть (z_1', z_2', z_3') — контргредиентные переменные к (z_1, z_2, z_3) (координаты на двойственной плоскости). Чтобы построить нужное эквивариантное соответствие, достаточно построить форму от трех множеств переменных

$$\underbrace{z_1, z_2, z_3}_{(z)}, \qquad \underbrace{z_1', z_2', z_3'}_{(z')}, \qquad \underbrace{x_1, \ldots, x_6}_{(x)}, \qquad (9)$$

инвариантную относительно диагонального действия A_6. Гордон построил такую форму бистепени (1, 1) по (z), (z') и степени 6 по (x). (Позже Кобл нашел такую форму степени 4 по (x).)

Таким образом, каждой точке $(x_1, \ldots, x_5)\in \mathbf{P}^5$ сопоставляется коннекс Клейна; это есть форма бистепени (1, 1) от (z_1, z_2, z_3),

(z_1', z_2', z_3'), т. е. сечение пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^{2*}}(1, 1)$ (в современных терминах). Но по формуле Кюннета

$$H^0\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^{2*}}(1, 1)\right) = H^6\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)\right) \otimes H^0\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2*}}(1)\right) =$$
$$= \mathrm{Hom}\ (V, V), \qquad \mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^2.$$

Поэтому точке $(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbf{P}^5$ (образу уравнения по Клейну) сопоставляется матрица M линейного преобразования $\mathbf{P}^2$ в координатах (z_1, z_2, z_3). Сопоставляя матрице M ее собственный вектор (при этом мы решаем только кубическое уравнение побочной иррациональности), получаем требуемое эквивариантное отображение $(x_1, \ldots, x_6) \to (z_1, z_2, z_3)$, а подставляя (z_1, z_2, z_3) в F и Φ, приходим к резольвенте (8). При этом полезно еще расслоить плоскость $\mathbf{P}^2(z_1, z_2, z_3)$ на пучок A_6-инвариантных кривых степени 12

$$\mu_0 F^2 + \mu_1 \Phi. \tag{10}$$

Таким образом, решение произвольного уравнения шестой степени «почти» сводится к решению уравнения (8) (для истолкования «почти» см. «Письмо Серра»).

Мы видим, что теория уравнений шестой степени столь же точна и красива, как и теория уравнений пятой степени, изложенная Клейном во второй части монографии. Но в отличие от пятой степени для уравнений шестой степени остается важный вопрос: а нет ли однопараметрической резольвенты? Красота решения проблемы форм для группы Валентинера диктует ответ: конечно, нет. Однако на каком геометрическом принципе основано это отрицание? Приходится вернуться к геометрическим аспектам теории Клейна и исследовать соответствия между «поверхностью Бринга» $S_B\left(\sum x_i = \sum x_i^2 = \sum x_i^3 = 0\right)$ и двулистным накрытием $\mathbf{P}^2$ с ветвлением в кривой $F = 0$, «кривой Бринга» $C_B = \left(\sum x_i = \sum x_i^2 = \sum x_i^3 = \sum x_i^4 = 0\right)$ и кривой $C_V(5)$ и т. д. С другой стороны, еще в начале века Кобл предложил решать проблему форм для подгрупп группы Кремоны, что увеличивает возможности редукции параметров.

Если мы фиксируем число s и будем увеличивать число переменных, то «многообразие Вандермонда»

$$\sum x_i = \sum x_i^2 = \ldots = \sum x_i^s = 0 \tag{11}$$

рано или поздно будет рациональным (и будет иметь рациональную точку). Это дает возможность убрать s начальных коэффициентов произвольного уравнения достаточно большой степени. На этом геометрическом принципе основана оценка числа параметров в «проблеме резольвент». Приведем ее точную формулировку.

Пусть k — поле характеристики 0, $K_2 \supset K_1 \supset k$ — башня полей и n — натуральное число. Тогда $p(K_2 : K_1) \leqslant n$, если существует элемент $\lambda \in K_2$ такой, что

1) $K_2 = K_1(\lambda)$;

2) $a_0\lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \ldots + a_r = 0$ $(a_0 \neq 0)$, где каждый $a_i = F_i(u_1, \ldots, u_n)$, $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $u_i \in K_1$. Иначе говоря, λ — значение алгебраической функции n переменных над k с аргументами из K_1.

Пусть $K \supset k$, $f \in K[X]$ — полином степени d и $n \geqslant 0$ — целое число. Предположим, что поле K_m:

1) содержит корень полинома f;

2) существует башня

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_m;$$

3) $p(K_i : K_{i-1}) \leqslant n$ для всех i.

Обозначим символом $p_K(f)$ наименьшее n, для которого башня 1) — 3) существует. Это число и есть число параметров в «проблеме резольвент».

Читатель уже знает, что

$$\deg f \leqslant 5 \Rightarrow p_k(f) \leqslant 1,$$

$$\deg f \leqslant 6 \Rightarrow p_k(f) \leqslant 2.$$

Можно показать (с помощью преобразования Чирнгаузена), что

$$p_k(f) \leqslant \deg f - 4.$$

Гильберт показал, что для общего f

$$\deg f = 9 \Rightarrow p_k(f) \leqslant 4.$$

Виман показал, что

$$\deg f \geqslant 9 \Rightarrow p_k(f) \leqslant \deg f - 5.$$

Сегре показал, что

$$\deg f \geqslant 157 \Rightarrow p_k(f) \leqslant \deg f - 6.$$

Рихард Брауэр в своей последней работе (Brouwer R. On the Resolvent Problem // Ann. di Math.— 1975.— V. 102.— P. 45—55), посвященной Бениамино Сегре, доказал, что

$$\deg f \geqslant (r-1)! + 1 \Rightarrow p_k(f) \leqslant \deg f - r.$$

Как оценить это число снизу? Это проблема нового этапа развития одной из самых красивых математических теорий — теории Галуа.

ДОПОЛНЕНИЕ Д (*А. Н. Тюрин*)

Основные понятия, конструкции и концепции теории алгебраических поверхностей можно найти в монографии: Шафаревич И. Р. и др. Алгебраические поверхности.— М.: Наука, 1965.— (Тр. Матем. ин-та АН СССР им. И. А. Стеклова, т. 75) и в четвертой главе второго тома монографии Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1982.

§ 1. Принципы классификации алгебраических поверхностей

Во времена Ф. Клейна трудами его коллег и учеников (и, конечно, его собственными трудами) теория римановых поверхностей полностью оформилась в том виде, в котором она входит сейчас в идейно-культурный базис современной математики. В то же время трудами итальянской школы алгебраической геометрии были заложены основы теории алгебраических поверхностей. Чтобы не затеряться в дебрях частных случаев и исключений, мы обратимся к основным принципам классификации, которые, естественно, являются аналогами принципа классификации алгебраических кривых (римановых поверхностей). Типы алгебраических поверхностей различают:

1) свойства группы классов циклов степени 0 по рациональной эквивалентности;

2) поведение плюриканонических линейных систем;

3) классы гладкости подлежащих четырехмерных многообразий.

Для алгебраических кривых эти признаки принадлежности одному и тому же типу эквивалентны, для алгебраических поверхностей — нет.

Разберемся с понятиями и конструкциями 1) — 3). Далее всюду, если не оговорено противное, поверхность S будет предполагаться односвязной, т. е. $\pi_1(S) = 0$.

1. Аналог якобиана. Если S — гладкая алгебраическая поверхность, то формальная сумма

$$D = \sum_{i=1}^{d} n_i s_i, \quad s_i \in S,\ n_i \in \mathbb{Z}, \quad \deg D = \sum n_i, \tag{1.1}$$

называется *0-циклом* степени $\sum n_i$ на S. Цикл эффективен, если в (1.1) все $n_i \geqslant 0$. Циклы составляют группу по сложению. Для определения рациональной эквивалентности, однако, понятие цикла нужно уточнить так же, как для случая особой кривой.

Тонким циклом на S называется любая нульмерная подсхема $\xi \subset S$. Она определяется своим структурным пучком O_ξ.

Целое число $\deg \xi = h^0(S, O_\xi)$ называется *степенью* тонкого цикла.

Носитель пучка O_ξ состоит из конечного множества точек $s_1, \ldots, s_\alpha \in S$ и $O_\xi = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} O_{\xi_i}$, где ξ_i — тонкий цикл с носителем s_i. Тонкий цикл ξ определяет 0-цикл (1.1):

$$[\xi] = \sum_{i=1}^{d} \deg \xi_i \cdot s_i, \quad \deg [\xi] = \deg \xi. \tag{1.2}$$

Два цикла D_1 и D_2 на S называются *рационально эквивалентными*, если существуют тонкие циклы ξ_1 и ξ_2 и кривая C на S такие, что:

1) $D_i = [\xi_i]$;

2) $\xi_1, \xi_2 \subset C$ как подсхемы;

3) ξ_1 рационально эквивалентен ξ_2 на C.

Циклы, рационально эквивалентные нулю, не составляют подгруппу в группе всех 0-циклов, но мы можем рассмотреть подгруппу, ими порожденную, и положить

$$A_0(S) = \frac{\{\text{группа циклов степени нуль}\}}{\begin{array}{c}\{\text{подгруппа, порожденная циклами,} \\ \text{рационально эквивалентными нулю}\}\end{array}}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что если поверхность S унирациональна, то $A_0(S) = 0$. Вообще, нетрудно видеть, что $A_0(S)$ — бирациональный инвариант.

Циклу D на S можно сопоставить полный линейный ряд $|D|$, однако его структура даже близко не похожа на структуру проективного пространства. Сравнительно недавно Д. Мамфорд [7] доказал, что

$$\left\{\begin{array}{c} S \text{ допускает голоморфную} \\ \text{симплектическую структуру} \\ \omega\colon TS \to T^*S \end{array}\right\} \Rightarrow \{A_0(S) \text{ бесконечномерна}\}.$$

Алгебраическая (голоморфная) симплектическая структура — произвольный ненулевой кососимметрический гомоморфизм $\omega\colon TS \to T^*S$, $\omega^* = -\omega$ — определяется как ненулевое сечение $H^0(\Lambda^2 T^*S) = H^0(S, K_S)$, где $K_S = \det T^*S$ — каноническое линейное расслоение (канонический класс).

Размерность всего пространства сечений (т. е. пространства голоморфных (2,0)-форм)

$$p_g(S) = H^0(S, K_S) = H^{2,0}(S) \tag{1.4}$$

называется *геометрическим родом* поверхности S и является ее самым выразительным геометрическим инвариантом. Очевидна аналогия $p_g(S)$ с родом $g(C) = H^0(C, K_C)$ алгебраической кривой. Результат Д. Мамфорда имеет вид

$$p_g(S) > 0 \Rightarrow \dim A_0(S) = \infty. \tag{1.5}$$

Для рациональной поверхности $p_g(S) = 0$ и $A_0(S) = 0$.

При рациональных накрытиях $\varphi\colon S' \to S$ и род и A_0 ведут себя одинаково:

$$p_g(S') \geqslant p_g(S), \quad A_0(S') = 0 \Rightarrow A_0(S) = 0. \tag{1.6}$$

Кроме того, группа $A_0(S)$ бесконечно делима, т. е. для всех $n \in \mathbf{Z}$

$$a \in A_0(S), \quad a = na', \quad a' \in A_0(S). \tag{1.7}$$

Многочисленные примеры и геометрические наблюдения приводят к следующей гипотезе:

Гипотеза Блоха. $p_g(S) = 0 \Rightarrow A_0(S) = 0$. (Напомним, что S односвязна.) Аналогия со случаем кривых очевидна.

2. Кодаировская размерность. Каноническое расслоение K_S на поверхности S позволяет определить константу $\varkappa(S)$ как ассимптотику плюриродов:

$$p_n(S) = \dim H^0\left(S, K_S^n\right) = O\left(n^{\varkappa(S)}\right)$$

(полагаем $p_n(S) = 0 \Rightarrow \varkappa(S) = -\infty$). Константа $\varkappa(S)$ называется кодаировской размерностью S, принимает значения $-\infty$, 0, 1, 2 и делит поверхности на типы:

$$\begin{array}{lll} \varkappa(S) = -\infty & \Leftrightarrow S & \text{рациональна,} \\ \varkappa(S) = 0 & \Leftrightarrow S & \text{поверхность типа } K3, \\ \varkappa(S) = 1 & \Leftrightarrow S & \text{с эллиптическим пучком,} \\ \varkappa(S) = 2 & \Leftrightarrow S & \text{общего типа.} \end{array} \tag{1.8}$$

Константа $\varkappa(S)$ так же, как $A_0(S)$, является бирациональным инвариантом поверхности. Напомним, что алгебраические поверхности S и S' бирационально эквивалентны, если одну из другой можно получить цепочкой σ- или анти-σ-процессов: $S \to S_1 \to \ldots \ldots \to S_N \to S'$, где $S_i \to S_{i+1}$ — или раздутие прямой из точки или сжатие прямой. Если поверхность не рациональна, то в ее классе бирациональной эквивалентности лежит единственная поверхность $S_{\min}$, на которой нет гладких кривых с квадратом -1. Существует простой и удобный критерий принадлежности общему типу для минимальной поверхности $S_{\min}$: для любой кривой $C \subset S_{\min}$

$$CK_S \geqslant 0, \quad K_S^2 > 0 \Leftrightarrow \varkappa\left(S_{\min}\right) = 2. \tag{1.9}$$

(Мы рассматриваем здесь K_S как класс дивизоров, т. е. $c_1(K_S) \in H^2(S, \mathbf{Z})$.)

С. Блох очертил первые связи между $\varkappa(S)$ и $A_0(S)$ (см. [3]): если $q(S) = H^1(O_S) = 0$, то

$$p_g(S) = 0,\ \varkappa(S) < 2 \Rightarrow A_0(S) = 0. \tag{1.10}$$

3. **Класс гладкости.** Согласно гипотезе ван де Вена (см. [4]) класс гладкости алгебраической поверхности определяет ее кодаировскую размерность. По теореме М. Фридмана [4] топологический тип односвязной алгебраической поверхности определяется ее формой пересечения q_S на решетке двумерных когомологий $H^2(S, \mathbf{Z})$. Второе число Бетти поверхности раскладывается в сумму $b_2 = b_2^+ + b_2^-$, где $b_2^+ - b_2^-$ —сигнатура поверхности как 4-многообразия.

Геометрический род $p_g(S)$ (см. (1.4)) является топологическим инвариантом, так как по теореме Ходжа (см. [5])

$$p_g(S) = \left(b_2^+ - 1\right)/2. \tag{1.11}$$

Отвлекаясь от тонкостей, можно поставить три естественных вопроса о поверхностях, максимально далеких по кодаировской размерности:

Можно ли отличить рациональную поверхность S_1 и односвязную поверхность общего типа S_2 по:

1) группам $A_0(S_i)$;

2) топологическому инварианту $p_g = \left(b_2^+ - 1\right)/2$; (1.12)

3) классу гладкости.

Ответы на первые два вопроса получены Реббеккой Барлоу, которая построила уникальную односвязную поверхность общего типа B — поверхность Барлоу, для которой

1) $A_0(B) = 0$;

2) $p_g(B) = 0$;

3) B гомеоморфна $\widetilde{\mathbf{P}}^2_{(p_1,\dots,p_8)}$ —плоскости с восемью раздутыми точками, но не диффеоморфна ей ([6]).

На сегодня поверхность Барлоу — единственная односвязная поверхность общего типа с $p_g = 0$ и $A_0 = 0$.

В следующем параграфе мы увидим, как и в конструкции этого уникального геометрического объекта и в доказательстве тривиальности $A_0(B)$ с неизбежностью появляется икосаэдр.

§ 2. Поверхность Барлоу

Рассмотрим вещественное квадратичное поле $K = \mathbf{Q}(\sqrt{21})$ с кольцом целых

$$O_k = \left\{\frac{m + n\sqrt{21}}{2},\ m, n \in \mathbf{Z},\quad m \equiv n \bmod 2\right\}.$$

Для простого идеала $2O_K \subset O_K$

$$O_K/2O_K = \mathbf{F}_4 \text{ — поле из четырех элементов.}$$

Пусть группа $G = \mathrm{SL}_2(O_K)/\pm\,\mathrm{id}$ — модулярная группа Гильберта и Γ есть 2-конгруэнс-подгруппа:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(O_K) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2 \right\}.$$

Тогда

$$G/\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_4) = A_5 \tag{2.1}$$

— группа икосаэдра, так как матрицы из $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_4)$ действуют как дробно-линейные преобразования проективной прямой $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_4)$, состоящей из пяти точек, т. е. как знакопеременная группа подстановок пяти элементов. Пусть

$$\widetilde{G} = \{g \in GL_2(O_k) \mid \det g \in U^+\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in U \right\},$$

где U — группа единиц в O_K, а U^+ — положительные единицы, и

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widetilde{G} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2 \right\}.$$

Эти группы связаны с предыдущими стандартными точными последовательностями

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & G & \xrightarrow{i} & \widetilde{G} & \xrightarrow{\det} & U^*/U^2 & \to & 1 \\ \| & & \cup & & \cup & & \| & & \| \\ 1 & \to & \Gamma & \to & \widetilde{\Gamma} & \to & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{2.2}$$

и

$$\begin{pmatrix} 55 + 12\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma} - \Gamma.$$

Отсюда и из (2.1)

$$\widetilde{G}/\Gamma = G/\Gamma \times \widetilde{\Gamma}/\Gamma = A_5 \times \mathbf{Z}_2. \tag{2.3}$$

Пусть $H = \{z \in C \mid \mathrm{im}\, z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Рассмотрим действие Γ на $H \times H$:

$$(z_1, z_2) \to \left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'} \right) \tag{2.4}$$

где штрих обозначает сопряжение в O_K. Это действие свободно и факторповерхность $H \times H/\Gamma$ компактифицируется пятью особыми точками до полной особой поверхности.

При разрешении каждой особой точки вклеивается колесо из шести (—5)-кривых, и мы приходим к неминимальной поверхности $\widetilde{Y}$, содержащей 20 исключительных кривых первого рода. Сжатие этих кривых дает гладкую поверхность Y_{G-Z} [9, с. 105—106]. Эта замечательная поверхность имеет следующие инварианты:

$$p_d(Y_{G-Z}) = 4, \quad K_Y^2 = 10, \tag{2.5}$$

и О. В. Шварцман показал, воспользовавшись указанными Ж.-П. Серром образующими группы Г, что Y_{G-Z} односвязна [8].

Группа $A_5 \times \mathbf{Z}_2$ (см. (2.3)) действует на Y_{G-Z} и образующая σ второго множителя $\mathbf{Z}_2$ действует на Y_{G-Z} как инволюция с двадцатью неподвижными точками, так что факторповерхность

$$Q = Y_{G-Z}/\langle\sigma\rangle \tag{2.6}$$

имеет только двадцать квадратичных особых точек.

Каноническое отображение φ_K: $Y_{G-Z} \to \mathbf{P}^3$ факторизуется по инволюции σ:

$$\begin{tikzcd} Y_{G=Z} \arrow[r, "2:1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_k"'] & Q \arrow[r] & \mathbf{P}^3, \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

где i — вложение Q в $\mathbf{P}^3$ — удобно задается в однородных координатах Клейна $(x_1, \ldots, x_5)$ в $\mathbf{P}^4$ уравнениями

$$\begin{gathered} \sum x_i = 0, \\ \sum x_i^5 - \frac{5}{4}\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum x_i^3\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.8}$$

инвариантными относительно действия A_5 на $\mathbf{P}^4$ подстановками координат. Рассмотрим теперь действие элементов первого множителя A_5 в (2.3) на Y_{G-Z} в виде этих подстановок. Оно продолжается инволюцией перестановки сомножителей в $H \times H$ до действия S_5.

Прежде всего цикл $\beta = (1, 2, 3, 4, 5)$ действует на Y_{G-Z} без неподвижных точек (так как 4 неподвижные точки β на гиперплоскости $\sum x_i = 0$ в $\mathbf{P}^4$ лежат вне Q).

Факторизация поверхности Y_{G-Z} по группе $\langle\beta\rangle = \mathbf{Z}_5$ приводит к гладкой поверхности Катанезе

$$Y_C = Y_{G-Z}/\langle\beta\rangle, \quad p_g(Y_C) = 0, \quad K^2 = 2, \quad \pi_1(Y_C) = \mathbf{Z}_5. \tag{2.9}$$

Рассмотрим диэдральную подгруппу

$$D_5 = \langle (25)(34)\sigma, \ (12345) \rangle, \tag{2.10}$$

порожденную инволюцией $(25)(34)\sigma$ и β. Факторповерхность

Y_{G-Z}/D_5 имеет только четыре простейшие двойные точки. Стандартное разрешение этих двойных точек дает гладкую минимальную поверхность B:

$$B \xrightarrow{\sigma} Y_{G-Z}/D_5, \quad p_g(B) = 0, \tag{2.11}$$

$$K_B^2 = 1, \quad \pi_1(B) = \{1\}. \tag{2.12}$$

Это и есть поверхность Барлоу. Докажем, что она обладает требуемыми свойствами.

1) $\pi_1(B) = 0$. Действительно, разрешение особенностей σ: $B \to Y_{G-Z}/D_5$ есть вклеивание конечного числа (-2)-сфер с квадратом -2. Отсюда $\pi_1(B) = \pi_1(Y_{G-Z}/D_5)$. Универсальная накрывающая $\widetilde{Y_{G-Z}/D_5} \xrightarrow{\pi} Y_{G-Z}/D_5$ получается факторизацией Y_{G-Z} по подгруппе $S \subset D_5$. Так как π не разветвлено, S содержит все эллиптические элементы погруппы D_5 (т. е. элементы с неподвижными точками). Но инволюции $\alpha\beta^n$, $n = 1, \ldots, 4$, сопряжены в D_5, имеют неподвижные точки и порождают всю D_5, т. е. $S = D_5$ и $\pi_1(B) = \{1\}$.

2) $p_g(B) = 0$, так как B накрывается поверхностью Катанезе Y_C (см. (2.10)).

3) B — поверхность общего типа. Раздуем поверхность Катанезе Y_C в точках ветвления накрытия π_D: $Y_D \to Y_{G-Z}/D_5$. Пусть l_i — раздутые прямые. Воспользуемся критерием (1.9), так как легко проверить, что $B = B_{\min}$. Пусть C — эффективный дивизор (приводимая кривая) на B. Тогда $C = C_0 + \sum d_i l_i$, $d_i \geqslant 0$.

Далее, $\pi^*(K_B) = \sigma^*(K_{Y_C}) = K_{\widetilde{Y}_C} - \sum l_i$. Поэтому $C \cdot K_B = (1/2)\, \psi^* \cdot K_B \cdot \psi^* C = (1/2)\, \sigma^* K_{Y_C}\left(\psi^{-1}(C_0) + \sum d_i l_i\right) = (1/2)\, K_{Y_C} \times \sigma \cdot \psi^{-1}(C_0) \geqslant 0$.

Как доказать, что $A_0(B) = 0$? Для этого достаточно доказать, что $A_0(Y_C) = 0$ (см. (1.9)). Если конечная группа G бирационально действует на поверхность S, то она действует на $A_0(S)$, а групповое кольцо $\mathbf{C} \cdot G$ голоморфно отображается в кольцо эндоморфизмов $A_0(S)$:

$$\psi\colon \mathbf{C} \cdot G \to \operatorname{End} A_0(S) \otimes \mathbf{C}. \tag{2.13}$$

Пусть $z(G) = \sum g \in \mathbf{C} \cdot G$. Тогда

$$A_0(S/G) = 0 \Leftrightarrow z(G) \in \ker \psi. \tag{2.14}$$

Действительно, отображение факторизации π: $S \to Y = S/G$ определяет два гомоморфизма

$$\pi_*\colon A_0(S) \to A_0(Y), \quad \pi^*\colon A_0(Y) \to A_0(S), \tag{2.15}$$

композиция которых определяет элемент $\mathrm{End}\, A_0(S) \otimes \mathbf{C}$:

$$\pi^*\pi_* = \psi(z(G)) = \sum_{g\in G} g_*,$$
$$\pi_*\pi^* = |G|\cdot \mathrm{id}. \qquad (2.16)$$

Так как $A_0(Y)$ бесконечно делима, то для любого $a \in A_0(Y)$

$$a = |G|^2 \cdot a' = \pi_* \underbrace{\pi^*\pi_*}_{\substack{\parallel \\ 0}} \pi^*(a') = 0. \qquad (2.17)$$

Группа автоморфизмов поверхности Y_{G-Z} (см. (2.3)) содержит подгруппу D_5 (см. (2.10)), подгруппу $D_5' = \langle (25)(34), (12345)\rangle$ и $S_3' = (12), (123)\rangle$.

Таблица характеров для S_5 показывает, что двусторонний идеал $I = \left\langle z\left(D_5'\right), z\left(S_3\right)\right\rangle \subset \mathbf{C}S_5$ содержит $z(D_5)$. В силу (2.14) остается проверить, что $A_0\left(Y_{G-Z}/S_3\right) = A_0\left(Y_{G-Z}/D_5'\right) = 0$. Это — чисто геометрическая работа (см. [2]). Нужные равенства следуют из неравенств $\varkappa(Y_{G-Z}/S_3), \varkappa\left(Y_{G-Z}/D_5'\right) < 2$ и теоремы Блоха (1.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barlow R. A simply connected surface of general type with $p_g = 0$ // Invent. math.— 1985.— V. 79, N 2.— P. 293—303.
2. Barlow R. Rational equivalence of zero cycles for some more surfaces with $p_g = 0$ // Invent. math.— 1985.— V. 79, N 2.— P. 303—309.
3. Bloch S. Lectures on Algebraic cycles.— Duke Univercity, Math. Serie, IV.
4. Friedman R., Morgan J. Algebraic surfaces and 4-manifolds, some conjectures and speculations // Bull. Amer. Math. Soc.— 1988.— V. 18, N 1.— P. 1—18.
5. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии, т. 2.— М.: Мир, 1982.
6. Kotschich D. On manifolds homeomorphic to $\mathbf{C}R^2 \# 8\mathbf{C}R^2$ // Invent. math.— 1989.— V. 95, N 3.— P. 102—115.
7. Mumford D. Rational equivalence of 0-cycles on surfaces // J. Math., Kyoto Univ.— 1969.— V. 9.— P. 195—204.
8. Шварцман О. Односвязность факторпространства модулярной группы Гильберта // Функц. анализ. и его прил.— 1974.— Т. 8, № 2.
9. Van der Geer G., Zagier D. The Hilbert modular group for $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$ // Invent. math.— 1977.— V. 42.— P. 93—133.

ОГЛАВЛЕНИЕ