Felix Klein

VORLESUNGEN ÜBER
HÖHERE GEOMETRIE

Dritte auflage bearbeitet und herausgegeben
von W. Blaschke

Ф. Клейн

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Перевод с немецкого *Н.К.Брушлинского*

Издание второе, стереотипное

Москва • 2004

УРСС

ББК 22.151

Клейн Феликс

Высшая геометрия: Пер. с нем. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 400 с.

ISBN 5–354–00603–1

Книга выдающегося немецкого математика Ф. Клейна (1849–1925) создана на основе лекций по высшей геометрии, прочитанных им в Гёттингенском университете и подготовленных к печати его учениками и последователями. Автор разделяет геометрию на две отдельные части: геометрия в ограниченной части пространства, к которой относятся почти все применения дифференциальных и интегральных исчислений, и геометрия в полном пространстве, к которой относится теория алгебраических образов. Обе части подробно рассмотрены в книге, параграфы которой расположены таким образом, чтобы читатель, знакомясь с важнейшими понятиями геометрии, видел, как они развивались с течением времени и какие успехи вследствие этого делала данная область науки.

Предназначена для специалистов — математиков и физиков, использующих в своих исследованиях применения геометрии, а также для студентов и аспирантов.

Издательство «Едиториал УРСС» 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 27.11.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 500 экз. Печ. л. 25. Зак. № 2-1173/376

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.



ISBN 5–354–00603–1

© Едиториал УРСС, 2004

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Теоретико-групповое построение геометрии Клейна, как он его впервые набросал в 1872 г. в своей „Эрлангенской программе“ и затем подробнее разработал в 1893 г. в своем „Введении в высшую геометрию“, является в настоящее время столь же важным и жизненным, как и тогда для дальнейшего развития геометрии, а так же и физики. Поэтому, быть может, многие будут приветствовать новое издание этих лекций. Чтобы не нарушить личного стиля работы Клейна, я внес очень мало изменений и добавлений в прежнее издание „первого тома“. Напротив, мне пришлось целиком выпустить лишь едва связанный с ним „второй том“, который содержал введение в теорию непрерывных и дискретных групп и который потребовал бы полной переработки. Его место заняла „третья часть“ настоящей книги, в которой изложены некоторые новейшие геометрические исследования. При этом мне оказали любезное содействие некоторые геометры: именно II и IV отделы разработал Радон (Эрланген), III — в существенном Артин и V — Шрейер (Гамбург).

В. Бляшке.

Гамбург, весна 1926 г.

СОДЕРЖАНИЕ.

Предисловие 3
Введение 7
§ 1. Общие предварительные замечания 8
§ 1,1. Основные теоретико-функциональные понятия 8
§ 1,2. Основное разделение геометрии 10
§ 1,3. Дальнейшие относящиеся сюда сведения 10

Первая часть.

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ КООРДИНАТ.

Точечные координаты 16

§ 2. Линейные координаты 16
§ 3. Работы Плюкера 20
§ 4. Общие криволинейные координаты 23
§ 5. Эллиптические координаты 25
§ 6. Геодезические линии на поверхностях второй степени 30
§ 7. Построения из нитей Гревса и Штауде 38
§ 8. Теория кругов и шаров. Исторические замечания 41
§ 9. Элементарная геометрия круга 44
§ 10. Преобразования посредством обратных радиусов (инверсия) . . . 48
§ 11. Пентасферические координаты 54
§ 12. Применения пентасферических координат 58
§ 13. Циклиды Дюпена 62
§ 14. Классификация рассмотренных до сих пор объектов аналитической геометрии 64
§ 15. Билинейные уравнения и двойственность 65
§ 16. Нуль-система 67
§ 17. Применения нуль-системы 72
§ 18. Геометрическое истолкование диференциальных уравнений 76

Замена пространственных элементов 79

§ 19. Общий принцип Плюкера 79
§ 20. Прямолинейные координаты 85
§ 21. Линейные многообразия линейчатой геометрии 89
§ 22. Линейный комплекс, как пространственный элемент 94
§ 23. Привлечение вспомогательных средств из теории квадратичных форм 100
§ 24. Сравнение с пентасферическими координатами 105
§ 25. Геометрия сфер Ли 109
§ 26. Соотношение между асимптотическими линиями и линиями кривизны 114
§ 27. Исторические замечания о геометрии сфер 119
§ 28. Привлечение многомерного пространства Грассманом и Кели . . . 121
§ 29. Круги в пространстве, пентацикл Стефаноса 124
§ 30. Коннексы Клебша 126
§ 31. Основные формулы для кривизны поверхности 132
§ 32. Введение плоскостных координат в диференциальные уравнения . 135

Вторая часть.

ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Точечные преобразования пространства 139

§ 33. Линейные преобразования 140
§ 34. Перспектограф и пантограф 145
§ 35. Рельефная перспектива и перспектива изображения 150
§ 36. Ньютонова классификация кривых третьего порядка 151
§ 37. Понселе и учение о двойных отношениях 153
§ 38. Штейнер и Шаль 157
§ 39. Кели и Штаудт 159
§ 40. О теории инвариантов 162
§ 41. *W*-кривые Клейна и Ли 168
§ 42. Проективная дифференциальная геометрия 175
§ 43. Теория конфокальных конических сечений в мнимой области . . 179
§ 44. Мнимые коллинеации 183
§ 45. Стереографическая проекция 185
§ 46. Изотропные кривые и конформные отображения поверхностей . . 188
§ 47. Теория минимальных поверхностей Ли 191
§ 48. Новейшие рассмотрения стереографической проекции и тетрациклических координат 193
§ 49. Группа сродства кругов Мебиуса 196
§ 50. Теорема Лиувилля о конформных отображениях пространства . . 197
§ 51. Принцип перенесения Гесса 200
§ 52. Плоские конфигурации 202
§ 53. Взаимные планы сил графической статики 203
§ 54. Общие аналитические точечные преобразования 207
§ 55. Классификация выражений Пфаффа 209
§ 56. Проблема Пфаффа 213
§ 57. Введение квадратичных диференциальных форм Гауссом 214
§ 58. Диференциаторы Бельтрами 216
§ 59. Пространство Римана 220
§ 60. Дальнейшая литература о квадратичных диференциальных формах 223
§ 61. Кремоновы преобразования 225

Замена пространственных элементов 232

§ 62. Двойственное преобразование, как преобразование прикосновения 232
§ 63. Первое введение общих преобразований прикосновения 235
§ 64. Обе группы преобразований геометрии сфер 241
§ 65. Изотропная проекция R_{n+1} на R_n 244
§ 66. Изотропная проекция R_3 на R_2 246
§ 67. Группа Лагерра и эквилонгальные отображения на плоскости . . 250
§ 68. Перенесение на высшие размерности 254
§ 69. Группа геометрии прямых линий Плюкера 259
§ 70. Связь между геометрией прямых линий Плюкера и геометрией сфер Ли 263
§ 71. Элементарно-геометрическое рассмотрение прямолинейно-сферического преобразования 267
§ 72. Теория характеристик диференциальных уравнений с частными производными первого порядка 271
§ 73. Диференциальные уравнения с частными производными геометрии линий и геометрии сфер 283
§ 74. Общая теория преобразований прикосновения 288
§ 75. Дальнейшие примеры преобразований прикосновения 295
§ 75,1. Подэры 295
§ 75,2. Зубчатые колеса 296

§ 75,3. Преобразования прикосновения, сохраняющие периметр . 297
§ 75,4. Вариации постоянных 299
§ 76. Теория инвариантов преобразований прикосновения 302

Третья часть.

ПРИМЕРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ИЗ ПОСЛЕДНИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ. ДОПОЛНЕНИЯ.

Геометрия линий Штуди 306

§ 77. Принцип перенесения Штуди 306
§ 78. Аналоги дуальным проективитетам на плоскости в геометрии линий 311
§ 79. Аналоги дуальному сродству окружностей в геометрии линий. Литература 315
§ 80. Евклидово отображение эллиптической неевклидовой пространственной геометрии 319
§ 81. Кинематическое отображение 324

Радоновы механические соображения о параллелизме Леви-Чивита 326

§ 82. Уравнения движения 329
§ 83. Асимптотическая интеграция 332
§ 84. Параллельное перенесение 335
§ 85. Применение параллельного перенесения в теории поверхностей . 337
§ 86. Выведение параллельного перенесения из внутренней геометрии поверхности 340

Из топологии: артиновы косы 342

§ 87. Доказательство Александера теоремы Титце 344
§ 88. Проблема узлов 346
§ 89. Группа кос 348
§ 90. Определяющие соотношения 351
§ 91. Замкнутая коса 354
§ 92. Свободное произведение групп 356
§ 93. Косы третьего порядка 359

О дифференциальных уравнениях Монжа. Их отношение к теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и к вариационному исчислению 361

§ 94. Уравнение Гамильтона 361
§ 95. Соответствующие преобразования прикосновения 371

Введение в теорию элементарных делителей 374

§ 96. Линейные подстановки и исчисление матриц 374
§ 97. Геометрическое истолкование линейных подстановок 376
§ 98. Нормальная форма линейных преобразований 378
§ 99. Пары квадратичных форм 384
Именной и предметный указатель 390

ВВЕДЕНИЕ.

Обычно различают два рода геометрии: *геометрию синтетическую*, изучающую фигуры сами по себе, и *геометрию аналитическую*, строящую свое научное здание существенно с помощью анализа. Кроме этих двух родов геометрии, можно еще рассматривать третий род, являющийся в известном смысле обращением двух первых. Именно: в то время как в аналитической геометрии анализ применяют к геометрии, можно также наоборот применять геометрию к анализу, геометрически изучать аналитические соотношения, или — говоря иначе — *с помощью геометрии получить обозрение теории функций нескольких переменных.*

В этих лекциях дело идет о том, чтобы с бо́льшей обстоятельностью разработать мысли, которые были лишь намечены или очень кратко изложены в небольшой работе Клейна (F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872) в так называемой *„Эрлангенской программе“* [1] — и благодаря этому охватить историческим обзором все то, что было получено в 19-ом столетии в этом направлении. Прежде всего мы должны принять во внимание работы Софуса Ли, с которым Клейн в свое время работал вместе в этой области и который позднее продвинул свои исследования много дальше.

Так как значительная часть этих лекций будет посвящена геометрическим исследованиям С. Ли, то уместно уже сейчас привести некоторые сведения о жизни этого крупного геометра. С. Ли родился в 1842 г. в семье пастора в Нордфьордейде (Норвегия) и сравнительно поздно, примерно, в 1868 г., серьезно занялся математикой. Зимою 1869/70 г. Ли познакомился в Берлине с Клейном, а перед войной 1870 г. оба познакомились в Париже с Г. Дарбу. О результатах их совместной работы, особенно совместной работы Клейна и Ли, мы будем говорить в последующем во многих местах; об основном результате для геометрии мы уже упомянули, именно об Эрлангенской программе Клейна. В 1886 г. Ли в качестве преемника Клейна сделался профессором Лейпцигского университета, где он пробыл двенадцать лет. В 1898 г. Ли, уже совершенно больной, вернулся на свою родину в Норвегию, где и умер в 1899 г. Главной работой Ли является

---

[1] Опубликована в Math. Annalen т. 43 (1893) и „Kleins Gesammelte Abhandlungen“, т. I (1921), стр. 460—497. Там см. также биографические сведения стр. 411 и след. (Имеется русский перевод Д. М. Синцова, напечатанный в Известиях Ф. М. о-ва при Казанском университете, 2-я серия, т. 5, 1896, под названием: „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“. *Прим. ред.*)

его „Теория групп преобразований“, которую он издал совместно с Энгелем в трех томах (Лейпциг, гг. 1888, 1890, 1893)[1]).

Прежде чем перейти к собственному предмету наших лекций, полезно предварительно напомнить некоторые основные понятия. Поэтому мы предпошлем нашему изложению вводный параграф; он будет называться:

§ 1. Общие предварительные замечания.

Мы расчленим его на ряд отдельных номеров.

§ 1, 1. Основные теоретико-функциональные понятия.

a) Мы называем $s = f(z)$ функцией действительного переменного z, если каждому значению z из некоторого определенного интервала соответствует определенное значение s. Следовательно соответствие значений является единственным обстоятельством, характеризующим понятие функции, в то время как все прочие свойства, о которых обычно говорят, когда имеют дело с функциями, как-то: непрерывность, дифференцируемость и т. д., принадлежат не функциям как таковым, а лишь определенным классам функций, которые как раз и выделяются посредством этих свойств из множества всех функций. Точное определение непрерывности и дифференцируемости относится к дифференциальному исчислению. Мы здесь только подчеркнем, что долгое время математики находились в неясности и даже в заблуждении относительно значения и области приложимости этих понятий. Так, например, сравнительно очень поздно проложило себе дорогу восходящее к Больцано и Вейерштрассу открытие, что непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой, равно как и открытие, что функция, имеющая производные всех порядков, не обязательно разложима в ряд Тэйлора.

b) Чтобы раз навсегда установить положение, на основе которого мы будем производить дальнейшие исследования, мы введем в рассмотрение *степенной ряд*:

$$s = a + bz + cz^2 + \ldots$$

или общее

$$s = a + b(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + \ldots,$$

о котором мы будем предполагать, что он сходится для малых значений $|z|$ или $|z - z_0|$.

Мы не будем здесь выяснять, при каких условиях функция разложима в подобный степенной ряд, а просто раз навсегда скажем, что будем здесь заниматься только такими функциями, которые разложимы в степенные ряды, причем мы всегда должны помнить, что в силу этого ограничения мы будем иметь дело не с самыми общими функциями, а лишь с некоторым определенным классом функций. Мы будем называть функции, разложимые в степенные ряды, следуя Лагранжу, *аналитическими функциями*.

---

[1]) См., напр., некролог, написанный Нётером: Math. Annalen т. 53 (1900), стр. 1—41.

c) Чтобы сделать дальнейший шаг, мы откажемся от того ограничения, что переменное z пробегает лишь действительные значения, и допустим к рассмотрению также и комплексные значения для z. При этом условии степенной ряд будет сходиться в круге с центром в нулевой точке или в точке z_0, причем окружность этого круга будет проходить через ближайшую особую точку. При таком определении функции сначала принимается во внимание только некоторая область плоскости, именно внутренность круга сходимости, и мы говорим в этом случае об *элементе функции* в противоположность *полной функции*, возникающей из этого элемента посредством *аналитического продолжения*.

d) Под аналитическим продолжением понимают следующий процесс: если функция уже определена в некотором определенном круге сходимости степенным рядом, то ее разумеется также можно разложить в ряд по целым положительным степеням $(z-z')^k$, сходящийся в некоторой окрестности точки z', где z' — произвольная точка, лежащая внутри круга сходимости. Для всякого подобного разложения будет существовать новый круг сходимости с центром в точке z', причем окружность этого нового круга проходит через ближайшую особую точку. Быть может эти новые круги сходимости выйдут за пределы старого круга и тем самым сделают возможным продолжение определения нашей функции на новые области. Это получение новых областей, в которых можно определить нашу функцию, и называется аналитическим продолжением. Если это аналитическое продолжение производить столь далеко, как только возможно, то получится *полная функция*, которую следует обязательно отличать от *элемента функции* уже хотя бы потому, что элемент функции однозначен, тогда как полная функция может быть и многозначной. Именно в теории этих полных функций и состоит красота современной теории функций, так как полные функции часто можно полностью охарактеризовать общими свойствами, не обращая внимания на каждое специальное представление.

e) В качестве простейшего примера мы приведем *рациональные функции*

$$s = R(z),$$

которые могут быть определены следующим образом: рациональными функциями являются все те и только те функции, которые однозначны на всей плоскости (включая также и „бесконечно удаленную точку", см. § 10) и имеют только несущественные особые точки (полюсы). Другой пример доставляют *алгебраические функции*, которые полностью могут быть охарактеризованы как полные функции, имеющие конечную многозначность и не имеющие существенно особых точек.

Резюмируем все предшествующее в виде следующей формулировки: *В нашей геометрии мы будем иметь дело с аналитическими функциями, но этими функциями мы будем называть то отдельный элемент функции, то полную функцию, возникающую из этого отдельного элемента посредством аналитического продолжения.*

§ 1, 2. Основное разделение геометрии.

В соответствии с изложенным мы можем также и геометрию расчленить на две отдельные части, именно:

1. *Геометрия в ограниченном куске пространства*, соответственно с применением только элементов функций.

2. *Геометрия в полном пространстве*, соответственно с применением полных функций.

К первой части относятся почти все применения диференциального и интегрального исчислений к геометрии. Действительно, если мы производим построение касательных к кривой, если мы исследуем кривизну кривых или поверхностей, то при этом мы всегда принимаем во внимание только малый ограниченный кусок области, не заботясь о том, какие особенности может иметь наш образ вне рассматриваемой области. Сюда также относится в своей бо́льшей части разработанная Гауссом теория поверхностей.

С другой стороны, теория алгебраических кривых и поверхностей относится по преимуществу ко второй части, так как при большинстве исследований по поводу этих образов, например, при нахождении точек пересечения или линий пересечения нескольких таких образов мы всегда рассматриваем эти образы в целом. Подводя итог, мы можем сказать:

Соответственно различию между элементом функции и полной функцией мы можем различать геометрию в ограниченной части пространства и геометрию во всем пространстве. К первой части геометрии относятся почти все применения диференциального и интегрального исчислений к геометрии; ко второй части — теория алгебраических образов.

Обе эти части геометрии обычно бывают совершенно отделены друг от друга; существуют учебники для обеих этих частей порознь, но изложения, обнимающего обе части, не существует.

Задачей настоящих лекций и является подобное изложение, одновременно и беспристрастно охватывающее обе части геометрии.

§ 1, 3. Дальнейшие относящиеся сюда сведения.

Предварительно мы хотим поговорить о педагогических основах и вспомогательных средствах для обоих родов геометрии.

Прежде всего рассмотрим *элементарную часть геометрии всего пространства в целом*, т. е. главным образом, геометрию алгебраических образов. Мы относим к элементарной части этой теории в случае плоскости: учение о прямой линии и о конических сечениях; в случае пространства: учение о плоскости, о прямой линии, о поверхностях второго порядка и о линиях пересечения двух поверхностей второго порядка. Какие же учебники можно порекомендовать для этого и какие имеются здесь наглядные пособия?

Отметив, что часто французские учебники заслуживают предпочтения вследствие практического, но не слишком ограниченного выбора материала и вследствие своего дидактически весьма целесообразного изложения, мы укажем в особенности на следующие учебники для нашего предмета:

1. Брио-Буке, Аналитическая геометрия (Briot-Bouquet, Géométrie analytique) обладает указанными выше хорошими качествами французских учебников и потому должна быть рекомендована; 2-ое изд., Париж 1851.

2. Сальмон (G. Salmon), а) Аналитическая геометрия конических сечений (Дублин 1848, имеется русский перевод I тома); б) Пространственная геометрия (Дублин 1862). Эта книга весьма объемиста, особенно перегружен ее немецкий перевод, который первоначально был сделан Фидлером, а позднее многократно перерабатывался. В этой книге формальный элемент — теория инвариантов — слишком выступает на передний план, и кроме того, временами чувствуется недостаток в точном проведении доказательств. Все же в этой книге можно познакомиться со множеством интересных вещей.

Более новая книга, которая во многих отношениях может заменить устаревший учебник Сальмон — Фидлера, принадлежит также английскому геометру, именно Бекеру (H. F. Baker). Из его „Principles of Geometry" до сих пор вышло в Кембридже (Англия) только четыре тома (1922—1925).

3. Гессе, Пространственная геометрия (O. Hesse, Raumgeometrie), Лейпциг 1861 (чисто аналитическое изложение).

4. Рейе, Геометрия положения (Th. Reye, Geometrie der Lage), Ганновер 1866, 1867 (чисто синтетическое изложение); обе последние книги являются односторонними в смысле метода, но по своему изложению очень элегантны.

5. Клебш-Линдеман, Лекции по геометрии (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie), в существенном — книга для справок. Первый том — Лейпциг 1876 (второе издание начало появляться в 1906 году), второй том — Лейпциг 1891.

Из более новых книг, которые выделяются больше своим количеством, чем своим содержанием, надо отметить как выдающуюся лишь:

6. Дарбу, Принципы аналитической геометрии (Darboux, Principes de géométrie analytique), Париж 1917 [1]).

Еще имеются два учебника аналитической геометрии, которые пытаются на передний план выдвинуть точку зрения Клейна, изложенную в его Эрлангенской программе, именно учебник Гефтера и Келера, Учебник аналитической геометрии (L. Heffter und C. Köhler, Lerbuch der analytischen Geometrie), первый том — Лейпциг 1905, второй том (написанный Гефтером) — Лейпциг 1923; затем учебник Бека, „Координатная геометрия" (H. Beck, Koordinatengeometrie), — до сих пор появился только один том (Берлин 1919).

Что касается наглядных пособий, то мы особенно рекомендуем модели поверхностей второго порядка, которые наглядно нам изобразят самые эти поверхности, их круговые сечения, их прямолинейные образующие и системы конфокальных поверхностей с их линиями пересечения. Особенно полезно изготовить эти модели самим, для чего достаточно самых простых средств (см. W. v. Dyck, Katalog mathematischer...Modelle, Мюнхен 1892).

[1]) Русское издание, ГОНТИ, Москва — Ленинград 1938. *Прим. ред.*

Теперь сделаем соответствующие замечания об *элементарной части „геометрии в ограниченном куске пространства“*, которую мы можем в существенном обозначить как *дифференциальную геометрию*.

К этой теории относятся:

a) на плоскости: общая теория плоских кривых;

b) в пространстве: 1. Теория поверхностей. 2. Теория пространственных кривых.

Что касается теории плоских кривых, то мы ограничимся лишь указанием некоторых заголовков, достаточно характеризующих отдельные части этой теории: касательная, круг кривизны, эволюта, длина дуги, часть плоскости, ограниченная некоторой кривой.

Несколько подробнее мы остановимся на теории поверхностей, так как она в наших лекциях имеет право на наибольшее место и интерес в дифференциальной геометрии. Прежде чем сообщить нечто связное об этом, мы опять-таки приведем некоторые сюда относящиеся заголовки, которые нам послужат руководящими нитями для дальнейшего: кривизна, теорема Эйлера о кривизне, индикатриса Дюпена[1]), линии кривизны, асимптотические линии, геодезические линии, минимальные поверхности, поверхности постоянной кривизны.

Переходя к краткому обзору теории поверхностей, мы прежде всего должны напомнить об исследованиях, произведенных для определения кривизны в отдельной точке поверхности. При этих исследованиях, как известно, через рассматриваемую точку проводят нормальные сечения и сравнивают кривизны отдельных нормальных сечений. Величина радиуса кривизны, вообще говоря, изменяется с положением нормального сечения и существуют два положения, при которых эта величина имеет максимальное и минимальное значение.

Оба эти сечения называются главными сечениями, а соответствующие им радиусы кривизны, которые мы обозначаем через ρ и ρ', называются главными радиусами кривизны. Далее в нашей теории имеют особенно большое значение две характерные комбинации из обоих главных радиусов кривизны, именно, во-первых, выражение:

$$2H = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

которое называется *средней кривизной поверхности*, и, во-вторых, выражение:

$$K = \frac{1}{\rho\rho'},$$

так называемая *гауссова кривизна поверхности* (Gauß „Disquisitiones circa superficies curvas“, 1827). Так как ρ и ρ' могут быть как положительные, так и отрицательные, то кривизна может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Что касается до знака, то дело обстоит так: если приписать нормали к поверхности определенное направление, то ρ и ρ' приобретают определенные знаки, которые одновременно меняются на обратные в случае изменения направления нормали. Отсюда следует, что знак гауссовой кривизны не содержит никакого произвола.

[1]) Дюпен является одним из наиболее выдающихся учеников Монжа; его „Développements de géométrie“ появились впервые в 1813 г.

Если $K > 0$, то в рассматриваемой точке поверхность называется *эллиптически искривленной*, если $K < 0$, то — *гиперболически искривленной* (в последнем случае, в рассматриваемой точке поверхность имеет вид седла). Эти термины связаны с видом, который имеет так называемая *индикатриса Дюпена* в рассматриваемой точке поверхности. Именно, кривая, которая получается в результате пересечения поверхности с плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к касательной плоскости поверхности в рассматриваемой точке, является в первом случае (в первом приближении) *эллипсом*, а во втором случае — *гиперболой*. В обоих случаях главные сечения поверхности даются главными осями индикатрисы Дюпена. Асимптоты индикатрисы иногда называют *соприкасающимися касательными*; разумеется, они действительны только в случае гиперболической кривизны. Если желательно ввести соприкасающиеся касательные без помощи индикатрисы, то можно сказать: касательная плоскость к поверхности в какой-нибудь ее точке с гиперболической кривизной пересекает эту поверхность по кривой с двойной точкой; две касательные к этой кривой в двойной точке и являются соприкасающимися касательными. Или: соприкасающиеся касательные имеют с поверхностью три общие бесконечно близкие точки. Это свойство и оправдывает их название.

Последние рассмотрения побуждают нас заняться изучением некоторых линий на поверхности, именно так называемых *линий кривизны и асимптотических линий*, связь которых с предыдущим явствует из их определения, которое мы сейчас дадим. Именно, под линиями кривизны мы подразумеваем те лежащие на поверхности линии, которые касаются в каждой точке одного из направлений главных кривизн, в то время как асимптотические линии касаются в каждой точке одной из асимптот индикатрисы. Так как в каждой точке имеются два взаимно-перпендикулярных действительных направлений главных кривизн, то ясно, что вся поверхность покрывается сетью линий кривизны, которые в каждой точке пересекаются ортогонально и следовательно образуют так называемую ортогональную сеть. В противоположность этому асимптотические линии дважды покрывают только гиперболически искривленные части поверхности, в то время как на эллиптически искривленных частях поверхности они отсутствуют. Каждое из этих семейств кривых определяется *дифференциальными уравнениями первого порядка*, так как в каждой точке поверхности известно направление касательной.

Кроме указанных двух семейств кривых, большую роль играют еще *геодезические* или *кратчайшие линии*. Мы можем их практически осуществить посредством натягивания на поверхности нити. Если вдуматься в этот способ осуществления геодезических линий, то сделается вероятной следующая теорема: геодезические линии обладают тем свойством, что соприкасающаяся плоскость в каждой их точке перпендикулярна поверхности: этим свойством можно пользоваться также для определения геодезических линий. Другое практическое осуществление геодезических линий мы получим, если наложим на поверхность узкую прямолинейную полоску бумаги.

Так как через каждую точку поверхности проходит бесчисленное множество геодезических линий, то можно произвольно задать направление, в котором она должна выходить из рассматриваемой точки, и тогда кривизна тотчас определится из того свойства нашей кривой, что она является кратчайшей линией. Вследствие этого геодезические линии определяются *диференциальными уравнениями второго порядка*, которые позволяют найти при заданной точке и заданном направлении касательной величину кривизны линии.

Понятием кривизны можно воспользоваться еще для того, чтобы выделять отдельные группы поверхностей из совокупности всех поверхностей. Мы упомянем здесь только о двух группах поверхностей:

1. *Минимальные поверхности*, которые характеризуются уравнением $H = 0$. Эти поверхности всюду искривлены гиперболически и называются минимальными потому, что внутри произвольного, достаточно малого, лежащего на минимальной поверхности контура мера площади минимальной поверхности меньше, чем мера площади любой другой поверхности, натянутой на этот же контур.

2. *Поверхности постоянной кривизны*, которые, как показывает их название, характеризуются уравнением $K = \text{const}$.

Этим мы заканчиваем предварительные замечания о самой теории поверхностей и прибавим только еще некоторые сведения об *учебниках, относящихся к этой части геометрии.*

Если не считать общих учебников диференциального и интегрального исчислений, которые посвящают значительную часть своего содержания геометрическим приложениям, то здесь прежде всего надо упомянуть о книге W. Blaschke „Vorlesungen über Differentialgeometrie" 2. Afl., Berlin 1924 [1]); для нас особенно важное значение имеет первый ее том об „элементарной диференциальной геометрии".

В качестве первоклассного трактата, охватывающего всю теорию поверхностей, следует прежде всего назвать четырехтомную работу Дарбу, Общая теория поверхностей (G. Darboux, Théorie générale des surfaces, Paris 1887—1896).

Почти такой же охват имеет трактат Бьянки, Лекции по диференциальной геометрии (L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3-е издание, Пиза, Болонья 1922—1924), который имеется также на немецком языке в сокращенном переводе.

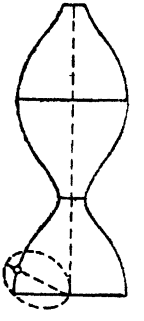
В качестве *наглядных пособий* здесь могут быть рекомендованы, как и в случае геометрии во всем пространстве, модели поверхностей с нанесенными на них кривыми; для уяснения прежних общих замечаний приведем здесь еще несколько специальных теорем, которые прямо можно применять к соответствующим моделям.

1. *Линии кривизны и асимптотические линии.* На поверхностях второго порядка линии кривизны и асимптотические линии являются алгебраическими: асимптотические линии совпадают с прямолинейными образующими, а линии кривизны являются линиями пересечения поверхности с конфокальными поверхностями второго порядка. Именно,

[1]) Имеется русский перевод первого тома: В. Бляшке, Диференциальная геометрия, ОНТИ, Москва — Ленинград, 1935. *Прим. ред.*

конфокальные поверхности образуют ортогональную систему, а для поверхностей ортогональной системы вообще имеет место „теорема Дюпена", что поверхности такой системы пересекаются вдоль общих линий кривизны.

2. *Геодезические линии.* Геодезические линии на поверхности второго порядка трансцендентны и были впервые определены Якоби в 1837 г. с помощью гиперэллиптических интегралов. В случае поверхности вращения второго порядка отдельная геодезическая линия вьется между двумя параллельными кругами, а в случае трехосной поверхности второго порядка — между двумя ветвями некоторой линии кривизны. В частности геодезическая линия, проходящая через точку округления поверхности, проходит обязательно и через противоположную точку округления.



Черт. 1.

О геодезических линиях на поверхностях вращения мы упомянем лишь в случае поверхности вращения с постоянной средней кривизной. Их меридиональная кривая, как это было указано Делонэ, описывается фокусом эллипса, катящегося без скольжения по прямой, являющейся осью вращения поверхности (ср. чертеж 1). На подобной поверхности различают:

a) геодезические линии, заключенные между двумя параллельными кругами;

b) круче поднимающиеся геодезические линии, которые обвиваются вокруг всей поверхности наподобие винтовой линии, и наконец

c) переходный случай, когда геодезическая линия неограниченно приближается к горловому кругу, никогда его не достигая.

Следует отметить существенное различие между алгебраическими кривыми и трансцендентными кривыми, как оно здесь проявляется: первые могут быть удобно рассматриваемы на всем их протяжении, а последние — только на достаточно малом участке.

3. *Минимальные поверхности.* Примером такой минимальной поверхности, всякий достаточно малый кусок которой имеет минимум площади внутри своей ограничивающей линии, хотя поверхность при аналитическом продолжении многократно пересекает себя, может служить *„поверхность Шиллинга"*.

4. *Поверхности постоянной кривизны.* Различные типы сюда относящихся поверхностей вращения.

По поводу связи теории поверхностей с механикой следует указать на интересные и наглядные исследования Финстервальдера в журнале „Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung", т. 6, 1899.

На этом мы заканчиваем предварительные замечания и переходим собственно к нашим лекциям, которые мы расположим таким образом, чтобы, рассматривая друг за другом важнейшие понятия геометрии, видеть, как они развивались с течением времени и какие вследствие этого успехи делала каждый раз наша наука. Первым объектом наших рассмотрений будет общее понятие координат.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ.

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ КООРДИНАТ.

Рассмотрим прежде всего:

ТОЧЕЧНЫЕ КООРДИНАТЫ.

С давних пор пользуются следующими двумя типами точечных координат:

1. Декартовыми координатами x, y, z.
2. Полярными координатами r, ϑ, φ [1]).

В случае декартовых координат не только каждой системе координатных значений соответствует одна точка, но и каждой точке соответствует также только одна система координатных значений. Напротив, в случае полярных координат можно получить уже все пространство, вводя следующие ограничения:

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Кроме двух названных типов точечных координат, должны быть указаны еще следующие типы:

1. *Линейные координаты*, т. е. линейные комбинации обычных декартовых координат, которые впервые встречаются у Мебиуса в его „Барицентрическом исчислении“ (Möbius, Baryzentrische Kalkül, 1827) а затем у Плюкера в первом томе его „Аналитико-геометрических исследований“ (Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, 1828). Эти координаты играют важную роль в проективной геометрии в качестве треугольных и тетраэдральных координат.

2. *Криволинейные координаты* в самом общем смысле, теория которых была разработана, главным образом, Ламэ в его „Лекциях о криволинейных координатах“ (Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, 1859); ими очень часто пользуются в математической физике. Сейчас мы перейдем к обстоятельному рассмотрению линейных координат.

§ 2. Линейные координаты.

На плоскости упомянутые здесь линейные координаты называются *треугольными координатами*; в этом случае они могут быть представлены следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varrho p &= ax + by + c, \\ \varrho q &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ \varrho r &= a_2 x + b_2 y + c_2. \end{aligned}$$

[1]) Их называют также сферическими. *Прим. ред.*

Произвольный множитель пропорциональности $\rho(\neq 0)$, стоящий в левой части этих уравнений, показывает нам, что дело идет только об отношениях $p:q:r$. Именно поэтому p, q, r называются *однородными* координатами.

Для элементарного геометрического истолкования треугольных координат надо принять во внимание, что

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

является (двузначным) расстоянием точки x, y от прямой $ax+by+c=0$. Отсюда тотчас же вытекает справедливость следующего предложения:

Треугольные координаты относятся как расстояния от трех прямых на плоскости, умноженные на некоторые заданные постоянные.

Надо еще заметить, что определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

должен быть отличен от нуля для того, чтобы x, y можно было выразить через p, q, r. Геометрически это означает, что три вышеупомянутые прямые не должны проходить через одну точку, а напротив должны образовать треугольник.

Обычные декартовы координаты можно рассматривать как частный случай треугольных координат. Следует только потребовать, чтобы третья сторона треугольника отодвинулась в бесконечность, чтобы соответствующий постоянный множитель устремился к нулю, и, наконец, положить

$$\frac{p}{r}=x, \quad \frac{q}{r}=y.$$

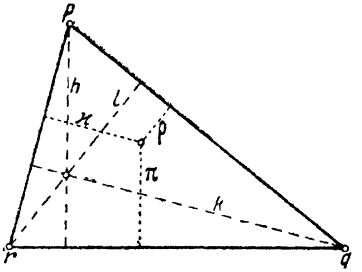
Совершенно аналогично обстоит дело и с тетраэдральными координатами в пространстве.

В настоящее время вместо обозначений p, q, r употребляют большей частью обозначения x_1, x_2, x_3 или в пространстве x_1, x_2, x_3, x_4, введенные впервые Гессе. Главная заслуга Гессе заключается в том, что он ввел в новейшую геометрию элегантные формальные методы своего учителя Якоби, в частности теорию определителей; отсюда и происходит упомянутое обозначение треугольных и тетраэдральных координат с помощью индексов.

По совершенно иному пути чем Плюкер, именно с механической точки зрения, пришел к ним Мебиус, который в своем „Барицентрическом исчислении“ ввел особый род треугольных координат.

В качестве координат точки он рассматривает три массы p, q, r, которые следует поместить в вершинах положенного в основу треугольника, для того чтобы эта точка сделалась центром тяжести взятых масс. (Отсюда непосредственно вытекает, что только отношение p, q, r имеет геометрический смысл.)

Чтобы убедиться, что барицентрические координаты действительно являются частным случаем треугольных координат, нужно в центре тяжести треугольника поместить массу $(p+q+r)$. Эта масса в механическом смысле эквивалентна трем массам p, q и r; следовательно момент вращения массы $(p+q+r)$ относительно каждой из сторон и сумма моментов вращения масс p, q и r должны быть равны. Если обозначить три высоты треугольника, как на черт. 2, буквами h, k, l и три перпендикуляра, опущенные из центра тяжести на стороны, буквами π, $\varkappa$, ρ, то получатся следующие уравнения:



Черт. 2.

$$ph = (p+q+r)\pi,$$
$$qk = (p+q+r)\varkappa,$$
$$rl = (p+q+r)\rho$$

и отсюда

$$p:q:r = \frac{\pi}{h} : \frac{\varkappa}{k} : \frac{\rho}{l}.$$

Мы можем теперь высказать следующую теорему: *барицентрические координаты являются частным случаем общих треугольных координат, таким, в котором три расстояния от сторон треугольника умножаются на постоянные множители, обратные высотам треугольника.*

Если мы теперь спросим себя, какую пользу дает введение треугольных координат, то мы можем ответить тремя пунктами:

1. Однородность.
2. Трактовка „бесконечно удаленного", так называемых несобственных элементов.
3. Большая гибкость координатной системы.

К 1. Что касается первого пункта, то легко видеть, что в наших координатах все уравнения, имеющие непосредственный геометрический смысл, должны быть однородными, так как дело идет только об отношениях координат. Так, например,

$$Ap + Bq + Cr = 0$$

есть уравнение прямой линии, а

$$\sum_{1}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0$$

— уравнение конического сечения в треугольных координатах.

Если хотят аналитически убедиться в том, что все уравнения в треугольных координатах должны быть однородными, то для этого достаточно разрешить относительно x и y уравнения, дающие связь между треугольными и обычными координатами, причем ρ наряду с x и y надо считать за неизвестное. Тогда получают выражения

$$x = \frac{Z_1}{N}, \quad y = \frac{Z_2}{N} \quad \text{(с общим знаменателем)},$$

где Z_1, Z_2 и N означают однородные линейные выражения (линейные формы), зависящие от p, q, r. Если подставить эти значения для x и y в уравнение какой-нибудь заданной кривой и умножить обе части уравнения на надлежащую степень знаменателя, то тотчас будет видно, что относительно этих новых координат уравнение должно принять однородный вид.

Однородность уравнений особенно полезна в теории касательных и поляр, которая тогда выигрывает в симметрии, а вследствие этого и в простоте. Обозначим через $f(x, y) = 0$ уравнение кривой в обычных координатах и $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ — уравнение той же кривой в треугольных координатах; тогда уравнением касательной в декартовых координатах в точке x, y является уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y' - y) = 0,$$

а в точке x_1, x_2, x_3 в треугольных координатах уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2}x_2' + \frac{\partial F}{\partial x_3}x_3' = 0;$$

очевидно второе уравнение превосходит первое в смысле симметрии.

Для доказательства этой формулы пользуются известной теоремой Эйлера для однородных функций, которая вообще часто употребляется в этой области:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}x_3 = nF,$$

где n обозначает степень однородности функции F.

К 2. Что касается бесконечной удаленности, то обратимся опять к формулам:

$$x = \frac{Z_1}{N}, \quad y = \frac{Z_2}{N},$$

которые показывают, что обращению в бесконечность x и y соответствует обращение в нуль знаменателя N. Поэтому для трактовки несобственных точек не надо привлекать никакого перехода к пределу в x_1, x_2, x_3, так как дело идет ведь только об отношениях x_1, x_2, x_3, но надо подчинить x_1, x_2, x_3 определенному линейному однородному уравнению $N = 0$, если они должны представлять несобственные элементы. Вследствие этого аналитическое представление приходит в согласие с представлениями проективной геометрии, которая говорит о бесконечно удаленной или несобственной прямой плоскости.

К 3. Наконец, когда дело идет о надлежащем выборе системы координат, то треугольная система координат обладает бóльшей гибкостью, так как мы всегда имеем в распоряжении на одну прямую больше, чем в случае обычной декартовой системы координат.

Рассмотрим это ближе на следующем примере. Составим косой четырехугольник из прямых обоих семейств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, дополним его, как показано на чертеже 3, до тетраэдра (касательный тетраэдр), и используем его в качестве

координатного тетраэдра; тогда уравнение гиперболоида примет следующий вид:

$$ax_1x_2 + bx_3x_4 = 0,$$

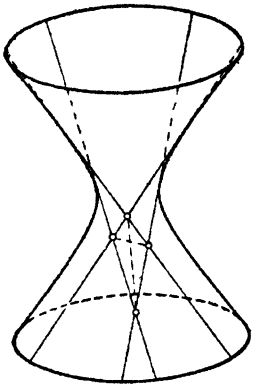
если только уравнения четырех сторон косого четырехугольника были

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \qquad \text{и} \qquad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0, \qquad\qquad x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Если теперь, сохранив координатный тетраэдр, ввести новые координаты, кратные нашим прежним координатам, то можно уравнению поверхности придать форму

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 0,$$

которая при употреблении только декартовых координат в таком простом виде не может быть установлена. Последнее уравнение может быть написано также в виде детерминанта:



Черт. 3.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_4 & x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

и вследствие этого является результатом исключения из уравнений

$$x_1 - \lambda x_3 = 0,$$
$$x_4 - \lambda x_2 = 0$$

параметра λ, или из двух других уравнений:

$$x_1 - \mu x_4 = 0,$$
$$x_3 - \mu x_2 = 0,$$

параметра μ.

Но отсюда непосредственно вытекает следующий геометрический факт:

Наша поверхность второй степени может быть получена двумя способами из нашего косого четырехугольника посредством пересечения соответствующих плоскостей двух проективных пучков плоскостей.

Обычно посредством этой теоремы поверхности второй степени вводятся в новейшую синтетическую геометрию, как мы это еще увидим позднее (§ 38).

Мы видим, что этот результат получает наипростейшую аналитическую трактовку, если положить в основу тетраэдральные координаты.

§ 3. Работы Плюкера.

Остановимся теперь ближе на том развитии, которое дал Плюкер понятию точечных координат и понятию координат вообще. Плюкер, выдающийся представитель новейшей аналитической геометрии, дал свои важнейшие результаты в области геометрии в период 1826—1846 гг. В течение этого времени он опубликовал наряду с многочисленными

статьями в Креллевском журнале следующие важнейшие свои произведения:

1. Аналитико-геометрические исследования (Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1828, 1831), 2 т.

2. Система аналитической геометрии (System der analytischen Geometrie, 1835).

3. Теория алгебраических кривых (Theorie der algebraischen Kurven, 1839).

4. Система пространственной геометрии в новой аналитической трактовке (System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, 1846).

После этого периода Плюкер занимается преимущественно работами в области экспериментальной физики; однако последние годы своей жизни он опять посвятил геометрии. В 1866 году семнадцатилетний Клейн сделался ассистентом Плюкера по физике и оставался им до смерти Плюкера в 1868 г. Клебш и Клейн в 1868—1869 гг. издали последнюю работу Плюкера, имевшую следующее название:

Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии в качестве пространственного элемента (Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, 1868—69).

Хотя в данном случае нас в работах Плюкера интересует прежде всего все относящееся к точечным координатам, но все же наряду с этим следует указать еще на то, что Плюкер не только различными способами обобщил понятие точечных координат, но что он также обобщил понятие координат вообще, в том направлении, что он определял *каждый отдельный геометрический образ* в пространстве посредством чисел — координат и затем изучал различные уравнения, связывающие эти координаты.

Пусть читатель обратит внимание на заглавие последней из указанных работ Плюкера.

Разумеется этим далеко еще не исчерпывается значение Плюкера для геометрии. Поэтому следует указать на прочитанный Клебшем в 1871 году на заседании Геттингенского Научного общества *Некролог*, посвященный Плюкеру, в котором на некоторые принципиальные вопросы устанавливаются точки зрения, играющие роль и сейчас [1]).

Если теперь мы перейдем к рассмотрению точечных координат у Плюкера, то мы можем привести два принадлежащих самому Плюкеру термина, характеризующие достигнутые успехи:

„Способ сокращенных обозначений“,

„Чтение уравнений“.

Способ сокращенных обозначений Плюкер осуществляет тем, что он всякие вообще выражения первого или высшего порядка от x и y коротко обозначает одной буквой и затем рассматривает сами эти выражения в качестве координат (причем треугольные координаты здесь будут частным случаем); под чтением уравнений он понимает

[1]) См. также биографическое введение, которое Клебш предпослал собранию математических работ Плюкера (Лейпциг 1895).

то, что простым рассмотрением самих уравнений, без всяких вычислений, можно как бы вычитывать из них результаты.

Так, например, Плюкер показывает, что всякое уравнение плоской кривой третьего порядка C_3 всегда может быть приведено к виду:

$$p \cdot q \cdot r - s^3 = 0,$$

а уравнение плоской кривой четвертого порядка C_4 — к виду:

$$p \cdot q \cdot r \cdot s - \Omega^2 = 0,$$

где p, q, r, s являются линейными выражениями, а Ω квадратичным выражением в обычных координатах.

Приведем сейчас же теоремы, которые Плюкер вычитывает из этих уравнений:

У каждой кривой третьего порядка можно отыскать три точки перегиба, лежащие на одной прямой; и

Каждая кривая четвертого порядка имеет четыре двойные касательные, восемь точек прикосновения которых лежат на коническом сечении $\Omega = 0$ [1]).

Именно, если мы пересечем C_3 одной из прямых $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, то получим в качестве трижды считаемой точки пересечения точку, одновременно принадлежащую взятой прямой и прямой $s = 0$, т. е. прямые $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ являются касательными в точках перегиба и их точки прикосновения лежат на прямой $s = 0$.

Если мы соответственно C_4 пересечем одной из прямых $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, то получим в качестве дважды считаемых точек пересечения точки, в которых эти прямые пересекают коническое сечение $\Omega = 0$, т. е. все эти прямые являются двойными касательными и их точки прикосновения лежат на коническом сечении $\Omega = 0$.

Как же теперь доказывает Плюкер, что уравнения кривых могут быть представлены в такой специальной форме?

Он пользуется для этого *„принципом подсчета постоянных“*, который основан просто на том утверждении, что сравнение специальной формы уравнения с заданным уравнением кривой, которая должна быть приведена к этому виду, доставляет для неизвестных коэфициентов как раз столько уравнений, сколько имеется этих неизвестных коэфициентов; тогда, „вообще говоря“, эти последние могут быть определены из полученных уравнений. Так, например, уравнения вида $p \cdot q \cdot r - s^3 = 0$ и $p \cdot q \cdot r \cdot s - \Omega^2 = 0$ содержат соответственно 9 и 14 постоянных [2])

[1]) При таком рассмотрении этих теорем остается невыясненным (что действительно и не может быть выяснено с помощью таких простых средств), существуют ли на кривой третьего порядка только одна тройка точек поворота указанного типа, а на кривой четвертого порядка только одна четверка двойных касательных, или несколько.

[2]) Что уравнение $p \cdot q \cdot r - s^3 = 0$ содержит 9 постоянных, получается из следующего подсчета: p, q, r вместе содержат 9 постоянных, но произведение pqr только 7, так как два выражения, например, p и q можно умножить на произвольные множители и одновременно третье выражение умножить на обратные величины этих множителей; s содержит три постоянные, всего будет 10; из них опять одна отпадает, так как обе части уравнения можно помножить на произвольный множитель. Аналогично получим, что $pqrs - \Omega^2 = 0$ содержит 14 постоянных, потому что произведение $pqrs$ содержит $4 \cdot 3 - 3 = 9$, Ω содержит 6, итого 15 постоянных; вычитая 1, получим всего 14 постоянных.

и как раз столько же постоянных имеется в уравнениях общих кривых третьего и четвертого порядка, из чего Плюкер выводит возможность вышеприведенных представлений.

Все же надо особенно подчеркнуть, что „принцип подсчета постоянных" в каждом отдельном случае требует точного выяснения того, будут ли уравнения, полученные для определения неизвестных, действительно независимыми и друг с другом совместными. Уже все это указывает на трудности, скрытые в этих вычислительных методах геометрии. Эти методы позднее были значительно разработаны, главным образом, гамбургским математиком Шубертом и датчанином Цейтеном [1]), но трудности отнюдь еще нельзя считать преодоленными. Все же эти вычислительные методы имеют важное значение по крайней мере для поисков новых результатов.

Только что приведенные рассмотрения естественно содержат ту мысль, что p, q, r, s, ..., Ω могут быть рассматриваемы в качестве координат; *следовательно, резюмируя вышесказанное, мы имеем определенное обобщение точечных координат, заключающееся в том, что какие-нибудь целые рациональные функции точечных координат мы обозначаем одной буквой и рассматриваем их самих как координаты.*

§ 4. Общие криволинейные координаты.

Отсюда только один шаг к *общим* криволинейным координатам. Именно, мы понимаем под криволинейными координатами пространственной геометрии (мы переходим здесь к случаю трех измерений) вообще такие функции u, v, w, которые зависят аналитически от x, y, z.

Тогда уравнения

$$u = C, \quad v = C', \quad w = C''$$

дают три семейства поверхностей, которые в своем пересечении определяют нам точки. При этом существенным является то условие, что функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль; тогда вышеупомянутые уравнения могут быть разрешены „im Kleinen" относительно x, y, z.

Само собой разумеется, что мы будем рассматривать эти поверхности только в ограниченной части пространства до тех пор, пока

[1]) H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Geometrie. Leipzig, 1914.

не узнаем о них чего-либо более точного; потому что, поскольку в их уравнениях фигурируют произвольные аналитические функции от x, y, z, постольку мы вообще можем рассматривать течение поверхности только в ограниченной части пространства и не можем знать, какие особенности еще могут встретиться вне этой части пространства. Но это не вредит нам, если мы хотим заниматься проблемой „im Kleinen", как это большей частью имеет место в математической физике. Здесь дело идет, например, о том, как выражается $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в криволинейных координатах, или как преобразуется уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f = 0$$

(так называемое диференциальное уравнение потенциала) при введении криволинейных координат, и тому подобное. Мы уже говорили, что введению криволинейных координат мы обязаны главным образом Ламэ, читавшему в период 1830—1860 гг. лекции на факультете наук. Он дал в своих лекциях очень много новых результатов, которые он, в конце своей жизни, объединил в учебниках. Из них мы назовем:

1. Лекции о функциях, обратных трансцендентным и об изотермических поверхностях (Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes, 1857).

Семейство поверхностей $f = \text{const}$ называется изотермическим, если удовлетворяется уравнение $\Delta f = 0$; в настоящее время такие поверхности называются поверхностями равного уровня потенциала f.

2. Лекции о криволинейных координатах (Leçons sur les coordonnées curvilignes, 1859).

3. Лекции по аналитической теории тепла (Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, 1861).

4. Лекции по математической теории упругости твердых тел (Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 2 изд., 1866).

Эти работы теперь во многих отношениях устарели, но все еще с пользой могут изучаться.

Мы рассмотрим подробнее только два типа криволинейных координат:

1. Эллиптические координаты.

2. Пентасферические координаты.

Эллиптические координаты впервые были введены в 1839 году одновременно математиками Якоби и Ламэ; именно в следующих работах:

Якоби, О геодезических линиях на эллипсоиде и об одной замечательной аналитической подстановке (Von den geodäsischen Linien auf dem Ellipsoid und einer merkwürdigen analytischen Substitution, Crelles Journal, т. 19),

Ламэ, О равновесии температуры в эллипсоиде с тремя неравными осями (Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoide à trois axes inégaux, Liouvilles Journal, т. 4.).

§ 5. Эллиптические координаты.

Переходя к рассмотрению эллиптических координат, свяжем с ними систему конфокальных поверхностей второй степени, которую мы представим себе заданной следующим уравнением:

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1,$$

$$a_1>a_2>a_3>0,$$

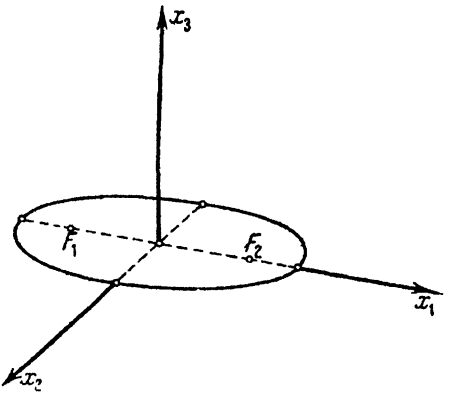
где x_1, x_2, x_3 обозначают обычные прямоугольные координаты, в то время как λ является переменным параметром. Если мы ограничим параметр λ действительными значениями и заставим его изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, то мы должны будем различать следующие случаи:

1. Если λ лежит между $-\infty$ и a_3, то наше уравнение представляет *эллипсоиды*;

2. Если λ лежит между a_3 и a_2, то уравнение представляет *однополостные гиперболоиды*;

3. Если λ лежит между a_2 и a_1, то уравнение представляет *двуполостные гиперболоиды*;

4. Если λ лежит между a_1 и $+\infty$, то уравнение представляет *нулевые поверхности*.



Черт.

Мы называем последние поверхности „нулевыми“ потому, что они не имеют никакой действительной части; обычного названия „мнимые“ поверхности мы здесь не употребляем, потому что позднее под мнимыми поверхностями мы будем понимать такие поверхности, которые представляются уравнением с мнимыми коэфициентами, в то время как уравнения наших нулевых поверхностей обязательно действительны.

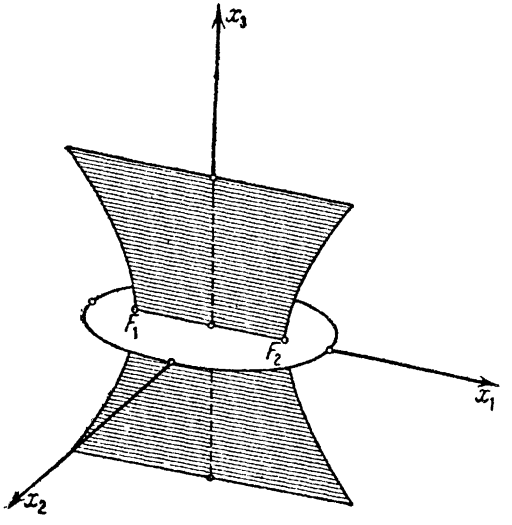
Можно вообще, следуя Сегре (C. Segre), геометрическую фигуру называть *действительной*, если она, посредством так называемого „сопряжения“, переходит сама в себя, причем, „сопряжением“ называют такое отображение, при котором каждая точка переводится в точку с комплексно-сопряженными координатами, так что всякая действительная точка переводится в себя.

Попытаемся теперь составить более ясное представление о конфокальном семействе поверхностей; начнем прежде всего с эллипсоидов, три полуоси которых имеют, очевидно, длины:

$$\sqrt{a_1-\lambda},\quad \sqrt{a_2-\lambda},\quad \sqrt{a_3-\lambda}.$$

Это семейство эллипсоидов содержит в качестве предельных случаев для $\lambda=-\infty$ бесконечно большую сферу, а для $\lambda=a_3$ — внутренность

эллипса с полуосями $\sqrt{a_1 - a_3}$ и $\sqrt{a_2 - a_3}$. Этот последний называется *фокальным эллипсом* нашей системы; он лежит в координатной плоскости x_1, x_2 (см. чертеж 4, на котором фокусы фокального эллипса обозначены буквами F_1, F_2). В остальном семейство эллипсоидов устроено так, что все они расположены вокруг фокального эллипса и так охватывают друг друга, что равномерно удаляются в бесконечность. Легко видеть, что они при этом заполняют все пространство в точности один раз.



Черт. 5.

Заставим теперь λ пробегать все значения между a_3 и a_2; тогда мы получим семейство однополостных гиперболоидов с полуосями

$$\sqrt{a_1 - \lambda}, \quad \sqrt{a_2 - \lambda}, \quad i\sqrt{\lambda - a_3}.$$

Разумеется длина последней оси является мнимой, т. е. „вертикальная ось" нашей координатной системы *не* пересекает гиперболоида.

Семейство гиперболоидов содержит в качестве предельных случаев для $\lambda = a_3$ гиперболоид, вырождающийся во внешнюю часть фокального эллипса, а для $\lambda = a_2$ во внутренность *фокальной гиперболы*, т. е. заштрихованную на чертеже 5 часть плоскости. Эта гипербола лежит в x_1, x_3 плоскости и имеет следующее уравнение:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - a_2} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_2} = 1.$$

Между этими двумя предельными положениями заключаются остальные однополостные гиперболоиды таким образом, что все они располагаются вокруг фокальной гиперболы и охватываются фокальным эллипсом. При этом все пространство заполняется ими однократно.

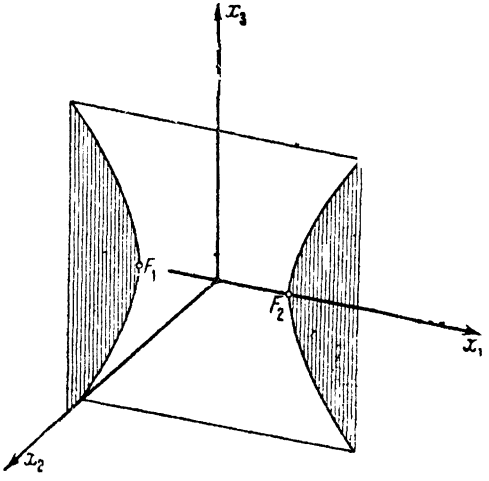
Наконец мы рассмотрим семейство двуполостных гиперболоидов, действительная ось которых совпадает с осью x_1. В качестве предельных случаев это семейство содержит для $\lambda = a_2$ часть плоскости x_1, x_3, расположенную вне фокальной гиперболы (на чертеже 6 заштрихованную), в то время как второй предельный случай для $\lambda = a_1$ осуществляется дважды взятой координатной плоскостью x_2, x_3, в которой не имеется уже *никакой фокальной кривой*, так как уравнение

$$\frac{x_2^2}{a_2 - a_1} + \frac{x_3^2}{a_3 - a_1} = 1$$

представляет нулевую кривую.

В остальном семейство двуполостных гиперболоидов заполняет все пространство также в точности один раз, именно таким образом, что всегда одна полость охватывает правую ветвь фокальной гиперболы, а другая — левую ее ветвь.

Казалось бы, что мы изучали здесь три различных семейства поверхностей, но это так кажется только на первый взгляд, в то время как с более глубокой точки зрения, когда λ может принимать также и комплексные значения, мы получаем одну связную систему поверхностей, в которой наши три семейства поверхностей содержатся в качестве действительных подсемейств.



Черт. 6.

После того, как мы составили себе представление о виде конфокальных поверхностей второй степени, мы должны теперь прежде всего доказать следующую важную теорему.

Система конфокальных поверхностей второй степени образует ортогональную систему. Это значит, что через каждую точку пространства $x_1, x_2, x_3 (\neq 0)$ проходят три поверхности системы, пересекающиеся в этой точке попарно ортогонально.

Вкратце доказательство этого предложения состоит в следующем.

Пусть через точку пространства x_1, x_2, x_3 проходят поверхности с параметрами λ и λ', уравнения которых:

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_1^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda'} = 1.$$

Построим теперь к обеим поверхностям в точке x_i касательные плоскости, уравнения которых в текущих координатах ξ_i будут

$$\sum_1^3 \frac{x_i \xi_i}{a_i - \lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_1^3 \frac{x_i \xi_i}{a_i - \lambda'} = 1,$$

и докажем, что обе касательные плоскости взаимно перпендикулярны, т. е. что выполняется условие

$$\sum_1^3 \frac{x_i}{a_i - \lambda} \cdot \frac{x_i}{a_i - \lambda'} = \sum_1^3 \frac{x_i^2}{(a_i - \lambda)(a_i - \lambda')} = 0.$$

Но последнее уравнение мы можем получить посредством почленного вычитания двух вышезаданных уравнений; этим справедливость приведенного предложения доказана.

Так как наше исходное уравнение — третьей степени относительно λ, то через каждую точку $x_i \neq 0$ проходят три поверхности системы и мы, следовательно, имеем *тройную ортогональную систему*.

Далее, если мы вспомним уже упоминавшуюся нами „теорему Дюпена" о кривых пересечения ортогональной системы, то сейчас же сможем сформулировать следующее предложение:

Кривые, по которым пересекаются каждые две поверхности нашей конфокальной системы поверхностей второй степени и которые являются по теореме Дюпена их линиями кривизны, являются пространственными кривыми четвертого порядка, состоящими всегда из двух частей, если ограничиваться действительными поверхностями системы и их действительными линиями пересечения.

Чтобы теперь перейти к самим эллиптическим координатам, заметим, что уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1,$$

если считать в нем x_1, x_2, x_3 как данные, а λ — как неизвестное, определяет нам три корня λ_1, λ_2, λ_3, которые мы и принимаем за эллиптические координаты точки x_1, x_2, x_3. Надо иметь в виду, что это кубическое относительно λ уравнение неприводимо, т. е. что оно не может распасться рационально на уравнения низших степеней. Эллиптические координаты являются, таким образом, тремя ветвями *одной и той же* алгебраической функции обычных прямоугольных координат, определенной нашим уравнением; они, до известной степени, занимают промежуточное положение между линейными координатами и самыми общими криволинейными координатами, потому что они являются именно *алгебраическими функциями*, и поэтому с ними можно иметь дело во всем пространстве, чего в случае криволинейных координат, вообще говоря, не бывает.

Если мы займемся специальными задачами, то увидим, что обычно x_1, x_2, x_3 действительны и, важно заметить, что тогда λ_1, λ_2, λ_3 также будут действительными; это как раз совпадает с тем геометрическим фактом, что действительные поверхности нашей системы трижды заполняют все пространство. Можно даже указать интервалы для значений λ_1, λ_2, λ_3, если принять во внимание, что через каждую действительную точку x_1, x_2, x_3 проходят один эллипсоид, один однополостный и один двуполостный гиперболоиды. Из этого следует, что при надлежащем выборе индексов у λ мы можем установить неравенства:

$$-\infty < \lambda_3 < a_3,$$

$$a_3 < \lambda_2 < a_2,$$

$$a_2 < \lambda_1 < a_1.$$

Пусть заданы эллиптические координаты точки; тогда ее прямоугольные координаты можно определить формулой

$$x_1^2 = \frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

и аналогичными формулами для x_2 и x_3. В этом можно сейчас же убедиться посредством подстановки в первоначальное уравнение.

Последние формулы показывают, что каждой системе значений λ_1, λ_2, λ_3 соответствует восемь точек, координаты которых отличаются только знаками, что, впрочем, непосредственно ясно также и из геометрических соображений. Если, далее, мы обратимся опять к только что установленным формулам и представим себе две поверхности системы, например два эллипсоида, заданными посредством двух каких-нибудь частных значений λ_3 и λ_3', то будем иметь для первого из эллипсоидов следующие формулы:

$$x_1 = \sqrt{\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}} \cdot \sqrt{a_1-\lambda_3},$$
$$x_2 = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots,$$
$$x_3 = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots,$$

в которых λ_1 и λ_2 мы можем рассматривать как криволинейные координаты на эллипсоиде. Для второго эллипсоида имеют место соответствующие формулы:

$$x_1' = \sqrt{\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}} \cdot \sqrt{a_1-\lambda_3'},$$
$$x_2' = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots,$$
$$x_3' = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots.$$

Отобразим теперь оба эллипсоида один на другой, поставив друг другу в соответствие точки с одними и теми же значениями параметров λ_1, λ_2; геометрически это означает, что мы ставим в соответствие друг другу такие точки эллипсоидов, которые лежат на одной и той же ортогональной траектории к эллипсоидам.

Аналитическая связь между координатами точек на обоих эллипсоидах выражается, очевидно, формулами следующего типа:

$$x_1' = \sqrt{\frac{a_1-\lambda_3'}{a_1-\lambda_3}} \cdot x_1, \quad \ldots;$$

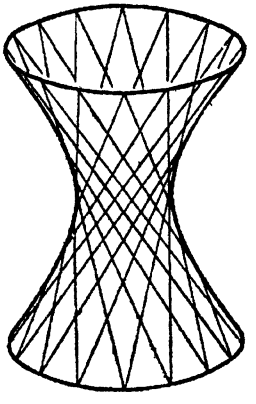
их вид показывает справедливость следующего предложения:

Отображение, которое устанавливается между обеими поверхностями второй степени с помощью ортогональных траекторий, является аффинным (по терминологии Мебиуса). Так как при аффинных преобразованиях прямые линии опять переходят в прямые, потому что линейные соотношения между координатами при преобразовании остаются линейными, то мы можем высказать следующее предложение:

Два однополостных гиперболоида конфокальной системы отображаются друг на друга посредством их ортогональных траекторий таким образом, что прямолинейные образующие одного гиперболоида соответствуют прямолинейным образующим другого.

Но мы можем утверждать еще, что:

В частности отрезки прямых линий, соответствующих друг другу на гиперболоидах, всегда имеют одинаковую длину, что мы сейчас и докажем. Между обоими гиперболоидами, для которых мы хотим доказать справедливость нашего утверждения, находится всегда еще целое семейство конфокальных гиперболоидов; поэтому, чтобы доказать справедливость общего предложения, нам достаточно установить только следующее кинематическое предложение, которое, в свою очередь, является простым частным случаем общей теоремы вариационного исчисления (теорема о трансверсалях):



Черт. 7.

Если отрезок двигается таким образом, что его концы двигаются нормально к самому отрезку, то его длина остается всегда неизменной. Справедливость этого очевидного утверждения следует аналитически из того, что (в легко понятном способе записи) для расстояния l между конечными точками x_k и y_k имеет место формула

$$\frac{dl^2}{dt} = \frac{d}{dt}\sum (x_k - y_k)^2 =$$

$$= 2\sum (x_k - y_k)\left(\frac{dx_k}{dt} - \frac{dy_k}{dt}\right) = 0,$$

потому что в силу нашего предположения:

$$\sum (x_k - y_k)\frac{dx_k}{dt} = 0, \quad \sum (x_k - y_k)\frac{dy_k}{dt} = 0.$$

С помощью только что доказанного предложения мы можем себе уяснить теорию так называемого *„подвижного гиперболоида"*, которая впервые была разработана Генричи (Henrici) в 1874 г. в Лондоне [1]). Чертеж 7 изображает модель из спиц, которая содержит оба семейства образующих однополостного гиперболоида. Изготовленные из твердого материала спицы связаны в точках их пересечения шарнирами так, что они могут вращаться вокруг точек скрепления. Таким образом изготовленная модель, в которой все прямолинейные отрезки имеют постоянную длину, по нашей теореме подвижна внутри конфокальной системы. Генричи это впервые заметил эмпирически.

§ 6. Геодезические линии на поверхностях второй степени.

Перейдем теперь к применениям эллиптических координат, именно изложим с их помощью *теорию геодезических линий на поверхностях второй степени*. Эта теория впервые чисто аналитически была дана

[1]) См. упомянутый в § , 3 каталог Дика, стр. 261.

Якоби (см. указанную выше статью в Креллевском журнале, т. 19, 1839), а позднее Шаль (Chasles, см. журнал Лиувилля, т. 11, 1846) дал к ней геометрическое дополнение. Выскажем здесь, как принцип, что аналитическую и геометрическую трактовку проблем мы будем всегда связывать, а не будем, как многие математики, принимать одностороннюю точку зрения. Одна аналитическая трактовка не дает наглядного представления о полученных результатах, а одно геометрическое рассмотрение часто может дать только *приблизительную* основу доказательства или выяснить только *качественное*, но не *количественное*, течение кривых.

Мы приведем теперь выражение линейного элемента в эллиптических координатах:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}d\lambda_1^2 + \ldots,$$

а затем докажем следующее предложение:

Конусы, которые выходят из произвольной точки пространства к конфокальным поверхностям второй степени, сами образуют конфокальную систему, так что всегда каждые два из них пересекаются ортогонально.

Эта теорема показывает, что кажущиеся контуры конфокальных поверхностей глазу наблюдателя всегда представляются скрещивающимися под прямым углом.

Чтобы нашу теорему доказать аналитически, обратимся к уравнению нашей конфокальной системы, которое можно записать так:

$$\sum A_k x_k^2 = 1, \quad \text{где} \quad A_k = \frac{1}{a_k - \lambda}.$$

Тогда, по известным формулам аналитической геометрии, уравнение системы конусов, которые, исходя из точки x_i, охватывают поверхности нашей системы, в текущих координатах x_k' будет:

$$\left(\sum A_k x_k^2 - 1\right)\left(\sum A_k x_k'^2 - 1\right) - \left(\sum A_k x_k x_k' - 1\right)^2 = 0,$$

или:

$$\sum_{i,k} A_i A_k (x_i x_k' - x_k x_i')^2 - \sum A_k (x_k - x_k')^2 = 0.$$

Если в последнем уравнении мы заменим A_i и A_k их значениями, то получим в качестве уравнения нашей системы конусов:

$$\sum \frac{(x_k - x_k')^2}{a_k - \lambda} - \sum \frac{(x_i x_k' - x_k x_i')^2}{(a_i - \lambda)(a_k - \lambda)} = 0.$$

Ограничимся теперь рассмотрением окрестности точки x_k, из которой исходят все конусы, и установим уравнение для лучей, лежащих на отдельном конусе и исходящих из точки x_k. Для этой цели мы просто положим $x_k' = x_k + dx_k$, где dx_k как раз и будут „координа-

тами луча", и таким путем из нашего уравнения конуса получим уравнение:

$$\sum \frac{dx_k^2}{a_k - \lambda} - \sum \frac{(x_i dx_k - x_k dx_i)^2}{(a_i - \lambda)(a_k - \lambda)} = 0.$$

Если мы преобразуем последнее уравнение к эллиптическим координатам, приписав точке x_i координаты λ_1, λ_2, λ_3, то получим:

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)} \cdot \frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \ldots = 0.$$

Координатами луча будут теперь $d\lambda_1$, $d\lambda_2$, $d\lambda_3$. Если мы введем еще длину дуги на координатных линиях, как, например, σ_1 на $\lambda_2 = \lambda_3 = \text{const}$, то мы, очевидно, получим в окрестности точки λ_i, т. е. для наших лучей, обычную прямоугольную систему координат в трех диференциалах дуг $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$. Но по нашей общей формуле ds^2 мы получаем для этих диференциалов выражения:

$$d\sigma_1^2 = \frac{1}{4} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)} d\lambda_1^2, \ldots,$$

так что, воспользовавшись этими выражениями, уравнению системы конусов можно придать следующий простой вид:

$$\frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{d\sigma_2^2}{\lambda_2 - \lambda} + \frac{d\sigma_3^2}{\lambda_3 - \lambda} = 0.$$

Если обозначить координаты лучей вместо $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, например, через ξ_1, ξ_2, ξ_3, то мы получим уравнение:

$$\frac{\xi_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\xi_2^2}{\lambda_2 - \lambda} + \frac{\xi_3^2}{\lambda_3 - \lambda} = 0.$$

Но здесь мы действительно имеем уравнение системы конфокальных конусов второй степени. Что каждые два конуса системы пересекаются ортогонально доказывается так же, как раньше доказывалась ортогональность двух поверхностей общей системы.

Рассмотренное предложение о „кажущейся" ортогональности конфокальных поверхностей может быть доказано также несколько иным путем и притом почти без всяких вычислений; об этом мы сейчас скажем несколько слов, воспользовавшись рассматриваемыми позднее в § 19 плоскостными координатами. Если плоскость изображается уравнением:

$$u_0 + \sum_1^3 u_k x_k = 0,$$

то коэфициенты u_k можно рассматривать как ее „плоскостные координаты" и можно найти для конфокальных поверхностей второй степени в этих координатах, при произвольном положении координатного трехгранника, уравнение:

$$\sum_0^3 a_{ik} u_i u_k = \lambda \sum_1^3 u_k^2,$$

как это мы установим позже в § 43. Если мы рассмотрим теперь все касательные плоскости, проходящие через начало координат $u_0 = 0$, то они будут удовлетворять уравнению:

$$\sum_1^3 a_{ik} u_i u_k = \lambda \sum_1^3 u_k^2,$$

которое при специальном выборе осей принимает следующий простой вид:

$$\sum_1^3 (\lambda_k - \lambda) u_k^2 = 0.$$

Если мы теперь снова перепишем уравнение конуса в точечных координатах, то получим опять прежнюю формулу:

$$\sum_1^3 \frac{\xi_k^2}{\lambda_k - \lambda} = 0,$$

из которой, как и раньше, следует справедливость нашего утверждения.

Теперь, после доказательства нашего предложения, перейдем к рассмотрению общих касательных к двум поверхностям нашей системы с параметрами λ и λ'. Через каждую точку пространства будут проходить четыре таких касательных, так как уравнения:

$$\frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \ldots = 0, \quad \frac{d\sigma_1^2}{\lambda_1 - \lambda'} + \ldots = 0$$

доставляют четыре корня для неизвестных отношений $d\sigma_1 : d\sigma_2 : d\sigma_3$. В целом общие касательные зависят от двух параметров. Именно: через каждую точку пространства проходит конечное число таких касательных, которые поэтому, казалось бы, должны были бы дать трехпараметрическое многообразие. Но так как на каждой общей касательной лежат точки пространства, которые зависят еще от одной постоянной, то мы будем иметь двумерное многообразие.

Подобная совокупность прямых линий, зависящая от двух параметров, называется системой лучей (пользуясь словоупотреблением оптики) или линейной конгруэнцией.

Приведем сперва несколько определений и теорем из теории линейных конгруэнций. Линейная конгруэнция, вообще говоря, определяет так называемую *фокальную поверхность*, т. е. поверхность, которой касаются все лучи нашей системы. Как правило, каждый луч системы касается фокальной поверхности дважды; в соответствии с этим различают две „полости“ фокальной поверхности, из которых одна содержит одну точку прикосновения, а другая другую точку прикосновения. (Обе полости могут совпасть.) В нашем случае обе полости фокальной поверхности образуются теми двумя поверхностями второй степени, из которых мы исходили.

Предположим, в частности, что наши исходные поверхности являются эллипсоидом и однополостным гиперболоидом и перейдем затем к опре-

делению огибающих нашей системы лучей на эллипсоиде, т. е. кривых, которые в каждой своей точке касаются одного из лучей системы.

Возьмем произвольную точку эллипсоида и попытаемся определить в ней направление касательной к огибающей кривой. Это направление, во-первых, должно лежать в касательной плоскости эллипсоида и, во-вторых, касаться гиперболоида. Построим поэтому в рассматриваемой точке эллипсоида касательную плоскость; эта плоскость пересекает гиперболоид по некоторому коническому сечению, к которому мы проведем из исходной точки обе касательные. Эти последние определяют нам два направления, одно из которых по произволу мы можем выбрать в качестве направления касательной для искомой огибающей. Поступая таким образом далее, мы построим точка за точкой огибающую, определяя в каждой отдельной точке направление касательной и затем продвигаясь вперед каждый раз на малый отрезок кривой (это проще всего осуществить с помощью натянутой нити или проволоки); тогда нетрудно заметить, что средняя зона эллипсоида дважды покроется огибающими кривыми нашей конгруэнции, каждая из которых проходит так, что попеременно касается обеих линий пересечения наших поверхностей второй степени.

Теперь мы можем сделать главное заключение, а именно: *каждая такая огибающая является геодезической линией нашего эллипсоида.* Это нетрудно установить. Ведь соприкасающаяся плоскость нашей огибающей всегда касается гиперболоида и значит перпендикулярна касательной плоскости эллипсоида (по теореме об ортогональности системы исходящих из одной точки касательных конусов) и отсюда следует по ранее приведенному определению, что мы действительно имеем дело с геодезической линией. Таким образом отдельный однополостный или двуполостный гиперболоид порождает нам на эллипсоиде однопараметрическое семейство геодезических линий, которые все касаются одной и той же линии кривизны; если мы рассматриваемый гиперболоид заставим пробегать все семейство гиперболоидов, то получим на эллипсоиде совокупность геодезических линий, зависящую от двух параметров.

Если в частности в качестве гиперболоида возьмем фокальную гиперболу, то получим выше особо отмеченные геодезические линии, проходящие через точки округления эллипсоида.

Переведем теперь произведенные здесь, следуя Шалю, геометрические рассмотрения на язык анализа; тогда мы непосредственно получим формулы Якоби.

Выше, в качестве уравнения конуса, мы имели уравнение:

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}\cdot\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}\cdot\frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda}+$$

$$+\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)}\cdot\frac{d\lambda_3^2}{\lambda_3-\lambda}=0.$$

Этот конус является касательным конусом к гиперболоиду λ; он должен сверх того иметь вершину в какой-нибудь точке эллипсоида λ' и пе-

ресекать этот последний; поэтому мы полагаем $\lambda_3 = \lambda' = \text{const}$, вследствие чего из приведенного выше уравнения получается:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)} \cdot \frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)} \cdot \frac{d\lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda}$$

или:

$$d\lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda)}} =$$
$$= \pm d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda)}}.$$

Двойной знак в этой формуле указывает на то обстоятельство, что в каждой точке эллипсоида возможны два направления.

Наши последние выкладки мы можем вкратце резюмировать следующим образом.

Сведя геометрически проблему геодезических линий к нахождению огибающих однопараметрического семейства линейных конгруэнций, мы тем самым свели диференциальное уравнение второго порядка для геодезических линий к семейству диференциальных уравнений первого порядка, именно к вышеприведенному диференциальному уравнению, в котором величина λ фигурирует в качестве произвольной постоянной.

Следует отметить, что это диференциальное уравнение первого порядка немедленно интегрируется, так как оно является уравнением с разделенными переменными. При этом мы получаем гиперэллиптические интегралы:

$$\int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda)}} =$$
$$= \text{const} \pm \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda)}}.$$

Как раз эти формулы и являются формулами Якоби для геодезических линий на эллипсоиде.

До сих пор под поверхностью $\lambda_3 = \text{const}$ мы понимали всегда эллипсоид, что делалось, однако, только ради наглядности. Вообще $\lambda_3 = \text{const}$ может означать любую поверхность нашей системы. Если в частности для $\lambda_3 = \text{const}$ мы возьмем однополостный гиперболоид и под $\lambda = \text{const}$ будем понимать тот же гиперболоид, то наше приведенное выше диференциальное уравнение примет следующий более простой вид:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)}} = \pm \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)}}.$$

Это уравнение определяет направление *прямолинейных образующих* нашей поверхности $\lambda_3 = \text{const}$, что легко уяснить геометрически. Ведь каждая отдельная прямая, направление которой определяется этим диференциальным уравнением, должна в двух точках касаться поверхности λ_3. Но так как прямая или только в одной точке касается поверхности второй степени, или целиком лежит на ней, то в нашем

случае имеет место последнее. Значит прямые линии являются самими интегральными кривыми. Впрочем можно столь же легко представить себе на модели, как геодезические линии на однополостном гиперболоиде постепенно переходят в образующие; для этого нужно исходить из двух однополостных гиперболоидов, представить себе их общие касательные и затем непрерывно сближать их друг с другом до тех пор, пока они наконец не совпадут.

Чтобы позднее аналитически доказать некоторые дальнейшие геометрические следствия, мы рассмотрим сначала некоторые формулы, которые дадут нам *длины элементов дуг* некоторых ранее рассмотренных кривых. Встречающиеся в этих формулах квадратные корни могут быть взяты с любым знаком.

1. Элемент дуги касательной, которая касается поверхностей λ и λ':

$$ds_1 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda'-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda'-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}} + \frac{d\lambda_3}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_3)\cdot(\lambda'-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)}}.$$

2. Элемент дуги геодезической линии на поверхности $\lambda' = \lambda_3 = \text{const}$, касательные которой касаются поверхности λ:

$$ds_2 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}}.$$

3. Элемент дуги линии кривизны, которая принадлежит одновременно поверхностям $\lambda' = \lambda_3 = \text{const}$ и $\lambda = \lambda_2 = \text{const}$:

$$ds_3 = \frac{d\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}}.$$

Заметим по поводу 1, что эта формула получается из общего выражения для ds в эллиптических координатах с помощью двух соотношений:

$$d\lambda_1^2\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda-\lambda_1)} + \ldots = 0,$$

$$d\lambda_1^2\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)(\lambda'-\lambda_1)} + \ldots = 0,$$

с которыми мы познакомились как с диференциальными уравнениями касательных конусов к поверхностям λ и λ' с вершиной в точке λ_1, λ_2, λ_3. Более подробные вычисления здесь проводить не будем.

Относительно формул 2 и 3 мы также не будем входить в подробности, поскольку они получаются из 1 посредством специализации, причем характер специализации виден уже из заголовков к формулам.

Мы предпочитаем перейти непосредственно к выводу геометрических следствий из наших формул и прежде всего установить аналитически теорему, на которой основывается подвижной гиперболоид Генричи. Теорема заключается в следующем:

Соответствующие отрезки прямолинейных образующих на двух конфокальных однополостных гиперболоидах имеют всегда одинаковую длину.

Для доказательства будем понимать под поверхностью $\lambda_3 = \text{const}$ однополостный гиперболоид и будем рассматривать λ_1 и λ_2 как криволинейные координаты на этом гиперболоиде. Тогда по формуле 2, положив $\lambda = \lambda_3$, мы получим в качестве элемента дуги прямолинейной образующей:

$$ds = \pm \frac{d\lambda_1}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_2}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\sqrt{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)}}.$$

При этом в формуле берутся двойные знаки, так как мы о них еще ничего не установили.

Теперь, чтобы определить длину s прямолинейной образующей между двумя точками λ_1^0, λ_2^0 и λ_1', λ_2', мы просто проинтегрируем ds между этими пределами

$$s = \pm \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{d\lambda_1}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)}} \pm$$

$$\pm \int_{\lambda_2^0}^{\lambda_2'} \frac{d\lambda_2}{2} \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\sqrt{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)(a_3 - \lambda_2)}}.$$

В последнем равенстве члены с λ_3 выпадают в силу приведенного выше диференциального уравнения прямолинейных образующих, но обосновать это строго мы могли бы только после точного исследования знаков перед корнями; однако мы в это входить не будем. Скажем точнее: дело идет о том, чтобы установить соответствие между двойными знаками, стоящими перед корнями с одной стороны в диференциальном уравнении прямолинейных образующих, с другой — в формуле для элемента дуги. Но вне зависимости от λ_3 как раз и заключается теорема Генричи, потому что она как раз и означает, что мы будем получать всегда одно и то же расстояние между двумя соответственными точками, независимо от того, на каком гиперболоиде λ_3 мы его измеряем.

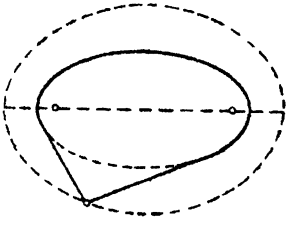
Следовательно, подводя итоги, мы можем сказать:

В нашем выражении для ds, в силу диференциального уравнения прямолинейных образующих, выпадает член с λ_3, поэтому длина отрезка s прямолинейной образующей на гиперболоиде λ_3, идущего от точки λ_1^0, λ_2^0 к точке λ_1', λ_2', совершенно не зависит от λ_3, так что для всех гиперболоидов $\lambda_3 = \text{const}$ она будет одна и та же; именно это и утверждает теорема Генричи.

§ 7. Построения из нитей Гревса и Штауде.

В качестве второго геометрического приложения мы рассмотрим *нитяную конструкцию поверхностей второй степени* в частности *эллипсоида*, которая впервые была предложена Штауде (Staude) и опубликована им в 1882 году в Math. Annalen, т. 20. Штауде в то время был молодым доктором и являлся членом Лейпцигского семинара Клейна.

Для этой цели мы напомним, прежде всего, обобщение обычной нитяной конструкции эллипса, которую дал Гревс в 1850 г. в Дублине. (Ср., например, Сальмон, Конические сечения). Он укрепляет нить постоянной длины не в обоих фокусах вычерчиваемого эллипса, а охватывает ею некоторый, положенный в основу, эллипс, как это изображено на чертеже 8; тогда при натягивании нити и движении штифта вычерчивается эллипс, конфокальный взятому. Обычная конструкция получится из этой общей как ее частный случай, если положенный в основу эллипс заставить выродиться в отрезок, который можно назвать „фокальным отрезком".



Черт. 8.

Это построение Штауде обобщил на случай пространства, причем в основу он положил эллипсоид и конфокальный гиперболоид, чтобы с их помощью построить конфокальный эллипсоид. Штауде обвивает поверхность нитью постоянной длины так, чтобы нить, поскольку она лежит на поверхности, всегда шла по какой-нибудь „соответствующей" геодезической линии или линии кривизны, по которой обе поверхности пересекаются. Далее нить вытягивается в пространство прямолинейно, разумеется так, чтобы ее направление всегда совпадало с направлением общей касательной к обеим исходным поверхностям. Если затем привязать оба конца нити к штифту и двигать этот штифт не нарушая только что сформулированные условия, т. е. просто натягивая нить, а в остальном произвольно двигая штифт в пространстве, то штифт, опишет эллипсоид, конфокальный обеим исходным поверхностям [1]).

Построение будет особенно простым и наглядным, если положить в основу его фокальный эллипс и фокальную гиперболу в качестве конфокальных поверхностей. Впрочем, чтобы совершенно ясно представить себе положение вещей, нужно непременно иметь под рукой модели в том виде, как они были описаны Штауде в издательстве Брилля. Кроме того мы укажем на очень подробное изложение Штауде в уже упоминавшейся работе (Annalen, т. 20) или в его книге Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Лейпциг, 1896. Анали-

[1]) Другое перенесение конструкции Graves на случай пространства дал F. Gonseth [Darboux Bulletin 42 (1918), стр. 193]. (Построение Штауде описано в книге Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М.-Л. 1936, стр. 25. *Прим. ред.*).

тическое доказательство общей нитяной конструкции Штауде, которое получается с помощью ранее данной формулы элемента дуги при надлежащем учете знаков, можно найти в тех же источниках; здесь ради краткости мы ограничимся более простым, но все же совершенно аналогичным *доказательством теоремы Гревса.*

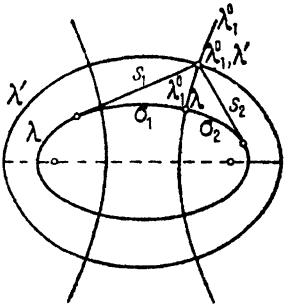
Для этой цели мы положим в основу систему конфокальных конических сечений:

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}=1,$$

причем предположим, что

$$-\infty < a_2 < a_1.$$

Затем, если λ лежит между $-\infty$ и a_2, то мы обозначим ее через λ_2, если же λ лежит между a_2 и a_1, то обозначим через λ_1; таким образом, значение $\lambda_2 = \text{const}$ даст уравнение эллипса, значение $\lambda_1 = \text{const}$ даст уравнение гиперболы. Система конфокальных конических сечений пробегается очевидно так, что при возрастании λ_2 эллипсы все больше и больше сжимаются, а при возрастании λ_1 гиперболы становятся все круче, т. е. подходят все ближе к оси x_2. При $\lambda = a_2$ мы получаем в качестве вырождающегося эллипса отрезок оси x_1 между обоими фокусами, а в качестве вырождающейся гиперболы получаем части оси x_1, лежащие вне этого отрезка; для $\lambda = a_1$ гипербола переходит в ось x_2.



Черт. 9.

Мы выберем теперь из этого семейства два произвольных эллипса $\lambda_2 = \lambda'$ и $\lambda_2 = \lambda < \lambda'$ и из какой-нибудь точки внешнего эллипса проведем обе касательные ко внутреннему эллипсу, длины которых обозначим через s_1 и s_2 (см. черт. 9).

Далее, через точку λ_1^0, λ' проходит гипербола $\lambda_1 = \lambda_1^0$, которая пересекает внутренний эллипс в точке λ_1^0, λ. Дуга эллипса, заключенная между точками прикосновения ранее проведенных касательных, делится этой точкой пересечения на две части; длины этих частей мы обозначим через σ_1 и σ_2 в соответствии с обозначением прямолинейных отрезков s_1 и s_2. Если теперь L обозначает длину всего внутреннего эллипса, то теорема Гревса сводится очевидно к тому, что выражение

$$L+(s_1-\sigma_1)+(s_2-\sigma_2)$$

должно оставаться постоянным, как бы мы ни выбирали исходную точку построения на внешнем эллипсе, т. е. что это выражение не должно зависеть от λ_1^0. Нам, следовательно, достаточно показать только, что $s_1-\sigma_1$ и $s_2-\sigma_2$ не зависят от λ_1^0, для чего мы вычислим эти длины.

Элемент дуги касательной s_1 мы получим посредством специализации нашей ранее приведенной формулы:

$$ds_1 = \frac{d\lambda_1 \sqrt{\lambda - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2 \sqrt{\lambda - \lambda_2}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)}},$$

где мы берем оба члена с положительными знаками. Интеграция нам дает:

$$s_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{\sqrt{\lambda - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)}} + \int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{d\lambda_2 \sqrt{\lambda - \lambda_2}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)}}.$$

Далее, для элемента дуги эллипса мы получим:

$$d\sigma_1 = \frac{d\lambda_1 \sqrt{\lambda - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_2)}},$$

откуда

$$\sigma_1 = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1'} \frac{d\lambda_1 \sqrt{\lambda - \lambda_1}}{2\sqrt{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)}}$$

и поэтому

$$s_1 - \sigma_1 = \int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{d\lambda_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_2}{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)}}.$$

Совершенно аналогичным способом при надлежащем учете знаков получается:

$$s_2 - \sigma_2 = \int_{\lambda'}^{\lambda} \frac{d\lambda_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_2}{(a_1 - \lambda_2)(a_2 - \lambda_2)}},$$

т. е. та же величина, что и для $s_1 - \sigma_1$. Мы видим, следовательно что $s_1 - \sigma_1$ и $s_2 - \sigma_2$ совершенно не зависят от λ_1^0; из этой независимости наших разностей от λ_1^0 следует теперь, что общая длина нити в самом деле остается постоянной, как и утверждает теорема Гревса.

Вместо этого доказательства, при котором нам пришлось пользоваться эллиптическими интегралами, мы можем привести следующее наглядное доказательство.

Для изменения длины замкнутой кривой с угловой точкой (кривая изображена на чертеже 8 толстой линией), если угловая точка P движется со скоростью $\frac{dS}{dt}$ в направлении, образующем с касательными к эллипсу в точке P углы φ, ψ $(0 < \varphi < \pi,\ 0 < \psi < \pi)$, получается уравнение:

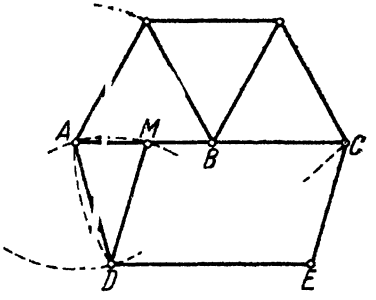
$$\frac{dL}{} = \frac{dS}{dt}\cos\varphi - \frac{dS}{dt}\cos\psi.$$

Если точка P движется таким образом, что при этом L остается постоянной, то описываемая точкой P траектория пересекает касательные под равными углами: $\varphi = \psi$. Но можно установить, что соотношение $\varphi = \psi$ определяет эллипс, проходящий через точку P, конфокальный данному; сделаем это так: пары касательных в точке P к конфокальным коническим сечениям образуют „инволюцию"; двойными прямыми этой инволюции являются касательные в точке P к проходящим через точку P коническим сечениям системы, перпендикулярные друг другу; следовательно пары прямых нашей инволюции расположены симметрично по отношению к этой паре касательных. Это предложение, которое содержит наше утверждение $\varphi = \psi$, является плоским аналогом теоремы о „кажущейся" ортогональности конфокальных поверхностей; мы к этому вернемся позднее на стр. 182, чертеж 66.

Это „элементарное" доказательство может быть перенесено так же и на случай пространства.

§ 8. Теория кругов и шаров. Исторические замечания.

Мы начнем с обстоятельного введения и одновременно подчеркнем большую роль, которую играли эти образы в развитии новой геометрии. Именно, часто утверждают, что только прямые линии и плоскости имели существенное значение в ее развитии; в противоположность этому мы хотели бы указать на то, что с начала девятнадцатого столетия наряду с рассмотрениями прямой и плоскости (т. е. с проективными рассмотрениями в более тесном смысле слова) всегда параллельно рассматривались круг и шар.



Черт. 10.

Здесь мы прежде всего упомянем о книге, появившейся на пороге девятнадцатого столетия и почти забытой в настоящее время, именно о книге Маскерони, Геометрия циркуля (Mascheroni, La geometria del compasso, Pavia 1797 г.). Эта работа представляет собой элементарно-геометрический обзор всех построений, выполняемых только циркулем, без употребления линейки. При этом автор руководствуется практической точкой зрения; он хочет дать механикам наставление для их построений, особенно для выполнения деления кругов, так как он придерживается того мнения, что во всяком случае при построениях на металлических пластинках циркуль дает большую точность, нежели линейка.

Чтобы дать представление о построениях Маскерони, покажем, например, как с помощью одного циркуля можно найти середину M отрезка, соединяющего две данные точки A и B. Прежде всего можно с помощью цепи из трех равносторонних треугольников, как это показано на черт. 10, определить точку C таким образом, чтобы B явля-

лось серединой отрезка AC. Затем можно определить точки D и E так, чтобы четырехугольник $ACED$ был трапецией с $AD = CE = AB$ и $CD = AE = AC$. Тогда искомая точка M обладает тем свойством, что $AD = MD$ и $DE = MC$. Справедливость этого построения следует из подобия треугольников ACD и ADM.

Новое развитие теории кругов, с которым мы здесь хотим познакомиться, было предпринято собственно вскоре после Маскерони во Франции, именно школой Монжа. Попутно упомянем здесь, что Монж в 1794 г. основал Политехническую школу и затем до 1815 г., вплоть до реставрации, в ней преподавал. Главными работами Монжа являются:

1. Начертательная геометрия (Géométrie descriptive) — книга, сделавшая начертательную геометрию, которая до тех пор являлась только совокупностью практических правил, научной дисциплиной. Затем уже упомянутые нами раньше.

2. Приложения анализа к геометрии (Applications de l'Analyse a la Géométrie). (Диференциальная геометрия) [1]).

Все же заслуга Монжа заключается главным образом не столько в его научных работах, сколько в том, что он много содействовал развитию математики своей педагогической деятельностью, благодаря которой создалась целая школа крупных геометров. Эта созданная Монжем школа учредила вскоре собственный печатный орган, первый в истории математический журнал. До тех пор существовали лишь академические записки, к которым при основании Политехнической школы присоединился еще *Журнал Политехнической школы* (Journal de l'École Polytechnique), впрочем вначале выходивший очень редко. Позднее, при все возраставшей многосторонности математической продукции, явилась настоятельная необходимость в более быстром опубликовании журналов, предназначенных только для математики; таким образом возникли:

1. Gergonnes Annales de Mathématiques, выходившие в период 1810—1831 гг. К ним присоединились далее:

2. *Crelles Journal* для чистой и прикладной математики с 1826 г. и

3. *Liouvilles Journal* с 1836 г.

Работы учеников Монжа частично публиковались также в Анналах Жергонна. Для теории кругов и шаров, которой мы здесь будем заниматься, особенно важны следующие работы:

1. Гольтье (Gaultier) 1812 г.; в журнале Политехнической школы, где особенно подробно рассматриваются ортогональные круги.

2. Жергонн (Gergonne) 1816, в собственных Анналах, том 7, где рассматриваются соприкасающиеся круги.

В этих двух работах излагаются частью совершенно новые результаты, частью даются новые элегантные доказательства уже известных теорем; так, например, в работе Жергонна трактуется известная задача

---

[1]) Имеется русский перевод: Гаспар Монж, Приложение анализа к геометрии, перевод с французского В. А. Гуковской под редакцией с предисловием и примечаниями М. Я. Выгодского. ОНТИ, М.-Л. 1936. *Прим. ред.*

Аполлония о касающихся окружностях. Через десять лет, позднее чем во Франции, в Германии тоже начинается новое развитие как геометрических исследований вообще, так в частности и нашей теории. Мы укажем здесь на следующие работы:

Штейнер (Steiner) 1826 г., Креллевский журнал, т. I., Некоторые геометрические исследования" (Einige geometrische Betrachtungen) и

Плюкер 1827—28 г. в т. I „Аналитико-геометрических исследований".

Скажем, прежде всего, об исследованиях Штейнера и о его личности.

Штейнер в своих исследованиях обобщил имевшуюся до тех пор теорию кругов тем, что он рассматривал не только ортогонально пересекающиеся и касающиеся окружности (как это делали французы), но так же и такие, которые пересекаются под некоторым произвольным углом. При этом его личной особенностью является то, что он рассматривает все задачи чисто конструктивно, без всяких формул, причем он часто не дает доказательств, так что принцип, из которого он исходит в своих исследованиях, не всегда ясен. (Сравни — в части, относящейся к исследованию кругов — предисловие к Fiedler, Zyklographie, 1882). Исключительное предпочтение Штейнера к наглядности и его нелюбовь к аналитическим формулам станет нам ясна, если мы представим себе ход его образования и вспомним, что он вышел из школы знаменитого Песталоцци (Pestalozzi), который как педагог считал самым важным наглядность и наглядное обучение. Кроме того Штейнер в своей юности не получил основательного математического образования, был вообще самоучкой, так что он не мог иметь достаточного опыта в обращении с аналитическими формулами. Штейнер в период 1835—1865 гг. был профессором в Берлине и оттуда своими учеными трудами и педагогической деятельностью значительно повысил в Германии интерес к чистой геометрии. В частности к нему восходит немецкая новая синтетическая школа геометров, обломки которой все еще существуют и которая по возможности избегает всякого отношения к аналитическим формулам. Главнейшими работами Штейнера являются следующие:

1832 г.: Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander).

1833 г.: Геометрические построения, произведенные с помощью прямой линии и некоторого неподвижного круга (Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und Eines festen Kreises).

1881/82 гг.: Работы Штейнера (Steiners Werke, 2 тома), изданные Вейерштрассом (Weierstraß).

Затем еще изданы лекции Штейнера по синтетической геометрии, именно:

Часть I Гейзером (Geiser) в Цюрихе: Теория конических сечений в элементарном изложении (Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, 3 издание, Лейпциг 1887).

Часть II Шретером (Schröter) в Бреславле: Теория конических сечений, основанная на проективных свойствах [Die Theorie der Kegel-

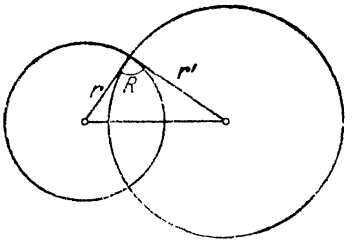
schnitte gestützt auf projektive Eigenschaften, 2 издание, Лейпциг 1876 г., 3 издание *Р. Штурм* (R. Sturm), Лейпциг 1898 г.][1]).

§ 9. Элементарная геометрия круга.

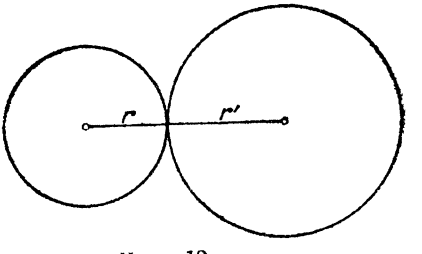
Теперь, после исторического обзора, мы переходим к изложению элементарной теории кругов, как мы ее находим, например, в упомянутой работе Плюкера. Уравнение окружности с центром в точке α, β и радиусом r в прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0.$$

Левая часть этого уравнения, которую мы обозначим для краткости через S, допускает простое геометрическое истолкование. Проведем из точки x, y касательную к окружности, определяемой этим уравнением. *Тогда S является квадратом длины отрезка этой касательной*



Черт. 11.



Черт. 12.

от точки x, y до точки прикосновения. Это выражение S можно назвать, следуя Штейнеру, *„степенью" точки x, y относительно окружности*; его можно представить также в следующем виде:

$$S=x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+C,$$
$$C=\alpha^2+\beta^2-r^2.$$

Мы отметим здесь, прежде всего, некоторые формулы, которыми воспользуемся в дальнейшем.

1. Две окружности $S=0$ и $S'=0$ пересекаются между собой ортогонально (черт. 11), если выполнено следующее условие:

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'-C-C'=0.$$

2. Две окружности касаются (черт. 12), если имеет место соотношение:

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'-C-C'\pm 2rr'=0,$$
$$r^2=\alpha^2+\beta^2-C,$$
$$r'^2=\alpha'^2+\beta'^2-C'.$$

[1]) Сведения о жизни и личности Штейнера можно почерпнуть из прекрасной речи в его память, произнесенной его родственником, земляком и издателем Гейзером в швейцарском обществе естествоиспытателей в Шафгаузене в 1873 г.

3. Две окружности пересекаются под углом ϑ (черт. 13), если:

$$2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - C - C' \pm 2rr' \cos\vartheta = 0.$$

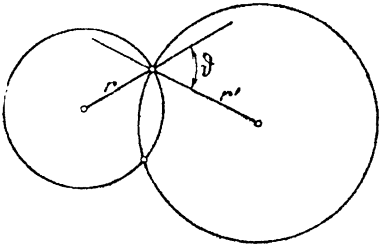
Эти три только что сформулированные условия вытекают из следующих уравнений:

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = r^2 + r'^2, \quad (1)$$

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = (r \pm r')^2, \quad (2)$$

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = r^2 + r'^2 \pm 2rr' \cos\vartheta, \quad (3)$$

справедливость которых видна из вышеприведенных чертежей. Отметим еще, что формула (1), выражающая условие ортогональности, является билинейной относительно постоянных обеих окружностей и что формула (3) содержит, как частный случай, две первые при значениях $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$.



Черт. 13.

Только что приведенные формулы из теории кругов с аналитической точки зрения естественно распадаются на две группы.

Именно, мы можем различать:

1. Элементарные формулы, рациональные относительно α, β, C.

2. Высшие формулы, рациональные относительно α, β, C, r (в которых r входит в нечетной степени)[1]).

В соответствии с этим различают „низшую" теорию кругов, в которую всегда входят только α, β, C, и „высшую", в которой наряду с α, β, C имеется еще и r.

Мы приведем примеры для обеих частей теории кругов, причем начнем с первой, низшей, части теории кругов.

В этой части выдающуюся роль играет *хордаль* (по терминологии Плюкера) или *радикальная ось* (по терминологии Гольтье) (ее так же иногда называют *линией равных степеней*) двух окружностей. Она является геометрическим местом точек, имеющих равные степени относительно двух окружностей; следовательно ее можно представить уравнением $S - S' = 0$. Развертывая, мы получим:

$$2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + C - C' = 0,$$

откуда ясно, что дело идет о прямой линии. С другой стороны, радикальная ось обязательно должна пройти через точки пересечения двух окружностей, так как эти точки имеют одинаковую степень относительно этих окружностей, именно, степень, равную нулю. Следовательно, радикальную ось двух окружностей можно определить так же как линию, соединяющую их точки пересечения. Но это кажущееся

[1]) В §§ 25 и 26 мы поговорим о том, как избежать затруднений, возникающих из-за двойного знака у r, с помощью введения „направленных" или „ориентированных" кругов.

более простым определение теряет свое непосредственное значение, если точки пересечения мнимы.

Основная теорема теории радикальных осей следующая: *радикальные оси, построенные к трем окружностям, взятым попарно, пересекаются в одной точке,* которая называется „радикальным центром" („степенной точкой").

Мы дадим следующее простое аналитическое доказательство этой теоремы.

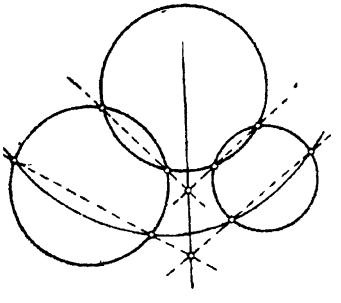
Пусть даны уравнения трех окружностей:

$$S=0, \quad S'=0, \quad S''=0;$$

тогда уравнения двух радикальных осей будут:

$$S=S', \quad S=S''.$$

Но там, где имеют место оба эти уравнения, т. е. в точке пересечения обеих радикальных осей, должно иметь место также и уравнение $S'=S''$; оно как раз и является уравнением третьей радикальной оси, из чего непосредственно заключаем справедливость нашей теоремы. Здесь отчетливо видно, как прост этот метод сокращенных обозначений.



Черт. 14.

Из нашей основной теоремы теперь можно вывести различные прекрасные следствия, например, произвести построение радикальной оси двух окружностей (черт. 14) с мнимыми точками пересечения. Именно, в этом случае просто проводят две окружности, пересекающиеся с данными окружностями в действительных точках; затем проводят хорды, которые являются общими каждой из двух вспомогательных окружностей и данной окружностью. Две точки пересечения первой и второй пары хорд являются точками, через которые должна пройти искомая радикальная ось.

Элементарная теорема о том, что три перпендикуляра, восставленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке, также является частным случаем нашей теоремы. Именно, если мы проведем нуль-окружность или окружность с радиусом, равным нулю (геометрически — окружность, стянувшаяся в точку), то легко видеть, что радикальной осью двух таких окружностей является перпендикуляр, восставленный из середины отрезка, соединяющего обе взятые точки; вследствие этого становится ясным отношение приведенной теоремы к основной теореме теории кругов.

Мы должны теперь познакомиться с важным понятием теории кругов, именно с *понятием пучка окружностей,* которое мы получаем следующим образом:

Если $S'=0$ и $S''=0$ являются уравнениями двух окружностей, то мы образуем еще уравнение

$$S'-\rho S''=0.$$

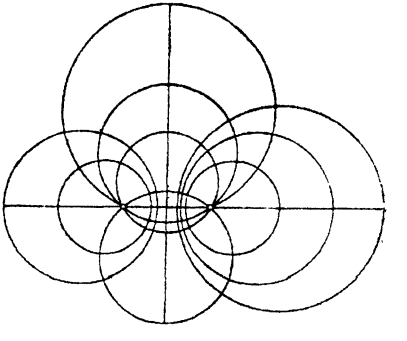
Записывая подробнее, получаем:

$$(1-\rho)(x^2+y^2)-2(\alpha'-\rho\alpha'')x-2(\beta'-\rho\beta'')y+C'-\rho C''=0,$$

откуда видим, что при каждом значении $\rho \neq 1$ это уравнение представляет окружность, координатами которой будут:

$$\bar{\alpha}=\frac{\alpha'-\rho\alpha''}{1-\rho},\quad \bar{\beta}=\frac{\beta'-\rho\beta''}{1-\rho},\quad \bar{C}=\frac{C'-\rho C''}{1-\rho}.$$

Систему всех, таким образом полученных, окружностей называют пучком окружностей. Из уравнения пучка непосредственно следует, что все окружности проходят через две точки пересечения исходных окружностей и что они вследствие этого имеют одну и ту же радикальную ось $S'-S''=0$, которая сама является окружностью пучка. Игнорируя предельные случаи, можно пучок окружностей определить так: *под пучком окружностей понимают систему всех окружностей, проходящих через две общие действительные или мнимые (собственные) точки.*



Черт. 15.

После того, как мы таким образом определили пучок окружностей, докажем следующую важную теорему из теории пучка:

Если какая-нибудь окружность пересекает ортогонально две окружности S' и S'', то она также будет ортогонально пересекать все окружности пучка $S'-\rho S''$.

Доказательство очень простое: если окружность S пересекает ортогонально обе окружности S' и S'', то должны выполняться два условия:

$$C+C'-2\alpha\alpha'-2\beta\beta'=0,$$
$$C+C''-2\alpha\alpha''-2\beta\beta''=0.$$

Из этих двух уравнений, если второе умножить на ρ и вычесть из первого, после деления на $(1-\rho)$ следует:

$$C+\bar{C}-2\alpha\bar{\alpha}-2\beta\bar{\beta}=0.$$

Но последнее уравнение выражает как раз условие того, что окружность S пересекает ортогонально окружность $S'-\rho S''=\bar{S}$. Сущность всего этого доказательства заключается, очевидно, в том, что условие ортогональности является *линейным* относительно постоянных окружности: центр такой ортогональной окружности лежит в какой-нибудь точке радикальной оси.

На основании этого мы можем построить целое семейство окружностей, ортогональное данному пучку. Это новое семейство окружностей образует опять пучок окружностей в изложенном выше смысле, что мы теперь и докажем. Относительно этого мы имеем теорему:

Для каждого пучка окружностей всегда существует другой пучок ортогональных ему окружностей (черт. 15). *Один из этих*

пучков имеет действительные основные точки, другой — мнимые. (В качестве предельного случая получаем два пучка касающихся окружностей.)

Для доказательства этой теоремы мы прежде всего спросим себя, имеются ли в первом пучке нуль-окружности, т. е. окружности с радиусом, равным нулю. Общее условие того, что какая-нибудь окружность является нуль-окружностью, будет очевидно:

$$r^2 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha^2 + \beta^2 - C = 0.$$

Следовательно, если окружность $S' - \rho S'' = 0$ является нуль-окружностью, то необходимо:

$$(\alpha' - \rho\alpha'')^2 + (\beta' - \rho\beta'')^2 - (C' - \rho C'')(1 - \rho) = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно ρ; следовательно, в нашей системе всегда имеется две действительные или мнимые нуль-окружности. Окружности ортогональной системы должны быть так же ортогональны к обеим этим нуль-окружностям; спросим теперь себя: каков геометрический смысл этого?

Для того чтобы две окружности S и S' пересекались ортогонально, должно быть:

$$C + C' - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' = 0.$$

Если S' является нуль-окружностью, то $C' = \alpha'^2 + \beta'^2$. Подставив это, получим:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + C = 0.$$

Это означает не что иное, как то, что точка, изображающая нуль-окружность, лежит „на“ ортогональной окружности. Так как теперь в каждом отдельном пучке находится две нуль-окружности, то все окружности ортогональной системы должны проходить через обе эти фиксированные точки; следовательно, ортогональная система имеет также характерное свойство пучка окружностей.

Этим доказана первая часть нашей теоремы; вторая часть будет непосредственно ясна, если начертить два таких пучка окружностей.

На этом мы оставим наши рассмотрения и заметим только, что целый ряд известных теорий — учение о центрах подобия, об общих касательных двух окружностей, задача Аполлония и т. д. — принадлежит ранее упомянутой „высшей“ части теории кругов; действительно, в соответствующих формулах встречаются радиусы рассматриваемых окружностей, как таковые.

§ 10. Преобразования посредством обратных радиусов (инверсия).

Продолжая наши элементарные рассмотрения окружностей, мы перейдем теперь к теории „взаимных полюсов“, которые мы определим следующим образом (черт. 16):

Две точки ξ, η и ξ', η' *называются взаимными относительно некоторой окружности, если они, будучи рассмотрены как окружности с радиусом, равным нулю, принадлежат тому же пучку, как и основная окружность.*

Если

$$x^2+y^2-r^2=0$$

— уравнение основной окружности и

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=0,$$
$$(x-\xi')^2+(y-\eta')^2=0$$

— уравнения обоих полюсов, рассматриваемых как окружности с радиусами, равными нулю, то мы в качестве условия взаимности точек ξ, η и ξ', η' находим:

$$\xi'=r^2\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad \eta'=r^2\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

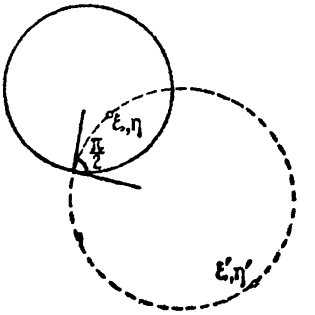
Что это условие справедливо, ясно из следующего небольшого вычисления.

Если мы подставим эти значения ξ' и η' в уравнение окружности нулевого радиуса ξ', η', то получим:

$$\{x(\xi^2+\eta^2)-r^2\xi\}^2+\{y(\xi^2+\eta^2)-r^2\eta\}^2=0$$

или, после деления на $\xi^2+\eta^2$:

$$(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2)-2r^2x\xi-2r^2y\eta+r^4=0.$$



Черт. 16.

Последнее уравнение должно быть линейной комбинацией двух первых уравнений окружностей, если справедливо вышеизложенное условие. Но этого очень легко добиться, потому что его можно представить в следующей форме:

$$(\xi^2+\eta^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)+r^2(x^2+y^2-2\xi x-2\eta y+\xi^2+\eta^2)=0.$$

Из нашей изложенной ранее теории пучка окружностей можно теперь вывести следующее предложение:

Каждая окружность, проходящая через два взаимных полюса, пересекает основную окружность ортогонально (черт. 16). Именно, так как окружность проходит через оба взаимных полюса, то она пересекает их, если рассматривать их как окружности нулевого радиуса, ортогонально. Следовательно, она пересекает ортогонально две окружности пучка, к которому принадлежат взаимные полюсы в качестве основных точек; поэтому она ортогональна всем окружностям этого пучка, следовательно также и основной окружности.

К окружностям, проходящим через взаимные полюсы, принадлежит, разумеется, также и соединяющая их прямая, которая вследствие только что сформулированной теоремы должна проходить через центр основной окружности. Между отрезками этой прямой, ограниченными с одной стороны центром основной окружности, с другой — взаимными полюсами, устанавливается простое соотношение, а именно, их произведение постоянно и равно r^2:

$$(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)=r^4$$

Справедливость этого уравнения непосредственно следует из формул, устанавливающих соотношение между ξ, η и ξ', η'. На нем основывается часто употребляемое выражение: наши взаимные полюсы ставятся друг другу в соответствие по „принципу обратных радиусов".

Элементарные рассмотрения теории кругов получили особенное развитие с тех пор, как стали рассматривать это соответствие в качестве преобразования, и с тех пор, как произвели исследование того, как движется один из двух взаимных полюсов, если другой заставить пробегать наперед заданную кривую. Такое рассмотрение было впервые применено Плюкером в Креллевском журнале, т. 11, 1831, чему затем последовали другие геометры. Все же эти рассмотрения только позднее, в 1845 г., впервые обратили на себя всеобщее внимание, когда Вильям Томсон (лорд Кельвин) указал в 10 томе журнала Лиувилля на важность этого преобразования для теории потенциала.

Мы познакомимся теперь с некоторыми важными свойствами этого „сродства" (преобразования).

1. Напомним, прежде всего, что это преобразование называется так же „инволюционным", что означает ни больше, ни меньше как то, что оно является взаимным. Именно, с помощью этого отображения каждой точке плоскости соответствует некоторая другая точка, которой посредством этого отображения соответствует опять первая точка. При этом внутренние точки основного круга соответствуют внешним его точкам. Поэтому говорят даже о *зеркальном отображении* относительно основного круга.

Только центру основного круга не соответствует никакой точки. Если мы заставим некоторую точку непрерывно перемещаться к центру круга, то ее образ будет непрерывно отходить все дальше и дальше от круга и наконец уйдет в бесконечность; притом в направлении, противоположном тому направлению, в котором взаимная точка приближается к центру основного круга. Сам центр круга является образом бесконечно удаленного. Отсюда возникает выражение *что плоскость имеет только одну бесконечно удаленную (или несобственную)* точку. Но этим высказыванием ничего не утверждается относительно природы бесконечно удаленного: оно является только кратким выражением того, что бесконечно удаленное при инверсии ведет себя так, как если бы это была одна единственная точка. Благодаря этому обороту речи преобразование посредством обратных радиусов можно рассматривать как всюду *без исключения* взаимно однозначное. Точно такой же смысл сокращенного оборота речи имеет для проективной геометрии фраза: бесконечно удаленные точки плоскости образуют (бесконечно удаленную) прямую линию. Последняя имеет в качестве образа прямую линию, если преобразовывать ее с помощью центральной проекции.

2. Второе важное свойство нашего преобразования заключается в том, что окружность при этом преобразовании переходит опять в некоторую окружность; поэтому оно называется также „сродством окружностей". В справедливости этого утверждения можно убедиться простым вычислением.

Если α, β, C — постоянные первоначальной окружности, то постоянные преобразованной окружности, как легко видеть, будут иметь следующие значения:

$$\alpha' = \frac{r^2\alpha}{C}, \quad \beta' = \frac{r^2\beta}{C}, \quad C' = \frac{r^4}{C},$$

где r означает радиус круга инверсии, а C и C' являются степенями, которые центр инверсии имеет относительно обеих рассматриваемых окружностей. Между радиусами соответствующих окружностей имеет место соотношение:

$$\rho'^2 = \frac{r^4}{C^2}\rho^2.$$

3. Если окружность проходит через центр основной окружности, то она преобразуется в прямую линию, так как тогда третья постоянная, следовательно так же и радиус преобразованной окружности обращаются в бесконечность. Таким образом прямую линию можно считать за некоторую окружность, содержащую несобственную точку; тем самым опять подтверждается, что мы имеем право говорить в нашей области о единственной несобственной точке.

4. Степень S какой-нибудь точки относительно некоторой окружности связана со степенью S' преобразованной точки относительно преобразованной окружности посредством следующей формулы:

$$S' = \frac{r^4}{C(\xi^2+\eta^2)}S,$$

в чем можно убедиться с помощью соответствующего вычисления, как и в пункте 2. Это соотношение можно записать иначе

$$\frac{S'}{\rho'} = \pm\frac{r^2}{\xi^2+\eta^2}\frac{S}{\rho},$$

откуда вытекает следующее предложение:

Величина $S:\rho$ приобретает при инверсии некоторый множитель, имеющий одно и то же значение для всех окружностей плоскости. Двойной знак в нашей формуле необходим, так как может случиться, что S и S' будут иметь различные знаки (ρ и ρ' мы понимаем всегда в обычном смысле — как положительные). Для самого основного круга, который при преобразовании переходит сам в себя, имеет место соотношение:

$$S' = -\frac{r^2}{\xi^2+\eta^2}S.$$

В этом случае всегда должен стоять знак минус, так как S для внешних точек является положительным, для внутренних отрицательным. Попутно обращаем внимание на то, что уравнение окружности, имеющее действительные коэфициенты, может (иногда) представлять круг с чисто мнимым радиусом, т. е., как мы будем говорить, „*нулевой*“ круг. Несмотря на это, соответствующее преобразование посредством обратных радиусов даже и в этом случае остается действительным. Так,

например, для окружности $x^2+y^2=-1$ формулами преобразования будут:

$$\xi'=-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad \eta'=-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

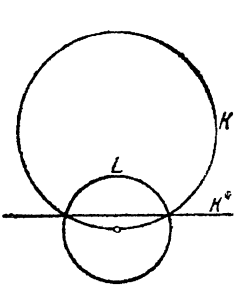
откуда ясно, что это преобразование отличается от преобразования, осуществляемого посредством окружности $x^2+y^2=1$, только тем, что координаты соответствующих точек имеют обратные знаки. Поэтому мы имеем предложение:

Нулевой круг также дает действительное преобразование посредством обратных радиусов; разница только в том, что образы данных точек будут повернуты на угол π вокруг центра инверсии сравнительно с положением, определяемым преобразованием посредством действительного круга.

5. Наконец отметим еще одно свойство нашего преобразования, именно свойство *сохранения углов*, вследствие чего это преобразование называют также *конформным* (или *сохраняющим углы*). Как раз в этом и заключается важность нашего преобразования для теории функций. Чтобы доказать это свойство, мы не обязаны рассматривать произвольные кривые, а можем ограничиться только окружностями, так как в точках пересечения произвольные кривые пересекаются под теми же самыми углами, как и касающиеся их в этих точках окружности.

Если α_1, β_1, C_1 и α_2, β_2, C_2 — постоянные двух окружностей, ρ_1, ρ_2 — их радиусы, то косинус угла, под которым пересекаются эти окружности, по § 9 (3) будет иметь следующее значение:

$$\cos\varphi=\frac{2\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2-C_1-C_2}{2\rho_1\rho_2}.$$



Черт. 17.

Если мы подставим в эту формулу выражения наших постоянных через постоянные преобразованных окружностей (см. 2), то после упрощений получим:

$$\cos\varphi=\frac{2\alpha_1'\alpha_2'+2\beta_1'\beta_2'-C_1'-C_2'}{2\rho_1'\rho_2'},$$

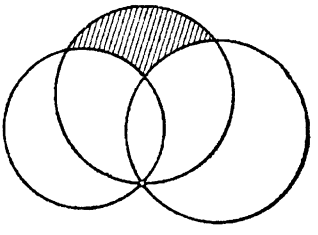
что и требовалось доказать.

Мы перейдем теперь к тому, чтобы дать некоторые применения теории взаимных полюсов. Прежде всего, с помощью этой теории возможно каждую окружность преобразовать в прямую линию и благодаря этому очень часто достигаются упрощения. Для этой цели следует только центр инверсии взять на самой окружности (черт. 17). При этом взаимные полюсы переходят в точки, симметрично расположенные относительно прямой.

Этим правилом особенно удобно пользоваться в случае нескольких окружностей, проходящих через одну точку, причем, разумеется, эту точку надо взять за центр инверсии. Так, например, из этого метода непосредственно следует, что треугольник, ограниченный тремя дугами,

проходящими через одну точку трех окружностей, имеет сумму углов равную π. На чертеже 18 такой треугольник заштрихован.

Мы теперь укажем на другое применение, имеющее большое практическое значение, именно: *„прямило" Поселье* (Peaucellier), опубликованное в форме задачи в „Nouvelles Annales de mathèmatiques" в 1864 г. В практической механике проще всего осуществляется круговое движение; но так как очень часто бывает необходимо так же и прямолинейное движение, то в кинематике механизмов возникает важная „задача выпрямления движения", т. е. задача превращения кругового движения в прямолинейное. На практике часто довольствуются приближенным выпрямлением движения, например, в *параллелограме Уатта* конец поршневого штока двигается взад и вперед по растянутому куску некоторой 8-образной кривой. В противоположность этому Поселье впервые дал способ точного выпрямления движения.



Черт. 18.

Главная составная часть его прибора для осуществления прямолинейного движения называется „инверсором", потому что она простейшим образом осуществляет преобразование инверсии. Инверсор состоит из двух стержней одинаковой длины, которые скреплены друг с другом в точке O (черт. 19); между ними находится ромбическая система стержней. Во всех местах скрепления стержней находятся шарниры, так что вся система подвижна. Если теперь закрепить точку O и произвольно двигать одну из вершин ромба P, то другая вершина P' будет всегда занимать положение, инверсное к P. Именно, если воспользуемся данными на чертеже обозначениями, то получим:

$$a \sin\varphi = b \sin\psi,$$

и отсюда

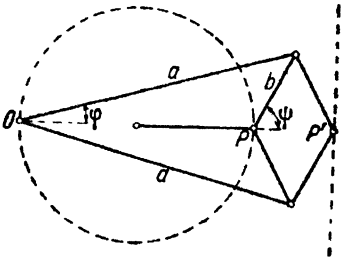
$$a^2 \sin^2\varphi - b^2 \sin^2\psi = 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} OP &= a\cos\varphi - b\cos\psi \\ OP' &= a\cos\varphi + b\cos\psi \\ \hline OP \cdot OP' &= a^2\cos^2\varphi - b^2\cos^2\psi. \end{aligned}$$

Если сложим с предыдущим уравнением, то получим

$$OP \cdot OP' = a^2 - b^2.$$



Черт. 19.

Следовательно, наш инверсор осуществляет преобразование посредством взаимных радиусов относительно круга, описанного из точки O радиусом $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Теперь уже легко получить прямолинейное движение, так как для этого надо только позаботиться, чтобы точка P описала окружность, проходящую через точку O; тогда P' опишет прямую линию. Чтобы этого достигнуть, берут еще седьмой стержень, один конец которого

закрепляют в точке P, а другой в середине отрезка OP. С помощью такого приспособления точка P будет, очевидно, двигаться по окружности, проходящей через точку O. Чтобы не получилось неверного представления об этом приборе, мы отметим еще, что прибор работает таким образом, что точка P двигается взад и вперед только по некоторой дуге окружности, а точка P' — по соответствующему отрезку прямой.

Кроме прибора Поселье имеются еще другие приборы, разрешающие ту же задачу, о чем можно прочесть у Кемпе в книге „Как провести прямую линию“ (Kempe, How to draw a straight line, London, Macmillan 1877)[1]).

Теперь, после этого введения, мы перейдем к так называемым пентасферическим координатам, которые получили свое название по тому, что в основе координатоопределения лежат пять шаров. Соответствующие круговые координаты на плоскости называются „тетрациклическими“.

§ 11. Пентасферические координаты.

Мы заметим предварительно, что все, что мы до сих пор говорили относительно кругов, аналогичным же образом имеет место и относительно шаров. Чтобы определить наши координаты, мы положим в основу пять шаров. Тогда, если S_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ будут пятью степенями точки относительно положенных в основу шаров, то пентасферические координаты, или вернее их отношения (только о них и идет речь), выразятся уравнениями:

$$\sigma x_i = k_i S_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

где k_i обозначают произвольные постоянные, а σ — коэфициент пропорциональности ($k_i \neq 0$, $\sigma \neq 0$).

Итак, пентасферические координаты являются *однородными* и в силу того, что их *пять*, т. е. больше необходимого числа координат, они оказываются связанными некоторым однородным условием $\Omega = 0$, которое мы найдем позднее. Если мы подробнее напишем выражения S_i, то получим уравнения следующего вида:

$$\sigma x_i = a_i(x^2 + y^2 + z^2) + b_i x + c_i y + d_i z + e_i.$$

Теперь мы предположим, что определитель $|abcde|$ отличен от нуля и что, следовательно, между уравнениями пяти шаров не существует никакой линейной зависимости. Сделав такое предположение, мы можем разрешить эти пять уравнений, рассматривая в качестве неизвестных σ, $(x^2 + y^2 + z^2)$, x, y, z. В результате мы получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{Z_1}{N}, \quad x = \frac{Z_2}{N}, \quad y = \frac{Z_3}{N}, \quad z = \frac{Z_4}{N},$$

[1]) Более новой работой об этом предмете является книга G. Hessenberg, Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft, Württembergische Gesellschaft, 1924. Гессенберг родился в 1874 г. в Франкфурте на Майне и умер в 1925 г. профессором технической школы в Шарлоттенбурге. О шарнирных системах см. G. Königs, Lecons de Cinématique, Paris 1897, Кар. 11.

где числитель и знаменатель являются однородными линейными функциями x_4. Одновременно из этих решений получается упомянутое соотношение $\Omega = 0$ в виде:

$$Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 - NZ_1 = 0.$$

Итак, пентасферические координаты связаны некоторым однородным уравнением второй степени.

Теперь мы можем везде вместо обычных координат ввести пентасферические координаты; например, уравнение сферы

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

в пентасферических координатах будет:

$$AZ_1 + BZ_2 + CZ_3 + DZ_4 + EN = 0.$$

Таким образом каждая сфера представляется *линейным* уравнением между пентасферическими координатами; обратно, каждое линейное уравнение между пентасферическими координатами представляет сферу, причем точка и плоскости рассматриваются как частные случаи, именно как сферы с радиусами 0 и ∞.

Очень часто в основу пентасферической системы координат кладут пять попарно ортогональных сфер. Поэтому мы должны раз навсегда выяснить, как такие пять ортогональных сфер, которые мы предполагаем все действительными (т. е. предполагаем, что их уравнения имеют действительные коэфициенты), располагаются в пространстве, сколько из них будут иметь действительные радиусы, сколько — чисто мнимые радиусы. В связи с этим мы установим следующее предложение:

Из пяти действительных ортогональных сфер всегда одна необходимо является нулевой сферой, а четыре остальных — сферами с действительными радиусами.

Доказательство этого предложения расчленяется следующим образом. Прежде всего легко доказать, *что вообще никогда две различные действительные нулевые сферы*[1]) *не могут быть друг к другу ортогональны.* Потому что, если α, β, γ, ρ и соответственно α', β', γ', ρ' являются координатами центров и радиусами двух сфер, то в качестве условия их ортогональности имеет место соотношение:

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = \rho^2 + \rho'^2.$$

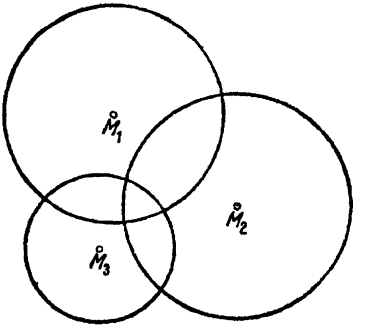
Но для двух нулевых сфер правая часть этого уравнения будет отрицательна, в то время как левая часть остается всегда положительной, что несовместимо. Следовательно, мы заключаем, что среди пяти наших ортогональных сфер по крайней мере четыре должны иметь действительные радиусы.

Остается показать, что с другой стороны пятая сфера необходимо является нулевой. Для этой цели представим себе плоскость, проходящую через центры трех сфер с действительными радиусами; она

[1]) Т. е. сферы с действительными коэфициентами и мнимыми радиусами. *Прим. ред.*

пересекает эти сферы по трем попарно ортогональным большим кругам. Из чертежа 20 видно, что три соответствующие сферы пересекаются в двух действительных точках. Одну из этих точек мы возьмем за центр инверсии и произведем преобразование посредством обратных радиусов; в силу этого преобразования три сферы перейдут в три попарно перпендикулярные плоскости, которые мы положим в основу координатной системы x, y, z. Следовательно, уравнения этих плоскостей будут просто: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. Что же представляют собой теперь, после преобразования, две остальные сферы нашей системы. Центры четвертой и пятой ортогональных сфер должны непременно лежать в начале координат, вследствие чего их уравнения будут:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a'^2.$$



Черт. 20.

Если теперь обе последние сферы так же взаимно ортогональны, то из общего условия ортогональности мы получаем:

$$0 = a^2 + a'^2.$$

В качестве a^2 мы можем взять любое положительное число. Поэтому уравнением пятой сферы будет:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -a^2,$$

которое действительно представляет нулевую сферу. *Но из этой специальной системы пяти ортогональных сфер посредством инверсии можно вновь получить самую общую систему*, для которой поэтому наше утверждение можно считать доказанным; именно, из пяти сфер с действительными коэфициентами всегда одна и только одна является нулевой.

Относительно таких пяти сфер мы определим теперь пентасферические координаты следующим образом (ρ_i радиусы):

$$\sigma x_i = \frac{S_i}{\rho_i}.$$

Тогда перед нами прежде всего возникает вопрос о тождестве $\Omega = 0$ *между пятью координатами* x_i. Чтобы его найти, мы вернемся опять к нашей специальной форме пяти ортогональных сфер, которые мы получим посредством инверсии, и выясним, что следует понимать под выражением $S : \rho$, если одна из сфер вырождается в плоскость. Мы узнаем это посредством перехода к пределу. Возьмем, например, вместо y, z-плоскости сферу с конечным радиусом, касающуюся y, z-плоскости в начале координат, с центром, лежащим вследствие этого на оси x, скажем на положительной ее части; образуем для нее выражения $S_i : \rho_i$ и заставим радиус неограниченно возрастать. Уравнением сферы является уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x = 0,$$

а выражение $S : \rho$, следовательно, будет:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho} - 2x.$$

Тогда для $\lim \rho = \infty$ получаем:

$$\lim \frac{S}{\rho} = -2x$$

как степень точки относительно y, z-плоскости. Подобным же образом в качестве предельного значения мы могли бы получить $+2x$; именно, в том случае, когда центр вспомогательной сферы берется на отрицательной части оси x и по ней неограниченно удаляется в бесконечность. Итак, можно сказать: *если одна из ортогональных сфер становится плоскостью, то величина $S : \rho$ переходит в двойное расстояние точки пространства от плоскости, взятое с произвольным знаком.*

Поэтому в нашей специальной системе ортогональных сфер мы следующим образом введем пентасферические координаты:

$$\sigma x_1 = \pm 2x,$$

$$\sigma x_2 = \pm 2y,$$

$$\sigma x_3 = \pm 2z$$

$$\sigma x_4 = \frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{\pm a}$$

$$\sigma x_5 = \frac{x^2+y^2+z^2+a^2}{\pm a\sqrt{-1}}.$$

Теперь из этих формул легко получить результат:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

Пентасферические координаты, введенные нами для простейшего случая, удовлетворяют тому условию, что сумма их квадратов равна нулю.

Каково же будет это тождество для общей системы пяти ортогональных сфер. Относительно общей системы мы так же полагаем пентасферические координаты пропорциональными $S_i : \rho_i$. Но при рассмотрении преобразования посредством обратных радиусов мы видели, что

$$\frac{S_i'}{\rho_i'} = \frac{S_i}{\rho_i} M,$$

где M обозначает множитель пропорциональности. Таким образом получается простое отношение:

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5.$$

Отсюда немедленно следует предложение о том, что найденное тождество

$$\sum_1^5 x_i^2 = 0,$$

от случая нашей специальной ортогональной системы пяти сфер переносится без изменения на самую общую ортогональную систему пяти сфер.

Резюмируем вкратце: в нашей системе координат пяти ортогональных сфер имеют место два следующих соотношения для координат:

$$\sigma x_i = \frac{S_i}{\rho_i} \tag{1}$$

и

$$\sum_1^5 x_i^2 = 0. \tag{2}$$

§ 12. Применения пентасферических координат.

Применение введенных выше пентасферических координат оказывается весьма целесообразным в большинстве исследований, относящихся к сферам.

Сейчас мы вкратце остановимся на формулах, относящихся к некоторым основным задачам; их можно легко доказать, если вернуться к рассмотренной выше специальной системе координат и затем показать, что полученные формулы остаются справедливыми и после выполнения произвольной инверсии.

1. Уравнение произвольной сферы имеет вид:

$$\sum_1^5 \alpha_k x_k = 0,$$

следовательно является линейным в координатах. Обратно, всякое подобное уравнение представляет сферу; разумеется, все α_k не должны одновременно обращаться в нуль.

2. Если дана еще вторая сфера

$$\sum_1^5 \alpha'_k x_k = 0,$$

то формула

$$\sum_1^5 \alpha_k \alpha'_k = 0$$

дает условие ортогонального пересечения обеих сфер.

3. Сфера вырождается в точку (в сферу с радиусом, равным нулю), если

$$\sum \alpha_k^2 = 0.$$

Тогда величины α_k являются как раз пентасферическими координатами этой точки.

4. Пусть заданы сфера

$$\sum \alpha_k x_k = 0$$

и некоторая произвольная точка x_i. Координаты x'_i взаимного с x_i полюса определяются тогда посредством уравнений:

$$\sigma x'_i = x_i \sum_1^5 \alpha_k^2 - 2\alpha_i \sum_1^5 \alpha_k x_k.$$

5. Какой же вид примут в частности последние уравнения, если требуется определить взаимный с точкой x_i полюс относительно сферы координатной системы. Для этого мы должны в этой формуле просто положить одно из α_k равным единице, а остальные равными нулю. Полюс точки относительно сферы координатной системы получается переменой знака у соответствующего x на обратный.

6. Дальнейшие формулы основываются на введении несобственной точки, которой приписывают координаты $1 : \rho_k$, причем

$$\sum \left(\frac{1}{\rho_k}\right)^2 = 0.$$

Отсюда вытекает:

7. Сфера является плоскостью, если

$$\sum \frac{\alpha_k}{\rho_k} = 0,$$

т. е. если она содержит несобственную точку.

8. Радиус произвольной сферы $\sum \alpha_k x_k = 0$ определяется по формуле

$$\rho^2 = \frac{\sum \alpha_k^2}{\left(\sum \frac{\alpha_k}{\rho_k}\right)^2}.$$

На основании предложений 3 и 7 правая часть будет равняться 0 или ∞ в зависимости от того, имеем ли мы дело со сферой нулевого радиуса или же с плоскостью.

Сделаем опять некоторые исторические замечания. Пентасферические координаты были введены в математику главным образом Дарбу в 1873 г. в его работе: „Об одном замечательном классе алгебраических кривых и поверхностей...“ (Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques...). Но его исследования восходят все же к 1869—70 г., когда Клейн и Ли имели тесный контакт с Дарбу. В связи с этим Клейн и Ли в исследованиях, относящихся к этому времени (как, например, в Math. Annalen, т. 5), также нередко пользуются по существу пентасферическими координатами.

Дарбу (родился в 1842 г. в Ниме) был с 1878 г. профессором высшей геометрии в Сорбонне в Париже. Эта кафедра была в свое время (в 1846 г.) основана для Шаля, после смерти которого (в 1880 г.)

она перешла к Дарбу. Выдающейся чертой преподавания Дарбу являлась чрезвычайная многосторонность, с которой он рассматривал все части геометрии. Показателем этого может служить его часто упоминаемая книга: „Общая теория поверхностей", а затем работы его многочисленных учеников, как, например, Кенигса, Гишара, Коссера и Демулена. Дарбу умер в 1917 г.[1]).

В его вышеупомянутой работе от 1873 г. рассматриваются главным образом: 1. циклические кривые, 2. циклиды.

Мы будем говорить только о последних — ведь циклические кривые являются просто аналогом циклид на плоскости и соответственно этому их лучше всего рассматривать в тетрациклических координатах. Циклиды вообще определяются посредством уравнения второй степени между пентасферическими координатами. Но мы знаем, что пентасферические координаты определяются как линейные формы следующих величин:

$$x^2+y^2+z^2,\quad x,\ y,\ z,\ 1.$$

Следовательно, циклиды можно рассматривать как такие поверхности, которые изображаются уравнением второй степени между этими величинами; в соответствии с этим общая форма их уравнения в обычных координатах будет иметь вид:

$$A(x^2+y^2+z^2)^2+B(x^2+y^2+z^2)x+\ldots+$$
$$+Ex^2+Fxy+\ldots+N=0.$$

Отсюда мы видим, что циклиды являются, вообще говоря, поверхностями четвертого порядка. В частном случае, когда коэфициент A равен нулю, мы имеем дело с поверхностью третьего порядка; но так как еще и коэфициенты при членах третьего порядка могут обращаться в нуль, то все поверхности второго порядка также принадлежат к циклидам в качестве весьма специального случая. Помимо уравнения второй степени $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=0$, определяющего циклиду в пентасферических координатах, имеется еще (так же квадратичное) тождество $\Omega(x_1,\ldots,x_5)=0$, всегда связывающее эти координаты. Теперь возникает задача о приведении этих уравнений к нормальной форме посредством надлежащего перехода к новым переменным с помощью линейной подстановки, — задача, возникающая каждый раз, когда имеются два квадратичных уравнения между одними и теми же переменными, имеющимися в произвольном количестве. В качестве подобной нормальной формы мы возьмем:

$$F_2=\frac{y_1^2}{a_1}+\frac{y_2^2}{a_2}+\frac{y_3^2}{a_3}+\frac{y_4^2}{a_4}+\frac{y_5^2}{a_5}=0,$$
$$\Omega=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2=0.$$

Необходимо оговорить, что соответствующее этой нормальной форме преобразование возможно только „вообще говоря"; о том, как дело

[1]) Биографические данные см. в некрологах Гильберта и Эйзенхарта, Acta Mathematica, том 42 (1920) и Фосса в Jahrbuch der Bayrischen Akademie, 1917.

будет обстоять в специальных случаях, мы скажем позднее на стр. 374 и следующих. Система пентасферических координат, лежащая в основе „канонической" формы обоих уравнений, как раз и является такой системой пяти ортогональных сфер, свойства которой мы только что изучали.

Это преобразование к канонической форме позволяет нам удобным образом исследовать свойства отдельных циклид; в частности это побуждает нас ближе рассмотреть следующую систему поверхностей:

$$\sum_{1}^{5} \frac{y_k^2}{\alpha_k - \lambda} = 0.$$

Это уравнение кажется на первый взгляд совершенно сходным с рассмотренным выше уравнением конфокальных поверхностей второй степени; в соответствии с этим мы будем называть семейство поверхностей, заданное посредством последнего уравнения при переменном λ „конфокальными" циклидами. Ближайшим вопросом является вопрос о том, как много этих поверхностей проходит через заданную точку y пространства. Если развернуть это уравнение, освободившись от знаменателя, то получится многочлен относительно λ, начинающийся с члена

$$y_1^2 (\alpha_2 - \lambda)(\alpha_3 - \lambda)(\alpha_4 - \lambda)(\alpha_5 - \lambda).$$

Таким образом с первого взгляда кажется, что получается уравнение четвертой степени относительно λ. Но оказывается, что коэфициент при λ^4 равняется как раз $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_5^2$ и исчезает в силу условия $\Omega = 0$, так что фактически мы получаем для λ уравнение только третьей степени. Отсюда вытекает предложение: *система конфокальных циклид обладает тем свойством, что через каждую точку пространства проходит в точности три поверхности, аналогично тому, как мы это видели в случае конфокальной системы F_2 поверхностей второй степени.*

На основании канонической формы, к которой мы, вообще говоря, привели уравнение циклид, мы можем теперь доказать с помощью установленных для пентасферических координат формул, *что конфокальные циклиды взаимно ортогональны. Семейство конфокальных циклид является новой тройной ортогональной системой в пространстве, в которой как частный случай содержится система конфокальных поверхностей второй степени F_2.*

Эта новая ортогональная система была введена в 1864 г. одновременно Мутаром и Дарбу (см. Comptes rendus этого года).

Что касается дальнейшей литературы по этому предмету, то мы ограничимся указанием на лекции Клейна, прочитанные в зимнем семестре в 1889/90 г. о функциях Ламэ, а также на премированную работу Бохера, Геттинген 1891 г. Там, наряду с точными ссылками, имеется вся теория конфокальных циклид со всеми специальными случаями.

§ 13. Циклиды Дюпена.

Среди общих циклид, которые мы до сих пор рассматривали, особое место занимают так называемые *циклиды Дюпена*, к которым и относятся модели, появившиеся в Бриллевском издательстве (Дармштадт). Об их общем определении мы будем говорить в ближайшем будущем; сначала постараемся составить себе ясное представление об их виде. Следует различать циклиды Дюпена с двумя действительными узловыми точками и циклиды Дюпена без действительных узловых точек.

1. *Циклиды Дюпена с двумя действительными узловыми точками.* О них легко можно получить наглядное представление, если вообразить их возникающими путем инверсии из обычного круглого конуса. В частности, действительные узловые точки получаются в силу инверсии из вершины круглого конуса (двойного конуса) и из несобственной точки пространства. В зависимости от того, будет ли центр инверсии лежать внутри, вне или на самом конусе, нам приходится различать три подтипа циклид, из которых последний очевидно является промежуточным между двумя остальными. В первом случае мы получаем так называемые *веретенообразные циклиды*, которые состоят из двух полостей, лежащих одна внутри другой и смыкающихся в обеих узловых точках. Во втором случае мы получаем *роговидные циклиды*, у которых полости лежат одна вне другой. Наконец, в третьем случае мы имеем *параболические роговидные циклиды*, которые простираются в бесконечность и которые являются впрочем поверхностями лишь третьего порядка.

Все эти поверхности в соответствии со своим происхождением из кругового конуса обладают особенно простыми свойствами. Именно, прежде всего обратим наше внимание на касательные плоскости круглого конуса; при инверсии из этих плоскостей возникают сферы, которые будут касаться циклиды вдоль окружностей в соответствии с касанием плоскостей вдоль прямолинейных образующих конуса. Сверх того, все эти окружности и сферы должны проходить через обе узловые точки. В случае роговидных циклид среди этих сфер имеются две плоскости, которые в случае параболической циклиды сливаются в одну плоскость, а в случае веретенообразных являются мнимыми.

Но эта система окружностей никоим образом не является единственной на циклидах Дюпена. Представим себе, например, сферу любого радиуса, положенную в одну из полостей круглого конуса; эта сфера будет касаться конуса вдоль некоторой окружности, пересекающей прямолинейные образующие под прямым углом. Из этой сферы и ее окружности прикосновения после инверсии опять получается сфера, касающаяся циклиды Дюпена вдоль некоторой окружности. И если мы представим себе радиус сферы переменным, *то мы получим на конусе известное семейство окружностей, которому на циклиде Дюпена будет соответствовать второе семейство окружностей, состоящее из линий прикосновения со вторым семейством сфер. И, как мы это уже отметили, второе семейство окружностей будет ортогонально первому семейству, так что оба семейства окружностей образуют*

ортогональную систему на циклиде. Нетрудно видеть, и это мы еще докажем (*на стр.* 116), *что оба семейства окружностей образуют в то же время систему линий кривизны на нашей поверхности.*

В случае веретенообразных циклид среди сфер этого второго семейства имеются две действительные плоскости, которые опять сливаются в промежуточном случае и отсутствуют (или, лучше сказать, являются мнимыми) в случае роговидных циклид.

2. *Циклиды Дюпена без действительных узловых точек.* Эта поверхность, вообще говоря, имеет вид кольцеобразной поверхности, причем, в частности, может получиться при надлежащей инверсии параболическая форма (параболическая кольцеобразная циклида), которая простирается в бесконечность. Свойства, которые мы установили в случае циклид с двумя действительными узловыми точками, мы можем установить так же и для циклид с мнимыми узловыми точками. Опять же имеется два семейства сфер, из которых каждая касается циклиды вдоль некоторой окружности. При этом одно семейство сфер заполняет, так сказать, внутренность циклиды, в то время как другое покрывает внешнюю область.

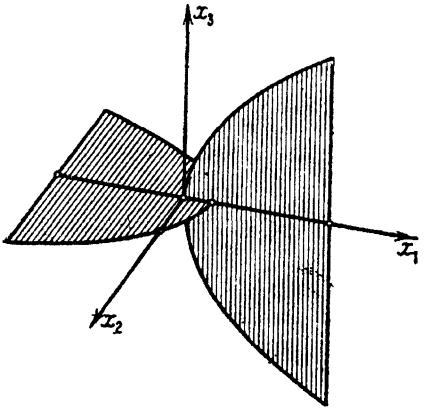
Каков же общий способ получения всех подобных циклид. Если взять три сферы, расположенные одна вне другой, то, очевидно, мы можем представить себе целое семейство сфер, касающихся извне трех заданных сфер. Это семейство сфер в качестве огибающей имеет некоторую кольцеобразную поверхность, принадлежащую ко второму типу циклид Дюпена. Это построение, являвшееся исходной точкой исследований Дюпена, при надлежащем понимании имеет место вообще для всех циклид Дюпена. Ведь дело идет о том, чтобы построить все сферы, касающиеся надлежащим образом трех заданных сфер. Далее Дюпен показывает, что эта же поверхность огибается еще вторым семейством сфер, к которому принадлежат сами три вначале заданные сферы.

Вообще, поверхности, образованные как огибающие некоторого семейства сфер, называются „трубчатыми поверхностями“ или „каналовидными поверхностями“; при этом радиус сфер может быть постоянным или изменяться по определенному закону. *Поэтому циклида Дюпена, огибаемая двумя семействами сфер, является в двойном смысле трубчатой поверхностью.*

Наконец, можно поставить вопрос о том, на какой кривой лежат центры этих сфер для каждого семейства. Это возвращает нас к фигуре, с которой мы познакомились в системе конфокальных поверхностей второй степени (черт. 5 на стр. 26). Мы имели там эллипс и гиперболу, которые были расположены в двух перпендикулярных плоскостях таким образом, что фокусы эллипса находились в вершинах гиперболы, и наоборот. В специальном случае эллипс и гипербола вырождаются в две совершенно аналогично расположенные параболы (черт. 21). Таким образом в качестве ответа на наш вопрос мы имеем предложение:

Центры двух семейств сфер, огибающих циклиды Дюп на, расположены на фокальном эллипсе и фокальной гиперболе, а в предельном случае — на двух фокальных параболах, как это раньше было описано.

Подробности о рассмотренной до сих пор элементарной части геометрии сфер можно найти в работе Кулиджа, „Трактат о круге и сфере" (J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Оксфорд 1916 г.). Прекрасные стереоскопические изображения циклид Дюпена имеются у Максвелла (Maxwell scientifik papers, т. 2, стр. 158). См. также о циклидах Дюпена у Бомпиани (E. Bompiani, Instituto Lombardo 21, 1915).



Черт. 21.

§ 14. Классификация рассмотренных до сих пор объектов аналитической геометрии.

Всем сказанным до сих пор заканчивается все то, что мы хотели сказать о точечных координатах. Мы только зададим еще субъективный, т. е. поставленный в целях классификации, вопрос: *какие же кривые и поверхности вообще являются математически интересными для рассмотрения в точечных координатах.* Опять будем подразделять геометрию на геометрию во всем пространстве и на геометрию в ограниченной части пространства.

I. Что касается до первой, то мы знаем, что ей принадлежат *алгебраические образы.* Ради удобства мы положим в основу треугольные (или тетраэдральные) координаты и обозначим их, ограничиваясь случаем плоскости, через x_1, x_2, x_3. Существует два приема для исследования определенных кривых.

1. Кривую представляют уравнением $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Затем классифицируют эти уравнения по их *степеням* и исследуют соответственно с этим общие алгебраические кривые первой, второй, n-ой степени.

2. Кривая представляется не *одним* уравнением, а, при введении переменного параметра λ, посредством трех, причем координаты x_1, x_2, x_3 полагаются пропорциональными функциями параметра λ, т. е.

$$\sigma x_k = \varphi_k(\lambda).$$

Здесь также можно произвести дальнейшую классификацию. В качестве функции φ мы возьмем прежде всего рациональные функции и соответственно с этим будем говорить о *„рациональных кривых"*. Но это ни в коем случае не дает еще общих алгебраических кривых. Далее мы будем допускать в функциях φ определенные иррациональности, например, возьмем их как рациональные функции от λ и $\omega_4(\lambda)$, т. е. квадратного корня из многочлена четвертой степени. Это доставит нам *„эллиптические кривые"*, которые так называются потому, что их очень удобно изучать с помощью эллиптических функций

Наконец, можно будет ввести в рассмотрение произвольно высокие иррациональности[1]).

В этом заключаются две главные точки зрения, которые кладутся в основу классификации алгебраических кривых. При таком положении вещей высшим принципом оказывается алгебраическое образование понятий, а геометрическому исследованию отводится только наводящая роль; при этом еще предполагается, что рассматриваются все те вопросы, которые представляются важными с алгебраической точки зрения.

II. Как же обстоит дело с *диференциальной геометрией*. Обратимся, например, к уже упомянутой книге Монжа. Мы увидим, что в этой книге идет речь не столько об аналитических кривых и поверхностях вообще, сколько о некоторых семействах поверхностей, имеющих определенный *геометрический способ порождения*. Там изучаются цилиндрические поверхности, конические поверхности, поверхности вращения, огибающие поверхности, причем эти последние играют особую роль в исследованиях Монжа. Они получаются, например, при движении плоскости в пространстве по некоторому определенному закону (например с одной степенью свободы); в этом случае поверхность, огибающая плоскости рассматриваемого однопараметрического семейства, будет некоторой „развертывающейся" поверхностью. Другим примером могут служить огибающие семейства шаров (уже упоминавшиеся нами трубчатые поверхности). Далее рассматриваются линейчатые поверхности, т. е. поверхности, порожденные прямыми линиями; затем поверхности со специальными свойствами линий кривизны, например, поверхности с плоскими линиями кривизны и т. д.

Таким образом в диференциальной геометрии Монжа непосредственный интерес к геометрическому порождению поверхностей является решающим для выбора направления исследования.

Теперь можно приступить к тому, чтобы объединить вместе постановки задач геометрии во всем пространстве и геометрии im Kleinen. Так, например, можно себя спросить, какие существуют алгебраические линейчатые поверхности 1-го, 2-го или 3-го порядка и т. д.

В частности синтетическая геометрия занимает нечто вроде промежуточного положения, пытаясь связать обе точки зрения и добиваясь того, чтобы заимствованные ею из аналитической геометрии алгебраические образы определенным способом получить чисто геометрически.

Но мы оказываемся вынужденными как в I, так и во II разделе, привлечь к рассмотрению еще другие геометрические образы, не являющиеся ни просто кривыми, ни поверхностями. К рассмотрению их мы сейчас и переходим.

§ 15. Билинейные уравнения и двойственность.

Что касается *алгебраической геометрии*, то можно рассматривать уравнения, которые содержат не только координаты одной точки, но координаты двух точек. Мы будем обозначать их треугольные коорди-

[1]) Связь между 1. и 2. дает теорема Кебе об *„униформизации"*, которая утверждает, что всякую алгебраическую кривую можно с помощью параметра λ представить посредством *однозначных* аналитических функций φ.

наты через x_1, x_2, x_3 или y_1, y_2, y_3, а однородным образом написанные обычные их координаты — через x, y, t и x', y', t', так что, следовательно, $x : t$, $y : t$ будут уже обычными (неоднородными) декартовыми прямоугольными координатами. Пусть читатель уже сейчас обратит особенное внимание на эти различные обозначения, чтобы позже, когда они будут применяться, не возникло бы путаницы. Общая форма наших уравнений будет тогда:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Значение этого уравнения легко выяснить: *оно устанавливает такого рода связь между точками, что одна точка должна оставаться на некоторой кривой, если другая точка закреплена.*

Первый пример подобного уравнения $\Omega = 0$ дает теория поляр конических сечений. Если записать уравнение конического сечения в форме

$$\sum_1^3 a_{ik} x_i x_k = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad |a_{ik}| \neq 0,$$

то упомянутое полярное родство дается уравнением

$$\sum_1^3 a_{ik} x_i y_k = 0.$$

Как известно, посредством этого преобразования каждой точке x ставится в соответствие в качестве „*поляры*“ некоторая прямая, которая пересекает коническое сечение в мнимых или действительных точках, в зависимости от того, лежит ли точка x внутри или вне конического сечения. Эти точки являются точками прикосновения касательных, проведенных из точки x к коническому сечению. Обратно, каждой прямой соответствует некоторая точка в качестве полюса. Соотношение между точками x_i и y_i сверх того является взаимным; y_i лежит на поляре точки x_i, если x_i лежит на поляре точки y_i.

Всем хорошо известно, как из этой теории поляр конических сечений к началу девятнадцатого столетия возникло *учение о двойственности* между точками и прямыми. Если мы вообразим себе заданной некоторую фигуру, для которой высказано известное предложение, и построим затем для каждой точки ее поляру и, обратно, для каждой прямой ее полюс, то мы получим некоторую новую фигуру, полярную заданной, для которой будет иметь место соответствующее предложение. Впервые этот прием был употреблен Брианшоном в 1806 году[1]). Брианшон преобразовал известную теорему Паскаля о том, что точки пересечения противоположных пар сторон любого, вписанного в некоторое коническое сечение, шестиугольника лежат на одной прямой (теорема, установленная шестнадцатилетним Паскалем в 1640 году), в теорему, названную по его имени „теоремой Брианшона“. Именно, если мы возьмем вместо шести точек, вершин шестиугольника, их поляры, которые будут касательными конического сечения, то получим

[1]) Journal de l'école polytechnique, тетр. 13.

шестиугольник, описанный около конического сечения; для него тогда, совершенно аналогично, будет справедливо предложение, что линии, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку.

Мы скоро познакомимся с тем, как эти исследования развивались дальше. Наше уравнение

$$\sum a_{ik}x_iy_k = 0$$

в развернутой форме примет вид:

$$\begin{aligned} &y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ +\ &y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ +\ &y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0. \end{aligned}$$

Однако в этом уравнении $a_{ik} = a_{ki}$. В связи с этим оно никоим образом не представляет собой общего билинейного уравнения.

Но почему бы не рассматривать уравнение $\sum a_{ik}x_iy_k = 0$, *в котором* a_{ik} *и* a_{ki} *не обязательно равны между собой?* Это впервые было сделано Плюкером во 2-м томе его аналитико-геометрических исследований (1831). Но в то время, как Плюкер рассматривал тогда это самое общее билинейное уравнение только как средство преобразования, ставящего в соответствие двойственным образом каждой точке прямую линию, само уравнение и то соответствие, которое оно геометрически осуществляет, с течением времени стало приобретать все больший непосредственный интерес и было введено в геометрические рассмотрения как самостоятельный объект.

§ 16. Нуль-система.

В качестве частного случая этого билинейного соотношения, наряду с симметрическим случаем ($a_{ik} = a_{ki}$), т. е. с полярным преобразованием относительно некоторого конического сечения (или относительно поверхности второй степени), особого внимания заслуживает „кососимметрический" случай, так называемое кососимметрическое билинейное уравнение, в котором $a_{ik} = -a_{ki}$. Рассмотрим теперь ближе этим способом осуществленное соотношение на плоскости и в пространстве. Мы увидим, что на плоскости оно не даст ничего особенного, в пространстве же, напротив, получится так называемая *„нуль-система"*, которую необходимо причислить к основным образам новой геометрии. Прежде всего из предположения $a_{ik} = -a_{ki}$ вытекает, что $a_{kk} = 0$. Следовательно для плоскости наше уравнение имеет следующий вид:

$$a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Мы тотчас видим, что левая часть этого уравнения может быть представлена в виде следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь легко выяснить геометрическое значение этого уравнения; определитель обращается в нуль, если точки x_i, y_i и a_{ik} лежат на одной прямой. *Уравнение имеет поэтому тривиальный смысл, так как оно каждой точке x_i ставит в соответствие прямую, соединяющую ее с данной точкой a.*

На это тривиальное соответствие обычно не обращают внимания и говорят, что „на плоскости не существует никакой нуль-системы".

Каково же положение вещей в пространстве? Здесь нам приходится иметь дело с уравнением:

$$a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + a_{14}(x_1y_4 - y_4x_4) + \\ + a_{34}(x_3y_4 - x_4y_3) + a_{42}(x_4y_2 - x_2y_4) + a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

или в сокращенной записи:

$$\frac{1}{2}\sum a_{ik}(x_iy_k - x_ky_i) = 0.$$

Это уравнение представляет нуль-систему, как она впервые была рассмотрена Мебиусом в 1833 г. в Креллевском журнале, т. 10. Но еще в 1827 г. ее рассматривал итальянский геометр Джиорджини (Memorie società dei XL, 1828, т. 20).

Дадим теперь некоторые исторические сведения о Мебиусе. Мебиус родился в 1790 году в Шульфорте в семье танцмейстера, и в 1816—1868 гг. был профессором астрономии в Лейпциге. Наряду с „Барицентрическим исчислением" (1827) он написал „Статику" (1838) и „Элементарное изложение небесной механики" (1843). С геометрической точки зрения особенно интересна его „Статика". Кроме того он дал ряд прекрасных геометрических работ. (См. Möbius, Werke, I—IV, Leipzig, 1885—1887).

Приведем здесь без доказательства ряд предложений, касающихся нуль-системы; они непосредственно получаются из общей формы уравнения.

1. Каждой точке x_i соответствует некоторая плоскость, проходящая через эту самую точку; обратно, каждой плоскости соответствует точка, на ней лежащая.

2. Если точка x_i двигается по какой-нибудь прямой, то соответствующая ей плоскость вращается вокруг некоторой другой прямой.

3. Если точка y_i лежит в плоскости, соответствующей точке x_i, то и обратно точка x_i лежит в плоскости, соответствующей точке y_i.

4. Найденное в пункте 2 соотношение является опять-таки взаимным, потому что каждой точке y_i второй прямой соответствует обратно некоторая плоскость, содержащая все точки x_i первой прямой. Такие две прямые называют *сопряженными полярами.*

5. Таким образом прямые линии пространства относительно нуль-системы приводятся в попарное соответствие, как сопряженные поляры.

Это и есть основные предложения общей теории. Но мы не можем удовольствоваться этими общими предложениями, а хотим получить наиболее наглядное представление о том, каким образом каждой точке

действительно соответствует плоскость. Этого мы особенно легко достигнем, если введем специальную систему координат, подобно тому, как, например, поверхности второй степени мы относили к их плоскостям симметрии. Ради удобства мы опять разобьем это рассмотрение на отдельные пункты.

1. Прежде всего мы обратим наше внимание на несобственные точки, которые здесь, в области проективной геометрии, конечно заполняют „плоскость". На несобственной плоскости имеется такая точка, которая соответствует этой плоскости в нуль-системе. Теперь мы представим себе все пространство повернутым таким образом, чтобы эта точка расположилась над нами „вертикально". Такого положения нуль-системы мы впредь будем твердо придерживаться.

2. В этой несобственной плоскости имеется некоторая „горизонтальная" прямая линия, сопряженную поляру которой мы будем теперь рассматривать. *Мы называем эту последнюю осью нуль-системы и утверждаем, что она проходит вертикально.* Чтобы в этом убедиться, сообразим, как найти соответствующую сопряженную поляру. Мы рассматриваем все плоскости, которые проходят через горизонтальную несобственную прямую; таковыми будут все горизонтальные плоскости, к которым надо причислить также и самую несобственную плоскость. Каждой из этих плоскостей принадлежит некоторая лежащая в ней точка; совокупность этих точек и образует искомую сопряженную поляру. Среди этих точек находится так же вертикально над ними лежащая точка, как точка, соответствующая несобственной плоскости; следовательно ось должна быть вертикальной линией.

3. Эту „ось" нуль-системы мы возьмем в качестве оси z некоторой прямоугольной системы координат, относительно которой однородные координаты точек в билинейном основном уравнении обозначим через x, y, z, t и x', y', z', t'. Это уравнение получит тогда такой вид:

$$a_{12}(xy' - yx') + a_{13}(xz' - zx') + a_{23}(yz' - zy') + \\ + a_{14}(xt' - tx') + a_{24}(yt' - ty') + a_{34}(zt' - tz') = 0,$$

или, если положить $t = t' = 1$:

$$a_{12}(xy' - yx') + a_{13}(xz' - zx') + a_{23}(yz' - zy') + \\ + a_{14}(x - x') + a_{24}(y - y') + a_{34}(z - z') = 0.$$

Но это еще только общее уравнение нашей нуль-системы. Теперь же ось z должна стать осью нуль-системы, т. е. каждой точке оси z должна соответствовать горизонтальная плоскость. Если мы затем подставим в последнее уравнение $x' = 0$, $y' = 0$, причем z' может быть произвольным, то мы получим уравнения соответствующих плоскостей в виде:

$$(a_{13}z' + a_{14})x + (a_{23}z' + a_{24})y + a_{34}(z - z') = 0.$$

Для того чтобы это уравнение представляло горизонтальную плоскость, члены с x и y должны выпасть, т. е. должно быть $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$. Если мы внесем это в наше общее уравнение, то оно примет следующий вид:

$$a_{12}(xy' - yx') + a_{34}(z - z') = 0,$$

или, упрощая обозначения коэфициентов,

$$xy' - x'y + k(z - z') = 0.$$

Но это значит: *если мы отнесем нашу нуль-систему к какой-либо прямоугольной системе координат, ось z которой является осью нуль-системы, то мы получим только что написанный простой вид уравнения.*

4. Величина k называется *параметром* нуль-системы. Она выражается (в доказательство чего мы далее входить не будем) через первоначальные коэфициенты общего уравнения таким образом:

$$k = \frac{a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}}{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a^2_{23}}.$$

При этом правая часть с помощью соотношений $a_{ik} = -a_{ki}$ написана в симметричной форме.

5. Каким же образом представить себе наглядно соответствие между точками и плоскостями в этой нуль-системе. Рассмотрим прежде всего частные случаи $k = 0$ и $k = \infty$, значение которых тотчас становится ясным. Если $k = 0$, то всякой точке x', y', z' соответствует плоскость, проходящая через эту самую точку и через ось z. Если $k = \infty$, то каждой точке x', y', z' соответствует проходящая через нее горизонтальная плоскость т. е. плоскость, соединяющая эту точку с несобственной горизонтальной линией. Оба эти случая являются „тривиальными".

6. Каково же положение вещей в общем случае?

a) Сначала сделаем одно замечание по поводу выбора нашей системы координат. Очевидно, мы можем нашу нуль-систему сдвигать вдоль оси z и вращать вокруг оси z или, что то же, мы можем сдвигать или вращать нашу систему координат в противоположном направлении — без того, чтобы что-либо изменилось; наше уравнение

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$$

при этом остается в точности тем же самым. Отсюда ясно, на каком основании ось z названа „осью нуль-системы". Пользу, которую принесет это замечание при решении нашего вопроса, легко себе уяснить. Именно, чтобы узнать, как расположена в пространстве плоскость, соответствующая любой точке x', y', z', мы сначала разрешаем этот вопрос для точек x', 0, 0 положительной части оси x. После этого нам остается лишь передвинуть фигуру вдоль оси z и повернуть ее вокруг оси z, чтобы найденный результат перенести на произвольную точку пространства.

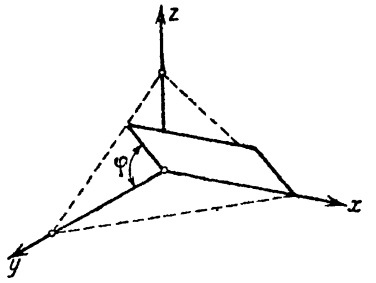
b) После этого упрощения задачи постараемся отчетливо представить себе положение плоскости, соответствующей точке x', 0, 0, которая двигается вдоль положительной части оси x. Для этих значений координат x', y', z' наше основное уравнение примет следующий простой вид:

$$-x'y + kz = 0 \quad \text{или} \quad \frac{z}{y} = \frac{x'}{k}.$$

Отсюда, пользуясь чертежом 22, мы тотчас же получаем следующий результат: *в нуль-системе точке x', 0, 0 оси x соответствует плоскость, проходящая через самую ось x и образующая с горизонтальной плоскостью угол φ, причем*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{y} = \frac{x'}{k}.$$

Итак, получаем: для $x' = 0$ $\operatorname{tg}\varphi$ также равен нулю и возрастает вместе с x' до бесконечности. Если построить для каждого значения x' соответствующий перпендикуляр к оси x, наклон которого к горизонтальной плоскости образует угол φ, то образующаяся поверхность по своему виду до известной степени напоминает крылья ветряной мельницы (черт. 23).

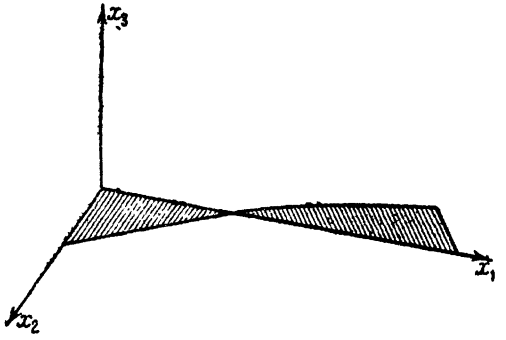


Черт. 22.

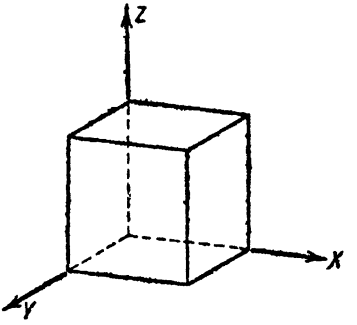
с) Теперь вообще, вследствие сделанного нами замечания относительно произвольной точки пространства, имеет место предложение: *каждой точке пространства в силу данной нуль-системы соответствует некоторая плоскость, содержащая перпендикуляр, опущенный из этой точки на ось нуль-системы, т. е. на ось z; эта плоскость образует с горизонтальной плоскостью угол φ, определяемый посредством соотношения:*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r'}{k}$$

где r' обозначает расстояние точки от оси z.



Черт. 23.



Черт. 24.

При этом существенно еще принимать во внимание знак k; в случае отрицательного k „крыло ветряной мельницы" выгнуто как раз обратно тому, как в случае положительного k; тогда, при надлежащем выборе координатного триэдра (черт. 22, 24), нуль-система в случае $k > 0$ называется *правой*, а в случае $k < 0$ называется *левой*.

§ 17. Применения нуль-системы.

Мы будем рассматривать нуль-систему еще с другой стороны. Именно, она стоит в прямой связи с некоторым винтовым движением, которое можно производить вокруг оси z нуль-системы. Рассмотрим, например, правое винтовое движение (т. е. винтовое движение, определяемое по правилу штопора), при котором каждая точка пространства должна описывать вокруг оси z обычную архимедову винтовую линию с постоянным „шагом винта". Это движение получает свое выражение (относительно координатной системы, изображенной на чертеже 24) в следующих формулах:

$$X = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$Y = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$
$$Z = z - \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

В этих формулах x, y, z обозначают начальные координаты, X, Y, Z — новые координаты точки, φ — угол поворота, а h — шаг винта. Если φ увеличивается до 2π, то X и Y делаются вновь равными x и y. Шаг винта h считается здесь положительным; если мы возьмем его отрицательным, то получим формулы для левовинтового движения.

Чтобы теперь определить вектор скорости этого винтового движения, надо продиференцировать наши формулы по времени t. Это дает в случае $\varphi = t$

$$\frac{dX}{dt} = -x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$
$$\frac{dY}{dt} = +x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{h}{2\pi},$$

или, полагая $\varphi = 0$,

$$\frac{dX}{dt} = -y, \quad \frac{dY}{dt} = +x, \quad \frac{dZ}{dt} = -\frac{h}{2\pi}.$$

С этими формулами для винтового движения мы сравним ту формулу, которая в нуль-системе ставит в соответствие каждой точке некоторую плоскость:

$$(xy' - x'y) + k(z - z') = 0.$$

Условимся при этом, что x, y, z будут обозначать координаты данной точки, а x', y', z' — текущие координаты точки на соответствующей плоскости. Расположив члены нашего уравнения по координатам, можем придать ему вид:

$$(-y)x' + xy' - kz' + kz = 0.$$

Если теперь из точки x, y, z мы проведем нормаль к нуль-плоскости этой точки, то получим для ее направления:

$$-y : x : -k.$$

Нетрудно убедиться, что это направление совпадает с направлением вектора скорости винтового движения, если только положено

$$k = \frac{h}{2\pi} \quad \text{или} \quad h = 2\pi k.$$

Это даст теорему:

Мы получим соответствие между точкой и плоскостью в нуль-системе, если будем производить вокруг оси z винтовое движение с шагом винта $2\pi k$ и если, затем, поставим в соответствие каждой точке ту нормальную плоскость к винтовой линии, которая проходит через эту точку.

Это предложение особенно наглядно показывает нам, что для точек, близких к оси, соответствующая плоскость будет почти горизонтальна, тогда как, наоборот, для далеко удаленных точек она будет направлена почти вертикально. Все сказанное позволяет нам наглядно геометрически представить нуль-систему; нам остается лишь добавить некоторые литературные замечания о применении нуль-системы.

Нуль-система находит свое применение главным образом в механике твердого тела и в геометрии, притом в обоих случаях в двойном аспекте.

Что касается первого пункта, именно *значения нуль-системы для механики твердого тела*, то оно основывается как раз на той тесной связи, которая существует между нуль-системой и определенным винтовым движением. Важность этой связи будет ясна, если мы вспомним, что всякое движение твердого тела в каждый отдельный момент может быть заменено таким винтовым движением, что каждая точка твердого тела будет иметь в обоих движениях один и тот же вектор скорости. Поэтому можно говорить о „касательном винтовом движении". Вследствие этого нуль-система играет существенную роль в кинематике твердого тела. Особенно здесь следует упомянуть исследования астронома Болла (сначала в Дублине, затем в Кембридже), который наряду с многочисленными статьями по этому вопросу опубликовал еще специальную работу — „Теория винтов" (R. S. Ball, Theory of screws, Dublin 1876 г.), которая позднее (в Кэмбридже, 1900 г.) в значительно расширенном виде была вновь переиздана под названием: „Трактат по теории винтов" (A treatise on the theorie of screws). Слово „винт" (screw) означает в точности то же самое, что и „нуль-система". С этим же вопросом связаны исследования Штуди „Геометрия динамы" (E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903), к которым мы позднее (стр. 306 и след.) еще вернемся.

Второе значение нуль-системы для механики относится к сложению произвольных сил, приложенных к твердому телу. Если точка приложения всех сил одна и та же, то, разумеется, задача легко решается путем построения одной силы, заменяющей все отдельные силы. Если линии действия сил друг с другом скрещиваются, то требуется более высокая геометрическая теория. Здесь задача состоит в том, чтобы все действующие силы заменить *одной силой и парой сил*. Нуль-система здесь также играет важную роль, — чего мы однако детальнее выяснять не будем. Подробности имеются в учебнике механики твердого

тела Будде, в котором очень много говорится о нуль-системе, может быть даже слишком много, в ущерб другим предметам.

Как уже сказано, в геометрии нуль-система имеет столь же выдающееся значение и притом в двух аспектах. Прежде всего нуль-система определяет зависящее от трех параметров многообразие прямых линий, которые называются ее *нуль-прямыми. Под „нуль-прямой" понимают всякую прямую линию, которая соединяет какую-нибудь точку пространства с любой точкой, принадлежащей соответствующей нуль-плоскости.* На первый взгляд может показаться, что эти прямые в пространстве зависят от четырех параметров, так как каждой точке пространства соответствует целый пучок лучей, лежащих в соответствующей этой точке плоскости, т. е. однопараметрическое многообразие прямых линий. Однако при точном подсчете получается только трехмерная совокупность нуль-прямых, *потому что всякая нуль-прямая для каждой ее точки является нуль-прямой,* так как плоскость, соответствующая некоторой точке в нуль-системе, вращается вокруг нуль-прямой, если точка продвигается по этой нуль-прямой. Это является непосредственным следствием из ранее (стр. 68 пункт 3) приведенного предложения: если точка y лежит в плоскости соответствующей точке x, то точка x лежит в плоскости, соответствующей точке y. Нам скоро придется заниматься линейчатой геометрией в пространстве, т. е. геометрией, которая в качестве элементов пространства рассматривает прямые линии. *В ней совокупность всех нуль-прямых какой-нибудь нуль-системы называют линейным комплексом линий;* из всех линейных комплексов, т. е. систем прямых, зависящих от трех параметров, она является простейшей.

Перейдем теперь ко *второму геометрическому применению нуль-системы. Оно относится к теории полиэдров.* С помощью любого билинейного уравнения между двумя точками x, y, z и x', y', z' устанавливается простая „взаимность" следующего рода: если мы выберем какую-нибудь отдельную точку x, y, z, то ей будет соответствовать некоторая плоскость, на которой только и может находиться точка x', y', z', притом в любом месте этой плоскости. Если точка x, y, z двигается по некоторой прямой, то соответствующая плоскость вращается вокруг некоторой прямой. Если точка двигается по некоторой плоскости, то соответствующая плоскость вращается вокруг некоторой точки. Это соотношение, следуя Мебиусу, называют „родством" между точками x, y, z и x', y', z'. Можно, например, заставить точку x, y, z пробегать некоторую ломаную; в соответствии с этим мы будем получать ряд плоскостей, которые последовательно вращаются вокруг определенных прямых. При этом каждой вершине ломаной соответствует плоскость, каждому звену ломаной — общая линия пересечения соответствующих плоскостей; далее, каждой плоскости, проходящей через три точки ломаной, будет соответствовать трехгранный угол и т. д. Если, например, заставить точку x, y, z описывать некоторый тетраэдр, то вследствие равенства числа его вершин и граней ему будет соответствовать так же тетраэдр.

Вообще имеет место предложение:

С помощью любого билинейного уравнения между двумя точками из всякого полиэдра возникает некоторый новый полиэдр, причем вершинам, ребрам и граням первого полиэдра соответствуют грани, ребра и вершины второго полиэдра.

В нуль-системе соотношение между обоими полиэдрами приобретает особый характер. Прежде всего нуль-система устанавливает „инволюционное" соответствие, т. е. ее уравнение остается неизменным, если мы x, y, z переменим местами с x', y', z'; это соответствие аналогично тому, какое мы имели при преобразовании посредством обратных радиусов, а также аналогично полярному соответствию относительно поверхности второй степени.

Еще более заслуживает быть отмеченным взаимное расположение обоих полиэдров. Так как в нуль-системе каждая точка лежит в соответствующей ей плоскости, то в нуль-системе каждая вершина одного полиэдра лежит на некоторой грани второго полиэдра, и обратно, каждая вершина второго полиэдра лежит на некоторой грани первого полиэдра. *Но это означает, что полиэдры, например, два тетраэдра, являются взаимно вписанными и описанными. В том, что таким образом расположенные полиэдры легко можно построить, состоит второе геометрическое значение нуль-системы.*

Эта теория „взаимных" полиэдров замечательна с геометрической точки зрения; кроме того она имеет практическое значение для одной из ветвей механики, именно, для *„графостатики"*. Эта последняя имеет дело с такими вопросами, которые встречаются при постройках мостов, конструкции крыш и т. д. Ее задача состоит в изучении графическими методами распределения сил сжимающих и растягивающих отдельные стержни стержневой решетки, и т. п.; при этом существенную роль играют наши взаимно вписанные и описанные полиэдры, *так что на основе нуль-системы получается особенно хорошее изложение графостатики* („Взаимный план сил" Максвелла см. далее, § 53) [1]).

К этому обозрению билинейных форм и нуль-системы мы прибавим еще несколько замечаний. Так же как мы рассматривали билинейные формы, можно вообще рассматривать однородные уравнения с двумя рядами точечных координат $f(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$, не являющиеся линейными. Далее можно также рассматривать уравнения с тремя и более точками; здесь простейшей формой была бы трилинейная форма. В частности мы можем, например, так написать уравнение между двумя рядами точечных координат, что оно будет линейно относительно y, но не линейно относительно x; таково, например, уравнение

$$X_1y_1 + X_2y_2 + X_3y_3 + X_4y_4 = 0,$$

где X — формы выше первой степени относительно x. Кроме того, мы можем устроит так, чтобы уравнение тождественно обращалось в нуль, если точки x и y совпадают. Если теперь x оставить неподвижной, то y опишет плоскость, которая согласно нашему последнему допуще-

[1]) О нуль-системе см. также: E. Caporali, P. Del Pezzo, Introduzione alla teoria dello spazio rigato, Neapel 1888; C. Segre, Atti Torino 19 (1883), стр. 159—186.

нию пройдет через самую точку x; но эта плоскость зависит от точки x уже не линейно, так что взаимность здесь отсутствует. Подобное соответствие называют *нуль-системой высшего порядка*. Итак, мы видим, что здесь представляется много возможностей для более детального изучения.

§ 18. Геометрическое истолкование дифференциальных уравнений.

Перейдем теперь к соответствующим рассмотрениям в *дифференциальной геометрии*. Как уравнение между двумя рядами точечных координат привело нас к обобщению обычной алгебраической геометрии, так аналогичным образом можно обобщить дифференциальную геометрию. Мы будем рассматривать не только уравнения между координатами, но введем в уравнения наряду с координатами x, y, z их производные. Другими словами: *сами дифференциальные уравнения представляют собой в дифференциальной геометрии выдающийся объект геометрических исследований; при этом можно говорить как о геометрическом смысле самого дифференциального уравнения, так в частности о том, каков геометрический смысл интеграции дифференциального уравнения.*

Эта точка зрения имеется уже у Монжа и затем вновь встречается особенно у Софуса Ли.

Перейдем теперь к различным типам дифференциальных уравнений, которые обычно рассматриваются.

1. Прежде всего для *плоскости* мы имеем уравнение $f(x, y, y') = 0$. Что оно означает геометрически? Если x и y получают определенные значения, то из уравнения $f(x, y, y') = 0$ можно найти одно или несколько значений для y'. Но каждое из них дает нам направление, в котором кривая должна выходить из точки x, y. *Следовательно, геометрический смысл дифференциального уравнения* $f(x, y, y') = 0$ *заключается в том, что оно каждой точке* x, y *ставит в соответствие одно или несколько направлений. Интегрирование уравнения означает геометрически отыскание кривых, касательные к которым в каждой их точке имеют определенное этим способом направление; иными словами, интегрирование уравнения состоит в объединении бесчисленного множества направлений в сплошные связные кривые.* Именно в этом смысле дифференциальное уравнение $f(x, y, y') = 0$ становится предметом геометрических рассмотрений.

2. Что же далее обозначает дифференциальное уравнение $f(x, y, y', y'') = 0$? Мы можем, очевидно, точку x, y, равно как и направление y' в ней, выбрать произвольно. Тогда наше уравнение доставляет нам определенное значение для y''. Но радиус кривизны плоской кривой, как известно, определяется формулой:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

следовательно, вместе с y' и y'' мы знаем также и ρ. *Поэтому, всякое дифференциальное уравнение второго порядка каждому элементу* x, y, y' *(т. е. каждой точке и направлению в ней) ставит в соответ-*

ствие определенный радиус кривизны; задача интеграции состоит в том, чтобы объединить в кривые все эти снабженные кривизной элементы.

Можно так же сказать:

Посредством x, y, y', y'' определяется *„соприкасающаяся парабола"*.

$$\eta - y = y'(\xi - x) + \frac{1}{2} y''(\xi - x)^2.$$

В силу нашего дифференциального уравнения каждому элементу x, y, y' ставится в соответствие некоторая определенная соприкасающаяся парабола.

3. Если мы перейдем теперь к пространству с его тремя координатами, то прежде всего нам встретится уравнение вида $f(x, y, z, y', z') = 0$, где

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}.$$

Подобные уравнения (которые обычно называют уравнениями Монжа и к которым мы вернемся еще позднее, см. § 94 и след.), вообще говоря, мало рассматриваются в учебниках анализа; они никоим образом не являются уравнениями с частными производными. Но существует издавна привлекающий к себе живой интерес частный случай такого уравнения, именно тот случай, когда производные y' и z' входят в уравнение линейно; следовательно уравнение принимает вид:

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = 0.$$

Изучение этого специального вида уравнений называется проблемой Пфаффа. Пфафф в начале прошлого столетия был профессором университета в Гельмштете, закрытого в 1810 г., и в качестве такового являлся учителем Гаусса. Его работы, относящиеся к рассматриваемым здесь вопросам, находятся в записках Берлинской академии за 1814/15 г. Пфафф умер, будучи профессором в Галле в 1825 г.

Теперь опять мы спросим себя о геометрическом значении уравнения: $f(x, y, z, y', z') = 0$. Отношение $dx : dy : dz = 1 : y' : z'$ дает нам некоторое определенное направление, выходящее из точки x, y, z. Следовательно, если мы имеем уравнение, связывающее y' и z', то оно представляет некоторый конус, образованный направлениями, выходящими из точки x, y, z. *Итак, в силу нашего уравнения каждой точке пространства соответствует конус направлений, который в частном случае, когда уравнение $f(x, y, z, y', z') = 0$ является уравнением Пфаффа, будет плоскостью.*

Одновременно мы можем отметить следующее замечательное обстоятельство, именно, что в этом смысле каждая проблема Пфаффа связана с некоторой нуль-системой (в полном смысле слова) и обратно. *Задача интегрирования на этот раз заключается в том, чтобы найти пространственные кривые, которые имеют в каждой своей точке касательную, принадлежащую к выходящему из этой точки конусу или (в специальном случае проблемы Пфаффа) к проходящей через эту точку плоскости.*

Мы не будем здесь (как и в предыдущих случаях) входить в рассмотрение того, как происходит здесь интеграция; нас интересует лишь геометрический смысл дифференциального уравнения. Мы получим особый случай проблемы Пфаффа, если $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ является полным дифференциалом, или сделается таковым после умножения на некоторый множитель. В этом случае возникает вопрос об *интегральных поверхностях.*

4. В случае трех переменных существуют еще дифференциальные уравнения с частными производными, прежде всего первого порядка:

$$f(x, y, z; p, q) = 0; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Здесь z рассматривают как функцию от x и y. Как известно, посредством величин p и q определяется нормаль (а значит и касательная плоскость) к поверхности в данной точке. Если обозначить углы, образованные нормалью с координатными осями, например, через α, β, γ, то имеет место соотношение:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = p : q : -1.$$

Поэтому, если нам известно для определенной точки пространства x, y, z не сами значения p, q, а только связывающее их уравнение $f(p, q) = 0$, то в силу этого уравнения направление нормали будет ограничено некоторым определенным конусом, исходящим из точки x, y, z. Следовательно, мы имеем:

Дифференциальное уравнение с частными производными между тремя переменными ставит в соответствие каждой точке пространства некоторый конус, на котором должна лежать нормаль каждой поверхности, являющейся интегральной поверхностью для этого дифференциального уравнения; интеграция дифференциального уравнения означает опять-таки отыскание наиболее общих поверхностей такого рода.

5. Как мы уже указывали, дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка мы можем естественно толковать и так, что оно предписывает закон *для положения касательной плоскости в точке x, y, z.* Сокращенный способ записи $dz = p\,dx + q\,dy$ дает нам как раз уравнение касательной плоскости в дифференциальной форме, т. е. положение касательной плоскости определяется посредством p и q.

Это замечание будет нам очень полезно теперь, когда мы переходим к дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка. Его общую форму мы напишем так:

$$f(x, y, z; p, q; r, s, t) = 0,$$

где r, s, t означают:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Эти обычно употребляемые обозначения p, q; r, s, t были введены еще Монжем. Не задерживаясь на уравнении $dz = p\,dx + q\,dy$, произ-

ведем разложение dz далее, до членов второго порядка включительно; следовательно будем иметь:

$$dz = p\,dx + p\,dy + \frac{1}{2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2).$$

Это уравнение представляет для величин, определяющих направления, поверхность второй степени, а именно параболоид. Он имеет такую же касательную плоскость, как и сама поверхность; но он прилегает гораздо теснее к самой поверхности, чем это было в случае касательной плоскости, именно с точностью до величин второго порядка. Поэтому говорят о *„соприкасающемся параболоиде"*.

Теперь возьмем x, y, z, а также p и q, произвольно, т. е. выберем некоторую точку пространства и в ней касательную плоскость; тогда мы можем еще две из величин r, s, t взять также произвольно. Посредством данного уравнения $f(x, y, z; p, q; r, s, t) = 0$ определяется третья величина, и этим определяются все коэфициенты вышеприведенного для dz выражения.

Диференциальное уравнение с частными производными второго порядка указывает, что соприкасающийся параболоид какой-то искомой поверхности в каждой точке пространства x, y, z подчинен условию

$$f(x, y, z; p, q; r, s, t) = 0.$$

Суть всех этих последних рассмотрений, и это мы хотим отметить еще раз, заключается в той точке зрения, что диференциальные уравнения как таковые являются объектом геометрического рассмотрения. И в самом деле, примыкающая сюда геометрическая теория диференциальных уравнений имеет весьма большое значение для их интеграции.

ЗАМЕНА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

§ 19. Общий принцип Плюкера.

Все до сих пор изложенное группировалось вокруг понятия точечных координат. Теперь мы перейдем к новой главе, которой можно дать название: „Замена пространственных элементов".

Теперь мы будем определять координатами уже не точку, а какой-нибудь другой геометрический образ и будем пытаться давать геометрическое толкование соотношениям, изображаемым посредством уравнений между координатами, и посредством таких уравнений стараться овладеть всеми возможными геометрическими фигурами. После точечных координат самыми простыми в пространстве являются плоскостные координаты, а на плоскости — прямолинейные координаты. В дальнейшем мы будем изучать только *пространственные соотношения*, так как на плоскости положение вещей совершенно аналогичное. Издавна привыкли в уравнении плоскости

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

на величины u, v, w смотреть как на „постоянные". Особенность новой точки зрения заключается в том, что на величины u, v, w

смотрят как на *координаты плоскости*, как на переменные, и что с ними оперируют совершенно так же, как с точечными координатами x, y, z. Как известно, величины u, v, w имеют следующий элементарно-геометрический смысл: они являются с изменением знаков обратными величинами длин тех отрезков, которые плоскость отсекает на трех координатных осях. Совершенно подобным же образом мы можем исходить, например, из уравнения поверхности второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + \ldots + 1 = 0$$

и рассматривать как координаты его девять коэфициентов, так что основным элементом пространства в этом случае будет F_2. В обоих случаях мы можем рассматривать различные уравнения между новыми координатами и ставить вопрос об их геометрическом смысле. *С этой точки зрения наше эмпирически данное пространство будет иметь, в зависимости от выбора пространственного элемента, то или иное число измерений, а именно, равное числу координат, необходимых для однозначного определения отдельного элемента.*

Эта мысль, которую мы пытались выяснить на нашем примере, восходит к Плюкеру; начиная с его „Аналитико-геометрических исследований", она пронизывает все его последующие работы. Позднее эта мысль была вновь выдвинута Ли (Math. Annalen, т. 5).

Рассмотрим теперь, как эта идея развивалась в деталях. Первое проявление этой новой идеи мы находим в *принципе двойственности*, т. е. в противопоставлении точки и плоскости в пространстве, точки и прямой на плоскости. Этот принцип в свою очередь развился из полярного соответствия относительно поверхности или кривой второй степени, следовательно из уравнения:

$$\sum a_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Брианшон рассмотрел всего лишь один пример. Первый, кто систематически продвинулся вперед в этом направлении, был Понселе; его по справедливости называют основателем *„проективной геометрии"*, в которой, впрочем, этот принцип является только отдельным, хотя и очень ценным, вспомогательным средством.

Понселе (родился в Метце в 1788 г.) был не только математиком, но так же офицером и техником. Главной его работой, относящейся к рассматриваемым здесь вопросам, является „Трактат о проективных свойствах фигур" (I. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures). Появлением этой работы мы обязаны его военным приключениям. Понселе в 1812 г. попал в России в плен и благодаря этому имел в Саратове на Волге вынужденный досуг для приведения в порядок своих математических идей. Там „Трактат" и был написан, но опубликован он был только в 1822 г. в Париже. В качестве второй работы Понселе мы здесь назовем „Общую теорию взаимных поляр" (Théorie générale des polaires réciproques) в Креллевском журнале, т. 4 (1829 г.). Позднее (в Метце) Понселе занялся техническим преподаванием и математико-техническими исследованиями. Кто когда-либо имел отношение к техническим кругам, тот знает, как высоко ставится еще и поныне имя Понселе в теории машин (ср. например, „Водяное

колесо" Понселе). К концу своей жизни (ум. 1867 г.), находясь на покое в Париже, он пережил большое огорчение от того, что за этот промежуток времени другие занялись уже оставленной им областью математики и притом дали исследованиям совсем иное направление, чем то, какое он им предполагал дать первоначально. Свое огорчение Понселе изливает в книгах, которые он в то время издал; именно в „Приложениях анализа к геометрии..." (Applications d'analyse et de géométrie..., 1862, 64), а также во втором издании своего „Трактата" (1865, 66). В психологическом отношении достойно большого удивления, что человек, достигший в расцвете своей жизни величайших результатов в разных направлениях — как в фортификации, так и в технике — вернулся в старости к чисто научному честолюбию своей юности и жаловался на свою жизнь потому, что его мысли получили всеобщее распространение не в той форме, какую он им придал и не исключительно под его именем.

Наряду с Понселе надо назвать Жергонна; у него была более философская голова. Поэтому он разработал в более общей форме то, что Понселе дал в специальной форме; например, он ввел самое слово *двойственность*. Он всегда наряду с данной теоремой ставил соответствующее ей двойственное предложение и показывал, как в самом нашем представлении, даже и без помощи конического сечения, оба эти предложения стоят друг с другом рядом. Подобным же образом он ввел в употребление систему параллельных столбцов, которыми с тех пор пользуются во многих учебниках; здесь имеется в виду та система записи, когда на разделенной пополам странице непосредственно противопоставляются друг другу соответствующие предложения[1]). Основные его работы находятся в 16 т. его Анналов (1825/26).

Со стороны немцев к нему примыкают Мебиус и Плюкер; последний со своими „Аналитико-геометрическими исследованиями" II, 1830/31 г. В этом сочинении развивается понятие плоскостных координат в таком виде, как мы о них говорили. Принцип двойственности вытекает у Плюкера из уравнения:

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

которое говорит о взаимном расположении точки и плоскости. Если зафиксировать u, v, w, то мы будем иметь уравнение плоскости в точечных координатах; если же зафиксировать x, y, z, то мы будем иметь уравнение точки в плоскостных координатах. Обе точки зрения совершенно равноправны в силу симметрии уравнения относительно u, v, w и x, y, z. Это уравнение, написанное в однородных координатах, имеет вид:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Аналогично тому, как мы имели однородные точечные координаты x_i, существуют так же четыре однородные плоскостные координаты u_i. С этого момента начинается развитие аналитической геометрии в двух

[1]) См. далее например § 24 и 25.

параллельных руслах, причем кривые n-го порядка и n-го класса противопоставляются друг другу.

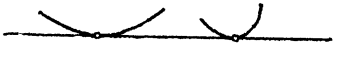
Здесь особенно следует обратить внимание на то, что посредством принципа двойственности наша фантазия заметно оживляется. Подобно тому как точка описывает кривую, так касательные охватывают или огибают кривую. Это обстоятельство тотчас приводит к некоторым новым геометрическим понятиям. Мы можем, например, говорить о двойной точке (черт. 25), через которую проходят действительные, а может быть и мнимые ветви кривой (в последнем случае мы имеем изолированную двойную точку), или о точках возврата (черт. 26); тогда возникает вопрос, какие же образы им двойственно соответствуют. Разумеется, особая касательная, именно, в первом примере — двойная касательная (черт. 27), которая либо касается двух действительных ветвей кривой, либо проходит изолированно. Для случая точки возврата мы напомним, что при движении подвижной точки



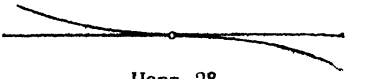
Черт. 25.



Черт. 26.

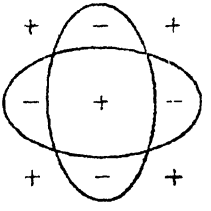


Черт. 27.



Черт. 28.

вдоль такой кривой, подвижная точка внезапно останавливается и меняет направление своего движения, между тем как соответствующая касательная к кривой сохраняет направление своего вращения. Этому двойственно будет соответствовать внезапное изменение направления вращения касательной к кривой, хотя сама точка спокойно сохраняет направление своего движения. Это приводит нас к точкам перегиба (или к касательным перегиба, черт. 28).



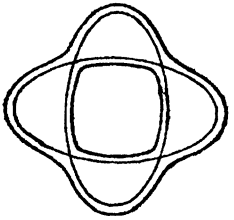
Черт. 29.

Преобразование какого-либо соотношения, написанного в точечных координатах, к прямолинейным координатам на плоскости — очень полезное упражнение. Пусть, например, нам даны два эллипса $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, пересекающиеся между собой в четырех действительных точках. Произведение $f_1 \cdot f_2$ будет тогда (при надлежащем выборе знаков) положительным в куске плоскости, лежащем внутри или вне *обоих* эллипсов; в четырех же серпообразных кусках, лежащих между эллипсами, оно будет отрицательным (черт. 29).

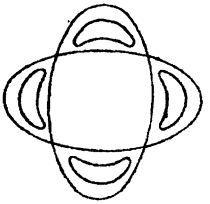
Положим теперь $f_1 \cdot f_2 = \varepsilon$, где ε — достаточно малое число. Тогда это уравнение будет представлять кривую четвертого порядка C_4, проходящую совсем близко от эллипсов, а именно, смотря по тому, будет ли $\varepsilon > 0$ или < 0, в положительных или отрицательных частях плоскости (черт. 30, 31). Это излюбленный способ для того, чтобы представить себе вид кривой четвертого порядка C_4 [1]).

[1]) Об этом методе „малых изменений" см. многочисленные работы Брузотти (L. Brusotti) Atti ist. Lombardo, начиная с 1913 г.

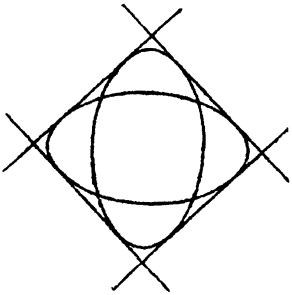
Теперь перед нами возникает задача произвести рассмотрения, двойственно соответствующие этим. Нашей паре эллипсов двойственно соответствует опять же пара эллипсов $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ с четырьмя общими действительными касательными. Можно, следовательно, пользоваться чертежом 32, совпадающим с нашим первоначальным чертежом 29.



Черт. 30.

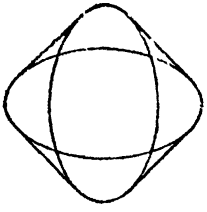


Черт. 31.

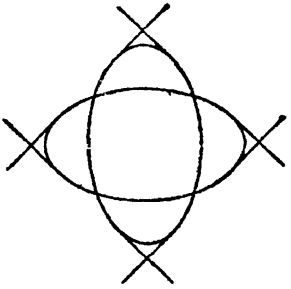


Черт. 32.

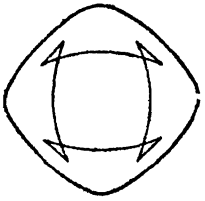
Как же мы найдем теперь кривую четвертого класса? Для этой цели будем исходить из четырех действительных „двойных касательных" пары эллипсов, которые двойственно соответствуют четырем „двойным точкам" нашего предыдущего случая. Мы различаем у каждой из касательных внутренние и внешние отрезки. Это приводит нас к двум новым чертежам 33, 34; на первом изображены только внутренние, на втором только внешние отрезки касательных. Весьма замечателен тот



Черт. 33.



Черт. 34.

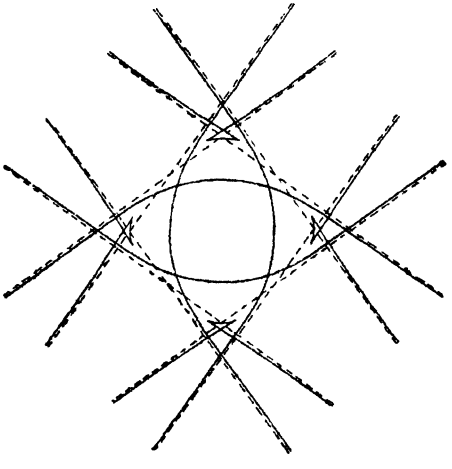


Черт. 35.

способ, посредством которого мы сейчас получим кривую четвертого класса (при этом мы в точности двойственно перенесем прежний переход к кривым четвертого порядка). Именно, сочетая четыре двойные касательные с частями обоих эллипсов, мы получаем своеобразные ветви кривой. В первом случае мы получаем некоторую замкнутую ветвь кривой с 8 точками возврата и 4 двойными точками, которая охватывается другой замкнутой ветвью кривой (черт. 35); эта кривая как раз и соответствует кривой четвертого порядка чертежа 30,

имеющей на одной из своих ветвей 4 двойные касательные и 8 точек перегиба. Во втором случае (черт. 36) мы получаем еще кривую четвертого класса несколько запутанного вида, которая состоит из четырех отдельных гиперболообразных частей, уходящих в бесконечность; каждая из них имеет две точки возврата и одну двойную точку. Четыре эти части взаимно пересекаются в 24 двойных точках.

Этот пример показывает, как получается двойственное отображение; несомненно, посредством подобного приема геометрическая интуиция получает очень хорошее упражнение, и поэтому весьма рекомендуется проштудировать в таком же смысле другие кривые, также и трансцендентные, как, например, синусоиду. Но мы не будем ограничиваться двойственностью в тесном смысле слова.



Черт. 36.

С точки зрения Плюкера в качестве элемента можно выбрать не только плоскость в пространстве (или прямую на плоскости), но также произвольные другие образы, и определять их затем посредством координат. Мы выберем, например, образ второй степени

$$\sum a_{ik}x_ix_k = 0.$$

На плоскости это уравнение представляет коническое сечение, определяемое посредством 5 независимых постоянных, в пространстве — поверхность второго порядка F_2, определяемую посредством 9 независимых постоянных. *В соответствии с этим говорят о многообразии* 5 *или* 9 *измерений.* Если затем мы будем изучать какое-нибудь уравнение между a_{ik}, то мы можем истолковать его как образ, являющийся в этом многообразии конических сечений некоторым определенным подмногообразием низшего числа измерений. Совершенно аналогичным образом можно поступать в случае образов второго класса:

$$\sum a_{ik}u_iu_k = 0;$$

опять-таки можно устанавливать соотношения между a_{ik} и толковать их геометрически.

Мы не будем вдаваться в подробности, а ограничимся лишь историческими замечаниями. Исследования в указанной здесь области были опубликованы, например, Рэйе, автором известного учебника, в журнале Крелля, том 82 (1877): „О линейных системах и сетях поверхностей второй степени“ (Reye, Über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades). Как показывает само заглавие, Рэйе ограничи-

вается рассмотрением только линейных соотношений между коэфициентами. Ср. также Сегре (C. Segre, Studio sulle quadriche...) в Memorie Torino (2) 36 (1883), стр. 3—86, затем там же Sulla geometria della retta..., стр. 87—157.

§ 20. Прямолинейные координаты.

Перейдем теперь к дальнейшему примеру, который мы, ввиду его важности, изложим подробнее, именно, *к геометрии прямых линий*, т. е. к геометрии, *рассматривающей в качестве элементов пространства прямые линии*. Здесь речь идет об исследованиях, которые Плюкер опубликовал в 1868/69 г. в своей работе „Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства" (Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement). Впрочем в этой новой работе Плюкер возвращается к старым исследованиям, изложенным в „Системе геометрии пространства" в 1846 г. (см., например, № 258). Здесь Плюкер высказывает ту мысль, что прямые зависят от четырех постоянных и что всегда уравнения между четырьмя переменными можно толковать, как соотношения между прямыми пространства. Прямая линия в пространстве будет задана, если, например, известны ее проекции на две координатные плоскости, хотя бы на плоскости x, z и y, z; следовательно

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma.$$

Величины r, s, ρ, σ как раз и рассматриваются как прямолинейные координаты.

Можно затем получить три типа образов, смотря по тому, *одно*, *два* или *три* уравнения заданы между прямолинейными координатами; в соответствии с этим эти образы зависят от трех, двух или одного параметра. Плюкер называет их соответственно *линейчатыми комплексами*, *линейчатыми конгруэнциями* и *линейчатыми поверхностями*. Первый пример линейчатых комплексов дают касательные к произвольной поверхности, но этот пример не является общим случаем, в чем мы убедимся, если вспомним, что уже говорилось о линейных линейчатых комплексах. Пример линейчатых конгруэнций нам уже встречался; линейчатую конгруэнцию образуют, например, общие касательные двух поверхностей F_2. В этом случае, в частности, мы называем поверхности второй степени *фокальными поверхностями* линейчатого образа. Примером линейчатой поверхности является всякий однополостный гиперболоид, и притом в двойном смысле, смотря по тому, направим ли мы свое внимание на одно или другое семейство прямолинейных образующих.

Более глубокое рассмотрение этих исследований показывает нам, что целесообразно наряду с r, s, ρ, σ ввести еще в качестве равноправной пятой координаты

$$r\sigma - s\rho = \eta.$$

Именно, если мы составим проекцию прямой на третью координатную плоскость, плоскость x, y (что достигается простым исключением z

из вышеприведенных уравнений проекций на плоскости x, z и y, z), то получим уравнение

$$ry - sx = r\sigma - s\rho.$$

Мы видим, что после введения η устраняется ничем не оправданное особое положение третьей координатной плоскости. После того, как введены пять прямолинейных координат r, s, ρ, σ, η, связанных условием

$$\eta = r\sigma - s\rho,$$

изучают линейные, а также квадратичные уравнения между ними, и называют получающиеся при этом образы линейным комплексом, комплексом второй степени и т. д.

Мы все же сделаем еще один обобщающий шаг, именно, введем *однородные* переменные. Этой цели мы лучше всего достигнем следующим образом. Если прямая определена посредством двух своих точек x, y, z и x', y', z', то, как легко видеть, пять ее прямолинейных координат выразятся формулами:

$$r = \frac{x - x'}{z - z'}, \qquad s = \frac{y - y'}{z - z'}, \qquad \eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'}.$$
$$\rho = \frac{x'z - xz'}{z - z'}, \qquad \sigma = \frac{y'z - yz'}{z - z'},$$

Вместо наших пяти координат r, s, ρ, σ, η целесообразно теперь ввести отношения следующих величин:

$$r : s : 1 : -\sigma : \rho : \eta,$$

которые тотчас дают отношения:

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') : (yz' - y'z) : (zx' - xz') : (xy' - yx').$$

Между этими шестью величинами, которые мы теперь выбираем за *однородные координаты прямой*, существует тождественное соотношение:

$$(x - x')(vz' - y'z) + (y - y')(zx' - z'x) + (z - z')(xy' - x'y) = 0.$$

Чтобы это соотношение легче было запомнить, мы образуем матрицу

$$\begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что *шесть прямолинейных координат относятся как миноры второго порядка*, которые можно образовать из этой матрицы. Если мы хотим освободиться также и от прямоугольной системы координат и положить в основу координатный тетраэдр, то вместо только что написанной матрицы мы будем иметь следующую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix}.$$

Из нее мы опять образуем миноры второго порядка и, введя множитель пропорциональности ρ, назовем однородными координатами прямой линии следующие величины:

$$\begin{aligned} \rho p_{12} &= x_1y_2 - x_2y_1, & \rho p_{34} &= x_3y_4 - x_4y_3, \\ \rho p_{13} &= x_1y_3 - x_3y_1, & \rho p_{42} &= x_4y_2 - x_2y_4, \\ \rho p_{14} &= x_1y_4 - x_4y_1, & \rho p_{23} &= x_2y_3 - x_3y_2, \end{aligned}$$

или короче:

$$\rho p_{ik} = x_iy_k - x_ky_i.$$

Словами наш результат можно сформулировать так: *прямолинейными координатами p_{ik} в пространстве мы называем шесть величин, которые относятся как миноры второго порядка, составленные из координат двух точек, лежащих на прямой линии.*

Между ними существует квадратичное соотношение

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Оно очень просто получается из следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0,$$

левую часть которого надо развернуть таким образом, чтобы каждый минор второго порядка, состоящий из элементов первых двух строк, умножался на соответствующий сопряженный минор.

Это один из способов введения прямолинейных координат; он основывается на том, что всякая прямая линия определяется двумя своими точками. В этом смысле Плюкер называет прямую линию *лучом*, а координаты p *„лучевыми координатами“*. В противоположность этому прямую линию можно определить еще как пересечение двух плоскостей; тогда, следуя Плюкеру, ее называют *осью* и говорят об *„осевых координатах“* (терминология, к сожалению, не вошедшая в употребление; новые авторы предпочитают употреблять во всех случаях слово „луч“, взятое из оптики). Как же определить осевые координаты?

Мы образуем совершенно аналогичным образом матрицу из координат обеих плоскостей

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Vmatrix},$$

а также ее миноры второго порядка. Затем полагаем:

$$\sigma q_{ik} = u_iv_k - u_kv_i;$$

эти шесть величин дают нам шесть координат прямой линии, по которой пересекаются обе плоскости u и v. Между ними также существует квадратичное тождество:

$$Q = q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} = 0.$$

Само собой напрашивается вопрос, *когда координаты* p_{ik} *и* q_{ik} *будут относиться к одной и той же прямой?*

Очевидно тогда, когда точки x_i и y_i, употребленные для получения p_{ik}, лежат в употребленных для получения q_{ik} плоскостях u_i и v_i, следовательно, когда существуют (мы пользуемся легко понятным способом записи) четыре уравнения $ux = 0$, $uy = 0$, $vx = 0$, $vy = 0$. Чтобы получить отсюда приведенное ниже соотношение между величинами p_{ik} и q_{ik}, требуется произвести небольшое вычисление, которого мы здесь делать не будем.

Мы получим, что p_{ik} и q_{ik} пропорциональны между собой, но при условии некоторой перестановки индексов:

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = q_{34} : q_{42} : q_{23} : q_{12} : q_{13} : q_{14}.$$

Вместо этого можно также написать:

$$\rho p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} \quad \text{или} \quad \sigma q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}},$$

где ρ и σ являются множителями пропорциональности.

Выведем еще в прямолинейных координатах условие пересечения двух прямых. Очевидно мы получим четыре формулы, в зависимости от того, возьмем ли мы одну или другую прямую в лучевых или осевых координатах. Самый вывод этих формул будет основываться на двух парах точек, лежащих на этих двух прямых: точек x_i и y_i на одной прямой, точек x'_i и y'_i на другой прямой. Если эти две прямые пересекаются, то четыре точки лежат в одной плоскости, т. е. мы получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Если левую часть разложим опять по минорам второго порядка, то получим:

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p_{34}p'_{12} + p_{42}p'_{13} + p_{23}p'_{14} = 0$$

или, принимая во внимание соотношение, которое связывает p_{ik} и q_{ik} одной и той же прямой,

$$\sum p_{ik}q'_{ik} = \sum q_{ik}p'_{ik} = 0$$

или же:

$$q_{12}q'_{34} + q_{13}q'_{42} + q_{14}q'_{23} + q_{34}q'_{12} + q_{42}q'_{13} + q_{23}q'_{14} = 0.$$

Следовательно, каждое из этих четырех уравнений представляет собой условие пересечения двух прямых в прямолинейных координатах; мы видим, в частности, *что эти условия являются линейными относительно координат каждой прямой.*

Наконец, мы определим прямые линии пространства посредством координат p_{ik} и q_{ik}, которые удовлетворяют условиям $P=0$ и $Q=0$. Определяя однозначно r, s, ρ, σ через координаты p_{ik}, теперь можно, обратно, высказать следующее предложение:

Если шесть величин p_{ik} удовлетворяют условию $P=0$, то они всегда могут быть рассматриваемы, как координаты прямой линии. Аналогичное имеет место для q_{ik}.

§ 21. Линейные многообразия линейчатой геометрии.

Обратимся теперь к новой задаче, именно, включим в рассмотрение линейные уравнения между координатами p_{ik} и q_{ik}. Спросим себя прежде всего, какое геометрическое значение имеют *одно*, затем *два*, наконец, *три* уравнения между ними.

1. Пусть задано одно уравнение между величинами p_{ik} или величинами q_{ik}. Очень удобно в нашем рассмотрении излагать оба случая параллельно. Пусть, например, заданы уравнения:

$$\sum a_{ik}p_{ik}=0 \quad \text{или} \quad \sum b_{ik}q_{ik}=0.$$

Величины a должны совпадать с величинами b в соответствии с имеющимися между координатами p_{ik} и q_{ik} соотношениями, поскольку каждые две из этих последних, снабженные „взаимно дополнительными индексами", означают одно и то же. Наше уравнение представляет *линейный линейчатый комплекс*; мы называем его линейным, так как *представляющее его уравнение — первой степени.*

Каков же его геометрический смысл? Здесь имеется один частный случай, значение которого мы сейчас же наглядно уясним, именно тот, когда выражение

$$A=a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}, \quad \text{или} \quad B=b_{12}b_{34}+b_{13}b_{42}+b_{14}b_{23}$$

обращается в нуль. Тогда в качестве прямолинейных координат можно рассматривать сами величины a_{ik} и b_{ik}; можно, например, положить:

$$a_{ik}=q'_{ik}, \quad b_{ik}=p'_{ik},$$

чтобы перейти к обычному способу обозначений. Тогда наше первоначальное уравнение перейдет в

$$\sum q'_{ik}p_{ik}=0 \quad \text{или} \quad \sum p'_{ik}q_{ik}=0.$$

Отсюда, принимая во внимание последнюю формулу § 20, получим предложение:

Если $A=B=0$, то мы имеем специальный линейный комплекс, все прямые линии которого пересекают некоторую фиксированную прямую, именно прямую, координатами которой являются $q'_{ik}=a_{ik}$ и $p'_{ik}=b_{ik}$.

Из этого случая мы легко можем вывести одно свойство выражения A или B. Именно оно является *инвариантом* нашего линейного комплекса. В качестве предварительного определения, более для ориентации, чем для точного установления этого понятия, можно сказать следующее:

Под инвариантом геометрического образа мы понимаем выражение, составленное из коэфициентов уравнения этого образа, обращение в нуль которого выражает нечто независимое от выбора системы координат. В силу этого подобное выражение при преобразовании координат, вообще говоря, изменяется только на необращающийся в нуль множитель.

A (или B) есть как раз выражение такого рода. Поэтому мы назовем его просто *„инвариантом комплекса"*.

Каков же геометрический смысл уравнения

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0 \quad \text{и} \quad \sum b_{ik} q_{ik} = 0$$

в общем случае? Вместо первого уравнения можно написать также $\sum a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) = 0$; это уравнение представляет все прямые, соединяющие какие-нибудь две удовлетворяющие ему точки x, y. Но последнее уравнение было уже нами рассмотрено. Оно определяло нуль-систему, а подлежащие рассмотрению прямые мы называли „нуль-прямыми" этой нуль-системы. Отсюда мы тотчас получаем:

Прямые линии нашего линейного комплекса являются нуль-прямыми некоторой нуль-системы, которая вырождается тривиальным образом, если комплекс является специальным.

Это предложение мы сейчас же можем распространить на линейчатый комплекс n-й степени, который может быть определен уравнением $f_n(p_{ik}) = 0$. Если затем считать, например, точку x неподвижной, то точка y опишет некоторую коническую поверхность n-го порядка, вершиной которой является как раз точка x. *Следовательно, вообще в случае произвольного линейчатого комплекса n-й степени прямые линии, проходящие через фиксированную точку x, образуют некоторый конус n-го порядка.*

Изящество этих рассмотрений состоит в том, что они тотчас же переносятся на координаты q_{ik} и на уравнение:

$$\sum b_{ik}\, q_{ik} = 0\,.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$\sum b_{ik}(u_i v_k - v_i u_k) = 0,$$

причем теперь прямая линия рассматривается как пересечение двух плоскостей. *Двойственным образом мы получим при фиксированных u_i уравнение точки, которая соответствует этой плоскости в нуль-системе.* Совокупность наших прямых линий будет представлена опять нуль-прямыми нуль-системы. *Вообще, при заданном уравнении $f'_n(q_{ik})$, мы получим для $q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$ при фиксированных u в плоскостных текущих координатах v уравнение кривой, которая в плоскости и огибается прямыми комплекса; кривая является кривой n-го класса.*

2. Переходим теперь к рассмотрению системы двух линейных уравнений, которым должны одновременно удовлетворять прямолинейные координаты:

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0 \quad \text{и} \quad \sum a'_{ik} p_{ik} = 0.$$

Определенный ими геометрический образ назовем *линейной конгруэнцией.*

Сколько ее прямых проходит через произвольную точку пространства? В первом комплексе

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0,$$

так же как и во втором комплексе произвольной точке x ставится в соответствие плоскость. Прямая пересечения этих двух плоскостей является единственной прямой нашей системы, проходящей через эту точку пространства. Соответствующее предложение будет служить ответом на вопрос, сколько прямых лежит в одной плоскости.

Следовательно наша линейная конгруэнция является конгруэнцией первого порядка и первого класса, потому что через каждую точку пространства проходит, вообще говоря, только один луч, и в каждой плоскости лежит, вообще говоря, только одна ось.

Все прямые линии конгруэнции принадлежат также комплексу

$$\sum (a_{ik} + \lambda a'_{ik}) p_{ik} = 0.$$

Последнее выражение при переменном λ дает нам целый *„пучок линейных комплексов"*. Поэтому можно себя спросить, не содержатся ли среди этих комплексов специальные комплексы, т. е. не можем ли мы дать λ также значения, чтобы сами величины $a_{ik} + \lambda a'_{ik}$ можно было считать за прямолинейные координаты? Тогда должно иметь место следующее уравнение:

$$(a_{12} + \lambda a'_{12})(a_{34} + \lambda a'_{34}) + (a_{13} + \lambda a'_{13})(a_{42} + \lambda a'_{42}) + \\ + (a_{14} + \lambda a'_{14})(a_{23} + \lambda a'_{23}) = 0.$$

Но это уравнение является квадратным относительно λ.

Поэтому, вообще говоря, в пучке этих комплексов имеется два специальных комплекса; следовательно, конгруэнция состоит из всех прямых, проходящих через две неподвижные прямые, ее „направляющие прямые".

Эти прямые могут быть действительными или комплексно-сопряженными. Однако имеется также еще и тот частный случай, когда квадратное уравнение дает для λ двойной корень. Тогда мы имеем одну дважды считаемую направляющую прямую или директрису. Наконец, наше уравнение может также обращаться в тождество. Условием этого является:

$$A = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0, \quad A' = a'_{12}a'_{34} + a'_{13}a'_{42} + a'_{14}a'_{23} = 0$$

и

$$a_{12}a'_{34} + a_{34}a'_{12} + a_{13}a'_{42} + a_{42}a'_{13} + a_{14}a'_{23} + a_{23}a'_{14} = 0.$$

Но первое уравнение говорит, что первый комплекс является специальным, т. е. состоит из всех прямых, пересекающих некоторую неподвижную прямую. То же самое в силу второго уравнения имеет место для второго комплекса. Наконец, третье уравнение показывает, что обе эти неподвижные прямые сами взаимно пересекаются. Следовательно, в этом случае (когда уравнение для λ обращается в тождество) мы имеем дело с *„распадающейся"* конгруэнцией. *Она состоит из некоторой конгруэнции первого порядка, нулевого класса, все прямые которой проходят через одну фиксированную точку пространства, и конгруэнции нулевого порядка, первого класса, все прямые которой заполняют некоторую плоскость.*

Конгруэнция имеет бесчисленное множество направляющих прямых

$$q_{ik} = a_{ik} + \lambda a'_{ik},$$

именно все прямые, принадлежащие пучку прямых, определяемому с помощью a_{ik} и a'_{ik}.

Что касается теории конгруэнций, то она имеет целую *область применений*, подобно тому, как линейные комплексы в качестве нуль-системы находят применение в механике. Мы имеем в виду *геометрическую оптику*. В ней конгруэнцию называют *„системой лучей"*. Рассматривают, например, световую точку, посылающую лучи во все стороны; они образуют конгруэнцию первого порядка, нулевого класса. Эти лучи могут, например, падать на линзы, которые, впрочем, могут быть совершенно произвольной формы (не обязательно сферическими); можно представить себе еще, что лучи отражаются затем от какого-нибудь зеркала. В конце концов все полученные таким образом лучи образуют семейство прямых линий, зависящее опять-таки от двух параметров, т. е. *во всех случаях получается некоторая линейчатая конгруэнция*. В качестве первых исследователей, работавших в этой области, здесь следует назвать Эйлера, Монжа (1781), Малюса, Гамильтона и Куммера.

Разумеется, эта оптическая система лучей, вообще говоря, не является *линейной* конгруэнцией. Но приближенно, вблизи каждого своего отдельного луча, она может рассматриваться так, как если бы она была линейной конгруэнцией, подобно тому как в окрестности данной точки поверхность заменяют ее касательной плоскостью в этой точке. К этому способу рассмотрения относятся построенные Куммером модели [1]). Они дают все лучи линейной конгруэнции, проходящие через точки маленького круга, расположенного в плоскости, перпендикулярной к некоторому выбранному лучу, и имеющего центр в точке пересечения этого луча и плоскости. Отдельно приходится рассматривать три случая: случай, когда обе направляющие прямые конгруэнции действительны; когда они обе мнимы; наконец, когда они совпадают.

Очень поучительно представить себе всю *совокупность* лучей, образующих линейную конгруэнцию. Если направляющие прямые дей-

[1]) См. каталог математических моделей Дика, Мюнхен 1892.

ствительны, это, разумеется, не представляет затруднений. Напротив, в случае мнимых или совпадающих направляющих прямых трудно обойтись без моделей.

3. Пусть заданы три линейных уравнения в прямолинейных координатах:

$$\sum a_{ik}p_{ik}=0,\quad \sum a'_{ik}p_{ik}=0,\quad \sum a''_{ik}p_{ik}=0;$$

они представляют однопараметрическое многообразие прямых линий, т. е. некоторую *линейчатую поверхность*. Спросим себя теперь, какого порядка будет эта поверхность. Для этой цели подсчитаем число ее точек пересечения с прямыми q'_{ik}, т. е. число линий, которые кроме заданного уравнения удовлетворяют еще следующему уравнению:

$$\sum q'_{ik}p_{ik}=0.$$

Если мы вспомним, что между координатами имеет место еще квадратичное соотношение $P(p_{ik})=0$, то увидим, что число решений всех наших уравнений с шестью однородными переменными p_{ik} как раз равно двум. Это значит, что на нашей линейчатой поверхности имеется, вообще говоря, две прямые линии, встречающие прямые q'_{ik}. Легко понятное обобщение приводит к следующему предложению:

Три комплекса порядка l, m, n имеют общую линейчатую поверхность порядка $2\cdot l\cdot m\cdot n$.

В нашем специальном случае линейных комплексов, в качестве образа, составленного из их общих прямых, мы получим линейчатую поверхность второго порядка, т. е. однополостный гиперболоид; разумеется эта поверхность может перейти, в частности, в гиперболический параболоид.

Однополостный гиперболоид наряду с одним семейством образующих имеет еще и второе семейство; поэтому возникает вопрос о том, какую роль здесь играет это последнее. Прежде всего очевидно, что поверхность второго порядка принадлежит одновременно не только трем заданным комплексам, но и целому трехчленному семейству:

$$\lambda\sum a_{ik}p_{ik}+\lambda'\sum a'_{ik}p_{ik}+\lambda''\sum a''_{ik}p_{ik}=0$$

или

$$\sum(\lambda a_{ik}+\lambda' a'_{ik}+\lambda'' a''_{ik})\,p_{ik}=0.$$

Попытаемся и в нем определить опять специальные комплексы.

Для этой цели нам просто надо положить равным нулю инвариант комплекса, т. е.

$$(\lambda a_{12}+\lambda' a'_{12}+\lambda'' a''_{12})(\lambda a_{34}+\lambda' a'_{34}+\lambda'' a''_{34})+$$
$$+(\lambda a_{13}+\lambda' a'_{13}+\lambda'' a''_{13})(\lambda a_{42}+\lambda' a'_{42}+\lambda'' a''_{42})+$$
$$+(\lambda a_{14}+\lambda' a'_{14}+\lambda'' a''_{14})(\lambda a_{23}+\lambda' a'_{23}+\lambda'' a''_{23})=0.$$

Но это — квадратичное соотношение для отношения $\lambda : \lambda' : \lambda''$; следовательно оно доставляет однопараметрическое семейство систем решений. *Направляющие прямые этих специальных линейных комплексов, содержащихся в нашем семействе, являются прямыми второго семейства образующих нашего гиперболоида.*

Впрочем мы будем называть такое семейство линейных комплексов, как представленное вышеприведенной формулой, смотря по обстоятельствам, то *трехчленным линейным семейством*, то *двупараметрическим линейным семейством*; допустимость обоих оборотов речи легко понять. Скоро нам придется часто пользоваться этой терминологией. Теперь мы могли бы изложить еще специальные случаи, которые может представить трехчленное линейное семейство линейных комплексов; но мы на этом останавливаться не будем и, переходя дальше, спросим себя:

4. Что означают четыре линейных уравнения между p_{ik}?

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum a'_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum a''_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum a'''_{ik} p_{ik} = 0.$$

Так как кроме них существует еще квадратичное соотношение $P = 0$, то эти уравнения доставляют нам два решения, т. е.

Четыре линейных комплекса имеют, вообще говоря, две общие прямые.

Обобщая, получаем следующее предложение: *четыре комплекса порядков l, m, n, o имеют, вообще говоря $2 \cdot l \cdot m \cdot n \cdot o$ общих прямых. Разумеется, существуют особые случаи, которые мы здесь рассматривать не будем.*

§ 22. Линейный комплекс, как пространственный элемент.

Перейдем теперь к изложению дальнейшего развития линейчатой геометрии по работам Клейна, Math. Annalen, т. 2, 1869 г.[1]). Эти работы основываются на том, что в качестве элемента пространства мы рассматриваем не прямую линию, но вообще линейный линейчатый комплекс, определяемый уравнением

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0,$$

т. е. *мы изучаем уравнения между коэфициентами a_{ik} комплекса.*

С этой мыслью очень хорошо согласуется цель, которую преследовал Болл в своей теории винтов (уже упомянутой нами). Там он рассматривает винт, как элемент пространства; к сожалению, в подробности этого мы входить не можем[2]). Итак, величины a_{ik} рассматриваются в качестве *координат*, которые в случае нужды мы будем также обозначать b_{ik}, причем всегда следует принимать во внимание известное нам правило относительно перестановки индексов.

---

[1]) „Zur Theorie der Linien komplexe ersten und zweiten Grades". „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten". См. Gesammelten Abhandlungen, том I, стр. 53, стр. 81.

[2]) См. также Kleins Werke том I, стр. 503, где дан обзор теории винта Болла.

Пусть заданы две системы новых координат a_{ik} и a'_{ik} (или также b_{ik}, b'_{ik}). Из них мы образуем линейное семейство $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$. Этому двучленному, т. е. однопараметрическому семейству, соответствует, как мы знаем, *пучок линейных комплексов*. По известной схеме для каждого отдельного комплекса этого пучка мы образуем инвариант:

$$(\lambda a_{12} + \lambda' a'_{12})(\lambda a_{34} + \lambda' a'_{34}) + \ldots + \ldots$$

или

$$\lambda^2 A + \lambda'^2 A' + \lambda\lambda'(a_{12}a'_{34} + a_{34}a'_{12} + a_{14}a'_{23} + a_{23}a'_{14} + a_{13}a'_{42} + a_{42}a'_{13}),$$

где A и A' сокращенно обозначают $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}$ и $a'_{12}a'_{34} + a'_{13}a'_{42} + a'_{14}a'_{23}$. A и A' являются „инвариантами" комплексов a_{ik} и a'_{ik}. Сейчас нас особенно интересует выражение, стоящее в скобках, которое коротко можно записать в виде:

$$\sum a_{ik} b'_{ik} \quad \text{или} \quad \sum a'_{ik} b_{ik}.$$

Назовем его совместным инвариантом двух комплексов. Ближайшим вопросом будет опять вопрос о том, *что означает обращение в нуль совместного инварианта.* Так как b_{ik} могут быть даны совершенно произвольно, то уравнение

$$\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$$

при переменных a_{ik} одновременно изображает общее линейное уравнение, которое можно образовать из координат комплекса. *Поэтому с нашим последним вопросом связан вопрос о значении общего линейного уравнения между координатами комплекса.*

Как же расположены один относительно другого два комплекса, для которых имеет место уравнение

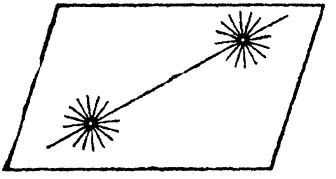
$$\sum a_{ik} b'_{ik} = 0?$$

Ответ на этот вопрос представляет большую важность для многих последующих исследований. Это взаимное положение обоих комплексов называют *инволюторным положением.* Болл называет два винта, находящихся в подобном соотношении, „взаимными винтами".

Для полного понимания этого соотношения мы должны вернуться к понятию „инволюции", как оно рассматривается в низшей проективной геометрии. Там, как известно, в простейшем случае инволюцией называют соответствие точек прямой, при котором, после того, как выбраны две неподвижные действительные или мнимые точки d_1 и d_2 этой прямой, каждой точке p нашей прямой ставится в соответствие четвертая гармоническая точка p' этой прямой. Впрочем выражением *„инволюторное соответствие"* мы ведь уже пользовались в теории обратных радиусов и в случае нуль-системы. В согласии с употребленным там способом выражения соответствие между точками p и p' на нашей прямой линии является в действительности взаимно обратным.

Теперь вернемся к линейному комплексу. Выберем какую-нибудь плоскость пространства; в ней посредством комплекса a_{ik} выделяется точка x_i и точно так же посредством второго комплекса a'_{ik} выделяется вторая точка x'_i в качестве носителя лучей комплекса в этой плоскости (см. черт. 37). Соединяющая эти точки прямая принадлежит обоим комплексам одновременно и представляет собой луч конгруэнции в выбранной плоскости. Очевидно, теперь, к комплексу $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$ в нашей плоскости принадлежит некоторая точка того же самого луча конгруэнции (так как этот луч является общим для всех комплексов семейства); и притом однородные координаты этой точки даются выражением $\lambda x_i + \lambda' x'_i$. Чтобы найти направляющую прямую семейства комплексов $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$, мы составили уравнение:

$$A\lambda^2 + A'\lambda'^2 + \lambda\lambda'\{\ldots\} = 0.$$



Черт. 37.

Если совместный инвариант обоих комплексов равен нулю, то это уравнение переходит в

$$A\lambda^2 + A'\lambda'^2 = 0$$

или

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \pm\sqrt{-\frac{A'}{A}}.$$

Поэтому при нашем предположении уравнения направляющих прямых получаются в форме

$$\sqrt{-A'}\sum a_{ik}p_{ik} + \sqrt{A}\sum a'_{ik}p_{ik} = 0$$

и

$$\sqrt{-A'}\sum a_{ik}p_{ik} - \sqrt{A}\sum a'_{ik}p_{ik} = 0,$$

где теперь коэфициенты p_{ik}, взятые с надлежащими индексами, являются координатами направляющих прямых. Очевидно, эти направляющие прямые должны встречать обозначенный на чертеже луч конгруэнции в двух точках d_1 и d_2, так как ведь он также принадлежит специальным комплексам, определенным направляющими прямыми. В качестве координат этих точек пересечения мы получаем:

$$\text{для } d_1\text{:} \quad \sqrt{-A'}\,x_i + \sqrt{A}\,x'_i$$

$$\text{для } d_2\text{:} \quad \sqrt{-A'}\,x_i - \sqrt{A}\,x'_i.$$

Как видно, эти точки расположены гармонически относительно точек x_i и x'_i, так что в качестве окончательного результата получаем следующее предложение:

Два линейных комплекса, находящихся в инволюции, доставляют в некоторой произвольной плоскости пространства на принадлежащем этой плоскости луче конгруэнции две точки, которые всегда гармонически расположены по отношению к двум точкам пересечения луча конгруэнции с обеими направляющими прямыми.

В этом предложении слова точка и плоскость можно поменять местами, т. е. само инволюторное положение двух линейных комплексов является двойственным самому себе. Если мы теперь предположим, что один из двух комплексов (инволюторно расположенных) является специальным, то можно положить, например, $b'_{ik} = p'_{ik}$ и наше уравнение

$$\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$$

переходит в

$$\sum a_{ik} p'_{ik} = 0.$$

Следовательно, инволюторное расположение попросту показывает, что направляющие прямые этого специального комплекса принадлежат второму комплексу.

Если, наконец, мы предположим, что оба комплекса являются специальными, то мы положим $b'_{ik} = p'_{ik}$, $a_{ik} = q_{ik}$ и получим уравнение:

$$\sum q_{ik} p'_{ik} = 0.$$

Следовательно, инволюторное расположение показывает, что обе направляющие прямые пересекаются. Разумеется оба факта можно объединить в общее определение.

В линейном уравнении

$$\sum a_{ik} b'_{ik} = 0$$

мы имеем общее *условие для инволюторного расположения* обоих комплексов a_{ik}, b'_{ik}. С подобным линейным уравнением можно всегда *связать теорию взаимности*. Так как линейный комплекс

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0$$

зависит от пяти существенных постоянных, то вообще мы будем иметь дело с пятимерным многообразием линейных комплексов. Если заданы шесть каких-нибудь линейных комплексов

$$\sum a_{ik} p_{ik} = 0, \quad \sum a'_{ik} p_{ik} = 0, \ldots,$$

друг от друга линейно независимых (т. е. детерминант, составленный из их коэфициентов, не обращается в нуль), то с их помощью можно составить общий линейный комплекс с шестью параметрами таким образом:

$$\lambda \sum a_{ik} p_{ik} + \lambda' \sum a'_{ik} p_{ik} + \ldots + \lambda^{\nu} \sum a^{\nu}_{ik} p_{ik},$$

в чем легко убеждаются методом сравнивания коэфициентов. Так как это выражение состоит из шести членов, то многообразие линейных комплексов мы будем также называть *шестичленным линейным семейством*.

1. Теперь, прежде всего, мы прибавим дальнейшее уравнение

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0,$$

которое соответствует нашему ранее приведенному уравнению:

$$\sum a_{ik} b'_{ik} = 0;$$

только здесь для b'_{ik} мы выбрали обозначение B_{ik}, чтобы располагать большей свободой обозначений. Величины a_{ik} мы рассматриваем, как определенные заданные постоянные. Тогда комплексу с коэфициентами a_{ik} будет соответствовать четырехпараметрическое семейство комплексов B_{ik}, которое вместе с первым удовлетворяет написанному условию, т. е. находится с ним в инволюции. Теперь мы утверждаем, что комплексы B_{ik} образуют пятичленное линейное семейство. В этом легко убедиться. Общий комплекс составлен из шести комплексов со столькими же параметрами λ. Если расположить эту форму по координатам p_{ik} и подставить вместо B_{ik} коэфициенты при них в вышеприведенное уравнение:

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0,$$

то получим уравнение с шестью параметрами λ, из которого один из них можно выразить через остальные. Отсюда непосредственно следует, что самый общий линейный комплекс, удовлетворяющий нашему условию, может быть составлен из пяти комплексов B_{ik} с пятью параметрами Λ:

$$\Lambda B_{ik} + \Lambda' B'_{ik} + \ldots + \Lambda^{\mathrm{IV}} B^{\mathrm{IV}}_{ik}.$$

При этом разумеется комплексы B_{ik}, $B'_{ik}, \ldots, B^{\mathrm{IV}}_{ik}$ должны быть взяты линейно независимыми, т. е. так, чтобы не все детерминанты пятого порядка, которые могут быть образованы из их координат, одновременно обращались в нуль.

Все заданные величины a_{ik}, которые без ущерба для геометрического значения можно превратить в λa_{ik}, мы теперь можем рассматривать, как некоторое одночленное семейство линейных комплексов. Посредством уравнения

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0$$

ему ставится в соответствие некоторое пятичленное семейство линейных комплексов, которые все находятся в инволюции с первым семейством.

2. Пусть теперь задано два уравнения:

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0, \quad \sum a'_{ik} B_{ik} = 0,$$

в которых величины a_{ik} и a'_{ik} рассматриваются как постоянные. Оба эти уравнения мы можем объединить в одно, введя два параметра λ:

$$\sum (\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}) \cdot B_{ik} = 0,$$

которое нам показывает, что комплекс B_{ik} должен находиться в инволюции со всем двучленным семейством $\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik}$. Мы видим, что

совокупность комплексов B_{ik}, удовлетворяющих этому условию, образует трехпараметрическое многообразие или четырехчленное линейное семейство. Поэтому, если мы нашли четыре линейно независимых комплекса такого типа B_{ik}, B'_{ik}, B''_{ik}, B'''_{ik}, то опять-таки самый общий комплекс выразится формулой:

$$\Lambda B_{ik} + \Lambda' B'_{ik} + \Lambda'' B''_{ik} + \Lambda''' B'''_{ik}.$$

3. Наконец мы можем считать заданными три уравнения:

$$\sum a_{ik} B_{ik} = 0, \quad \sum a'_{ik} B_{ik} = 0, \quad \sum a''_{ik} B_{ik} = 0.$$

Тогда трехчленному семейству, образованному из трех комплексов a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik}, будет соответствовать также трехчленное семейство, каждый отдельный комплекс которого состоит в инволюции со всеми комплексами первого семейства. Объединяя все эти случаи, можно, следовательно, сказать:

Поскольку наше условие инволюционности является линейным относительно координат обоих рассматриваемых линейных комплексов, оно ставит в соответствие каждому ν*-членному линейному семейству линейных комплексов некоторое* $(6-\nu)$*-членное линейное семейство линейных комплексов, которые находятся в инволюции со всеми комплексами первого семейства* ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, 6$).

В этом предложении ясно выступает упомянутая нами взаимность.

Далее, мы можем обратить внимание на специальные комплексы, содержащиеся в этих соответствующих семействах. Если, например, мы возьмем трехчленное семейство линейных комплексов, то мы получим в нем, как мы уже знаем, однопараметрическое семейство специальных комплексов. Они дают образующие одной системы некоторого однополостного гиперболоида.

Здесь особенно ясно бросается в глаза только что рассмотренная взаимность между двумя трехчленными, т. е. двупараметрическими системами линейных комплексов. Специальные комплексы обоих семейств являются просто двумя системами прямолинейных образующих некоторого гиперболоида. Инволюционное расположение обоих семейств проявляется в том, что все образующие первой системы пересекают все образующие второй системы.

Эти исследования близко подвели нас к дальнейшему рассмотрению тем, которые своим предметом имеют введение нового общего координатоопределения линейных комплексов.

Новые координаты y_l *мы определяем как некоторые линейные формы рассмотренных до сих пор координат* a_{ik} (при условии введения множителя пропорциональности σ, так как ведь нам приходится иметь дело только с отношениями координат):

$$\sigma y_l = \sum_{ik} C_{ikl} a_{ik}.$$

Разумеется предполагается, что детерминант из коэфициентов $|C_{ikl}|$ отличен от нуля. Тогда мы можем разрешить уравнение относительно величин a_{ik} и получим:

$$\tau a_{ik} = \sum_l \gamma_{ikl} y_l.$$

Как мы видим, каждая отдельная из обобщенных координат y_l является левой частью условия инволюционности, относящегося к некоторому фиксированному комплексу C_l.

Как же мы будем оперировать с этими обобщенными координатами y_l? Раньше мы нашли в качестве условия, характеризующего специальный комплекс, обращение в нуль выражения:

$$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}.$$

Если мы подставим вместо a_{ik} их значения из последнего уравнения, то наше условие перейдет в такое:

$$\sum \gamma_{12l} y_l \cdot \sum \gamma_{34l} y_l + \ldots = 0,$$

которое мы коротко обозначим $\Omega = 0$, т. е.

Если новые координаты относятся к специальному комплексу, следовательно, являются прямолинейными координатами, то между ними существует квадратичное соотношение $\Omega = 0$.

§ 23. Привлечение вспомогательных средств из теории квадратичных форм.

Алгебраической областью, в которую мы теперь по необходимости вступаем, является *теория квадратичных форм*, особенно в их отношении к линейным подстановкам. Нам придется произвести краткое рассмотрение этих форм, которое будет скорее сводкой важнейших предложений, чем их выводом и обоснованием.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — первоначальные координаты и

$$Q = \sum k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

— рассматриваемая квадратичная форма. Теперь мы введем в квадратичную форму новые переменные $y_1, \ldots, y_n$ посредством совершенно произвольной линейной подстановки с отличным от нуля определителем; наша форма перейдет в

$$Q = \sum l_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta.$$

Что же общего имеет эта последняя форма с первоначальной формой? *Здесь прежде всего доказывается, что определитель $|k_{\alpha\beta}|$ является инвариантом квадратичной формы, который после подстановки обращается в нуль только в том случае, если начальный определитель был равен нулю, а в остальных случаях он изменяется только на необращающийся в нуль множитель. Наоборот, всякие две квадратичные формы (с необращающимся в нуль определителем) можно всегда перевести одну в другую посредством линейной подстановки,*

если в качестве коэфициентов подстановки допускать также и комплексные числа.

Эту теорему мы тотчас применим к нашей квадратичной форме, инварианту линейного комплекса $a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}$, которую мы в соответствии с новыми обозначениями переменных теперь запишем в виде: $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6$. Ее определитель равен:

$$\begin{vmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{vmatrix} = -1.$$

Следовательно, выражение $a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}$, рассматриваемое как квадратичная форма шести переменных, имеет отличный от нуля определитель. Далее из нее посредством линейной подстановки величин a_{ik} получается форма Ω. Мы заключаем, *что определитель Ω также отличен от нуля и затем что всякая форма Ω, обладающая отличным от нуля определителем, может быть получена таким образом при надлежащем выборе комплексных координат y.*

2. Возвратимся к общему рассмотрению квадратичных форм. Если мы вообще хотим исключить мнимые величины из рассмотрения, следовательно хотим ограничиться *действительными* квадратичными формами и *действительными* линейными подстановками, то наряду с только что сказанным надо принять во внимание еще *закон инерции квадратичных форм.* Он заключается в следующем:

Предположим, что нам удалось каким-нибудь образом перевести заданную квадратичную форму

$$Q=\sum k_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

посредством линейной подстановки x_i в форму:

$$m_1z_1^2+m_2z_2^2+\ldots+m_nz_n^2,$$

т. е. в сумму n чисто квадратичных членов, что можно сделать разнообразными способами.

Тогда определитель новой формы будет:

$$\begin{vmatrix} m_1&0&0&\cdot&0\\ 0&m_2&0&\cdot&0\\ 0&0&m_3&\cdot&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&0&0&\cdot&m_n \end{vmatrix} = m_1\cdot m_2\ldots m_n.$$

Таким образом вследствие нашего ранее сформулированного предложения ни одна из этих величин m не равна нулю, если детерминант

заданной формы, как мы это здесь предполагаем, отличен от нуля. Закон инерции касается вопроса о том, сколько из этих n будут положительны и сколько отрицательны. Именно, *этот закон утверждает, что для каждой действительной квадратичной формы с необращающимся в нуль определителем, необходимо должно быть совершенно определенное число положительных и отрицательных коэффициентов n, как бы мы ни ввели переменные z.*

Если мы предположим, что нашу квадратичную форму Q можно привести к различным нормальным формам, например, к формам:

$$Q = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \ldots,$$
$$Q = z_1'^2 + z_2'^2 + \ldots + z_{p'}'^2 - z_{p'+1}'^2 - z_{p'+2}'^2 - \ldots,$$

с $p < p'$, то линейные уравнения

$$z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots, z_p = 0; \quad z'_{p'+1} = 0, z'_{p'+2} = 0, \ldots$$

имели бы нетривиальную систему решений x_k, так как число уравнений меньше $+n$. Пусть для этих x_k, например, $z_{p+1} \neq 0$; тогда согласно первой нормальной формы мы получили бы $Q < 0$, а согласно второй $Q \geqslant 0$. Из этого противоречия следует: $p = p'$ — справедливость закона инерции.

Применим закон инерции к рассматриваемой квадратичной форме линейчатой геометрии $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$ и спросим себя, сколько будет положительных и сколько отрицательных членов при преобразовании этой формы в форму, содержащую только квадратичные члены. Желаемого легко достигнуть посредством следующей подстановки:

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3 + y_4, \quad x_5 = y_5 + y_6,$$
$$x_2 = y_1 - y_2, \quad x_4 = y_3 - y_4, \quad x_6 = y_5 - y_6.$$

Тогда мы получим форму:

$$\Omega = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2,$$

т. е. квадратичная форма Ω, основная для линейчатой геометрии, в смысле закона инерции принадлежит к таким, в которых число положительных членов равно числу отрицательных членов.

Если при введении новых координат мы ограничимся действительными линейными подстановками, то мы никаким способом не сможем перевести Ω, например, в форму, составленную только из положительных квадратов. Иначе дело обстоит при допущении мнимых подстановок. Если мы добавочно положим, например,

$$z_1 = y_1, \quad z_3 = y_3, \quad z_5 = y_5,$$
$$z_2 = iy_2, \quad z_4 = iy_4, \quad z_6 = iy_6,$$

с $i^2 = -1$, то в самом деле получим форму: $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_6^2$.

Представим себе теперь, что для линейного комплекса в качестве координат введены какие-нибудь переменные $y_1, y_2, \ldots, y_6$; как же

с ними мы будем оперировать далее? Рассмотрим опять, как „инвариант" квадратичную форму $\Omega(y_1, \ldots, y_6)$. Обращение его в нуль дает условие для специального комплекса.

Но как образовать *совместный инвариант двух комплексов* в новых координатах? Ранее мы его ввели, рассматривая коэфициент при $\lambda\lambda'$ в разложении $\Omega(\lambda a_{ik} + \lambda' a'_{ik})$; теперь мы поступим аналогично и напишем:

$$\Omega(\lambda y + \lambda' y') = \lambda^2 \Omega(y) + \lambda\lambda' \sum_1^6 \frac{\partial \Omega}{\partial y_\alpha} y'_\alpha + \lambda'^2 \Omega(y').$$

Коэфициент при $2\lambda\lambda'$

$$\frac{1}{2} \sum_1^6 \frac{\partial \Omega}{\partial y_\alpha} y'_\alpha$$

дает нам выражение для искомого совместного инварианта; его обращение в нуль означает, как и ранее, инволюторное расположение обоих комплексов. Если Ω имеет специальный вид:

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y^2,$$

то общий инвариант имеет вид:

$$y_1 y'_1 - \ldots + \ldots - y_6 y'.$$

В соответствии со специальной формой Ω мы назовем теперь основными комплексами следующие комплексы:

1. $y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \ldots, \quad y_6 = 0.$
2. $y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \ldots, \quad y_6 = 0$
. . . .

много оперирует с шестью „взаимными винтами", вполне соответствующими шести основным комплексам.

Впрочем в работе Клейна главным образом имеют дело с формой

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2+z_6^2,$$

т. е. с суммой только положительных квадратов, к которой, как мы уже отметили, можно перейти от первоначальной посредством мнимой подстановки. Еще и с другой стороны его предложения, сделанные в этой работе, являются более общими. Здесь, в его лекциях, всюду предполагается, что по крайней мере уравнения комплекса всегда являются действительными. Но при построении нашей координатной системы можно допустить такие комплексы, которые являются мнимыми, и тогда надо брать комплексно-сопряженные комплексы.

Затем для шести основных комплексов всегда имеет место то, что они попарно находятся в инволюции и, в частности, из *действительных* комплексов, которые среди них находятся, половина является правыми, а половина левыми [1]).

Обратимся теперь к *комплексам второй степени.* Такой комплекс задается уравнением

$$F_2=\sum b_{ik}b_{i'k'}p_{ik}p_{i'k'}=0,$$

которое содержит 21 член. При этом здесь появляется условие:

$$\Omega=p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0.$$

Следовательно, мы имеем одновременно две квадратичные формы, и опять возникает задача, которую мы уже рассматривали в § 12 при изучении циклид: обе формы посредством одной и той же линейной подстановки координат перевести в сумму чисто квадратичных членов:

$$F_2'=\frac{z_1^2}{k_1}+\frac{z_2^2}{k_2}+\ldots+\frac{z_6^2}{k_6},$$

$$\Omega'=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_6^2,$$

где величины k_i — надлежащие постоянные. Это показывает, что формы Ω и F при надлежащем допущении, которое мы укажем позднее в § 99, действительно могут быть приведены к этому виду; величины k_i являются действительными или мнимыми корнями уравнения шестой степени, которое мы получим, приравняв нулю детерминант формы $\Omega-kF$. Теперь очень просто можно опять ввести шесть основных комплексов посредством уравнений $z_1=0,\ldots,z_6=0$. *Вследствие этого также и в теории комплексов второй степени играет роль система шести действительных или мнимых линейных основных комплексов рассматриваемого типа.* Подробное выяснение этого можно найти в самой работе Клейна. Там, в частности, он рассматривает семейство ком-

[1]) О линейных комплексах в инволюции см. четыре заметки L. Berzolari в Rend. Lincei, 1922.

плексов второй степени, заданное следующим уравнением, содержащим параметр λ:

$$\sum \frac{z_i^2}{k_i - \lambda} = 0.$$

Эта форма уравнения сейчас же напоминает нам теорию конфокальных поверхностей второй степени, а также теорию конфокальных циклид. *В соответствии с этим эти комплексы тоже называются конфокальными.*

В качестве учебника по линейчатой геометрии, в котором изложены также многие исследования Клейна, следует назвать [1]) К. Циндлера „Линейчатая геометрия с приложениями“ (K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen), т. I, Лейпциг 1902; т. 2, Лейпциг 1906. К исследованиям по новейшей линейчатой геометрии мы перейдем в § 77—80.

§ 24. Сравнение с пентасферическими координатами.

Мы не будем далее развивать линейчатую геометрию как таковую, а перейдем *к сравнению линейчатой геометрии и точечной геометрии в пентасферических координатах.* В самом деле, наши последние формулы наталкивают на такое сравнение. Отдельные, соответствующие друг другу предложения мы будем писать рядом.

Линейчатая геометрия

1. Введение шести прямолинейных координат

$$x_1, \ldots, x_6$$

с условием:

$$\sum x_i^2 = 0.$$

2. $\sum_1^6 a_i x_i = 0$

дает линейный комплекс; комплекс является специальным для

$$\sum_1^6 a_i^2 = 0.$$

3. Два линейных комплекса находятся в инволюции, если:

$$\sum_1^6 a_i a_i' = 0.$$

Особый случай: две прямые пересекаются.

4. В основу координатной системы кладется шесть основных комплексов.

5. Конфокальные комплексы второй степени.

Пентасферические координаты

1. Введение пяти точечных пентасферических координат

$$x_1, \ldots, x_5$$

с условием:

$$\sum x_i^2 = 0.$$

2. $\sum_1^5 a_i x_i = 0$

представляет здесь сферу; если

$$\sum_1^5 a_i^2 = 0,$$

то мы имеем сферу нулевого радиуса

3. Уравнение

$$\sum_1^5 a_i a_i' = 0$$

означает, что две сферы пересекаются ортогонально.

Особый случай: две точки находятся на нулевом расстоянии друг от друга [2]).

4. Здесь — пять ортогональных сфер.

5. Конфокальные циклиды Дарбу.

[1]) На русском языке имеется учебник: Зейлигер Д. Н., Комплексная линейчатая геометрия, Л.—М 1934.

[2]) Отсюда следует только для действительных точек их совпадение.

Следовательно, линейчатая геометрия и точечная геометрия, если в основу последней положены пентасферические координаты, имеют дело с одними и теми же формулами; только в первой имеется шесть координат, во второй — пять. Все же приведенное здесь сопоставление неполно, коль скоро будет поставлен вопрос о соотношениях в *действительной* области, как это мы сейчас ближе рассмотрим.

В частности, посредством уравнения

$$\sigma x_i = \frac{S_i}{\rho_i}$$

мы определим ортогональные пентасферические координаты, причем S_i означает степень точки относительно i-й сферы, а ρ_i — соответствующий радиус; кроме того мы видели, что одна из пяти ортогональных сфер (которые по предположению все действительны) необходимо является нулевой. Но это означает, что, например, ρ_5, а вместе с тем также и x_5 будут чисто мнимыми. Поэтому, чтобы иметь действительные координаты, мы вместо x_5 введем iy_5 и ради однородности записи обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 через y_1, y_2, y_3, y_4. Тогда квадратичное тождество будет иметь вид:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_5^2 = 0.$$

В линейчатой геометрии ему противопоставляется при введении действительных координат условие:

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2 = 0.$$

Итак, вышеупомянутое различие в действительной области проявляется в том, что в *последнем случае, в смысле закона инерции, нормальная форма содержит одинаковое число положительных и отрицательных квадратов*; *в первом же случае положительных квадратов имеется на три больше, чем отрицательных*.

Все же это ни в коем случае нельзя рассматривать как недостаток нашего сопоставления; наоборот, как раз его достоинство заключается в том, что часто то, что на одной стороне является действительным, на другой оказывается мнимым. Наглядное геометрическое обозрение, доступное здесь, будет невозможно там, и наоборот.

Продолжим теперь еще далее нашу сравнительную таблицу, сопоставляя друг другу соответствующие геометрические образы.

Линейчатая геометрия	*Пентасферические точечные координаты*
Линейный комплекс.	Сфера.
Специальный линейный комплекс.	Сфера нулевого радиуса.
Линейная конгруэнция.	Круг.
Линейчатое семейство (на гиперболоиде).	Пара точек, как пересечение трех кругов.
Пара прямых (как линии, общие четырем комплексам).	Соответствующий образ отсутствует, так как мы имеем на одну координату меньше, чем в линейчатой геометрии.

Чтобы найти истинную причину возможности произведенного здесь сопоставления, целесообразно вернуться к *элементарному* введению линейчатой геометрии и пентасферических координит.

Что касается первой, то мы определяли прямую линию сначала четырьмя координатами r, s, ρ, σ, к которым затем мы присоединили как равноправную, пятую координату $\eta = r\sigma - s\rho$. Наконец, мы ввели шесть однородных координат посредством уравнений:

$$r = \frac{x_1}{x_6}, \quad \sigma = -\frac{x_2}{x_6}, \quad \rho = \frac{x_4}{x_6}, \quad \eta = \frac{x_5}{x_6}, \quad s = \frac{x_3}{x_6}.$$

Поэтому тождественное соотношение принимает здесь вид:

$$\Omega = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0.$$

Линейчатая геометрия получает свой особый характер благодаря тому, что важное геометрическое соотношение между двумя прямыми, условие пересечения, выражается полярным уравнением:

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} x_i' = 0.$$

Совершенно аналогично вводятся пентасферические координаты. Сначала точку пространства мы определили тремя координатами x, y, z. К ним из соображений целесообразности мы прибавляем в качестве четвертой координаты:

$$p = x^2 + y^2 + z^2.$$

Одновременно этим дается условие, связывающее эти четыре координаты. Перейдем теперь опять к однородному способу записи, положив:

$$x = \frac{y_1}{y_5}, \quad y = \frac{y_2}{y_5}, \quad z = \frac{y_3}{y_5}, \quad p = \frac{y_4}{y_5}.$$

Тогда квадратичное соотношение $p = x^2 + y^2 + z^2$ переходит в следующее:

$$\Omega = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4y_5 = 0.$$

Координаты $y_1, \ldots, y_5$ еще никоим образом не являются *ортогональными* пентасферическими координатами; эти последние получаются из наших y только с помощью надлежащей линейной подстановки. Но нас сейчас не интересуют специально ортогональные координаты; мы хотим посмотреть, как оперируют с этими нашими y. Для этой цели мы опять образуем полярное уравнение тождества $\Omega = 0$:

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} y_i' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' + 2y_3y_3' - y_4y_5' - y_5y_4' = 0.$$

Это уравнение после подстановки вместо величин y_i их первоначальных значений перейдет в:

$$2xx' + 2yy' + 2zz' - (x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

или:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = 0.$$

Следовательно, при употреблении пентасферических координат полярное уравнение

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} y'_i = 0$$

опять же непременно обозначает некоторый геометрический факт; именно, что расстояние между точками y и y′ равно нулю.

Если теперь мы сравним друг с другом оба результата, то получим:

Аналогия между линейчатой геометрией и точечной геометрией в пентасферических координатах основывается на том, что в обоих случаях рассматривают квадратное уравнение с необращающимся в нуль определителем между однородными координатами и что в обоих случаях из этого уравнения получают полярное уравнение, имеющее простое геометрическое значение.

Затем мы построили расширенную линейчатую геометрию, выбрав в качестве элемента пространства линейный комплекс. *Соответственно этому мы построим теперь расширенную точечную геометрию в пентасферических координатах, в которой в качестве элемента мы изберем сферу.*

Инволюторному расположению двух линейных комплексов там будет здесь соответствовать ортогональность сфер. Далее, на первом свойстве линейных комплексов строился закон взаимности, в силу которого одночленному семейству линейных комплексов соответствовало пятичленное семейство и т. д., и именно так, что принадлежащие соответствующим семействам линейные комплексы всякий раз находились между собой в инволюции. В расширенной точечной геометрии в пентасферических координатах этому закону будет сопоставлен соответствующий закон взаимности: каждой отдельной сфере, которую можно считать за одночленное семейство сфер, будет соответствовать четырехчленное семейство, — совокупность всех сфер, ортогонально пересекающих первую. Каждому двучленному семейству или каждому пучку сфер, т. е. многообразию всех сфер, имеющих некоторый общий круг, будет соответствовать трехчленное семейство или двупараметрическое многообразие сфер, ортогональных всем сферам первого семейства, так называемая „сеть сфер“. Здесь, разумеется, имеются только эти два вида взаимных образов, так как мы имеем дело только с пятью однородными координатами.

В соответствии с нашими прежними рассмотрениями сферы (или круга), в том случае, когда мы вообще будем говорить о геометрии сфер, мы будем делать различие между „элементарной“ и „высшей“ геометрией сфер, смотря по тому, рассматриваем ли мы такие соотношения, в которые входят квадраты радиусов (как условие ортогональности двух сфер), и такие соотношения, в которых встречается сам радиус (как, например, условие касания двух сфер или пересечения под произвольным углом).

Геометрия сфер, к которой мы здесь пришли, является элементарной геометрией сфер.

Поэтому, резюмируя, мы можем сказать:

Линейчатая геометрия соответствует точечной геометрии в пентасферических координатах в трехмерном пространстве. Рас-

ширенная линейчатая геометрия соответствует элементарной геометрии сфер в трехмерном пространстве.

Мы еще яснее выразим соотношение между обеими геометриями, если привлечем к рассмотрению *четырехмерное* точечное пространство и построим в нем геометрию сфер. Тогда в обоих случаях нам потребуется одинаковое число координат для определения основного образа, элемента пространства, и вследствие этого сопоставление превратится в полное тождество (если не принимать во внимание соотношений в действительной области). Следовательно, можно сказать:

Линейчатая геометрия тождественна с точечной геометрией в четырехмерном пространстве при употреблении гексасферических координат; расширенная линейчатая геометрия тождественна с намеченной здесь элементарной геометрией сфер четырехмерного пространства.

Этот род сопоставлений является отправной точкой, из которой исходил Клейн в своей работе „О линейчатой геометрии и метрической геометрии“ (Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Annalen, т. 5, 1871). В этой работе в качестве примера рассматривается также ортогональная система четырехмерного пространства и отыскивается ее линейчато-геометрический аналог. Можно сказать, что здесь дело идет о том, чтобы установить связь между линейчато-геометрическими исследованиями Клейна в 1869 г. и исследованиями Дарбу.

Но уже ранее С. Ли осветил эти соотношения с другой стороны в свой работе (т. 5 Math. Annalen), которая в последующем будет часто упоминаться: „О комплексах, в особенности о комплексах линий и сфер с применениями к теории диференциальных уравнений с частными производными“ (Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen).

Здесь С. Ли развивает свою „высшую геометрию сфер трехмерного пространства“, в задачи которой входит и сам радиус, а не только его квадрат.

Если Клейн ставит в параллель линейчатую геометрию с точечной геометрией пространства R_4, то Ли показывает, что линейчатая геометрия может быть сравниваема также с высшей геометрией сфер пространства R_3.

Естественная связь между воззрениями Ли и воззрениями Клейна заключается в том, что точечная геометрия пространства R_4 и высшая геометрия сфер пространства R_3 могут быть непосредственно связаны между собой, как мы скоро увидим ближе. Мы, следовательно, познакомимся теперь с геометрией сфер Ли, причем наша исходная точка зрения будет опять выбрана совершенно элементарно.

§ 25. Геометрия сфер Ли.

Как известно, уравнение сферы в обычных прямоугольных координатах имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + C = 0.$$

Следовательно, сфера определяется величинами α, β, γ, C. Мы примем еще в качестве пятой величины радиус r, определяемый соотношением:

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - C.$$

Основная мысль состоит в том, чтобы эти пять величин $\alpha, \beta, \gamma, C, r$ рассматривать как координаты сферы. Они не независимы друг от друга, а связаны только что приведенным квадратичным соотношением. Чтобы ввести однородную запись, мы положим:

$$\alpha = \frac{\xi}{\nu}, \quad \beta = \frac{\eta}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{\nu}, \quad r = \frac{\lambda}{\nu}, \quad C = \frac{\mu}{\nu},$$

так что теперь $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ *являются однородными координатами сферы*. Тогда между ними в соответствии с уравнением

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - C$$

получится квадратичное соотношение:

$$\Phi = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda^2 - \mu\nu = 0.$$

Прежде всего нашей задачей является изучение этой формы в смысле общей теории квадратичных форм, в особенности закона инерции. Ее детерминантом будет:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},$$

т. е. наша квадратичная форма имеет отличный от нуля определитель.

Далее мы положим:

$$\mu = \mu^* + \nu^*, \quad \nu = \mu^* - \nu^*$$

в то время, как первые четыре переменных остаются неизменными. Тогда вышеупомянутая форма перейдет в

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda^2 - \mu^{*2} + \nu^{*2}.$$

Это означает: *знаков одного рода на два больше, чем знаков другого рода*; здесь безразлично, будем ли мы иметь четыре положительных и два отрицательных члена или наоборот, так как мы полагаем форму, равной нулю. Рассмотрим теперь подряд различные квадратичные формы с шестью переменными, с которыми мы до сих пор имели дело, принимая во внимание закон инерции.

В линейчатой геометрии форма, состоящая только из квадратичных членов, состоит из трех положительных и трех отрицательных

членов (разумеется при ограничении действительными подстановками). *В точечной геометрии четырехмерного пространства*, в основу которой мы положили гексосферические координаты, мы имеем форму с пятью положительными и *одним* отрицательным членом (здесь, так же как и в пентасферической геометрии пространства R_5, только одна из шести по предположению действительных фундаментальных сфер является нулевой).

Напротив, в геометрии сфер Ли пространства R_5 форма имеет, как мы только что видели, четыре положительных и два отрицательных члена. *Эти три типа геометрий, которые с алгебраической точки зрения совпадают в том смысле, что в каждой из них в основу кладется шесть однородных переменных и квадратное уравнение между ними с отличным от нуля определителем, отличаются, следовательно, друг от друга в действительной области тем, что их квадратные уравнения в смысле закона инерции принадлежат к трем различным типам.*

Четвертый логически мыслимый тип (квадратичная форма с шестью одинаковыми знаками) отсутствует; можно ли так же и для него найти соответствующее геометрическое истолкование?

Мы должны теперь заметить, что при выборе координат α, β, γ, C, r для сферы безразлично, берем ли мы положительный или отрицательный знак для радиуса r; в обоих случаях мы будем получать одну и ту же сферу. Так как здесь нецелесообразно вводить ограничение, чтобы радиус был, например, больше нуля, то в геометрии сфер Ли каждая сфера встречается дважды, для положительного и отрицательного значения r. Сферу с определенным выбранным знаком r мы будем называть „*направленной*“ или „*ориентированной*“ сферой, и мы можем представлять себе, например, что сферы с $r > 0$ с внешней, а сферы с $r < 0$ с внутренней стороны окрашены красным.

Эта мысль — дважды покрывать обычные сферы, так что каждая обычная несет на себе две направленные (для $r \neq 0$), впервые встречается у Лагерра в работе за 1880 г., к ней мы вернемся в § 67 (ср. Laguerre, Oeuvres 2, 1905, стр. 592—684).

Теперь мы напомним обычные условия ортогонального пересечения и пересечения под произвольным углом двух сфер.

1. Рассматривая r и r' взятыми с определенными знаками, мы можем определить прикосновение в одинаковом смысле двух направленных сфер формулой:

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = (r - r')^2.$$

При этом прикосновение называется прикосновением одинакового смысла, если в точках прикосновения сферы выкрашены в красное с одной и той же стороны.

2. Условием того, что две сферы пересекаются ортогонально, является равенство:

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = r^2 + r'^2.$$

Это условие носит „элементарный характер“, так что о знаке радиуса говорить не приходится.

3. Условие того, что две сферы пересекаются под углом φ, выражается следующим образом:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi.$$

Красота этих условий покоится опять-таки на том, что их можно привести в простую зависимость от условия, связывающего однородные сферические координаты.

К 1. Условие прикосновения сфер (в одинаковом смысле) мы можем преобразовать в:

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'+2\gamma\gamma'-2rr'-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)-$$
$$-(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-r'^2)=0,$$

где для выражений в скобках мы вводим величины C и C'. Если затем мы употребим однородный способ записи, то получим уравнение:

$$2\xi\xi'+2\eta\eta'+2\zeta\zeta'-2\lambda\lambda'-\mu\nu'-\mu'\nu=0.$$

Здесь мы видим полярное уравнение нашей квадратичной формы Φ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\xi'+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\nu'=0.$$

Словами это означает:

Обращение в нуль поляры, взятой относительно фундаментальной формы Φ, показывает нам, что обе сферы касаются.

Если мы вспомним соответствующее соотношение линейчатой геометрии, то увидим, что касание двух сфер в геометрии сфер Ли в аналитической трактовке занимает точно такое же существенное место, какое в линейчатой геометрии занимает пересечение двух прямых.

К 3. Если мы возьмем третий случай, условие пересечения двух сфер под определенным углом, то при введении однородных координат получим из уравнения

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'+2\gamma\gamma'-2rr'\cos\varphi-C-C'=0$$

уравнение

$$(2\xi')\xi+(2\eta')\eta+(2\zeta')\zeta-(2\lambda'\cos\varphi)\lambda-(\nu')\mu-(\mu')\nu=0.$$

Так как шесть коэфициентов этого линейного уравнения между шестью однородными координатами являются между собой совершенно независимыми, то мы получаем отсюда предложение: *условие того, что две сферы пересекаются под некоторым углом φ, дает для отдельной сферы общее линейное уравнение между ее шестью координатами.*

К 2. Условие того, что две сферы пересекаются ортогонально, получается из последнего при $\cos\varphi=0$. Но это не изменяет существенно наше линейное уравнение; пропадает только один член. Мы особенно это подчеркиваем, так как ведь в „элементарной“ геометрии сфер пространства R_3 названное условие имело основное значение, чего здесь уже нет.

Уяснив себе таким образом элементарные задачи, мы можем теперь, следуя Ли, по примеру линейчатой геометрии, говорить о линейных комплексах, конгруэнциях и т. д. геометрии сфер. Мы увидим, что с новой точки зрения мы пришли как раз к тем самым отображениям, которые, как мы уже знаем, рассматривались геометрами первых десятилетий 19-го столетия.

Сопоставим опять друг с другом результаты линейчатой геометрии и геометрии сфер. При этом направо под „сферой" мы будем всегда понимать *направленную* сферу, а под „касанием" всегда касание *в одинаковом смысле.*

Линейчатая геометрия

1. Под *линейным линейчатым комплексом* мы понимаем зависящие от трех параметров нуль-линии некоторой нуль-системы.

В качестве подтипа получается *специальный линейчатый комплекс*, а именно, прямые, пересекающие фиксированную прямую.

2. *Линейная конгруэнция* состоит из совокупности всех прямых линий, пересекающих две заданные прямые, которые могут быть действительными или комплексно-сопряженными, совпадать в одну направляющую прямую или делаться неопределенными.

3. В качестве общих прямых *трех линейных комплексов* мы имели линейчатое семейство, которое составляет образующие однополостного гиперболоида. Другое семейство образующих гиперболоида составляет семейство „направляющих прямых" и при этом все прямые первого рода пересекают все прямые второго рода.

Геометрия сфер

1. Этому соответствует *линейный комплекс сфер*, как совокупность всех сфер, пересекающих некоторую фиксированную сферу под заданным углом.

В качестве *специального комплекса сфер* рассматриваются сферы, касающиеся заданной сферы.

2. *Линейная конгруэнция сфер* состоит из сфер, касающихся двух направляющих сфер. Сферы этой конгруэнции опять-таки зависят от двух существенных параметров.

3. *Три линейных уравнения* геометрии сфер дают зависящее от одного параметра *семейство сфер*, которые касаются направляющих сфер, образующих точно так же однопараметрическое семейство. Если мы выберем три направляющие сферы, то посредством их весь образ определится однозначно.

Первое семейство сфер в качестве огибающей поверхности имеет некоторую поверхность каналов, которая будет огибать также и второе семейство. Легко видеть, что мы пришли к двойному порождению „циклид Дюпена".

В этом противопоставлении гиперболоида и „циклид Дюпена" получает свое отчетливое выражение переход от линейчатой геометрии к геометрии сфер Ли!

Мы могли бы теперь говорить также о квадратичных комплексах в геометрии сфер, могли бы ввести линейный комплекс сфер в качестве пространственного элемента и спросить себя, что значит, если два линейных комплекса сфер расположены инволюторно и т. д. Но мы обойдем это и перейдем к чрезвычайно интересному и важному применению, которое сделал Ли со своей геометрией сфер в диференциальной геометрии поверхностей.

§ 26. Соотношение между асимптотическими линиями и линиями кривизны.

В геометрии поверхностей мы упоминали в свое время *асимптотические линии* и *линии кривизны*. Мысль Ли, которую мы имеем в виду, можно коротко изложить следующим образом: *оба типа кривых на поверхности можно выразить совершенно одинаковыми формулами, только первые нужно трактовать в линейчатой геометрии, а вторые — в геометрии сфер.*

Это предложение надо рассматривать, как одно из самых блестящих открытий диференциальной геометрии за последнее время. Чтобы понять это соотношение, мы прежде всего должны заняться линиями кривизны на поверхности.

До сих пор мы определяли направление линии кривизны в рассматриваемой точке поверхности с помощью кривизны нормального сечения поверхности, именно, рассматривая те направления, для которых кривизна имеет максимум или минимум. Но имеется еще другое определение направления линий кривизны, опирающееся на построение нормалей в близких точках. Нормали, проведенные в соседних точках поверхности, будут, вообще говоря, скрещиваться с первоначальной нормалью, но можно выставить требование, чтобы переходить к таким близким точкам, нормали в которых пересекают первоначальную нормаль.

Можно показать, что это имеет место лишь для таких близких точек, которые лежат на линиях кривизны.

Докажем это с помощью вычислений. Возьмем рассматриваемую точку поверхности за начало координат некоторой координатной системы, которую расположим так, чтобы ее оси x и y совпадали с направлениями линий кривизны в этой точке поверхности. Если затем мы представим себе координату z поверхности разложенной по степеням x и y, то ряд будет иметь вид:

$$z = ax^2 + cy^2 + \ldots + \text{члены высшего порядка.}$$

В нем члены с xy, а также члены первого порядка отсутствуют, так как оси x и y являются осями симметрии индикатрисы Дюпена. Если теперь уравнение поверхности задано в виде $f(x, y, z) = 0$, то уравнение нормали в произвольной точке x', y', z' имеет вид:

$$\frac{x - x'}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y - y'}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z - z'}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

причем после диференцирования в знаменателе вместо x, y, z надо подставить координаты точки x', y', z'. Если мы применим разложение для z, то получим:

$$\frac{x - x'}{2ax' + \ldots} = \frac{y - y'}{2cy' + \ldots} = z' - z.$$

Если же теперь мы возьмем точку x', y', z' близкой к рассматриваемой точке поверхности, то мы можем пренебречь членами более

высокого порядка и, следовательно, наше уравнение примет простой вид:

$$\frac{x-x'}{2ax'}=\frac{y-y'}{2cy'}=z'-z.$$

Теперь возникает вопрос, при каком условии эта нормаль пересечет ось z, т. е. первоначальную нормаль. Если мы положим $x=y=0$ (а также $z'=0$), то получим:

$$z=\frac{x'}{2ax'}=\frac{y'}{2cy'}.$$

Так как a и c, вообще говоря, отличаются друг от друга, то эти уравнения могут иметь место только тогда, когда либо $x'=0$, тогда

$$z=\frac{1}{2c},$$

либо $y'=0$, тогда

$$z=\frac{1}{2a}.$$

Поэтому первоначальная нормаль будет пересечена лишь тогда, когда мы переходим к близким точкам в направлении линий кривизны; в качестве точки пересечения мы получаем либо точку $z=1:2c$, либо точку $z=1:2a$, которые являются центрами кривизны соответствующих нормальных сечений.

Доказав сформулированное выше предложение, мы теперь легко можем дать построение линий кривизны. Вообще говоря, нормали поверхности, проведенные вдоль произвольной ее кривой, образуют линейчатую поверхность. *Но линии кривизны на поверхности обладают тем характеризующим их свойством, что нормали к поверхности, восставленные в их точках, образуют развертывающуюся поверхность, так как две близкие образующие пересекаются более чем в первом приближении.*

При этом все время речь идет о том, что две „близкие" образующие развертывающейся поверхности, т. е., вообще говоря, поверхности касательных к некоторой кривой, „пересекаются". Точнее это означает: если две образующие развертывающейся поверхности неограниченно сближаются, то их кратчайшее расстояние будет бесконечно малым порядка более высокого, чем первый.

Присоединим сюда еще некоторые дальнейшие замечания:

1. *На сфере, очевидно, всякая произвольная кривая является линией кривизны, или, выражаясь иначе, линии кривизны на сфере неопределенны.* В самом деле, ведь нормали, проведенные вдоль произвольной кривой, образуют всегда коническую, следовательно, развертывающуюся поверхность.

2. Вспомним, что поверхность каналов мы образовывали движением сферы. Сфера касается поверхности каналов всегда вдоль окружности, по которой ее пересекает бесконечно близкая сфера; точнее: вдоль окружности, которая является предельным положением окружности, по которому сфера пересекается с близкой сферой. Но отсюда получается следующее предложение:

На поверхности каналов, т. е. на поверхности, огибающей однопараметрическое семейство сфер, имеется однопараметрическое семейство кругообразных линий кривизны, именно, окружностей, по которым пересекаются близкие сферы семейства и вдоль которых поверхность каналов касается отдельных сфер. Так как циклида Дюпена, как мы знаем, является поверхностью каналов в двойном смысле, то мы видим, что на ней оба семейства линий кривизны являются окружностями (как мы об этом упомянули без доказательства на стр. 62).

Это новое определение линий кривизны мы должны теперь рассмотреть с точки зрения геометрии сфер. Будем опять исходить из того, что, положив в основу специальную систему координат, разложим из начала координат O координату z поверхности в ряд:

$$z = ax^2 + cy^2 + \text{члены высшего порядка.}$$

Рассмотрим теперь все сферы, касающиеся поверхности в начале координат. Их уравнение будет:

$$x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0.$$

Если мы разложим z, определяемое из этого уравнения по степеням x и y, то получим:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \text{члены высшего порядка.}$$

Приравняв друг другу оба ряда для z, получим:

$$0 = (2ar - 1)\,x^2 + (2cr - 1)\,y^2 + \text{члены высшего порядка.}$$

Это уравнение представляет проекцию линии пересечения нашей поверхности со сферой на плоскость xy, т. е. на касательную плоскость поверхности в начале координат. Мы видим:

Каждая соприкасающаяся сфера пересекает поверхность вблизи точки O по кривой, имеющей в точке O двойную точку, обе ветви которой расположены симметрично относительно направлений линий кривизны.

Разумеется обе ветви могут быть как действительными, так и комплексно-сопряженными, так что мы можем иметь или обычную двойную точку или изолированную двойную точку. В качестве центра соприкасающейся сферы мы возьмем теперь специально центр кривизны и в соответствии с этим положим:

$$r = \frac{1}{2a} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2c}.$$

Проекция кривой будет тогда для $r = \frac{1}{2a}$:

$$0 = \left(\frac{c}{a} - 1\right) y^2 + \ldots$$

и, соответственно, для $r = \frac{1}{2c}$:

$$0 = \left(\frac{a}{c} - 1\right) x^2 + \ldots$$

Но из этого уравнения мы заключаем о существовании точки заострения на кривой в точке O; касательной в точке заострения является ось x или ось y. Это дает нам предложение, что наши специальные сферы пересекают поверхность по кривой, имеющей точку заострения. Вместе с тем ясно, что наши сферы касаются поверхности вдоль направления главной кривизны более тесным образом, как этого требует наше предложение о нормали в близкой точке[1]). Таким образом определенные сферы мы будем в дальнейшем называть *сферами соприкосновения* в нашей точке поверхности.

Если теперь мы рассмотрим совокупность всех точек линии кривизны и построим в каждой из них надлежащую сферу соприкосновения к этой линии кривизны, то во всем ряде этих сфер каждая из них будет касаться соседней в соответствующей точке поверхности. Здесь мы имеем перед собой геометрический образ, который в геометрии сфер имеет такое же значение, как развертывающаяся поверхность в линейчатой геометрии: *как соседние образующие линейчатой поверхности, вообще говоря, являются скрещивающимися (хотя имеется особый тип линейчатых поверхностей, у которых они „пересекаются", именно развертывающиеся поверхности), точно так же соседние сферы ряда сфер, вообще говоря, пересекаются вдоль окружности, но в специальном случае эти сферы могут касаться друг друга в непрерывной последовательности.*

В наших рассмотрениях мы условимся подобный ряд сфер называть *рядом соприкасания*[2]). (Представим себе, например, соответствующее соотношение окружностей на плоскости. Следующие друг за другом окружности кривизны какой-либо кривой образуют ряд соприкасания.)

Сюда примыкает трактовка линий кривизны с точки зрения геометрии сфер.

Проблема линии кривизны заданной поверхности может рассматриваться таким образом, что, во-первых, находят двухпараметрическое семейство сфер соприкосновения, принадлежащих к различным точкам заданной поверхности, и, во-вторых, отыскивают ряд соприкасания внутри многообразия сфер соприкосновения.

Впрочем можно также обойтись без отыскивания сфер соприкосновения: среди трехпараметрического многообразия сфер соприкосновения поверхности выбирают ряд соприкасания, в котором две соседние сферы касаются в надлежащей точке поверхности. Если из этого исключить тривиальные решения, состоящие из всех сфер, которые

---

[1]) Неудобно говорить, что сфера соприкосновения „касается в двух соседних точках" поверхности вдоль некоторой линии кривизны. Именно, если бы это утверждение можно было понимать строго, то было бы возможно рассматривать сферу соприкосновения как предельное положение сферы, касающейся поверхности в двух различных точках, причем эти точки неограниченно сближаются. Но, вообще говоря, является невозможным сближать точки прикосновения дважды касающейся сферы к наперед заданной точке поверхности. Именно те точки, для которых это возможно например в случае эллипсонда, лежат на линиях пересечения с плоскостями симметрии.

[2]) См. по этому поводу также E. Бомпиани (E. Bompiani) в Rend. Lincei (5) 21 (1912), стр. 697—704.

касаются в одной и той же точке поверхности, то останутся ряды соприкасания, состоящие из сфер соприкосновения линий кривизны.

Затем отсюда совершенно просто можно провести аналогию с задачей об асимптотических линиях:

Линии кривизны	*Асимптотические линии*
Из сфер соприкосновения поверхности выбрать ряды соприкасания с таким свойством, что две соседние сферы ряда касаются в надлежащей точке поверхности.	Из касательных поверхности выбрать развертывающуюся поверхность с таким свойством, что две соседние прямые развертывающейся поверхности пересекаются в надлежащей точке поверхности.
Наряду с пучками сфер, касающихся поверхности, получаются ряды соприкасания из сфер соприкосновения вдоль линии кривизны.	Наряду с пучками лучей, касающихся поверхности, получаются в качестве решений развертывающиеся поверхности из касательных вдоль асимптотических линий.

Мы видим, что проведенное направо линейно-геометрически, налево проведено сферико-геометрически.

Итак, мы видим: отыскание линий кривизны в геометрии сфер занимает точно такое же место, как отыскание асимптотических линий в линейчатой геометрии. Только позднее в этих лекциях мы будем иметь случай представить аналитически в определенных формулах это предложение Ли, задуманное им геометрически.

Подтвердим теперь вкратце высказанную мысль, что между высшей геометрией сфер пространства R_3 и евклидовой точечной геометрией пространства R_4 существует непосредственная связь. Это очень просто. Если обозначить через α, β, γ, r и α', β', γ', r' центры и радиусы обеих сфер в R_3, то условие касания двух сфер будет иметь вид:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=(r-r')^2.$$

Если теперь в качестве образа этих сфер выбрать точки пространства R_4 с прямоугольными координатами: α, β, γ, ir и α', β', γ', ir', то связь между обеими геометриями выразится в том, что условие соприкасания, которому мы придали форму

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2+(ri-r'i)=0,$$

в метрической точечной геометрии пространства R_4 будет иметь не менее хорошее геометрическое значение, чем в геометрии сфер R_3, *именно, оно выражает, что обе точки находятся на нулевом расстоянии.*

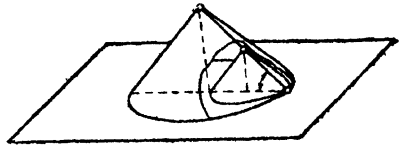
Разумеется можно также сделать соответствующий переход от окружностей плоскости к точкам пространства R_3. Окружности, центр и радиус которой заданы величинами α, β, r, мы поставим в соответствие точку пространства R_3 с координатами α, β, ir. Чтобы нагляднее представить себе этот переход, мы вообразим себе перпендикуляр, восставленный в центре круга к его плоскости xy, и отложим от его основания отрезок ir; тогда конец этого отрезка будет представлять точку пространства, соответствующую нашему кругу. Если

мы хотим отображение (которое мы назовем *изотропной проекцией*) сделать однозначным, то мы должны рассматривать *направленные* круги в плоскости, следовательно задавать r с определенным знаком. *Это отображение кругов плоскости на точки R_3 было использовано уже Шалем и Мебиусом (в пятидесятых годах) для того, чтобы наглядно рассматривать действительные круги с мнимыми радиусами.*

Но ведь можно также поставить в соответствие кругу α, β, r плоскости точку пространства с прямоугольными координатами α, β, r. Основное условие

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2-(r-r')^2=0 \quad (*)$$

тогда опять будет выражать, что точки пространства имеют нулевое расстояние, если мы так изменим евклидово мероопределение, что расстояние между двумя точками определим неопределенной формой (*). Изотропные конусы, принадлежащие точкам α, β, r и α', β', r', касаются друг друга, как это показано на чертеже 38. Сходная мысль положена Фидлером в основу его книги о „Циклографии" (W. Fiedler, Zyklographie, Leipzig, 1882).



Черт. 38.

§ 27. Исторические замечания о геометрии сфер.

Скажем теперь несколько слов о том, как геометрия сфер Ли была принята геометрами. К сожалению мы должны отметить, что французскими и итальянскими геометрами она была принята сочувственно, в то время как немецкие геометры на нее долгое время не обращали внимания. В частности они игнорировали такие важные исследования по дифференциальной геометрии, как соотношения между асимптотическими линиями и линиями кривизны, которые имеют связь с геометрией сфер Ли.

Немецкие ученые во главе с Рейе большей частью занимались только *элементарной* геометрией сфер. Именно, Рейе в 1879 г. опубликовал небольшую работу: „Синтетическая геометрия сфер и линейная система сфер" (Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme), за которой последовали затем еще различные его работы, например, в Креллевском журнале, т. 99 (1886), где он также чисто синтетически, т. е. без формул, оперирует с квадратичными комплексами сфер. Но эти квадратичные комплексы сфер не являются комплексами Ли, а являются только их специальными случаями. Они задаются (если мы остаемся при нашем элементарном координатоопределении) посредством уравнения второй степени между α, β, γ, C, а не между α, β, γ, C, r.

Здесь мы должны высказать свое мнение о так называемой школе Штейнера. Самого Штейнера в известном смысле нельзя считать представителем этой школы. Все же он в Креллевском журнале, т. 1, ставит задачу о перенесении всех предложений, относящихся к окруж-

ностям, пересекающимся под прямым углом, на окружности, пересекающиеся под произвольным углом, и этим становится на правильный путь к высшим проблемам. Но ученики Штейнера не стали разрабатывать дальше положения, с которых начал сам Штейнер, а односторонне разрабатывали те точки зрения Штейнера, которые он развивал в последний период своей жизни, сознательно избегая новых мыслей. Это направление надолго затормозило развитие геометрии в Германии. Здесь, конечно, идет речь о линейных образах элементарной геометрии сфер, но только в том смысле, в каком можно говорить о линейных системах конических сечений; но здесь ни слова не упомянуто о том, что *интересным* вещам в линейчатой геометрии соответствуют также *интересные* вещи в геометрии сфер, как это показывают исследования Ли, и что выясняется поразительная связь между знаменитыми проблемами, которые получили свое развитие в различных областях науки.

Это замечание о школе Штейнера можно было бы еще значительно расширить. В частности относящийся сюда вопрос касается черчения геометрических чертежей. Здесь мы можем найти хорошее средство упражняться в наглядном представлении. В противоположность этому школа Штейнера избегает всяких чертежей (стоит только, например, рассмотреть работы Шретера), а между тем Штейнер в начале своей жизни очень много чертил.

Рассмотрим еще раз точку зрения Плюкера, изложенную в этой главе. Его основная мысль находит свое выражение в том, что при рассмотрении геометрии пространства в качестве пространственного элемента *выбирают какой-нибудь геометрически заданный образ и определяют его с помощью координат.* Если в качестве пространственного элемента мы возьмем точку или плоскость, то наше пространство будет представлять собой многообразие трех измерений, если — прямую или сферу, то — многообразие четырех измерений; если в качестве пространственного элемента мы возьмем линейный комплекс, или винт Болла, что является тем же самым, то пространство представит собой многообразие пяти измерений; если, наконец, в качестве пространственного элемента выбрать поверхность второй степени, то — многообразие девяти измерений.

Наряду с числом измерений, которое выбор элемента дает нашему пространству, нам надо еще различать, имеем ли мы дело в каждом отдельном случае с *линейным* многообразием или *квадратичным* многообразием. Линейное многообразие лежит в основе элементарной точечной и плоскостной геометрии, элементарной геометрии сфер и, наконец, еще в основе геометрии винта, так как ведь координаты, употребляемые в них для определения элемента, совершенно не зависят друг от друга. В противоположность этому точечная геометрия пентасферических координат, высшая геометрия сфер и линейчатая геометрия с их шестью однородными координатами пользуются координатами в избыточном числе, которые должны удовлетворять некоторому квадратичному соотношению. В соответствии с этим в последних случаях мы должны называть пространство квадратичным многообразием.

§ 28. Привлечение многомерного пространства Грассманом и Кели.

В развитии геометрии наряду с точкой зрения Плюкера на первый план выступает еще второе направление, которое сводится к тому, чтобы n-однородных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *рассматривать как координаты точки в* $(n-1)$*-мерном „проективном" пространстве.* Следовательно, при этом взгляде, которого мы попутно уже касались, точку сохраняют в качестве элемента пространства, только строят для пространства R_3 более высокие аналоги, в которых производятся *проективные* построения. Указанная точка зрения восходит к двум знаменитым математикам—Грассману и Кели. Прежде всего мы приведем некоторые сведения о каждом из них.

Герман Грассман (1809—77) является одним из немногих преподавателей гимназии, оказавших значительное влияние на развитие математики. Вся его деятельность протекала исключительно в городе Штеттине. В 1844 году появилась в первом издании его главная работа *„Учение о протяженности"* (H. G. Grassmann, Ausdehnungslehre). Этот термин был введен самим Грассманом, потому что ему казалось неудобным говорить о геометрии в „пространстве n измерений". В этой книге он оперирует исключительно с геометрическими аналогиями и поэтому его очень трудно понимать. В 1862 г. Грассман вновь перерабатывает свою книгу и выпускает ее вторым изданием, в котором он значительно менее абстрактен и дает изложение с формулами. Однако его язык формул сильно отличается от обычного. Эти работы очень медленно проникали в математические круги, зато имели продолжительное влияние [1]).

Позднее преимущественно английские и американские исследователи воспользовались идеями Грассмана; например, Джиббс в своих исследованиях планетных орбит пользуется методом Грассмана.

Кели (1821—95) одновременно с Сильвестром (1814—97) в 1850 году привлекли внимание математиков к Англии, развивая в блестящих работах часть алгебры, которую называют *теорией инвариантов* алгебраических форм. Но в то время как Сильвестр трактовал эту дисциплину очень абстрактно, Кели присоединил еще *геометрическую интерпретацию* и этим дал толчок господству в аналитической геометрии того направления, которое было начато в Германии Гессе совместно с Якоби. Кели работал в Кэмбридже, Сильвестр—в Оксфорде. Уже в 1874 г., 60 лет от роду, Сильвестр имел мужество перекочевать в Балтиморский университет и, занимаясь там в течение десяти лет интенсивной педагогической деятельностью, создал на американской почве высокую математическую школу [2]).

Следовательно, мы будем исходить из той точки зрения, что значения однородных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассматривают как точки $(n-1)$-мерного „проективного" пространства. В нем мы будем рассматривать только линейные семейства точек, а именно, одночленное

[1]) Математические работы Грассмана опубликованы Энгелем в 3 томах, Лейпциг 1894—1911. Там же имеется подробное жизнеописание Грассмана.

[2]) Оценка жизни и деятельности Кели сделана Нетером в Math. Ann., 46 (1895). Некролог Нетера о Сильвестре имеется в Math. Ann., 50 (1898).

семейство мы будем изображать посредством $\lambda x_1,\ \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$; так как дело идет только об отношении координат, то это семейство представляет собой точку x_i. Двучленное семейство будем определять посредством линейной комбинации координат двух точек:

$$\lambda x_1 + \lambda' x_1',\quad \lambda x_2 + \lambda' x_2',\quad \lambda x_3 + \lambda' x_3', \ldots,\quad \lambda x_n + \lambda' x_n';$$

трехчленное семейство — посредством линейной комбинации координат трех точек:

$$\lambda x_k + \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'';$$

наконец $(n-1)$-мерное семейство будем соответственно определять выражением

$$\lambda x_k + \lambda' x_k' + \cdots + \lambda^{(n-2)} x_k^{(n-2)},\quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Эти линейные семейства точек будут вполне соответствовать точке, прямой линии, плоскости пространства R_3.

Как же можно изобразить посредством *координат* определенные с помощью наших линейных комбинаций геометрические образы пространства R_{n-1}? Мы просто образуем *миноры соответствующих матриц*. В случае одночленного семейства матрицей будет $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\|$, n ее элементов являются однородными координатами p_i точки. Разумеется этот случай понятен сам собой. В случае двучленного семейства мы образуем матрицу из координат двух точек

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' \ldots & x_n' \end{matrix} \right\|;$$

отношения $n(n-1):2$ миноров дают нам однородные координаты p_{ik} образа. Аналогично

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

миноров матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' \ldots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' \ldots & x_n'' \end{matrix} \right\|$$

доставляют нам однородные координаты p_{ikl} образа трехчленного семейства и т. д. до $(n-1)$-членного семейства. Легко показать, что, например, каждый минор матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \lambda x_1 + \lambda' x_1' & \lambda x_2 + \lambda' x_2' \ldots & \lambda x_n + \lambda' x_n' \\ \mu x_1 + \mu' x_1' & \mu x_2 + \mu' x_2' \ldots & \mu x_n + \mu' x_n' \end{matrix} \right\|,$$

в которой величинам λ, λ', μ, μ' можно приписать какие-нибудь определенные значения, отличается от соответствующего определителя матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' \ldots & x_n' \end{matrix} \right\|$$

только множителем

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' \\ \mu & \mu' \end{vmatrix}.$$

Это оправдывает введение координат p_{ik} как отношений миноров последней матрицы, так как эти отношения не изменятся, если ввести в матрицу вместо x и x' какие-нибудь две другие точки нашего образа $\lambda x_i + \lambda' x_i'$. Аналогичное имеет место при введении координат трех- и многочленных семейств.

Наряду с этой первой теорией линейных образов пространства R_{n-1} существует еще двойственная ей вторая теория, строящаяся следующим образом: мы образуем уравнение

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0$$

и определяем посредством координат

$$u_1 : u_2 : u_3 : \ldots : u_n$$

одночленный линейный образ в пространстве R_{n-1}, который мы можем назвать *плоскостью* (говорят также *„сверхплоскость“* или *„гиперплоскость“*).

Тогда с этими „плоскостными координатами“ мы можем оперировать точно так же, как только что оперировали с точечными координатами. Мы рассматриваем двучленные, трехчленные образы, координаты которых вводим, соответственно, посредством миноров матриц

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \ldots u_n \\ u_1' & u_2' \ldots u_n' \end{matrix} \right\| \quad \text{или} \quad \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' \ldots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' \ldots & u_n'' \end{matrix} \right\|$$

и обозначаем через q_{ik} или q_{ikl}. И аналогичным способом можно перейти к еще более многочленным образам.

Тотчас же получается тот прекрасный результат, что образы q_{ikl} здесь соответствуют образам p_{ikl}, а именно, в том смысле, что например, $(n-1)$-членный образ u-координат геометрически в точности совпадает с одночленным образом x-координат, $(n-2)$-членный образ u-координат — с двучленным образом x-координат; *вообще $(n-\nu)$-членный образ плоскостных координат геометрически в точности совпадает с ν-членным образом точечных координат.* Это точно такая же взаимность, какая прежде, в случае $n = 6$, клалась в основу наших исследований линейных семейств линейных линейчатых комплексов. Следовательно, образы второго ряда являются в обратном порядке теми же, как образы первого ряда. Это предложение делается особенно наглядным для случая нашего обычного пространства.

Однако при ближайшем рассмотрении это совпадение идет еще дальше:

Подробное рассмотрение показывает, что координаты p некоторого образа, составленные из ν рядов точечных координат, относятся друг к другу в точности так же, как координаты q того же

образа, составленные дополнительным способом из $(n-\nu)$ *рядов плоскостных координат.*

Доказательство этого закона взаимности основывается на общей теореме об определителях, которая гласит, что „дополнительные" миноры двух „взаимных" определителей совпадают с точностью до степени исходного определителя (Якоби, Журнал Крелля, 22, 1841, стр. 304).

Мы не будем на этом подробнее останавливаться, а перейдем к следствиям из нашего предложения, которые сводятся к вопросу: какие уравнения мы будем изучать в теории пространства R_{n-1}? *Очевидно, каждый образ пространства Грассмана-Кели* может быть объектом геометрических исследований, причем этот образ будет представляться посредством одного или нескольких уравнений между различными рядами координат p_i, p_{ik}, p_{ikl}, ... или, соответственно, различными ..., q_{ikl}, q_{ik}, q_i [1]).

Попытаемся теперь связать между собой идеи Грассмана и Плюкера. Если, например, с одной стороны, мы будем рассматривать линейчатую геометрию Плюкера пространства R_3 с однородными координатами $x_1, \ldots, x_6$ и квадратичным соотношением $\Omega(x)=0$, то, с другой стороны, мы можем истолковывать шесть координат также в смысле Грассмана, как координаты для фиксирования точек пространства R_5. Тогда $\Omega(x)=0$ представляет в этом пространстве поверхность второй степени, к которой относится каждый дальнейший образ, заданный каким-нибудь уравнением между x. Или, если, в смысле Плюкера, мы вводим в качестве пространственного элемента, например, линейный комплекс и определяем его шестью независимыми координатами, то мы можем этой геометрии противопоставить обычную геометрию пространства R_5. Обеими точками зрения пользуется Клейн в своих неоднократно упоминавшихся работах в Math. Annalen, т. 2 и 5. Резюмируя, мы скажем: исследования о высших элементах некоторого пространства мы всегда можем связать с исследованиями о точках пространства более высокой размерности.

Можно, однако, еще и с другой стороны осуществить взаимодействие между воззрениями Грассмана и Плюкера. Если, например, мы решили оперировать в пространстве Грассмана произвольно высокой размерности, то мы можем и в нем также говорить о геометрии сфер, т. е. короче — *вместо точки ввести в качестве пространственного элемента какой-нибудь другой образ в смысле Плюкера.*

Существенным является то, что при рассмотрении каких-нибудь переменных можно пользоваться как той, так и другой точкой зрения.

§ 29. Круги в пространстве, пентацикл Стефаноса.

В этом параграфе мы поговорим теперь о последнем пункте, которым геометры после 1880 года неоднократно занимались. Этот пункт касается *элементарной геометрии кругов в нашем обычном*

[1]) См. также Бертини: E. Bertini, Geometria projettiva degli iperspazi Messina, 1923, далее статью Сегре в Энциклопедии III, 2, тетр. 7.

пространстве. На плоскости окружность зависит от трех параметров, но содержащая ее плоскость требует для своего определения также три постоянных. Следовательно, мы видим, что круг в пространстве R_3 определяется *шестью* параметрами. Определим теперь круг с помощью координат следующим образом: в элементарной геометрии сфер, из которой мы здесь исходим, сфера, как известно, определяется пятью однородными координатами, которые мы здесь обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Так как круг может быть получен как сечение двух сфер и вследствие этого принадлежит целому пучку сфер, то мы образуем следующую матрицу:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \end{matrix} \right\|$$

и из нее образуем 10 „различных" миноров p_{ik}. Мы выбираем эти величины в качестве *однородных координат кругов в пространстве.*

Очевидно между этими p_{ik} должны существовать три независимых соотношения, так как в пространстве круг зависит только от шести параметров. Теперь очень легко можно получить пять, по форме различных, уравнений, приписав обе строки вышеприведенной матрицы еще раз под этими и откидывая каждый раз один столбец новой матрицы. Таким образом полученные определители, приравненные нулю и развернутые известным способом по минорам, дают искомые уравнения; они будут второй степени относительно p_{ik}. Чтобы привести пример, составим таким образом уравнение:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Из этих пяти уравнений только три могут быть независимыми.

Условившись относительно выбора координат круга в пространстве R_3, мы займемся теперь изучением уравнений между ними. Прежде всего опять получается линейное уравнение:

$$\sum a_{ik}p_{ik} = 0,$$

которое, будучи написано в развернутом виде, состоит из десяти членов. Так как мы видели, что круг определяется шестью существенными параметрами, то мы можем совместно рассматривать также шесть линейных уравнений указанного вида; эти уравнения, вообще говоря, определят лишь *конечное* число кругов. Особенно замечательно то, что при этом получится в точности пять кругов, определенным образом расположенных в пространстве. Греческий геометр Стефанос, открывший этот образ в 1881 году, назвал его „пентациклом". *Поэтому, если круги в пространстве определять отношениями десяти координат p_{ik}, то многообразие кругов окажется шестимерным многообразием пятого порядка в девятимерном пространстве.*

С другой стороны мы можем также сказать: наша геометрия кругов является образом „линейчатой геометрии четырехмерного пространства".

В качестве литературы наряду с заметками Стефаноса в Comtes Rendus, Париж, т. 93 (1881), стр. 578—580, 633—636, следует назвать

исчерпывающую работу Коссера в 3 томе Annales de Toulouse (1889). Далее, работы Cerpe в Rend. Palermo (1888), Atti Torino 22 (1887); Кастельнуово в Atti ist. Veneto (1888, 1891). Далее, работа Кулиджа (J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, стр. 482 и след. Oxford, 1916).

Здесь возникают еще многие вопросы, ожидающие своего разрешения. Пока не имеется систематического изложения геометрии кругов, которое бы рассматривало последовательно одно линейное уравнение, два линейных уравнения и т. д. между координатами. Впрочем аналогично дело обстоит и с геометрией сфер Ли, так что здесь имеются области, где желательно и полезно появление работы, хотя бы и не требующей особой изобретательности.

§ 30. Коннексы Клебша.

Теперь мы вернемся опять к постановке вопроса, которым мы занимались уже раньше по случаю рассмотрения обычных точечных координат. Этот вопрос касается геометрической трактовки дифференциальных уравнений; мы хотим осветить ее теперь с той точки зрения, к которой нас привели прямолинейные координаты плоскости и плоскостные координаты пространства. Прежде всего скажем о дифференциальных уравнениях первого порядка.

Напомним три различных типа дифференциальных уравнений, которые изображаются формулами:

$$1)\ f(x,\ y,\ y') = 0,$$

$$2)\ f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

$$3)\ f(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0.$$

С каждым из этих трех уравнений мы уже связывали определенное геометрическое представление. Первое из них каждой точке плоскости ставило в соответствие определенное направление на плоскости; второе для каждой точки пространства давало в пространстве конус направлений; наконец, третье в каждой точке пространства предписывало касательной плоскости к интегральной поверхности, проходящей через эту точку, касаться некоторого определенного конуса. Поэтому случаи второй и третий находятся в том же самом двойственном отношении, как, например, точечные и плоскостные координаты в пространстве.

Введем теперь термин *„инцидентный"* для того случая, когда какие-нибудь два образа, как точка и линия, линия и плоскость или плоскость и точка, лежат один на другом. Следовательно, мы также можем сказать: *первое уравнение ставит в соответствие произвольной точке некоторую инцидентную прямую, второе — некоторое онцидентное семейство прямых, третье —некоторое инцидентное семейство плоскостей.*

Аналитическая трактовка дифференциальных уравнений первого порядка, разработанная Клебшем в его последней работе 1871—72 г.,

идет параллельно этой точке зрения. Коротко мы ее можем назвать *однородной формулировкой наших дифференциальных уравнений.* Сначала мы остановимся на уравнении типа 1) [1]). Клебш образует уравнение, которое одновременно содержит ряд точечных и ряд прямолинейных координат (все однородные), а именно, уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$$

и к этому прибавляет то условие, что x_i и u_i должны быть друг с другом инцидентны, т. е. что должно иметь место соотношение:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Тогда оба эти уравнения вместе как раз и заменят дифференциальное уравнение $f(x, y, y') = 0$.

Для фиксированных значений x_i уравнение $f(x_i, u_i) = 0$ дает определенную кривую в качестве огибающей прямых u_i; но так как, кроме того, имеет место условие инцидентности для точки и прямой, то дело идет о рассмотрении только тех касательных к кривой, которые проходят через точку x_i. Задача интеграции заключается в том, чтобы из определенных таким образом прямых u_i и соответствующих точек x_i составить кривые, для которых u_i и x_i являются соответствующими друг другу касательными и точками кривой.

Для этих рассмотрений Клебш вводит еще специальную терминологию. Уравнение $f(x_i, u_i) = 0$ он называет *коннексом,* т. е. связью точки и линии; то, что два коннекса имеют общим, по его терминологии называется *конгинденцией.* Уравнение

$$\sum u_i x_i = 0$$

также представляет некоторый коннекс; его мы будем называть главным коннексом. Затем нас интересует та конгинденция, которая является общей первому заданному коннексу и главному коннексу; ее Клебш называет *главной конгинденцией. Следовательно, теперь дифференциальное уравнение* $f(x, y, y') = 0$ *дается главной конгинденцией некоторого коннекса* $f(x \mid u) = 0$.

Эту систему формул можно также записать различными равноправными способами.

1. Пусть, например, точка y_i является точкой прямой u_i, находящейся в инциденции с точкой x_i, тогда координаты u_i можно заменить минорами второго порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|,$$

которые мы обозначим через $(xy)_{23}$, $(xy)_{31}$, $(xy)_{12}$. Если мы подставим эти значения u_i в наше уравнение, то оно примет вид:

$$f[x_1, x_2, x_3; (xy)_{23}, (xy)_{31}, (xy)_{12}] = 0.$$

---

[1]) По этому поводу см. заключительную главу тома I „Лекций по геометрии" *Клебша-Линдемана* (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 1876).

2. Если, в частности, точку y_i мы выберем в окрестности точки x_i, то можно положить $y_i = x_i + dx_i$, и определители $(xy)_{23}$, $(xy)_{31}$, $(xy)_{12}$ будут тогда равны $(x\,dx)_{23}$, $(x\,dx)_{31}$, $(x\,dx)_{12}$, так что наше уравнение примет теперь форму:

$$f[x_1,\ x_2,\ x_3;\ (x\,dx)_{23},\ (x\,dx)_{31},\ (x\,dx)_{12}] = 0.$$

3. Наконец, имеется еще последний способ записи. Если мы вообразим себе наше диференциальное уравнение $f(x, y, y') = 0$ проинтегрированным и

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = \text{const}$$

является системой его интегральных кривых (причем Φ — форма нулевой размерности), то касательная x_i изображается уравнением:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}x_3 = 0;$$

это показывает, что наши координаты u_i пропорциональны частным производным $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и, следовательно, нашему уравнению можно придать также вид:

$$f\left(x_1,\ x_2,\ x_3;\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Все эти три новые формы уравнения Клебша являются равноправными и всегда выражают, что здесь дело идет о главной конгруенции некоторого комплекса.

Теперь возникает вопрос, что мы выигрываем при такой формулировке задачи интеграции? Вследствие этого приема и вследствие привлечения точки зрения проективной геометрии получается продвижение вперед *в теории диференциальных уравнений по двум направлениям.*

1. Прежде всего мы получаем *принцип классификации всех возможных диференциальных уравнений* $f = 0$; это опирается на то, что величины u_i и x_i входят друг с другом равноправно. Исходя из обыкновенной формы уравнения $f(x, y, y') = 0$, их обычно классифицируют только по степеням y' и, таким образом, различают диференциальные уравнения первой, второй, n-й степени, совершенно не заботясь о том, в какой степени входят x и y; x и y могут входить даже трансцендентно. Если мы теперь будем писать $f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$, то мы естественно будем приведены к тому, *чтобы классифицировать уравнения с помощью двух чисел, как по порядку (степень, в которой входят x_i), так и по классу (степень, в которой входят u_i).* В дальнейшем мы будем также допускать, что величины u_i, равно как и x_i, входят в уравнение трансцендентно. Простейшим случаем будет тогда случай (1,1), при котором величины x_i и u_i входят в уравнение оба линейно (билинейная форма уравнения); затем следуют случаи (1,2) и (2,1), далее случай (2,2) и т. д. Таким образом мы получили совершенно новый принцип классификации диференциальных уравнений $f = 0$.

2. Второе преимущество еще непосредственнее касается равноправности x_i и u_i. Наряду с формой уравнения мы ввели формы:

$$f[x;\ (x\,dx)] = 0 \quad \text{и} \quad f\left[x;\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] = 0;$$

мы можем еще написать:

$$f[u;\ (du,\ u)] = 0 \quad \text{или} \quad f\left[u;\ \frac{\partial \psi}{\partial u}\right] = 0.$$

Из формулировки Клебша следует, что в рассматриваемом дифференциальном уравнении точка и прямая являются *равноправными* элементами; это показывает, что мы можем рассматривать u, так же как это было с x, в качестве независимых координат. Следовательно, например, случай (1,2) дифференциального уравнения совершенно равноценен случаю (2,1); если мы можем проинтегрировать один из этих случаев, то мы будем в состоянии проинтегрировать и другой.

Теперь мы хотим пояснить на примере только что приведенную геометрическую точку зрения; в качестве такового возьмем простейший случай (1,1) дифференциального уравнения. Будем исходить из общего билинейного уравнения:

$$\sum a_{ik} x_i u_k = 0$$

или

$$u_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3) + u_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3) + \\ + u_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Если мы введем здесь для u_i определители, то получим:

$$(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2)(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3) + \\ + (x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3)(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3) + \\ + (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение издавна встречается в литературе; в частности им занимался Якоби в Журнале Крелля, т. 24 (1842), с другой стороны, оно встречается у Ли и Клейна в Comptes rendus за 1870 г. и в Annalen, т. 4 (1871) [1]). Там, в частности, изучаются геометрические свойства интегральных кривых этого дифференциального уравнения, так называемых W-кривых. Чтобы сравнить работу Якоби с рассматриваемой постановкой вопроса, мы перейдем к неоднородному способу записи и соответственно с этим положим $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, так что наше уравнение примет вид:

$$-dx_2(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}) + dx_1(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}) + \\ + (x_1 dx_2 - x_2\,dx_1)(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}) = 0.$$

Здесь бросается в глаза, что в этой неоднородной форме прекрасная симметрия первоначального вида уравнения совершенно исчезает.

Займемся теперь ближе геометрическим истолкованием первоначального вида дифференциального уравнения:

$$u_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3) + \ldots = 0.$$

[1]) F. Klein, Gesammelte Abhandlungen, т. 1, стр. 415 и 424.

Оно изображает при постоянных значениях x_i уравнение некоторой точки в прямолинейных координатах; ее точечные координаты при введении множителя пропорциональности ρ будут определяться уравнениями:

$$\rho y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,$$
$$\rho y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3,$$
$$\rho y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3.$$

Следовательно, здесь каждой точке x в силу определенного линейного преобразования будет соответствовать точка y и требуется отыскать такие кривые, которые в каждой своей точке x_i имеют в качестве касательной прямую, соединяющую точку x_i с ее соответствующей точкой y_i.

Поэтому, если мы хотим интегрировать дифференциальное уравнение, то прежде всего нам надо ближе изучить эти линейные подстановки, которые по их геометрическому значению называются коллинеациями. Прежде всего возникает вопрос, возможно ли найти такие точки x_i, которые совпадали бы с соответствующими им точками y_i? Это приводит к уравнениям:

$$\rho x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,$$
$$\rho x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3,$$
$$\rho x_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3,$$

которые, как известно, допускают решения только тогда, когда определитель из коэфициентов равен нулю, т. е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\rho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Допустим, что это кубическое уравнение дает три различных корня ρ_1, ρ_2, ρ_3 для ρ. (Как изменяется исследование, если два или даже три корня совпадают, мы здесь ближе рассматривать не будем.) Следовательно, тогда имеются три различных точки плоскости, которые остаются неизменными при коллинеации. В последующем мы возьмем их в качестве вершин некоторого нового координатного треугольника; тогда наши формулы подстановки (чего мы подробнее также доказывать не будем) перейдут в следующие:

$$\rho y_1' = \rho_1 x_1',$$
$$\rho y_2' = \rho_2 x_2',$$
$$\rho y_3' = \rho_3 x_3',$$

причем штрихами отмечены координаты новой системы.

Уравнение нашего коннекса, отнесенное к новому координатному треугольнику, примет теперь форму:

$$\rho_1 u_1' x_1' + \rho_2 u_2' x_2' + \rho_3 u_3' x_3' = 0.$$

Теперь, чтобы это уравнение записать в виде дифференциального уравнения, мы введем вместо u_1', u_2', u_3' частные производные искомой интегральной функции

$$\Phi(x_1', x_2', x_3') = \text{const}.$$

Тогда (опять отбрасывая штрихи) мы получим:

$$\rho_1 x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \rho_2 x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \rho_3 x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0.$$

Но это уравнение легко интегрируется и дает нам:

$$\Phi = x_1^{\rho_2 - \rho_3} \cdot x_2^{\rho_3 - \rho_1} \cdot x_3^{\rho_1 - \rho_2} = \text{const}.$$

Это как раз те кривые, которые Клейн и Ли в упомянутой работе назвали W-кривыми.

Приведенная здесь геометрическая теория интеграции совершенно точно совпадает с аналитическим процессом Якоби. Мы считаем важным разъяснить геометрически каждый отдельный шаг. В связи с этим мы повторяем, что дифференциальное уравнение мы прежде всего рассматриваем как коннекс; этот коннекс мы истолковываем посредством коллинеации, отыскиваем точки коллинеации, остающиеся неизменными, и, наконец, образованный ими треугольник берем в качестве нового координатного треугольника.

Эти соображения относились к дифференциальным уравнениям $f(x, y, y') = 0$. Подобные же рассмотрения можно произвести для уравнений $f(x, y, z; p, q) = 0$, как и для

$$\left(x, y, z; \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Во-первых, мы напишем *коннекс в пространстве*:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

поставленный наряду с уравнением главного коннекса:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Во-вторых, мы имеем *уравнение в точечных и прямолинейных координатах*:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{23}) = 0$$

и наряду с ним условие инцидентности точки и прямой:

$$x_\alpha p_{\beta\gamma} + x_\beta p_{\gamma\alpha} + x_\gamma p_{\alpha\beta} = 0$$

(здесь под α, β, γ понимаются какие-нибудь три числа из чисел 1, 2, 3, 4).

Здесь возник бы вопрос: какую проблему интеграции можно связать с уравнением $f(x_i \mid u_i \mid p_{ik}) = 0$, предполагая, что x_i, u_i, p_{ik} должны быть все три взаимно инцидентны.

Далее, мы могли бы подобным образом рассматривать *дифференциальные уравнения второго порядка*. В него входят, если ограничиться случаем трех переменных, величины x, y, z; p, q; r, s, t, которые раньше мы считали за определяющие элементы соприкасающегося параболоида, а теперь будем рассматривать, как его *координаты*. Мы не будем подробнее исследовать, как изменяются эти семь величин при преобразовании координат, и как, наконец, для них можно ввести симметричное однородное обозначение. Это все-таки потребовало бы некоторых вычислений; нам достаточно указать на эти вопросы, так как они аналогичны случаю диференциального уравнения первого порядка.

Следует только еще упомянуть, что Штуди построил проективную геометрию элементов второго порядка на плоскости, которая находится в тесной связи с линейчатой геометрией пространства R_8 (см. Leipziger Berichte, т. 53, 1901, стр. 338). К уравнениям типа 2 мы вернемся позже в § 94, 95.

§ 31. Основные формулы для кривизны поверхности.

Перейдем теперь к тому, чтобы совершенно элементарно вывести формулы кривизны поверхности; они имеют слишком большое значение для того, чтобы ими подробно заняться, а затем перейти в этих формулах от точечных координат к плоскостным. Будем задавать поверхность уравнением в форме $z = f(x, y)$. Пусть рассматриваемая точка поверхности имеет координаты x_0, y_0, z_0. Направление, исходящее из этой точки поверхности (которое вовсе не обязано быть связанным с поверхностью), мы обозначим через δx, δy, δz. Разложение координаты z поверхности $z = f(x, y)$ по теореме Тейлора дается формулой:

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y + \frac{1}{2}\{r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2\} + \ldots,$$

где $z - z_0$, $x - x_0$, $y - y_0$ мы соответственно заменили через δz, δx, δy. Касательная плоскость к поверхности в нашей точке, в тех же самых координатах δx, δy, δz, дается уравнением:

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y,$$

в котором для p и q взяты их значения из уравнения $z = f(x, y)$. Путем исключения δz из обоих последних уравнений получается:

$$0 = r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2 + \text{члены 3-го порядка.}$$

Это уравнение представляет ортогональную проекцию на плоскость x, y кривой пересечения поверхности с касательной плоскостью. Как мы уже раньше заметили и как непосредственно видно из этого уравнения, точка z_0, x_0, y_0 является двойной точкой этой линии пересечения. Направление ее ветвей мы получим, если в последнем уравнении ограничимся членами второго порядка:

$$0 = r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2.$$

Но таким образом установленное направление тождественно с направлением асимптотических линий. *Диференциальное уравнение асимпто-*

тических линий или, точнее, кривых в плоскости x, y, являющихся ортогональной проекцией асимптотических линий, вследствие этого будет:

$$0 = r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2.$$

Соответственно этому мы хотим теперь вывести диференциальное уравнение линий кривизны. Для этого мы воспользуемся тем, что нормали вдоль такой кривой должны образовывать развертывающуюся поверхность, т. е. что, вообще говоря, они являются касательными кривой, описанной соответствующим центром кривизны:

$$\{x + \lambda p,\ y + \lambda' q,\ z - \lambda\}. \tag{1}$$

Следовательно, объединяя три формулы в одну, мы получим:

$$d\{x + \lambda p,\ y + \lambda q,\ z - \lambda\} = \rho\{p,\ q, -1\}$$

или

$$d\{x,\ y,\ z\} + \lambda d\{p,\ q, -1\} = \sigma\{p,\ q, -1\}, \tag{2}$$

где $\sigma = \rho - d\lambda$. Отсюда следует:

$$\begin{vmatrix} dx & dp & p \\ dy & dq & q \\ dz & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$dp\,(dy + q\,dz) = dq\,(dx + p\,dz)$$

в качестве *диференциального уравнения линий кривизны*. Если в последнем уравнении мы заменили:

$$\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то, наконец, после небольшого преобразования получим:

$$\{pqr - (1 + p^2)\,s\}\,dx^2 + \{(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\}\,dx\,dy + \\ + \{(1 + q^2)\,s - pqt\}\,dy^2 = 0$$

в качестве диференциального уравнения линий кривизны, или, точнее, их проекций на плоскость x, y; это уравнение совершенно аналогично уравнению асимптотических линий.

Мы должны еще определить *соприкасающуюся сферу*. Для этого надо определить λ из (2), потому что тогда мы узнаем соприкасающуюся сферу из (1). Для вычисления λ из (2) мы исключим dx, dy, σ из трех формально объединенных уравнений, используя формулы (3). Таким образом мы получим:

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda r & \lambda s & p \\ \lambda s & 1 + \lambda t & q \\ p & q & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$(s^2-rt)\lambda^2+\{2pqs-r(1+q^2)-t(1+p^2)\}\lambda-(1+p^2+q^2)=0.$$

Это уравнение, квадратное относительно λ, доставляет нам обе соприкасающиеся сферы. Если мы вместо λ напишем уравнение относительно радиуса ρ соприкасающихся сфер, для которого из (1) найдем

$$\rho=\lambda\sqrt{1+p^2+q^2},$$

то в качестве *уравнения для обоих главных радиусов кривизны* получим:

$$\rho^2(s^2-rt)+\rho\{2pqs-r(1+q^2)-t(1+p^2)\}\sqrt{1+p^2+q^2}-$$
$$-(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Добавим еще получающиеся отсюда формулы для гауссовой кривизны $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ и для средней кривизны $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$. Значения ρ_1 и ρ_2 являются корнями нашего последнего уравнения, следовательно, имеем просто:

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

и

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=-\frac{2pqs-r(1+q^2)-t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Если для всех точек поверхности гауссова кривизна должна обращаться в нуль, то мы имеем дело с так называемыми *„развертывающимися поверхностями“*, т. е. с такими поверхностями, которые могут быть развернуты на плоскости без изменения длин кривых, проведенных на поверхности. В качестве условия этого мы получаем дифференциальное уравнение $rt-s^2=0$.

Таким же образом мы можем рассматривать все поверхности, средняя кривизна которых обращается в нуль; они, как известно, являются *минимальными поверхностями*. Их дифференциальное уравнение будет:

$$2pqs-r(1+q^2)-t(1+p^2)=0.$$

До сих пор мы исходили из уравнения поверхности $z=f(x, y)$; разумеется можно также исходить из уравнения $\varphi(x, y, z)=0$ или однородно записанного уравнения $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$. Далее за исходную точку можно также взять параметрическое представление поверхностей, а именно, рассматривать заданные уравнения

$$x=X_1(u, v),\quad y=X_2(u, v),\quad z=X_3(u, v).$$

Здесь достаточно было бы преобразовать наши установленные дифференциальные формулы для всех этих видов представлений поверхности. Но мы этого рассматривать не будем.

Исчерпывающее изложение элементов теории поверхностей имеется, например, у Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I.

§ 32. Введение плоскостных координат в диференциальные уравнения.

Теперь мы обратимся ко второму пункту, а именно, *к введению плоскостных координат вместо точечных координат.* Плоскостные координаты, которыми мы сейчас займемся, будем обозначать через X, Y, Z; в соответствии с этим уравнение поверхности будет иметь вид $Z = F(X, Y)$; это является законом, по которому плоскость „огибает" поверхность. Наша задача состоит в том, чтобы в ранее найденные формулы ввести частные производные P, Q,... этого Z.

Как известно, однородные плоскостные координаты u_i определяют, проще всего, как коэфициенты однородного уравнения плоскости в точечных координатах:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Так как мы не хотим оперировать с однородными координатами, то последнее уравнение мы разделим почленно на одну из величин u и на одну из величин x. Это допускает некоторый произвол. В частности мы напишем уравнение плоскости в симметричном, до известной степени, виде:

$$z - Xx - Yy - Z = 0.$$

Встречающиеся здесь постоянные X, Y, Z будем называть „координатами" плоскости. Это и есть тот самый способ, которым пользовался Плюкер в своей пространственной геометрии (1846).

Предположим, что поверхность, представляемая уравнением $Z = F(X, Y)$, в точечных координатах определяется прежним уравнением $z = f(x, y)$ и исследуем как связаны между собой различные частные производные обоих уравнений. Как мы уже говорили, частные производные для уравнений в плоскостных координатах мы будем при этом обозначать соответствующими большими буквами. Как известно, в точечных координатах уравнение касательной плоскости в точке x_0, y_0, z_0 имеет вид:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

или

$$z - p_0x - q_0y - (z_0 - p_0x_0 - q_0y_0) = 0.$$

Но если это уравнение должно быть уравнением плоскости с координатами X, Y, Z, то

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = z - px - qy, \tag{1}$$

что является нашими первыми соотношениями. Мы откидываем здесь индекс 0, так как эти соотношения имеют место для произвольной точки поверхности.

Но мы можем теперь точно так же исходить из уравнения $Z = F(X, Y)$ и составить уравнение точки прикосновения x_0, y_0, z_0 плоскости X_0, Y_0, Z_0. Сообразно с принципом двойственности оно будет построено совершенно аналогично уравнению касательной плоскости и, следовательно, будет иметь вид:

$$(Z - Z_0) = P_0(X - X_0) + Q_0(Y - Y_0)$$

или

$$Z - P_0 X - Q_0 Y - (Z_0 - P_0 X_0 - Q_0 Y_0) = 0.$$

Из этого следует вторая группа формул

$$x = -P, \quad y = -Q, \quad z = Z - PX - QY, \tag{2}$$

где индекс 0 опять отброшен.

Следовательно, введя плоскостные координаты X, Y, Z и их производные P, Q, мы получаем между ними и соответствующими величинами x, y, z, p, q соотношения, выраженные уравнениями (1) и (2). *С их помощью мы можем всякое дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка в точечных координатах заменить дифференциальными уравнениями с частными производными в плоскостных координатах.*

Одновременно из уравнений преобразования вытекает замечательное соотношение:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = dz - p\,dx - q\,dy,$$

что легко проверить простой подстановкой. Позднее мы вернемся к этому соотношению с более общей точки зрения.

Перейдем теперь ко вторым производным. Прежде всего имеют место уравнения:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dP = R\,dX + S\,dY,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy, \quad dQ = S\,dX + T\,dY.$$

Если, например, в правых уравнениях мы заменим P, Q, X и Y их значениями из ранее приведенных уравнений, то эти уравнения перейдут в

$$-dx = R\,dp + S\,dq,$$
$$-dy = S\,dp + T\,dq.$$

Напротив, из первой пары уравнений посредством разрешения их относительно dx и dy получается:

$$-dx = \frac{-t\,dp + s\,dq}{rt - s^2},$$
$$-dy = \frac{+s\,dp - r\,dq}{rt - s^2}.$$

Из сравнения их следует:

$$R = \frac{t}{s^2 - rt}, \quad S = \frac{-s}{s^2 - rt}, \quad T = \frac{r}{s^2 - rt}$$

а отсюда:

$$S^2 - Rt = \frac{1}{s^2 - rt}.$$

Аналогичным образом или так же непосредственным разрешением последних уравнений получаются двойственные формулы:

$$r = \frac{T}{S^2 - RT}, \quad s = \frac{-s}{S^2 - RT}, \quad t = \frac{R}{S^2 - RT}.$$

Но это уже дает нам искомые формулы преобразования для производных второго порядка.

Приведем теперь еще два примера перехода от точечных координат к плоскостным координатам в дифференциальных уравнениях с частными производными.

В качестве первого примера возьмем уравнение минимальных поверхностей:

$$0 = 2pqs - (1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t.$$

После подстановки оно перейдет в

$$0 = 2XYS + (1+Y^2)\,T + (1+X^2)\,R.$$

Так как здесь встречаются только производные S, T, R, и притом в каждом члене по одному разу, то мы имеем здесь дело с *линейным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка*. Это имеет большое значение для теории минимальных поверхностей.

В качестве второго примера рассмотрим так называемое общее *уравнение Монжа-Ампера*, которым мы еще будем заниматься позднее. Оно имеет вид:

$$Ar + Bs + Ct + D\,(s^2 - rt) + E = 0,$$

где коэфициенты A, B, C и т. д. коротко обозначают выражения, зависящие от величин x, y, z, p, q. Существенно обратить внимание на то, что величины r, s, t входят здесь в характерно простой комбинации. После подстановки плоскостных координат уравнение переходит в

$$A'T + B'S + C'R + D' + E'\,(S^2 - RT) = 0,$$

причем обозначения A', B', C' и т. д. опять введены, как сокращенные обозначения для выражений, зависящих от величин X, Y, Z, P, Q.

Следовательно, всякое уравнение Монжа-Ампера при нашем преобразовании переходит опять в уравнение Монжа-Ампера.

Теперь еще несколько слов о дальнейшем развитии изложенных здесь исследований, основывающихся на введении плоскостных координат вместо точечных.

Величины X, Y, Z можно также рассматривать, как параметры трехмерного многообразия поверхностей, которое может быть задано, например, уравнением:

$$\Omega\,(x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z) = 0,$$

в котором X, Y, Z фигурируют, как параметры. Это уравнение отнюдь не обязано быть билинейным, как это было в рассмотренных случаях. Возникает вопрос: как тогда преобразуются координаты, их первые и вторые производные и в соответствии с этим дифференциальные уравнения. При этом в основу здесь кладется то представление, что всякая поверхность всегда может быть „представлена“ уравнением $Z = F\,(X,\ Y)$, которому удовлетворяют поверхности X, Y, Z, „огибающие“ представляемую поверхность. Этим вопросом занимался уже Плюкер.

Далее, следуя Ли, мы можем рассматривать X, Y, Z как параметры семейства кривых, зависящего от трех параметров; это семейство, следуя Ли, мы назовем комплексом кривых. См. работу Ли в Math. Annalen, т. 5 (1871). Уравнение $Z = F(X, Y)$ выделяет затем из семейства кривых комплекса, зависящих от трех параметров, некоторую *конгруэнцию*, имеющую фокальную поверхность; об этой фокальной поверхности мы скажем, что она в качестве огибающего образа „представляется" как раз уравнением $Z = F(X, Y)$. Представим себе теперь также и эту поверхность заданной в обычных точечных координатах. Тогда возникает вопрос, как при этом связаны величины x, y, z; p, q; r, s, t с соответствующими той же самой точке поверхности величинами X, Y, Z; P, Q; R, S, T.

Вообще мы видим:

Если, следуя Плюкеру и Ли, в качестве пространственного образа мы введем вместо точек какие-нибудь другие зависящие от трех параметров образы, то мы получим целый ряд преобразований для дифференциальных уравнений пространственной геометрии.

Последним обобщением явилось бы введение таких семейств поверхностей или кривых, которые зависят более чем от трех параметров. Сферы из геометрии сфер и прямые из линейчатой геометрии дают для этого ближайший пример. С их помощью можно также „представлять" другие поверхности, разыскивая все „огибающие сферы" или „огибающие линии". Как же будут изображаться x, y, z; p, q; r, s, t с помощью новых упомянутых координат? Этим вопросом занимался Кенигс, см. его статью в „Acta mathematica", т. 10, 1887 (Koenigs, Sur une classe de formes differentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments).

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

„Теория преобразований“, как мы назвали вторую часть настоящих лекций, хотя и противопоставляется нашим прежним рассмотрениям, которыми мы занимались в первой части в разделе „Замена пространственных элементов“, но нельзя не отметить внутреннего взаимного проникновения обеих областей, так что в последующем не всегда будет производиться их строгое разделение. В качестве основы наших исследований мы имеем, с одной стороны, геометрическую фигуру, с другой — аналитический аппарат определенной системы координат. До сих пор господствует желание трактовать одну и ту же фигуру с помощью различных аналитических вспомогательных средств: то с помощью различных точечных координат, то плоскостных координат, сферических координат и т. д. Таким образом мы приходили к различным уравнениям для одной и той же фигуры. Теперь же одно и то же уравнение $f(x, y, z, \ldots) = 0$ мы будем истолковывать с различных геометрических точек зрения, рассматривая величины $x, y, z, \ldots$, то как обычные точечные координаты, то как высшие точечные координаты и т. д. Вследствие этого различные геометрические фигуры будут представляться одним и тем же уравнением. *Переход от одной фигуры к другой мы назовем „преобразованием“. Нашей задачей является их геометрическое исследование.*

При этом для определенности мы ограничимся, прежде всего, обычными точечными координатами и в соответствии с этим рассмотрим сначала только:

ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА.

Пусть, как обычно, координаты будут обозначаться через $x, y,$ и пусть имеются следующие соотношения, связывающие координаты x, y, z и x', y', z':

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \psi(x, y, z), \quad z' = \chi(x, y, z).$$

Раньше эти три формулы мы трактовали таким образом, что говорили: точке x, y, z они ставят в соответствие новые координаты x', y', z'; теперь мы скажем: точке x, y, z они ставят в соответствие некоторую новую точку с координатами x', y', z' в первоначальной системе координат. *Следовательно, теперь система координат берется неизменной, а точка „преобразуется“; раньше же точка была неизменной, а система координат преобразовывалась.* Итак, в приведенных формулах заключается самая общая форма точечных преобразований.

§ 33. Линейные преобразования.

Первым специальным типом точечных преобразований, который мы подробнее рассмотрим, будут *линейные преобразования*, определяющиеся уравнениями:

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$z' = \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}.$$

Следует особо отметить: знаменатели всех трех выражений одинаковы. В этом как раз и заключается большая простота и целесообразность соответствия, определяемого этими формулами.

Если мы введем однородные координаты, заменив x, y, z; x', y', z' отношениями:

$$\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t};\quad \frac{x'}{t'},\ \frac{y'}{t'},\ \frac{z'}{t'},$$

то вышеприведенные формулы мы можем написать, пользуясь множителем пропорциональности ρ, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho x' &= ax + by + cz + dt,\\
\rho y' &= a'x + b'y + c'z + d't,\\
\rho z' &= a''x + b''y + c''z + d''t,\\
\rho t' &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t.
\end{aligned}$$

Теперь непосредственно бросается в глаза симметрия наших формул. *Новые однородные переменные взяты пропорциональными некоторым линейным формам от старых однородных переменных.*

Если мы воспользуемся часто употребляемым способом различать отдельные координаты индексом, то мы сможем все четыре формулы записать в виде одной:

$$\rho x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k,$$

причем $i = 1, 2, 3, 4$.

Очевидно, весьма существенно то значение, которое имеет *определитель, составленный из коэфициентов a_{ik} этих уравнений. Пока мы будем его считать всегда отличным от нуля, чтобы иметь возможность обратно по заданным величинам x_i' вычислить однозначно (в их отношениях) координаты x_k.* Но мы уже сейчас заметим, что позднее, при случае, мы будем рассматривать также и такие преобразования, которые соответствуют обращающемуся в нуль определителю (§ 35).

Но что же означают наши преобразования геометрически? Этот вопрос поставил и разрешил в совершенно общей форме Мебиус в своем, неоднократно нами упоминавшемся, „Барицентрическом исчислении". В этой работе вместо слова „*преобразование*" он употребляет

слово „*сродство*“, причем он вообще называет „*сродственными*“ две области, поставленные друг другу в соответствие в силу каких-нибудь уравнений. В нашем специальном случае линейных уравнений между однородными точечными координатами Мебиус, в частности, называет „*коллинеацией*“ сродство обоих точечных пространств. Позднее Шаль это название заменил словом „*гомография*“. Это название Мебиуса станет нам тотчас понятным, если, следуя Мебиусу, мы назовем „*коллинеарными*“ такие точки, которые лежат на одной прямой. Тогда, по Мебиусу, коллинеарные точки при нашем „сродстве“ переходят опять-таки в коллинеарные точки, или, выражаясь обычным языком, прямые линии переходят в прямые линии.

Чтобы это доказать, произведем следующее рассмотрение. Прежде всего, по теории определителей, из уравнения

$$\rho x_i' = \sum_1^4 a_{ik} x_k,$$

при условии $|a_{ik}| \neq 0$, следует существование обратных соотношений:

$$\sigma x_i = \sum_1^4 A_{ik} x_k',$$

в которых σ является множителем пропорциональности. Причем A_{ik} обозначает минор, соответствующий элементу a_{ki} в определителе $|a_{ik}|$. Этим доказано, что:

Каждой точке x соответствует некоторая точка x′ и каждой точке x′—некоторая точка x.

Пусть теперь заданы две какие-нибудь точки x_i и y_i; тогда произвольная точка соединяющей их прямой имеет координаты $\lambda x_i + \mu y_i$. Но из уравнений

$$\rho x_i' = \sum a_{ik} x_k \quad \text{и} \quad \rho y_i' = \sum a_{ik} y_k,$$

почленно их умножая соответственно на λ и μ и складывая, тотчас получаем новые уравнения:

$$\rho (\lambda x_i' + \mu y_i') = \sum a_{ik} (\lambda x_k + \mu y_k).$$

Следовательно, точке $(\lambda x_i + \mu y_i)$ соответствует как раз точка $(\lambda x_i' + \mu y_i')$. Так как теперь точка $\lambda x_i' + \mu y_i'$ опять лежит на прямой, соединяющей точки x_i' и y_i', то мы имеем предложение: *каждой точке, которая лежит на прямой, соединяющей точки x и y, соответствует опять точка, лежащая на прямой, которая соединяет точки x′ и y′, и обратно.* Но это и есть наше прежнее утверждение (в уточненном виде).

Очевидно мы можем легко расширить это предложение и доказательство, рассматривая точки $\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i$, которые лежат в одной плоскости с тремя точками x_i, y_i, z_i. Это дает: *четыре точки, лежащие в одной плоскости, при преобразовании дают опять четыре точки, лежащие в одной плоскости, и обратно.*

В этих предложениях мы видим основные свойства „коллинеации" В частности, мы будем еще говорить о *бесконечно удаленных, или несобственных точках.* Точка лежит в бесконечности, или является несобственной, если при обычном координатоопределении одна из координат сделается бесконечной или лучше, при пользовании однородным способом записи, если $x_4 = 0$ или $x_4' = 0$. Если положить $x_4 = 0$, то наша формула преобразования даст уравнение:

$$A_{14}x_1' + A_{24}x_2' + A_{34}x_3' + A_{44}x_4' = 0,$$

а если мы положим $x_4' = 0$, то соответственно получим:

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0,$$

т. е. в обоих случаях получаем уравнение плоскости. *Следовательно, при коллинеации несобственные точки преобразуются в точки плоскости и так как вообще при коллинеации плоскость переходит в плоскость, то удобно говорить, что сами несобственные точки образуют плоскость, несобственную плоскость.*

Точки с $x_4 \neq 0$ называют тогда *собственными* точками.

Существует, разумеется, специальный тип коллинеаций, при котором этот термин не является необходимым, а именно, если значение $x_4' = 0$ соответствует значению $x_4 = 0$. Тогда наши уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\rho x_4' &= x_4,
\end{aligned}$$

при этом коэфициент последнего уравнения мы включили в ρ. В самом деле здесь не приходится заботиться о том, образует ли бесконечно удаленная область пространства плоскость или нет; мы можем ограничиться рассмотрением только собственных точек.

Такую коллинеацию, при которой несобственная плоскость остается несобственной, Мебиус называет специальным „аффинным" сродством (аффинным преобразованием).

Как легко видеть, аффинные преобразования характеризуются тем, что при употреблении неоднородных декартовых координат знаменатель в соотношениях отсутствует.

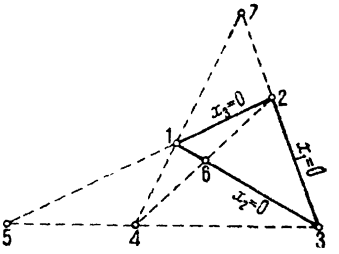
Теперь возникает весьма интересный вопрос, которым занимался уже Мебиус, а именно вопрос *о геометрическом построении наиболее общей коллинеации.*

Эта последняя зависит от 15 постоянных, так как дело идет только об отношениях 16 коэфициентов a_{ik} в уравнениях подстановки. Если теперь некоторой определенной точке x_i мы поставим в соответствие определенную точку x_i', то очевидно мы получим три линейных уравнения, связывающих a_{ik}. Так как, далее, для определения 15 постоян-

ных необходимо иметь 15 условий, то мы получаем предложение: *коллинеация является однозначно определенной, если только каким-нибудь пяти точкам, из которых никакие четыре не лежат на одной плоскости, поставить в соответствие некоторые другие пять точек, из которых, разумеется, опять никакие четыре не должны лежать в одной плоскости.*

Добавленные условия находят свое аналитическое обоснование в том, что при вычислении a_{ik} никакие определители четвертого порядка из координат четырех точек не должны обращаться в нуль. С другой стороны их необходимость поможет нам, когда мы к этому перейдем, построить чисто геометрическую картину рассматриваемого соответствия между обоими точечными образами. Мы спросим себя:

Как мы можем построить к тем пяти основным парам точек произвольно большое количество дальнейших взаимно соответствующих точек? На этот вопрос отвечает *построение* так называемой *сети Мебиуса*. Именно, через каждые три из пяти основных точек пространства проводится их содержащая плоскость; эти плоскости по три пересекаются в определенных новых точках. Теперь этими новыми точками совместно со старыми пользуются в точности таким же образом. Опять соединяем все точки по три уломянутыми плоскостями, которые приводят к дальнейшим точкам пересечения и т. д. Совершенно аналогичный процесс применяют к точкам другого пространства, исходя и там из пяти основных точек. Таким образом в обоих пространствах возникает своеобразная сеть, и весьма существенно, что петли сети заполняют каждое пространство „всюду плотно". Мебиус это строго доказал. Далее, *соответствующие точки в обеих сетях будут соответствовать друг другу в смысле нашей коллинеации.* Поэтому сродство обоих пространств будет полностью установлено построением двусторонней сети, коль скоро мы прибавим, что оно должно быть *непрерывным.*



Черт. 39.

Рассмотрим это еще немного ближе, уяснив себе соответствующее геометрическое построение на плоскости, т. е. при ограничении тремя однородными переменными. Тогда мы легко можем проследить отдельные шаги на чертеже. Нам теперь надо исходить из четырех основных точек, из которых никакие три не должны лежать на одной прямой; на чертеже 39 они обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. Соединяющие их прямые тотчас приведут нас к точкам 5, 6 и 7. Далее, их можно соединить друг с другом новыми прямыми, которые дадут нам новые точки пересечения. И так будем поступать дальше.

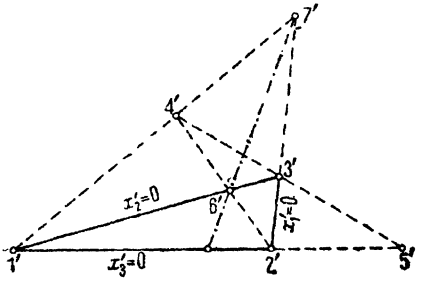
Теперь в качестве координатного треугольника мы положим в основу треугольник с вершинами 1, 2, 3, а точку 4 возьмем в качестве единичной точки. Тогда ближайшее рассмотрение дает нам прежде всего следующее предложение: *все точки сети являются рациональ-*

ными точками в этой системе координат, т. е. их координаты даются посредством отношения целых чисел.

Но еще важнее обратное предложение (на довольно сложном доказательстве которого мы, к сожалению, останавливаться не можем), а именно, *каждая точка, являющаяся рациональной в нашей координатной системе, будет точкой сети.*

Из этого предложения непосредственно следует, что точки сети расположены на плоскости всюду плотно.

Между рациональными точками лежат иррациональные, которые не могут быть достигнуты конечным числов шагов. Однако точки сети подходят к ним произвольно близко; поэтому сами они могут быть достигнуты посредством предельного перехода.



Черт. 40.

Произведем теперь то же самое построение в нашей второй плоскости (черт. 40), исходя из четырех точек 1′, 2′, 3′, 4′. Тогда, если всякий раз ставить друг другу в соответствие пары рациональных точек, полученные в обеих плоскостях соответствующими друг другу построениями (в то время как в случае иррациональных точек мы будем ставить друг другу в соответствие такие, которые в обеих плоскостях получены посредством одинакового предельного перехода), очевидно, получится коллинеация, установленная между обеими плоскостями.

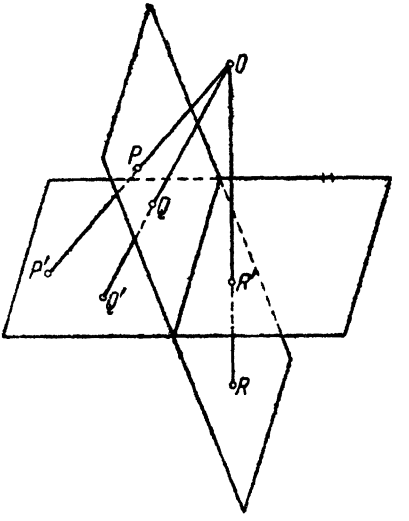
При изложении построения сети Мебиуса, что следует особо отметить, мы еще совершенно не говорили о линейном соотношении между координатами обеих плоскостей; но если мы отметим теперь, что оно однозначно определяется посредством соответствия четырех пар точек и затем, что оно в качестве коллинеации ставит в соответствие точки обеих сетей точно таким же образом, как наше геометрическое построение, то мы получим: *обратно, каждой коллинеации двух плоскостей соответствует некоторая линейная подстановка координат, т. е. линейное преобразование вполне будет охарактеризовано геометрически, если мы скажем, что оно является коллинеацией.* При этом наброске доказательства мы предполагали, что предельной точке сходящейся последовательности рациональных точек в силу коллинеации соответствует опять предельная точка, т. е. мы требовали *непрерывности* преобразования. Но непрерывность, как необходимое требование, можно откинуть, так как здесь имеет место предложение: *всякое однозначное точечное преобразование, переводящее прямую в прямую, необходимо является непрерывным.*

Мы вкратце укажем, как можно легко провести это важное доказательство, следуя Дарбу, именно, доказательство того, что в *непрерывной по предположению проективной плоскости всякая коллинеа-*

ция является непрерывной. Мы напомним: к трем точкам A, B, C прямой всегда можно построить четвертую гармоническую точку D с помощью одной линейки (см. черт. 40, на котором, например, четыре точки прямой $1'$, $2'$ расположены гармонически) в силу известного свойства полного четырехугольника. Отсюда следует, что всякая коллинеация в плоскости сохраняет гармоническое расположение четырех точек на прямой этой плоскости. Но из этого можно заключить, что „порядок" двух пар точек на прямой остается неизменным, т. е. что сохраняется свойство пар разделять друг друга или не разделять. Именно, только для двух не разделяющих друг друга пар существует третья пара, которая одновременно разделяет обе гармонически. Отсюда, из сохранения порядка на прямой, легко заключить, что каждая прямая при коллинеации непрерывно отображается на свой образ, а отсюда (на основании главного свойства сохранения коллинеарности точек) — о непрерывности коллинеарного соответствия на плоскости.

Очевидно, это доказательство имеет место только при ограничении действительными элементами.

Совершенно аналогично случаю плоскости, как это легко видеть, обстоит дело в случае пространства или вообще в случае линейного многомерного многообразия (пространства). Каково положение вещей в случае одномерного многообразия мы рассмотрим позднее (стр. 155).



Черт. 41.

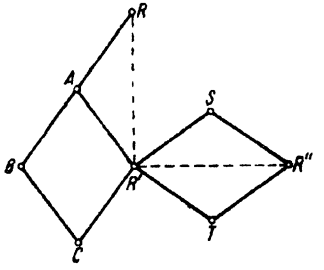
§ 34. Перспектограф и пантограф

Составим себе еще одно непосредственно наглядное представление о том, как выглядит коллинеарное соответствие между двумя плоскостями. Рассмотрим постоянно встречающийся в приложениях пример, именно покажем, что *всякая „перспектива", посредством которой две плоскости отображаются одна на другую, дает нам коллинеарное соответствие между этими плоскостями.*

При этом мы считаем, что всегда соответствуют друг другу те точки плоскостей, в которых обе плоскости пересекаются произвольным лучом, выходящим из некоторой фиксированной точки O (черт. 41). Что это дает коллинеацию — очевидно. Этот род преобразования, как известно, играет большую роль в начертательной геометрии.

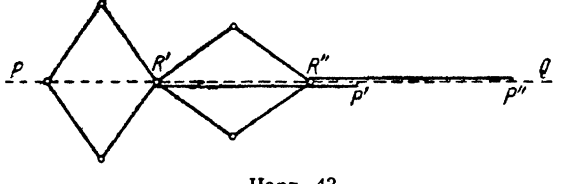
Можно теперь спросить себя, каковы те формулы, которые выражают соотношение между обеими плоскостями в этом частном случае, насколько они отличаются от формул общей коллинеации и т. п.

Отсылая со всеми этими вопросами к более подробным изложениям[1]), мы хотим сейчас только познакомиться с прибором, который позволяет простейшим образом вычертить перспективный образ к некоторому заданному прообразу. Подобный аппарат, в соответствии с этим, называют *„перспектографом"*. Аппарат, рассматриваемый здесь, построен инженером Риттером в Франкфурте-на-Майне, и по своему выполнению имеет право считаться наипростейшим аппаратом. Чтобы понять лежащий в его основе принцип, рассмотрим, прежде всего, механическую конструкцию одной из его частей.



Черт. 42.

Эта часть прибора состоит из так называемой *„системы лягушачьих лап"* (черт. 42). Она представляет собой две ромбические шарнирные системы, сделанные из деревянных палочек одинаковой длины. Эти системы скреплены друг с другом таким образом, что две смежные стороны одного ромба перпендикулярны двум сторонам другого ромба, как это показано на чертеже. Кроме того сторона AB продолжена за точку A на собственную длину. Далее, во всех вершинах имеются шарниры, дающие системе возможность растягиваться и сжиматься. Теперь легко видеть, что пунктирные линии RR' и $R'R''$ при всяком положении ромбов равны между собой и взаимно перпендикулярны. Действительно, оба наши ромба всегда конгруэнтны и взаимно перпендикулярны.



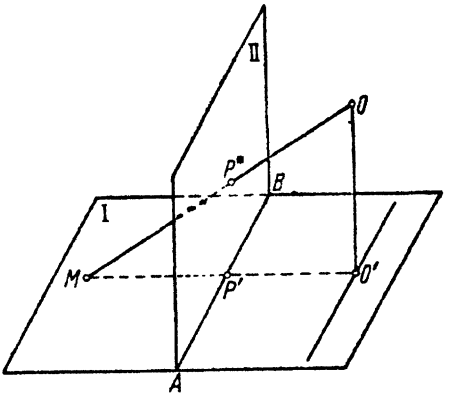
Черт. 43.

Точки R' и R'' принуждены двигаться в приборе по некоторой прямой PQ, в то время, как прикрепленные к „системе лягушачьих лап" в точках R' и R'' два стержня ($R'P'$ и $R''P''$) одинаковой длины, которые относительно друг друга укреплены подвижно в виде санок, двигаются вдоль PQ (черт. 43). Поэтому, в частности, $P'P''$ всегда равно $R'R''$, т. е. также равно и RR'. Простой смысл прибавления обоих направляющих стержней $R'P'$ и $R''P''$ сделается нам сейчас ясным.

После этих предварительных замечаний, выясним теперь теорию рассматриваемого прибора. Вообразим себе, что на плоскости II нам надо получить из фиксированной точки O перспективный образ фигуры, данной в плоскости I, причем плоскость II перпендикулярна плоскости I (черт. 44). Пусть произвольная точка M имеет своим образом

[1]) Например, см. Энриквес, Лекции по проективной геометрии (F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, 2 Aufl., Leipzig 1915).

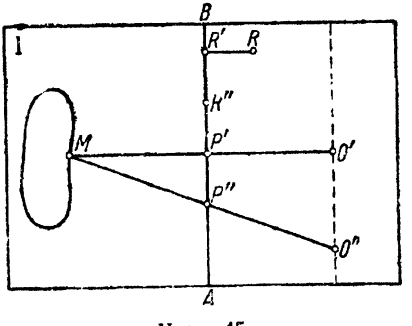
точку P^*. Опустим перпендикуляры OO' и P^*P' на основную плоскость I и вообразим затем треугольник MOO', содержащий так же точки P^* и P', повернутым к себе вокруг линии MO' до совпадения с плоскостью I, причем P^* переходит в P'', а точка O в O'' [1]). С другой стороны, повернем плоскость II вокруг AB направо до совпадения с плоскостью I и сдвинем ее затем вдоль AB на произвольный отрезок, так что содержащиеся в ней точки P^* и P' лягут на точки R и R' (черт. 45).



Черт. 44.

Теперь мы уже подходим к цели. Мы имеем $R'R = P'P''$. Возьмем еще на прямой AB вторую точку R'' так, чтобы $P'P''$ равнялось $R'R''$. Точки O' и O'' рассматриваются в плоскости I, как неподвижные; точки P' и P'' получаются на прямой AB с помощью двух лучей MO' и MO'' при движении точки M, а этим определяются также точки R', R'' и R Следовательно, если точка M опишет заданную фигуру, то точка R опишет искомый перспективный образ.

Теперь с помощью описанной системы лягушачьих лап (обозначения которой совпадают с обозначениями черт. 43) этот процесс, как мы сейчас увидим, можно осуществить механически. Нам только остается сказать несколько слов о том, как точки P' и P'' устанавливаются механически. Для этой цели служат две скользящие линейки, которые образуют стороны некоторого угла с вершиной в подвижной точке M и посредством надлежащего ведения всегда проходят через точки O'' и O'. В точках P' и P'' эти линейки опираются на санки, скользящие по PQ. Способ употребления аппарата из этого виден сам собой.



Черт. 45.

Пока дело шло о перспективном соответствии двух плоскостей, осуществляемом посредством пространственной конструкции; теперь мы хотим познакомиться с новой перспективой, которая каждой точке плоскости ставит в соответствие другую точку той же плоскости, не выходя из самой плоскости. В основу положим обычный коорди-

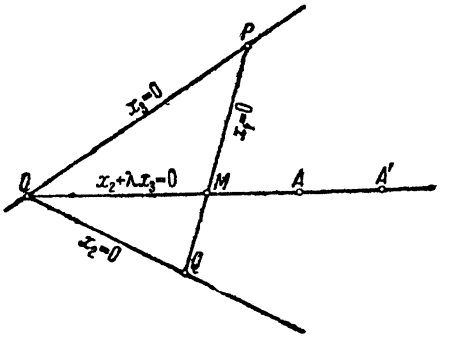
[1]) Т. е. преобразуется аффинно, так что $OO' = O''O'$, и точка O' переходит в себя.

натный треугольник с вершинами O, P, Q (черт. 46), и ради простоты в качестве координат точки x_1, x_2, x_3 введем величины, пропорциональные расстояниям от сторон треугольника. Теперь мы рассмотрим точечное соответствие, осуществленное с помощью следующих уравнений:

$$\rho x_1' = kx_1, \quad \rho x_2' = x_2, \quad \rho x_3' = x_3,$$

причем под k понимается произвольная постоянная, отличная от нуля.

Мы тотчас увидим следующие факты. Вершина треугольника $O(x_2 = x_3 = 0)$ соответствует сама себе, так же и все точки противоположной стороны. Проходящий через точку O произвольный луч $x_2 + \lambda x_3 = 0$ также переходит сам в себя, но при определенной перестановке его точек. Мы сейчас увидим, как построить на нем соответствующие друг другу точки.



Черт. 46.

Таким образом установленное соответствие называют *плоскостной перспективой*. Точку O мы назовем ее *центром*, а прямую $x_1 = 0$ — ее *осью*. Чтобы для некоторой точки $\{x_i\} = A$ найти соответствующую ей точку $\{x_i'\} = A'$, мы соединим ее с точкой O и составим простые отношения:

$$x_3 : x_3' = OA : OA', \quad x_1 : x_1' = MA : MA',$$

из которых, при использовании наших исходных уравнений, следует:

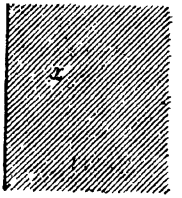
$$\frac{MA'}{OA'} = k \frac{MA}{OA}.$$

Но это уравнение устанавливает искомое построение в простейшей форме. Одновременно мы выясняем, что в плоскостной перспективе существенны только центр O и ось, лучи же $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ совершенно равноправны со всеми другими лучами, проходящими через точку O.

Теперь мы легко можем выяснить, как фигура, описанная точкой x, может быть преобразована в соответствующую фигуру, описанную точкой x'. Рассмотрим сначала половину плоскости направо от оси (черт. 47). Если, для определенности, мы возьмем в качестве значения k правильную дробь, например $\frac{1}{2}$, то указанной полуплоскости, которую описывает точка x, будет соответствовать только параллельная полоса, ширина которой, для частного значения $k = \frac{1}{2}$, равняется как раз половине расстояния центра от оси (черт. 48).

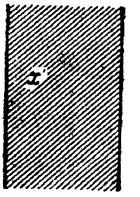
Параллельную оси прямую, которая ограничивает полосу, называют „прямой удаления" (Fluchtgerade), так как точка — прообраз x в пер-

вой фигуре, соответствующая произвольной точке x' этой прямой, как бы удалилась в бесконечность. Если k будет больше $\frac{1}{2}$ (но все же еще будет меньше 1), то ширина полосы увеличится; наоборот, если $k < \frac{1}{2}$, то она уменьшится. Как обстоит дело с перспективой в случае $k > 1$, мы непосредственно получим из только что рассмотренного примера, переменив местами x' и x.



Черт. 47.

Чтобы показать преобразование простейшей фигуры (для $k < 1$), мы заметим: например, окружность плоскости x', либо целиком расположенная внутри нашей полосы, либо касающаяся „прямой удаления", либо пересекающая ее, дает в заштрихованной части x-плоскости соответственно либо эллипс, либо параболу, либо дугу гиперболы (ее дополнительная дуга расположена в незаштрихованной части x-плоскости).



Черт. 48.

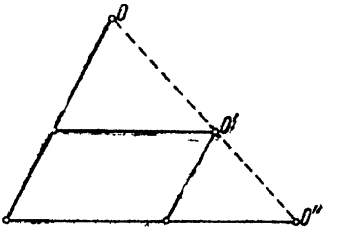
Теперь, очевидно, мы можем также сравнить между собой окрестности точек O и O'. Особенно об этом будет итти речь в том специальном случае, когда ось перспективы отодвигается в бесконечность. Тогда мы просто получаем так называемое *преобразование подобия*, как это мы тотчас выясним из наших формул, подставив вместо только что рассмотренных треугольных координат обычные декартовы координаты:

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}.$$

Именно, наши формулы дают

$$x' = \frac{x}{k}, \quad y' = \frac{y}{k},$$

т. е. *все проходящие через O прямые сохраняют свое положение, но все расстояния от точки O умножаются на определенную постоянную.*



Черт. 49.

Это соответствие можно осуществить механически посредством очень простого прибора, так называемого *пантографа*, который практически служит для того, чтобы какой-нибудь заданный чертеж увеличить или уменьшить (черт. 49). Этот прибор состоит из шарнирного параллелограма с двумя таким образом удлиненными сторонами, чтобы точки O, O', O'' лежали на одной прямой. Если теперь сделать одну из этих точек неподвижной, а второй точкой обводить какую-нибудь начерченную фигуру, то третья точка опишет „подобную и подобно расположенную ей относительно первой точки фигуру".

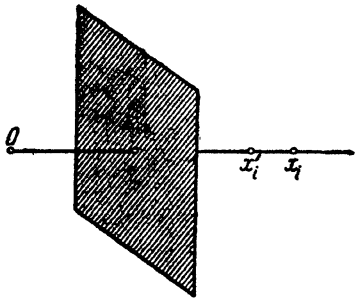
§ 35. Рельефная перспектива и перспектива изображения.

То, что мы только что проделали на плоскости, можно различными способами перенести на пространство, например, с помощью соотношений:

$$\rho x_1' = kx_1, \quad \rho x_2' = x_2,$$
$$\rho x_3' = x_3, \quad \rho x_4' = x_4.$$

Мы опять будем говорить о *центре* ($x_2 = x_3 = x_4 = 0$) и об *отмеченной плоскости* (ausgezeichneten Ebene) ($x_1 = 0$) *перспективы*. Эта плоскость определяется тем, что все ее точки (так же как и центр) переходят сами в себя (черт. 50).

Все x-полупространство, лежащее направо от этой плоскости, отображается теперь, опять-таки для случая $k < 1$, на слой x' определенной толщины. Точно так же всякий луч, проходящий через центр, при условии перестановки его точек, переходит сам в себя. Эту специальную коллинеацию пространства называют *рельефной перспективой*; говорят о высоком рельефе и плоском рельефе как образе телесной фигуры, смотря по тому, будет ли слой достаточно толстым или весьма тонким. Впрочем эти перспективы применяются не только в скульптуре, но также и в театре при театральных постановках. При этом, конечно, от теоретических преобразований в случае обоих применений они более или менее сильно уклоняются, особенно при установлении театральных декораций, которые должны походить на действительность для зрителей, находящихся в различных точках зрительного зала. Очень интересны модели, например, бриллевского издательства, которые дают рельефную перспективу конуса, куба со сферой и полого цилиндра, производящие известную оптическую иллюзию, которая изображенный предмет делает нам непосредственно видимым в его настоящей размерности. В качестве примера упомянем еще преобразование гиперболического параболоида в однополостный гиперболоид (или наоборот).



Черт. 50.

Обычная работа скульптора пользуется специальным случаем простого преобразования подобия. Как, однако, в противоположность этому, сюда относится способ изображения художника? Все предметы пространства, которые художник воспроизводит, он отображает перспективно на плоскость. Формальное представление и законы этой *„перспективы изображения“* мы очень просто получим из наших общих формул, если положим $k = 0$; тогда:

$$\rho x_1' = 0, \quad \rho x_2' = x_2,$$
$$\rho x_3' = x_3, \quad \rho x_4' = x_4.$$

Но из этого следует, что определитель нашей подстановки равен нулю. Следовательно, здесь мы имеем пример *коллинеации с обращающимся в нуль определителем*, на возможность которой мы уже указывали ранее.

Основными свойствами этой выродившейся коллинеации являются следующие.

1. Каждой точке x_i, вообще говоря, соответствует одна точка x'_i. Только центр O перспективы составляет исключение; его образ является совершенно неопределенным. Наоборот, каждой точке x'_i отмеченной плоскости соответствуют все точки x_i, расположенные на соответствующем луче, проходящем через O; каждой другой точке x'_i соответствует всегда только сам центр O.

2. Прямой, описанной точкой x_i, соответствует прямая, описанная точкой x'_i. Исключение составляют только прямые, проходящие через точку O, так как все их точки, отличные от O, отображаются в одну и ту же точку x'_i. Наоборот, прямой, описанной точкой x'_i отмеченной плоскости, соответствует бесконечно много прямых x, заполняющих плоскость, которая проходит через O, и т. д. Эти замечания, которые еще легко можно пополнить, дают возможность выяснить как совершенно изменяется сущность линейных преобразований, коль скоро их определитель обращается в нуль.

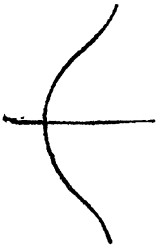
§ 36. Ньютонова классификация кривых третьего порядка.

Поговорим теперь, в частности, *о пользе этих рассмотрений для геометрии*. Данное уравнение $f(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots) = 0$ с помощью линейной подстановки переменных можно преобразовать к некоторому другому виду, который представит нам образ, равносильный с образом первого уравнения. Следовательно, коллинеарное преобразование, с одной стороны, линейное преобразование, с другой стороны, позволяют нам геометрические образы и их уравнения распределить по группам, и все свойства, которые образы группы имеют общими, изучать по простейшему представителю группы. Так, например, для нас кривые второй степени — эллипс, гипербола, парабола и окружность — являются равноправными (как это выражают, называя их „коническими сечениями“) и в соответствии с этим мы можем на окружности или на параболе изучать все проективные свойства, общие всем этим образам. Аналогично в пространстве будут между собой родственными при действительных коллинеациях и, следовательно, не будут различными с точки зрения проективной геометрии, с одной стороны, поверхности — эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид и сфера, и, с другой стороны, линейчатые поверхности второй степени — однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Это — общеизвестные элементарные примеры.

В этом круге идей коснемся еще вкратце *плоских кривых третьего порядка*. Посредством коллинеарного преобразования их можно свести к пяти типам. Установим эти типы, начав со следующего

предложения: с помощью надлежащего линейного преобразования во всех случаях уравнение может быть приведено к виду

$$y^2 = (x - e_1)\,(x - e_2)\,(x - e_3),$$



Черт. 51.

из которого видна симметрия кривой относительно оси x. Далее имеются следующие возможности:

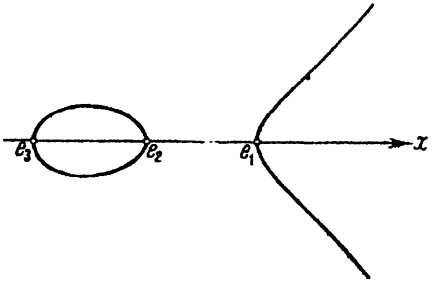
1. Два значения e_i комплексно сопряжены, третье, разумеется, действительно (черт. 51). *Тогда получается кривая третьего порядка, состоящая из одной ветви.*

2. Все значения e_i действительны. Это дает при предположении $e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3$ следующие подслучаи:

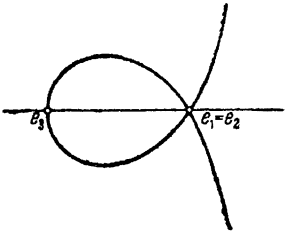
a) $e_1 > e_2 > e_3$, т. е. все e_i различны между собой. Тогда получается *кривая третьего порядка, состоящая из двух ветвей* (черт. 52).

b) Пусть $e_1 = e_2$, но не равно e_3. Тогда получается *кривая третьего порядка с двойной точкой* в собственном смысле этого слова (черт. 53).

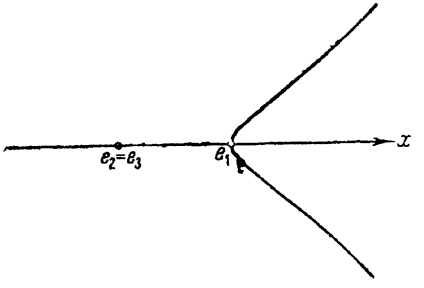
c) Пусть $e_2 = e_3$, но отлично от e_1. Получается *кривая третьего порядка с изолированной двойной точкой* (черт. 54).



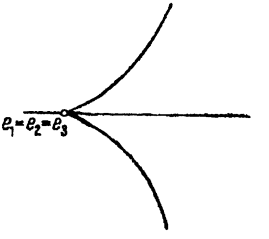
Черт. 52.



Черт. 53.



Черт. 54.



Черт. 55.

d) Пусть, наконец, $e_1 = e_2 = e_3$; это соответствует *кривой третьего порядка с острием* (черт. 55).

Каждая C_3 посредством коллинеации, например, посредством перспективы, может быть превращена в один из этих пяти типов, или

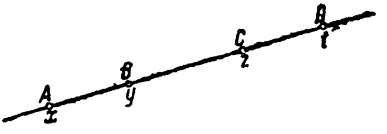
другими словами: *все кривые C_3 могут быть получены как плоские сечения пяти конусов третьего порядка, которые получатся, если из произвольно выбранной точки провести лучи ко всем точкам кривых, изображенных на наших пяти чертежах.*

Этот результат классификации кривых C_3 восходит к Ньютону; он имеется в его работе: Enumeratio linearum tertii ordinis (1711); особенно см. главу: De generatione curvarum per umbras. Следовательно, не надо думать, что проективные рассмотрения являются чем-то исключительно современным. Напротив, уже у древних греков встречаются проективные исследования, один пример которых мы рассмотрим в § 37: мы познакомимся там с теоремой Паппа.

§ 37. Понселе и учение о двойных отношениях.

Мы и дальше пойдем тем же путем; именно мы будем не столько заниматься подробным изложением теории проективной геометрии, сколько говорить о главных этапах ее развития в исторической последовательности. В качестве первого этапа мы назовем:

Работу Понселе от 1822 г. Там устанавливается различие между свойствами „положения“ и „меры“ геометрических образов. Первые характеризуются тем, что они остаются неизменными при любых проективных преобразованиях фигуры, что не имеет места для последних. Соответственно этому геометрия подразделяется на две области, которые могут быть противопоставлены друг другу, как проективная геометрия и элементарная геометрия.



Черт. 56.

Очевидно, совершенно особый интерес представляет собой составление таких выражений из чисел, связанных метрикой, которые остаются неизменными при коллинеации, которые, следовательно, выражают проективные свойства. Простейший пример этого типа дает *двойное отношение четырех коллинеарных точек*. Пусть заданы четыре точки $ABCD$ некоторой прямой (черт. 56); тогда двойным отношением называют отношение отрезков:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}.$$

В координатах точек x, y, z, t, которые мы измеряем как абсциссы на самой прямой, оно выражается следующим образом:

$$\frac{x-z}{x-t} \cdot \frac{y-t}{y-z},$$

или при однородном способе записи:

$$\frac{(x_1z_2 - x_2z_1)\,(v_1t_2 - y_2t_1)}{(x_1t_2 - x_2t_1)\,(y_1z_2 - y_2z_1)},$$

что в легко понятых сокращенных обозначениях записывается в виде:

$$\frac{(xz)\,(yt)}{(xt)\,(yz)}.$$

Что это выражение остается неизменным при проективном преобразовании, мы покажем прежде всего для линейного преобразования прямой в себя, которое может быть задано уравнением:

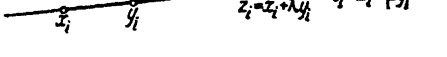
$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$$

или в однородной форме:

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2',$$
$$x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'$$

(при этом множитель пропорциональности опущен).

Разумеется, аналогичные преобразования имеют место и для точек y, z и t. Если мы подставим эти значения в только что приведенное выражение двойного отношения, то, например, множитель (x, z) перейдет в



Черт. 57.

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1' + \beta x_2' & \gamma x_1' + \delta x_2' \\ \alpha z_1' + \beta z_2' & \gamma z_1' + \delta z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} (x'z').$$

Тогда в числителе и знаменателе исчезнет дважды встречающийся определитель подстановки. *Следовательно, неизменность двойного отношения при линейном преобразовании прямой в себя является следствием теоремы об умножении определителей.*

С другой стороны, двойное отношение также остается неизменным, если одну из пар координат, например x_i, умножить на общий множитель ρ.

Если же теперь мы будем рассматривать линейное преобразование не только самой прямой, но также плоскости и пространства, то инвариантность двойного отношения можно показать следующим образом.

Как известно, точки z_i и t_i можно представить в виде $x_i + \lambda y_i$ и $x_i + \mu y_i$, откуда, после простого вычисления двойного отношения, получаем $\lambda : \mu$ (черт. 57). Если мы произведем коллинеацию

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$

то точки x_i, y_i, $x_i + \lambda y_i$, $x_i + \mu y_i$ перейдут соответственно в коллинеарные точки

$$x_i',\quad y_i',\quad x_i' + \lambda y_i',\quad x_i' + \mu y_i'.$$

Но, очевидно, их двойное отношение будет опять равно $\lambda : \mu$, что и утверждалось.

Это свойство двойного отношения общеизвестно; оно излагается в каждом учебнике аналитической или синтетической геометрии. Не можем ли мы составить еще другие выражения, которые также остаются неизменными при линейном преобразовании переменных? Пусть, например, заданы пять точек x_i, y_i, z_i, t_i, u_i плоскости. Составим из их координат трехчленный определитель и рассмотрим, в частности, выражение

$$\frac{(xyz)\ (xtu)}{(xtz)\ (xyu)},$$

в котором точка x_i получила особую роль. Эта форма так же, как и только что рассмотренное двойное отношение, остается неизменной при линейном преобразовании плоскости; аналогичное получается при коллинеации пространства. Отмеченное свойство этого выражения было указано уже Мебиусом в его барицентрическом исчислении. Легко видеть, что можно составить еще и другие выражения, обладающие этим свойством.

Только что рассмотренные простые примеры вводят нас в область теории инвариантов. При построении проективной геометрии совершенно особое внимание обращают на рассмотрение двойного отношения. Мы коротко познакомимся, как это переносится двойственно.

Здесь имеют место следующие три предложения, которые мы для краткости приведем без доказательства.

1. *Линейное преобразование точечных координат x геометрически равносильно линейному преобразованию плоскостных координат в пространстве или прямолинейных координат на плоскости и обратно.*

2. *Четыре плоскости пучка (т. е. совокупности всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую), так же как четыре прямых пучка (т. е. совокупности всех лучей плоскости, проходящих через одну и ту же точку), имеют определенное двойное отношение, которое выражается с помощью координат плоскостей или прямых совершенно таким же образом, как двойное отношение четырех коллинеарных точек с помощью их координат.*

3. *Если эти четыре плоскости или прямые пучка проходят через четыре точки некоторого точечного ряда, то они имеют то же самое двойное отношение, как эти четыре точки.* (Теорема Паппа из Александрии, приблизительно около 350 г. нашей эры.)

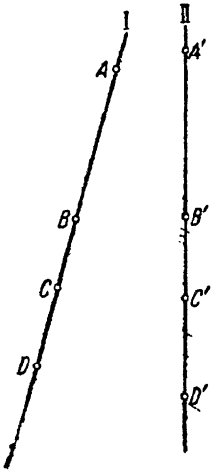
Теперь мы хотим еще заполнить некоторые пробелы в нашем прежнем изложении. Линейное преобразование на плоскости и в пространстве мы представили себе наглядно геометрически как коллинеацию. Как же все-таки можно трактовать геометрически линейное многообразие одного измерения, именно прямой, в случае которой слово „коллинеация“ теряет свое значение?

Линейное соотношение между двумя прямыми I и II (черт. 58)

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

будет установлено, коль скоро трем произвольным точкам прямой I будут поставлены в соответствие три произвольные точки прямой II. *Чтобы*

определить геометрически таким образом полученное соответствие, мы привлечем понятие двойного отношения и скажем, что точке D соответствует та точка D', для которой имеет место равенство двойных отношений: $DV(ABCD) = DV(A'B'C'D')$.

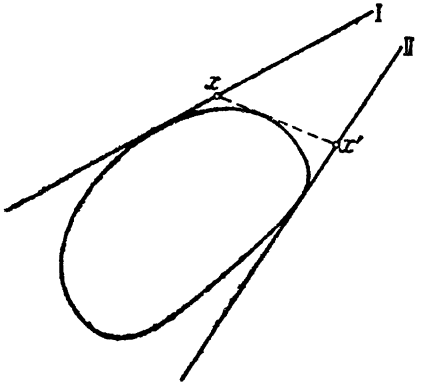


Черт. 58.

Эта сама по себе тривиальная вещь интересует нас сейчас потому, что в прежнее время часто думали, что проективное соответствие между образами „одноступенными" может быть установлено проще. В старых учебниках можно найти такое утверждение: *если две прямые однозначно и непрерывно поставлены друг другу в соответствие, то надлежащие точки соответствуют друг другу в силу линейного преобразования.*

Все же это предложение будет только тогда справедливо, когда оно правильно истолковывается; без добавочных пояснений оно будет неправильно. Представим себе, например, овал, к которому в двух произвольных точках построены касательные, и будем каждый раз ставить друг другу в соответствие такие точки этих касательных, в которых они пересекаются третьей переменной касательной; тогда мы действительно получим непрерывное однозначное соответствие между обеими первыми прямыми.

Но, вообще говоря, это не будет, конечно, линейным соответствием. Чтобы оно было линейным, надо чтобы наши касательные, согласно известным предложениям, огибали не произвольный овал (черт. 59), а эллипс. Поэтому высказанное выше предложение неверно.



Черт. 59.

Картина будет совершенно другая, если это предложение распространить также на комплексные значения переменных x и x' и добавить, что в формуле $x' = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ является функцией *аналитической. Если комплексные переменные x и x' связаны (без исключения) посредством взаимно однозначного аналитического соответствия, то это соответствие действительно является необходимо линейным, что строго доказывается в теории функций* (теорема Лиувилля).

Отсюда также получаем, что первоначально неверное предложение будет справедливо, если в качестве овала взять кривую второго класса, т. е. эллипс. Потому что через каждую точку касательной можно провести еще только *одну* другую касательную к кривой, и так как это

соотношение выражается *алгебраическим* уравнением, то оно имеет место для комплексных значений переменных так же, как и для действительных. Следовательно, соотношение между величинами x и x' будет взаимно однозначным не только в действительной области, но также взаимно однозначным и аналитическим и в комплексной области; следовательно, условие для справедливости теоретико-функциональной теоремы будет выполнено.

§ 38. Штейнер и Шаль.

Мы перейдем теперь ко второму этапу развития проективной геометрии, которая связана с именами Штейнера и Шаля. Подробности о Штейнере мы узнали уже раньше (§ 8). М. Шаль (1793—1880) с 1846 г. до 1878 г. занимал в факультете наук Парижа кафедру по высшей геометрии и там развивал выдающуюся научную деятельность. Здесь мы должны особенно отметить его работы: „Обозрение истории возникновения и развития методов геометрии“ (M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie“, 1837, 3 изд. 1889); в этой работе, наряду с историческими обзорами, находится также много самостоятельных идей по проективной геометрии; далее: „Трактат о высшей геометрии“ (Traité de géométrie supérieure, 1852, второе издание 1880); наконец, „Трактат о конических сечениях“ (Traité de sections coniques, 1865), из которого, однако, вышел только *один* том. Кроме того Шаль опубликовал многочисленные исследования, о которых мы здесь говорить не будем [1]).

В свои элементарные рассмотрения Шаль мало вносит нового; он следует в них Мебиусу и Штейнеру, несмотря на его утверждение, что он не умеет читать по-немецки. Но Шаль употребляет другие термины, вместо „коллинеация“ говорит „гомография“, вместо „двойственность“ — „корреляция“, вместо „двойное отношение“ — „ангармоническое отношение“. [Слово „ангармоническое“ означает то же, что и „сверхгармоническое“, тогда как специальное значение двойного отношения (-1) обыкновенно называют гармоническим двойным отношением.]

Раньше мы различали элементарные и проективные свойства образов; второй этап проективной геометрии, о котором мы сейчас говорим, характеризуется полным отсутствием элементарно геометрических рассмотрений. Особенно здесь выступает на передний план *основная мысль проективного порождения Штейнера*. Эту мысль мы легко поймем на отдельных примерах.

1. Пусть $p + \lambda q = 0$ и $p' + \lambda q' = 0$ два пучка прямых одной и той же плоскости, в известных сокращенных обозначениях (§ 3). Если мы поставим друг другу в соответствие прямые с одним и тем же значением λ, то получим проективное соответствие пучков. В качестве уравнения геометрического места точек пересечения соответствующих друг другу лучей получается, в результате исключения λ, уравнение $pq' - p'q = 0$, т. е. *коническое сечение*.

[1]) См. „Доклад о развитии геометрии“ (Chasles, Rapport sur les progrés de la géometrie, Paris 1871).

Эта работа может быть использована так же как справочная книга.

Следовательно, коническое сечение получается как сечение соответствующих лучей двух друг на друга проективно отображенных пучков прямых.

Коническое сечение вырождается в пару прямых, если общий обоим пучкам луч соответствует сам себе.

2. *Совершенно аналогично два проективных пучка плоскостей* $p+\lambda q=0$ *и* $p'+\lambda q'=0$ *со скрещивающимися осями образуют в пространстве однополостный гиперболоид, который опять дается уравнением* $pq'-p'q=0$.

3. Пусть теперь заданы три „связки плоскостей". Под связкой плоскостей мы понимаем совокупность плоскостей, проходящих через одну фиксированную точку. Пусть их уравнения будут:

$$\begin{aligned} p+\lambda q+\mu r&=0,\\ p'+\lambda q'+\mu r'&=0,\\ p''+\lambda q''+\mu r''&=0. \end{aligned}$$

Мы опять должны поставить друг другу в соответствие плоскости с одинаковыми значениями λ и μ. Это устанавливает опять проективное отображение трех связок друг на друга. Каждые три соответствующие друг другу плоскости пересекаются, вообще говоря, в одной точке. Тогда при переменных λ и μ эта точка описывает некоторую поверхность, уравнение которой, путем исключения λ и μ из рассматриваемых уравнений, получаем в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} p & q & r\\ p' & q' & r'\\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}=0.$$

Мы видим, что получается *поверхность третьего порядка*. Ее приведенное здесь проективное порождение рассматривалось Грассманом.

4. Плоский образ третьего порядка мы получим с помощью проективного отображения пучка конических сечений $\varphi+\lambda\psi=0$ на пучок прямых $p+\lambda q=0$. Исключение λ дает уравнение

$$\begin{vmatrix} p & q\\ \varphi & \psi \end{vmatrix}=0$$

плоской кривой третьего порядка. Аналогично, плоская кривая четвертого порядка может быть получена как сечение двух проективных пучков конических сечений. В обоих случаях получаются наиболее общие кривые соответствующего порядка.

Лежащая в основе этих примеров мысль Штейнера, именно, получение высших геометрических образов из низших посредством проективного соответствия, положена в основу и систематически проведена в книге Рейе „Геометрия положения" (3 изд. 1886—92). См. также Шур в 18 томе Math. Annalen равно как и статьи Рейе в томах 74 и последующих Журнала Крелля. Далее Коттер, „Развитие синтетической геометрии от Монжа до Штаудта" (E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt, в Jahres-

bericht der Deutschen Math.-Vereinigung, т. 5, 1901). Наконец, Шенфлис „Проективная геометрия" (A. Schönflies, Projektive Geometrie, в Enzyklopädie der Math. III, 1. 1. 5).

Какова же область применимости этого метода? Проективное порождение алгебраических образов является ведь само по себе очень простым и красивым. Но все же отнюдь не следует упускать из вида, что, с одной стороны, существуют другие столь же красивые способы геометрического порождения кривых (например, с помощью шарнирных механизмов), а с другой стороны, что проективное порождение не дает никакого общего определения того, что мы называем алгебраическим образом.

Действительно, Штейнер и Шаль в своих позднейших работах также отходят от исключительно синтетического, т. е. конструктивного, принципа и заимствуют общее понятие алгебраического образа и алгебраической конструкции из анализа. Таким образом получается так называемый „смешанный метод", который, правда, заимствует определение образа из аналитического уравнения, но затем совершенно оттесняет формулы.

Этот метод положен в основу учебников Кремона: „Плоские кривые высшего порядка" и „Поверхности" (оба появились в немецком переводе). Мы укажем еще на „Лекции о *римановых* поверхностях" Клейна (исторический обзор теории алгебраических кривых). Особенно этот способ был использован учениками Кремона в Италии и применен к исследованию алгебраических кривых и поверхностей. См., например, книгу Севери „Лекции по алгебраической геометрии" (F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig 1921).

§ 39. Кели и Штаудт.

Перейдем теперь к *третьему этапу проективной геометрии*, который стремится к тому, чтобы *овладеть* элементарно геометрическим измерением длины, исходя из проективной геометрии.

Первый пример такого рода дал уже Понселе, который определенным образом выделил сферы из остальных поверхностей второй степени. Пусть дано уравнение сферы:

$$(x^2+y^2+z^2)+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0,$$

или однородно записанное:

$$(x^2+y^2+z^2)+2\alpha xt+2\beta yt+2\gamma zt+\delta t^2=0.$$

В качестве ее сечения с несобственной плоскостью $t=0$ получается кривая:

$$x^2+y^2+z^2=0, \quad t=0,$$

очевидно общая всем сферам. Ее называют мнимым *„шаровым кругом"* или, лучше, *„абсолютным коническим сечением"*. Обратно, из поверхностей второй степени только сферы удовлетворяют тому условию, что они содержат это коническое сечение.

Для плоскости соответствующий факт выражается предложением, что все окружности проходят через обе *„круговые точки“* или *„абсолютные точки“*

$$x^2 + y^2 = 0, \quad t = 0.$$

Это определение сфер (или кругов) постольку имеет проективный характер, поскольку оно позволяет нам узнать, какие поверхности второй степени получаются из сфер пространства при произвольном линейном преобразовании; именно, *поверхности, содержащие коническое сечение, получившееся при линейном преобразовании из абсолютного конического сечения.*

Весьма интересным является стремление рассматривать все элементарно геометрические свойства образов, как проективные соотношения к абсолютному коническому сечению.

Первые успешные шаги в этом направлении были проделаны Шалем и его школой. Особенно здесь следует назвать небольшую работу молодого Лагерра в Nauvelles Annales за 1853 г. В этой работе угол φ между двумя лучами t и u определяется совершенно новым проективным образом. Лагерр соединяет вершину угла с обеими абсолютными точками плоскости прямыми v, w и рассматривает двойное отношение $(tuvw)$ четырех прямых. *Он получает формулу*

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log DV(tuvw)$$

и таким образом дает угол двух лучей в качестве проективного соотношения к обеим абсолютным точкам (E. Laguerre, Oeuvres 2, 1905, стр. 9—13).

Совершенно аналогично вводится угол между двумя плоскостями в пространстве. Мы знаем, что при произвольном линейном преобразовании это двойное отношение остается неизменным; но оно тогда относится к двум прямым, соединяющим вершину нового угла с точками, возникшими из абсолютных точек. Следовательно, угол в обычном смысле только тогда будет неизменным, когда сами эти точки случайно окажутся абсолютными, т. е. если абсолютные точки при линейном преобразовании переходят сами в себя. Как раз этим среди совокупности коллинеаций характеризуются „движения, зеркальные отображения (зеркальным отображением называют преобразование, которое на плоскости может быть составлено из нечетного числа зеркальных отражений от прямых) и преобразования подобия“.

Кели (1859) существенно расширил соображения Лагерра в одной работе в лондонских Philosophical Transactions. Это — шестая работа из ряда статей под общим названием „upon Quantics“ (т. е. формы), относящихся к теории инвариантов и проективной геометрии. *В этой работе Кели развивает на проективной основе общую теорию метрики или мероопределения; именно, он рассматривает проективное соответствие пространственных фигур к некоторой произвольной поверхности второй степени таким образом, что получает формулы обычного мероопределения, как только поверхность второй степени вырождается в абсолютное коническое сечение.*

Все эти вещи подробно излагаются Клейном в его лекциях по неевклидовой геометрии [1]). Следовательно, нет нужды на этом здесь подробнее останавливаться.

4. Теперь мы переходим к четвертому этапу проективной геометрии, который можно назвать *ее принципиальной основой*. При рассмотрении второго и третьего этапов до известной степени предполагалось наличие циркуля. Именно, чтобы узнать числовое значение двойного отношения нужно измерить отрезки, чтобы ввести координаты надо измерить расстояния и т. п. *Таким образом элементарная геометрия, которую хотят подчинить проективной геометрии, уже сама находится в основаниях проективной геометрии.*

Поэтому мы спросим себя, можем ли мы совершенно независимо от какого-либо применения элементарной геометрии, быть может только с помощью проведения прямых линий, ввести число, которое мы назвали двойным отношением четырех точек прямой? Далее, можем ли мы также ввести однородные координаты x_i плоскости или пространства как определенные числа без понятия меры?

Геометром, который в этом направлении внес ясность в существенном, является Штаудт (1798—1867) из Ротенбурга, все время своей научной деятельности (с 1835 до 1867) проживший в Эрлангене. Его главная работа „Геометрия положения" (Ch. von Staudt, Geometrie der Lage, 1847), за которой последовали „Исследования по геометрии положения" (Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856—60). Эти книги чрезвычайно содержательны, так как Штаудт является одним из наиболее глубоко вникавших геометров, когда-либо живших. Его работы по причине их сжатости и несколько тяжелого стиля, к сожалению, до сих пор мало известны.

Для нас особую важность имеют две задачи, получившие у Штаудта свое разрешение. *Во-первых, Штаудт дает средство, с помощью построения сети Мебиуса, для того, чтобы четырем точкам прямой без помощи циркуля поставить в соответствие число, которое он называет „вурфом" ABCD, и это число оказывается в точности тождественным с тем числом, которое вводят из элементарной геометрии, как двойное отношение четырех точек* [2]).

Во-вторых, Штаудт сводит определение треугольных координат на плоскости, тетраздальных координат в пространстве к „вурфам".

Мы легко себе уясним этот последний пункт, если покажем, как можно ввести упомянутые координаты в качестве двойных отношений. Для простоты мы остановимся на точечных координатах плоскости. Относительно координатного треугольника *ABC* (черт. 60) для произвольной точки *P* имеет место то обстоятельство, что ее координаты

---

[1]) Русский перевод: Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, ОНТИ, М.-Л. 1936 г. 2-е изд.: М УРСС, 2004. *Прим. ред.*

[2]) Штаудт избегает термин „двойное отношение"; в самом деле, этот термин касается того, что „вурф" определяется как частное длин отрезков, в то время как здесь следует отказаться от всяких измерений. Первое проведение приемов Штаудта имеется у Паша в его „Лекциях по новейшей геометрии" (M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882).

относятся как умноженные на произвольные постоянные расстояния от сторон треугольника. Следовательно, например,

$$x_1 : x_3 = c_1 PP_1 : c_3 PP_3.$$

Введем, следуя Штаудту, в рассмотрение единичную точку плоскости, т. е. точку с координатами 1, 1, 1. Тогда имеет место:

$$c_1 EE_1 : c_3 EE_3 = 1 : 1.$$

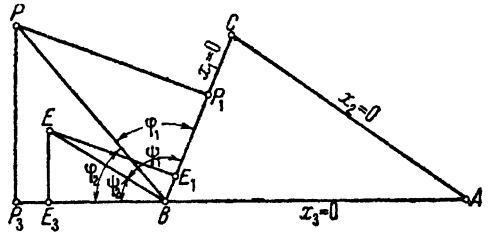
Поэтому мы можем положить:

$$c_1 = \frac{1}{EE_1}, \quad c_3 = \frac{1}{EE_3}.$$

Следовательно:

$$x_1 : x_3 = \frac{PP_1}{EE_1} \cdot \frac{EE_3}{PP_3}.$$

Если мы обозначим углы, образованные прямыми EB и PB со сторонами $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$, соответственно через ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2, то из нашего последнего уравнения получим:



Черт. 60.

$$x_1 : x_3 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \psi_1} \cdot \frac{\sin \psi_2}{\sin \varphi_2}.$$

Но правая часть здесь представляет собой элементарное определение двойного отношения четырех лучей, идущих от точки B к точкам P, E, C, A.

Из этого вспомогательного рассмотрения следует, что вообще треугольные координаты вводятся при условии дополнительного выбора единичной точки с помощью двойных отношений и, следовательно, имеются все средства для введения точечных координат только с помощью проективного построения, если только в нашем распоряжении иметь чисто проективное определение числового значения двойного отношения; для этого Штаудт дает определенные способы.

Дальше указанного здесь Штаудт не пошел; он ограничился тем, что установил принципиальные основы для проективной геометрии, как таковой. Но к этому без всяких затруднений можно присоединить рассмотрения Кели и таким образом добиться единства научного построения, которое охватывало бы элементарную геометрию на проективной основе. Это проделано Клейном в его работах по неевклидовой геометрии в томах 4 и 6 Mathematischen Annalen (1871/72). Для более подробного ознакомления с этим укажем опять на „Лекции по неевклидовой геометрии“ Клейна.

§ 40. О теории инвариантов.

Теперь мы обратимся к области исследований английских математиков Кели и Сильвестра, именно к *теории инвариантов*, и установим ее отношение к проективной геометрии. Оба предмета стоят близко друг к другу, но все же отличаются один от другого.

Определим прежде всего содержание *проективной геометрии* в аналитической форме. Пусть (ограничимся случаем трех переменных) задана кривая уравнением $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Подвергнем его коллинеации

$$\rho x_i' = \sum a_{ik} x_k$$

и спросим себя: какие свойства при этом остаются неизменными? Мы попытаемся приступить к этому вопросу таким образом, чтобы разыскать функции коэфициентов уравнения $f = 0$ (быть может в частности рациональные функции), которые сохранились бы неизменными при линейной подстановке. Функции коэфициентов с таким свойством называют *„абсолютным инвариантом"* или, просто, *инвариантом*. Простейшим примером абсолютного инварианта является опять двойное отношение четырех точек прямой, координаты которых обозначим:

$$\frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{t_1}{t_2}.$$

Эти последние величины представляют собой четыре ряда бинарных переменных, которые подвергаются *„конгруэнтным"* или *„когредиентным" линейным подстановкам*, так что всегда одновременно имеет место:

$$\rho x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$
$$\rho y_i' = \sum a_{ik} y_k, \ldots.$$

Далее из них образуется инвариантное выражение двойного отношения:

$$\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)},$$

которое, как форма нулевой степени, в каждом ряде переменных имеет свое непосредственное геометрическое значение, как отношение отрезков. В этом отношении наш пример выходит за пределы только что сказанного, поскольку здесь мы преобразуем *„совместно"* несколько рядов переменных.

Наряду с таким образом определенными инвариантными *выражениями* (абсолютными инвариантами) имеются, далее, еще инвариантные *уравнения*, левые части которых так составлены из коэфициентов рассматриваемых образов, что они при линейном преобразовании отличаются от первоначальных только множителем. При этом мы напомним об уравнении, которое в теории нуль-системы выражало, что дело идет о специальной нуль-системе (стр. 90). Эти несколько расплывчатые определения уточняются теперь при переходе к настоящей теории инвариантов.

Теория инвариантов поступает следующим образом: *прежде всего ее предметом является не столько само однородное уравнение $f = 0$, сколько однородная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ — левая часть этого уравнения*. В соответствии с этим в подстановках переменных мы также не будем вводить множителя пропорциональности ρ, а просто положим:

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k.$$

Пусть определитель a_{ik} подстановки, который теперь имеет определенное числовое значение, равняется $r \neq 0$. Если мы представим себе новую форму $f'(x_1', x_2', x_3')$ с коэфициентами c', полученную из первоначальной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ с коэфициентами c, то мы можем перейти от новой формы к старой, подставив вместо x_i' их выражения через x_i. Таким образом получится форма

$$f'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

и ее сравнение с формой $f(x_1, x_2, x_3)$ приводит к следующему результату: *коэфициенты c' являются линейными формами коэфициентов c, которые зависят от коэфициентов подстановки a_{ik} в m-й степени, если m является порядком формы.*

Теперь дело идет о том, чтобы образовать инвариант формы f.

Под инвариантом теперь понимают функцию этих коэфициентов $J(c)$, которая обладает тем свойством, что отличается от той же самой функции коэфициентов c' только множителем, являющимся некоторой степенью r. Это требование выражается уравнением:

$$J(c) = r^{\lambda} J(c').$$

Если $\lambda \neq 0$, то говорят об *относительном инварианте* или, просто, инварианте. Напротив, если $\lambda = 0$, то мы имеем, в частности, *абсолютный инвариант*. Легко видеть: *абсолютный инвариант можно всегда получить, деля друг на друга два относительных инварианта с одним и тем же* λ. С другой стороны, получают „инвариантные уравнения", приравнивая нулю какие-нибудь относительные инварианты.

Здесь мы опять можем обратиться к примеру двойных отношений, и тогда, конечно, придется иметь дело опять с несколькими рядами переменных, которые подвергаются конгруэнтным подстановкам. Из двух рядов бинарных переменных мы прежде всего образуем определитель (x, z), который при линейной подстановке переходит в $(x', z') = r(x, z)$. Вследствие этого, например, уже определитель (x, z) является *относительным инвариантом*. В самом деле, уравнение $(x, z) = 0$ имеет определенное геометрическое значение. Именно, это означает, что точки x, z совпадают. Далее, из различных таких относительных инвариантов составляется двойное отношение

$$\frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$$

в качестве абсолютного инварианта. Уже простое частное

$$\frac{(xz)}{(xt)}$$

будет абсолютным инвариантом. Но он с геометрической точки зрения не принимается во внимание потому, что относительно z и t он не является нулевой размерности.

Теперь мы спросим себя: какую пользу принесет привлечение теории относительных инвариантов к теории абсолютных инвариантов? На это легко ответить. Здесь мы будем говорить только о рациональных инвариантах. Очевидно соответствующие абсолютные инварианты всегда должны быть рациональными дробными формами коэфициентов, так как в целых функциях от коэфициентов при применении подстановки $x_i' = \lambda x_i$ во всех членах непременно должен фигурировать некоторый множитель. Наоборот, относительные инварианты вполне могут быть построены как рациональные *целые* формы коэфициентов. Успех, который мы здесь наблюдаем, зависит от того совершенно общего предложения, имеющего место в математике, *что всегда гораздо лучше иметь дело с областью целых функций, чем с областью дробных функций* [1]).

Теория инвариантов находится еще в связи с другим важным предметом — с теорией чисел. Здесь также рассматривают формы f, переменные которых подвергаются линейной подстановке; только здесь всегда прибавляется условие целочисленности. *Следовательно, задача теории инвариантов, как мы ее назвали, образует основу и для теоретико числового рассмотрения форм.*

В отличие от проективной геометрии мы должны особенно отметить, *что две формы, которые отличаются только постоянным множителем, в теории чисел весьма различны, в теории же кривых, напротив, равносильны* (если рассматривать только образы, представленные приравненной нулю формой).

Чтобы быть конкретным, мы приведем один простой пример. Пусть дана форма: $f_2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Тогда выражение $b^2 - ac$, так называемый *„определитель или дискриминант формы“*, дает нам простейший пример инварианта. Обращение его в нуль является, как известно, условием того, что уравнение $f_2 = 0$ обладает двойным корнем.

Первое обобщение мы дадим, если перейдем к бинарной форме n-й степени:

$$f_n = ax_1^n + bx_1^{n-1}x_2 + \ldots + p_1x_1x_2^{n-1} + qx_2^n.$$

Здесь „дискриминант“ уравнения $f_n = 0$, т. е. та целая форма коэфициентов, из обращения в нуль которой мы заключаем о двойном корне, дает нам новый пример инварианта.

Другое обобщение формы f_2 получим, если перейдем к бо́льшему числу переменных. Прежде всего возьмем тройничную форму второй степени

$$f_2 = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots + k_{33}x_3^2,$$

[1]) Ср., например, представление эллиптических функций посредством частных ϑ-произведений; теория ϑ-произведений является естественным базисом, на котором основывается теория эллиптических функций.

приравнивание нулю которой дает коническое сечение. Определитель из ее коэфициентов:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}$$

(с условием $k_{il} = k_{li}$) доставляет нам опять соответствующий инвариант. Мы знаем из аналитической геометрии, что обращение в нуль этого определителя указывает на распадение конического сечения на прямые линии.

Далее, чтобы ближе рассмотреть еще один специальный пример, мы возьмем форму четвертой степени:

$$f_4 = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4.$$

Здесь получается, что, при ограничении рациональными инвариантами, существуют два простейших инварианта, а именно, целая функция второй степени

$$ae - 4bd + 3c^2 = g_2$$

и целая функция третьей степени

$$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = g_3.$$

Причем, при линейной подстановке имеет место:

$$g_2 = r^4 g_2', \quad g_3 = r^6 g_3'.$$

Из g_2 и g_3 составляют рационально и цело все другие целые рациональные относительные инварианты. Определитель $\triangle$ формы f_4 является, например, равным:

$$\triangle = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Теперь мы можем здесь, где мы видели заданными два инварианта, легко образовать абсолютный инвариант, например:

$$J = \frac{g_2^3}{\triangle}.$$

Он является *дробной* рациональной функцией коэфициентов и из него опять составляются все рациональные абсолютные инварианты формы f_4 рационально (но не цельно). Мы использовали здесь обозначения, которые обычно употребляются в *вейерштрассовой* теории эллиптических функций и в теории эллиптических модулярных функций. С абсолютным инвариантом формы f_4 — двойным отношением λ четырех точек $f_4 = 0$, которое является иррациональным инвариантом и всегда может быть образовано шестью способами, связан инвариант J с помощью уравнения шестой степени:

$$J = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

Более подробно излагать все эти вещи здесь невозможно; мы ограничимся только краткими указаниями, которые должны дать толчок к изучению теории инвариантов [1]). Все же мы сейчас познакомимся еще с отдельными специальными терминами. Под *совместным инвариантом* понимают функцию, зависящую от коэфициентов двух или нескольких форм и при линейной подстановке изменяющуюся только на множитель r^λ; под *ковариантом* понимают функцию, содержащую кроме коэфициентов также переменные x_i и при линейной подстановке изменяющуюся опять-таки на множитель r^λ; под *контравариантом* разумеют функцию, которая содержит также „контраградиентные" или „контравариантные" переменные u_i.

Примером совместного инварианта является результат двух бинарных форм. Пример коварианта — определитель Гессе бинарной формы f:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Он тотчас переносится и на тройничные формы. Контравариантом является „адъюнкт" тройничной квадратичной формы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Будучи приравнен нулю, он дает уравнение конического сечения в прямолинейных координатах; в точечных координатах оно задается посредством:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Если мы вернемся теперь к исходной точке нашего настоящего рассмотрения — к вопросу об отношении проективной геометрии к теории инвариантов, то увидим: *теория инвариантов отличается от проективной геометрии тем, что она изучает как раз сами формы f, а не только уравнения $f = 0$; можно также сказать, что она рассматривает сами переменные $x_1, x_2, \ldots$, а не только их отношения.*

Однако общее содержание теории инвариантов можно геометрически истолковать просто. Для этого нам надо только, например в случае бинарных форм, рассматривать x_1 и x_2, как обычные координаты плоскости, а не рассматривать их как однородные координаты на прямой. Тогда уравнение:

$$f_n = a x_1^n + \ldots + q x_2^n$$

представляет поверхность в пространстве. Если, в частности, $f_n = \text{const}$, то мы имеем определенную „горизонтальную" кривую сечения этой

[1]) Новейшим весьма содержательным является учебник *Вейтценбека.* Теория инвариантов (R. Weitzenböcks, Invariantentheorie, Groningen 1923).

поверхности. Аналогично поступают при большем, чем два, числе переменных x_i, просто выходя в пространство большего числа измерений. *Но только в таком случае мы больше уже не имеем истолкования обычной проективной геометрии.*

В связи с этим обратимся теперь к вопросу о *значении проективной геометрии.* Прежде всего мы скажем: проективное воззрение в пространстве произвольно большого числа измерений в связи с теорией инвариантов имеет исключительное значение не только для геометрии, но также для большей части чистой математики, в частности для теории функций. Как бы можно было без нее говорить, например, о специальном изучении эллиптических функций, абелевых функций и т. п.?

Но с другой стороны ясно, что наряду с проективной геометрией существует еще целый ряд самостоятельных геометрических приемов, имеющих такое же право на существование, как и она. Отнюдь, например, не всегда вводят круг (или сферу) только как частный случай конического сечения (или поверхности второй степени), для этого в них слишком много привлекательного по сравнению с общими образами; точно так же было бы неразумно желать построить сродство обратных радиусов-векторов только на проективных соотношениях. Наконец отметим, что в частности сама элементарная геометрия имеет также свое собственное прекрасное значение.

Поэтому возникает вопрос о таком общем принципе, с помощью которого можно было бы понимать все различные, стоящие рядом друг с другом, типы геометрий в их взаимных отношениях. Дать на это ответ было намерением Эрлангенской программы Клейна.

Искомый принцип лежит в теории групп; наряду с группой всех линейных преобразований рассматриваются еще другие типы групп преобразований. Каждая группа имеет свою собственную теорию инвариантов. Главной задачей последующего является выяснение всех этих точек зрения. Здесь мы можем только предварительно коснуться их.

§ 41. *W*-кривые Клейна и Ли.

Добавим еще некоторые дальнейшие подробности о проективной геометрии; именно, прежде всего, направим наше внимание на образы с непрерывным семейством линейных преобразований. Как раз эти образы заслуживают особого внимания. Указанная здесь мысль (в скрытом виде) лежит в основе уже многих элементарных рассмотрений. Не говоря уже о сфере, отметим, что, например, поверхность вращения переходит в себя посредством непрерывного семейства вращений вокруг ее оси. Нечто аналогичное имеет место для винтовой поверхности. Вследствие этих особых свойств эти поверхности всегда приводятся в качестве примеров в обычной теории поверхностей.

Далее назовем здесь *логарифмическую спираль.* Известно, что исключительно много преобразований этой спирали приводят опять к логарифмическим спиралям. Стоит, например, только вспомнить предложение о том, что эволютой логарифмической спирали является опять-таки логарифмическая спираль (и именно спираль, конгруэнтная первоначальной), — свойство, вызвавшее у Якова Бернулли фразу: „вновь

возрожденная я воскресаю" (iterum renata resurgo). Вообще, открытие этих свойств столь замечательно, что это было отмечено на надгробном памятнике Я. Бернулли в Базеле.

Все эти свойства можно связать с линейными преобразованиями, переводящими логарифмическую спираль в себя. Если мы будем производить в плоскости вращение вокруг начала координат O и одновременно будем производить „пропорциональное" ему преобразование подобия из точки O, которое, смотря по обстоятельствам, будет уменьшением или увеличением, то в качестве траектории отдельной точки плоскости мы получим логарифмическую спираль, которая в первом случае будет свертываться, во втором — развертываться. В зависимости от отношения скорости вращения к скорости уменьшения или увеличения получаются спирали различной крутизны. В этом смысле логарифмическая спираль представляет собой связующее звено между окружностями вокруг точки O, образовавшимися в качестве траекторий при простом вращении, и выходящими из точки O лучами, образовавшимися в качестве траекторий при простом преобразовании подобия. Из вращения и одновременно преобразования подобия составившиеся коллинеации образуют тогда однопараметрическое семейство преобразований логарифмической спирали в себя. Но в существовании этого бесконечного множества линейных преобразований и заключается, как уже было отмечено, существенное основание для всех дальнейших прекрасных свойств логарифмических спиралей.

Вернемся теперь к коническим сечениям и поверхностям второй степени. Отдельное коническое сечение на плоскости определяется пятью постоянными, с другой стороны, коллинеация определяется восемью постоянными. Если обратить внимание на то, что каждая коллинеация переводит регулярное коническое сечение опять в такое же, и притом в произвольное, то вследствие этого существуют коллинеации, которые переводят определенное коническое сечение само в себя, и они зависят от $8 - 5 = 3$ параметров. Соответственно в пространстве поверхности второго порядка зависят от 9, а коллинеации от 15 постоянных. Следовательно, линейные преобразования в себя определенной (регулярной) поверхности второго порядка зависят от шести постоянных.

Присоединим сюда таким же образом еще линейный комплекс нуль-системы, содержащий пять параметров. Следовательно, нуль-система переходит в себя с помощью коллинеаций, зависящих еще от десяти постоянных. Если мы будем оценивать то внимание, которое заслуживает образ, соответственно числу параметров его линейных преобразований в себя (что имеет свое хорошее оправдание), то оказывается, что нуль-системы более совершенны, чем поверхности второй степени.

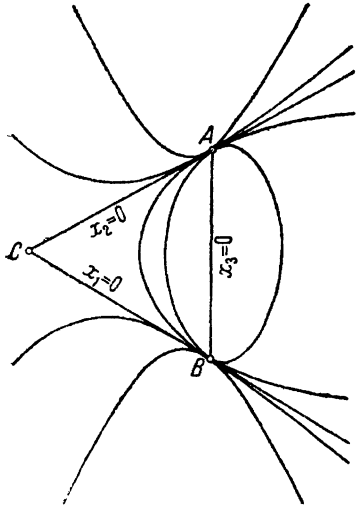
Раньше (§ 30) мы уже говорили о W-кривых, которые появились как интегральные кривые некоторого (билинейного) коннекса (1,1). Остановимся подробнее только на общем случае, не исчерпывая всех особых случаев. Относительно определенного координатного треугольника уравнение W-кривой имеет вид:

$$x_1^a x_2^b x_3^c = \text{const}$$

при условии $a+b+c=0$. Это уравнение можно прямо взять в качестве определения W-кривых. (Соответственно в пространстве W-поверхности[1]) определяются уравнением $x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d = \text{const}$, при условии $a+b+c+d=0$.) Сейчас же мы видим: если мы представим линейное преобразование, переводящее W-кривые в себя, в виде

$$\rho x_1' = \lambda x_1, \quad \rho x_2' = \mu x_2, \quad \rho x_3' = \nu x_3,$$

то $x_1'^a x_2'^b x_3'^c$ перейдет в $(\lambda^a \mu^b \nu^c) x_1^a x_2^b x_3^c$, так как показатель степени ρ, в силу условия $a+b+c=0$, будет равен нулю. Отсюда получается предложение: *наши W-кривые переходят в себя при всех коллинеациях* указанной формы, удовлетворяющих сверх того условию: $\lambda^a\mu^b\nu^c = 1$. Этим тогда определяется целое однопараметрическое семейство таких линейных преобразований, потому что без ограничения общности в отношении геометрии мы можем положить одну из величин λ, μ, ν или также определитель подстановки $\lambda\mu\nu$ равным единице.



Черт. 61.

Рассмотрим, прежде всего, некоторые специальные типы W-кривых, именно конические сечения

$$x_1 x_2 = C x_3^2 \quad \text{или} \quad x_1 x_2 x_3^{-2} = C,$$

координатным треугольником которых является касательный треугольник (черт. 61). Тогда легко можно показать, что окружности, в том же смысле как здесь конические сечения, могут быть причислены к W-кривым. Если исходить из уравнения $x^2+y^2=r^2$, или однородно написанного $x^2+y^2=r^2t^2$, то его можно преобразовать в $r^2=(x+iy)(x-iy)t^{-2}$ и теперь нам надо только положить

$$x_1 = x+iy, \quad x_2 = x-iy, \quad x_3 = t,$$

чтобы получить форму уравнения W-кривых. *Следовательно, окружности представятся в форме, в которой мы рассматриваем W-кривые, если за вершины координатного треугольника взять обе абсолютные точки* $(x+iy=0,\ t=0)$ *и* $(x-iy=0,\ t=0)$ *и центр окружности* $x \pm iy = 0$.

[1]) Обозначение „W-поверхности“ употребляется еще в совершенно другом смысле, именно как обозначение поверхностей с некоторой зависимостью между главными кривизнами $f(\rho, \rho') = 0$. В то время как у Клейна и Ли буква W должна напоминать слово „вурф“, упомянутый класс поверхностей так назван по имени крупного диференциального геометра Вейнгартена (I. Weingarten, 1836—1910).

Перейдем теперь к логарифмической спирали; как мы сейчас увидим, она также относится к *W*-кривым. Как известно, уравнением логарифмической спирали (в полярных координатах) является:

$$r = Ce^{\varkappa\varphi} \quad \text{или} \quad (x+iy)^{\frac{1}{2}}(x-iy)^{\frac{1}{2}} = Ce^{\varkappa\varphi}.$$

Так как вообще

$$x+iy = re^{i\varphi} \quad \text{и} \quad x-iy = re^{-i\varphi},$$

то следует:

$$\frac{x+iy}{x-iy} = e^{2i\varphi} \quad \text{или} \quad \left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^{-\frac{\varkappa i}{2}} = e^{\varkappa\varphi}.$$

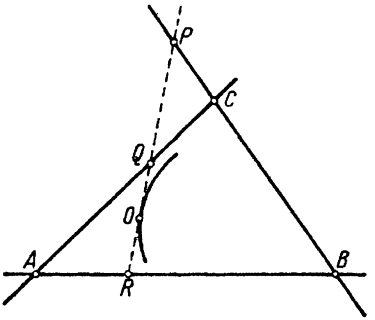
Если мы подставим это в наше второе уравнение, то получим однородно написанное уравнение

$$(x+iy)^{\frac{1+\varkappa i}{2}} \cdot (x-iy)^{\frac{1-\varkappa i}{2}} \cdot t^{-1} = C$$

или для $x_1 = x+iy$, $x_2 = x-iy$, $x_3 = t$

$$x_1^{\frac{1+\varkappa i}{2}} \cdot x_2^{\frac{1-\varkappa i}{2}} \cdot x_3^{-1} = C,$$

т. е. желаемую форму уравнения *W*-кривых. *Итак, логарифмическая спираль является также W-кривой. Положенный в основу координатный треугольник будет тем же самым, который мы только что имели в случае окружности. Только теперь показатели степени a, b, c в уравнении имеют частично комплексные значения.*



Черт. 62.

Возникает вопрос: как оправдать название *W*-кривые? Буква *W* относится к обозначению двойного отношения, по терминологии Штаудта, словом „вурф". *„W-кривая" означает то же, что „кривая двойного отношения", т. е. кривая, определяемая заданным двойным отношением.* В качестве такового берется двойное отношение четырех точек, которое образуют три точки пересечения каждой касательной со сторонами координатного треугольника и соответствующая точка прикосновения. Мы утверждаем, что это двойное отношение вдоль каждой кривой имеет постоянное значение, и обратно, целое семейство *W*-кривых

$$x_1^a x_2^b x_3^c = C,$$

к которому принадлежит и данная кривая, может быть охарактеризовано этим двойным отношением.

Доказательство этого предложения очень просто. Изобразим на черт. 62 координатный треугольник ABC и дугу заданной *W*-кривой. Тогда, если мы построим касательную в произвольной точке O кривой, то три ее точки P, Q, R пересечения со сторонами координатного

треугольника, вместе с O, взятые в произвольном порядке, образуют некоторое двойное отношение. Сверх того, мы знаем, что при различном выборе порядка точек $(OPQR)$ получится шесть значений двойного отношения, которые стоят в определенном отношении друг к другу. Далее, координатный треугольник, равно как и W-кривая, будет переходить в себя с помощью совокупности найденных линейных преобразований. Поэтому при каждом отдельном преобразовании точка O сдвигается и, следовательно, касательная в ней перемещается вдоль кривой, в то время как точки P, Q, R перемещаются вдоль сторон треугольника. Но отсюда непосредственно следует утверждаемое постоянство двойного отношения вдоль кривой.

Значение двойного отношения просто вычисляется. Касательная W-кривой

$$f = x_1^a x_2^b x_3^c = \text{const}$$

в точке x_1^0, x_2^0, x_3^0 дается уравнением:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0 x_3 = 0.$$

Если мы заменим частные производные их значением, то после простого преобразования получится уравнение:

$$\frac{ax_1}{x_1^0} + \frac{bx_2}{x_2^0} + \frac{cx_3}{x_3^0} = 0.$$

Из этого уравнения мы внесем в маленькую табличку следующие координаты точек пересечения P, Q, R, а также и точки O:

	x_1	x_2	x_3
O	x_1^0	x_2^0	x_3^0
P	0	cx_2^0	$-bx_3^0$
Q	$-cx_1^0$	0	ax_3^0
R	bx_1^0	$-ax_2^0$	0

Отсюда ясно, что координаты точек Q и R составляются из координат точек O и P таким образом:

$$(Q) = -c\,(O) + (P),$$
$$(R) = \quad b\,(O) + (P),$$

если мы вспомним об условии $a + b + c = 0$. Буквы, написанные в скобках, должны каждый раз обозначать координаты рассматриваемой точки. Тогда из обоих последних уравнений сейчас же следует для двойного отношения (O, P, Q, R) постоянное значение

$$\lambda = -\frac{b}{c}.$$

Если бы мы взяли точки в другом порядке, то для их двойного отношения получили бы еще пять других значений:

$$-\frac{c}{b},\quad -\frac{c}{a},\quad -\frac{a}{c},\quad -\frac{a}{b},\quad -\frac{b}{a}.$$

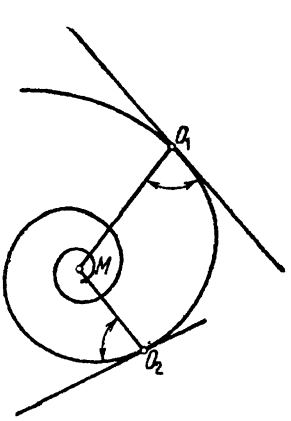
Из значения двойного отношения мы можем еще вычислить значение рационального инварианта J, определяемого формулой:

$$J=\frac{4(\lambda^2-\lambda+1)^3}{27\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

Если мы подставим сюда значение λ, то получим симметричную форму:

$$J=\frac{4(ab+bc+ca)^3}{27a^2b^2c^2}.$$

Аналогичным образом, как для двойного отношения четырех точек (O, P, Q, R), мы можем провести доказательство следующего двойного отношения. *Касательная в произвольной точке W-кривой вместе с тремя прямыми, выходящими из точки O к вершинам координатного треугольника, опять-таки образует постоянное двойное отношение.*



Черт. 63.

Используем это предложение для логарифмической спирали. В этом случае углы соответствующего координатного треугольника даются асимптотической точкой M и обеими абсолютными точками. Поэтому для произвольной точки O спирали (черт. 63) названные прямые даются касательной, радиусом-вектором из точки M и лучами, идущими к круговым точкам. Но мы знаем, что по Лагерру двойное отношение этих четырех прямых связано с углом ω между первыми двумя из них соотношением (см. § 39):

$$\omega=\frac{1}{2i}\lg \text{ двойного отношения.}$$

Следовательно, отсюда с помощью нашего предложения о постоянном значении двойного отношения получается известный результат: *радиусы-векторы, выходящие из начала координат, пересекают логарифмическую спираль под постоянным углом.*

В названном сочинении Клейна и Ли находится еще целый ряд аналогичных предложений. При этом исходной точкой этих исследований являются рассмотрения, которые Ли прежде развил в Göttinger Nachrichten (январь 1870), о специальных линейных комплексах. То, что Ли там обнаружил в случае пространственного образа, Ли и Клейн совместно применили к W-кривым плоскости и соответствующим поверхностям пространства.

Упомянутый линейный комплекс называется *„тетраэдальным комплексом“* и под этим именем специально рассматривается у Рейе в его

„Геометрии положения". *Под тетраэдальным комплексом понимают линейный комплекс, все прямые которого пересекают плоскости некоторого определенного тетраэдра с постоянными двойными отношениями.* Он второй степени и аналитически задается простым уравнением

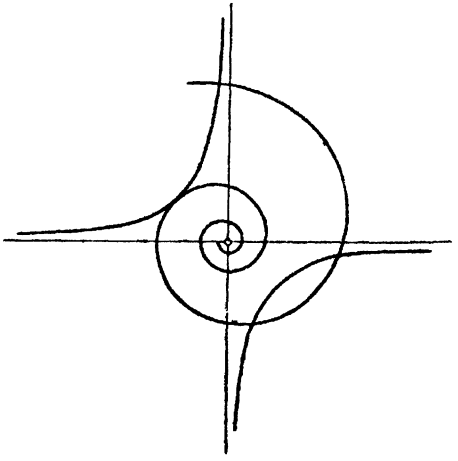
$$ap_{12}p_{34} + bp_{13}p_{42} + cp_{14}p_{23} = 0,$$

если его постоянный тетраэдр ввести в качестве координатного тетраэдра. Мы напомним, что одновременно между p_{ik} существует зависимость

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

так что всегда один из членов приведенного выше уравнения можно удалить. Ли исследовал этот комплекс новым способом, исходя из того, что этот комплекс переходит в себя при коллинеациях, зависящих от трех параметров, которые переводят грани тетраэдра• сами в себя. Эти коллинеации представляются уравнениями:

$$\rho x_1' = \lambda x_1, \quad \rho x_2' = \mu x_2,$$
$$\rho x_3' = \nu x_3, \quad \rho x_4' = \sigma x_4.$$



Черт. 64.

Действительно, каждая прямая, встречающая тетраэдр с некоторым двойным отношением, при каждой отдельной из этих коллинеаций, всегда пребразуется в прямую, которая пересекает тетраэдр с тем же самым двойным отношением. Ли непосредственно образует тетраэдальный комплекс, считая, что названные коллинеации применяются к заданной пространственной кривой. Отсюда Ли получает целый ряд геометрических операций, при которых комплекс всегда сохраняется.

Следовательно, приведенные выше слова „вновь возрожденная я воскресаю" применимы к более общим образам, чем логарифмическая спираль, а для нее самой — в более общем смысле, чем думал Бернулли. В качестве примера мы приведем интересную теорему о логарифмической спирали, находящуюся в названной работе. Отнесем логарифмическую спираль к какой-нибудь прямоугольной системе координат, имеющей начало в асимптотической точке спирали, и возьмем касающуюся спирали равностороннюю гиперболу, имеющую в качестве асимптот оси координат. Далее, если мы рассмотрим совокупность поляр для всех точек спирали относительно этой гиперболы, то мы можем искать огибающую их кривую. В результате мы найдем, что при этом получится сама наша логарифмическая спираль. Другими словами:

Логарифмическая спираль является своей собственной взаимной полярой относительно всякой ее касающейся равносторонней гиперболы, центр которой совпадает с асимптотической точкой спирали (черт. 64).

§ 42. Проективная дифференциальная геометрия.

Перейдем теперь к выяснению отношения проективного воззрения к *дифференциальной геометрии*. Наперед ясно, что воззрения проективной геометрии имеют такое же значение в рассмотрениях дифференциальной геометрии, как и в алгебраической геометрии.

Как вообще различают проективную и элементарную геометрию, так же можно и внутри самой дифференциальной геометрии различать проективное и элементарное воззрение.

Тогда в силу проективного воззрения метрические соотношения окажутся отношениями к абсолютному коническому сечению или абсолютным точкам плоскости. Вследствие известной косности, с которой математики придерживались старых методов и навыков, указанное здесь воззрение только недавно проникло в учебники и университетские лекции по дифференциальной геометрии.

Рассмотрим, например, дифференциальное выражение радиуса кривизны плоской кривой $y = f(x)$, которое, как известно, имеет вид:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Мы введем проективное воззрение в том смысле, что спросим себя, что означает геометрически обращение в нуль числителя или знаменателя. Уравнение $y'' = 0$ показывает, что мы имеем точку перегиба кривой. Но это очевидно уже проективное свойство, т. е. свойство, сохраняющееся при проективном преобразовании плоскости. С другой стороны уравнение $1 + y'^2 = 0$ или $y' = \pm i$ показывает, что касательная в рассматриваемой точке кривой проходит через абсолютную точку. Значит это уравнение выражает не проективное свойство кривой в себе, а свойство системы, образованной из нашей кривой и абсолютных точек.

Очевидно следовало бы поступать систематически, а именно, сначала образовать все соотношения между y, y', ..., которые, будучи приравнены нулю, имеют проективное значение; затем образовать все соотношения, которые относятся в соответствующем смысле к системе, образованной из кривой и абсолютных точек. *Все формулы дифференциальной геометрии должны составиться из таким образом полученных выражений.*

Если при высказанной формулировке мы заменим группу проективных преобразований какой-нибудь непрерывной группой преобразований, то теория, которую мы получим, будет не чем иным, как *общей теорией дифференциальных инвариантов*, как ее развивает Ли. В частности, теорию проективных дифференциальных инвариантов впервые начал развивать Гальфен в 1878 году в своей диссертации [1]).

[1]) Oeuvres de G. H. Halphen, том 2, стр. 197—253 (1918).

Рассмотрим подробнее *проективные дифференциальные инварианты*. Последовательные производные мы будем обозначать, ради простоты записи, буквой y с нижним индексом; точнее, мы положим:

$$y_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k y}{dx^k};$$

дифференциальные инварианты мы будем отыскивать в общей форме $G(y, y_1, y_2, \ldots, y_n, x)$, т. е. как целые рациональные функции от зависимого переменного y, его n первых производных и независимого переменного x. Их основное свойство состоит в том, что они при *произвольной коллинеации изменяются только на некоторый множитель*. Основная задача при их исследовании заключается в том, чтобы отыскать все проективные дифференциальные инварианты для возрастающих значений n, т. е. все те, из которых составляются рационально и цельно остальные инварианты. Как раз эта задача и составляет содержание названной работы Гальфена, который установил инварианты до значения $n = 7$ включительно. Приведем без доказательства полученные им результаты.

Оказывается, что внутри означенных пределов находятся четыре существенных инварианта, которые мы рассмотрим по порядку.

1. Простейший дифференциальный инвариант дается выражением $U = y_2$. Приравнивание его нулю доставляет дифференциальное уравнение прямой.

2. Последнее замечание сейчас же приводит нас к следующему дифференциальному инварианту, который, будучи приравнен нулю, представляет дифференциальное уравнение кривых второго порядка. Уравнение конического сечения, вообще говоря, мы можем привести к виду:

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C};$$

отсюда

$$y'' = \frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}};$$

следовательно,

$$\frac{d^3}{dx^3}\{y''^{-\frac{3}{2}}\} = 0$$

будет дифференциальным уравнением конического сечения, которое было установлено уже Монжем (1810). В развернутой форме оно имеет вид:

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2y^V = 0,$$

или

$$V = y_2^2y_5 - 3y_2y_3y_4 + 2y_3^3 = 0.$$

Левая часть этого уравнения, обозначенная нами через V, представляет собой ближайший к инварианту U дифференциальный инвариант более высокого порядка.

3. Далее, в качестве третьего инварианта получается дифференциальное выражение седьмого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ -y_2^2 & 0 & y_3^2 & 2y_3y_4 & 2y_3y_5+y_4^2 \\ 0 & y_2^2 & 2y_2y_3 & 2y_2y_4+y_3^2 & 2y_2y_5+2y_3y_4 \\ 0 & 0 & y_2^2 & 3y_2y_3 & 3y_3^2+3y_2y_4 \end{vmatrix}.$$

4. В качестве четвертого инварианта получается выражение, составленное из предыдущих, в форме

$$H = \frac{256\Delta^3 - 27V^8}{U^4},$$

где числитель делится без остатка на знаменатель.

Далее мы попутно отметим, *что выражение* $\Delta^3 : V^8$ *представляет собой самый низший абсолютный инвариант. Все рациональные целые дифференциальные инварианты до седьмого порядка включительно* (т. е. такие, которые содержат производные не выше чем седьмого порядка) *составляются рационально и цельно из этих четырех инвариантов* U, V, Δ *и* H, *а все рациональные абсолютные инварианты составляются рационально из одного* $\Delta^3 : V^8$.

Каково геометрическое значение четырех инвариантов U, V, Δ и H? Разумеется, таковое может ожидаться, если мы приравняем нулю заданные выражения. При этом мы будем производить рассмотрения с двух точек зрения. С одной стороны, мы рассмотрим, что означает для определенной заданной кривой тот факт, что для одной из ее точек удовлетворяется рассматриваемое дифференциальное уравнение, а с другой стороны, спросим: каковы те кривые, *для всех точек* которых обращаются в нуль наши дифференциальные инварианты? Разумеется оба взгляда теснейшим образом связаны друг с другом. Рассмотрим теперь отдельные выражения.

К 1. Если уравнение $U=0$ выполняется для одной отдельной точки заданной кривой, то, как известно, это означает, что рассматриваемая точка *является точкой перегиба кривой*, т. е. что три бесконечно близкие точки кривой в этом месте расположены на одной прямой. С другой стороны, $U=0$ является, как мы уже сказали раньше, *дифференциальным уравнением прямой линии* и как таковое выражает, что все ее точки являются точками перегиба.

К 2. Уравнение $V=0$ выражает соответственно для произвольной кривой условие того, что шесть бесконечно близких точек кривой лежат на одном коническом сечении; такие точки называют *секстатическими точками*. Именно поэтому $V=0$ является, как уже упоминалось, одновременно дифференциальным уравнением конических сечений. Аналогичным образом следующие инварианты Δ и H приводят нас к W-кривым, так что мы получаем, таким образом, примыкание к ранее изложенному.

К 3. $\Delta = 0$ является диференциальным уравнением тех W-кривых, представителем которых в проективном смысле является логарифмическая спираль, пересекающая радиусы под углом $\pi : 6$. Если известно, что в некоторой отдельной точке произвольной кривой $\Delta = 0$, то это означает, что восемь бесконечно близких точек лежат на логарифмической спирали названного типа, так как уравнение $\Delta = 0$ является диференциальным уравнением седьмого порядка.

К 4. Диференциальное уравнение $H = 0$ дает нам те кривые, которые при выборе надлежащей системы координат определяются уравнением:

$$x_1 x_2^3 x_3^{-3} = C \quad \text{или} \quad x_1 x_2^2 = C x_3^3,$$

т. е. опять специальный тип W-кривых, являющихся *кривыми третьего порядка с острием*. Если в некоторой отдельной точке произвольной кривой удовлетворяется уравнение $H = 0$, то значит восемь бесконечно близких точек лежат на кривой названного типа.

Выясним теперь еще геометрический смысл *абсолютного* инварианта $\Delta^3 : V^8$. Очевидно таковой получится, если мы $\Delta^3 : V^8$ положим равным произвольной постоянной k и в соответствии с этим напишем уравнение $\Delta^3 - kV^8 = 0$.

Это диференциальное уравнение седьмого порядка $\Delta^3 - kV^8 = 0$ *вообще дает* W*-кривые, двойное отношение* λ *которых связано с значением постоянной* k *посредством следующего уравнения:*

$$k = \frac{25 \cdot 27}{16 \cdot 343} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}{\{(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)\}^2} .$$

Если вместо λ мы введем абсолютный инвариант J или относительные инварианты g_2 и g_3, то будут иметь место уравнения

$$J = \frac{64 \cdot 343k}{64 \cdot 343k - 25 \cdot 27}$$

и

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{64 \cdot 343}{25} k.$$

Если мы перейдем, далее, к диференциальным инвариантам более высокого порядка, чем седьмой, то диференциальные инварианты восьмого порядка приведут нас, например, к диференциальным уравнениям кривых третьего порядка, имеющих заданный абсолютный инвариант. Более обстоятельное изложение имеется у Гальфена.

Но из сказанного уже видно, сколь трудно обозримы исследования Гальфена; это связано с тем, что вычисления производятся в несимметричной форме. Но эти исследования принимают уже более прозрачный вид, если, следуя Штуди (Leipziger Berichte, т. 53, 1905), ввести „интегральный инвариант“ (аналог длине дуги) посредством формулы:

$$ds = \frac{\sqrt[3]{V}\sqrt{V}}{U} dx.$$

С помощью этого параметра можно, например, как показал Виртингер (Wiener Monatshefte, т. 34, стр. 37—40, 1926), придать более изящный вид теории плоских кривых третьего порядка без особенностей.

Здесь уместно сказать кое-что о том, как развивалась в последние десятилетия „проективная диференциальная геометрия". Случай *кривых*, который был рассмотрен Гальфеном, мало интересен в сравнении с исследованиями *поверхностей*, точно так же, как это имело место в элементарной диференциальной геометрии.

Первая существенная работа по проективной теории поверхностей (и о других вещах) восходит к Дарбу [в Bulletin des sciences mathématiques (2), т. 4, (1880) I, стр. 348—384]. Позднее проективная теория поверхностей систематически развивалась Вильчинским (род. в Гамбурге, 1876) и его американскими учениками, главным образом при использовании асимптотических линий в качестве параметрических кривых [ср., например, American Mathematical Society Transactions, т. 8 (1907), т. 9 (1908) и т. 10 (1909)].

Новый толчок в этой области исходит от итальянского математика Фубини (род. в Венеции, 1879), который прежде всего ввел инвариантные диференциальные формы и устранил ограничение выбора специальных параметров. См., например, его обзорную работу в „Rendiconti del circolo di Palermo", т. 43 (1919). Затем к Фубини присоединились некоторые другие, особенно итальянские геометры; в настоящее время находится в печати книга Фубини и Чеха, которая дает исчерпывающее изложение этой молодой ветви диференциальной геометрии (I т. Болонья, 1926). Здесь также всегда возникает опасность, что геометрические задачи совершенно закроются лесом формул и таким образом следует приветствовать новейшие итальянские исследования, как, например, исследования Бомпиани (род. в Риме, 1889), рассматривающие, как главное, геометрическую наглядность. См. в частности доклад Бомпиани о развитии проективной теории поверхностей [Seminario matematico Roma, 1923—1924, (2), II]. Одной из значительных работ по проективной теории поверхностей является работа Картана: E. Cartan, Sur la déformation projective des surfaces [Annales l'école normale (3), т. 37, стр. 259—365 (1920)]. Томсен построил проективную теорию поверхностей, исходя из геометрии прямых линий (G. Thomsen, Abhandlungen, т. 4, стр. 232—266, Гамбург 1925). Ср. также Бомпиани Accad. Lincei (6), 3 (1926).

С проективной теорией поверхностей родственна аффинная теория поверхностей, которая рассматривается во втором томе лекций по диференциальной геометрии Бляшке (Берлин, 1923).

Обратимся теперь к другой стороне проективной геометрии, *к учению о мнимых элементах.*

§ 43. Теория конфокальных конических сечений в мнимой области.

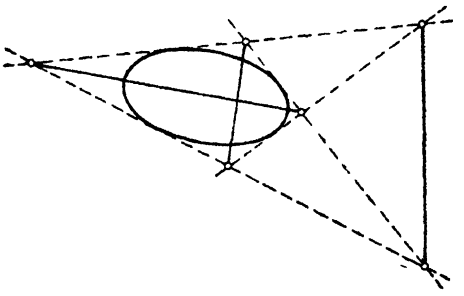
До сих пор, если нам встречались мнимости, то мы, например, мнимые точки, прямые и т. д. рассматривали просто, как если бы они были действительными точками или прямыми, не заботясь об их геометрическом значении. Этот наивный взгляд очень удобен для проек-

тивной трактовки метрической геометрии. Мы сейчас покажем это на примере. В качестве последнего мы возьмем теорию конфокальных конических сечений. Раньше они были введены посредством уравнения:

$$\frac{x^2}{a_1-\lambda}+\frac{y^2}{a_2-\lambda}=1.$$

Прежде всего мы преобразуем его к линейным координатам u, v, которые введем обычным образом так, чтобы условие соединенного положения точки и прямой давалось уравнением:

$$ux+vy+1=0.$$



Черт. 65.

Используя известным образом уравнение касательной конического сечения, мы получим:

$$(a_1-\lambda)u^2+(a_2-\lambda)v^2=1$$

или

$$(a_1u^2+a_2v^2-1)-\\-\lambda(u^2+v^2)=0.$$

Мы уже часто встречали аналогичную форму уравнения в точечных координатах, например, $\varphi_2+\lambda\psi_2=0$, и истолковали его геометрически как *пучок* всех кривых второй степени, проходящих через четыре точки пересечения $\varphi_2=0$ и $\psi_2=0$. Здесь мы будем также говорить о *линейном семействе кривых второго класса*. Так как кривые

$$a_1u^2+a_2v^2-1=0 \quad \text{и} \quad u^2+v^2=0$$

имеют четыре общих касательных, то геометрически семейство должно определяться как совокупность всех конических сечений, из которых каждое касается этих четырех касательных. *Поэтому отсюда мы заключаем, что все конические сечения конфокального семейства имеют четыре общие касательные, т. е. все они вписаны в общий четырехсторонник.*

Разумеется непосредственное рассмотрение показывает, что эти четыре касательные вовсе не являются действительными, вследствие чего мы как раз и вступаем в область мнимостей. Мы выскажемся определеннее, если рассмотрим ближе вторую кривую $u^2+v^2=0$. Это уравнение нам дает просто систему обеих абсолютных точек, которая, следовательно, образует вырождающуюся кривую из конфокального семейства C_2. *Итак, названный четырехсторонник состоит из четырех мнимых касательных, которые могут быть проведены из обеих абсолютных точек к какой-нибудь кривой семейства.*

Чтобы составить себе об этом лучшее представление, мы выясним, какова будет система конических сечений, касающихся четырех действительных прямых (черт. 65), и затем полученный здесь результат перенесем на область мнимого.

В частности, в линейном семействе кривых второго класса, касающихся четырех заданных прямых, мы получим три особые кривые; вырождающиеся в пару точек. Их линии соединения AA', BB', CC', определяющие предельное положение эллипса, на чертеже изображены толстыми линиями. Сформулированное предложение легко вытекает из нашего уравнения:

$$(a_1u^2 + a_2v^2 - 1) - \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

Именно, для $\lambda = \infty$ мы получим уравнение:

$$v^2 + v^2 = 0,$$

т. е. обе абсолютные точки. Для $\lambda = a_2$ получим уравнение:

$$(a_1 - a_2)u^2 - 1 = 0,$$

т. е. две действительные точки, лежащие на оси x (предполагая, что $a_1 > a_2$), которые оказываются *„фокальными точками"* кривой второй степени. Для $\lambda = a_1$ получаем уравнение:

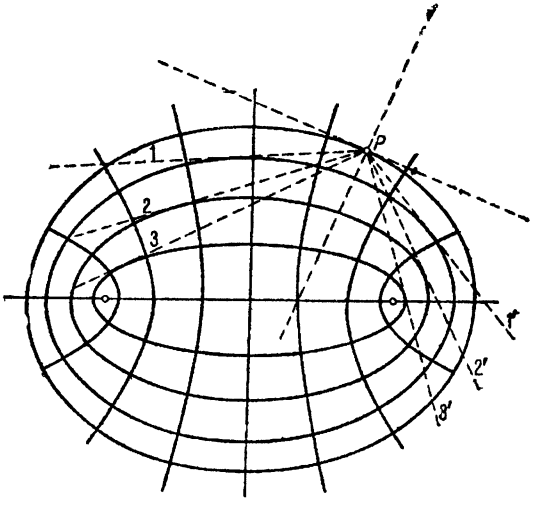
$$(a_2 - a_1)v^2 - 1 = 0,$$

т. е. две мнимые фокальные точки на оси y. О них обычно не говорят как раз потому, что они являются мнимыми.

Этот результат, поскольку он касается наших конфокальных конических сечений, мы можем геометрически провести еще несколько далее, представив себе проведенными из абсолютных точек обе пары общих касательных, которые, разумеется, не являются действительными. Заметим, что эти прямые попарно являются комплексно сопряженными. Поэтому должны существовать две действительные точки пересечения, которые дают нам действительные фокальные точки, в то время как, с другой стороны, пересечение не сопряженных друг с другом мнимых касательных приводит к дальнейшим мнимым точкам пересечения. В частности, мы отметим себе получившуюся здесь проективную трактовку фокальных точек, которую до сих пор мы заимствовали из элементарной геометрии. *Фокальными точками конического сечения называют обе действительные точки, в которых пересекаются мнимые касательные, проведенные из абсолютных точек к коническому сечению.*

Исходя из нашей новой точки зрения, мы легко можем показать, что конфокальные конические сечения образуют *ортогональную сеть кривых. Если мы представим себе пары касательных, проведенных из некоторой произвольной точки P ко всем коническим сечениям с четырьмя общими касательными, т. е. к коническим сечениям некоторого линейного семейства, то эти пары образуют инволюционный пучок лучей.* Это нетрудно доказать, но в подробности доказательства мы входить не будем. Заметим только, что характерный признак инволюции заключается в том, что оба луча каждой пары расположены гармонически к двум фиксированным направлениям — двойным элементам, которые со своей стороны могут быть как

действительными, так и комплексно сопряженными. В этом смысле мы рассмотрим нашу конфокальную систему, как она изображена на чертеже 66. Из произвольной точки P проведенные пары лучей $11'$, $22'$, $33'$ и т. д. гармонически расположены с касательными, построенными в точке P к проходящим через точку P эллипсу и гиперболе, так как эти касательные являются двойными лучами инволюции. Среди конических сечений системы, как мы раньше отметили, содержится также пара абсолютных точек. Поэтому, мы можем, в частности, провести из точки P к этим абсолютным точкам обе касательные, и так как они должны быть гармонически расположены по отношению к обоим фиксированным направлениям, то эти последние должны быть друг к другу перпендикулярны, что и требовалось доказать. Это та же самая мысль, что и при нитяной конструкции Гревса.



Черт. 66.

На этих подробностях, которые были развиты уже Понселе, мы дольше останавливаться не будем. Оправдание изложенной в этом примере трактовке мнимостей заключается в том, что *все наши построения имеют алгебраический смысл независимо от того, будем ли мы иметь дело с действительными или комплексными значениями переменных.*

Полное действительно геометрическое истолкование этих построений чрезвычайно интересным способом дано Штаудтом в его „Исследованиях по геометрии положения", 1856—1860 [1]). Но мы в подробности здесь входить не будем, так как это обстоятельно излагается в лекциях Клейна по неевклидовой геометрии. Однако мы заметим: насколько эта теория важна, настолько же она неудобна и тяжеловесна в своих применениях, и та легкость, с которой исходят, отправляясь от аналитической точки зрения, которой мы придаем особое значение, при этом совершенно пропадает. Поэтому в дальнейшем мы к ней также возвращаться не будем.

---

[1]) Новейшие подобные действительные представления мнимых образов можно найти в работах: E. Study, Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen, Leipzig, 1911 и J. L. Coolidge, The geometry of the complex domain, Oxford 1924.

§ 44. Мнимые коллинеации.

Проследим теперь в общих чертах появление мнимостей в проективной геометрии. Общее соотношение *коллинеации*, выражающееся уравнением

$$\rho x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$

каждой точке x ставит в соответствие некоторую другую точку x', причем до сих пор мы почти исключительно ограничивались действительными точками. Теперь мы должны произвести обобщение в двух направлениях. *Прежде всего мы будем также рассматривать и комплексные значения* x и x'. Для этого обобщения линейных преобразований сохраняется название коллинеации, потому что предложение о том, что прямым линиям опять соответствуют прямые, сохраняет свою силу также и в комплексной области, так как это предложение имеет алгебраический смысл.

Далее мы будем давать комплексные значения также и коэфициентам a_{ik}. Тогда, вообще говоря, действительным x будут соответствовать комплексные значения x' и наоборот. Но это, как легко видеть, не изменит характер преобразования, как коллинеации. Раньше мы уже отметили, на основании построения сети Мебиуса, что каждая коллинеация является линейным преобразованием и наоборот. Теперь это уже неверно.

Именно, наряду с обычной коллинеацией имеется еще второй тип преобразования:

$$\rho x_i' = \sum a_{ik} \bar{x}_k,$$

где $\bar{x}_k$ *обозначает сопряженное значение по отношению к* x_k. Эти „антиколлинеации“ (Сегре) неоднократно упускались из вида. В то время как при обычной коллинеации все двойные отношения четырех коллинеарных точек, т. е. также комплексные двойные отношения, остаются совершенно неизменными, здесь двойные отношения переходят в свое *комплексно сопряженное значение*. Разумеется, при ограничении действительными значениями только что сказанное не изменяется. Простейший пример этого нового преобразования представляет *„сопряжение“*, т. е. замена каждой точки пространства посредством ее комплексно сопряженной точки, что дается формулами:

$$\rho x_1' = \bar{x}_1, \quad \rho x_2' = \bar{x}_2, \quad \rho x_3' = \bar{x}_3, \quad \rho x_4' = \bar{x}_4.$$

Что же даст введение названного обобщения понятий для проективной геометрии и для теории инвариантов? Прежде всего различные образы, которые до сих пор не были родственными, становятся линейно родственными. По нашим прежним понятиям мы, например, различали два существенно различных нераспадающихся типа конических сечений: *действительные конические сечения* C_2 (эллипс, гипербола, парабола), заданные уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (отнесенное к действительной системе координат) и *нулевые* конические сечения C_2, заданные уравне-

нием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Теперь же они переводятся друг в друга самым простым образом с помощью мнимых коллинеаций, например, если мы положим: $\rho x_1' = x_1$, $\rho x_2' = x_2$, $\rho x_3' = ix_3$ ($i^2 = -1$). Совершенно аналогично обстоит дело с поверхностями второй степени, которые до сих пор мы привыкли подразделять на

нулевые F_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$,

овальные F_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$,

т. е. эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид и, наконец,

кольцеобразные (линейчатые) F_2: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, т. е. однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид. С точки зрения мнимых коллинеаций различие этих типов поверхностей совершенно исчезает.

Идя еще далее в этом направлении, мы можем поставить вопрос о подразделении квадратичных форм от n однородных переменных, во-первых, с точки зрения общих линейных преобразований, во-вторых, с точки зрения действительных линейных преобразований. Пусть дана общая форма:

$$\sum a_{ik} x_i x_k.$$

Тогда, прежде всего, мы различаем такие формы, у которых определитель D коэфициентов отличен от нуля, и такие формы, у которых определитель D равен нулю. Последние мы классифицируем, далее, по рангу матрицы из коэфициентов, т. е. смотря по тому, все или не все первые миноры D_{ik} обращаются в нуль; далее, будут ли в последнем случае не все вторые миноры D_{iklm} обращаться в нуль или нет и т. д. Эту классификацию коротко можно записать в следующей схеме.

Пусть:

0) $D \neq 0$;

1) $D = 0$; $D_{ik} \neq 0$;

2) $D_{ik} = 0$, $D_{iklm} \neq 0$;

3) $D_{iklm} = 0$, и т. д.

Все формы одного и того же типа будут друг другу линейно родственными. В частности оказывается, что во всех случаях квадратичные формы можно свести к сумме квадратов.

При этом различные типы характеризуются тем, что мы в качестве канонической формы получаем в случае 0) *сумму* n *квадратов, в случае* 1) *сумму* $n-1$ *квадратов, в случае* 2) *сумму* $n-2$ *квадратов и т. д.*, следовательно, сумму r квадратов, если r является рангом матрицы.

Но если мы теперь встанем на узкую точку зрения действительных линейных преобразований, то будут иметь место все различия,

связанные с законом инерции квадратичных форм, т. е. нам придется различать в случае 0) в зависимости от знаков $(n+1)$ подтипов

$$\sum_1^n \pm x_i^2,$$

соответственно в случае 1) n подтипов, в 2) $(n-1)$ подтипов и т. д. Это является полной классификацией, о которой здесь идет речь.

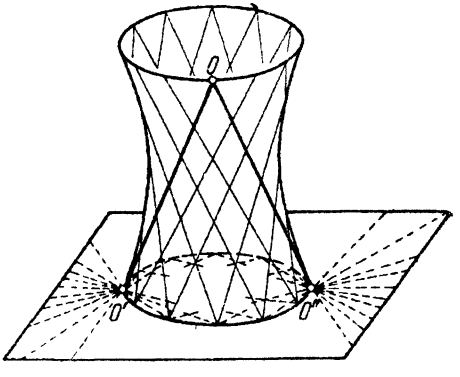
Если геометрией в комплексной области заниматься систематически, то наряду с квадратичными формами можно ввести также *эрмитовы формы*, т. е. образы вида

$$\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0, \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki},$$

где знак черты означает переход к комплексно сопряженному значению. Как Кели использует квадратичные формы для введения метрики так с помощью форм Эрмита можно получить новые типы „неевклидовой" геометрии. См. Серре (C. Segre), Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti di Torino, т. 26, стр. 40 (1890); Фубини (G. Fubini), Sulle metriche definite da una forma Hermitiana, Istituto Veneto, т. 63, 2 (1904) и Штуди (E. Study), Kürzeste Wege in komplexen Gebiet, Mathem. Annalen, т. 60, стр. 321—378 (1905). См. также упомянутую в конце § 43 книгу Кулиджа.

§ 45. Стереографическая проекция.

Рассмотрим теперь с геометрической стороны частный случай поверхностей второй степени, *сопоставив друг с другом однополостный гиперболоид и сферу*. Так как мы знаем, что обе поверхности могут быть переведены друг в друга с помощью мнимой коллинеации, то мы можем также все проективные предложения, относящиеся к одной поверхности, перенести на другую. Рассмотрим ближе однополостный гиперболоид, представив себе его спроектированным из его призвольной точки O на некоторую „основную плоскость".



Черт. 67.

Это соответствие издавна называют *стенографической проекцией*.

Через точку O проходят две образующие гиперболоида, одна из одного семейства, другая из второго; они пересекают плоскость в точках O' и O'', линия соединения которых на основной плоскости совпадает с линией ее пересечения касательной плоскостью, проведенной к гиперболоиду в точке O. Тогда имеют место следующие факты (черт. 67). Точ-

кам O' и O'', называемым *основными точками*, на гиперболоиде соответствуют все точки обеих образующих, проходящих через точку O. С другой стороны, самой точке O соответствует бесконечное множество точек плоскости, именно все точки прямой, соединяющей точки O' и O''. *Но в остальном соответствие между точками гиперболоида и плоскости является взаимно однозначным.*

Все образующие первого типа, не проходящие через точку O, проектируются в пучок лучей, проходящих через точку O''; все образующие второго типа, не проходящие через точку O, проектируются в пучок лучей, проходящих через O'. Так как произвольное плоское сечение пересекает также обе образующие, проходящие через точку O, то оно проектируется на плоскость в коническое сечение, проходящее через точки O' и O''.

Эти замечания о стереографической проекции гиперболоида мы теперь перенесем на сферу, причем, разумеется, многое из того, что там было действительным, здесь будет мнимым. Прежде всего, на сфере также имеются два семейства прямых, которые являются комплексно сопряженными между собой. Если мы построим в произвольной точке O сферы касательную плоскость, то она пересечет сферу по двум комплексно сопряженным образующим сферы, из которых одна образующая будет первого рода, а другая образующая — второго рода. Так как касательная плоскость пересекает также принадлежащее к сфере абсолютное коническое сечение в двух точках, то названные образующие должны пересечь это коническое сечение. Прямые с этим последним свойством мы назовем *изотропными* прямыми. Ли их называет „минимальными прямыми“. Следовательно, наши прежние рассмотрения мы можем соединить в предложение: *прямолинейные образующие сферы являются изотропными прямыми.*

Здесь мы приведем небольшое рассмотрение *изотропных прямых*. Все изотропные прямые, проходящие через начало координат, можно представить, как это легко видеть, уравнением

$$x : y : z = \lambda : \mu : \nu,$$

причем

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0.$$

Эти прямые обладают некоторыми замечательными свойствами, являющимися парадоксальными по сравнению со свойствами действительных прямых. Так как всегда $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, то следует, что расстояние друг от друга двух произвольных собственных точек изотропной прямой равно нулю. Далее, обычно говорят, что всякая изотропная прямая сама себе перпендикулярна. Но это не вполне точно. Правда, условие $xx' + yy' + zz' = 0$, которое выполняется для перпендикулярных направлений, выходящих из начала координат, для каждой отдельной изотропной прямой удовлетворяется, так как $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; но все же, если мы рассмотрим общую формулу для угла между двумя лучами, проходящими через начало координат

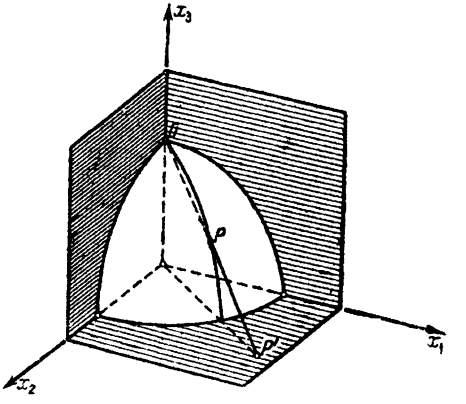
$$\cos\vartheta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}},$$

то мы получим, сливая оба луча в одну изотропную прямую,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{0}{0}.$$

Поэтому правильнее будет сказать не „каждая изотропная прямая сама себе перпендикулярна“, а „изотропная прямая образует сама с собой неопределенный угол“. Во всяком случае поразительный результат.

Так же можно установить, что *собственная точка изотропной прямой имеет от ее несобственной точки неопределенное расстояние.* Здесь обнаруживается известное преимущество термина „несобственный“ перед термином „бесконечно удаленный“. „Абсолютное коническое сечение“ не является ни бесконечно удаленным, ни (в обычном смысле) кругом. Поэтому мы избегаем названия „бесконечно удаленный круг сферы“.



Черт. 68.

Вернемся теперь к указанной в заглавии стереографической проекции, перенося результаты далее на сферу. В частности, мы выберем здесь основную плоскость так, чтобы она была параллельна касательной плоскости сферы в точке O (черт. 68). *При таком расположении основные точки O' и O'' образа, как сечения образующих изотропных прямых, проходящих через O, попадают в обе абсолютные точки плоскости образа.* Далее, изотропные прямолинейные образующие сферы превращаются в оба пучка изотропных прямых, лежащих в основной плоскости.

Относительно этой стереографической проекции сферы уже с древних времен (Птолемей и географы города Александрии) были известны два предложения, именно, что *каждый круг сферы переходит в некоторый круг плоскости и, кроме того, что отображение является конформным (сохраняющим углы).* С нашей точки зрения мы получим эти предложения следующим образом: каждое плоское сечение на сфере должно быть кругом, потому что по нашему соответствующему предложению на гиперболоиде имеется коническое сечение, содержащее точки O' и O''. Что касается второго предложения, то, следуя Лагерру, мы определяем угол между двумя направлениями на сферу, как

$$\frac{1}{2i}\lg DV,$$

где DV обозначает двойное отношение этих направлений с соответствующими изотропными прямыми, выходящими из вершин угла на

сфере. Но это двойное отношение переносится без изменения на четыре соответствующих направления в основной плоскости. Из них две прямые являются опять изотропными на плоскости, так что для вычисления соответствующего угла плоскости мы возьмем логарифм того же самого двойного отношения, умноженного на $1:2i$.

Здесь мы дали пример того, как, пользуясь применением комплексных коллинеаций, можно получить непосредственное доказательство некоторых предложений, которые при других способах требуют известных вычислений или специальных рассмотрений. Так как здесь предложения вытекают совершенно непосредственно, сами собой, то для занимающихся этим впервые этот метод кажется несколько таинственным, он, так сказать, приподнимает завесу, которая раньше скрывала от нас внутреннюю связь вещей.

§ 46. Изотропные кривые и конформные отображения поверхностей.

Прежде всего мы должны сказать об общем понятии *изотропных кривых*, или, по терминологии Ли, „минимальных кривых". Так вообще называют кривые, дифференциал дуги $dx^2+dy^2+dz^2$ (в прямолинейных координатах) которых равняется нулю. Но геометрически это означает, что *касательные кривой пересекают абсолютное коническое сечение*, что оно, следовательно, лежит на поверхности касательных кривой. Длина дуги подобной изотропной кривой, сообразно с определением, разумеется равна нулю. Далее, так как соприкасающаяся плоскость кривой содержит две бесконечно близкие касательные кривой, то одновременно она всегда будет касательной плоскостью абсолютного конического сечения. Простейшим примером изотропных кривых являются *изотропные прямые*, для которых понятие „соприкасающейся плоскости" теряет свой смысл.

Пусть задана некоторая произвольная, быть может действительная, поверхность. В каждой из ее касательных плоскостей из точки касания можно провести к абсолютному коническому сечению два направления, как мы скажем — два *„изотропных направления"*. Продвигаясь таким образом в каждой из них, мы объединим эти направления в определенные кривые, касательные которых всегда изотропны. *Поэтому, вообще говоря, поверхность покрывается двумя семействами изотропных кривых, которые могут быть получены посредством интегрирования дифференциального уравнения первого порядка второй степени.*

Пример подобного семейства кривых дают прямолинейные образующие сферы, о которых мы только что подробно говорили.

Мы утверждаем: *изотропные кривые на поверхности образуют специальный тип геодезических линий.* Обычное определение геодезической линии, по которому длина ее дуги экстремальна, что выражается уравнением

$$\delta\int ds = 0,$$

мы здесь без дальнейших рассмотрений применить не можем. Потому что оно имеет значение, очевидно, только в действительной области, так как в комплексной области нужно сначала установить понятия

максимума и минимума. Поэтому мы должны обратиться к дифференциальному уравнению геодезических линий, или к тому предложению, по которому геодезическая линия определяется тем, что ее соприкасающиеся плоскости являются нормальными плоскостями поверхности.

Чтобы это провести, мы дадим, прежде всего, *проективное определение того, что две плоскости в пространстве являются взаимно перпендикулярными.* Рассматривая их следы на несобственной плоскости, мы получим: *две плоскости мы называем взаимно перпендикулярными, если названные следы являются сопряженными по отношению к абсолютному коническому сечению, т. е. если след одной плоскости проходит через полюс другой.*

Убедимся теперь в том, что это действительно имеет место в соответствующей точке поверхности для соприкасающейся и касательной плоскости. Очевидно, прямая пересечения обеих плоскостей будет изотропна, т. е. будет пересекать абсолютное коническое сечение. Так как это коническое сечение, по предыдущему, касается соприкасающейся плоскости как раз в точке пересечения, то следы обеих плоскостей на несобственной плоскости будут действительно сопряженными относительно абсолютного конического сечения, т. е. обе плоскости взаимно перпендикулярны. Этим наше предложение доказано. В качестве примера возьмем наши прежние рассмотрения геодезических линий на поверхности второго порядка (см. § 6).

В частности изотропные кривые на произвольной поверхности употребляются для определения угла φ, под которым пересекаются на поверхности две кривые.

Именно, мы скажем, что

$$\varphi = \frac{1}{2i} \lg DV,$$

причем под DV понимается двойное отношение, которое определяет направления обеих кривых с направлениями изотропных кривых, выходящих из их точки пересечения.

На основании этого определения угла легко также понять, *какая геометрическая картина получится при конформном отображении двух поверхностей друг на друга.* Ведь задача конформного отображения играет в применениях, в частности в теории функций, выдающуюся роль, а именно при этом всегда идет речь о таких специальных отображениях, которые определяются какими-нибудь добавочными условиями. Разумеется здесь мы говорим только о конформных отображениях вообще. Тогда имеет место следующий результат: две поверхности в силу какого-нибудь (аналитического) *точечного преобразования* будут называться конформно отображенными друг на друга тогда и только тогда, когда при преобразовании изотропные кривые одной поверхности переходят в изотропные кривые другой поверхности. Потому что, так как всякое преобразование, при надлежащих предположениях о регулярности в „бесконечно малом", является линейным, то двойное отношение четырех направлений на первой поверхности при каждом точечном преобразовании превращается в двойное отношение четырех соответствующих направлений на другой поверх-

ности; следовательно, угол φ между двумя направлениями, который при привлечении изотропных кривых определяется как $(1 : 2i) \lg DV$, при изложенном (необходимом и достаточном) условии остается неизменным.

В формулах конформное отображение поверхности выражается следующим образом. Пусть

$$u = C_1, \quad v = C_2 \quad \text{и} \quad u' = C_1', \quad v' = C_2'$$

— оба семейства изотропных кривых на каждой из отображаемых поверхностей, причем мы предполагаем, что нам удалось найти интегралы диференциальных уравнений именно в этой форме. Тогда, если мы положим

$$u = f_1(u'), \quad v = f_2(v'),$$

то эти уравнения наиболее общим образом осуществят нам конформное отображение, если f_k означают аналитические функции. Потому что при $u' = \text{const}$ (или $v' = \text{const}$) будет также $u = \text{const}$ (или $v = \text{const}$). С другой стороны, уравнения $u = f_1(v')$, $v = f_2(u')$ также дают конформное отображение, только теперь оба семейства изотропных кривых, сравнительно с предыдущим случаем, поменялись друг с другом местами. *Если, в частности, мы хотим иметь действительное конформное отображение двух действительных поверхностей друг на друга, то мы должны взять* u и v, u' и v' *взаимно сопряженными, а под* f_1 и f_2 *понимать сопряженные функции.*

Этот, может быть, с первого взгляда необычный способ выражения в сущности нам известен уже на плоскости, в чем мы убедимся, если откинем здесь употребленный способ выражения. Пусть на обеих плоскостях взяты прямоугольные координаты x, y соответственно x', y'; тогда изотропные кривые на них будут определяться уравнениями:

$$u = x + iy = C_1, \quad u' = x' + iy' = C_1'$$
$$v = x - iy = C_2, \quad v' = x' - iy' = C_2'.$$

Теперь должно быть

$$x + iy = f(x' + iy');$$

наряду с этим, если действительным значениям x, y должны соответствовать опять действительные значения x' и y' и наоборот, имеет место:

$$x - iy = \bar{f}(x' - iy').$$

Это один тип соотношения. Другим типом будет:

$$x + iy = \varphi(x' - iy'),$$
$$x - iy = \bar{\varphi}(x' + iy').$$

Эти формулы конформного отображения одной плоскости на другую хорошо известны из теории функций; они отличаются друг от друга тем, что в последнем случае имеет место еще изменение знака угла,

как это бывает, например, при зеркальном отображении. То же самое можно сказать о проблеме конформного отображения.

Что касается всего этого „псевдогеометрического" способа выражения относительно наглядного представления мнимостей, то оно особенно развивалось Шалем и его школой приблизительно в 1860—1870 годах. В Германии этот способ выражения, по крайней мере в диференциальной геометрии, сначала пользовался очень малым успехом. Но недавно его начали охотно использовать, например, в учебнике по диференциальной геометрии Шефферса (одного из учеников Ли).

§ 47. Теория минимальных поверхностей Ли.

В качестве дополнительного доказательства полезности этого метода мы изложим в главных чертах *теорию минимальных поверхностей Ли*, которая полностью основывается на этих представлениях. Она изложена в томах 14, 15 Math. Annalen (1878, 79) и примыкает к старым формулам, которые были выведены Монжем в его работе Application de l'analyse a la géometrie [1]) и Вейерштрассом в журнале Berliner Monatsberichten в 1866 г., если понимать эти формулы геометрически в только что указанном смысле. Ясно, что этим вносится совершенно новая струя в теорию минимальных поверхностей. Стоит только взглянуть на новые результаты, полученные Ли.

Оставляя в стороне формулы Монжа, построенные сложнее, *мы обратимся сейчас к следующим формулам Вейерштрасса:*

$$X = \Re\,[(1-s^2)\,F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s)] \quad = \Re\,[2A(s)],$$
$$Y = \Re\,[i\,(1+s^2)\,F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s)] = \Re\,[2B(s)],$$
$$Z = \Re\,[2sF''(s) - F(s)] \quad = \Re\,[2C(s)],$$

в которых X, Y, Z обозначают координаты отдельной точки поверхности, а $\Re$ — действительную часть функций, поставленных в скобки. Для них мы ввели целесообразные сокращенные обозначения. Функция $F(s)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного s с $F'''(s) = d^3F : ds^3 \neq 0$.

Ли вводит переменные x, y, z, которые он полагает равными самим комплексным функциям, стоящим в скобках, следовательно,

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s).$$

К этому он присоединяет еще вторую аналогичную группу формул для переменных x', y', z':

$$x' = A'(s'), \quad y' = B'(s'), \quad z' = C'(s'),$$

в которой s' обозначает какое-нибудь комплексное переменное, а A', B', C' — функции, также составленные из какой-нибудь функции $F(s')$, как A, B, C составлены из функции $F(s)$. *Формулы Вейерштрасса*

[1]) Имеется русский перевод: Монж Г., Приложение анализа к геометрии, ОНТИ, М — Л. 1936.

Прим. ред.

приводят нас к тому, что мы всякий раз получаем минимальную поверхность, если положим $X = x + x'$, $Y = y + y'$, $Z = z + z'$. *Только тогда, когда получается действительная минимальная поверхность, величины* s *и* s', A *и* A', B *и* B', C *и* C' *должны быть взяты комплексно сопряженными.*

Следуя Ли, мы познакомимся ближе с геометрическим содержанием этого предложения.

После простого вычисления мы получим формулы:

$$dx = (1 - s^2) F'''(s)\, ds,$$
$$dy = i(1 - s^2) F'''(s)\, ds,$$
$$dz = 2sF'''(s)\, ds$$

и соответствующие формулы для dx', dy', dz'. Так как $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ (соответственно $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$), то мы имем результат: *точка* x, y, z (*или* x', y', z') *описывает первую или вторую изотропную кривую, если* s (*или* s') *изменяется.* Из обеих этих кривых составляется поверхность в силу уравнений:

$$X = A(s) + A'(s'), \quad Y = B(s) + B'(s'), \quad Z = C(s) + C'(s').$$

Теперь речь идет о значении этих уравнений. *Ли заметил, что каждая такая группа формул для* X, Y, Z (*независимо от специального вида функций* A, B, C *и т. д.*) *совершенно общим образом определяет некоторую поверхность, которая двояким образом может быть образована путем передвигания некоторой кривой и поэтому называется поверхностью переноса или трансляционной поверхностью.*

Именно, если дать s' некоторое постоянное значение, то мы увидим, что первоначальная кривая

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s)$$

на нашей поверхности окажется сдвинутой определенным образом параллельно самой себе, так как каждая из координат увеличивается на постоянную величину. Но если s' станет переменным, то прибавленные величины изменятся, т. е. кривая x, y, z будет определенным образом двигаться вдоль кривой x', y', z', т. е. будет транслироваться. С другой стороны, мы можем также кривую x', y', z' передвигать вдоль кривой x, y, z; в обоих случаях, как легко видеть, приходят к одной и той же поверхности.

Общие поверхности переноса (направляющие кривые которых отнюдь не обязаны быть изотропными) *имеют то свойство, что в каждой из их точек обе соприкасающиеся касательные гармонически расположены к обеим образующим кривым.* Это доказывается разложением dX, dY, dZ по степеням ds, ds'. Отсюда как очевидное следствие получается, что в нашем случае, когда обе образующие являются изотропными, мы получим минимальную поверхность. В самом деле, соприкасающиеся касательные в произвольной точке поверхности будут расположены гармонически к изотропным кривым, следовательно, они взаимно перпендикулярны, а это, как известно, характеризует минимальные поверхности.

Резюмируя:

В качестве геометрического содержания формул Монжа и Вейерштрасса получается, что минимальные поверхности являются частным случаем поверхности переноса, именно тем частным случаем, что одна изотропная кривая двигается по другой изотропной кривой.

Вследствие только что обнаруженной тесной связи между изотропными кривыми и минимальными поверхностями термин Ли „минимальные кривые" (вместо „изотропные кривые") получает теперь свое оправдание.

Приблизительно одновременно с Ли Рибокур (A. Ribaucour) развивает геометрическую теорию минимальных поверхностей в связи с известными исследованиями геометрии прямых линий, Bruxelles Mém. cour, т. 44 (1880).

§ 48. Новейшие рассмотрения стереографической проекции и тетрациклических координат.

Познакомимся еще ближе с *стереографической проекцией* сферы на плоскость, чтобы обобщить эти рассмотрения на случай большего числа измерений; именно, нашей целью является поставить их в связь с тетрациклическими точечными координатами на плоскости, как мы их определили в § 11.

Уравнение сферы в однородно написанных прямоугольных координатах имеет вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Плоскость x, y мы возьмем в качестве плоскости проекции, а точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ — в качестве центра проекции, причем $x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4$. Тогда имеют место формулы:

$$\rho x_1 = x,$$
$$\rho x_2 = y,$$
$$\rho x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2},$$
$$\rho x_4 = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2},$$

которые аналитически представляют соответствие между точками сферы и плоскости. Вспомним теперь о том, что тетрациклические точечные координаты на плоскости мы ввели как величины, пропорциональные левым частям уравнений окружностей (которые также могли изобразить и прямые линии).

Следовательно, наши последние формулы непосредственно показывают, что координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки сферы как раз являются тетрациклическими координатами для соответствующих точек плоскости, причем эти координаты связаны уравнением сферы.

Из какой-нибудь специальной системы тетрациклических координат получаются в виде линейных комбинаций общие координаты, между которыми опять-таки существует квадратичное уравнение $\Omega(x_i) = 0$.

Если произвести такое же преобразование в пространстве, то оно будет означать, что сфера отнесена к новому координатному тетраэдру.

Поэтому общие тетрациклические координаты x_i некоторой точки плоскости мы будем рассматривать как однородные координаты соответствующей точки сферы, причем тождество $\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ является уравнением сферы в соответствующей системе координат. Поэтому введение тетрациклических координат на плоскости позволяет рассматривать плоскость, как стереографический образ сферы, отнесенной к некоторому координатному тетраэдру.

С помощью этой трактовки мы получим гораздо лучшее и более ясное представление о сущности тетрациклических координат и об основанных на них исследованиях, чем это было возможно до сих пор. Например, теперь будет совершенно ясно, *почему бесконечно удаленная область плоскости при употреблении тетрациклических координат выступает как точка*; это возможно потому, что при употреблении стереографической проекции бесконечно удаленная область соответствует одной единственной точке сферы, именно, центру проекции.

Рассмотрим теперь в новом освещении менее простой предмет, именно, теорию конфокальных циклических кривых. Уравнение сферы мы будем представлять себе в виде

$$\sum x_i^2 = 0,$$

что разумеется возможно только при допущении мнимого преобразования. Тогда ортогональная система циклических кривых плоскости дается уравнением:

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0.$$

Так как в пространстве это уравнение изображает семейство поверхностей второй степени, то конфокальные циклические кривые теперь являются кривыми пересечения нашей сферы с этим определенным семейством F_2. Чтобы определить это семейство геометрически, мы опять введем плоскостные координаты, т. е. координаты u_1, u_2, u_3, u_4 и, соответственно, уравнение $\sum u_i x_i = 0$, которое выражает соединенное положение точки и прямой. Тогда уравнение сферы перейдет в $\sum u_i^2 = 0$, в то время как семейство поверхностей будет даваться уравнением:

$$\sum (a_i - \lambda) u_i^2 = \sum (a_i u_i^2) - \lambda (\sum u_i^2) = 0.$$

Это семейство поверхностей второй степени содержит при $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$ обе особые поверхности

$$\sum u_i^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sum a_i u_i^2 = 0,$$

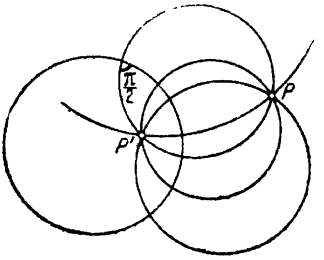
из которых первая представляет нашу сферу; в остальном, как линейное семейство, оно определяется тем, что поверхности семейства огибаются некоторой общей описанной развертывающейся поверхностью.

Мы получаем следующий результат:

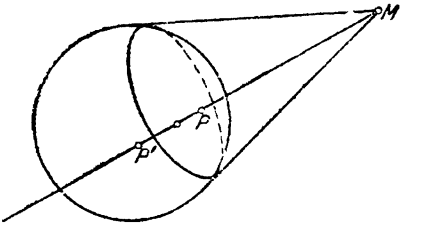
Наряду со сферой рассмотрим произвольную поверхность второго класса $\sum a_i u_i^2 = 0$; *построим для них общую описанную развертывающуюся поверхность и тогда отыщем все другие поверхности второго класса, для которых эта развертывающаяся поверхность является описанной. Они пересекают сферу по системе кривых, которые, будучи стереографически спроектированы, дают конфокальные циклические кривые плоскости.*

Ясно, что при подобном способе получения циклические кривые становятся для нас более доступными, чем раньше.

Продолжим теперь в определенном направлении наши рассмотрения стереографической проекции сферы на плоскость. В тетрацикличе-



Черт. 69.



Черт. 70.

ских координатах окружности плоскости даются *линейным уравнением* $\sum a_i x_i = 0$. Так как в пространстве это уравнение представляет произвольную плоскость, то мы имеем следующий простой результат, *окружности плоскости соответствуют плоским сечениям сферы.* Далее в качестве условия ортогонального пересечения двух окружностей $\sum a_i x_i = 0$ и $\sum b_i x_i = 0$ получается уравнение $\sum a_i b_i = 0$. Перенося опять на пространство, получаем: *окружности являются взаимно перпендикулярными, если оба плоских сечения сопряжены относительно сферы.*

Что же означает инверсия на плоскости для сферы в пространстве R_3? Мы знаем, что две точки P и P' на плоскости (черт. 69) соответствуют друг другу в силу преобразования посредством обратных радиусов относительно некоторой окружности, если окружности, проходящего через эти точки семейства, пересекают под прямым углом основную окружность.

Это соотношение позволяет нам сейчас же применить последнее предложение. Если обратить внимание на то, что пространственная прямая, соединяющая точки P и P' (черт. 70), перенесенные на сферу в силу стереографической проекции, представляется как сечение двух плоскостей, которые обе должны быть сопряжены с сечением плоскости основного круга, то получается новое предложение:

Два полюса, взаимные относительно некоторой окружности плоскости, дают на сфере две точки, прямая соединения которых проходит через полюс M плоского сечения сферы, соответствующей

заданной окружности плоскости. Следовательно, преобразование плоскости посредством обратных радиусов дает на сфере простое преобразование центрального проектирования из точки M. Ясно, что это представляет линейное преобразование координат x_1, x_2, x_3, x_4.

§ 49. Группа сродства кругов Мебиуса.

Мы станем на еще более общую точку зрения, если будем говорить о *проективной геометрии сферы.* Проективная геометрия плоскости рассматривает, как мы знаем, все те свойства фигур, которые остаются неизменными при линейном преобразовании плоскости в себя. Эти преобразования, как совокупность тройничных подстановок, образуют многообразие с восемью существенными параметрами. В противоположность этому сфера переходит в себя, как мы уже раньше подсчитали, при проективных преобразованиях шестичленной группы пространства. *Поэтому проективной геометрии плоскости мы противопоставляем проективную геометрию сферы, рассматривающую из всех свойств сферических фигур те, которые остаются неизменными при названных коллинеациях сферы.*

В этой геометрии важнейшими элементами являются плоские сечения сферы и, в частности, ее изотропные образующие. Прежде всего, угол между двумя направлениями остается неизменным, так как он может быть определен проективно с помощью этих изотропных прямых. Проектируя стереографически сферу на плоскость, мы получим на плоскости шестичленную группу преобразований, которую мы назовем *группой обратных радиусов,* потому что она, наряду с обычными движениями и преобразованиями подобия плоскости, охватывает также все преобразования плоскости посредством обратных радиусов.

В качестве аналога проективной геометрии на сфере мы получаем, таким образом, некоторую геометрию плоскости, которую мы назовем геометрией обратных радиусов; в ней простейшими инвариантными элементами являются окружности плоскости, ее изотропные прямые и угол между двумя направлениями.

Эта геометрия обратных радиусов кладется в основу многих отделов *математической физики,* а особенно в основу *теории функций, так как действительные преобразования группы обратных радиусов даются общими формулами*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{и} \quad \bar{z}' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

причем под z, $\bar{z}$ понимают комплексно сопряженные переменные, а под α, β, γ, δ — комплексные коэфициенты.

Эта геометрия обратных радиусов с точками, окружностями и углами в качестве неизменных элементов становится здесь рядом с проективной геометрией плоскости, рассматривающей в качестве элементов точки и прямые линии. Ее считают, особенно в элементарных учебниках, за „абсолютную геометрию“, т. е. за единственную геометрию, строящуюся на „сущности вещей“. В противоположность этому

следует особенно подчеркнуть, что обе названные плоские геометрии являются равноправными.

Но с другой стороны, надо отметить, что геометрия обратных радиусов аналитически выражается как кватернарная теория инвариантов линейных подстановок при раз навсегда положенном в основу уравнении второй степени, в то время как проективная геометрия находит свое аналитическое выражение в тройничной линейной теории инвариантов.

Итак, обе геометрии входят в состав общей линейной теории инвариантов, или, иначе, в состав проективной геометрии пространства достаточно большого числа измерений; вследствие этого проективная геометрия занимает здесь господствующее положение, если только мы ее не ограничим случаем плоскости.

§ 50. Теорема Лиувилля о конформных отображениях пространства.

Перейдем теперь к проведению соответствующих рассмотрений в пространстве высших размерностей, причем мы воспользуемся аналогичными заключениями, которые имеют свое полное оправдание, так как им всегда соответствуют аналитические предложения. Представим себе, например, заданной сферу в пространстве четырех измерений. Спроектируем ее стереографически на трехмерное точечное пространство. Рассматривая сферу в каких-нибудь пяти однородных координатах x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, мы увидим в них как раз те пентасферические координаты пространства R_3, которые мы ввели в § 11 другим способом.

Вообще имеет место предложение:

Рассмотрение пространства n измерений в $n+2$ полисферических координатах, связанных некоторым квадратичным условием, сводится к тому, чтобы рассматривать пространство n измерений как стереографическую проекцию сферы в пространстве $(n+1)$ измерений, которая со своей стороны проектируется в обычных однородных координатах.

Но при $n+2$ однородных переменных общая линейная подстановка содержит $(n+2)^2$ коэфициентов; с другой стороны, форма второй степени переменных обладает

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

коэфициентами. Следовательно, разность обоих чисел

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

дает число измерений многообразия линейных преобразований, переводящих в себя каждую отдельную форму второй степени (с отличным от нуля определителем), которая в нашем случае выражает сферу пространства R_{n+1}. Поэтому число параметров, положенных в основу преобразований нашей сферы в случае проективной геометрии в пространстве R_{n+1} или в случае геометрии обратных радиусов в простран-

стве R_n для $n=2, 3, 4$, равняется соответственно 6, 10, 15, вообще

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

В геометрии обратных радиусов особого внимания заслуживают *прямолинейные образующие* наших многомерных сфер, которые проектируются в пространстве R_n как изотропные прямые. При всех наших преобразованиях прямолинейные образующие сферы должны непременно сохранять это свое свойство, т. е. оставаться прямолинейными образующими сферы и, *следовательно, изотропные прямые пространства* R_n будут переходить опять в изотропные прямые. Вследствие этого все наши преобразования в пространстве n измерений являются конформными, т. е. они сохраняют углы.

Теперь укажем на важное предложение, справедливое для $n \geqslant 3$, но еще не имеющее места для $n=2$. Именно, если мы говорим о конформном отображении плоскости, то мы знаем, что наряду с линейными подстановками комплексных переменных z или $\bar{z}$, обладающих этим свойством, имеются еще другие преобразования, также сохраняющие углы. Мы о них еще недавно говорили. Если мы хотим говорить совершенно обще, то мы должны поставить рядом обе пары формул

$$z'=f_1(z), \quad \bar{z}'=f_2(\bar{z}),$$
$$z'=f_1(\bar{z}), \quad \bar{z}'=f_2(z).$$

Но если мы хотим ограничиться, как это делают в обычной теории функций, действительными преобразованиями, то f_1 и f_2 мы должны взять сопряженными функциями и получим тогда только формулы:

$$z'=f_1(z), \quad z'=f_2(\bar{z}).$$

В противоположность этому для $n \geqslant 3$ *имеет место предложение, что наряду с уже известными преобразованиями никаких других преобразований, сохраняющих углы, не имеется.*

Это предложение было установлено Лиувиллем; см. дополнения к книге Монжа Applications de l'analyse a la géométrie, 1850 г.

Попытаемся теперь выяснить это предложение геометрически. Ограничимся все же случаем пространства трех измерений ($n=3$). Наше рассмотрение мы расчленим на отдельные предложения.

1. Если точечное преобразование должно быть конформным и аналитическим, то оно должно каждому изотропному направлению ставить в соответствие опять же изотропное направление.

2. Каждая изотропная кривая переходит тогда в таковую же.

3. Теперь мы должны обратить наше внимание на развертывающиеся поверхности, которые образуют касательные изотропных кривых. Каждая изотропная развертывающаяся поверхность также должна переходить опять в таковую же, потому что эти поверхности отличаются от других поверхностей тем свойством, что несут на себе только одно семейство изотропных кривых.

4. Рассмотрим теперь две соприкасающиеся изотропные кривые и им соответствующие поверхности касательных. Тогда они будут касаться вдоль всего протяжения общей касательной, т. е. вдоль изотропной прямой. После преобразования они должны перейти опять в две такие развертывающиеся поверхности, которые соприкасаются вдоль образующей. Отсюда следует: *конформные отображения перемещают изотропные прямые между собой.* Это более существенно, чем сказанное в пункте 2.

5. Рассмотрим сферы в пространстве R_3. Среди всех прочих поверхностей они характеризуются тем, что *несут на себе два семейства изотропных прямых. Следовательно, по соображениям пункта* 4, *сферы опять переходят в сферы*, причем разумеется, плоскость рассматривается как частный случай сферы.

6. Так как отображение должно быть конформным, то ортогональные сферы переходят опять в ортогональные сферы. До сих пор наши рассмотрения происходили в пространстве R_3.

7. Теперь мы перейдем к сфере пространства R_4. Так как сферы пространства R_3 возникают при проектировании плоских сечений сферы пространства R_4, то, следовательно, нам надо отыскивать точечные преобразования этих сфер в себя, при которых каждое плоское сечение переходит опять в плоское сечение и, в частности, сопряженные плоскости в силу 6 переходят опять в сопряженные.

8. Рассмотрим на мгновение, ради простоты, соответствующее преобразование сферы пространства R_3 в себя. Все плоскости, сопряженные относительно этой сферы с некоторой фиксированной плоскостью, проходят через определенную точку пространства (полюс фиксированной плоскости). Следовательно, речь идет о плоскостном преобразовании пространства, при котором все точки переходят в точки.

9. Аналогичное заключение мы сделаем теперь также о преобразовании всего пространства R_4, при котором каждая плоскость переходит в плоскость, каждая точка — в точку.

10. Но преобразование с подобным свойством необходимо является коллинеацией. Чтобы это доказать, нам только надо рассматривать прямую линию, как пересечение двух плоскостей. Но коллинеация согласно построения сети Мебиуса, всегда является линейным преобразованием.

Поэтому мы получаем результат:

Каждое конформное точечное преобразование пространства R_3 дается таким линейным преобразованием пространства R_4, при котором переходит сама в себя сфера пространства R_4, на которую мы стереографически спроектировали пространство R_3. Таким образом получается десятичленная группа конформных преобразований, как мы и указали в начале.

Теперь особенно интересно выяснить, почему это доказательство теряет свою силу при $n = 2$. Легко видеть, что первые четыре пункта переносятся без труда, но пятый пункт для двух измерений отпадает, потому что для сферы не имеется на плоскости никакого соответствующего образа с такой же характеристикой. С другой стороны, это доказательство тем более имеет силу для высших размерностей. На

плоскости геометрию, о которой идет речь, мы назвали геометрией обратных радиусов. При трех и большем числе измерений на основании проведенного доказательства нашу геометрию полисферических координат можно назвать прямо *конформной геометрией* — выражение, перенос которого на два измерения разумеется не допустим.

Укажем еще вкратце второе доказательство теоремы Лиувилля в пространстве R_3, целиком проводимое в действительной области с помощью предложения Дюпена о тройной ортогональной системе (§ 1, 3), сохраняющейся при конформных отображениях; мы видим, что каждое такое отображение должно также сохранять линии кривизны, а вместе с тем и сферы как единственные поверхности с неопределенными линиями кривизны. Но в этом и заключается существенное содержание предложения Лиувилля.

§ 51. Принцип перенесения Гессе.

Разберем теперь в более общем виде мысль, положенную в основу последних рассмотрений, спросив себя: *насколько привлечение высшего пространства может доставить лучшее представление о геометрических соотношениях в низших пространствах?* Ответим на этот вопрос по трем направлениям на примерах. Прежде всего мы будем говорить о рассмотрениях, которые относятся к парам точек, к тройкам точек, короче, к множествам n точек прямой, к которым приводит бинарная теория инвариантов. Мы увидим, что при этом окажется полезным рассматривать прямую линию, как проекцию кривой n-го порядка в пространстве R_n. Второй пример (§ 52) будет относиться к теории „конфигураций“ на плоскости. Под ними мы понимаем геометрические образы из точек и прямых, обладающие определенными специальными свойствами в их расположении. Наконец, в § 53 мы бросим взгляд на графическую статику, в которой известные взаимные фигуры могут быть представлены как проекции пространственных полиэдров при нуль-системе. Перейдем к первому пункту.

В качестве литературы особенно следует указать на статью Гессе в журнале Крелля, т. 66 (1866), озаглавленную „О принципе перенесения“ (Hesse, Über ein Übertragungsprinzip), в которой развивается указанная мысль для $n = 2$; общее представление (для произвольного n) имеется у Мейера в его книге „Аполярность и рациональные кривые“ (Franz Meyer, Apolarität und rationale Kurven, 1883).

Прием Гессе заключается в следующем: пусть отношение $\lambda_1 : \lambda_2$ означает абсциссы точек на прямой. Уравнение $f_n(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, если f_n является формой n-й степени, выражает n точек на ней, которые могут быть как действительными, так и мнимыми. Особенно с подобными группами точек приходится иметь дело, если изучают бинарные формы:

$$f_n(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1^n + b\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \ldots + q\lambda_2^n.$$

Далее, существенная мысль дальнейших исследований заключается в том, что оперируют в пространстве n измерений и рассматривают

в нем точки пространства, координаты x_i которых пропорциональны различным степеням отношения $\lambda_1 : \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= \lambda_1^n, \\ \rho x_1 &= \lambda_1^{n-1}\lambda_2, \\ &\cdots\cdots \\ \rho x_n &= \lambda_2^n. \end{aligned} \qquad (*)$$

Легко видеть, что если точка λ пробегает всю прямую, то точка x_i описывает в пространстве R_n определенную кривую n-го порядка. Так как она выражается рационально через параметры $\lambda_1 : \lambda_2$, то ее называют *рациональной кривой* или специальным термином *„норм-кривая пространства R_n"*. Следовательно, рациональная кривая n-го порядка является образом прямой линии. Таким приемом Гессе отображает, например, прямую на коническое сечение.

Если теперь мы положим $f = 0$, то это приведет нас к уравнению $ax_0 + bx_1 + \ldots + qx_n = 0$, которое в пространстве R_n представляет плоскость. *Поэтому всякое множество n точек прямой оказывается сечением нашей норм-кривой с некоторой плоскостью пространства R_n.*

Если же заниматься теорией бинарных форм в теории инвариантов, то приходится рассматривать все подстановки следующего типа:

$$\begin{aligned} \sigma\lambda_1' &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ \sigma\lambda_2' &= \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2. \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Они представляют трехчленную группу, а именно, совокупность линейных преобразований прямой линии в себя. *Тогда при изучении форм f_n приходится отыскивать как раз все те свойства точечного множества $f_n = 0$, которые остаются инвариантными при произвольных линейных преобразованиях этой трехпараметрической группы.*

Далее получается простое перенесение этих линейных преобразований на норм-кривую пространства R_n. Пусть новая точка норм-кривой задана посредством:

$$\begin{aligned} \rho x_0' &= \lambda_1'^n, \\ \rho x_1' &= \lambda_1'^{n-1}\lambda_2', \\ &\cdots\cdots \\ \rho x_n' &= \lambda_2'^n. \end{aligned}$$

Вместо величин λ_1' и λ_2' мы можем подставить их выражения из формул подстановки и затем развернуть выражения в скобках. Так получится, например,

$$\rho x_0' = \lambda_1'^n = \left(\frac{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}{\sigma}\right)^n = \frac{\rho}{\sigma^n}(\alpha^n x_0 + n\alpha^{n-1}\beta x_1 + \ldots + \beta^n x_n),$$

если, кроме того, ввести старые переменные x_i. Мы видим, что x_0' сделалось линейной формой x_i.

То же самое имеет место для всех других x_i'. *Следовательно, трехчленной группе линейных преобразований прямой соответствует трехчленная группа коллинеаций пространства R_n, при которых наша норм-кривая переходит в себя при условии перестановки ее точек.*

Это само по себе является замечательным результатом, так как эти группы коллинеаций являются чрезвычайно важными в теории групп. Следовательно, не только на плоскости существует трехчленная группа линейных преобразований, переводящих коническое сечение в себя, что мы знали уже и раньше, но также и в пространстве существует трехпараметрическая группа относительно C_3 и т. д. Для случая $n = 2$ Ли называет эти группы вообще *группами конических сечений.*

Теперь уже можно бросить общий взгляд на то, какой вид примут дальнейшие более подробные рассмотрения. *Теоретико-инвариантное или проективное изучение точечных множеств $f_n = 0$ на прямой линии сводится теперь к тому, что изучаются проективные соотношения, устанавливающиеся между норм-кривой и пересекающей плоскостью* [1]).

§ 52. Плоские конфигурации.

Перейдем теперь ко второму указанному нами пункту. Рассматриваемая здесь мысль была высказана уже в 1846 г. Кели в журнале Крелля, т. 31 (Cayley, Sur quelques théoremes de la géométrie de position) и с тех пор неоднократно затрагивалась например Веронезе в Math. Annalen, т. 19, 1881 (Veronese, Prinzip des Projizierens und Schneidens) [2]).

Уясним себе эти вещи на специальной фигуре, которая постоянно рассматривается в синтетической геометрии (теорема Дезарга). Эта фигура, говоря кратко, дается двумя перспективно расположенными на плоскости треугольниками. Пусть O центр перспективы и LM ее ось (см. черт. 71). Проведем через точку O три проективных луча и на одном из них, так как мы имеем в распоряжении еще один параметр, поставим в соответствие точке a некоторую произвольную точку a'. Теперь вычертим первый треугольник с вершинами a, b, c на трех проекционных лучах. Так как α, β, γ, точки пересечения сторон треугольника с осью перспективы, остаются при перспективе неизменными, то легко найти, как это показывает чертеж, соответствующий треугольник $a'b'c'$, который получается при перспективе из

[1]) Ср. также A. Comessatti, Math. Annalen 89, 90 (1923). Обобщение формул (*) на стр. 201 дают, например, следующие формулы:

$$\rho x_1 = \lambda_1\lambda_1, \quad \rho x_2 = \lambda_2\lambda_2, \quad \rho x_3 = \lambda_3\lambda_3,$$
$$\rho x_4 = \lambda_2\lambda_3, \quad \rho x_5 = \lambda_3\lambda_1, \quad \rho x_6 = \lambda_1\lambda_2.$$

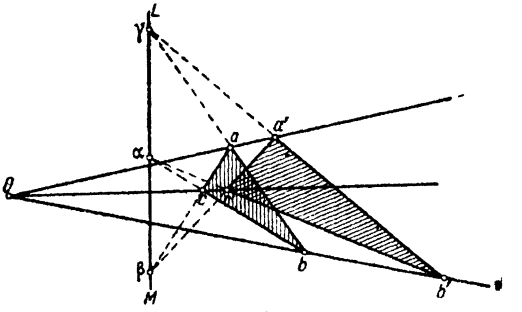
Таким образом получают параметрическое представление поверхности в пространстве R_5 с характеристическим свойством содержать двупараметрическое семейство конических сечений. Эту поверхность рассматривали: *Кели* (1868), *Веронезе* (1883—84) Accademia Lincei 19 (3) и *Сегре* (1885) Atti Torino 20; ее называют *поверхностью Веронезе.* См. например E. Bertini, Geometria projettiva degli iperspazi, Messina 1923; имеется немецкий перевод (A. Duschek) Вена 1924.

[2]) Дальнейшую, литературу см. в энциклопедии: E. Steinitz, Konfigurationen der projektiven Geometrie. Enzyklopädie III, 1, 1, 5a.

нашего треугольника *abc*. Если мы рассмотрим всю фигуру, то увидим:

Исходя из двух перспективных треугольников, на черт. 71 заштрихованных, мы пришли к фигуре, состоящей из десяти точек и десяти прямых, в которой всегда три точки лежат на одной прямой, а три прямые проходят через одну точку.

Внимательное рассмотрение фигуры показывает, *что она может быть получена из двух перспективных треугольников не одним только, а десятью способами.* Чтобы показать это последнее, мы привлечем, следуя Кели, пространственное рассмотрение. Именно, Кели простейшим образом доказывает это и все подобные утверждения о полученной фигуре, заметив, *что наша фигура является плоским сечением очень простой пространственной фигуры, именно, фигуры, состоящей из пяти произвольных точек (из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости), десяти соединяющих их прямых и десяти соединяющих их плоскостей.*



Черт. 71.

Действительно, эта пространственная фигура легко может быть получена из нашей плоской фигуры. Возьмем в пространстве две произвольные точки D и E, лежащие на одной прямой с точкой O. Проведем лучи из точки D к точкам a, b, c, а из точки E к точкам a', b', c'. Тогда пары лучей Da и Ea', Db и Eb', Dc и Ec' будут соответственно пересекаться в трех дальнейших точках пространства A, B, C. *Таким образом мы получаем пять пространственных точек* A, B, C, D, E. И, как это ясно из рассмотрения пространственной фигуры, десять точек и десять прямых нашей плоской конфигурации действительно являются сечением нашей плоскости с десятью прямыми и десятью плоскостями, соединяющими названные точки A, B, C, D, E. Точка O нашей фигуры получается тогда как пересечение с ребром DE и поэтому ничем не выделяется среди других точек пересечения. *Следовательно, если возможно, исходя из точки O, рассматривать фигуру в качестве образа двух перспективных треугольников, то без дальнейших рассуждений можно утверждать, что одинаковые возможности имеются для каждой из девяти других точек.*

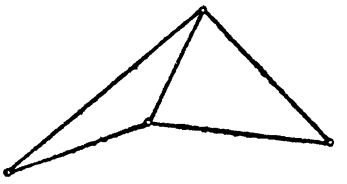
§ 53. Взаимные планы сил графической статики.

Как же обстоит дело с нашим третьим примером, относящимся к *графической статике?* В графической статике рассматривают так называемые „фермы", т. е., например, жесткие плоские системы, состоящие из отдельных стержней, один из простейших случаев которых

изображен на черт. 72. Если мы имеем в этой системе *n узловых точек*, то эти узлы будут определяться $2n$ координатами.

Если, теперь, подобная система может двигаться только как целое в своей плоскости, следовательно, имеет только три степени свободы, то очевидно, что координаты должны быть связаны $2n-3$ условиями. *Это означает, что для определения фермы необходима наличность* $2n-3$ *ребер или стержней.*

Если, сверх того, будут введены еще другие стержни, то ферма, вообще говоря, будет „переопределена". Едва ли нужно указывать на то, что система может быть еще неопределенной с более чем $2n-3$ стержнями в том случае, если в одной части введено больше стержней, чем это необходимо, а в другой, наоборот, менее. Но в такие подробности, которые легко трактовать строго математически, мы здесь входить не можем.



Черт. 72.

Теперь предположим, что к некоторым узловым точкам в нашей плоскости приложены силы. В нашей твердой системе они должны все вместе находиться в равновесии, т. е. они должны удовлетворять трем хорошо известным уравнениям. Возникает вопрос, какие *напряжения* будут наблюдаться в отдельных стержнях системы? Вводя напряжения, как неизвестные (причем мы будем различать с помощью знаков, будет ли соответствующий стержень претерпевать сжатие или растяжение), мы получим, как легко видеть, как раз $2n-3$ уравнения для $2n-3$ неизвестных напряжений.

В высшей степени интересно познакомиться с различием точек зрения чистой и прикладной математики на эту систему уравнений. В то время как теоретики удовольствуются указанием на то, как неизвестные могут быть выражены с помощью определителей, практики имеют перед собой гораздо более затруднительную задачу — вычислить в каждом данном случае неизвестные численно. И ясно, что здесь, как только $2n-3$ является достаточно большим, общее вычисление не может быть проведено.

Поэтому для практики требуется наличие метода, позволяющего удобно разрешить численно эти $2n-3$ *уравнений.* Разумеется эта система уравнений зависит от устройства нашей фермы. Например, во многих случаях вычисление неизвестных можно вести таким образом, что всегда друг за другом вычисляются только три неизвестных из трех линейных уравнений (способ Риттера).

Но, кроме того, на практике привыкли вместо вычисления эти напряжения отыскивать с помощью *чертежа.* Таким образом возникла особая ветвь *графической статики.* Поэтому ее можно рассматривать прямо как учение о графическом решении $2n-3$ линейных уравнений со столькими же неизвестными, в частности, как учение о тех упрощениях, которые дает графическое решение в зависимости от устройства системы линейных уравнений.

Этот метод прежде всего появился у Максвелла (1831—79) в 1864 году в Philosophical Magazine и в 1870 году в Edinburgh Transactions. Позднее этим занимались многие техники, так что в технических высших школах появились специальные кафедры графостатики. Из литературы назовем особенно книгу Кульмана „Учебник графической статики" (Culmann, Lehrbuch der graphischen Statik, 1866), так же как и геометрическую статью Кремона (1830—1903) (L. Cremona, Le figure reciproche nella statica grafica), которая сначала появилась в 1872 г.[1]). Эта работа Кремона сделалась очень известной по причине исключительно элегантного изложения. Она имеется также во французском переводе с дополнениями Савиотти (Saviotti), также заслуживающими большого внимания.

Работа Кремона основывается на применении нуль-системы, без чего, конечно, общая задача графической статики не могла бы быть решена. Действительно, с помощью нуль-системы очень удобно построить напряжения для определенных простых случаев ферм.

Для этого плоскость нашей фермы выбирают в качестве x, y-плоскости и затем пишут уравнение нуль-системы таким образом, чтобы ее ось стала осью z: $(xy' - yx') + k(z - z') = 0$. Пусть теперь в пространстве задан обычный полиэдр с определенным числом вершин, ребер и граней. Спроектируем затем этот полиэдр ортогонально на плоскость x, y. Эту „нормальную проекцию" пространственного полиэдра называют *плоской диаграммой*. Без затруднений можно говорить о гранях также и в ней. Построим в нуль-системе к этому полиэдру взаимный полиэдр. Мы знаем, что каждой вершине будет соответствовать грань, каждой грани — вершина, каждому ребру — опять ребро. Таким образом из тетраэдра возникает опять-таки тетраэдр, из куба, напротив, — октаэдр. Взаимный полиэдр мы также спроектируем ортогонально на плоскость x, y и назовем эту нормальную проекцию *взаимной диаграммой* по отношению к прежней. Тогда каждому ребру первой диаграммы будет соответствовать ребро второй диаграммы. *Ребра, сходящиеся в одной вершине первой диаграммы, будут охватывать некоторую грань во второй диаграмме, и наоборот.*

Мы утверждаем, что соответствующие друг другу ребра в обеих диаграммах являются друг другу параллельными. Пусть дано ребро с вершинами (x, y) и (x_1, y_1) на первом чертеже; эти вершины являются проекциями пространственных точек (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1). Вершине (x, y, z) соответствует плоскость $(xy' - x'y) + k(z - z') = 0$, вершине (x_1, y_1, z_1) соответствует таким же образом плоскость $(x_1y' - x'y_1) + k(z_1 - z') = 0$ (где x', y', z' мы рассматриваем как текущие координаты). Обе эти плоскости пересекаются по соответствующему ребру взаимного полиэдра, проекция которого (ребра) на плоскость x, y легко получается, путем исключения z' из обоих последних уравнений, в виде нового уравнения:

$$(x - x_1)y' - (y - y_1)x' + k(z - z_1) = 0.$$

[1]) L. Cremona, Opere matematiche 1—3 (Milano 1914—1917), том 3, стр. 336.

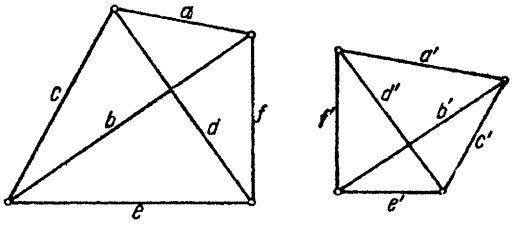
Напротив, первоначальная линия соединения точек (x, y) и (x_1, y_1) дается уравнением:

$$(x - x_1)\,y' - (y - y_1)\,x' + (x'y - xy') = 0.$$

Из обоих последних уравнений ясна справедливость нашего утверждения о том, что два взаимных ребра плоскости x, y параллельны друг другу. *Следовательно, каждый раз, когда три ребра сходятся в одной вершине первой фигуры, соответствующие три параллельные ребра ограничивают некоторую грань второй фигуры, и наоборот.*

Эти соотношения могут быть наглядно представлены с помощью диаграммы тетраэдра и его взаимного тетраэдра в их расположении друг к другу (черт. 73).

Известно, что n (например, три) сил, приложенных в одной точке, находятся в равновесии, если из изображающих их отрезков можно построить замкнутый многоугольник (треугольник), стороны которого равны и с одинаковой ориентацией параллельны названным отрезкам. Это и есть так называемая теорема о силовом многоугольнике.



I II

Черт. 73.

Поэтому, если мы теперь заставим действовать напряжения вдоль ребер первой диаграммы (I), *которые по своей величине даны длинами соответствующих ребер второй диаграммы* (II), *тогда наша первая диаграмма под влиянием этих напряжений будет находиться в равновесии.* Ибо силы, приложенные к отдельной вершине первой диаграммы, находятся все в равновесии, так как соответствующие отрезки во второй диаграмме образуют замкнутый многоугольник.

Следует только всегда принимать во внимание *знаки* напряжений, т. е. направление отрезков на черт. 73, II, что, однако, не представляет никаких затруднений.

Диаграмма I в нашем примере является переопределенной фермой; мы можем, например, ребро d удалить и направление в нем заменить внешними силами, приложенными к концевым точкам. *Поэтому, если мы нашли для переопределенной фермы состояние собственного напряжения, при котором она находится в равновесии, то отсюда (при удалении нескольких стержней переопределенной фермы) выводят заключение о напряжениях равновесия в некоторой определенной ферме, на которую действуют определенные внешние силы.*

Это и есть способ взаимных диаграмм в графической статике, возникающий из нуль-системы. Как этот метод применяется к отдельным определенным примерам, мы, конечно, здесь подробнее рассматривать не можем. В качестве нового учебника по этой ветви статики следует назвать „Лекции по графической статике“ Шура (F. Schur, Vorlesungen über graphische Statik, Лейпциг, 1915).

Вся эта теория дает нам здесь только пример того, что иногда фигуры на плоскости лучше изучать, если рассматривать их как проекции пространственной фигуры.

До сих пор мы говорили о *линейных точечных преобразованиях* и рассматривали, как с их помощью различные образы могут быть переведены друг в друга; далее мы говорили о „линейной теории инвариантов", задачей которой является нахождение таких свойств, которые остаются неизменными при линейных подстановках. Таким же образом мы обратимся теперь к общим отображениям.

§ 54. Общие аналитические точечные преобразования.

Рассмотрим теперь отображения, заданные формулами:

$$x' = \varphi(x, y, z),$$
$$y' = \psi(x, y, z),$$
$$z' = \chi(x, y, z).$$

Функции φ, ψ, χ будем предполагать *аналитическими* функциями, *которые в рассматриваемой части пространства являются регулярными.* Позднее мы будем, в частности, рассматривать *алгебраические* и *рациональные* подстановки и тогда, разумеется, не будем ограничиваться частью пространства, а будем рассматривать преобразование всего пространства. Диференцируя наши формулы, получим следующие уравнения:

$$dx' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$
$$dy' = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz,$$
$$dz' = \frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy + \frac{\partial\chi}{\partial z}dz.$$

Если точку x, y, z рассматривать как неподвижную и наше внимание направить на постоянные направлений dx, dy, dz, то мы увидим, что *эти последние претерпевают линейную подстановку.* Это предложение мы уже формулировали раньше в следующем виде: *в бесконечно малом всякая аналитическая подстановка является линейной.* Разумеется, это предложение справедливо только при некоторых ограничениях. Следует обратить внимание на ранг определителя подстановки, т. е. будет ли определитель подстановки последней системы уравнений отличен от нуля или не обращаются ли в нуль хотя бы один или несколько его первых миноров или вторых его миноров, или, наконец, по крайней мере сами элементы. В последнем случае, если все производные обращаются в нуль, вообще, не имеет смысла обрывать разложение в ряд Тейлора на первых членах, но следует перейти к членам высшего порядка. В этом случае предложение о линейном преобразовании в бесконечно малом теряет смысл.

Определитель подстановки последних формул (элементами которого являются частные производные функций φ, ψ, χ) обыкновенно называют

функциональным определителем или *определителем Якоби* (якобианом) функций φ, ψ, χ и, как правило, мы будем рассматривать только такие точки, в которых этот функциональный определитель отличен от нуля.

С помощью формул подстановок нашего общего вида для x', y', z' можно очевидно в малом каждую (регулярную) поверхность превратить во всякую другую поверхность, точно так же, как всякую (регулярную) кривую — во всякую другую. Следует только надлежащим образом выбрать функции φ, ψ, χ. Имеются ли такие образы, которые уже в малом имеют какие-нибудь инвариантные свойства при подобных общих подстановках? Достаточно только бросить один взгляд на дифференциальные уравнения и дифференциальные выражения, чтобы ответить утвердительно на этот вопрос.

Простейшими диференциальными выражениями являются *линейные* диференциальные выражения, даваемые для случая n переменных x_i формулой

$$\sum_1^n X_i\, dx_i,$$

в которой X_i могут быть произвольными функциями переменных x_i.

Подобное диференциальное выражение называют просто выражением Пфаффа, потому что приравненное нулю оно приводит к так называемой проблеме Пфаффа.

В соответствии с этим уравнение

$$\sum_1^n X_i\, dx_i = 0$$

называют *уравнением Пфаффа.*

Теперь направим наше внимание главным образом на то, *какие свойства выражений Пфаффа остаются инвариантными при совокупности точечных преобразований.*

Мы тотчас хотим добавить, что второй очень важный пример дадут нам квадратичные диференциальные выражения

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

в которых a_{ik} опять являются функциями x_i. Они играют очень важную роль во многих областях математики, как, например, в теории кривизны поверхностей, в неевклидовой геометрии и, наконец, в механике и в новейшей теории относительности Эйнштейна. Нам опять надо спросить себя: какие свойства подобных выражений остаются неизменными при произвольных точечных преобразованиях?

Чтобы говорить совершенно обще, мы получим таким образом *высшую теорию инвариантов*, в которой так же, как в обычной теории инвариантов линейных подстановок, мы можем различать *коварианты, просто инварианты, контраварианты.* Переменными, которые линейно преобразуются, являются теперь диференциалы dx_i. *Вследствие этого здесь в качестве ковариантов называют диференциальные выражения*

с одним или несколькими рядами переменных, например, dx_1, dx_2, ..., dx_n; δx_1, δx_2, ..., δx_n и т. д., *которые при произвольном точечном преобразовании находятся в неизменяющемся отношении к данному выражению. Напротив, инвариантами являются выражения, которые зависят только от самих переменных* x_i *и обладают свойством инвариантности. Наконец, контравариантами являются выражения такого же свойства, в которые входят частные производные* $d\varphi : dx_i$, $d\psi : dx_i$ *и т. д.* Именно таковые появляются вместо плоскостных координат u_i, как это показывает сравнение с контравариантами обычной теории инвариантов.

§ 55. Классификация выражений Пфаффа.

Начнем с выражения Пфаффа

$$\sum_1^n X_i\, dx_i;$$

здесь очень легко можно образовать ковариант. Будем исходить из вариации

$$\delta\Big(\sum X_i\, dx_i\Big) = \sum\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\, dx_i\, \delta x_k + \sum X_i \delta\, dx_i,$$

к которой мы присоединим другое уравнение, получающееся путем перестановки операций d и δ:

$$d\Big(\sum X_k\, \delta x_k\Big) = \sum_{i,k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\, dx_i\, \delta x_k + \sum X_i\, d\, \delta x_i.$$

Посредством вычитания обоих уравнений, если операции d и δ перестановочны друг с другом [1]), мы получим

$$\delta\Big(\sum X_i\, dx_i\Big) - d\Big(\sum X_k\, \delta x_k\Big) = \sum_{i,k} [i, k]\, dx_i\, \delta x_k,$$

где

$$[i, k] = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Это выражение

$$\sum_{i,k} [i, k]\, dx_i\, \delta x_k$$

является ковариантом выражения Пфаффа; мы его будем называть *„билинейным“*, *„косым“* ковариантом, так как, с одной стороны, дифференциалы dx_i и δx_k фигурируют как независимые переменные, а с другой стороны, для коэфициентов существует условие $[i, k] = -[k, i]$. Его инвариантность следует непосредственно из того, что наше новое выражение получено из выражения Пфаффа посредством вариирования (диференцирования) и потому, что вариирование имеет свое значение независимо от системы координат.

---

[1]) Именно, x_i, а следовательно, также и X_i можно рассматривать как функции двух переменных u, v и обозначать частную производную по u буквой d, а частную производную по v буквой δ.

На этом инварианте мы тотчас уясним себе, что никоим образом все выражения Пфаффа не могут быть переведены друг в друга посредством точечных преобразований; скорее между ними существуют инвариантные различия. Пусть, например, $\sum X_i\,dx_i$ является полным дифференциалом dF некоторой функции F; тогда должно иметь место

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0$$

для всех комбинаций i, k; с другой стороны, это условие одновременно является достаточным для того, чтобы заключить о наличии полного дифференциала. Но для нашего ковариант это означает тождественное обращение его в нуль. Очевидно, это имеет место не всегда. *В соответствии с этим выражения Пфаффа распадаются в зависимости от обращения или необращения в нуль нашего ковариант на такие, которые являются полным дифференциалом, и на такие, которые им не являются.*

Как же обстоит дело с дальнейшей классификацией выражений Пфаффа? Что касается общей теории, то следует назвать почти одновременные работы Ли и Фробениуса (Frobenius). Работа Ли находится в т. 2 норвежского архива математических и естественных наук (1877); работа Фробениуса находится в журнале Крелля, т. 82. Приведем без доказательства полученные там результаты в изложении Фробениуса. В этой работе выражение Пфаффа и его ковариант рассматриваются так, как будто бы дифференциалы в них являются переменными, а их коэфициенты являются постоянными. Тогда поступают в точности так же, как если бы имели перед собой алгебраические формы. *И вопрос о том, когда два выражения Пфаффа могут быть с помощью точечного преобразования переведены одно в другое, сводится к тому, что изучают, когда косая билинейная форма и линейная форма с постоянными коэфициентами могут быть переведены друг в друга с помощью линейного преобразования переменных.*

Следовательно и здесь линейная теория инвариантов дает окончательное решение.

Этот алгебраический вопрос приводит нас к следующему критерию: Прежде всего образуют *матрицу билинейной формы*

$$\begin{vmatrix} 0 & [1,2] & [1,3] \ldots [1,n] \\ [2,1] & 0 & [2,3] \ldots [2,n] \\ [3,1] & [3,2] & 0 \quad \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [n,1] & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

которую мы обозначим через A. Она является *косой* симметрической, так как симметричные относительно диагонали члены равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а диагональные члены равны нулю. Затем эту матрицу окаймляют коэфициентами X_i, не нару-

шая ее кососимметрического характера. Таким образом получают вторую матрицу

$$\begin{vmatrix} 0 & [1,2] \ldots [1,n] & X_1 \\ [2,1] & 0 \ldots \ldots & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [n,1] & \ldots \ldots 0 & X_n \\ -X_1 & -X_2 \ldots -X_n & 0 \end{vmatrix},$$

которую мы обозначим через B. Теперь речь будет итти о ранге этих матриц A и B. Именно, мы спросим себя, будет ли определитель тождественно равен нулю, и в случае утвердительного ответа, будут ли также все первые миноры обращаться тождественно в нуль и т. д.? При этом имеет место теорема теории определителей, *что у кососимметрической матрицы высший не обращающийся в нуль минор непременно будет четного порядка.* Порядок высшего не обращающегося в нуль минора, т. е. ранг матрицы, мы обозначим теперь для матрицы A через $2r$, причем $2r \leqslant n$. Тогда более подробное исследование показывает, что ранг матрицы, B будет равен $2r$ или $2r+2$. Образуем теперь из этих обоих характеристических для A и B чисел среднее арифметическое, которое будет равно $2r$ или $2r+1$.

Оказывается, что выражение Пфаффа в своем отношении к точечным преобразованиям полностью определяется посредством характера $2r$ *или* $2r+1$, *так что выражения с одним и тем же характером могут быть преобразованы друг в друга, но два выражения с различными характерами — никогда.*

Установим теперь для выражений Пфаффа определенного характера нормальные формы, именно, *изберем для характера* $2r$ *нормальную форму*

$$z_{r+1}\,dz_1 + \ldots + z_{2r}\,dz_r,$$

а для *характера* $2r+1$ *нормальную форму*

$$dz_0 + z_{r+1}\,dz_1 + \ldots + z_{2r}\,dz_r,$$

где, следовательно, фигурируют $2r$ *и* $2r+1$ *переменных.*

Подробнее:

Низшим характером, который вообще существует, является *характер* 1; он дает *нормальную форму* dz_0 и, следовательно, соответствует тому случаю, когда выражение Пфаффа является полным диференциалом. Затем идет характер 2; для него в качестве *нормальной формы* получается $z_2 dz_1$, которая, будучи умножена на $1:z_2$, переходит в форму предыдущего случая. Следовательно, характер 2 относится к тому случаю, когда выражение Пфаффа с помощью надлежащего множителя может быть превращено в полный диференциал. Но это можно тотчас обобщить.

Характер $2r$ *означает всегда, что выражение Пфаффа с помощью надлежащего множителя может быть превращено в некоторое другое выражение Пфаффа, принадлежащее к характеру* $2r-1$.

Если мы перейдем от выражения Пфаффа к уравнению Пфаффа, то прибавленный множитель не внесет никакого изменения: *поэтому, если дело идет об уравнениях Пфаффа, то характеры* $2r$ и $2r-1$ *дают одно и то же.*

Рассмотрим далее следующий пример. Напомним, что обычный линейный комплекс нуль-системы дается уравнением:

$$xy' - x'y + k(z - z') = 0.$$

Вследствие этого уравнения каждой точке ставится в соответствие плоскость, содержащая эту точку. Теперь положим: $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, ограничиваясь окрестностью точки x, y, z. Тогда мы получим уравнение $x\,dy - y\,dx - k\,dz = 0$ или, написав вместо x, y, z теперь x_1, x_2, x_3, уравнение $(-x_2)\,dx_1 + x_1 dx_2 - k\,dx_3 = 0$. Это и есть, как мы уже заметили, уравнение Пфаффа. В нем коэфициенты $-x_2, x_1, -k$ соответствуют нашим прежним обозначениям X_1, X_2, X_3. Образуем теперь для этого случая матрицы A и B. Тогда получим:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Сам определитель равен нулю; но мы еще имеем миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ +2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

так что ранг равен двум. Напротив, определитель матрицы будет равен:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & -x_2 \\ +2 & 0 & 0 & +x_1 \\ 0 & 0 & 0 & +k \\ +x_2 & -x_1 & -k & 0 \end{vmatrix} = 4k^2,$$

т. е. $|B|$ отличен от нуля и, следовательно, ранг равен $2r + 2 = 4$, что согласуется с нашим прежним утверждением. Если мы составим из обоих значений среднее арифметическое, то получим, что левая часть нашего уравнения Пфаффа имеет характер три. Но отсюда следует, что она может быть приведена к нормальной форме $dz_0 + z_2\,dz_1$; действительно, это легко удается, если мы напишем

$$d(-x_1x_2 - kx_3) + 2x_1 dx_2$$

и затем $d(-x_1x_2 - kx_3)$, $2x_1$, dx_2 соответственно обозначим через dz_0, z_2, dz_1.

То, что мы здесь наглядно видим для выражения Пфаффа с характером 3 в нуль-системе, к сожалению, не удается достигнуть таким же образом для уравнений Пфаффа с высшим характером

в обычной точечной геометрии нашего пространства; для этой цели придется перейти в высшее пространство или в качестве элемента взять вместо точки высший образ. Позднее для этого представится случай.

§ 56. Проблема Пфаффа.

В чем же заключается *проблема Пфаффа?* Мы видим в ней задачу интегрального исчисления, связанную с уравнением Пфаффа $\sum X_i dx_i = 0$. Геометрический смысл этого уравнения заключается в том, что каждой точке пространства в силу этого уравнения ставится в соответствие плоскость, проходящая через эту точку. Дело идет о том, чтобы точки пространства таким образом объединить в определенные многообразия, кривые, поверхности и т. п., чтобы в каждой своей точке они касались соответствующей плоскости. *В частности, проблема Пфаффа требует (если мы хотим сформулировать ее, охватив все случаи) определения многообразий высших размерностей, которые, обладая этим свойством, заполняют все n-мерное пространство.*

Сообщим теперь, сколь велика будет максимальная размерность этих искомых многообразий, которые мы назовем „интегральными многообразиями".

Максимальная размерность всегда равняется $n-r$ как для четного характера $2r$, так и для нечетного характера $2r-1$. (Поэтому мы можем, например, в случае линейного комплекса трехмерного пространства требовать только одномерных многообразий, т. е. интегральных кривых.)

Покажем теперь на нормальных формах выражений Пфаффа, что подобные интегральные многообразия действительно существуют, но ограничимся при этом случаем четного характера. Ведь случай нечетного характера $2r-1$ включается в предыдущий, так как выражение Пфаффа для $2r$ отличается от выражения Пфаффа для $2r-1$ только некоторым множителем. Рассмотрим уравнение:

$$z_{r+1}dz_1 + \ldots + z_{2r}\,dz_r = 0.$$

Оно дает различные серии интегральных многообразий, которые мы приведем по порядку.

1. Будем исходить из уравнения $f_1(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0$, где f_1 — произвольная функция. Высшие переменные должны относиться между собой, как частные производные f_1, т. е.

$$z_{r+1} : z_{r+2} : \ldots : z_{2r} = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} : \frac{\partial f_1}{\partial z_2} : \ldots : \frac{\partial f_1}{\partial z_r}.$$

Эти r уравнений очевидно удовлетворяют уравнению Пфаффа. Они определяют в пространстве R_n многообразие $n-r$ измерений.

2. Но можно также исходить из двух уравнений

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0,$$
$$f_2(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0,$$

и тогда положить

$$\rho z_{r+\nu} = \frac{\partial f_1}{\partial z_\nu} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_\nu},$$

где λ — новый произвольный параметр. Эти уравнения также дают образ $n-r$ измерений, удовлетворяющий уравнению Пфаффа, т. е. интегральное многообразие.

3. Продолжая таким образом, можем притти, наконец, к r уравнениям

$$f_1(z_1, \ldots, z_r) = 0; \quad f_2(z_1, \ldots, z_r) = 0; \quad \ldots, \quad f_r(z_1, \ldots, z_r) = 0$$

и тогда положить

$$pz_{r+v} = \frac{\partial f_1}{\partial z_v} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_v} + \mu \frac{\partial f_3}{\partial z_v} + \ldots,$$

где λ, μ, ... опять обозначают параметры.

Следовательно, все интегральные многообразия размерности $n-r$, встречающиеся при характере $2r$, подразделяются на r различных групп формул, если в основу положена нормальная форма выражений Пфаффа.

Надо себе представить, что все эти интегральные многообразия равноправны между собой и только различно ориентированы относительно переменных положенной в основу нормальной формы.

Новая работа, в которой излагается рассматриваемая проблема и ее дальнейшее развитие, принадлежит Гурса (E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Париж 1922). См. также Картана (E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Париж 1922).

§ 57. Введение квадратичных диференциальных форм Гауссом.

Вернемся теперь к *квадратичным диференциальным формам*

$$\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

а именно, изложим их теорию в ее последовательном историческом развитии.

Свое начало она берет для случая двух переменных в работе Гаусса (Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827). Способ введения квадратичных диференциальных выражений в этой работе легко понимаем. Координаты поверхности Гаусс полагает равными функциям двух параметров u, v; следовательно:

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$
$$z = \chi(u, v).$$

Если мы образуем диференциалы dx, dy, dz и затем составим из них квадрат элемента дуги поверхности, то получим

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

где E, F, G сокращенно обозначают:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Следовательно, квадрат элемента дуги является квадратичной формой диференциалов du, dv. В действительном и регулярном случае она будет положительно определенной. Диференциальное уравнение $ds^2 = 0$ определяет лежащие на поверхности *изотропные линии.*

Сюда примыкают дальнейшие исследования в двух направлениях.

a) Одну и ту же поверхность можно представить еще бесконечно многими другими способами с помощью двух параметров. Достаточно только положить $u_1 = f_1(u, v)$, $v_1 = f_2(u, v)$, а затем выразить координаты x, y, z через новые параметры u_1, v_1. При этом выражение для ds^2 перейдет в $E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2$. Возникает вопрос: что общего имеют обе эти формы для ds^2? Другими словами: какие свойства ds^2 остаются инвариантными при подобном преобразовании? В частности, как можно увидеть, что две подобные квадратичные формы можно перевести друг в друга с помощью надлежащего „точечного преобразования" $u_1 = f_1$, $v_1 = f_2$?

b) Второе направление исследований занимается вопросом, как много имеется поверхностей для одного и того же элемента дуги ds^2. Такие поверхности называют *изгибаемыми* друг на друга; одна получается из другой посредством простого *изгибания.*

Следовательно, в то время, как в пункте a) поверхность остается неизменной, а параметры u, v преобразуются, в пункте b) выражение для элемента дуги остается неизменным, а поверхности изменяют свой вид посредством изгибания. Разумеется здесь мы особенно интересуемся постановкой вопроса a).

Инварианты и коварианты, которыми обладает квадратичная, диференциальная форма $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ при произвольных преобразованиях переменных u, v, называют *инвариантами* и *ковариантами изгибания*, потому что они для всех поверхностей изгибания имеют то же самое значение, как и для первоначальной поверхности.

Результат работы Гаусса относительно постановки вопроса a) заключается в том, что Гаусс первый нашел важный инвариант изгибания, показав, что кривизна $K = 1 : \rho_1 \rho_2$ *может быть выражена через величины E, F, G и их производные первого и второго порядка по u, v.*

Что это выражение действительно является инвариантом, следует при таком выводе непосредственно из того, что оно имеет свое геометрическое значение независимо от параметров u, v. Если поверхность изгибается без растяжения, то, следовательно, кривизна K остается неизменной для всех точек. Это обстоятельство легко можно представить себе наглядно на модели поверхности из бумаги или тонкой жести[1]).

Как кривизна K выражается через E, F G и их производные, мы покажем позднее. Все же коротко следует указать на поверхности, имеющие во всех своих точках одну и ту же кривизну. *Оказывается, что все поверхности одной и той же постоянной кривизны в малом изгибаемы друг на друга и что, в частности, всякая поверхность*

[1]) Об открытии инвариантности кривизны K, так называемой „Theorema egregium", см. книгу Штеккеля, Гаусс как геометр (P. Stäckel, C. F. Gauss als Geometer, Лейпциг 1918).

постоянной кривизны изгибаема сама на себя (с тремя степенями свободы), как мы это знаем о плоскостях и сферах, которые дают простейший пример подобных поверхностей. Само собой понятно, что постоянство кривизны является также *необходимым* условием для этого изгибания на себя.

§ 58. Дифференциаторы Бельтрами.

Мы будем теперь говорить о простейших величинах изгибания, введенных в науку Бельтрами (E. Beltrami род. в 1835 г. в Кремоне, умер в 1900 г. в Риме)[1]) в неоднократно цитированной работе: Ricerche di analisi applicata alla geometria в Giornale di Matematiche, т. 2, 3 (1864, 65); Opere, 1, стр. 107. Об этих исследованиях по случаю выхода 1 тома Math. Annalen (1869) сам Бельтрами написал обзор „О теории кривизны".

Прежде всего Бельтрами устанавливает два контравариантa изгибания, которые он называет *дифференциальными параметрами* (лучше сказать *„дифференциаторами"*), т. е. выражения, в которые входят частные производные некоторой функции $\Phi(u, v)$. В этом он следует Ламэ, который уже прежде рассматривал эти величины для случая трехмерного элемента дуги $dx^2 + dy^2 + dz^2$, как мы сейчас еще упомянем.

Оба эти дифференциатора Бельтрами, которые он обозначил через $\Delta_1\Phi$ и $\Delta_2\Phi$, где Φ — какая-нибудь функция параметров u, v, определяются следующим образом:

$$\Delta_1\Phi(u, v) = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & \Phi_u \\ F & G & \Phi_v \\ \Phi_u & \Phi_v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

и

$$\Delta_2\Phi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\Phi_u - F\Phi_v}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\Phi_v - F\Phi_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\}.$$

При этом, например, Φ_u обозначает $\partial\Phi : \partial u$. Первое уравнение подчиняется просто обозреваемому закону образования, в то время как второе уравнение построено сложнее. Утверждается, что оба эти выражения Δ_1 и Δ_2 являются контравариантными, т. е. они имеют значение независимо от выбора параметров u, v.

Будем считать их инвариантность доказанной и спросим себя об их значении. Что касается $\Delta_1\Phi$, то мы рассмотрим на поверхности систему кривых, определяемую условием $\Phi = \text{const}$. Если, затем, считать эту постоянную за один параметр, а длину дуги кривой за второй параметр вместо u и v, то уравнение, определяющее $\Delta_1\Phi(u, v)$, перейдет (после простого вычисления) в $\Delta_1\Phi = \Phi_n^2$, где под $\Phi_n = \partial\Phi : \partial n$ понимается производная в направлении нормали кривой $\Phi = \text{const}$ на поверхности.

Следовательно, первый дифференциатор дает квадрат величины, которую называют „падением" функции Φ в соответствующем месте.

[1]) См. E. Beltrami, Opere matematiche, том, 1—3, Милан 1902—1911; некролог, написанный Кремоной в т. I.

Если положить $\Delta_1\Phi = 1$, то получим, в частности, такое семейство кривых, которое всюду имеет „падение", равное единице; такие кривые называют *кривыми-параллелями*, так как ведь две соседние кривые $\Phi = C$ и $\Phi = C + dC$ вдоль всего их протяжения имеют друг от друга постоянное расстояние dC.

Не так просто значение диференциатора $\Delta_2\Phi$. Поэтому мы не будем входить в подробности, а удовольствуемся следующим определенным предложением: $\Delta_2\Phi = 0$ *является дифференциальным уравнением с частными производными потенциала функции на поверхности* [1]).

С помощью диференциальных параметров $\Delta_1\Phi$ и $\Delta_2\Phi$ Бельтрами овладел всей геометрией на кривых поверхностях, поскольку она зависит только от ds^2, т. е. является общей всем поверхностям изгибания. Приведем несколько примеров.

а) Предположим, что мы нашли решение уравнения $\Delta_1\Phi = 1$ с произвольным параметром λ, следовательно $\Phi(u, v; \lambda)$. Дадим тогда параметру два бесконечно близкие значения λ и $\lambda + d\lambda$ и рассмотрим оба семейства кривых $\Phi(\lambda) = C$ и $\Phi(\lambda + d\lambda) = C + dC$, отдельные кривые которых, разумеется, бесконечно мало отличаются друг от друга. Если разложить $\Phi(\lambda + d\lambda) = C + dC$ по степеням $d\lambda$ и оборвать ряд на члене с $d\lambda$, то вместо только что приведенных получатся следующие два уравнения: $\Phi = C$ и $\delta\Phi : \delta\lambda = C_\lambda$, где C_λ обозначает новую постоянную. Геометрическое место точек пересечения соответствующих кривых из обоих семейств $\Phi(\lambda) = C$ и $\Phi(\lambda + d\lambda) = C + dC$ дается здесь последним уравнением $d\Phi : d\lambda = C_\lambda$. Мы утверждаем: *этим геометрическим местом является геодезическая линия и посредством изменения обоих параметров* λ *и* C_λ *можно получить все достаточно близкие геодезические поверхности.* Разумеется, при этом предполагается, что $\Phi(u, v; \lambda)$ содержит параметр λ не аддитивно, следовательно Φ не имеет вида $\Phi = \Phi(u, v) + g(\lambda)$.

Мы набросаем вкратце доказательство этого важного предложения, которое, в частности, находит свое применение в механике.

Следовательно, надо показать, что кривые, удовлетворяющие уравнению $\Phi_\lambda(u, v, \lambda) = \text{const}$, являются геодезическими. Возьмем постоянное значение λ и покажем, что кривые $\Phi_\lambda = \partial\Phi : \partial\lambda = \text{const}$ пересекают ортогонально семейство кривых-параллелей $\Phi = \text{const}$ для того же самого значения λ. По предположению:

$$\Delta_1\Phi(u, v; \lambda) = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & \Phi_u \\ F & G & \Phi_v \\ \Phi_u & \Phi_v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = 1,$$

а отсюда следует после частного диференцирования по λ

$$\frac{\begin{vmatrix} E & F & \Phi_{\lambda u} \\ F & G & \Phi_{\lambda v} \\ \Phi_u & \Phi_v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \Delta_1(\Phi, \Phi_\lambda) = 0.$$

[1]) См., например, Б л я ш к е, Диференциальная геометрия, том I, изд. ОНТИ, М. — Л. 1935, §§ 79 — 81.

Но значением этого инвариантного соотношения как раз и является ортогональность семейств кривых $\Phi = \text{const}$ и $\Phi_\lambda = \text{const}$. Именно, инвариантность соотношения $\Delta_1(\Phi, \Phi_\lambda) = \text{const}$ следует просто из того, что „смешанный диференциатор“ $\Delta_1(\Phi, \Phi_\lambda)$ является полярным образованием от $\Delta_1(\Phi)$. Если, далее, ввести на мгновение, например, ортогональные параметры Φ, Ψ вместо u, v, то из нашего уравнения, если положить $ds^2 = E^* d\Phi^2 + G^* d\Psi^2$, следует:

$$\begin{vmatrix} E^* & 0 & \Phi_{\lambda\Phi} \\ 0 & G^* & \Phi_{\lambda\Psi} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или $\Phi_{\lambda\Phi} = 0$, или, наконец, $\Phi_\lambda = f(\Psi)$, в чем и заключается утверждаемая ортогональность. В новых параметрах Φ, Ψ инвариантное уравнение $\Delta_1\Phi = 1$ принимает вид $E^* = 1$, т. е. наш элемент дуги имеет форму Гаусса $ds^2 = d\Phi^2 + G^* d\Psi^2$, из которой параметрические линии $\Psi = \text{const}$, или что то же, $\Phi(\lambda) = \text{const}$, определяются как геодезические линии.

b) Дальнейшее применение диференциаторов заключается в следующем: если на поверхности задана произвольная кривая, то говорят о *„геодезической кривизне“* в произвольной точке кривой. Под этим понимают обычную кривизну плоской кривой, которая получается с помощью ортогональной проекции кривой, лежащей на поверхности, на касательную плоскость в соответствующей точке. Для этой геодезической кривизны кривых $\Phi = \text{const}$ Бельтрами получил:

$$\frac{1}{\Gamma} = -\frac{\Delta_2\Phi}{\sqrt{\Delta_1\Phi}} - \Delta_1\left(\Phi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\Phi}}\right).$$

В ней

$$\Delta_1(\Phi, \Psi) = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & \Phi_u \\ F & G & \Phi_v \\ \Psi_u & \Psi_v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

обозначает опять „смешанный“ первый диференциатор, который возникает из первого путем полярного образования.

c) Далее, в качестве формулы для гауссовой кривизны в некоторой точке поверхности, получается

$$K = 3(\Delta_2 \log \rho)_{\rho=0},$$

где под ρ понимается геодезическое расстояние, измеренное от точки поверхности.

Подобным образом овладевают с помощью диференциаторов различными величинами, не изменяющимися при изгибании поверхности. В самом деле, рассмотренные нами выражения остаются инвариантными при изгибании, так как они определяются инвариантным образом.

Перенесем теперь определение диференциаторов Δ_1 и Δ_2 на случай более высоких размерностей. Пусть вместо параметров u, v имеется n переменных x_i. Тогда, если

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

то $\Delta_1\Phi$ будет определяться так:

$$\Delta_1\Phi = -\frac{\begin{vmatrix} a_{ik} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_k} & 0 \end{vmatrix}}{|a_{ik}|},$$

т. е. в знаменателе этого выражения стоит определитель из коэфициентов нашей квадратичной формы, в то время как определитель, стоящий в числителе, получается из предыдущего путем окаймления частными производными функции Φ. Каким образом обобщается диференциатор Δ_2, мы здесь рассматривать не станем, так как формулы получаются слишком запутанными. Вместо этого мы сделаем некоторые исторические замечания.

Прежде всего, упомянем о работе Ламэ „Криволинейные координаты", в которой исследуется обычное пространство с его прямыми в качестве геодезических линий. Ламэ вводит там произвольные криволинейные координаты, т. е. он полагает $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, причем всюду предпочитает ортогональные координаты. Тогда квадрат элемента дуги $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ превращается в некоторую квадратичную форму от du, dv, dw. Относительно нее Ламэ устанавливает диференциаторы Δ_1 и Δ_2. *Исследования Ламэ появились раньше исследований Бельтрами, но они менее общи, потому что его квадратичные формы по своему происхождению очень специальны, именно посредством повторного введения x, y, z могут быть приведены к виду $dx^2 + dy^2 + dz^2$.* Совершенно общее рассмотрение с n переменными дал Бельтрами в 1868 г. в Memorie di Bologna, 2 серия, 8 том, в работе Sulla teorica generale dei parametri differenziali; Opere II, стр. 74.

При этом Бельтрами замечает, что таким образом обобщенная теория совершенно непосредственно получается в механике, в так называемой *теории Гамильтона.* Что касается этой связи, то мы все же установим ее основные пункты с помощью некоторых предложений.

Оказывается, что в обычных задачах механики центральное положение занимает некоторая квадратичная форма от n переменных. При этом n означает число степеней свободы, которой обладает механическая система. Если мы будем считать эту квадратичную форму за квадрат (ds^2) линейного элемента n-мерного пространства, то можно показать, что геодезические линии этого пространства являются образом движения нашей механической системы, т. е. образом различных состояний, которые пробегает наша система в течение времени. Диференциальное уравнение с частными производными $\Delta_1\Phi = 1$, с помощью которого можно ранее указанным способом определить геодезические

линии, о которых идет речь, является как раз дифференциальным уравнением с частными производными, введенным в механику Гамильтоном.

Приведем теперь еще некоторые сюда относящиеся формулы. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — общие или, как говорят в механике, „обобщенные" координаты системы. Живая сила T будет тогда равна

$$T = \sum c_{ik} q_i' q_k',$$

т. е. квадратичной форме от производных q_i по времени. Предположим теперь для системы справедливость закона сохранения энергии, который мы возьмем в форме: кинетическая энергия + потенциальная энергия = const, или в буквах: $T + U = h$. Тогда квадратичная форма, которую мы истолковываем как ds^2, примет следующий вид [1]):

$$ds^2 = \sqrt{h - U}\left(\sum c_{ik}\, dq_i\, dq_k\right) = \sum \left(\sqrt{h - U}\, c_{ik}\, dq_i\, dq_k\right).$$

Резюмируем наши последние рассмотрения.

Теория квадратичных дифференциальных форм, как это видно из предыдущего, находит себе применение в трех областях:

a) В теории инвариантов изгибания поверхностей.

b) В теории криволинейных координат на плоскости и в пространстве, как она употребляется в математической физике.

c) В механике, которую при этом можно рассматривать как геометрию в n-мерном пространстве.

§ 59. Пространство Римана.

Обратимся теперь *к перенесению теории кривизны на многообразие n переменных.* В этом направлении имеются две работы Римана (B. Riemann, 1826-66), которые были опубликованы только после его смерти. Эти работы стали в настоящее время особенно важными, так как они образуют геометрическую основу для теории относительности Эйнштейна.

a) Диссертация: „О гипотезах, лежащих в основе геометрии" (Ges. Werke, № XIII). Она была написана в 1854 г., а впервые опубликована в 1867 г. в Göttinger Abhandlungen, т. 13 [2]). Здесь Риман дает только общие рассмотрения, но еще не приводит формул.

b) Это исследование проведено затем в так называемой „Парижской работе на премию", относящейся к 1861 г.; она имеется в Ges. Werke под № XXII, снабженная длинным комментарием Г. Вебера. 1858 г. Парижская академия выдвинула для разработки вопрос о теплопроводности. Риман показал, что при решении этой задачи приходится иметь дело с известными случаями квадратичных дифференциальных форм от трех переменных и набросал общую теорию этих дифференциальных форм. Но так как он дал результат без точного доказательства его вывода, то премии Парижский Факультет ему не присудил.

---

[1]) Основы механики имеются, например, в книге Уиттекера, Аналитическая динамика, ОНТИ, М. — Л. 1937.

[2]) Вновь переиздана с комментариями Г. Вейлем, Берлин 1919.

Чтобы показать, как Риман перенес гауссову кривизну на произвольные квадратичные диференциальные формы $\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$, мы прежде всего скажем об известных диференциальных ковариантах, образованных Риманом. Они являются функциями второй степени миноров $(dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k)$, где dx и δx обозначают два произвольных направления, исходящих из некоторой точки пространства R_n. Напомним, что формы первой степени подобных определителей мы уже имели при рассмотрении линейных диференциальных выражений $\sum X_i\,dx_i$, т. е. в теории проблемы Пфаффа. Там мы образовали ковариант

$$\sum\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_i\,dx_k,$$

в котором выражение в скобках мы обозначили через $[i, k]$. Но здесь оба члена $[l, k]$ и $[k, i]$ можно соединить, тогда мы получим форму:

$$\sum [i, k]\,(dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k).$$

Что означают геометрически миноры $dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k$? Прежде, в обычном пространстве, мы образовали матрицу из однородных координат двух точек x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3, y_4 и ввели, в качестве координат их соединяющей прямой, миноры второго порядка; следуя Грассману, мы распространили этот метод на произвольные пространства. Здесь мы поступим аналогично. Пусть даны оба направления:

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n \quad \text{и} \quad \delta x_1,\ \delta x_2,\ \ldots,\ \delta x_n.$$

Линейным образом, их соединяющим, здесь является „пучок“ направлений, однородными координатами которого тогда как раз и будут определители $dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k$. Поэтому впредь мы будем называть $(d\delta)_{ik}$ *„координатами пучка“*, а построенные из таких определителей коварианты *„ковариантами пучка“*.

Прежде всего Риман строит два таких коварианта пучка к заданной квадратичной форме. Первый дается:

$$B = \sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k \sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k - \left(\sum a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k\right)^2,$$

или соответственно преобразовывая, чтобы выделить малые определители,

$$B = \sum (a_{ik}\,a_{i'k'} - a_{ik'}\,a_{i'k})\,(dx_i\,\delta x_{i'} - \delta x_i\,dx_{i'})\ (dx_k\,\delta x_{k'} - \delta x_k\,dx_{k'}).$$

Чтобы составить второй ковариант, мы введем сначала следующие сокращенные обозначения:

$$p_{ikl} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$$

и

$$[ik, lm] = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} (p_{\mu km}p_{\nu il} - p_{\mu im}p_{\nu kl})\frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta} + \\ + \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_k\,\partial x_m} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial x_i\,\partial x_l} - \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial x_k\,\partial x_l} - \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_i\,\partial x_m},$$

где Δ обозначает определитель $|a_{ik}|$ из коэфициентов нашей квадратичной формы, $\Delta_{\mu\nu}$ — минор, соответствующий элементу $a_{\mu\nu}$. Тогда второй риманов ковариант пучка будет:

$$A = -\frac{1}{2}\sum [ik, lm]\,(d\delta)_{ik}\,(d\delta)_{lm},$$

где $(d\delta)$ обозначает малый определитель из dx и δx.

Наконец, в качестве аналога введенной Гауссом кривизны, Риман рассматривает частное обоих ковариантов A и B пучка $K = \frac{A}{B}$.

Посмотрим, что получится из выражения $A:B$ для $n = 2$? В этом случае мы будем иметь только единственный определитель $(d\delta)_{12}$; A и B сводятся к одному члену, содержащему в качестве множителя квадрат этого $(d\delta)_{12}$. Поэтому в их частном этот квадрат выпадает и выражение $A:B$ действительно сводится к *чистому инварианту. Этот инвариант, если сравнить формулы, как раз совпадает с формулой гауссовой кривизны.*

Теперь интересно подробнее проследить, каким образом Риман образовал общую формулу меры кривизны. От точки x пространства R_n проводятся два направления dx и δx, которые определяют плоский пучок направлений. Риман строит для каждого такого пучка двумерное многообразие, состоящее из геодезических линий, которые в своем первом элементе определяются направлениями пучка. При этом вообще сами геодезические линии определяются тем условием, что первая вариация интеграла $\int ds$ должна обращаться для них в нуль. *Риманова кривизна K, зависящая от координат пучка в нулевой степени (в числителе и в знаменателе во второй степени), является не чем иным, как гауссовой кривизной K, вычисленной в точке x для двумерного геодезического многообразия, которое мы ввели.*

Ясно, что это K совершенно не зависит от системы координат. Действительные вычисления, приводящие к только что сформулированному результату, являются, конечно, очень хлопотливыми. Позднее (стр. 326) мы рассмотрим новое направление, которое дал Леви-Чивита этой теории.

Но мы еще здесь познакомимся с тем, какие специальные рассмотрения Риман связывал со своей формулой. *Под многообразием постоянной кривизны понимают, следуя Риману, такое многообразие, для которого выходящее в произвольном направлении из произвольной точки x пространства R_n геодезическое многообразие всегда имеет одну и ту же гауссову кривизну, для которого, следовательно, коварианты A и B являются пропорциональными.* В это понятие многообразия постоянной кривизны включается, в частности, *многообразие обращающейся в нуль кривизны.* Примером его является *обычное евклидово пространство* трех и большего числа измерений, где ds^2 можно придать вид:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2.$$

Обратно можно показать: коль скоро $K = 0$, т. е. A является тождественно нулем, то ds^2 можно всегда придать эту форму, так что

в случае обращающейся в нуль кривизны, в малом мы всегда имеем евклидово пространство.

Дальше можно сказать, что многообразие постоянной меры кривизны, вообще, в малом полностью определяется значением K, т. е. что в этом случае посредством надлежащего выбора координат можно линейному элементу придать такую форму, в которую кроме числовых коэфициентов входит еще только значение K. Как поверхность постоянной кривизны можно „сдвигать" по самой себе, так же, вообще, можно „передвигать" по себе без изменения метрических соотношений многообразие постоянной кривизны, в частности, евклидово пространство n измерений, т. е. многообразие, обращающейся в нуль меры кривизны, причем это „движение" зависит еще от $n(n+1):2$ существенных параметров, так как общая точка и n попарно ортогональных направлений, проходящих через нее, могут быть переведены в любое, наперед заданное, положение. Различие между случаями $K=0$ и $K \neq 0$ совершенно аналогично различию между сферой и плоскостью, которые также доставляют такую же возможность движений. Этим замечанием мы примыкаем к лекциям Клейна по неевклидовой геометрии.

§ 60. Дальнейшая литература о квадратичных дифференциальных формах.

Расскажем теперь о работах Кристоффеля и Липшитца, относящихся к квадратичным дифференциальным формам. Кристоффель опубликовал свои исследования в журнале Крелля, т. 70 (1869), Липшитц в том же журнале, т. 70, 71, 72, 74, 78.

Кристоффель и Липшитц разрабатывали в то время еще мало известные исследования Римана и, во-первых, подтвердили результаты Римана, а, во-вторых, прибавили от себя новые диференциаторы и пр. В частности, *Кристоффель исследовал вопрос о том, когда две квадратичные диференциальные формы являются эквивалентными* и нашел, что это сводится к тому, чтобы исследовать эквивалентность известных алгебраических форм в смысле линейной теории инвариантов. Соответствующий результат мы уже упоминали в случае выражений Пфаффа. *Из обоих примеров (выражений Пфаффа и квадратичных диференциальных форм) следует, что в конце концов теория инвариантов группы всех аналитических точечных преобразований опять-таки сводится к задачам линейной теории инвариантов.*

О новейшем дальнейшем развитии геометрических идей Римана см. стр. 326 и след.

Прибавим еще некоторые замечания *к обычной теории поверхностей.*

Мы положили: $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$. $z=\chi(u, v)$ и вычислили $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$, где E, F, G сокращенно обозначают известные выражения. E, F, G называют также *фундаментальными величинами первого порядка теории поверхностей*, так как они составлены из первых производных. *Все же рассмотрения диференциальной формы ds^2 дают только некоторую часть из всей теории поверхностей, именно совокупность свойств, которые заданная поверхность*

имеет общими со всеми поверхностями, получаемыми из нее путем изгибания.

Что же надо добавить, чтобы овладеть общей теорией, т. е. всеми свойствами отдельных поверхностей? В этом отношении уже со времен Гаусса привыкли рассматривать фундаментальные величины второго порядка:

$$D = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$D' = A\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$D'' = A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

A, B, C обозначают косинусы углов, образованных нормалью поверхности с координатными осями; следовательно:

$$A = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

и аналогично для B и C.

Теперь образуем новую диференциальную форму:

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = d\sigma^2.$$

Она оказывается равной $(ds:\rho)^2$, где ρ — радиус кривизны нормального сечения в точке поверхности u, v, определяемой диференциалами du, dv.

Когда же $d\sigma = 0$? Уравнение $d\sigma = 0$ дает асимптотические кривые, так как для соответствующих направлений $\rho = \infty$. Можно было бы подумать, что $d\sigma = ds:\rho$ будет также равно нулю и для $ds = 0$, т. е. для изотропных кривых на поверхности, но это неверно, так как для них ρ также будет равно нулю, как это легко проверить.

Далее выяснилось, что посредством обоих диференциальных форм ds^2 и $d\sigma^2$ полностью определяется вид поверхности, при этом, однако, ds^2 и $d\sigma^2$ не могут быть взяты независимо друг от друга, а должны быть связаны диференциальными уравнениями Майнарди и Кодацци.

В этих фактах мы имеем основы, на которых строится большинство новых изложений теории поверхностей. В них более или менее явно спрашивается о свойствах совместных диференциальных форм ds^2 и $d\sigma^2$, остающихся неизменными при каких-либо точечных преобразованиях u, v. С этой исходной точкой быть может связано то, что в большинстве этих книг на идеи Ли, которые мы здесь развиваем в первую очередь, обращается мало внимания; мы имеем в виду такие вещи, как отношение между геометрией прямых линий и геометрией сфер, общую теорию преобразований прикосновения, не говоря уже о теории групп преобразований.

В заключение можно еще отметить, что учение о квадратичных диференциальных выражениях находит своеобразное геометрическое применение в *исследованиях Кенигса по геометрии прямых линий.* См. Диссертацию Кенигса, 1882: Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé; далее, G. Koenigs, La géométrie réglée et ses applications,

Париж 1895 г. Кенигс исходит из того, что бесконечно малый „момент" двух соседних прямых r, s, ρ, σ и $r+dr$, $s+ds$, $\rho+d\rho$, $\sigma+d\sigma$ (если пользоваться обычными неоднородными координатами Плюкера) дается выражением

$$\frac{dr\cdot ds-ds\cdot d\rho}{1+r^2+s^2}$$

и затем применяет к этому выражению общую теорию квадратичных диференциальных форм. Впрочем эти его результаты отчасти были уже опубликованы А. Фоссом в Göttinger Nachrichten в 1875 г. Дальнейшие геометрические применения квадратичных, а также кубических, диференциальных форм можно найти, например, в указанной на стр. 179 литературе по проективной и аффинной диференциальной геометрии.

Этим мы заканчиваем наше рассмотрение точечных преобразований произвольного аналитического характера; следует еще только рассмотреть особо *алгебраические* точечные преобразования.

§ 61. Кремоновы преобразования.

Как мы уже раньше сказали, теперь, при рассмотрении *алгебраических* точечных преобразований, мы будем принимать во внимание преобразование *всего* пространства. В частности здесь будет рассматриваться важный вопрос о том, существуют ли такие преобразования, которые каждой точке одного (n-мерного) пространства ставят в соответствие, *вообще говоря, одну и только одну* точку другого пространства и наоборот. Разумеется линейные преобразования тотчас же дают пример преобразований, удовлетворяющих этому требованию. Пусть имеем:

$$x'=\varphi(x,\ y,\ z),$$
$$y'=\psi(x,\ y,\ z).$$
$$z'=\chi(x,\ y,\ z).$$

Если теперь φ, ψ, χ будут однозначными алгебраическими функциями, равно как и функции, получающиеся при разрешении этих уравнений относительно x, y, z (которые, следовательно, дают зависимость переменных (x, y, z от x', y', z'), то вообще мы будем иметь дело с „рациональными" функциями и в соответствии с этим будем называть подобные преобразования *бирациональными. Существуют ли еще другие бирациональные преобразования в пространстве R_n кроме линейных преобразований?*

Легко видеть, что в случае $n=1$ получается: *в одномерном пространстве не существует (как это следует из основных теоретико-функциональных предложений) никаких других бирациональных преобразований, кроме линейных преобразований*, как мы на это уже указывали раньше (стр. 156).

Иначе обстоит дело в случае $n=2$. Мы должны здесь назвать две работы Кремона во 2-м и 5-м томах 2-й серии Memorie di Bologna (1863 и 1865)[1]), в которых он, вообще, занимается бирациональными

[1]) L. Cremona, Opere, том 2, стр. 54 и 193.

преобразованиями на плоскости. По этим исследованиям рассматриваемые преобразования называют также *кремоновыми преобразованиями*. Более обстоятельное изложение этих вещей можно найти, например, у Клебш-Линдемана, т. I (1876), стр. 474 и след. Разумеется еще и до Кремона рассматривали примеры подобных преобразований. Первым таким примером является, повидимому, *квадратичное преобразование плоскости*, которое рассматривалось Плюкером в журнале Крелля, т. 5 (1830); см. также Plückers Abhandlungen (1895), стр. 132. Это преобразование определяется следующими формулами, в основу которых положен произвольный координатный треугольник:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

Мы тотчас видим, что и обратно:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'};$$

следовательно, преобразование действительно бирационально и притом имеет *инволюционный* характер, так как соответствие между точками взаимно. Это преобразование можно представить также и в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_2 x_3, & \sigma x_1 &= x_2' x_3', \\ \rho x_2' &= x_3 x_1, \quad \text{и} & \sigma x_2 &= x_3' x_1', \\ \rho x_3' &= x_1 x_2 & \sigma x_3 &= x_1' x_2', \end{aligned}$$

где ρ и σ — множители пропорциональности. Как раз благодаря этому представлению и говорят о *квадратичных преобразованиях*, так как x' пропорциональны квадратичным выражениям, составленным из x и наоборот. Посмотрим теперь, во что переходят вершины координатного треугольника. Пусть, например, $x_1 = 0$; тогда будет $x_2' = 0$ и $x_3' = 0$, т. е. каждой точке стороны $x_1 = 0$ будет соответствовать противолежащая вершина координатного треугольника и наоборот. Следовательно, при таком преобразовании, которое, вообще говоря, является однозначным, существуют *три „фундаментальные точки" и три „фундаментальные прямые"*, именно вершины и стороны треугольника: *каждой вершине соответствуют все точки противолежащей стороны и наоборот*. Аналогичное обстоятельство, именно, что отдельной точке может соответствовать бесчисленное множество точек, нам уже встречалось при стереографическом проектировании гиперболоида на плоскость, так что это обстоятельство никоим образом не является для нас новым. Если наряду с линейными преобразованиями будут существовать еще другие бирациональные преобразования, то это может произойти только в случае наличия указанного обстоятельства.

Рассмотрим теперь какую-нибудь прямую $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$. Так как она пересекает каждую из сторон координатного треугольника, то преобразованная кривая должна проходить через три его вершины.

И в самом деле, это видно из уравнения преобразованной кривой $u_1x_2'x_3' + u_2x_3'x_1' + u_3x_1'x_2' = 0$, которое изображает некоторое коническое сечение, проходящее через вершины координатного треугольника. Соответствующий факт имеет место для *кривой n-го порядка. Именно, оно, вообще говоря, переходит в кривую* C_{2n} *с тремя n-кратными точками в вершинах координатного треугольника.*

Далее, если мы вновь подвергнем кривую C_{2n} нашему преобразованию, то опять-таки должна получиться первоначальная кривая. Как же это происходит, что получается не кривая $4n$-го порядка? *Пусть дана кривая n-го порядка, которая проходит через три вершины координатнаго треугольника, соответственно* α_1, α_2 *и* α_3 *раз.* Тогда она при нашем преобразовании действительно превратится в некоторую кривую $2n$-го порядка. Но вершина A треугольника превращается в противолежащую сторону $x_1 = 0$ и притом взятую α_1 раз; аналогичное имеет место для вершин B и C. Эти прямые мы, разумеется, не будем причислять к преобразованной кривой. Поэтому, если мы удалим из этой последней три стороны треугольника, взятые с кратностями α_1, α_2, α_3, то оставшаяся преобразованная кривая будет иметь порядок $n' = 2n - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. Сколь же часто, наоборот, преобразованная кривая будет проходить через вершины A, B, C? Если мы опять вспомним, что, например, те из n точек пересечения прямой $x_1 = 0$ с данной кривой C_n, которые находятся в вершинах B и C, не причисляются в указанном смысле к преобразованной кривой, то мы найдем следующие формулы для чисел, показывающих сколько раз кривая проходит через вершины A, B и C:

$$\alpha_1' = n - \alpha_2 - \alpha_3,$$
$$\alpha_2' = n - \alpha_3 - \alpha_1,$$
$$\alpha_3' = n - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Инволюционный характер соответствия между кривыми C_n и C_n' выражается, как это и должно быть, в строении полученных формул, так как эти последние симметричны в буквах со штрихом и без штриха. Прекрасным упражнением будет проследить на примерах за квадратичным преобразованием, например, за тем, как коническое сечение превращается в кривую C_4 и т. п. Но время не позволяет нам на этом дольше останавливаться. Еще следует указать на тесную связь, которая существует между квадратичным преобразованием и преобразованием обратными радиусами. Это последнее в прямоугольных координатах задается формулами:

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Произведем над ними еще небольшое видоизменение, именно, заменим y через $-y$; это означает простое зеркальное отображение плоскости относительно оси x. Тогда из полученных формул можно образовать следующие формулы:

$$x' + iy' = \frac{1}{x+iy} \quad \text{и} \quad x' - iy' = \frac{1}{x-iy}.$$

Положим:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau},$$

и аналогично:

$$x' = \frac{\xi'}{\tau'} \quad \text{и} \quad y' = \frac{\eta'}{\tau'};$$

тогда

$$\frac{\xi' + i\eta'}{\tau'} = \frac{\tau}{\xi + i\eta} \quad \text{и} \quad \frac{\xi' - i\eta'}{\tau} = \frac{\tau'}{\xi - i\eta}$$

или иначе

$$(\xi' + i\eta') : (\xi' - i\eta') : \tau' = \frac{1}{\xi + i\eta} : \frac{1}{\xi - i\eta} : \frac{1}{\tau}.$$

Но это в точности формулы квадратичного преобразования, нам нужно только для $\xi' \pm i\eta'$, τ' и для $\xi \pm i\eta$, τ ввести обозначения x_i' и x_i. Так как, далее, $\xi \pm i\eta = 0$ являются прямыми, выходящими из нулевой точки к обеим абсолютным точкам, и $\tau = 0$ представляет несобственную прямую, то мы получаем следующий окончательный результат:

Если соединить преобразование обратными радиусами с изменением знака y, т. е. с зеркальным отображением относительно оси x, то мы получим специальный случай нашего квадратичного преобразования, который характеризуется тем, что две вершины фундаментального треугольника переходят в абсолютные точки.

Применим теперь это специальное преобразование к упомянутым ранее циклическим кривым четвертого порядка, т. е. к кривым четвертого порядка, для которых обе абсолютные точки являются двойными точками. Для них $n = 4$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$; что же касается α_1, то оно равно 1 или 0 в зависимости от того, взято ли начало координат на кривой или же нет. Тогда в силу преобразования возникает некоторая кривая C_n', для которой:

$$n' = 4 - 0 \quad \text{или} \quad 4 - 1, \quad \alpha' = 0, \quad \alpha_2' = \alpha_3' = 2 - 0 \quad \text{или} \quad 2 - 1,$$

т. е. если центр инверсии не лежит на циклической кривой, то мы получаем при инверсии опять-таки циклическую кривую четвертого порядка. Если же, напротив, заданная циклическая кривая проходит через центр инверсии, то мы получаем кривую C_3, проходящую однократно через обе абсолютные точки.

Наконец, мы можем еще рассмотреть особый случай, когда циклическая кривая четвертого порядка имеет в *центре инверсии даже двойную точку*; тогда $\alpha_1 = 2$, а $n' = 2$ и $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 0$, т. е. преобразованная кривая является коническим сечением, не проходящим через абсолютные точки.

Что касается *кремоновых* преобразований, то мы должны еще упомянуть о важной теореме, установленной одновременно (1870/71) Клиффордом (в личном сообщении Клейну), Нетером (Noether, Annalen, т. 3) и Розанесом (Rosanes, журнал Крелля, т. 73). Дело идет о следующем: если мы скомбинируем какое-нибудь квадратичное преобра-

зование с произвольным вторым квадратичным преобразованием, то мы очевидно получим некоторое преобразование четвертой степени, являющееся также бирациональным. Указанные математики доказали, *что при последовательном проведении различных квадратичных преобразований получаются не только примеры высших кремоновых преобразований, но вообще все кремоновы преобразования на плоскости.*

Однако сюда причислены предельные случаи квадратичных преобразований, при которых совпадают две или даже все фундаментальные точки [1]).

Что же касается бирациональных преобразований пространства R_3 (вообще пространства R_n), то до сих пор рассматривали, главным образом, только отдельные примеры. Мы приведем следующие из них:

a) Пусть опять:

$$\rho x_i' = \frac{1}{x_i}.$$

Для пространства R_n это дает нам некоторое преобразование n-й степени, следовательно, для обычного пространства некоторое *преобразование третьей степени*, соответственно квадратичному преобразованию на плоскости.

b) Вторым примером, который точно так же является обобщением квадратичного преобразования на плоскости, может служить *преобразование обратными радиусами* или инверсия:

$$\begin{aligned} \rho x' &= xt, \\ \rho y' &= yt, \\ \rho z' &= zt, \\ \rho t' &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Если мы положим $t = 0$, то получим $x' + y' + z' = 0$. Это означает: всей несобственной плоскости соответствует начало координат, центр инверсии. В соответствии с этим мы назовем несобственную плоскость фундаментальной плоскостью, а центр инверсии — *фундаментальной точкой второй степени. Кроме того все точки абсолютного конического сечения являются фундаментальными точками первой степени*, и притом отдельной точке этого конического сечения соответствует изотропная прямая, соединяющая ее с началом координат. Мы убедимся в этом, если напишем последние уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho x' &= x, \\ \rho y' &= y, \\ \rho z' &= z, \\ \rho t' &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t}. \end{aligned}$$

Тогда для абсолютной точки $t = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Поэтому для нее $\rho t' = 0 : 0$, т. е. неопределенно, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

---

[1]) Об одном исключительном случае, пропущенном при упомянутых доказательствах, см. C. Segre и G. Castelnuovo, Atti Torino 36 (1901).

Для этой инверсии в пространстве мы можем произвести те же рассмотрения, как и в случае квадратичного преобразования на плоскости. Пусть задана поверхность n-го порядка, которая α раз проходит через начало координат и β раз проходит через абсолютное коническое сечение. После преобразования эта поверхность перейдет в поверхность n-го порядка, для которой $n' = 2n - \alpha - 2\beta$ и которая $\alpha' = n - 2\beta$ раз проходит через начало координат и $\beta' = n - \alpha - \beta$ раз проходит через абсолютное коническое сечение.

Перейдем теперь к новым вопросам, которые *касаются теории инвариантов бирациональных преобразований*, и притом сначала ограничимся случаем плоскости, спросив себя: существует ли *теория инвариантов кремоновых преобразований*. Пусть задана кривая $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Каковы те ее свойства, которые остаются неизменными при применении всех *кремоновых* преобразований. В теории *римановых* функций и связанных с ними геометрических исследованиях алгебраических кривых изучают вообще свойства кривых при таких преобразованиях, которые для отдельных кривых являются однозначными; там выяснили, что отдельная кривая относительно этих преобразований имеет определенный *род* p и, кроме того, некоторое число постоянных абсолютных инвариантов, которые называют *модулями* кривой. Напомним теорию абелевых интегралов, в которой эти числа имеют основное значение. Но рассматриваемые здесь однозначные преобразования кривой $f = 0$ никоим образом не являются обязательно кремоновыми преобразованиями, т. е. однозначными преобразованиями всей плоскости.

Отсюда следует, что число p и модули римановой теории также остаются инвариантными при всех кремоновых преобразованиях; но сверх того имеются еще такие свойства данной кривой, которые не принимаются во внимание при римановой точке зрения, но являются инвариантами при кремоновых преобразованиях. Однако, систематических исследований об этом еще не имеется.

Совершенно аналогично обстоит дело в пространстве. Пусть задана поверхность $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$; она имеет два родовых числа p_1 и p_2 и ряд модулей. Подробное изложение этого можно найти, например, в статьях Кастельнуово и Энриквеса в 3 т. „Математической энциклопедии". *Разумеется эти родовые числа и модули остаются неизменными при бирациональных преобразованиях всего пространства, но вообще они не исчерпывают совокупности бирациональных инвариантов.*

Наконец, мы перейдем еще к *теории инвариантов дифференциальных форм* относительно бирациональных преобразований, но ограничимся только рассмотрением выражений Пфаффа $\sum X_i dx_i$. До сих пор подобное выражение мы подвергали произвольному точечному преобразованию и в соответствии с этим требовали от X_i только аналитичности в рассматриваемой части пространства. Если же теперь мы будем рассматривать взаимно однозначное преобразование всего пространства, то целесообразно будет считать коэфициенты X_i *алгебраическими или рациональными* и в соответствии с этим предполагать их

определенными во всем пространстве. *В связи с этими специальными выражениями Пфаффа мы рассмотрим теорию инвариантов, во-первых, при произвольных проективных преобразованиях и, во-вторых, при произвольных бирациональных преобразованиях.* По этому поводу можно сказать: *подобное уравнение Пфаффа* $\sum X_i dx_i = 0$ *относительно произвольного однозначного преобразования* X_i *обладает рядом инвариантных родовых чисел* $p_1, p_2, \ldots$ Потому что, если мы будем рассматривать dx_i наряду с самими x_i как независимые переменные, а уравнение $\sum X_i dx_i = 0$ — как алгебраическое уравнение между $2n$ переменными, то согласно Нетеру это уравнение относительно однозначных преобразований в пространстве $2n$ переменных имеет свои родовые числа, которые при преобразованиях n-мерного пространства и подавно остаются инвариантными.

Значение этих последних, пока еще до конца не проведенных, рассмотрений должно быть особенно важным. Большой задачей математики является классификация трансцендентных функций, появляющихся при интегрировании алгебраических диференциальных уравнений, подобно тому, как это давно делается в случае абелевых интегралов, связанных с алгебраическими кривыми. При этом основным является как раз выяснение тех свойств алгебраических кривых, которые остаются неизменными при произвольных однозначных преобразованиях. *Точно таким же образом в случае трансцендентных функций, возникающих, например, из алгебраических задач Пфаффа, основными будут те свойства выражений Пфаффа, которые остаются неизменными при произвольном однозначном преобразовании переменных* x; *если говорить как раз о числе родовых чисел* $p_1, p_2 \ldots$, *которыми обладает подобное выражение Пфаффа относительно произвольных однозначных преобразований переменных* x, *в качестве неизменных характеров, то мы, вследствие этого, получим столько же существенных характеров, сколько и для тех трансцендентных функций.*

Для этих рассмотрений проблем Пфаффа будет полезно ввести однородный способ записи. Мы положим:

$$x_i = \frac{y_i}{y_{n+2}}$$

и из уравнения $\sum X_i dx_i = 0$ получим новое, состоящее из $(n+1)$ членов, уравнение $\sum Y_i dy_i = 0$, где Y_i являются однородными функциями от y_i с одинаковыми показателями однородности, удовлетворяющими тождеству $\sum Y_i y_i = 0$.

Здесь надо указать на работу, опубликованную А. Фоссом в т. 23 Math. Annalen (1884). *Эти исследования Фосса касаются проективных свойств рациональных проблем Пфаффа — „точко-плоскостных систем"*, как их называет Фосс, потому что в силу уравнения Пфаффа каждой точке ставится в соответствие определенная плоскость направлений — *следовательно, эти исследования являются первой работой в указанном направлении.* Общая программа для изучения трансцендентных функций, как мы об этом только что говорили, является по существу такой же, какую развил Клебш в своей теории „коннексов"

в последний год своей жизни (в 1872 г.) для обычных дифференциальных уравнений первого порядка. Причина, вследствие которой в последнее десятилетие мало занимались этой программой, имеет свое естественное основание в том, что эта работа требует больших познаний в различных областях математики. Только тот, кто хорошо овладел проективной геометрией, теорией инвариантов и теорией функций, может за нее взяться и действительно продвинуться в этом направлении вперед. Вообще, в современном развитии математики недостатком является то, что математика распадается на слишком различные области, которые изучаются различными специалистами совершенно изолированно друг от друга. Наряду с геометрией и теорией функций играет, например, особую роль, сама по себе, теория чисел. Разумеется надо стремиться к тому, чтобы эти отдельные области поставить по возможности в определенную связь друг с другом, так как только таким образом могут быть достигнуты действительно большие успехи.

Теперь мы перейдем к новому предмету наших лекций, имеющему дело с преобразованиями, при условии

ЗАМЕНЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Особенно мы займемся тремя вещами:

a) *Двойственным преобразованием*, которое противопоставляет на плоскости точку и прямую, а в пространстве — точку и плоскость.

b) Затем нам придется вернуться к *геометрии сфер* и к *геометрии прямых линий*, различные связи которых мы только теперь будем в состоянии понять.

c) Наконец, мы вообще поговорим о *преобразованиях прикосновения* Ли, которые охватывают все сказанное до сих пор.

§ 62. Двойственное преобразование, как преобразование прикосновения.

Что касается *двойственного преобразования*, то при его рассмотрении мы ограничимся обычным, т. е. проективным трехмерным пространством. Как и до сих пор, мы будем обозначать точечные координаты через x_1, x_2, x_3, x_4, плоскостные — через u_1, u_2, u_3, u_4. Будем исходить из общих подстановок:

$$\rho u_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Среди этих общих преобразований мы особенное внимание обратим на линейные преобразования:

$$\rho u_i = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k.$$

В последнем случае линейному соотношению между x_i соответствует опять-таки линейное соотношение между u_i и обратно. Это соответствует следующим предложениям: точке x_i ставится в соответствие некоторая плоскость u_i и эта плоскость будет вращаться вокруг некоторой прямой, если точка x_i двигается по некоторой другой прямой.

Сообразно с этим прямой всегда соответствует опять прямая. Далее, плоскость u_i вращается вокруг некоторой точки, если точка x_i произвольно двигается по некоторой плоскости. Так как получается взаимное соответствие между обоими пространствами, то это преобразование называют также взаимностью обоих пространств. Шаль здесь ввел выражение „*корреляция*“. Среди двойственных преобразований особенно заслуживает внимания случай $a_{ik} = a_{ki}$. Это специальное линейное соответствие совпадает с полярным соответствием относительно поверхности второй степени:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Разумеется, простейший случай дается уравнениями $\rho u_i = x_i$; тогда все a_{ik} для $i \neq k$ равны нулю, а все $a_{ii} = 1$. Эти формулы устанавливают полярное соответствие относительно нулевой поверхности второй степени:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Приведем теперь ряд простейших результатов, которые мы здесь только кратко сформулируем, так как они и без того имеются во всех соответствующих учебниках проективной геометрии.

a) Первый пункт касается двойственного преобразования заданных фигур. Особенно замечательным является, например, то, что конус при произвольном двойственном преобразовании переходит в плоскую кривую; вообще, каждая развертывающаяся поверхность, рассматриваемая как геометрическое место касательных плоскостей при произвольном двойственном преобразовании переходит в пространственную кривую. Подобные преобразования являются прекрасным упражнением в пространственных представлениях.

b) Что касается положения координат u_i в теории инвариантов, то они связаны с координатами x_i тем, что имеет место условие совместного положения

$$\sum_1^4 x_i u_i = 0.$$

После подстановки

$$x_i = \sum a_{ik} y_k$$

левая часть этого уравнения переходит в

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_i y_k,$$

и если мы это опять положим равным

$$\sum_k v_k y_k,$$

то увидим, что

$$v_k = \sum_i a_{ik} u_i.$$

В то время как при подстановке x_i суммирование велось по индексу k, теперь суммирование производится по индексу i. Другими

словами: в распорядке коэфициентов обеих подстановок строки и столбцы поменялись местами друг с другом. Из-за этого свойства новую подстановку называют *транспонированной относительно первой*. Координаты же u_i называют *контраградиентами* по отношению к координатам x_i и находят объяснение этого термина в предложении: *в то время, как старые x выражаются через новые y посредством данной линейной подстановки, новые v выражаются через старые и посредством транспонированной подстановки.*

c) Наконец укажем еще на ту роль, какую играют двойственные преобразования в синтетической геометрии, где они наряду с проективными соотношениями служат для образования высших алгебраических образов из низших.

Скажем теперь подробнее о том, *какое значение имеет преобразование*

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

для диференциальных уравнений. Мы уже рассматривали (§ 32) это при неоднородном способе записи формул. Тогда мы ввели вместо точечных координат x, y, z плоскостные координаты X, Y, Z, которые определялись следующим условием соединенного положения:

$$z - Xx - Yy - Z = 0.$$

Тогда нам была дана некоторая поверхность в точечных координатах x, y, z, к которым мы прибавили частные производные первого и второго порядка p, q; r, s, t. Затем мы обозначили координаты соответствующей касательной плоскости через X, Y, Z, а соответствующие частные производные через P, Q; R, S, T и вычислили, как эти новые величины выражаются через x, y, z; p, q; r, s, t.

Эти формулы можно теперь рассматривать некоторым другим образом. Представим себе произведенным двойственное преобразование, которое каждой *точке* x, y, z ставит в соответствие *плоскость* с координатами x, y, z, а каждой *плоскости* X, Y, Z ставит в соответствие *точку* с координатами X, Y, Z. Таким образом из данной поверхности с элементами x, y, z; p, q; r, s, t возникает преобразованная поверхность, взаимная поверхность, точечными координатами и соответствующими производными которой являются X, Y, Z; P, Q; R, S, T.

Мы уже вычислили тогда следующую таблицу, в которой стоящие друг под другом выражения являлись равными:

x	y	z	p	q	$z-px-qy$	r	s	t	s^2-rt
$-P$	$-Q$	$Z-PX-QY$	X	Y	Z	$\frac{T}{S^2-RT}$	$\frac{-S}{S^2-RT}$	$\frac{R}{S^2-RT}$	$\frac{1}{S^2-RT}$

В частности из левой группы формул здесь следует, что

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = dz - p\,dx - q\,dy.$$

Заметим прежде всего, что посредством $x, y, z; p, q$ определяется точка поверхности с ее касательной плоскостью и что $X, Y, Z; P, Q$ зависят только от $x, y, z; p, q$.

Какие геометрические следствия можно вывести из этого обстоятельства. Здесь получается: *две касающиеся в некоторой точке поверхности, следовательно, поверхности, имеющие одну и ту же систему значений* $x, y, z; p, q$, *переходят в две опять-таки касающиеся поверхности, т. е. в такие, которые имеют одну и ту же систему значений* $X, Y, Z; P, Q$. Это надо понимать так: если из некоторой точки поверхности возникает касательная плоскость взаимной поверхности, то одновременно из касательной плоскости поверхности возникает соответствующая точка прикосновения взаимной поверхности.

Теперь можно было бы, прибавив вторые производные, установить соответствующее предложение для соприкасающихся поверхностей (прикосновение второго порядка), но мы ограничимся предложением о касании первого порядка.

Именно с этим предложением связана *общая идея преобразований прикосновения.*

§ 63. Первое введение общих преобразований прикосновения.

Обратимся теперь к *общему* значению преобразований прикосновения, а дальнейшие рассмотрения дадим позднее. Начнем с величин $x, y, z; p, q$, как если бы они были произвольными переменными. Что p и q являются частными производными, выражается в том, что $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Поэтому это дифференциальное соотношение мы должны всегда считать выполненным. Введем теперь пять новых величин с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} X &= \varphi_1(x, y, z; p, q), \\ Y &= \varphi_2(x, y, z; p, q), \\ Z &= \varphi_3(x, y, z; p, q), \\ P &= \varphi_4(x, y, z; p, q), \\ Q &= \varphi_5(x, y, z; p, q), \end{aligned}$$

где φ_i до дальнейших оговорок обозначают произвольные аналитические функции, регулярные внутри рассматриваемой части пространства и обладающие отличным от нуля функциональным определителем. При этом наши подстановки должны быть такого рода, чтобы из них тождественно следовало:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

где $\rho = \rho(x, y, z; p, q)$ какой-нибудь множитель.

Такое преобразование, следуя Ли, называют преобразованием прикосновения. Этот термин обусловливается, разумеется, тем свойством, что из двух касающихся „поверхностей" получаются опять две касающиеся „поверхности". Очевидно каждое точечное преобразование является преобразованием прикосновения. Оно вообще дается формулами:

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z),$$

из которых получаются обе дальнейшие формулы для P и Q.

Второй пример нам дает двойственное преобразование, с которого мы как раз и начали § 62. Чтобы составить себе общее представление о преобразованиях прикосновения, введем, следуя Ли, некоторые общие геометрические понятия. Совокупность величин $x, y, z; p, q$, точки и ее касательной плоскости, или вообще точки и проходящей через нее плоскости, называют *элементом поверхности* (двумерным элементом), и притом удобно представлять себе только малый кусок касательной плоскости вокруг точки прикосновения. Этот элемент поверхности, зависящий от пяти параметров, *будем впредь рассматривать как элемент пространства*, так что наше пространство будет тогда представлять собой многообразие пяти измерений. Мы должны познакомиться с тем, как оперируют в этом M_5. Наши величины $x, y, z; p, q$ очень удобно истолковывать как обычные точечные координаты в пространстве пяти измерений. Уравнение $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ тогда представляет собой в пространстве R_5 уравнение Пфаффа и именно уравнение Пфаффа характера пять в нормальной форме, как мы с этим познакомились в § 55. *Поэтому в пространстве R_5 преобразование прикосновения является точечным преобразованием, переводящим уравнение* Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ само в себя.

Займемся теперь ближе уравнением $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Если мы рассмотрим два близких двумерных элемента некоторой поверхности $x, y, z; p, q$ и $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$, то между ними будет существовать как раз это соотношение. В соответствии с этим назовем наше диференциальное уравнение *условием соединенного положения обоих элементов*. В самом деле, можно сказать, что „точка первого элемента лежит на плоскости второго элемента“ и обратно. В текущих координатах плоскость первого элемента будет:

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

и если подставить в ее уравнение $z' = z + dz$, $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, т. е. точку второго элемента, то мы получим $dz = p\,dx + q\,dy$, следовательно, наше вышеприведенное уравнение. Обратно, уравнение плоскости второго элемента имеет вид:

$$(z' - z - dz) = (p + dp)(x' - x - dx) + (q + dq)(y' - y - dy)$$

и если теперь положить $z' = z$, $x' = x$, $y' = y$, то опять, при ограничении членами первого порядка, мы получим уравнение

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Все же, во избежание недоразумений, мы выразимся точнее: эту формулировку, что вторая точка лежит в плоскости первого элемента, а первая точка лежит в плоскости второго элемента, надо понимать только с точностью до величин второго порядка, т. е. вторая точка удалена от плоскости первого элемента на величину второго порядка малости и наоборот. Это обстоятельство имеет значение при следующем рассмотрении. Можно было бы подумать, что прямая пересечения обеих плоскостей должна быть вместе с тем линией соединения обеих точек, как это было бы конечно справедливо для двух точек в том

случае, когда их плоскости точно проходят через другую точку. Однако здесь этого отнюдь не будет, напротив того, прямая пересечения может образовывать с линией соединения произвольный конечный угол. Уравнение первой плоскости в координатах, отнесенных к точке x, y, z, будет $\zeta = p\xi + q\eta$, а уравнение плоскости, проходящей через ту же самую точку x, y, z параллельно второй плоскости, будет:

$$\zeta = (p + dp)\xi + (q + dq)\eta.$$

Из обоих уравнений получается

$$\xi : \eta : \zeta = dq : -dp : p\,dq - q\,dp$$

в качестве направления прямой пересечения. Это направление не обязательно совпадает с $dx : dy : dz$. *Скорее наши формулы показывают, что оба направления только тогда совпадают, т. е. что прямая пересечения обеих плоскостей только тогда сливается с линией соединения обеих точек, когда* $dq\,dy + dp\,dx = 0$. В этом случае говорят, что оба элемента находятся в положении *соприкосновения*. Конечно, это будет инвариантом не при произвольном преобразовании прикосновения, а только при проективном и двойственном преобразованиях.

Точнее, мы назовем $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ *проблемой Пфаффа и поставим себе задачу отыскать такие интегральные многообразия, которые удовлетворяют этому соотношению.* Можно отыскивать интегральные многообразия *первого* и интегральные многообразия *второго измерения*; эти последние будут (по общей теории § 56 проблемы Пфаффа) многообразиями максимальной размерности, удовлетворяющими нашему уравнению Пфаффа.

Начав с рассмотрения интегральных многообразий M_1, мы видим, прежде всего, что уравнение $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ удовлетворяется, если положить $dz = dy = dx = 0$. Это дает нам в качестве первого примера M_1 элементы, проходящие через вершину какого-нибудь конуса, или элементы, имеющие, как пучок плоскостей, общую прямую пересечения, при лежащей на ней фиксированной точке x, y, z. Мы получим второй пример M_1, если будем исходить из некоторой пространственной кривой и по какому-нибудь определенному непрерывному закону будем рассматривать последовательность касательных плоскостей вдоль кривой, которые, следовательно, будут огибать некоторую развертывающуюся поверхность. *Принадлежащие к этим касательным плоскостям элементы образуют также интегральное многообразие* M_1; такое многообразие M_1 мы будем называть *полосой*. Впрочем этот термин при случае распространяется также и на первый приведенный пример многообразия M_1.

Когда же, в частности, интегральное многообразие M_1 будет соприкасающимся многообразием M_1? Очевидно тогда, когда для всяких двух соседних элементов будет выполняться условие $dq\,dy + dp\,dx = 0$. *Мы видим, что, во-первых, всякая вершина конуса (как и всякий пучок элементов) является соприкасающимся многообразием* M_1; *во-вторых, мы получим подобное многообразие* M_1, *если поставим в соответствие точкам пространственной кривой ее соприкасающиеся*

плоскости. В частности, каждая прямолинейная полоса является соприкасающейся полосой, поскольку у прямой линии каждая касательная плоскость является также соприкасающейся плоскостью.

Перейдем теперь к интегральным многообразиям M_2.

Существуют ли многообразия двух измерений, образованные из двумерных элементов таким образом, чтобы каждый элемент находился в соединенном положении с каждым соседним элементом? Простейший пример интегрального многообразия M_2 дают все элементы, проходящие через некоторую фиксированную точку; мы скажем коротко: сама точка x, y, z. Второй пример дают все элементы, касающиеся фиксированной пространственной кривой. Наконец, нам приходится рассматривать совокупность всех элементов, касающихся некоторой пространственной поверхности, как интегральное многообразие M_2. *Таким образом точка, кривая и поверхность, т. е. основные образы старой геометрии, в новой геометрии двумерных элементов являются равноправными.*

Действительно, мы приходим к этим трем образам (если рассматривать проблему Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, как указано в § 56), отыскивая многообразия максимальной размерности:

a) Прежде всего мы исходим из произвольного уравнения $\varphi(x, y, z) = 0$ и полагаем:

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad \text{и} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Эти уравнения дают тогда первое семейство интегральных многообразий.

b) Или же мы исходим из двух уравнений $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\psi(x, y, z) = 0$ и полагаем:

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad \text{и} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}},$$

где λ означает произвольный переменный параметр.

c) Или же, наконец, мы исходим из трех уравнений:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0$$

и полагаем:

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial z}} \quad \text{и} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

где λ и μ — параметры.

Интегральное многообразие в случае a), определяемое одним уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, дает нам элементы, примыкающие к данной поверхности. Случай b), напротив, дает нам элементы поверхности пространственной кривой, так как в каждой точке кривой $\varphi = 0, \psi = 0$,

соответственно введению произвольного параметра λ, мы имели пучок элементов. Наконец, случай c) дает нам одну или несколько точек со всеми ее двумерными элементами. Следовательно, различие точки, кривой и поверхности, как разных форм двумерных интегральных многообразий, совершенно аналогично тому различию разных интегралов, которое мы вообще проводили при рассмотрении проблемы Пфаффа, исходя из нормальной формы. *Обратно, можно сказать, что теория интегрирования проблемы Пфаффа, если в основу положен двумерный элемент в качестве пространственного элемента (здесь, в пространстве R_3, при рассмотрении точек, кривых и поверхностей), находит свое хорошее геометрическое истолкование, значительно более общее, чем это возможно, если в основу положена, в качестве пространственного элемента, только точка.*

С другой стороны мы заметим, что подразделение интегральных многообразий M_2 на точки, кривые и поверхности основывается на том, что мы рассматриваем точки как основу. *Если же как основу наших рассмотрений мы возьмем плоскости, то нам придется рассматривать опять три типа интегральных многообразий M_2; но они уже не будут совпадать с прежними, а будут им только родственны; именно*:

a) все элементы, примыкающие к поверхности, не являющейся развертывающейся поверхностью; b) все элементы развертывающейся поверхности; c) все элементы, примыкающие к некоторой фиксированной плоскости.

Теперь мы можем бросить взгляд на существующие типы *преобразований прикосновения*. Из каждого интегрального многообразия M_1 должно получиться опять интегральное многообразие M_1; из интегрального многообразия M_2 будет опять-таки интегральное многообразие M_2. Исходя из рассмотренной точки зрения, мы теперь сразу увидим, что при выборе точки в качестве пространственного элемента должно иметься *три типа преобразований прикосновения*.

1. *Переводящие точки в точки.* Таковыми являются общеизвестные точечные преобразования.

2. *Переводящие точки в кривые.* Это для нас является новостью.

3. *Переводящие точки в поверхности*, первым примером чего служат двойственные преобразования. Если опять в качестве пространственного элемента с самого начала взять плоскости, то получилось бы соответственное разделение на три типа преобразований прикосновения, только, отнюдь, не совпадающее с тем разделением, когда в основу положена, в качестве пространственного элемента, точка.

Что в качестве пространственного элемента можно вместо точки и плоскости рассматривать также прямые, сферы и тому подобное и этим дать пространству более высокую размерность — давно уже известно и применялось. Отсюда тот специальный случай, что мы рассматриваем пространство как многообразие M_5 двумерных элементов. Но этот специальный случай имеет совершенно особое значение, поскольку он ставит в один ряд точки, кривые и поверхности как равноправные образы. Эта мысль была развита Ли. Мы скоро увидим, как все будет выглядеть весьма целесообразно с этой новой точки зрения.

например то, что касается диференциальных уравнений с частными производными и т. д. К нашим прежним рассмотрениям мы теперь еще прибавим некоторые добавления.

Всякое интегральное многообразие M_1 мы вообще будем называть полосой и среди них будем отыскивать специально соприкасающиеся полосы в указанном смысле. Очевидно всякое интегральное многообразие M_1, протекающее целиком на некотором интегральном многообразии M_2, является полосой. В частности на отдельных интегральных многообразиях M_2 протекают соприкасающиеся полосы. *Если интегральное многообразие M_2 является точкой, то всякая полоса будет соприкасающейся полосой. Если интегральное многообразие M_2 является кривой, то существует только одна соприкасающаяся полоса, доставляемая соприкасающимися плоскостями. Наконец, на произвольной поверхности лежит два семейства соприкасающихся полос, именно тех полос, которые примыкают к асимптотическим линиям*; это соответствует как раз тому факту, что касательные плоскости двух соседних точек некоторой асимптотической линии пересекаются по касательной этой асимптотической линии.

Далее, надо еще сказать об *однородной формулировке*. Эта последняя окажется весьма целесообразной всегда, когда мы будем иметь дело с алгебраическими функциями или операциями, для которых мы привлечем все пространство. Мы скажем:

a) *Отдельный элемент получает восемь однородных координат, отношения четырех величин x_1, x_2, x_3, x_4 и отношения четырех величин u_1 u_2, u_3, u_4, связанных условием* $\sum u_i x_i = ux = 0$, которые определяют точку и плоскость элемента.

b) Если перейти к соседнему элементу, то для него условие $ux = 0$ переходит в $u\,dx + x\,du = 0$, т. е. в более подробной записи,

$$u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3 + u_4dx_4 + du_1x_1 + du_2x_2 + du_3x_3 + du_4x_4 = 0.$$

c) Соседние элементы находятся в соединенном положении, если написанное уравнение распадается на два уравнения, именно, если $u\,dx = x\,du = 0$. Это уравнение, в котором всегда $ux = 0$ выступает теперь вместо уравнения Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$.

d) В противоположность этому в качестве условия положения соприкосновения двух соседних элементов получается $du\,dx = 0$.

Мы видим, какой наглядный и простой вид имеют все эти уравнения.

e) Каким же образом представляется преобразование прикосновения? Положим:

$$\rho x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_4;\ u_1, \ldots, u_4),$$
$$\sigma u_i' = \psi_i(x_1, \ldots, x_4;\ u_1, \ldots, u_4).$$

Разумеется функции φ_i и ψ_i должны быть однородными относительно переменных x_i и u_i, взятых по отдельности. Тогда, прежде всего, они должны удовлетворять условию:

$$\rho\sigma u'x' = Mux;$$

в противном случае мы вообще не будем иметь никакого преобразования элементов. Далее, должно быть:

$$\rho u' dx' = m u\, dx.$$

Тогда мы получим преобразование прикосновения. При более подробном исследовании можно, например, опять спросить себя, существует ли взаимно однозначное преобразование прикосновения (преобразование Кремона) и т. д.

§ 64. Обе группы преобразований геометрии сфер.

Обратимся теперь к уже ранее указанному отделу, посвященному *новейшим рассмотрениям геометрии сфер и геометрии прямых линий*. Мы уже раньше много говорили об обеих областях. Теперь мы можем глубже проникнуть в эти области, оперируя с такими понятиями, как понятия преобразования, группы преобразований, инвариантов, и особенно с понятием преобразования прикосновения. Ради большей наглядности мы почти исключительно ограничимся обычным пространством R_3, но наши рассмотрения почти без исключений могут быть перенесены на пространство R_n.

Прежде всего мы напомним о том, что говорилось в § 50 о введении пентасферических координат $x_1, \ldots, x_5$, связанных условием $\Omega(x) = 0$. Наши рассмотрения свелись к тому, чтобы точечное пространство трех измерений трактовать как стереографическую проекцию сферы пространства R_4 и затем оперировать над ней проективными средствами. Исходя из этой трактовки, мы, в частности, получили десятичленную группу конформных преобразований в пространстве R_3, с предложением Лиувилля о том, что никаких других конформных преобразований не имеется. Это были просто линейные преобразования переменных x, которые переводили в себя квадратичное уравнение $\Omega = 0$.

В связи с этим мы направим свое внимание на *элементарную* геометрию сфер, оставляя пока в стороне *высшую* геометрию сфер. Уравнение сферы в пентасферических координатах было линейным уравнением $\sum u_i x_i = 0$. *Мы получали элементарную геометрию сфер, рассматривая фигурирующие здесь коэфициенты u_i, как однородные координаты сферы.* Следовательно, элементарная геометрия сфер сводится к тому, что наряду с координатами x_i вводятся еще контраградиентные координаты u_i; таким образом, и в области пентасферических координат x_i вводится *принцип двойственности*. Разумеется мы можем также сказать, *что сферы пространства R_3 являются стереографическими образами „плоских" сечений основной сферы, лежащей в пространстве R_4.*

Теперь мы легко получим основной прием для употребления координат u_i, если спросим себя, когда сфера u_i пространства R_3 сводится к одной точке. Очевидно, этот случай будет иметь место тогда, когда плоскость сечения пространства R_4 касается своей основной сферы. Так как уравнением основной сферы пространства R_4 является

$$\Omega = \sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

причем мы считаем положенной в основу совершенно произвольную систему координат, то мы получим в качестве условия для точки сферы R_3, приравнивая нулю окаймленный определитель, уравнение

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{15} & u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{51} \ldots a_{55} & u_5 \\ u_1 \ldots u_5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

потому что это уравнение изображает нам основную сферу в плоскостных координатах. Это уравнение занимает центральное место в элементарной геометрии сфер; мы познакомились с ним раньше, в том частном случае, когда в уравнение $\Omega = 0$ входили только чистые квадраты: $\sum u_i^2 = 0$.

Так как координаты u_i преобразуются линейно, если то же самое имеет место для переменных x_i, то мы получаем предложение: *конформные преобразования пространства R_3 оказываются линейными преобразованиями координат u_i, переводящими уравнение $\Phi = 0$ само в себя. Отсюда мы получаем более точное определение элементарной геометрии сфер, как учения о таких свойствах, возникших из сфер образов, которые остаются инвариантными при десятичленной группе названных линейных преобразований.*

Разберем теперь соответствующие формулировки для *высшей геометрии сфер*. Прежде всего мы введем ее элементарным образом, как это было сделано раньше. В § 25 мы исходили из уравнения сферы в прямоугольных координатах:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + C = 0;$$

радиус сферы получился равным:

$$\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - C}.$$

Мы опять обращаем здесь особое внимание на двойной знак; эту двузначность мы устраняли „ориентацией" сферы. *Координатами сферы уже больше не должны быть α, β, γ и C, но должны быть α, β, γ, C и r, причем между ними существует соотношение* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 - C = 0$. Как раз принятием r в качестве добавочной координаты и характеризуется высшая точка зрения. Затем мы ввели еще однородную форму, положив

$$\alpha = \frac{\xi}{\nu}, \quad \beta = \frac{\eta}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{\nu}, \quad r = \frac{\lambda}{\nu}, \quad C = \frac{\mu}{\nu},$$

после чего $\xi : \eta : \zeta : \lambda : \mu : \nu$ *мы рассматривали как однородные координаты сферы в высшей геометрии сфер, координаты, связанные условием второй степени*

$$\psi = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \lambda^2 - \mu\nu = 0.$$

Как мы уже видели, с этим уравнением было связано оперирование с нашими координатами сфер. Так, например, *полярное уравнение*

$$2\xi\xi' + 2\eta\eta' + 2\zeta\zeta' - \lambda\lambda' - \mu\nu' - \mu'\nu = 0$$

дает условие касания (в одинаковом смысле) двух сфер. Это полярное уравнение находится в неразрушающемся при линейном преобразовании соотношении с уравнением $\psi = 0$.

С нашей более общей точки зрения, основанной на понятиях группы и инвариантов, мы теперь вообще можем выдвинуть на первый план следующее определение.

Высшая геометрия сфер имеет дело с теми свойствами каких-либо полученных из сфер образов, которые остаются инвариантными при пятнадцатичленной группе линейных преобразований шести однородных переменных ξ, η, ζ, λ, μ, ν, *при которых уравнение* $\psi = 0$ *переходит само в себя.*

Наряду с таким образом изложенным введением высшей геометрии сфер, исходя из обычных прямоугольных точечных координат, существует более общая геометрия, начинающая сразу с любых пентасферических точечных координат. Уравнение сферы в них имеет вид:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_5x_5 = 0.$$

Тогда как раз коэфициенты u_i и вводят как координаты сферы и таким образом получают низшую геометрию сфер. Теперь радиус сферы получается в виде:

$$r = \pm\frac{\sqrt{\Phi(u_1,\ldots,u_5)}}{\sum C_iu_i},$$

где $\Phi = 0$ является условием точки-сферы, а $\sum C_iu_i = 0$ дает условие того, что сфера содержит несобственную точку, т. е. переходит в плоскость. Теперь мы просто можем ввести шестое однородное переменное, положив

$$u_6 = \sqrt{\Phi(u_1,\ldots,u_5)},$$

так что

$$r = \frac{u_6}{\sum C_iu_i}.$$

Тем, что эту шестую координату мы присоединяем к координатам сферы $u_1,\ldots,u_5$ низшей геометрии сфер, мы поднимаемся к высшей геометрии сфер. При этом соотношением, связывающим шесть координат, будет уравнение:

$$\Psi = \{u_6^2 - \Phi(u_1,\ldots,u_5)\} = 0.$$

В связи с этим сущность высшей геометрии сфер заключается в том, что мы привлекаем к рассмотрению бо́льшее многообразие преобразований. *Именно, группа преобразований высшей геометрии сфер состоит теперь из всех линейных подстановок переменных* $u_1,\ldots,u_6$, *переводящих в себя* $\Psi = 0$.

В то время как группа низшей геометрии сфер была десятичленная, группа высшей геометрии сфер содержит пятнадцать существенных параметров. И притом низшая группа содержится в высшей в качестве *подгруппы*, как это видно из сопоставления уравнений $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$.

§ 65. Изотропная проекция R_{n+1} на R_n.

Посмотрим теперь, какие геометрические представления отвечают этому аналитическому введению высшей геометрии сфер. Мы вернемся к ранее изложенной мысли. Тогда мы говорили, что сфере с координатами центра α, β, γ и радиусом r мы поставим в соответствие точку пространства R_4 с прямоугольными координатами $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ и $t = ir$. Это соотношение, так называемую „*изотропную проекцию*“ между сферами R_3 и точками R_4, которая является преобразованием с заменой пространственного элемента, мы теперь исследуем несколько ближе. Как известно, условием касания (в одинаковом смысле) двух сфер является:

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 - (r - r')^2 = 0.$$

Для соответствующих точек в четырехмерном пространстве это означает:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + (t - t')^2 = 0.$$

Следовательно, мы находим (как мы это видели и раньше), что две касающихся сферы дают две точки, находящиеся друг от друга на нулевом расстоянии, т. е. лежащие на некоторой изотропной прямой.

Рассмотрим теперь это соотношение между обоими пространствами непосредственно геометрически. Мы можем провести из некоторой произвольной точки пространства R_4 изотропный конус, образующими которого являются изотропные прямые, и этот конус пересечем затем пространством R_3. *Тогда мы утверждаем по поводу соответствия точек пространства R_4 и сфер пространства R_3, как оно дается нашей формулой, что всякая сфера пространства R_3 является сечением, которое пространство R_3 имеет общим с изотропным конусом, исходящим из точки пространства R_4.* Это утверждение сейчас же может быть доказано с помощью выкладок. Уравнением изотропного конуса, исходящего из точки x, y, z, t пространства R_4, в текущих координатах x', y', z', t' является:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 + (t' - t)^2 = 0.$$

Этот конус пересечем нашим пространством R_3, заданным уравнением $t' = 0$. Тогда получим:

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 + t^2 = 0$$

или:

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 - r^2 = 0,$$

что и утверждалось.

Таким образом полученную связь между точками R_4 и сферами R_3 впредь мы будем называть для краткости *изотропной проекцией пространства* R_4 на пространство R_3.

Наряду с α, β, γ, r мы взяли еще координату C, определяемую равенством $C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2$ и затем для однородности положили:

$$\alpha=\frac{\xi}{\nu},\quad \beta=\frac{\eta}{\nu},\quad \gamma=\frac{\zeta}{\nu},\quad r=\frac{\lambda}{\nu},\quad C=\frac{\mu}{\nu}.$$

Введем теперь для точечных координат пространства R_4 шесть однородных координат сферы в пространстве R_3 для соответствующей точки R_4. Мы имели:

$$\alpha=x,\quad \beta=y,\quad \gamma=z,\quad r=\frac{t}{i};$$

теперь еще добавим:

$$C=x^2+y^2+z^2+t^2.$$

Тогда пусть для однородности:

$$x=\frac{x_1}{x_6},\quad y=\frac{x_2}{x_6},\quad z=\frac{x_3}{x_6},\quad t=\frac{x_4}{x_6}\quad \text{и}\quad x^2+y^2+z^2+t^2=\frac{x_5}{x_6}.$$

Условие, связывающее шесть однородных координат, примет тогда следующий вид:

$$x_5x_6=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

Тотчас видно, что однородные координаты $x_1,\ldots,x_6$, связанные последним условием, оказываются *„гексасферическими координатами“*, т. е. являются аналогом в пространстве R_4 пентасферическим координатам пространства R_3. Общие координаты $u_1,\ldots,u_6$ высшей геометрии сфер получаются из ξ, η, ζ, λ, μ, ν посредством произвольной линейной подстановки; и таким же образом из $x_1,\ldots,x_6$ мы получаем наиболее общие гексасферические точечные координаты пространства R_4 посредством произвольной линейной подстановки. Итак, мы видим: *введение шести однородных координат для сферы* R_3 *сводится к тому, что точки* R_4 *определяются с помощью гексасферических координат и затем эти точки с помощью изотропной проекции отображаются на ориентированные сферы пространства* R_3.

Так как в обоих случаях квадратичное соотношение $\psi=0$ остается неизменным при линейных подстановках шести однородных координат, то опять получается следующее предложение: *пятнадцатичленная группа линейных преобразований шести однородных координат, положенных в основу высшей геометрии сфер пространства* R_3, *является просто образом группы конформных преобразований, которые допускает точечное пространство четырех измерений.*

Напомним, наконец, что точки пространства R_4 при употреблении гексасферических координат рассматриваются как стереографические образы точек сферы пространства R_5. Мы теперь можем установить следующее предложение: *высшая геометрия сфер в* R_3 *сводится к тому, что сферы пространства* R_3 *рассматриваются как образы*

точек некоторой сферы, лежащей в пространстве R_5; эта последняя сфера изучается в обычном проективном смысле.

Этот заключительный результат мы повторим еще раз совершенно общим образом для пространств высших размерностей. Пусть дана некоторая определенная сфера в R_{n+2}; эту сферу мы будем трактовать проективно и таким образом получим группу линейных преобразований с $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ параметрами в $n+3$ однородных координатах. Затем эту сферу отобразим стереографически на точки пространства R_{n+1}, которые мы далее с помощью изотропной проекции отобразим на сферы пространства R_n. Тогда в пространстве R_{n+1} мы будем иметь $n+3$ полисферических точечных координат и соответствующую группу конформных преобразований. В пространстве же R_n мы будем иметь $(n+3)$ сферических координат и сферические преобразования, геометрическое значение которых остается еще выяснить ближе.

Рассмотрим теперь подробнее связь между высшей геометрией сфер пространства R_n и конформной точечной геометрией пространства R_{n+1}, противопоставив друг другу соответствующие образы в обоих пространствах. Мы ограничимся низшими случаями n для которых еще хватает наших пространственных представлений, по крайней мере, что касается геометрии сфер.

§ 66. Изотропная проекция R_3 на R_2.

Пусть, прежде всего $n=2$; тогда, в силу изотропной проекции, точкам обычного пространства должны соответствовать направленные или ориентированные окружности плоскости (в качестве сфер пространства R_2). В пространстве мы имеем десятичленную группу конформных точечных преобразований, которые переносятся на плоскость в качестве преобразований ориентированных окружностей по своему существу пока еще неизвестных. Мы подробно осветим это соответствие с помощью некоторых сопоставлений.

Прежде всего мы видим:

Поверхностям пространства R_3 будут соответствовать „комплексы кругов“ пространства R_2; кривым пространства R_3 — „ряды кругов“ R_2. При этом выражениями „комплекс“ и „ряд“ кругов здесь указывается на размерности два и один. В частности, *сферы пространства R_3* отображаются в *линейный комплекс кругов пространства R_2*. Мы уже раньше нашли, что он является семейством кругов, пересекающих некоторый определенный основной круг под заданным постоянным углом. Если, в частности, сфера R_3 переходит в *точку-сферу*, то мы получаем в R_2 некоторый *„специальный“* линейный комплекс кругов, т. е. *касательные круги* основного круга. Через некоторый круг в пространстве R_3 (как правило) проходят две точки сферы, следовательно, точкам сферы соответствуют все круги R_2, касающиеся двух основных сфер. Кроме того мы отметим еще предельный случай „параболических кругов“, которому на плоскости R_2 соответствует переход одного из основных кругов в прямую.

Из изотропной прямой пространства R_3 мы получаем пучок кругов R_2 с общим направленным линейным элементом, т. е. семейство всех

кругов, соприкасающихся друг с другом в одинаковом смысле в одной и той же точке. Обратно, мы можем сказать, что *каждому направленному линейному элементу R_2 соответствует изотропная прямая R_3*. На это предложение следует обратить особое внимание для дальнейших применений.

Здесь явно бросается в глаза то, что наше соответствие будет иметь много исключений, если значение геометрических образов (как например „линейный элемент") не изменить надлежащим образом. Именно, изотропным прямым R_3, уже лежащим в нашей плоскости R_2, не соответствует никакой направленный элемент в обычном смысле. Каким образом надо определить эти понятия, чтобы избежать исключений, и как „построить" геометрию сфер Ли в обычном проективном пространстве, подробно изучал Штуди вместе с другими вопросами в ряде работ, опубликованных в томах 86 (1922) — 91 (1924) Mathematischen Annalen под названием: „О геометрии кругов и сфер Ли".

Пусть в R_3 дана некоторая *изотропная кривая*, определенная тем, что две ее соседние точки имеют нулевое расстояние. В R_2 ей соответствует ряд кругов с тем специальным свойством, что соседние круги этого ряда касаются. В соответствии с этим мы говорим о *касательном ряде кругов R_2*. Мы получим такой ряд касания, построив круги кривизны кривой R_2. Мы имеем здесь убедительный пример того, как при перенесении образов R_3 на R_2 в пространстве R_2 получаются важные для геометрии сфер образы.

Далее, к каждой изотропной кривой R_3 принадлежит *изотропная развертывающаяся поверхность*, образованная из ее касательных. Очевидно она дает *специальный комплекс кругов, состоящий из совокупности кругов касания некоторой плоской кривой*. Поэтому ребро возврата этой развертывающейся поверхности дает, в частности, ряд кругов кривизны.

Мы рассмотрим дальнейшую ортогональную проекцию изотропной кривой R_3 на плоскость x, y. Каждая точка кривой доставляет нам как раз центр соответствующего круга, круга кривизны плоской кривой. Отсюда предложение: *нормальная проекция изотропной кривой на плоскость $z = 0$ дает эволюту плоской кривой.*

Теперь, очевидно, мы можем изотропную кривую произвольно сдвинуть по ее вертикальному цилиндру „вертикально", если мы представляем себе плоскость $z = 0$ горизонтальной. Тогда бесконечно многим положениям соответствующей изотропной развертывающейся поверхности будет соответствовать бесконечное множество друг другу „параллельных" кривых плоскости, имеющих одну и ту же эволюту, т. е. бесконечное семейство эвольвент одной и той же эволюты.

Пусть, далее, задана произвольная поверхность в R_3, не являющаяся изотропной развертывающейся поверхностью. Тогда на ней имеется *два семейства изотропных кривых*. Задаче их определения соответствует на плоскости задача *нахождения обоих семейств кривых, круги кривизны которых принадлежат плоскому комплексу кругов*, определяемому поверхностью в R_3.

На поверхности имеются *особые точки, в которых ее изотропные направления совпадают*. Вокруг абсолютного конического сечения и

данной поверхности можно провести общую описанную развертывающуюся поверхность, которая дает на поверхности кривую прикосновения. Ее точки, очевидно, являются точками названного свойства. *Имеет место замечательное предложение*, впервые высказанное Дарбу, *что эта кривая прикосновения является линией кривизны*, так как соответствующие нормали поверхности совпадают с образующими развертывающейся поверхности и следовательно непременно образуют развертывающуюся поверхность.

Что же соответствует этой кривой в R_2? Вообще говоря, каждый круг плоского комплекса имеет два соприкасающихся соседних круга. Но круги, соответствующие точкам этой кривой соприкосновения, имеют только *один* соприкасающийся соседний круг комплекса. Эти исключительные круги обыкновенно называют *особыми кругами* комплекса. Элемент, по которому подобный круг касается соседнего круга комплекса, называют *соответствующим особым элементом*. Этому элементу в ранее изложенном смысле соответствует образующая нашей изотропной развертывающейся поверхности. Так как эти образующие составляют развертывающуюся поверхность, то эти особые элементы соединяются в кривую, *называемую особой кривой комплекса*. Особые круги комплекса касаются этой последней в каждом своем особом элементе.

Аналогичным образом мы можем также рассматривать заданную пространственную кривую с отличной от нуля длиной. Через нее всегда можно провести изотропную развертывающуюся поверхность, имеющую эту кривую в качестве двойной кривой. Надо только изотропную плоскость заставить двигаться таким образом, чтобы она касалась нашей пространственной кривой; тогда она будет огибать эту изотропную развертывающуюся поверхность. Отсюда следует: *ряд кругов R_2, вообще говоря, имеет некоторую огибающую кривую, которой круги ряда дважды касаются*. Опять можно спросить, когда обе точки прикосновения каждого отдельного круга совпадают и т. п.

Эти примеры, относящиеся к комплексам и рядам кругов плоскости, легко могут быть произвольно продолжены, если взять за исходную точку какие-либо геометрические соотношения кривых и поверхностей пространства R_3, которые не изменяются при группе конформных преобразований, и перенести их на R_2. Таким образом можно, например, взять *линии кривизны на поверхностях* или *ортогональную систему поверхностей*, для которой тогда будет иметь место теорема Дюпена о том, что поверхности пересекаются по их линиям кривизны. Наиболее общей системой этого типа, с которой мы уже познакомились, являются конфокальные циклиды. Можно спросить, что соответствует этим образам в R_2? К сожалению здесь мы этим заниматься не можем, но вернемся к родственным вопросам в ближайшем параграфе (§ 67).

Теперь же мы обратимся к группе рассматриваемых здесь *преобразований*. Мы имеем в R_3 десятичленную группу преобразований, переводящих каждую точку опять в точку. Аналогичное преобразование, переводящее каждый круг опять в круг, мы имеем, следовательно, и в R_2. Так как пространственное преобразование является одновременно конформным, то изотропные прямые пространства R_3 опять-таки пере-

ходят в изотропные. На плоскости это означает, что круги, касающиеся в одинаковом смысле в некотором элементе, сохраняют это свойство при преобразовании. Другими словами: из каждого (направленного) элемента кривой возникает новый элемент кривой, так как элемент можно рассматривать как носитель пучка кругов. Следовательно, во всяком случае мы имеем перед собой *преобразование элементов*. Далее, в пространстве R_3 изотропные развертывающиеся поверхности остаются опять таковыми же. Но их изотропные образующие доставляют все элементы кривой, которые прикасаются к некоторой фиксированной кривой. Следовательно, в R_2 из каждой кривой возникает новая кривая, или элементы в соединенном положении дают опять элементы в соединенном положении. Поэтому мы имеем следующий важный результат: *десятичленная группа преобразований кругов, которые мы рассматриваем в высшей геометрии кругов на плоскости, состоит из преобразований прикосновения.*

Но предложение Лиувилля показывает, что вообще существуют только те конформные точечные преобразования, которые образуют нашу группу. При отображении пространства R_3 на R_2 каждое точечное преобразование R_3 доставляет соответствующее преобразование кругов R_2 и наоборот. Так как касающиеся круги в R_2 должны перейти опять в такие же, потому что этого требует всякое преобразование прикосновения, то в R_3 изотропные направления должны перейти опять в такие же, т. е. в R_3 мы необходимо имеем *конформное* преобразование. *Следовательно, наши преобразования кругов дают не только пример преобразования прикосновения, но вообще они являются единственными преобразованиями кругов, одновременно являющимися преобразованиями прикосновения.*

Добавим еще некоторые подробности об этих преобразованиях. В пространстве R_3 каждая отдельная точка определяется координатами x, y, z; в пространстве R_2 каждый отдельный круг определяется координатами центра α, β и радиусом r. Затем мы полагаем $\alpha = x$, $\beta = y$, $ir = z$. Оставим сначала координату z (или же плоскость $z = 0$) пространства R_3 неизменной и рассмотрим следующие подстановки:

a) $$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z.$$

Этот параллельный сдвиг пространства R_3 означает в R_2 просто соответствующий сдвиг, определяемый формулами:

$$\alpha' = \alpha + a, \quad \beta' = \beta + b, \quad r' = r.$$

b) $$\begin{aligned} x' &= +x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Этому вращению пространства R_3 вокруг оси z соответствует опять соответствующее вращение плоскости α, β.

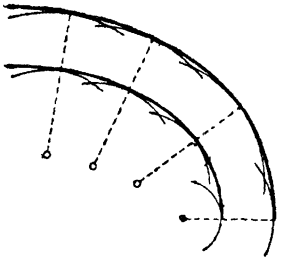
c) $$x' = -x, \quad y' = +y, \quad z' = z.$$

Этому зеркальному отображению пространства R_3 на плоскости y,z противопоставляется соответствующее зеркальное отображение R_2.

d)
$$x' = \frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$
$$y' = \frac{y}{x^2+y^2+z^2},$$
$$z' = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Эта подстановка R_3 (инверсия относительно начала координат) дает в R_2 соответствующую инверсию, именно ту, которая в точечных координатах α, β определяется формулами:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$



Черт. 74.

Эти примеры отображений пространства R_3, переводящего в себя наше R_2, дает в R_2 всегда опять старые преобразования. Пусть теперь

e) $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + c.$

В пространстве R_2 этой подстановке соответствует:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad r' = r + \frac{c}{i},$$

т. е. центры кругов остаются неизменными, а их радиусы увеличиваются на $-ic$ (черт. 74). Это преобразование плоскости называют *параллельным преобразованием*. Оно хорошо известно из применений диференциального исчисления к плоским кривым, как это делается в учебниках. Представим себе нормали построенными в точках некоторой плоской кривой и затем отложим на них в одну и ту же сторону определенный конечный отрезок; таким образом мы получим кривую, „параллельную“ первой.

Она будет огибающей кривой всех кругов, которые получаются из кругов прикосновения заданной кривой, если их центры оставить неизменными, а их радиусы увеличить на заданный отрезок.

f) Наконец, замечательным преобразованием R_2 является преобразование, соответствующее вращению пространства R_3 вокруг оси x или оси y:

$$x' = x, \quad y' = \cos\varphi \cdot y + \sin\varphi \cdot z, \quad z' = -\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot z,$$

к чему мы еще вернемся.

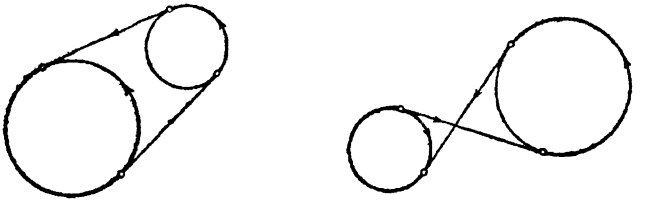
Легко показать, *что приведенные здесь подстановки x, y, z совместно порождают всю десятичленную группу конформных преобразований.*

§ 67. Группа Лагерра и эквилонгальные отображения на плоскости.

Здесь возникает вопрос: *что соответствует в силу изотропной проекции шестичленной группе движений пространства R_3 на плоскости R_2?*

Например, сюда относится отображение, только что приведенное в § 66, в пункте f. Очевидно мы получаем в плоскости шестичленную подгруппу G_6 десятичленной группы преобразований прикосновения кругов, группу, которая в качестве подгруппы содержит трехчленную группу движений плоскости. Для этого следует только обратить внимание на то, что всякое движение R_3, переводящее в себя с сохранением ориентации наше R_2, отображается с помощью изотропной проекции на то же самое движение R_2 [ср. в § 66 примеры a) и b)].

Но преобразование из G_6 не только обладает свойством переводить направленные круги в направленные круги, но еще более простым: направленные прямые переводить опять в направленные прямые. Чтобы в этом убедиться, надо только подумать о том, что при движениях изотропные плоскости, т. е. плоскости, касающиеся абсолютного конического сечения, между собой перестанавливаются и что в силу изотропной проекции точки изотропных плоскостей отобра-



Черт. 75.

жаются в направленные круги R_2, которые касаются в одинаковом смысле ориентированного следа изотропной плоскости на R_2.

Из найденных свойств преобразований прикосновения из группы G_6— именно ориентированные прямые, с одной стороны, и ориентированные круги, с другой стороны, переводить опять в таковые же, — легко следует, что параллелизм (в одинаковом смысле) ориентированных прямых сохраняется. Именно, две (в одинаковом смысле) параллельные прямые являются единственными парами прямых, для которых не существует никакого одновременно (в одинаковом смысле) касающегося ориентированного круга.

Если, наконец, мы возьмем два круга α, β, r; α', β', r', то всякое отображение из G_6 должно оставлять неизменным выражение:

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2-(r-r')^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

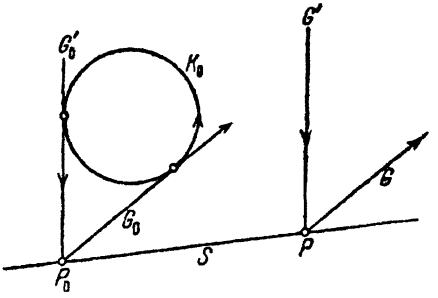
Но это выражение дает квадрат отрезка касательной (см. черт. 75) между обоими кругами.

Геометрия этой группы G_6 изучалась Лагерром в названной на стр. 111 работе, и поэтому эта группа называется *группой Лагерра*.

Чтобы составить себе наглядное представление об отображениях этой группы, рассмотрим *„зеркальное отображение Лагерра“*, соответствующее зеркальному отображению R_3 относительно некоторой плоскости E, которую мы возьмем не параллельно нашей плоскости R_2, так что, следовательно, наше R_2 пересечет E по некоторой собствен-

ной прямой S. Если обратить внимание на то, что рассматриваемое отображение в R_2 переводит:

1. в одинаковом смысле параллельные ориентированные прямые,
2. ориентированные круги,
3. нуль-круги прямой S опять в таковые же, то нам надо только задать ориентированный круг K_0, являющийся образом точки плоскости E, не лежащей на S, чтобы следующим образом построить соответствующую прямую G' для каждой прямой G (см. черт. 76). Проведем к K_0 касательную G', параллельную (в одинаковом смысле) к G, встречающую прямую S в точке P_0. Затем из P_0 проведем к K_0 вторую касательную G'_0. Тогда искомая прямая G' будет проходить параллельно (в одинаковом смысле) ей через точку пересечения прямых G и S. Эта „инверсия Лагерра" является изящным аналогом ранее рассмотренной „инверсии относительно круга" или преобразованию посредством обратных радиусов (§ 10).



Черт. 76.

Если мы воспользуемся обычным представлением изотропных плоскостей:

$$u_0 + u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0,$$

посредством координат u_k, связанных условием:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

то увидим, что в силу изотропной проекции этими же самыми координатами можно воспользоваться для изображения ориентированной прямой на плоскости. Квадратичному уравнению $\sum a_{ik} u_i u_k = 0$ в этих координатах соответствует на плоскости ориентированная кривая, названная Лагерром *„гиперциклом"*. Внутри геометрии Лагерра эти гиперциклы образуют аналог циклическим кривым Дарбу (§ 12) и связаны очевидно посредством изотропной проекции с конфокальными поверхностями второго порядка. Они изучаются в диссертации Бляшке Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene", Monatshefte f. Math. u. Phys., Wien, т. 21 (1910), стр. 3—60.

Подобно тому, как преобразования кругов Мебиуса содержатся в группе конформных или сохраняющих углы отображений плоскости, можно также найти группу отображений, стоящую выше группы Лагерра и зависящую от произвольных функций. Для этого следует только спросить себя о всех отображениях (ориентированных) прямых плоскости, сохраняющих „касательное расстояние" между кривыми; другими словами: *пусть линейные элементы одной и той же ориентированной прямой переходят опять в линейные элементы той же самой прямой, причем расстояние точек подобных „коллинеарных" элементов должно оставаться неизменным.*

Шефферс называет эти отображения „эквилонгальными" и определяет их следующим образом в работе, опубликованной в Mathematischen

Annalen, т. 60 (1905). Пусть:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \bar{\varphi}$$

— уравнение некоторой (ориентированной) прямой. Если считать φ и $\bar{\varphi}$ зависящими от параметра t, то после диференцирования нашего уравнения по t (если производные по t обозначить через δ) мы получим для точки прикосновения второе уравнение:

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}.$$

Очевидно это будет уравнением нормали нашей кривой. Если же первоначальная прямая также является касательной и к некоторой второй кривой $\varphi(t')$, $\psi(t')$, то мы найдем для „касательного расстояния", т. е. для отрезка между обеими точками прикосновения (= расстоянию между соответствующими нормалями) значение:

$$\frac{\delta'\bar{\varphi}}{\delta'\varphi} - \frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi},$$

если δ' означает производную по t'. Отображение прямых, записанное в прямолинейных координатах φ, $\bar{\varphi}$ так:

$$\varphi^* = F(\varphi, \bar{\varphi}),$$
$$\bar{\varphi}^* = G(\varphi, \bar{\varphi}),$$

должно сохранять касательное расстояние. Мы найдем ($F_\varphi = \partial F : \partial\varphi$)

$$\frac{\delta\bar{\varphi}^*}{\delta\varphi^*} = \frac{G_\varphi + G_{\bar{\varphi}}\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}}{F_\varphi + F_{\bar{\varphi}}\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}} = \frac{a + b\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}}{c + d\frac{\delta\bar{\varphi}}{\delta\varphi}}.$$

Если эта дробно линейная подстановка величины $\delta\bar{\varphi} : \delta\varphi$ должна сохранять разность $(\delta\bar{\varphi} : \delta\varphi) - (\delta'\bar{\varphi} : \delta'\varphi)$, то получится:

$$d = 0, \quad b = c \neq 0,$$

или

$$F_{\bar{\varphi}} = 0, \quad F_\varphi = G_{\bar{\varphi}} \neq 0.$$

Поэтому наше отображение изображается уравнениями:

$$\varphi^* = f(\varphi),$$
$$\bar{\varphi}^* = g(\varphi) + f'(\varphi)\,\bar{\varphi},$$

а это уже и есть искомая группа эквилонгальных отображений.

Посредством введения надлежащих „комплексных" чисел

$$\varphi + \varepsilon\bar{\varphi} = \Phi$$

с соотношением $\varepsilon^2 = 0$, найденные формулы можно соединить в одну, если положить:

$$\Phi^* = F(\Phi),$$

где F означает степенной ряд, коэфициентами которого являются опять-таки „комплексные" числа с той же самой единицей ε. Именно, пусть по Тейлору:

$$F(\Phi) = F(\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}) = F(\varphi) + \varepsilon\bar{\varphi}F'(\varphi),$$

так как высшие члены в силу $\varepsilon^2 = 0$ выпадают. Если здесь отделить действительную часть от мнимой части, то получим прежние формулы преобразования.

Если хотят группу Лагерра записать в подобных комплексных числах, то поступают следующим образом. Для прямой с координатами φ, $\bar{\varphi}$ вводят новые координаты ψ, $\bar{\psi}$ посредством требования:

$$\psi + \varepsilon\bar{\psi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}}{2}$$

или

$$\psi = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\bar{\varphi}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

В этих новых координатах преобразования Лагерра (или по крайней мере те из них, которые могут быть названными „одинаково направленными") записываются как дробно линейные подстановки

$$\psi^* + \varepsilon\bar{\psi}^* = \frac{(a + \varepsilon\bar{a}) + (b + \varepsilon\bar{b})(\psi + \varepsilon\bar{\psi})}{(c + \varepsilon\bar{c}) + (d + \varepsilon\bar{d})(\psi + \varepsilon\bar{\psi})}, \quad ad - bc \neq 0.$$

При вычислении с этими „дуальными числами", как их назвал Штуди, надо иметь в виду, что деление на „делители нуля" ($a + \varepsilon b$ при $a = 0$) недопустимо, — затруднение, которое можно было бы преодолеть введением однородного способа записи.

Вследствие этого далеко идущая аналогия между конформными точечными преобразованиями и эквилонгальными преобразованиями прямых становится весьма отчетливой. Первым геометром, который применял дуальные числа в геометрии, был, повидимому, английский математик Клиффорд (W. K. Clifford, 1845—79).

§ 68. Перенесение на высшие размерности.

Мы вкратце изложим отношение конформной точечной геометрии пространства R_4 к высшей геометрии сфер пространства R_3. Однако при этом мы ограничимся приведением отдельных примеров. Каждой изотропной прямой в R_4 соответствует в R_3 пучок (в одинаковом смысле) касающихся сфер, т. е. (ориентированный) двумерный элемент. Некоторой *изотропной кривой* в R_4 соответствует *касательный ряд сфер* в R_3, так как каждые две соседние сферы этого семейства касаются друг друга. Мы тотчас спросим себя: каким характерным свой-

ством обладает ряд двумерных элементов, которые соответствуют касательным изотропной кривой? Они образуют „полосу" в ранее определенном смысле, в которой нормали двух следующих друг за другом элементов пересекаются. Подобную полосу, вследствие этого, мы назовем *полосой кривизны. Итак, изотропные кривые пространства R_4 дают полосы кривизны в пространстве R_3.*

Далее, сфера в R_4 доставляет в R_3 *линейный* комплекс сфер. Как мы уже знаем, он, вообще говоря, определяется как совокупность всех (ориентированных) сфер, которые пересекают под постоянным углом некоторую фиксированную сферу. В частности, он переходит в некоторый специальный комплекс, т. е. в совокупность всех сфер пространства R_3, касающихся некоторой основной сферы, если соответствующая сфера R_4 будет точкой-сферой.

Если мы перенесем *произвольное* многообразие M_3 пространства R_4, то получим в R_3 общий комплекс сфер. Произвольное многообразие M_3 пространства R_4 имеет в каждой своей точке свою „касательную плоскость", которая, конечно, также является многообразием M_3. В пространстве R_3 оно доставляет нам специальный линейный комплекс сфер, который мы назовем *касательным комплексом* заданного комплекса; он касается заданного комплекса в „некоторой своей сфере" Этот касательный комплекс имеет свое особое значение, если обратить внимание на соотношения прикосновения. *Вопрос о том, будут ли в общем комплексе содержаться сферы, соседние к данной сфере, ее касающиеся,* совпадает с соответствующим вопросом о том, имеется ли на многообразии M_3 в пространстве R_4 к заданной точке такие соседние точки, которые находятся от нее на нулевом расстоянии. Так как для каждой точки на M_3 существует конус подобных изотропных направлений, то каждая сфера комплекса имеет однопараметрическое семейство касающихся ее соседних сфер. При этом достаточно многообразие M_3 заменить, относительно выбранной точки, которую мы хотим рассматривать, его касательной плоскостью. Тогда в R_3 этой касательной плоскости будет соответствовать касательный комплекс, все сферы которого пересекают некоторую определенную основную сферу под постоянным углом. Круг пересечения сферы линейного комплекса с соответствующей основной сферой мы вообще будем называть *траекторным кругом* сфер комплекса. Сферы линейного комплекса, касающиеся некоторой отдельной сферы комплекса, касаются ее в некоторой точке ее траекторного круга. Все эти результаты переносятся на регулярные точки любого комплекса, если только мы ограничимся соседними сферами отдельных сфер комплекса. Мы скажем: *каждый комплекс сфер имеет свой траекторный круг, и далее, используя понятие двумерного элемента: единственными двумерными элементами, которые сфера имеет общими с соседними сферами комплекса, являются двумерные элементы ее траекторного круга.*

Линейный касательный комплекс может сделаться специальным для особых сфер нашего комплекса и следовательно траекторный круг сведется тогда к одной точке. Подобную сферу нашего комплекса называют тогда *особой* сферой. Ей соответствует *особый* элемент—тот двумерный элемент, в котором особая сфера касается основной сферы

ее касательного комплекса. *Особые сферы с особыми элементами огибают так называемую особую поверхность комплекса.* Особая поверхность будет тогда образом огибающей изотропных касательных плоскостей, которые можно провести в пространстве R_4 к нашему многообразию M_3. Вообще, каждая огибающая двупараметрической совокупности изотропных „плоскостей" (т. е. многообразий M_3) отображается как специальный комплекс, состоящий из совокупности сфер соприкосновения некоторой поверхности.

Наконец, произвольное многообразие M_2 в R_4 дает в R_3 *конгруенцию сфер.* Изотропный образ, который можно провести через M_2, дает в R_3 „фокальную поверхность" конгруенции, т. е. поверхность, огибаемую ее сферами. Эти примеры можно легко продолжить, но мы на этом прервем изложение.

Мы только еще отметим, что конформные точечные преобразования R_4 на R_3 дают пятнадцатичленную группу преобразований сфер, которые одновременно являются *преобразованиями прикосновения.* И при том это опять следует из предложения Лиувилля о том, что группа этих преобразований исчерпывает совокупность всех преобразований прикосновения, являющихся одновременно преобразованиями сфер.

Можно также в пространстве, в соответствии с тем, что мы делали в § 67 для плоскости, геометрию сфер Лагерра расположить между элементарной геометрией и высшей геометрией сфер Ли, определяя десятичленную группу G_{10} Лагерра в пространстве R_3 как изотропную проекцию группы евклидовых движений пространства R_4.

Алгебраически эту группу G_{10} получают, если $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $x_4 = r$ будут центром и радиусом ориентированной сферы R_3. Рассматривают все те линейные подстановки

$$x_i^* = b_i + \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k,$$

в которых a_{ik} ограничены тем условием, что соответствующая однородная подстановка

$$\xi_i^* = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \xi_k$$

оставляет инвариантной квадратичную форму:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2.$$

Если же в этих формулах x, y, z истолковывать как пространственные координаты, а $x_4 = r = t$ как время, то получится группа Лоренца, сделавшаяся в новейшей физике знаменитой. Частный принцип относительности Эйнштейна и заключается в требовании инвариантности уравнений физики относительно *группы Лоренца.*

Мы еще раз подчеркнем наш результат: *группа G_{10} геометрии Лагерра тождественна с группой Лоренца частной теории относительности.*

Кроме того следует отметить, что система уравнений Максвелла, образующая исходную точку теории относительности, является инвари-

антной не только относительно группы движений пространства с линейным элементом $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$, но даже относительно конформной группы этого пространства, вследствие чего, следовательно, также и высшая геометрия сфер Ли пространства R_3 имеет отношение к физике.

Группа G_{10} Лагерра обладает не только свойством переставлять между собой ориентированные сферы, но она переставляет также между собой уже и ориентированные плоскости, так что, следовательно, в геометрии Лагерра целесообразнее вместо четырехмерного многообразия сфер рассматривать только трехмерное многообразие плоскостей пространства R_3.

Кроме того, группа G_{10} обладает свойством оставлять неизменными „касательные расстояния". Именно, если T — общая касательная плоскость двух поверхностей F_1 и F_2, а T^*, F_1^*, F_2^* — соответственные фигуры, преобразованные посредством отображения G_{10}, то расстояние между точками прикосновения T к F_1 и F_2 равно расстоянию между точками прикосновения T^* к F_1^* и F_2^*.

Аналогично тому, что приводилось в § 67, можно в пространственной геометрии так же поставить задачу об отыскании эквилонгальных отображений, т. е. преобразований плоскостей, оставляющих неизменными „касательные расстояния" — аналог группе конформных точечных преобразований. Как впервые показал Штуди (1904) эти эквилонгальные отображения образуют группу, содержащую произвольные функции, в противоположность предложению Лиувилля о конформных отображениях пространства R_3, зависящих только от десяти параметров.

Чтобы получить аналитическое представление этой группы, проще всего воспользоваться плоскостными координатами Бонне и Дарбу. Чтобы притти к этим координатам, напишем уравнение плоскости в Гессовской нормальной форме, в виде:

$$\frac{u+v}{1+uv}x-i\frac{u+v}{1+uv}y+\frac{1-uv}{1+uv}z=\frac{w}{1+uv}.$$

Здесь $i^2=-1$. Коэфициенты x, y, z нормированы таким образом, что сумма их квадратов тождественно равна единице. Если плоскость действительна, то u, v должны быть комплексно сопряженными, а w действительным. В этих плоскостных координатах u, v, w Бонне и Дарбу действительные и в известном смысле одинаково направленные эквилонгальные плоскостные преобразования записываются таким образом:

$$u^*=u^*(u),\quad w^*=\left|\frac{du^*}{du}\right|\{w+f(u,\ v)\}.$$

Здесь $u^*(u)$ означает (разумеется не сводящуюся к постоянной) аналитическую функцию комплексного переменного u, в то время как $f(u, v)$ должна быть действительной для комплексно сопряженных u, v[1]).

Преобразования Лагерра в u, v, w записываются так:

$$u^*=\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u},\quad w^*=\frac{w+\lambda uv+\mu u+\mu v+\nu}{|\gamma+\delta u|^2},\quad |\alpha\delta-\beta\gamma|=1.$$

[1]) См. J. C. Coolidge, American transactions том 9 (1908), стр. 178 и W. Blaschke, Archiv für Mathematik (3), том 16 (1910), стр. 182.

Попутно отметим, что можно составить себе наглядное представление о циклидах Дюпена внутри группы Лагерра G_{10}, так как каждый ряд сфер, касающихся подобной циклиды, получается из круга пространства R_4 посредством изотропной проекции. Следовательно, круги пространства R_4 таким образом распадаются на пары, что каждая точка одного круга находится на нулевом расстоянии от каждой точки соответствующего „парного" круга.

К этим рассмотрениям мы добавим еще некоторые литературные сведения. Прежде всего следует назвать работу Ли в Mathematische Annalen, т. 5 (1871): *О комплексах, в частности, о комплексах линий и сфер, с применениями к теории дифференциальных уравнений с частными производными.* В этой работе вообще впервые вводится высшая геометрия сфер пространства R_3. Но эти рассмотрения связываются с двумя дальнейшими вопросами, которые мы впоследствии изложим в этих лекциях в связи с геометрией сфер, — именно, с геометрией прямых линий и теорией дифференциальных уравнений с частными производными. Затем следует упомянуть *работы Клейна* в том же самом томе Math. Annalen (1871): *О геометрии прямых линий и метрической геометрии* и *О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в геометрии прямых линий.* В то время Клейн прежде всего привлекал конформную геометрию пространства R_4 и сравнивал ее с геометрией прямых линий. Тогда сравнение с работами Ли дает связь между конформной геометрией пространства R_4 и геометрией сфер пространства R_3, что однако в работе не проведено. В частности Клейн подробно изучал значение ортогональной системы в R_4, для которой также имеет место теорема Дюпена аналогично тому, как для поверхностей пространства R_3, и разработал значение этой системы для геометрии прямых линий[1]). Далее Клейн рассматривал соответствующие дифференциальные проблемы пространства R_4 и геометрии прямых линий с шестью однородными координатами, которые опять-таки являются гексасферическими координатами пространства R_4. Затем к этим работам примыкают еще две заметки Ли, которые были опубликованы только в „Göttinger Nachrichten" (1871, стр. 191 — 209 и стр. 535—551) и поэтому гораздо менее известны. В них общим образом рассматривается связь между пространством R_{n+1} и пространством R_n посредством изотропной проекции; в частности, Ли применяет изотропную проекцию к ортогональной системе R_{n+1}, причем получается очень интересный результат. Здесь геометрия прямых линий, рассмотрение которой первоначально стояло на переднем плане, но которая существует только для $n = 3$, теперь совершенно отступает. Спрашивается, наконец, почему существование этих исключительно богатых мыслями работ Ли не дало до сих пор желаемых последствий; основание к этому можно видеть только в том, что в них рассматриваются наряду друг с другом такие разнородные вещи, как геометрия прямых линий, геометрия сфер, дифференциальные уравнения. Всеми этими областями надо одинаково хорошо владеть, чтобы эти работы могли быть вполне

[1]) См. также W. Blaschke, Kugelsysteme Ribaucours und vierfache Orthogonalsysteme, Math. Zeitschrift, том 24 (1926).

понятны; постоянный переход от одной области к другой требует известной опытности, которой обладают только немногие математики [1]).

Среди новейших работ по геометрии сфер следует особенно назвать уже однажды упомянутые нами работы Штуди в Math. Annalen, т. 86—91, а в связи с этим еще целый ряд работ того же автора в Math. Zeitschrift, т. 18—21. Там среди прочего рассматривается представление конформных отображений пространства R_4 с помощью дробно линейных подстановок в кватернионах (ср. C. Stephanos, Math. Annalen, т. 22, стр. 589, 1883). О связи группы Лоренца с геометрией сфер см. доклад Клейна: „О геометрических основах группы Лоренца" (D. Math. Ver. Jahresbericht 19, 1910, а также Abhandlungen 1, стр. 533). В качестве общего собрания материала здесь еще раз особенно упомянем содержательную книгу Кулиджа: J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Oxford 1916.

Диференциально геометрическая сторона геометрии сфер рассматривается в двух рядах работ Бляшке и Томсена в Abhandlungen des Math. Seminars der Hamburgischen Universität, т. 3, 4 (1923—26) и в Math. Zeitschrift, т. 24, 25 (1926) и должны быть суммарно изложены в третьем томе лекций Бляшке по диференциальной геометрии.

§ 69. Группа геометрии прямых линий Плюкера.

В последних параграфах мы противопоставляли друг другу три геометрии: высшую геометрию сфер пространства R_4, конформную точечную геометрию пространства R_{n+1} и проективную геометрию на сфере в пространстве R_{n+2}; всегда мы имели преобразование с $(n+2)$ $(n+3):2$ существенными постоянными. В этот ряд соответствующих друг другу рассмотрений входит, как мы опять подчеркнем, только для $n=3$ геометрия *прямых линий*. Основывается это на том, что прямые линий в пространстве мы определяем шестью координатами, между которыми существует квадратичное уравнение второй степени $P=0$, определяющее все дальнейшее. *При этом особенно приятно то, что в геометрии прямых линий линейные многообразия, рассматриваемые на многообразии квадратичного уравнения $P=0$ в пространстве пяти измерений, все являются действительными.* Следовательно, образ $P=0$ можно сравнивать с однополостным гиперболоидом пространства R_3, на котором также все линейные многообразия — прямолинейные образующие являются действительными.

Вспомним, как мы тогда вводили прямолинейные координаты. Мы исходили из матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\|,$$

содержащей однородные координаты двух точек x_i и y_i и образовывали ее шесть миноров p_{ik}, которые затем мы расположили в последовательности p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} как координаты линии соеди-

[1]) См. также E. D'Ovidio, Memorie Lincei (3) 1 (1877) und Math. Annalen 12 (1877).

нения обеих точек. Между этими шестью величинами существует квадратичное соотношение:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23};$$

и обратно, шесть величин, удовлетворяющих уравнению $P = 0$, если не все они обращаются в нуль, всегда можно рассматривать как прямолинейные координаты.

С другой стороны, величины p_{ik} мы будем рассматривать как однородные координаты точки пространства R_5, которая уравнением $P = 0$ связывается с некоторой определенной поверхностью второй степени пространства R_5. Левая часть этого уравнения $P = 0$ имеет отличный от нуля определитель. Если, далее, мы рассмотрим выражение P с точки зрения закона инерции, то найдем, что оно равносильно форме с тремя положительными и с тремя отрицательными квадратами. С этим связано то, что получается относительно действительности линейных многообразий на $P = 0$, как мы только что указали.

Напомним еще, что *условие того, что две прямые* p_{ik} *и* p'_{ik} *пересекаются, дается приравниванием нулю полярного выражения формы* P:

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Наконец, еще заметим, что прямолинейные координаты q_{ik}, получаемые из матрицы двух плоскостей u, v, отличаются от p_{ik} только порядком (см. стр. 88)

$$\rho q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}.$$

Мы тотчас спросим себя: *какие имеются линейные многообразия на поверхности* $P = 0$ *в пространстве* R_5? Прежде всего мы образуем из координат двух прямых p_{ik} и p'_{ik} линейную комбинацию $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ и исследуем, когда уравнение $P(p_{ik} + \lambda p'_{ik}) = 0$ удовлетворяется относительно λ тождественно. Располагая члены этого уравнения по степеням λ, мы получим:

$$P(p_{ik}) + 2\lambda \sum p'_{ik} \frac{\partial P(p_{ik})}{\partial p_{ik}} + \lambda^2 P(p'_{ik}) = 0.$$

Поэтому наряду с $P(p_{ik}) = 0$ и $P(p'_{ik}) = 0$, которые наверное удовлетворяются, должно еще быть:

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial P(p_{ik})}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Но это последнее условие показывает, что прямые p_{ik} и p'_{ik} пересекаются и тогда $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ обозначает все прямые пучка (p, p'), т. е. все прямые, лежащие в одной плоскости с заданными прямыми и одновременно проходящие через их точку пересечения.

Следовательно, на нашей поверхности второй степени в пространстве пяти измерений имеется столько же одномерных ли-

нейных многообразий, сколько имеется пучков прямых, т. е. эти линейные многообразия зависят от пяти постоянных.

Аналогичным образом мы рассмотрим лежащие на поверхности $P=0$ линейные многообразия M_2, исходя из линейной комбинации $p+\lambda p'+\mu p''$, в которой λ и μ являются произвольными, а прямые p, p' и p'' не лежат в одном пучке. Мы находим, что подобное M_2 только тогда удовлетворяет уравнению $P=0$, когда прямые p, p' и p'' попарно пересекаются в пространстве R_3. Могут встретиться два различных случая: либо три прямые будут пересекаться в одной общей точке, либо они будут лежать в одной плоскости. Следовательно, в качестве результата получаем: *имеется два типа линейных двумерных многообразий на $P=0$, изображающиеся в линейном пространстве: 1) все прямые, проходящие через одну точку; 2) все прямые, лежащие в одной плоскости. Каждый тип зависит от трех параметров.*

Следовательно, как на поверхности второй степени $\Omega=0$ в R_3 мы имеем два однопараметрических семейства линейных многообразий — оба семейства прямолинейных образующих, так и здесь мы имеем соответствующее противопоставление двух типов линейных многообразий наибольшей размерности. Коротко мы их назовем *связками лучей и полями прямых*. Следовательно, здесь двойственно соответствующие друг другу элементы пространства R_3, точка и плоскость, выступают в новом соотношении друг к другу.

Обратимся теперь к *линейным преобразованиям*. В пространстве R_3 мы имеем линейные точечные (или плоскостные) преобразования и, далее, линейные двойственные преобразования, зависящие от 15 параметров. Чтобы прежде всего говорить о коллинеациях, пусть для координат двух точек будут иметь место формулы подстановки:

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$
$$y_i' = \sum a_{ik} y_k.$$

Мы видим, *что величины p_{ik}, составляющиеся из координат этих точек, также будут подвергаться линейной подстановке, в то время как $P=0$ будет переходить само в себя.* Аналогичное имеет место для двойственных преобразований:

$$x_i' = \sum a_{ik} u_k,$$
$$y_i' = \sum a_{ik} v_k.$$

Из них прежде всего следует, что координаты p_{ik}' линейно зависят от координат q_{ik}. Но так как мы уже видели, что эти последние отличаются от соответствующих координат p_{ik} только порядком, то опять-таки получается, *что также и при двойственных преобразованиях координаты p_{ik} подвергаются таким линейным преобразованиям, которые переводят уравнение $P=0$ само в себя.*

Но теперь особенно важно обратить эти предложения. Если мы имеем шесть однородных переменных p_{ik}, то их общая линейная под-

становка содержит 36 коэфициентов. Но общая форма второй степени между шестью однородными координатами содержит 21 постоянную. Следовательно, этот подсчет дает, *что в пространстве пяти измерений имеется как раз пятнадцатичленная группа линейных преобразований, которые (общее) уравнение второй степени переводят само в себя.*

Мы только что нашли два пятнадцатичленных семейства линейных преобразований p_{ik}, переводящие $P=0$ в себя, а именно, с одной стороны, линейные точечные преобразования, с другой стороны, двойственные линейные преобразования пространства R_3. Мы утверждаем, что в то же время они исчерпывают все те преобразования, которые вообще дает наш подсчет.

Доказательство протекает таким образом: линейное преобразование величин p_{ik}, переводящее $P=0$ в себя, должно каждую прямую переводить опять в прямую. Но точно так же каждое линейное семейство прямых оно необходимо переводит в линейное семейство прямых. *Следовательно, в частности, из связок и полей пространства должны опять получиться связки лучей и поля лучей, причем еще существует двойная возможность: либо из связок получаются связки, из полей — поля, либо из связок получаются поля, а из полей — связки.* Мы утверждаем, что первая возможность приводит к *линейному точечному преобразованию* пространства R_3, вторая к *линейному двойственному преобразованию.*

Что касается первой возможности, то получается, что если прямая первого пространства вращается вокруг некоторой точки, то прямая преобразованного пространства также вращается вокруг некоторой точки. Но это означает, что точке всегда соответствует точка или, что мы имеем дело с точечным преобразованием. Но точки, принадлежащие к некоторой прямой при этом необходимо дают опять-таки точки, принадлежащие некоторой прямой. Поэтому к нашему преобразованию мы можем применить ранее указанное предложение: всякое точечное преобразование, при котором коллинеарные точки опять будут коллинеарными точками, необходимо дается линейной подстановкой точечных координат. Этим утверждение для первого случая доказано.

Совершенно таким же образом проводится доказательство во втором случае, когда прямой соответствует опять прямая, а точкам — плоскости, и обратно. Заметим, что мы имеем дело с коллинеарным точечно-плоскостным преобразованием, и можем затем опять тотчас же заключить, что оно является линейным соотношением точек и плоскостей. На основании этого рассмотрения мы можем установить следующее: *содержанием проективной прямолинейной геометрии пространства трех измерений является прежде всего совокупность свойств прямолинейных фигур, остающихся инвариантными при всех коллинеациях пространства R_3 и его двойственных преобразованиях.* Это предложение можно сформулировать еще следующим образом: *содержанием проективной геометрии прямых линий является совокупность таких свойств прямолинейных фигур, которые остаются неизменными при произвольных линейных преобразованиях p_{ik}, переводящих уравнение $P=0$ в себя.*

Этим мы описали то, что было обещано в начале этого параграфа: геометрия прямых линий входит в ряд тех геометрий, в основу которых положены шесть однородных координат, связанных уравнением второй степени; при этом рассматриваются все те линейные преобразования шести координат, которые переводят само в себя уравнение второй степени.

§ 70. Связь между геометрией прямых линий Плюкера и геометрией сфер Ли.

Проследим еще далее соотношение между геометрией прямых линий и высшей геометрией сфер. Прежде всего с аналитической стороны. Наряду с координатами p_{ik} прямой линии, с условием $P=0$, мы имели еще в § 25 координаты сферы:

$$\alpha=\frac{\xi}{\nu},\quad \beta=\frac{\eta}{\nu},\quad \gamma=\frac{\zeta}{\nu},\quad r=\frac{\lambda}{\nu},\quad C=\frac{\mu}{\nu},$$

с условием:

$$\Omega=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\lambda^2-\mu\nu=0.$$

Напомним, что: уравнение произвольной сферы в прямолинейных координатах x, y, z при введении величин ξ, η, ζ, λ, μ, ν, принимает следующий вид:

$$\nu(x^2+y^2+z^2)-2\xi x-2\eta y-2\zeta z+\mu=0.$$

Если мы имеем *точку-сферу*, то λ и, следовательно, радиус r равны 0. Точечные координаты центра будут:

$$\xi:\eta:\zeta:\nu.$$

Если сфера переходит в плоскость, то $\nu=0$ и из последнего уравнения получатся координаты плоскости:

$$+2\xi:+2\eta:+2\zeta:-\mu.$$

Как координаты p_{ik} таким образом поставить в соответствие координатам ξ, η, ζ, λ, μ, ν, чтобы $P=0$ и $\Omega=0$ перешли друг в друга? Для этой цели мы положим:

$$\begin{aligned}
\rho p_{12}&=\xi+i\eta,\\
\rho p_{34}&=\xi-i\eta,\\
\rho p_{13}&=\zeta+\lambda,\\
\rho p_{42}&=\zeta-\lambda,\\
\rho p_{14}&=+\mu,\\
\rho p_{23}&=-\nu.
\end{aligned}\qquad (*)$$

Обратно, из этих формул получаются соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi&=p_{12}+p_{34}, & \sigma\eta&=\frac{p_{12}-p_{34}}{i},\\
\sigma\zeta&=p_{13}+p_{42}, & \sigma\lambda&=p_{13}-p_{42},\\
\sigma\mu&=+2p_{14}, & \sigma\nu&=-2p_{23}.
\end{aligned}\qquad (**)$$

Можно было бы также построить равносильную к (*), (**) подстановку тем, что оставить в ней без изменения, например, координаты сфер, а p_{ik}, наоборот, подвергнуть некоторой линейной подстановке из пятнадцатичленной группы, сохраняющей уравнение $P=0$.

Если же обратить внимание на то, что для сферы имеет значение знак r, а следовательно, и λ, то сущность заданных формул подстановки выразится следующим образом: *здесь каждой прямой линии ставится в соответствие ориентированная сфера, и каждой ориентированной сфере ставится в соответствие прямая линия. Противоположно ориентированным, но совпадающим сферам соответствуют прямые, у которых координаты* p_{13} *и* p_{42} *меняются местами.* Далее *точки-сферы* характеризуются значением λ равным нулю. *Следовательно, им, в частности, соответствуют прямые линейного комплекса* $p_{18}=p_{42}$ и притом это соответствие будет взаимно однозначным, потому что ведь у точек-сфер обе ориентации совпадают. Вообще всегда одну и ту же сферу, в качестве образа носителя двух ориентированных сфер, дают такие две прямые, которые относительно указанного линейного комплекса являются сопряженными полярами.

Здесь обнаруживается тот поразительный результат, что это преобразование, переводящее прямые в сферы, а также все другие преобразования, которыми можно его заменить, опять-таки являются *преобразованиями прикосновения.* Прежде всего, две пересекающиеся прямые дают две сферы, касающиеся в одинаковом смысле, так как условие пересечения прямых дается полярным соотношением относительно $P=0$, а условие касания сфер дается полярным соотношением относительно $\Omega=0$. Вследствие этого прямые пучка дают пучок соприкасающихся сфер, т. е., говоря точнее, сфер, касающихся в одинаковом смысле. Но линиями пучка мы определяем двумерный элемент точно так же, как ориентированный двумерный элемент определяем пучком сфер. Следовательно, каждому элементу одного пространства соответствует элемент другого пространства, т. е. мы имеем во всяком случае *преобразование элементов.* Оно будет преобразованием прикосновения, если только соединенным элементам здесь — там будут соответствовать опять-таки соединенные элементы и обратно. Выведем аналитические формулы для наших преобразований элементов, из которых затем непосредственно должно получиться желаемое доказательство.

Мы будем исходить в пространстве прямых линий из элемента с координатами:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\quad \text{с } ux=0.$$

В пространстве сфер соответствующий элемент будет:

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4;$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4;\quad \text{с } UX=0.$$

Чтобы найти связь между обоими элементами, мы прежде всего отыщем в пространстве прямых линий две прямые, принадлежащие элементу u, x. Для этой цели мы определим точки пересечения плоскости

элемента с ребрами (3, 4) и (1, 2) координатного тетраэдра. Соответственно они даются:

$$-u_2, +u_1, 0, 0 \quad \text{и} \quad 0, 0, -u_4, +u_3.$$

Затем из обеих матриц

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & -u_4 & +u_3 \end{matrix} \right\|$$

мы образуем координаты рассматриваемых прямых p_{ik} и p'_{ik} элемента, для которых (без множителя пропорциональности) мы найдем:

$$\begin{aligned} p_{12} &= u_1x_1 + u_2x_2, & p'_{12} &= 0, \\ p_{34} &= 0, & p'_{34} &= u_3x_3 + u_4x_4, \\ p_{13} &= u_2x_3, & p'_{13} &= -u_4x_1, \\ p_{42} &= u_1x_4, & p'_{42} &= -u_3x_2, \\ p_{14} &= u_2x_4, & p'_{14} &= +u_3x_1, \\ p_{23} &= -u_1x_3 & p'_{23} &= -u_4x_2. \end{aligned} \qquad \text{и}$$

Сферы, соответствующие обеим этим прямым, по нашим общим формулам $\left(^{**}\right)$ имеют координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= u_1x_1 + u_2x_2, & \xi' &= u_3x_3 + u_4x_4, \\ \eta &= \frac{u_1x_1 + u_2x_2}{i}, & \eta' &= i\,(u_3x_3 + u_4x_4), \\ \zeta &= u_2x_3 + u_1x_4, & \zeta' &= -u_4x_1 - u_3x_2, \\ \lambda &= u_2x_3 - u_1x_4, & \lambda' &= -u_4x_1 + u_3x_2, \\ \mu &= 2u_2x_4, & \mu' &= 2u_3x_1, \\ \nu &= 2u_1x_3, & \nu' &= 2u_4x_2. \end{aligned} \qquad \text{и}$$

Обе эти сферы имеют общий двумерный элемент X, U. Мы получим все сферы прикосновения этого двумерного элемента, рассматривая линейное семейство $m\xi + m'\xi'$, $m\eta + m'\eta'$ и т. д., где m и m' произвольные параметры. Эти множители мы выберем теперь таким образом, что получим точку-сферу и плоскость пучка, из координат которых тотчас получатся координаты X, U двумерного элемента в пространстве сфер. Для этой цели следует только обратить внимание на то, что точка-сфера характеризуется равенством $\lambda = 0$, а плоскость — равенством $\nu = 0$. *В результате для X, U получаются следующие значения*:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda'\xi - \lambda\xi', & U_1 &= \nu'\xi - \nu\xi', \\ X_2 &= \lambda'\eta - \lambda\eta', & U_2 &= \nu'\eta - \nu\eta', \\ X_3 &= \lambda'\zeta - \lambda\zeta', & U_3 &= \nu'\zeta - \nu\zeta', \\ X_4 &= \lambda'\nu - \lambda\nu', & -U_4 &= \frac{\nu'\mu - \nu\mu'}{2}, \end{aligned} \qquad \text{и}$$

в которые мы должны еще внести для $\xi, \ldots, \nu, \xi', \ldots, \nu'$ их вышеприведенные значения. Здесь еще остается подтвердить, что, во-первых, UX является кратным ux (что необходимо должно быть для того, чтобы мы вообще имели преобразование элементов) и, во-вторых, что $U\,dX$ является кратным $u\,dx$; следовательно, соединенные элементы переходят опять в соединенные элементы, и значит наше преобразование элементов действительно является преобразованием прикосновения.

Наряду с этим доказательством, которое ограничивается простой вычислительной проверкой нашего утверждения, что прямолинейное сферическое преобразование является преобразованием прикосновения, мы приведем еще второе более наглядное доказательство, основанное на том, что условие соединенного положения двух элементов в линейном пространстве и в сферическом пространстве приводится к одному и тому же инвариантному виду.

Начнем с геометрии прямых линий. Элемент (двумерный) здесь лучше всего определяется двумя пересекающимися прямыми r и s. Если ввести сокращенное обозначение $(rs = sr)$

$$rs = r_{12}s_{34} + r_{13}s_{42} + r_{14}s_{23} + r_{34}s_{12} + r_{42}s_{13} + r_{23}s_{14},$$

то прямые r и s или, лучше сказать, их шесть однородных координат удовлетворяют уравнениям:

$$rr = 0, \quad rs = 0, \quad ss = 0.$$

Если мы представим себе каждую из прямых r и s зависящей от одного параметра, то получим однопараметрическое многообразие элементов. Когда оно образует полосу? Для этого, как мы раньше (§ 63) уже сказали, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения прямой $r + dr$ с прямой $s + ds$ (не обращая внимания на члены высшего, чем первый, порядка) лежала в плоскости r, s. Это условие может быть выражено таким образом: в пучке r, s должна иметься прямая $g = \alpha r + \beta s$ (т. е. $g_{ik} = \alpha r_{ik} + \beta s_{ik}$), которая пересекает прямые $(r + dr)$ и $(s + ds)$. Для чисел α, β это дает уравнения

$$(\alpha r + \beta s)\,(r + dr) = \alpha rr + \alpha\, dr + \beta rs + \beta s\, dr = 0,$$
$$(\alpha r + \beta s)\,(s + ds) = \alpha rs + \alpha\, ds + \beta ss + \beta s\, ds = 0,$$

которые в силу условия $rr = rs = ss = 0$ и, следовательно, $r\,dr = s\,ds = 0$ сводятся к

$$\beta s\, dr = \alpha r\, ds = 0.$$

Так как α, β не оба нули, то, следовательно, должно, например, быть $s\,dr = 0$, что в силу $sr = 0$, $s\,dr + r\,ds = 0$ дает также $r\,ds = 0$. Итак:

$$s\,dr = r\,ds = 0$$

является *условием взаимного положения* и, следовательно, условием полосы.

По формулам (*) и $\left(^{**}\right)$ стр.263 мы можем теперь системы чисел r и s истолковать так же, как координаты сферы с соотношением $rr = ss = 0$ и условием $rs = 0$ для касания в одинаковом смысле. Сле-

довательно, если числа r, s даны как функции одного параметра, так что $rr = rs = ss = 0$, то вследствие этого получается также и в сферическом пространстве однопараметрический ряд элементов, и притом на этот раз ориентированных двумерных элементов. Остается еще только показать, что $s\,dr = r\,ds = 0$ опять является условием соединенного положения. Для соединенного положения нуль-сфера $\lambda(r + dr) + \mu(s + ds)$ в определяемом посредством $r + dr$, $s + ds$ ряде соприкосновения, т. е. точка соседнего элемента должна лежать в плоскости $\rho r + \sigma s$ первого элемента:

$$\{\lambda(r + dr) + \mu(s + ds)\}\{\rho r + \sigma s\} = 0.$$

В упрощенном виде это дает условие:

$$\lambda\sigma s\,dr + \mu\rho r\,ds = (\lambda\sigma - \mu\rho)s\,dr = -(\lambda\sigma - \mu\rho)\,r\,ds = 0.$$

Так как точка $\lambda(r + dr) + \mu(s + ds)$ соседнего элемента не является соседней к плоскости $\rho r + \sigma s$ исходного элемента, то определитель $\lambda\sigma - \mu\rho \neq 0$. Следовательно, мы пришли к старому требованию $s\,dr = r\,ds = 0$ для соединенного положения.

Этим мы вновь доказали, что прямолинейно-сферическое преобразование Ли является преобразованием прикосновения.

§ 71. Элементарно-геометрическое рассмотрение прямолинейно-сферического преобразования.

Познакомимся далее с тем, каким образом Ли элементарно-геометрическим способом убедился в том, что соотношение между высшей геометрией сфер и геометрией прямых линий является преобразованием прикосновения. Правда этот способ Ли несколько запутан, но зато представляет то преимущество, что на этом пути ясно видно, как геометрия сфер Ли может быть построена на основе элементарной геометрии.

Как мы знаем, точкам-сферам, т. е. самим точкам пространства сфер, соответствуют в линейном пространстве прямые специального комплекса $p_{13} = p_{42}$, общим же сферам (как носителям двух ориентированных сфер) соответствуют две прямые, являющиеся сопряженными полярами относительно этого комплекса. Обратно, Ли рассматривает, что соответствует точкам пространства линий в пространстве сфер. Чтобы это увидеть, мы будем исходить из некоторого пучка прямых комплекса $p_{12} = p_{34}$, т. е. из совокупности всех прямых комплекса, проходящих через одну точку. В пространстве сфер этому пучку соответствует некоторая *изотропная прямая*, именно прямая, все точки которой имеют нулевое расстояние друг от друга. Рассматривая теперь вместо пучка прямых их точку пересечения, мы найдем: *точке линейного пространства соответствует изотропная прямая сферического пространства.* Резюмируя наши результаты, мы скажем: оба пространства таким образом отображаются друг на друга, *что с обеих сторон выделяется определенный линейный комплекс— линейный комплекс* $p_{13} = p_{42}$, *с одной стороны, изотропный ком-*

плекс, с другой, и что всегда точке одного пространства соответствует прямая комплекса, заданного в другом пространстве.

Теперь, следуя Ли, мы геометрически убедимся в том, что этим дается действительно преобразование прикосновения. Тогда одновременно в последнем предложении мы получим первый пример ранее упомянутого семейства таких преобразований прикосновения, *при которых точки переходят в кривые.*

Ход доказательства следующий: Ли показывает, что из поверхности линейного пространства получается поверхность сферического пространства, так что мы имеем перед собой *преобразование поверхностей*; что все касающиеся друг друга в некоторой точке поверхности переходят опять в поверхности, касающиеся друг друга в некоторой точке, так что, следовательно, мы имеем *преобразование элементов.* Отсюда непосредственно следует, что элементам в соединенном положении здесь, там соответствуют подобные же элементы, т. е. мы имеем достаточное условие преобразования прикосновения.

Пусть в линейном пространстве задана какая-нибудь поверхность F_1; к ней мы построим поверхность F_2, сопряженную относительно линейного комплекса, определяя в каждой точке соответствующую полярную плоскость. В силу инволюционного свойства нуль-системы отношение поверхностей F_1 и F_2 является взаимным.

Поэтому две соответствующие друг другу точки p_1 и p_2 поверхностей F_1 и F_2 расположены таким образом, что плоскость, соответствующая одной из точек в линейном комплексе, является всегда касательной плоскостью, соответствующей другой точке. Представим себе проведенной прямую, соединяющую точки p_1 и p_2; назовем ее g. Она будет общей касательной к поверхностям F_1 и F_2. Она принадлежит, с одной стороны, пучку комплекса прямых, исходящих из p_1 (и лежащих в касательной плоскости точки p_2), а с другой стороны, пучку, исходящему из p_2. Легко видеть, *что вообще существует конгруэнция подобных прямых g, которые являются общими касательными F_1 и F_2.* Поверхности F_1 и F_2, взятые вместе, образуют фокальную поверхность этой конгруэнции.

Заметим, что соседняя к g прямая также принадлежит конгруэнции, возникающей от бесконечно малого вращения прямой g вокруг p_1 (или p_2) в касательной плоскости к p_2 (или к p_1), т. е.: *среди линий, принадлежащих нашей конгруэнции в пучке p_1, фигурирует прямая g с кратностью два и среди прямых, принадлежащих конгруэнции в пучке p_2, фигурирует прямая g также с кратностью два (общее свойство фокальных поверхностей конгруэнции).*

Перейдем теперь в силу нашего преобразования в сферическое пространство. Рассмотрим там поверхность Ф, соответствующую при отображении лучам g нашей конгруэнции. Отдельной прямой g соответствует отдельная точка γ на этой поверхности; но отдельным пучкам p_1 и p_2 будут соответствовать две изотропные прямые π_1 и π_2, принадлежащие изотропному конусу, исходящему от γ. Так как пучки p_1 и p_2 содержат в конгруэнции луч g с кратностью два, то π_1 и π_2 будут со своей стороны содержать на Ф точку γ с кратностью два, т. е. прямые π_1 и π_2 будут как раз изотропными касательными по-

верхности Ф, проходящими через точку прикосновения γ касательной плоскости поверхности Ф.

Всем этим мы достаточно охарактеризовали преобразование поверхностей, которое из обеих поверхностей F_1 и F_2 линейного пространства образует поверхность Ф сферического пространства. Теперь мы присоединим к F_1 вторую поверхность F_1', касающуюся F_1 в точке p_1. Тогда этой поверхности в линейном пространстве будет соответствовать в качестве сопряженной поверхности некоторая поверхность F_2', касающаяся F_2 в точке p_2. Вследствие этого поверхности F_1' и F_2' вместе дают ту же самую фигуру пучков p_1 и p_2 как и сами поверхности F_1 и F_2. Поэтому F_1 и F_2, с одной стороны, F_1' и F_2', с другой, дают в сферическом пространстве две поверхности Ф и Ф′, которые доставляют ту же самую точку γ и те же изотропные прямые π_1 и π_2. Так как вместе с тем π_1 и π_2 лежат в касательной плоскости к поверхностям Ф и Ф′ в точке γ, то отсюда следует, что поверхности Ф и Ф′ соприкасаются в точке γ. *Но это означает, что все поверхности F, касающиеся друг друга в точке p, дают поверхности* Ф, *касающиеся друг друга в той же самой точке* γ, *т. е. мы имеем преобразование элементов.*

Как мы упомянули, этим одновременно доказывается, что эти преобразования плоскостей также являются *преобразованиями прикосновения*. Все же преобразование прикосновения является только таким преобразованием элементов, которое одновременно является преобразованием поверхностей.

Мы еще вкратце добавим некоторые замечания об особенно выдающихся свойствах нашего преобразования прикосновения. Из прямой получается ориентированная сфера. Переведенное на язык наших преобразований элементов, это предложение означает: *все элементы, принадлежащие некоторой прямой, превращаются в элементы ориентированной сферы.*

Рассмотрим на сфере все элементы, точки которых лежат на некотором круге. Их совокупность мы назовем *сферообразной круговой полосой*. Пример этого дает наше прежнее рассмотрение элементов, прикасающихся к „траекторному кругу", т. е. тех элементов, которые отдельная сфера линейного комплекса сфер имеет общими со сферами комплекса, касающимися ее.

Как же расположены соответствующие элементы, принадлежащие прямой в линейном пространстве? Между точками прямой и проходящими через нее плоскостями мы можем встретить проективное соответствие такого рода, что плоскость будет вращаться по произвольному проективному закону вокруг прямой, если точка будет двигаться по этой прямой. Тогда к каждой точке прямой мы присоединим элемент таким образом поставленной в соответствие нашей точке плоскости. Совокупность этих двумерных элементов мы назовем *прямолинейной нормальной полосой*. Мы утверждаем, что нашей сферообразной круговой полосе соответствует такая прямолинейная нормальная полоса. Действительно, такая нормальная полоса будет доставляться

всеми пучками прямых линейчатого линейного комплекса, которые пересекают фиксированную прямую комплекса.

Если траекторный круг вырождается в точку-круг, т. е. если он распадается на две пересекающиеся изотропные прямые, то прямолинейная нормальная полоса разлагается на пучок элементов, исходящий из какой-нибудь точки несущей прямой, и на плоскую полосу, которая примыкает к нашей прямой вдоль какой-нибудь проходящей через нее плоскости.

Это соответствие мы можем проследить еще далее. Рассмотрим однопараметрическое многообразие сфер, т. е. ряд сфер. Так как каждой сфере соответствует прямая, то ряд сфер переходит в какую-нибудь линейчатую поверхность и обратно. Если, в частности, ряд сфер является рядом прикосновения, т. е. последовательностью сфер, каждая из которых касается соседней сферы, то мы получаем развертывающуюся поверхность, т. е., вообще говоря, совокупность касательных некоторой пространственной кривой, так как ведь две соседние прямые должны пересекаться между собой. Обратим теперь свое внимание на последовательность элементов прикосновения ряда прикосновения; они образуют, как мы уже раньше сказали, *„полосу кривизны“*, т. е. нормали двух соседних элементов пересекаются. Этой полосе кривизны соответствует совокупность соприкасающихся элементов пространственной кривой, огибающей прямые линии; эти элементы (также по ранее изложенному, см. стр. 238) образуют *„соприкасающуюся полосу“*. *Следовательно, наше преобразование прикосновения обладает замечательным свойством превращать полосы кривизны в соприкасающиеся полосы и обратно.*

Отсюда мы наилучшим образом поймем уже высказанное ранее (в § 26) предложение о том, что в силу нашего преобразования две поверхности таким образом ставятся в соответствие друг другу, что линии кривизны одной переходят в асимптотические линии другой. Мы опять воспользуемся для обеих поверхностей только что введенными обозначениями F и Ф. Задача определения на поверхности Ф линий кривизны, очевидно, сводится к тому, чтобы объединять элементы прикосновения Ф в полосы кривизны. Следовательно, она действительно аналогична задаче определения на поверхности F асимптотических линий, т. е. задаче объединения элементов прикосновения в полосы соприкосновения или асимптотические полосы.

К сожалению имеющее здесь место перенесение мы не имеем возможности проследить на других предложениях линейной и сферической геометрии. В качестве примера мы рекомендуем все те предложения, которые были уже установлены (§ 68) для геометрии сфер путем сравнения с точечной геометрией пространства R_4.

Более подробное изложение очерченных здесь соотношений имеется, помимо названной работы Ли, в работах Штуди (в Mathematischen Annalen, т. 86—91), также уже неоднократно упоминавшихся.

Подумаем еще, как запишется в сокращенных обозначениях, употребленных в конце § 70, условие того, что в пространстве линий полоса $r(t)$, $s(t)$ является соприкасающейся полосой или в пространстве сфер полоса является полосой кривизны.

Если, например, воспользоваться способом выражения линейной геометрии, то для обеих пересекающихся прямых, определяющих элемент поверхности, мы имели соотношения

$$rr = rs = ss = 0, \tag{1}$$

из которых следовало:

$$r\,dr = s\,ds = r\,ds + s\,dr = 0. \tag{2}$$

Далее, в качестве условия соединенного положения давалось:

$$r\,ds = -s\,dr = 0. \tag{3}$$

Если же полоса должна быть соприкасающейся полосой, то необходимо и достаточно для этого, чтобы скалярные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определялись таким образом, что:

$$d(\alpha r + \beta s) = \lambda r + \mu s. \tag{4}$$

Именно тогда можно для представления полосы вместо r и s использовать $p = \alpha r + \beta s$ и $dp = \lambda r + \mu s$. Условие (4) теперь равнозначно с линейной зависимостью

$$\alpha\,dr + \beta\,ds + \alpha_1 r + \beta_1 s = 0 \tag{5}$$

четырех систем чисел r, s, dr, ds. Уравнение (5) является простейшей формой условия соприкасающейся полосы. Если „умножить" левую часть уравнения (5) на r или s, то в силу прежних соотношений (1)—(3) получится нуль. Поэтому подсчет размерностей дает, что уравнение (5) совершенно равносильно *одному* новому скалярному условию.

§ 72. Теория характеристик дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Мы сейчас еще познакомимся с тем, каким образом изложенные здесь геометрические рассмотрения Ли поставил в связь с *теорией дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с тремя переменными*. Для этого мы прежде всего поговорим об общем геометрическом смысле этой теории. Мы тем охотнее пойдем на это, что уже в предыдущем мы проделали предварительную работу, да и сама по себе теория, как таковая, очень важна. Пусть:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и дано уравнение $f(x, y, z; p, q) = 0$; это уравнение требуется проинтегрировать, т. е. требуется в самом общем виде отыскать функции $z = \varphi(x, y)$, удовлетворяющие „дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка" $f(x, y, z; p, q) = 0$. Уже давно в эту теорию введены геометрические методы работы. Прежде всего, здесь следует назвать Монжа с его Applications de l'analyse à la

géométrie[1]) (1809), затем, среди прочих, дю-Буа (Du Bois, Beiträge zur Untegration der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen, 1864), из которой появился только первый том. В ней дю-Буа дает различные интересные приемы, не доводя их, однако, до окончательного вида.

Только Ли впервые удалось вывести определенные заключения, истолковывая x, y, z; p, q как элементы поверхности (двумерные элементы) в пространстве R_3. Из пятимерного многообразия двумерных элементов x, y, z; p, q уравнением $f(x, y, z; p, q) = 0$ в пространстве выделяется некоторое четырехмерное подмногообразие, из элементов которого требуется составить поверхности, т. е. надо найти поверхности такого рода, чтобы все принадлежащие им элементы удовлетворяли данному уравнению. Формулировка Ли является более общей. *В силу этой формулировки требование интегрирования диференциального уравнения с частными производными первого порядка $f = 0$ сводится к тому, что из четырехмерного многообразия элементов уравнения $f = 0$ требуется всевозможными способами составить двумерные многообразия, тождественно удовлетворяющие уравнению $dz - p\,dx - q\,dy = 0$, т. е. условию соединенного положения соседних элементов.*

Эта формулировка Ли является более общей, чем обычная, потому что подобное „интегральное многообразие M_2" при случае может выродиться в пространственную кривую или даже в отдельную точку пространства, как мы сейчас это ближе увидим. Как раз в этом и заключается преимущество трактовки Ли.

Впрочем мы сейчас же укажем на то, что геометрические воззрения Ли наитеснейшим образом связаны с аналитическими приемами, имеющимися в знаменитой работе Пфаффа Methodus generalis aequationes differentiarum partialium... complete integrandi. (Berliner Abhandlungen, 1814.) В этой статье Пфафф ввел в рассмотрение названную по его имени *„проблему Пфаффа"*. Задача интеграции диференциальных уравнений с частными производными первого порядка с тремя переменными благодаря „проблеме Пфаффа" получила следующее выражение: пусть дано уравнение $f(x, y, z; p, q) = 0$, или в разрешенном относительно z виде: $z = \psi(x, y; p, q)$. Тогда:

$$dz = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq.$$

С другой стороны должно быть:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Из обоих уравнений посредством вычитания следует:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - p\right)dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - q\right)dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq = 0.$$

Но это уравнение представляет уравнение Пфаффа для четырех переменных. *Как раз вследствие этого приема Пфафф заменил вопрос*

[1] Русский перевод: Гаспар Монж, Приложение анализа к геометрии, ОНТИ, М.-Л. 1936. *Прим. ред.*

об интеграции дифференциального уравнения с частными производными $z = \psi(x, y; p, q)$ *вопросом о решении этой „проблемы Пфаффа“.*

Этот аналитический прием Пфаффа, очевидно, совершенно равнозначен с точкой зрения Ли, по которой $x, y, z; p, q$ рассматриваются как координаты элемента поверхности. Далее, вследствие этой аналогии мы можем перенести на теорию проблемы Пфаффа в R_4 все то что мы теперь изложим, оставаясь в пространстве R_3, о дифференциальном уравнении с частными производными $f(x, y, z; p, q) = 0$; это послужит хорошим руководством для общей трактовки проблемы Пфаффа.

Теперь мы подразделим наши дифференциальные уравнения $f(x, y, z; p, q) = 0$ на:

a) такие, которые не содержат p, q, т. е. просто имеют вид $f(x, y, z) = 0$. Правда, с обычной точки зрения это уравнение не является дифференциальным, но оно является таковым с точки зрения Ли;

b) такие, которые являются линейными относительно p, q. Их общий вид: $Ap + Bq = C$, где под A, B, C понимаются произвольные функции x, y, z;

c) уравнения с произвольно входящими p, q.

Рассмотрим все эти три типа по порядку.

Тип a). Разумеется, *случай уравнения* $f(x, y, z) = 0$ является в высшей степени простым. Вообще оно изображает точки поверхности. Так как величины p и q остаются произвольными, то нашему уравнению удовлетворяют все *связки двумерных элементов, центры которых лежат на поверхности* $f(x, y, z) = 0$. Теперь мы очень легко можем также найти все интегральные многообразия M_2.

1. Прежде всего к ним принадлежат сами, зависящие от двух параметров, связки двумерных элементов, центры которых лежат на поверхности.

2. Если на нашей поверхности мы начертим какую-нибудь кривую и возьмем все элементы, ее касающиеся, то мы получим также интегральное многообразие M_2.

3. Наконец, совокупность элементов, касающихся самой данной поверхности, также образует интегральное многообразие M_2, которое мы назовем „особым интегральным многообразием M_2“. Следовательно, в рассматриваемом случае мы сразу узнали все интегральные многообразия M_2.

Заметим еще, что эти образы, если только не говорить об особом интегральном многообразии M_2, всегда составлены из однопараметрического семейства полос определенного типа. Дело идет о полосах или пучках двумерных элементов, содержащих общий линейный элемент поверхности. Эти, удовлетворяющие нашему условию, полосы зависят от трех параметров. Теперь без дальнейших пояснений понятно, как интегральные многообразия M_2 отдельной точки поверхности или кривой на поверхности составлены из подобных пучков двумерных элементов. Только для самой поверхности $F = 0$ это не имеет места; в соответствии с этим она занимает свое особое положение.

Все эти замечания, сами по себе являющиеся тривиальными, приобретут большое значение, когда мы будем рассматривать дальнейшие

случаи наших диференциальных уравнений, для различных предоставляющихся возможностей которых они послужат простейшими примерами.

Тип b). Рассмотрим теперь уравнение, линейное относительно p, q:

$$C - Ap - Bq = 0.$$

В силу этого уравнения каждой точке x, y, z ставится в соответствие семейство элементов; именно, все элементы, которые, как легко убедиться, проходят через направление $dx : dy : dz = A : B : C$. Другими словами: *уравнение* $C - Ap - Bq = 0$ *каждой точке пространства ставит в соответствие пучок элементов поверхности.* Если мы, в случае произвольного уравнения $f(x, y, z; p, q) = 0$, исходя из точки x, y, z, найдем конус, огибаемый элементами p, q, то мы можем заметить, что уже и в случае линейного уравнения имеется этот конус; только здесь он является конусом первого класса, т. е. вырождается в пучок.

Исходя из этих рассмотрений мы теперь легко поймем обычный метод интеграции нашего уравнения $C - Ap - Bq = 0$. Этот метод начинают с того, что стараются интегрировать следующую систему обыкновенных диференциальных уравнений.

$$dx : dy : dz = A : B : C.$$

Геометрически это означает: если итти все далее от произвольной точки в предписанном направлении $dx : dy : dz$, то отдельные направления объединятся в определенные кривые. Эти кривые, зависящие от двух параметров, называются *характеристиками диференциального уравнения*. После этого очень просто *определить все интегральные поверхности*. Именно, они будут даваться всеми поверхностями, образованными однопараметрическим семейством характеристик, следовательно, например, характеристиками, исходящими из точек некоторой пространственной кривой, которая сама не является характеристикой. Затем к ним относится в качестве „особого решения" еще „фокальная поверхность" образованной характеристиками конгруэнции, но мы на этом останавливаться не будем.

Этой обычной теории мы противопоставим теперь *точку зрения Ли*. По Ли сами характеристики уже являются интегральными многообразиями M_2, так как в отдельных линейных элементах кривой имеются пучки двумерных элементов, которые все удовлетворяют уравнению $f = 0$. К ним относятся далее в качестве интегральных многообразий M_2 поверхности, образованные характеристиками.

Тогда для всех этих интегральных многообразий M_2 *можно опять установить предложение о том, что каждый из них состоит из „характеристических полос"*. Здесь мы назовем *характеристической полосой* каждую полосу (т. е. каждую однопараметрическую совокупность элементов поверхности, удовлетворяющих условию соединенного положения соседних элементов), которая примыкает к двум соседним характеристикам. Легко видеть, что эти характеристические полосы зависят от трех параметров, так как каждая из характеристических кривых зависит от двух параметров и для каждой из них

имеется однопараметрическое семейство соседних характеристик. Приведенный нами результат о том, что каждое интегральное многообразие M_2 состоит из семейства подобных характеристических полос, ясен без дальнейших пояснений, как для самих характеристик, так и для интегральных поверхностей.

Тип c). Рассмотрим теперь ближе общее диференциальное уравнение $f(x, y, z; p, q) = 0$. Величины p и q мы можем рассматривать как координаты плоскости, проходящей через точку x, y, z. Если, затем, дано уравнение $f(x, y, z; p, q) = 0$, *то каждой определенной точке* x, y, z *будет поставлена в соответствие „элементарная" коническая поверхность. Интегральные поверхности, которые разыскивает обычная теория, будут тогда определяться тем, что в каждой из своих точек они касаются соответствующего элементарного конуса.*

Теперь, следуя Ли, мы спросим вообще об интегральных многообразиях M_1. Отдельная вершина конуса уже является интегральным многообразием M_1. Но мы опять можем привести еще и другие интегральные многообразия M_1. Например, мы можем заставить точку x, y, z двигаться вдоль произвольной пространственной кривой и при этом выбирать касающиеся пространственной кривой двумерные элементы из соответствующих конусов. Наконец, можно также исходить из некоторой произвольной поверхности и отыскивать на ней все двумерные элементы, удовлетворяющие нашему уравнению $f = 0$; как правило они образуют на поверхности полосу, т. е. опять-таки интегральное многообразие M_1. На основании этого мы можем легко построить неограниченно много полос, при помощи „удобоисполнимых операций", т. е. без всякой интеграции.

Но оказывается, что среди них опять имеются особенные полосы, которые мы, как и в предыдущем случае, назовем *характеристическими полосами.* В качестве их предварительного определения мы возьмем следующее:

Мы получим характеристические полосы, если проведем на интегральной поверхности кривые, имеющие в каждой своей точке в качестве касательной направление, по которому соответствующий элементарный конус касается интегральной поверхности.

Но самым важным будет следующее:

Оказывается, что эти характеристические полосы могут быть определены независимо от отдельной интегральной поверхности системой обычных диференциальных уравнений и что, вследствие этого, обратно, интегральные поверхности можно строить из характеристических полос.

Чтобы изложить независимое определение полос, мы будем исходить из отдельного элемента и сначала отметим в нем направление элементарного конуса, исходящего из его точки. Уравнение этого элементарного конуса для фиксированных величин x, y, z дается уравнением $f(x, y, z; p, q) = 0$. Как найти означенное направление $dx : dy : dz$ для данных значений x, y, z; p, q?

Ура внение

$$\frac{\partial f}{\partial p}(p' - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(q' - q) = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial p}p' + \frac{\partial f}{\partial q}q' - \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0$$

является условием того, что элемент p', q' проходит через искомое направление. Пользуясь общим условием того, что прохождение элемента p, q через направление $dx : dy : dz$ выражается уравнением $dx\,p' + dy\,q' - dz = 0$, мы найдем путем сравнения коэфициентов:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(\frac{\partial f}{\partial p}p + \frac{\partial f}{\partial q}q\right).$$

Это дает нам направление, в котором лежит та точка, которую мы должны выбрать для построения характеристической полосы.

Теперь будем поступать двойственным образом. Будем исходить из какой-нибудь плоскости; в ней лежит однопараметрическое семейство элементов нашего уравнения $f = 0$, соприкасающихся с определенной кривой плоскости. Пусть x, y, z; p, q один из этих элементов. Мы хотим теперь определить направление касательной кривой, исходящей от точки x, y, z в плоскости p, q, спросив себя, как мы должны изменить величины p и q для того, чтобы плоскость p, q вращалась вокруг касательной. Простое вычисление дает тогда:

$$dp : dq = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Определение характеристических полос, которые мы впредь положим в основу, будет таково: *мы получим характеристическую полосу нашего уравнения* $f(x, y, z; p, q) = 0$, *если мы среди двумерных элементов нашего уравнения будем таким образом продвигаться вперед, чтобы получить для точки элемента вычисленное направление движения вперед, а для плоскости этого элемента получить вычисленное направление вращения.*

Что таким образом мы как раз получим характеристические полосы на интегральных поверхностях, о которых мы говорили сначала, мы докажем только сейчас. Составим, при условии предварительного введения множителя пропорциональности ρ для изменения величин x, y, z; p, q при этом движении, из вычисленных определяющих уравнений следующий пропорциональный ряд:

$$dx : dy : dz : dp : dq =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) : \rho\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : \rho\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Но элемент всегда должен удовлетворять уравнению $f(x, y, z; p, q) = 0$; поэтому должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq = 0.$$

Если вставить сюда пропорциональные члены, то мы получим для ρ значение $\rho = -1$.

Следовательно, наши характеристические полосы будут определяться дифференциальными уравнениями:

$$dx : dy : dz : dp : dq =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Что касается значения этих полос для интегральных поверхностей, то мы утверждаем следующее:

Если интегральная поверхность имеет с характеристической полосой один общий элемент, то она содержит полосу на всем ее протяжении. Можно получить все интегральные поверхности (если не обращать пока внимания на „особые решения", которые мы здесь опять оставим в стороне и к которым мы еще вернемся), соединяя вместе характеристические полосы, которые исходят из элементов какой-нибудь другой полосы, удовлетворяющей уравнению $f = 0$.

К этому следует присоединить следующее соображение.

Двумерные элементы пространства зависят от пяти параметров, а элементы, удовлетворяющие уравнению $f = 0$, от четырех. Эти последние указанным образом соединяются в характеристические полосы, так что характеристические полосы определяются тремя постоянными. Тогда сущность метода интегрирования дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, о котором здесь идет речь, заключается в следующем: *прежде всего дело сводится к тому, чтобы определить трехпараметрическое семейство характеристических полос, которые составляются из элементов уравнения. Затем уже не представляет затруднений из этих полос составить интегральные поверхности.*

Если эту теорию вы посмотрите в старых учебниках, то найдете, что, следуя Монжу, вместо того, чтобы говорить о характеристических полосах, обычно говорят о „характеристиках", т. е. только о кривых, а не о соответствующих двумерных элементах. Как раз во введении „характеристических полос" мы и видим существенное преимущество трактовки Ли.

Возникает вопрос: как доказать наши предложения? Для этой цели уравнение $f(x, y, z; p, q) = 0$ удобно разрешить относительно z; мы получим: $z - \psi(x, y; p, q) = 0$. Этим, следовательно, исключаются те случаи, когда z вообще не входит в уравнение $f = 0$; эти случаи легко трактовать без дальнейших пояснений непосредственно. Тогда наше дифференциальное уравнение для характеристической полосы переходит в

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \psi}{\partial q} : p\frac{\partial \psi}{\partial p} + q\frac{\partial \psi}{\partial q} : p - \frac{\partial \psi}{\partial x} : q - \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Пусть теперь $z - \varphi(x, y) = 0$ будет интегральной поверхностью нашего уравнения $f = 0$.

Вследствие этого мы можем положить:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

где p, q обозначают первые, а r, s, t вторые частные производные от z. Если x, y, z; p, q мы назвали элементом поверхности, то совокупность x, y, z; p, q; r, s, t мы назовем *куском поверхности*. Для отдельной точки интегральной поверхности „кусок" фиксирует не только касательную плоскость, но и кривизну. Теперь исследуем, что можно сказать о „куске поверхности" некоторой интегральной поверхности, который соприкасается с данным элементом поверхности.

Из данного уравнения $z - \psi(x, y; p, q) = 0$ следует:

$$dz = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq.$$

Если мы подставим значения для dz, dp, dq, то получим:

$$p\,dx + q\,dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp\,(r\,dx + s\,dy) + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,(s\,dx + t\,dy).$$

Тогда это уравнение должно обратиться в тождество, т. е. коэфициенты при dx и dy в обеих частях равенства должны быть равны. Это доставляет два уравнения:

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,r + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,s, \tag{1}$$

$$q = \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,s + \frac{\partial\psi}{\partial q}\,t. \tag{2}$$

Из них мы должны определить три величины r, s, t. Следовательно, мы получаем систему решений, содержащую еще один параметр. Но это показывает, *что одного и того же элемента x, y, z; p, q касается целое однопараметрическое семейство кусков r, s, t, удовлетворяющих нашему уравнению.*

Чтобы составить себе лучшее представление об этих кусках, рассмотрим соседний элемент $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $p + dp$, $q + dq$ и спросим себя, когда он соприкасается с одним из этих кусков поверхности. Тогда к нашим последним двум уравнениям присоединяются еще два следующие:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \tag{3}$$

$$dq = s\,dx + t\,dy. \tag{4}$$

Теперь надо исследовать разрешимость относительно r, s, t системы этих четырех уравнений, изображающих отношение куска r, s, t к соседнему элементу. Мы просто поступим так, что действительно вычислим из уравнений 1 и 2, 3 и 4 величины r и s, s и t. Получится: из уравнений 1 и 3

$$r = \frac{+\frac{\partial\psi}{\partial q}\,dp - \left(p - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy}{N},$$

$$s = \frac{-\frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp + \left(p - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx}{N},$$

а из уравнений 2 и 4

$$s = \frac{+\frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq + \left(q - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy}{N},$$

$$t = \frac{-\frac{\partial\psi}{\partial p}\,dq + \left(q - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx}{N},$$

причем везде:

$$N = \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dx - \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dy.$$

Если наши четыре уравнения должны быть друг с другом совместны, то оба значения для s должны совпадать, т. е. должно быть:

$$\left(p - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(q - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy - \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dp - \frac{\partial\psi}{\partial q}\,dq = 0.$$

Но это уравнение просто показывает, что соседний элемент $x + dx$, $y + dy$ удовлетворяет исходному уравнению $z - \psi(x, y; p, q) = 0$. *Поэтому если наши четыре уравнения должны быть разрешимы, то соседний элемент, как и исходный элемент, должен удовлетворять рассматриваемому дифференциальному уравнению с частными производными.*

Все же мы должны еще добавить ограничивающее условие для того, чтобы значения r, s, t были годны к употреблению без дальнейших рассуждений: *знаменатель N должен быть отличен от нуля.*

Но если это условие выполнено, то мы можем сказать: *каждый соседний элемент нашего уравнения $f = 0$ дает совершенно определенные значения для r, s и t, т. е. принадлежит некоторому куску поверхности.* Если же знаменатель N обращается в нуль, то значения r, s, t будут, вообще говоря, бесконечными и в этом случае, конечно, ничего нельзя сказать без дальнейших исследований, так как мы находимся тогда в особой точке интегральной поверхности; возникающие здесь возможности мы рассматривать не будем [1]). Однако дело обстоит иначе, если при $N = 0$ числители также обращаются в нуль, так что мы для r, s, t получим формулу $0 : 0$, т. е. неопределенное выражение. Но обращение в нуль числителя совместно с $N = 0$ приводит нас к условию

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial\psi}{\partial p} : \frac{\partial\psi}{\partial q} : p - \frac{\partial\psi}{\partial x} : q - \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

в котором мы тотчас узнаем дифференциальные уравнения характеристических полос.

Поэтому, если соседний элемент взят на характеристической полосе, то не возникнет никакого обращения в бесконечность для величин r, s, t, а получатся для них неопределенные значения. Мы заключаем, что соседний элемент касается всех кусков поверхности нашего уравнения.

[1]) Укажем без доказательства, что подобная полоса, вообще говоря, является кривой возврата, исходящей из нее интегральной поверхности.

Это предложение дает основу, из которой теперь получается доказательство наших утверждений. Именно, если исходить из произвольного элемента поверхности $x, y, z; p, q$ и построить к нему какую-нибудь интегральную поверхность, то таким образом определенный кусок поверхности r, s, t будет поставлен в соответствие этому элементу. Кусок поверхности содержит также соседний элемент характеристической полосы, как мы только что видели. От этого соседнего элемента мы можем таким же образом двигаться дальше; принадлежащий к нему кусок интегральной поверхности будет содержать следующий за ним соседний элемент характеристической полосы и так далее. Отсюда следует, что вся характеристическая полоса лежит на интегральной поверхности и, следовательно, *все интегральные поверхности, имеющие элемент* $x, y, z; p, q$ *общим, также имеют общей соответствующую характеристическую полосу, исходящую от этого элемента.*

Перейдем теперь от элемента $x, y, z; p, q$ к произвольному соседнему элементу, который находится с ним в соединенном положении и удовлетворяет условию:

$$N = \frac{\partial \psi}{\partial p}\,dx - \frac{\partial \psi}{\partial q}\,dy \neq 0.$$

От этого соседнего элемента исходит новая характеристическая полоса. *Тогда на всем своем протяжении она будет лежать соединенно с характеристической полосой, исходящей из исходного элемента.* Ведь всегда можно, как мы показали, найти кусок поверхности, содержащий первоначальный элемент и соседний элемент. Если расширить этот кусок до произвольной интегральной поверхности, то она будет содержать обе характеристические полосы, исходящие от этих элементов. Следовательно, обе полосы протекают по поверхности рядом друг с другом, т. е. они лежат соединенно на всем своем протяжении.

Из этих результатов следует тот же метод интеграции дифференциального уравнения с частными производными $z - \psi(x, y; p, q) = 0$, которым мы и занимаемся. Представим себе прежде всего характеристические полосы определенными посредством интеграции их обыкновенных дифференциальных уравнений. *Тогда мы найдем общую интегральную поверхность нашего уравнения* $z - \psi(x, y; p, q) = 0$ [1]), *выбирая все возможные полосы, для которых* $N \neq 0$ *и заставляя выходить соответствующие характеристические полосы из различных элементов какой-нибудь определенной полосы. Тогда их совокупность покрывает некоторую соответствующую интегральную поверхность и мы получим, таким образом, общую интегральную поверхность, которую мы и искали.*

Следовательно, этим интеграция рассматриваемого дифференциального уравнения с частными производными сводится к интеграции системы обыкновенных дифференциальных уравнений, посредством которой определяются характеристические полосы. Правда, таким образом мы получим только общее решение нашего дифференциального уравнения; *особые решения* (если таковые имеются) исключаются. Они связаны с „осо-

[1]) И разумеется каждую отдельную интегральную поверхность бесчисленное множество раз.

быми элементами" уравнения, для которых в дифференциальных уравнениях характеристических полос

$$dx : dy : dz : dp : dq = \frac{\partial\psi}{\partial p} : \frac{\partial\psi}{\partial q} : p\frac{\partial\psi}{\partial x} : q\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

все правые части

$$\frac{\partial\psi}{\partial p},\quad \frac{\partial\psi}{\partial q},\quad p\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad q\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

обращаются в нуль. Остается исследовать в каждом отдельном случае — в общем случае ничего нельзя сказать — дадут ли эти элементы особое решение или нет.

В качестве литературы, относящейся к теории особых решений, следует указать на знаменитую работу Дарбу в „Memoires des Savants étrangers", т. 27 (1883).

Теперь спросим себя о *значении приведенного метода интеграции*. В более старых учебниках находят иногда подразделение дифференциальных уравнений на такие, которые „можно интегрировать", т. е. которые можно удовлетворить посредством известных элементарных функций, и на такие, „интеграция которых невозможна", потому ли, что случайно мы не в состоянии найти интеграл в явной форме, потому ли, что действительно дифференциальное уравнение не может быть удовлетворено элементарными функциями (sin, cos, log, e^z и т. д.). Во всяком случае научная точка зрения заключается в том, что дифференциальными уравнениями вообще пользуются для определения функций и только быть может исследуют, можно ли их выразить посредством знакомых функций или нет. В этом смысле наш способ также подлежит обсуждению. Значение сведения интегральной поверхности к характеристическим полосам заключается, разумеется, не в том, что благодаря ему можно легче вычислить интегральную поверхность, чем при обычном методе или при непосредственном разложении в ряд. Нетрудно построить примеры, в которых этого не будет. *Скорее введение полос дает возможность лучше уразуметь порождение интегральных поверхностей: видно, что функция $z = \varphi(x, y)$ двух переменных, с одной стороны, зависит от течения функций одного переменного, определяемых посредством полос, а с другой стороны, от произвольного порядка следования этих полос.*

Как же относится теория характеристических полос к *теории дифференциальных уравнений с частными производными Лагранжа*, излагаемой в старых учебниках? Если дано дифференциальное уравнение $z - \psi(x, y; p, q) = 0$, то по Лагранжу отыскивают функцию $z = \varphi(x, y, z; \alpha, \beta)$ с двумя произвольными параметрами α, β, удовлетворяющую рассматриваемому уравнению. Подобную функцию $z = \varphi(x, y, z; \alpha, \beta)$ называют *„полным интегралом"* уравнения. Но так как каждая поверхность двупараметрического семейства $z = \varphi(x, y, z; \alpha, \beta)$ изображает двумерное многообразие элементов, то *смысл полного интеграла Лагранжа заключается в том, что надо попытаться каким-нибудь образом подразделить четырехмерное многообразие элементов уравнения* $z - \psi(x, y; p, q) = 0$ на поверхности, зависящие от двух параметров α, β.

Когда это удается сделать, то, следуя Лагранжу, находят огибающие всевозможных однопараметрических подсемейств поверхностей $z=\varphi$ полного интеграла. Если просто положить $\beta=\omega(\alpha)$, т. е. β равняется произвольной функции α, то получим: $z=\varphi(x, y; \alpha, \omega(\alpha))$. Этим из всего семейства выделяется однопараметрическое подсемейство интегральных поверхностей. Теперь находят кривые пересечения каждой из этих интегральных поверхностей с соседней поверхностью, присоединяя к $z=\varphi(x, y; \alpha, \omega(\alpha))$ уравнение

$$z=\varphi(x, y; \alpha+d\alpha, \omega(\alpha+d\alpha)).$$

Вместо последнего, учитывая первое уравнение, берем уравнение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0.$$

Затем исключаем α из

$$z=\varphi(x, y; \alpha, \omega(\alpha)) \quad \text{и} \quad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$$

и, таким образом, получаем *„общий интеграл“*.

Наконец, Лагранж берет еще огибающую всех поверхностей $z=\varphi(x, y; \alpha, \beta)$, определяемую уравнениями:

$$z=\varphi, \quad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}.$$

По Лагранжу она дает *особое решение*.

Этот ход идей Лагранжа связан с нашей общей теорией. *Каждые две соседние поверхности полного интеграла имеют общую характеристическую полосу и поскольку общий интеграл огибает бесконечно много поверхностей полного интеграла, то это означает, что эти общие поверхности строятся из характеристических полос.*

Просмотрим еще раз наши последние рассмотрения. Они относились к следующим трем формам диференциального уравнения с частными производными:

1. $f(x, y, z)=0$;
2. $C-Ap-Bq=0$ и
3. Общей форме $f(x, y, z; p, q)=0$.

Если эти три случая сравнить между собой, то мы увидим в них ту общую черту, что мы всегда имеем характеристические полосы, которые зависят от трех постоянных и из которых надлежащим образом выбранные однопараметрические семейства образуют некоторое интегральное многообразие M_2. В случае 1 мы имели „пучок элементов“; в случае 2 — полосы, примыкающие к двум соседним характеристикам; в случае 3 — определяемые обыкновенными диференциальными уравнениями полосы, признанные нами как характеристические полосы.

Глубокую причину согласованности этих трех случаев мы видим, вместе с Ли, в том обстоятельстве, что два произвольных диференциальных уравнения с частными производными первого порядка в „малом“ могут быть переведены друг в друга посредством преобразования прикосновения, причем характеристические полосы сохраняют свое значение — или другими словами, что диференциаль-

ное уравнение с частными производными первого порядка в точках регулярности относительно группы преобразования прикосновения не имеют никаких абсолютных инвариантов. Но если считать это утверждение доказанным, то, следуя Ли, мы тотчас увидим, *что теорию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно прямо вычитать из простейшего подобного уравнения* $z = 0$, представив себе интегральные многообразия M_2 этого последнего уравнения и выбрав все его свойства, остающиеся инвариантными при преобразованиях прикосновения. Но эти интегральные многообразия M_2 изображаются, как известно, всеми двумерными элементами в некоторой точке плоскости $z = 0$ или всеми двумерными элементами, соприкасающимися с некоторой кривой на $z = 0$ или, наконец, элементами самой плоскости $z = 0$. Эти соображения Ли впервые были опубликованы в Göttinger Nachrichten в октябре 1872 г. Ср. далее § 94, 95.

Закончив этим изложение общей теории, мы перейдем теперь к ее *отношению к линейной и сферической геометриям*. Вследствие этого мы опять обратимся к работе Ли в Math. Annalen, т. 5.

§ 73. Дифференциальные уравнения с частными производными геометрии линий и геометрии сфер.

Что касается *геометрии линий*, то мы будем рассматривать *линейную конгруэнцию* и *линейный комплекс*. Линейная конгруэнция представляет собой двучленную систему прямых линий, в то время как линейный комплекс дает для каждой данной точки пространства целый конус из прямых линий, т. е. содержит трехпараметрическое семейство прямых линий. Мы утверждаем, что с обоими образами легко можно связать дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Именно, следуя Ли, можно потребовать, чтобы в первом случае двумерный элемент всегда соприкасался с прямой линией конгруэнции, во втором случае, чтобы двумерный элемент касался конуса комплекса, исходящего из его точки. *Поэтому в первом случае мы будем приведены к линейному, а во втором случае к общему дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка между* x, y, z. В первом случае характеристиками являются сами прямые конгруэнции, а интегральные поверхности являются линейчатыми поверхностями, которые могут быть образованы из линий конгруэнции и, следовательно, характеристики на этих интегральных поверхностях являются одновременно *асимптотическими линиями*.

Это все имеет место и для линейных комплексов; *здесь также характеристики образуют на интегральных поверхностях, принадлежащих к линейным комплексам, асимптотические линии*. Как можно в этом убедиться? Для этой цели мы прежде всего выясним понятие кривой комплекса. Под этим мы понимаем кривую, огибающую прямые комплекса. Происхождение подобных кривых мы можем себе представить таким образом, что мы из произвольной точки вдоль некоторой исходящей из нее прямой комплекса продвигаемся вперед на один линейный элемент, затем из конечной точки линейного

элемента продвигаемся вдоль соседней исходящей из этой конечной точки прямой комплекса на следующий линейный элемент, и так далее. Тогда видно, что все полосы диференциального уравнения с частными производными, которые являются полосами комплекса, т. е. примыкают к некоторой кривой комплекса, являются *полосами прикосновения*, так как соприкасающаяся плоскость кривой в произвольной ее точке всегда одновременно является касательной плоскостью к исходящему из этой точки конусу комплекса. *В частности, характеристические полосы являются примерами полос комплекса, поэтому они также являются соприкасающимися полосами, следовательно, асимптотическими кривыми интегральных поверхностей.*

Эти соотношения Ли разработал еще далее в Math. Annalen, т. 5. Вообще это уже старая задача — построить диференциальное уравнение с частными производными первого порядка, характеристические полосы которого являются асимптотическими кривыми. Ли показывает, что эти диференциальные уравнения исчерпываются диференциальными уравнениями линейной конгруэнции и линейного комплекса. Далее, по поводу двух линейных комплексов он исследует, что означает геометрически, если они имеют общие интегральные поверхности. Наконец, он занимается интеграцией линейных комплексов второй степени; эти исследования в аналитической форме Клейн довел до конца в Math. Annalen, т. 5 в работе Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.

Рассмотрим несколько ближе специальный пример, относящийся к теории диференциальных уравнений с частными производными линейного комплекса. В качестве такового мы возьмем *тетраэдральный комплекс*. Как мы знаем, он определяется уравнением:

$$ap_{12}p_{34}+bp_{13}p_{42}+cp_{14}p_{23}=0$$

и состоит из всех прямых, пересекающих грани тетраэдра, при условии постоянного двойного отношения. Если мы возьмем этот тетраэдр в качестве системы координат x, y, z, т. е. введем неоднородный способ записи, то названное уравнение примет вид:

$$a(x'-x)(yz'-y'z)+b(y'-y)(zx'-z'x)+ \\ +c(z'-z)(xy'-x'y)=0.$$

Если мы заменим x', y', z' координатами $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ соседней к x, y, z точки, то получим уравнение

$$a\,dx(y\,dz-z\,dy)+b\,dy(z\,dx-x\,dz)+c\,dz(x\,dy-y\,dx)=0$$

или

$$(b-c)x\,dy\,dz+(c-a)y\,dz\,dx+(a-b)z\,dx\,dy=0.$$

Это уравнение при фиксированных x, y, z доставляет нам конус направлений, исходящий в нашем комплексе из точки x, y, z. Найдем теперь уравнение касательной этого конуса. Мы найдем его тем же способом, как если бы мы в последнем уравнении понимали dx, dy. dz как однородные точечные координаты, а затем построили бы уравнение „конического сечения“ в плоских прямолинейных координатах

с условием $u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0$; следовательно, мы найдем его посредством приравнивания нулю окаймленного определителя из коэфициентов:

$$\begin{vmatrix} 0 & (a-b)z & (c-a)y & u \\ (a-b)z & 0 & (b-c)x & v \\ (c-a)y & (b-c)x & 0 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подобно тому, как отношение величин $dx : dy : dz$, удовлетворяющих прежнему уравнению, дает нам направление конуса, так и отношение величин $u : v : w$, удовлетворяющих последнему уравнению, определяет касательную плоскость конуса. Тогда это детерминантное уравнение одновременно представляет искомое диференциальное уравнение с частными производными, если мы внесем в него вместо u, v, w

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

или также p, q, -1.

Спросим теперь, как это диференциальное уравнение интегрируется. Для этой цели проще всего опять обратиться к первому уравнению конуса, которое мы запишем:

$$(b-c)\frac{dy\,dz}{yz} + (c-a)\frac{dz\,dx}{zx} + (a-b)\frac{dx\,dy}{xy} = 0.$$

Сделаем подстановку

$$\log x = \xi, \quad \log y = \eta, \quad \log z = \zeta,$$

т. е. точечное преобразование, при котором пространство x, y, z преобразуется в пространство ξ, η, ζ; тогда получим:

$$(b-c)\,d\eta\,d\zeta + (c-a)\,d\zeta\,d\xi + (a-b)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Теперь займемся простейшей задачей — проинтегрировать это диференциальное уравнение и связанное с ним деференциальное уравнение с частными производными. Посредством обращения приведенной подстановки мы тотчас *выполним интеграцию нашего прежнего диференциального уравнения с частными производными.*

Займемся сначала последним уравнением. Оно, как мы сейчас увидим, представляет конус направлений, лучи которого встречают точки определенного конического сечения в несобственной плоскости. Это коническое сечение определяется уравнением:

$$(b-c)\eta\zeta + (c-a)\zeta\xi + (a-b)\xi\eta = 0.$$

Это коническое сечение мы будем называть просто абсолютным, так как нетрудно в каждом отдельном случае преобразовать его проективно в абсолютное коническое сечение, если только не обращать внимания на действительность преобразований. Но тогда конус направлений, исходящий от точки ξ, η, ζ, будет доставляться изотропными прямыми, которые из нее исходят. *Следовательно, логарифмическое отображение переводит тетраэдральный комплекс в изотропные*

прямые, т. е. оно преобразует дифференциальное уравнение направлений, а также, разумеется, и дифференциальное уравнение с частными производными на одной стороне в таковое же уравнение на другой стороне.

Поэтому, если мы захотим теперь проинтегрировать наш тетраэдральный комплекс, то перед нами будет стоять задача интеграции изотропного комплекса. Но это тотчас же можно выполнить; *интегральные поверхности изотропного комплекса являются нам хорошо известными изотропными развертывающимися поверхностями, а их характеристические полосы являются полосами этой поверхности вдоль изотропных прямых, ее образующих.*

Вместе с тем в этом примере мы находим наилучшее подтверждение общего предложения о том, что две интегральные поверхности, имеющие общий элемент, содержат всю полосу, исходящую из этого элемента. *Отсюда интегральные поверхности и характеристические полосы тетраэдрального комплекса получаются посредством логарифмического отображения*; в частности, характеристики являются кривыми типа W-кривых, которые соответствуют изотропным прямым пространства ξ, η, ζ.

Этим мы закончим рассмотрение нашего примера и прибавим только одно общее замечание.

В конце концов мы поставили *три линейных комплекса* во взаимную связь, именно, в линейном пространстве мы имели линейный комплекс $p_{13} = p_{42}$, затем в сферическом пространстве — изотропный комплекс и, наконец, опять в линейном пространстве — тетраэдральный комплекс. Между первыми двумя комплексами мостом является прямолинейно-сферическое отображение; между последними двумя — точечное отображение, которое мы назвали логарифмическим отображением. Это сравнение трех линейных комплексов, таким образом поставленных в соответствие друг другу, и было для Ли исходной точкой, к которой примыкают все его работы 1870 года. Мы уже в § 47 говорили о том, как Ли развил теорию минимальных поверхностей, которые в изотропном комплексе удовлетворяют дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка. Как Ли получил этот результат? Сначала он искал в тетраэдральном комплексе поверхности, удовлетворяющие некоторому дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка, а затем подвергал их логарифмическому отображению, чтобы сразу выяснить, что здесь подобные поверхности дают минимальные поверхности, так что, следовательно, его теория таких поверхностей содержит теорию минимальных поверхностей.

Теперь, все то, что мы сказали о дифференциальных уравнениях с частными производными линейного комплекса и линейной конгруэнции мы должны перенести на соответствующие образы *геометрии сфер*. Сейчас же можно сказать, что в случае каждой сферической конгруэнции или каждого сферического комплекса мы можем также построить дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Вообще, дело идет о том, чтобы из пятимерной совокупности двумерных элементов пространства выделить четырехмерную

совокупность. Для этого в случае линейной конгруэнции мы выбираем просто все двумерные элементы всех сфер конгруэнции. Тогда задача опять состоит в том, чтобы самым общим способом из этих элементов составить другие поверхности. Очевидно, мы получим тогда все *поверхности каналов*, огибающие сферы конгруэнции, потому что сферы конгруэнции образуют, разумеется, полное решение рассматриваемого диференциального уравнения с частными производными. Этим случай сферической конгруэнции уже достаточно разобран.

Сложнее обстоит дело с соотношениями в случае *сферического комплекса*. Напомним, что в случае линейного комплекса мы выбирали все элементы, соприкасающиеся с конусом направлений в некоторой произвольной точке; это будут все элементы пространства, принадлежащие одновременно двум соседним прямым комплекса. В соответствии с этим среди двумерных элементов каждой сферы комплекса нам придется всегда выделять те элементы, которые она имеет общими с соседними сферами. Но ими являются двумерные элементы сферы, прикасающиеся к соответствующему „траекторному кругу". *В самом деле, таким образом мы получаем совокупность двумерных элементов, образующих то, что мы называем диференциальным уравнением с частными производными сферического комплекса.*

Так как мы знаем, что характеристические полосы линейного комплекса являются полосами соприкосновения, то здесь мы имеем предложение о том, *что характеристические полосы сферического комплекса являются полосами кривизны.* На соответствующих интегральных поверхностях они, следовательно, дают линии кривизны. Одновременно соответствующие сферы комплекса являются соприкасающимися сферами интегральной поверхности.

Мы изложим теперь интересную связь этой теории с *проблемой геодезических линий*, которую Ли также разработал в т. 5 Mathematischen Annalen, гораздо более общим образом. Пусть координатами сферы будут α, β, γ; r, причем α, β, γ означают прямоугольные координаты центра, а r — радиус. Пусть задан специальный комплекс $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, т. е. *все сферы, центры которых лежат на поверхности* $f = 0$. Дело идет о том, чтобы проинтегрировать этот специальный комплекс, т. е. найти все поверхности, сферы кривизны которых имеют свои центры на поверхности $f = 0$. Центр каждой такой сферы кривизны относительно интегральной поверхности мы назовем центром кривизны поверхности, так что, резюмируя, мы получаем следующее предложение: *проинтегрировать специальный комплекс* $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ *значит найти все поверхности пространства, для которых одна из полостей поверхности центров кривизны совпадает с поверхностью* $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Так как в нашем комплексе $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, радиус r отсутствует, то ясно, что он переходит в себя при подстановке $r' = r + \text{const}$. Эта подстановка представляет собой произвольное *параллельное преобразование* и, разумеется, всегда переводит интегральную поверхность опять в интегральную поверхность. Поэтому вместе со всякой интегральной поверхностью комплекса все ее параллельные поверхности также всегда будут интегральными поверхностями. Для того, кто знаком

с общей теорией поверхностей центров кривизны, отсюда без дальнейших пояснений следует: *полосам кривизны отдельных интегральных поверхностей, так же как и полосам их параллельных поверхностей, соответствует на* $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ *семейство геодезических линий, а сечения, которые доставляют параллельные интегральные поверхности с* $f = 0$, *образуют семейство к нему ортогональных эквидистантных кривых.*

Таким образом отыскание геодезических линий на $f = 0$ и соответствующих им эквидистантных кривых как раз соответствует отысканию характеристических полос нашего сферического комплекса и образованных из них интегральных поверхностей. Характеристические полосы сферического комплекса являются просто эвольвентами прямых, лежащих на $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. А геометрическая связь между геодезическими линиями и системой эквидистантных кривых, с которой мы познакомились раньше, является образом общей теории о составлении интегральных поверхностей диференциального уравнения с частными производными первого порядка из его характеристических полос.

В той же статье Ли связывает также теорию линейных и сферических образов с исследованиями о диференциальных равнениях с частными производными *второго* порядка. В частности, мы здесь укажем на элегантную трактовку проблемы отыскания всех поверхностей со сферическими линиями кривизны [1]).

Что касается литературы по этой теме, то следует еще назвать книгу Ли и Шеффера (Lie und Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, вышел только первый том) и некоторые главы в лекциях Дарбу по диференциальной геометрии.

Перейдем теперь к последнему предмету этой части наших лекций, именно к краткому обзору общей теории преобразований прикосновения. Изложение этой теории будет теперь тем более просто, что мы уже о ней говорили. Прежде всего поговорим о *перечислении всех преобразований прикосновения в* R_3.

§ 74. Общая теория преобразований прикосновения.

Мы знаем, что в пространстве R_3 точки, кривые и поверхности одинаковым образом являются интегральными многообразиями M_2 проблемы Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Сообразно с этим мы будем классифицировать преобразования прикосновения на такие, которые ставят в соответствие точкам точки же, или кривые, или поверхности. Разумеется это есть та классификация, которую предпочитает точечная точка зрения. Мы утверждаем: *„каждый" способ ставить в соответствие точкам точки же, или трехпараметрическую систему кривых, или поверхностей дает „одно" преобразование прикосновения.* Разумеется это утверждение имеет место „im Kleinen" при надлежащих ограничениях.

Рассмотрим подробнее последний случай. Пусть дано какое-нибудь уравнение $\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0$. Если мы зафиксируем координаты

[1]) См. по этому поводу W. Blaschke, Flächen mit einer Schar ebener oder sphärischer Krümmungslinien, Hamburg. Abhandlungen, том 4 (1926).

x', y', z', то в силу этого уравнения точке x', y', z' одного пространства ставится в соответствие самым общим образом некоторая поверхность второго пространства и обратно. Прибавим еще те уравнения, которые определяют величины p и q, p' и q' касательной плоскости поверхности в точке x, y, z и x', y', z', именно:

$$p = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z}},$$

$$p' = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}, \quad q' = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}.$$

Эти последние уравнения вместе с первоначальным уравнением $\Omega = 0$, вообще говоря [1]), ставят в соответствие каждому элементу $x, y, z; p, q$ некоторый элемент $x', y', z'; p', q'$ и обратно, т. е. они определяют, вообще говоря, *преобразование элементов*. При этом уравнение $\Omega = 0$ называют *направляющим уравнением* (aequatio directrix).

Мы утверждаем, что *уравнение* $\Omega = 0$, *вместе с четырьмя полученными из него уравнениями, дает, вообще говоря, преобразование прикосновения*. В этом легко убедиться аналитически.

Из уравнения $\Omega = 0$ следует:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \Omega}{\partial y'}dy' + \frac{\partial \Omega}{\partial z'}dz' = 0,$$

т. е. приращения dx, dy и т. д. всегда связаны этим условием. Это последнее, если принять во внимание выражения для p, q, p', q', перейдет тотчас в следующее:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) + \frac{\partial \Omega}{\partial z'}(dz' - p'dx' - q'dy') = 0.$$

А из этого уравнения ясно, что мы имеем перед собой преобразование прикосновения.

Перейдем теперь ко второму случаю, в котором точки одного пространства должны быть поставлены в соответствие кривым второго пространства и наоборот. Подобное соответствие самым общим образом осуществляется одновременно наличием двух уравнений:

$$\Omega_1(x, y, z;\ x', y', z') = 0 \quad \text{и} \quad \Omega_2(x, y, z;\ x', y', z') = 0.$$

---

[1]) В качестве условия для разрешимости получается, что определитель

$$\begin{vmatrix} \Omega_{xx'} & \Omega_{xy'} & \Omega_{xz'} & \Omega_{x'} \\ \Omega_{yx'} & \Omega_{yy'} & \Omega_{yz'} & \Omega_{y'} \\ \Omega_{zx'} & \Omega_{zy'} & \Omega_{zz'} & \Omega_{z'} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{где например } \Omega_{xx'} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x'}$$

не обращается в нуль в силу уравнения $\Omega = 0$.

Если мы зафиксируем, например, x', y', z', то x, y, z будут заполнять некоторую кривую и наоборот. Теперь мы будем опять рассматривать двумерные элементы, касающиеся кривых в обоих пространствах. Для этой цели мы опять вычислим величины p и q, p' и q', принадлежащие двумерным элементам линейного элемента кривой. Положим:

$$p = -\frac{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial x}}{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial y}}{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial z}}$$

и

$$p' = -\frac{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial x'}}{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial z'}}, \quad q' = -\frac{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial y'}}{\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial z'}}.$$

В этих уравнениях λ является произвольным параметром, так что $\Omega_1+\lambda\Omega_2=0$ представляет собой линейный пучок поверхностей, проходящих через линию пересечения поверхностей $\Omega_1=0$ и $\Omega_2=0$. Если к этим четырем уравнениям мы присоединим первоначальные уравнения $\Omega_1=0$ и $\Omega_2=0$ и исключим произвольную величину λ, то мы получим опять, вообще говоря, пять соотношений между величинами x, y, z; p, q и x', y', z'; p', q', т. е. получим *преобразование элементов.*

Эти уравнения представляют также некоторое преобразование прикосновения. Доказательство такое же, как и выше. Напишем уравнение:

$$\frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial x}dx + \ldots + \frac{\partial(\Omega_1+\lambda\Omega_2)}{\partial z'}dz' = 0,$$

которое следует из $\Omega_1+\lambda\Omega_2=0$; из этого уравнения после простого преобразования опять получится, что $dz - p\,dx - q\,dy$ с точностью до некоторого множителя совпадает с $dz' - p'dx' - q'dy'$. Уравнения: $\Omega_1=0$ и $\Omega_2=0$ мы будем опять называть *направляющими уравнениями.*

Наконец, будем исходить из трех направляющих уравнений: $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$, $\Omega_3=0$. Эти уравнения изображают точечное преобразование, и мы уже знаем из предыдущего (а также можем это доказать аналогично тому, как в обоих предыдущих случаях), что точечное преобразование всегда может быть рассматриваемо как преобразование прикосновения.

Если мы хотим получить простые примеры для всех рассмотренных случаев, то удобнее всего положить в основу *билинейные* уравнения.

Одно билинейное уравнение между координатами x, y, z; x', y', z' представляет общее линейное двойственное преобразование, уже давно знакомое нам. Два совместно рассматриваемые билинейные уравнения ставят в соответствие каждой точке пространства линию пересечения двух плоскостей, т. е. прямую линию. Поэтому точкам будут соответствовать прямые линии некоторого комплекса. Подробное рассмотрение этого можно найти в уже не раз упоминавшейся работе Ли в 5 томе Mathematischen Annalen; в качестве специального примера полу-

чается прямолинейно сферическое преобразование Ли. Именно, отсюда Ли и пришел впервые к этому преобразованию.

Если, наконец, заданы три билинейных уравнения, то мы их можем разрешить относительно x', y', z' или же относительно x, y, z. Неизвестные будут равняться частным от деления двух определителей третьего порядка, как это легко видеть. Поэтому мы будем иметь перед собой Кремоново преобразование третьей степени. Этим весьма общим преобразованием пространства много занимались Кели и Нетер в 1870 г.: первый в Proc. London Mathematical Society, т. 3, а второй в Math. Annalen, т. 3. Это преобразование в качестве специальных случаев охватывает почти все известные Кремоновы преобразования пространства.

При этих рассмотрениях мы так развили теорию преобразований прикосновения пространства R_3, как она представляется с точечной точки зрения. Теперь мы дадим более общие формулы, которые сделают координаты x, y, z; p, q *равноправными* между собой переменными. Напишем

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z;\ p, q), \\ Y &= Y(x, y, z;\ p, q), \quad P = P(x, y, z;\ p, q), \\ Z &= Z(x, y, z;\ p, q), \quad Q = Q(x, y, z;\ p, q) \end{aligned}$$

и спросим себя, каковы должны быть эти функции для того, чтобы $dZ - P\,dX - Q\,dY$ с точностью до некоторого множителя совпадало с $dz - p\,dx - q\,dy$. Относящиеся сюда результаты были опубликованы Ли в 1872/73 году в Verhandlungen der Akademie zu Christiania. Затем Адольф Мейер (A. Mayer) дал прямой элементарный вывод в Göttinger Nachrichten в 1873 г. и в Math. Annalen, т. 8 (1874). Дело обстоит следующим образом.

Пусть $F(x, y, z; p, q)$ и $\Phi(x, y, z; p, q)$ — две произвольные функции; мы должны познакомиться с *ковариантом* подобной пары функций при произвольных преобразованиях прикосновения, т. е. в пространстве R_5 с ковариантом функций F, Φ и выражения Пфаффа $dz - p\,dx - q\,dy$. Обычно этот ковариант обозначают через (F, Φ). Он равняется

$$(F, \Phi) = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{dF}{dy}\right);$$

если мы выразим полные производные через частные производные, т. е. положим

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}p,$$

то получим

$$\begin{aligned} (F,\ \Phi) = &\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \\ &+ \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(p\frac{\partial \Phi}{\partial p} + q\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned}$$

Это выражение остается неизменным с точностью до некоторого множителя при произвольном преобразовании прикосновения. Чтобы в этом убедиться, спросим себя о значении равенства $(F, \Phi) = 0$. Мы увидим,

что это уравнение представляет соотношение неразрушающееся при преобразовании прикосновения.

При этом мы можем производить рассмотрения с двух точек зрения: либо уравнение $(F, \Phi) = 0$ должно удовлетворяться в силу уравнений $F = 0$ и $\Phi = 0$, либо же оно должно удовлетворяться для всех двумерных элементов, в то время как сами функции F и Φ сохраняют значения: $F = C_1$ и $\Phi = C_2$, причем тогда оба эти уравнения будут являться двумя семействами дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Начнем с первого предположения, а о втором поговорим позднее только вкратце.

Положим:

$$dx : dy : dz : dp : dq =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q} : p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} : -\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z} : -\frac{\partial F}{\partial y} - q\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Согласно § 72 эти дифференциальные уравнения определяют характеристические полосы уравнения $F = 0$. Пусть теперь элемент $x, y, z; p, q$ одновременно принадлежит уравнениям $F = 0$ и $\Phi = 0$. Будем двигаться от этого элемента $x, y, z; p, q$ по соответствующей характеристической полосе уравнения $F = 0$ к соседнему элементу. Спросим себя: при каких условиях этот второй элемент будет принадлежать также уравнению $\Phi = 0$, или вообще при каких условиях *характеристические полосы* уравнения $F = 0$ одновременно являются *полосами* уравнения $\Phi = 0$?

Для того, чтобы соседний элемент принадлежал уравнению $\Phi = 0$, должно удовлетворяться следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q} dq = 0.$$

Если мы внесем в него вместо $dx, dy, \ldots, dq$ приведенные выше отношения величин, то это уравнение перейдет как раз в уравнение $(F, \Phi) = 0$. Так как выражение (F, Φ) симметрично относительно функций F и Φ, то мы получаем следующий результат: *равенство* $(F, \Phi) = 0$ *означает то, что исходящие из общих элементов уравнений* $F = 0$ *и* $\Phi = 0$ *характеристические полосы уравнения* $F = 0$ *являются полосами уравнения* $\Phi = 0$ *и, наоборот, то, что соответствующие характеристические полосы уравнения* $\Phi = 0$ *являются полосами уравнения* $F = 0$.

Отсюда получается прекрасное следствие. Пусть опять $x, y, z; p, q$ будет общим исходным элементом уравнений $F = 0$ и $\Phi = 0$; из этого элемента приведем обе характеристические полосы S_1 и S_2 уравнений $F = 0$ и $\Phi = 0$. Затем через каждый элемент полосы S_1 проведем характеристическую полосу уравнения $\Phi = 0$ и получим, таким образом, некоторую интегральную поверхность уравнения $\Phi = 0$. Но эти полосы по только что сформулированной теореме принадлежат также и уравнению $F = 0$, т. е. полученная поверхность является также интегральной поверхностью уравнения $F = 0$; следовательно, оба уравнения $\Phi = 0$ и $F = 0$ имеют общую интегральную поверхность. Разумеется

мы можем также получить эту же самую поверхность, если проведем через элементы полосы S_2 характеристические полосы уравнения $F=0$. *Обращение в нуль выражения* (F, Φ) *имеет следствием то, что элементы трехпараметрического семейства общих элементов обоих уравнений* $F=0$ *и* $\Phi=0$ *могут быть объединены в однопараметрическое семейство общих интегральных поверхностей, из которых каждая является покрытой характеристическими полосами первого уравнения и точно так же характеристическими полосами второго уравнения.*

Ли выражает это словами: $F=0$ и $\Phi=0$ *расположены инволюторно*, так что содержание последнего предложения можно резюмировать следующим образом: *условие того, что уравнение* $(F, \Phi)=0$ *удовлетворяется в силу* $F=0$ *и* $\Phi=0$ *означает, что оба уравнения* $F=0$ и $\Phi=0$ *расположены инволюторно.* Если же (F, Φ) тождественно равняется нулю, то изменяется лишь то, что тогда все уравнения семейства $F=\text{const}$ находятся в инволюции со всеми уравнениями семейства $\Phi=\text{const}$.

Из высказанных по поводу уравнения $(F, \Phi)=0$ предложений вытекает инвариантная природа самого выражения (F, Φ).

Общее преобразование прикосновения мы характеризуем тем, что:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Теперь, в частности, можно найти те условия, которым должны удовлетворять функции $X, Y, Z; P, Q$, чтобы имело место это уравнение. Все промежуточные вычисления мы опустим; *окончательным результатом* будет:

$$(Z, X)=(Z, Y)=(X, Y)=(X, Q)=(Y, P)=(P, Q)=0$$

и

$$(P, Z)=\rho P, \quad (Q, Z)=-\rho Q, \quad (P, X)=(Q, Y)=\rho,$$

где

$$\rho=\frac{\partial Z}{\partial z}-P\frac{\partial X}{\partial z}-Q\frac{\partial Y}{\partial z}\,^{1}).$$

Обратимся теперь к значению выражений, обозначенных с помощью скобок. Так, например, равенство $(Z, X)=0$ означает, что уравнения $Z=\text{const}$ и $X=\text{const}$, независимо от величин обеих постоянных, должны иметь однопараметрическое семейство общих решений. Спросим себя, имеют ли в первоначальной системе координат уравнения $z=c$, $x=c'$ подобные общие решения. Действительно, это так и будет, потому что плоскости $z=c$ и $x=c'$ пересекаются по однопараметрическому семейству точек и эти прямые являются общими интегральными многообразиями M_2 обоих диференциальных уравнений с частными производными $z=c$ и $x=c'$. Если мы хотим преобразовать наше пространство таким образом, чтобы $dz-p\,dx-q\,dy$ оставалось инвариантным, то в самом деле надо Z и X выбрать таким образом в функции от x, y, z; p, q, чтобы все уравнения $Z=C$ и $X=C'$

[1]) См. например Lie—Engel, Transformationsgruppen, том 2, стр. 122, Лейпциг (1890).

опять-таки имели общие интегральные поверхности. Аналогичное имеет место и для остальных условий, так что мы получаем полное геометрическое понимание нашей системы формул. Но из предыдущего все же не видно, что эти условия являются также и достаточными.

В произведенных рассмотрениях наши формулы имели место в окрестности некоторого элемента. Если же хотят рассматривать все пространство проективной геометрии, то будет целесообразно ввести однородный способ записи. При этом мы сошлемся на разработку Линдеманном лекций Клебша по геометрии, том 1 [1]). Там элемент определяется посредством однородных координат x_1, x_2, x_3, x_4 и u_1, u_2, u_3, u_4 (вообще, в пространстве R_{n-1} посредством $x_1, \ldots, x_n$ и $u_1, \ldots, u_n$) с условием $xu = 0$. Затем положим:

$$X_i = X_i(x_1, \ldots, x_4;\ u_1, \ldots, u_4) \quad \text{и} \quad U_i = U_i(x_1, \ldots, x_4;\ u_1, \ldots, u_4).$$

Здесь мы не вводим никакого множителя пропорциональности. Тогда для $ux = 0$ должно быть также $UX = 0$ для того, чтобы мы вообще имели преобразование элементов положим, например, чтобы иметь перед собой определенный случай $UX = ux$. Далее, мы естественно должны положить X_i равными однородным функциям (например, степени α) переменных x_i; тогда U_i будут однородными функциями степени $1 - \alpha$ переменных x_i для того, чтобы UX было линейным в переменных x_i. Аналогичным образом, пусть X_i будут степени $1 - \beta$ в u_i, а U_i степени β в u_i. Теперь мы требуем, чтобы

$$\sum U_i\, dX_i = \sum u_i\, dx_i$$

или

$$\sum X_i\, dU_i = \sum x_i\, du_i,$$

что означает то же самое. Если эти уравнения выполнены, то наше преобразование элементов будет одновременно преобразованием прикосновения. В однородном способе записи наше выражение будет иметь вид:

$$(F, \Phi) = \sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right).$$

Тогда условие преобразования прикосновения будет выражаться тем, что, с одной стороны,

$$(X_i,\ X_k) = (X_i,\ U_k) = (U_i,\ U_k) = 0,$$

т. е. что каждое X_i должно находиться в инволюции с каждым X_k и т. д., и что, с другой стороны, должно иметь место $(X_i, U_i) = 1$. Мы видим, что эта однородная формулировка хотя и систематичнее, но зато длиннее, чем неоднородная. Это как раз то самое явление, с которым мы всегда встречаемся, когда сравниваем однородные и неоднородные формулы. Какие формулы заслуживают предпочтения, зависит от постановки исследуемого вопроса.

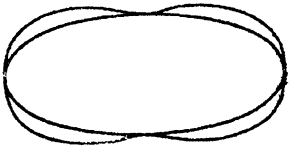
[1]) См. также Lie — Engel, том 3, стр. 530 и след.

§ 75. Дальнейшие примеры преобразований прикосновения.

Познакомимся теперь с некоторыми примерами преобразований прикосновения. Мы уже познакомились в качестве преобразований прикосновения с общими точечными преобразованиями, затем с линейными двойственными преобразованиями, с преобразованиями высшей геометрии сфер, с соответствием между геометрией линий и геометрией сфер, но математическая литература дает еще многочисленные другие примеры подобных преобразований, которые также оказываются преобразованиями прикосновения. Но только раньше, при введении этих преобразований, никоим образом не выдвигали на передний план их общий характер.

§ 75,1. Подэры.

В качестве первого примера рассмотрим *построение подэры (подошвенной линии) произвольной заданной кривой.* Как известно, подэрой называется геометрическое место оснований всех перпендикуляров, которые можно опустить из какого-нибудь фиксированного полюса, например, из начала координат, на касательные заданной плоской кривой. Например, в случае эллипса подэра относительно его центра будет замкнутой кривой, обвивающейся вокруг эллипса, как это показано на чертеже 77.



Черт. 77.

Мы утверждаем, *что процесс, с помощью которого из кривых возникают их подэры относительно некоторого фиксированного полюса, является преобразованием прикосновения.* Для доказательства мы будем исходить из касательных заданной кривой, причем отдельная касательная пусть определяется уравнением $ux+vy+1=0$. Тогда координатами основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту касательную, будут:

$$X=-\frac{u}{u^2+v^2},\quad Y=-\frac{v}{u^2+v^2}.$$

Представим себе, что исходная кривая задана уравнением, связывающим u и v, и перейдем к вспомогательной кривой, возникающей из заданной кривой в силу подстановки $u=-\xi$, $v=-\eta$. Эта подстановка представляет собой просто полярное преобразование относительно единичного круга $\xi^2+\eta^2=1$. Новая кривая ξ, η обладает точечными координатами, равными по абсолютной величине и противоположными по знаку прямолинейным координатам u, v исходной кривой. Тогда из наших последних формул мы получим новое соответствие

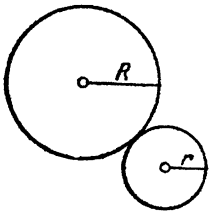
$$X=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad Y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

между подэрой и точками преобразованной кривой. Но это второе преобразование очевидно представляет собой инверсию ξ, η — кривой относительно того же круга $\xi^2+\eta^2=1$. Следовательно, так как пере-

ход от нашей заданной кривой к подэре представлен как последовательный ряд указанных простых преобразований, уже известных нам в качестве преобразований прикосновений, то он, разумеется, точно так же является преобразованием прикосновения. Одновременно мы отметим, что наше таким образом полученное преобразование является взаимно однозначным: оно составлено из двух преобразований подобного рода. Итак, наш пример приводит нас к следующему общему принципу: *чтобы построить примеры взаимно однозначных преобразований прикосновения, достаточно скомбинировать произвольное двойственное преобразование с произвольным кремоновым преобразованием.* Общей теории однозначных и алгебраических преобразований прикосновения повидимому еще не имеется.

§ 75,2. Зубчатые колеса.

Теперь мы перейдем к совершенно другому примеру, который нам дает *теория зубчатых колес.* Представим себе на плоскости два извне или изнутри касающиеся друг друга круглых диска, способных вращаться вокруг своих центров. Равномерное вращение одного диска в силу трения вызывает равномерное же вращение второго диска. Но разумеется таким путем нельзя перенести никакой силы, так как при сколько-нибудь большом сопротивлении круги уже не будут катиться друг по другу, а будут скользить. Поэтому оба круга снабжаются по их краю зубчатыми ободами, отдельные зубья которых известным образом входят друг в друга. Общий закон для конструирования подобных зубчатых колес состоит просто в том, что оба зубчатых обода при равномерном вращении обоих дисков там, где они встречаются, всегда должны друг друга касаться. Зубья, которые как раз касаются друг друга, при этом, вообще говоря, *скользят* друг по другу. Чтобы легче обозреть эти обстоятельства мы предположим, что один из дисков прикреплен неподвижно к плоскости, в то время как второй катится вокруг первого, причем оба диска касаются друг друга снаружи (черт. 78). Очевидно, относительное движение обоих кругов будет в точности таким же, как и при наших прежних рассмотрениях. Известно, что при подобном движении точка плоскости катящегося круга будет описывать *„эпициклоиду"* и притом *обыкновенную эпициклоиду, вытянутую или запетленную* в зависимости от того, лежит ли эта точка на границе катящегося круга, внутри его или вне его. Подобно тому как мы здесь рассматриваем точку в ее последовательных положениях при нашем движении, точно так же мы можем рассматривать произвольную, твердо связанную с катящимся кругом кривую (или какую-нибудь ее часть) в ее последовательных положениях. Мы видим, что при движении данной рассматриваемой кривой будет огибаться некоторая определенная другая кривая.

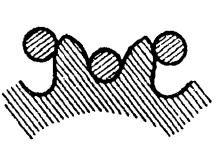


Черт. 78.

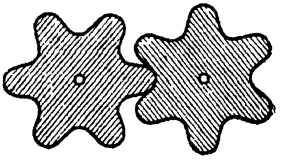
Мы утверждаем, что соответствие между обеими кривыми представляет собой преобразование прикосновения, именно преобразование прикосновения, превращающее точки катящейся плоскости в упо-

мянутые эпициклоиды. Чтобы доказать это утверждение, нам надо только показать, что из двух касающихся друг друга кривых при движении в качестве огибающего образа получаются опять-таки две касающиеся друг друга кривые. Но это непосредственно следует из того, что в момент, когда элемент прикосновения первой кривой касается огибающей первой кривой, он одновременно касается огибающей второй кривой, так как дело идет о том моменте, когда элемент прикосновения в силу мгновенного вращения передвигается сам по себе. Нормаль элемента проходит тогда через мгновенный центр вращения, т. е. через точку прикосновения обоих исходных кругов.

Разобравшись во всех этих обстоятельствах мы можем (отвлекаясь от практической точки зрения, которую можно приблизительно выразить в том смысле, что зубцы колес при движении не должны ударять одно о другое) высказать следующее основное предложение всей теории зубчатых колес: *один зубчатый обод берут произвольно и строят другой зубчатый обод в качестве той кривой, которая соответствует первому зубчатому ободу в силу нашего преобразования прикосновения.*



Черт. 79.



Черт. 80.

Разумеется это построение имеет место лишь для тех частей зубчатых ободов, которые участвуют во вхождении зубцов друг в друга, а не для прочих частей, которые должны удовлетворять только такому неравенству, чтобы зубчатые обода при движении никогда не сталкивались.

На чертежах 79 и 80 изображены две подобные пары зубчатых колес. Причем черт. 79 надо понимать в таком смысле, что на одном диске насажены цилиндрические цапфы, из которых три, входящие в данный момент в зубчатый обод второго диска, изображены на чертеже в поперечном разрезе.

§ 75,3. Преобразования прикосновения, сохраняющие периметр.

Если мы будем определять ориентированную прямую G на плоскости углом φ, который она образует с некоторым постоянным направлением, и ее расстоянием p от некоторой фиксированной точки, то мы сможем определить угол φ с точностью до кратных 2π, а p также и по знаку. Тогда $dp : d\varphi = q$ будет давать расстояние надлежащим образом ориентированной нормали N кривой, огибающей прямые φ, p, от начала координат, так что мы можем избрать φ, p, q в качестве координат линейного элемента E с условием соединенного положения $dp - q\,d\varphi = 0$ (черт. 81). Тогда радиус кривизны ρ мы можем определить также и по его знаку формулой:

$$\rho = p + \frac{d^2p}{d\varphi^2},$$

а длину дуги — также вместе со знаком формулой:

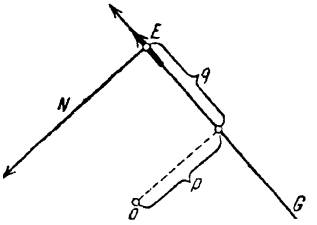
$$s = \int \rho\, d\varphi = \int p\, d\varphi + \left[\frac{dp}{d\varphi}\right].$$

В частности, для „*периметра*" замкнутой кривой получается:

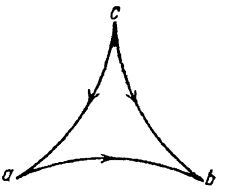
$$s = \int p\, d\varphi.$$

Если, например, мы будем посредством интегрирования в направлении *abca* вычислять по этой формуле периметр изображенной на чертеже 82 кривой, то при вычислениях надо считать дуги *ab* и *ca* положительными, а дугу *bc* — отрицательной.

Поставим теперь задачу: *найти те преобразования прикосновения на плоскости, которые сохраняют периметры замкнутых кривых.*



Черт. 81.



Черт. 82.

Легко видеть, что эти „*сохраняющие периметры*" преобразования прикосновения переводят прямые линии опять-таки в прямые линии. Именно, пусть C некоторая замкнутая кривая, а C^* кривая, соответствующая ей в силу преобразования прикосновения, сохраняющего периметры. Если мы будем изменять дугу между двумя линейными элементами a, b кривой C, то соответствующая дуга a^*, b^* кривой C^* должна таким образом меняться, чтобы первая вариация длины дуги в обоих случаях была одинакова. Но отсюда следует, что эти вариации должны одновременно обращаться в нуль, т. е. что всякой прямолинейной дуге должна опять соответствовать прямолинейная дуга, как мы и утверждали.

Следовательно, искомые преобразования прикосновения могут быть представлены в виде:

$$\varphi^* = \varphi^*(\varphi, p),$$
$$p^* = p^*(\varphi, p).$$

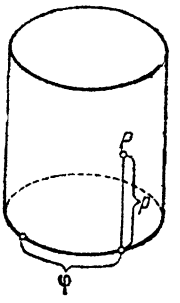
Представим себе φ и p в виде координат точки P круглого цилиндра, стоящего над единичным кругом с дугой φ, причем p обозначает расстояние от плоскости этого круга (черт. 83). Тогда требование инвариантности

$$s = \int p\, d\varphi$$

будет означать для соответствующего точечного преобразования цилиндра, что оно должно быть *сохраняющим площадь* и что, в частности, кривая, соответствующая единичному кругу $p = 0$, должна ограничивать площадь, равную нулю. Наоборот, если мы возьмем подобное, всюду взаимно однозначное и удовлетворяющее надлежащим предположениям

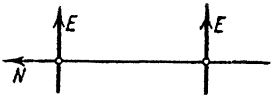
о непрерывности отображение цилиндра, то на плоскости ему будет соответствовать некоторое преобразование прямых, сохраняющее периметры.

Таким образом полученные преобразования теснейшим образом связаны с так называемыми *„оптическими преобразованиями прикосновения"* плоскости, которые характеризуются тем, что они перестановочны с параллельным преобразованием. Именно, эти оптические отображения переводят параллельные и одинаково направленные линейные элементы E_1 и E_2 с общей нормалью N (черт. 84) опять в таковые же. Следовательно, к ним принадлежит преобразование (ориентированных) нормалей, а это преобразование оказывается сохраняющим периметры. Обратно, каждому заданному отображению нормалей, сохраняющему периметры, соответствует оптическое преобразование, однозначно определенное с точностью до параллельных преобразований.



Черт. 83.

Подробнее об этих исследованиях для случая плоскости см. у Бляшке (Math. Annalen, т. 69, стр. 204—217, 1910); соответствующие вопросы в случае пространственной геометрии см. у Штуди: E. Study, Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehungen zur Theorie der Berührungstransformationen (Jahresbericht der D. Math.—Ver., т. 14, стр. 424—438, 1905).



Черт. 84.

Отметим еще: если на цилиндр перенести лагерровские преобразования плоскости с помощью нашего отображения прямых плоскости на точки цилиндра, то на цилиндре получатся проективные преобразования цилиндра в себя.

§ 75, 4. Вариации постоянных.

Последний пример мы заимствуем из астрономии или механики. Мы имеем в виду *теорию вариации постоянных*. Чтобы не пришлось отклоняться слишком далеко, мы будем здесь говорить только о математической стороне предмета. Пусть в пространстве $n+2$ измерений с переменными $z, t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеется какое-нибудь дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, в котором само z не фигурирует:

$$F\left(t, x_1, \ldots, x_n; \frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}\right) = 0.$$

Нашей задачей будет определение характеристических полос нашего дифференциального уравнения, поскольку они зависят от t; $x_1, \ldots, x_n$, т. е. при оставлении в стороне z. Здесь мы имеем $n+2$ переменных, но все же те соотношения, которые мы установили в § 72 для трех переменных, переносятся и на этот общий случай. Положим:

$$\frac{dz}{dt} = \pi, \quad \frac{dz}{dx_1} = p_1, \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

Тогда дифференциальные уравнения характеристических полос, если мы оставим в стороне z, будут:

$$dt : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : d\pi : dp_1 : \ldots : dp_n =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial \pi} : \frac{\partial F}{\partial p_1} : \frac{\partial F}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial p_n} : -\frac{\partial F}{\partial t} : -\frac{\partial F}{\partial x_1} : \ldots : -\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Определенные этим характеристические полосы дают нам тогда *траектории той механической задачи*, для которой $F = 0$ является так называемым *дифференциальным уравнением с частными производными Гамильтона.*

В небесной механике дело обстоит таким образом, что полагают дифференциальное уравнение с частными производными, имеющим следующий вид: $0 = F = f + \varepsilon f'$, где ε весьма мало. Уравнение $f = 0$ представляет собой здесь так называемое *„первоначальное дифференциальное уравнение"*, а $\varepsilon f'$ — так называемый *„возмущающий член"*. В соответствии с этим все уравнение $F = 0$ называют *возмущенным дифференциальным уравнением.* Интегрирование „первоначального" уравнения $f = 0$ не представляет никаких затруднений, а в частности и определение характеристических полос невозмущенной задачи, т. е. ее траекторий. Основной мыслью в небесной механике является то, что характеристические полосы возмущенной задачи $F = 0$ не слишком разнятся в своем течении от траекторий первоначальной задачи $f = 0$.

Сначала представим себе вычисленной отдельную траекторию невозмущенной задачи и зафиксированной с помощью некоторых постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n$ и C, т. е. зафиксированной так, чтобы некоторые $2n+1$ функций от $t, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ имели постоянное значение $C; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n$. Тогда, хотя эти функции координат в случае возмущенной задачи и будут изменяться с течением времени, но все же медленно, их изменения особенно удобно могут быть вычислены с помощью приближенных методов. Поэтому введем в качестве новых переменных эти $2n+1$ функций (которые мы коротко будем обозначать также через $C; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n$) вместо переменных $t; x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$. Как раз в этом и заключается метод вариации постоянных.

Теперь мы утверждаем: *введение переменных α_i, β_i, C, выбранных надлежащим образом, будет как раз преобразованием прикосновения.* Чтобы это доказать, представим себе найденным полный интеграл (в смысле Лагранжа) уравнения $f = 0$, т. е. интеграл с $2n+1$ постоянными. Пусть он определяется уравнением: $z = \varphi(t; x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + C$. Последняя постоянная C входит здесь аддитивно, потому что в нашем первоначальном дифференциальном уравнении сама переменная z явно не входила. Положим, прежде всего для определения характеристических полос:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \pi, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

Эти величины определяют нам касательную плоскость, касающуюся поверхности $z = \varphi + C$. Для полного определения полос мы перейдем

от поверхности $z = \varphi + C$ с помощью изменения постоянных к соседним поверхностям. Это приводит нас к диференциальным уравнениям, как например

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial C} dC = 0.$$

Тогда, предположив между приращениями $d\alpha$ и dC определенное соотношение, мы получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} = -\beta_n,$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ какие-нибудь новые постоянные.

Эти уравнения вместе с уравнениями

$$z = \varphi + C, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \pi, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

представляют нам характеристические полосы. Тем самым C, α, β вводятся в качестве некоторых функций величин z, x и p (в дальнейшем при подсчете переменных величин t и π мы будем оставлять в стороне) и *эти функции*, которые, следовательно, для нашей невозмущенной задачи являются постоянными, *мы введем в качестве новых переменных.*

Здесь мы только докажем, что вышеприведенное введение новых переменных C, α_i, β_i *действительно представляет собой преобразование прикосновения.* Дело в высшей степени просто. Именно, если мы будем рассматривать $z - \varphi - C = 0$ как направляющее уравнение, то мы просто будем иметь перед собой такое преобразование прикосновения, какое мы имели раньше в случае трех переменных. Потому что без дальнейшего ясно, что в силу наших формул:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \ldots - p_n dx_n = \rho (dC - \beta_1 d\alpha_1 - \ldots - \beta_n d\alpha_n).$$

Полученное с помощью „вариации постоянных" введение новых переменных является просто примером преобразования прикосновения, *заданного направляющим уравнением.*

Добавим еще общие заключительные замечания: преобразования прикосновения уже с давних пор описанным образом встречались в механике; несовершенство заключалось только в том, что их свойства не изучались абстрактно, а в каждом отдельном случае изучались специально придуманным для данного случая образом в связи с уравнением $F = 0$. Поэтому старые изложения этого предмета имеют такой вид, как если бы дело шло об искусственном приеме, специально придуманном для данного уравнения. В эту область впервые внес ясность геометрический способ рассмотрения Ли. Ср. далее § 94, § 95.

§ 76. Теория инвариантов преобразований прикосновения.

Теперь мы познакомимся с некоторыми вопросами *теории инвариантов преобразований прикосновения*. Прежде всего займемся такими свойствами геометрических отображений, которые остаются инвариантными при *произвольных аналитических преобразованиях прикосновения*. Здесь следует назвать две работы Ли, появившиеся одна в Math. Annalen (в 8-м томе, в 1874: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen), и другая в Verhandlungen von Christiania (1872); см. также Ges. Abhandlungen, 3 (1922), стр. 1. Из этой последней работы, озаглавленной Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, мы приведем некоторые отдельные результаты:

1. Мы мимоходом уже упомянули относительно *одного* заданного уравнения, $f(x, y, z; p, q) = 0$, что оно не доставляет никаких инвариантов относительно произвольных преобразований прикосновения; напротив, всякое подобное уравнение можно перевести во всякое другое уравнение подобного же типа, например, в простейшее уравнение $z = 0$ посредством подходящего преобразования прикосновения. Действительно, более подробное рассмотрение общих формул преобразований прикосновения, как мы их установили в § 74, показывает, что функцию Z можно положить равной произвольной функции $f(x, y, z; p, q)$, после чего еще надо соответствующим образом определить X, Y, P, Q. Но вследствие этого уравнение $f = 0$ превращается в уравнение $Z = 0$.

Мы можем поставить еще далее идущий вопрос, значение которого само собой понятно. Если уравнение $f = 0$ переходит при преобразовании прикосновения в уравнение $f' = 0$, то очевидно из интегральных поверхностей первого уравнения получаются опять же интегральные поверхности второго уравнения, так как интегральная поверхность является таким соединением элементов уравнения, при котором всякий элемент находится в соединенном положении со всеми соседними элементами. Все только что сказанное имеет место при преобразовании прикосновения одновременно для *каждого* дифференциального уравнения с частными производными $f = 0$. В противоположность этому существуют более общие преобразования, которые обладают этим свойством только для *отдельного* уравнения $f = 0$ и поэтому должны быть названы *преобразованиями прикосновения относительно* $f = 0$. Например, преобразование элементов, переводящих уравнение $z = 0$ в себя, никоим образом не обязано быть преобразованием прикосновения, если мы только потребуем, чтобы всякий интеграл уравнения $z = 0$ переходил в интеграл уравнения $Z = 0$, т. е. чтобы все элементы, касающиеся некоторой кривой плоскости $z = 0$, превращались в элементы, касающиеся какой-нибудь другой кривой плоскости $z = 0$. Мы особенно подчеркиваем этот факт, потому что по этому поводу в „Динамике“ Якоби имеются неверные утверждения. Пусть B' будет подобное преобразование, переводящее интеграл уравнения $z = 0$ опять же в интеграл уравнения $z = 0$, а B — произвольное преобразование прикосновения. Тогда очевидно $B'B$ будет самым общим преобразованием, переводящим уравнение $z = 0$ в другое диферен-

циальное уравнение, так что интегралы переходят опять в интегралы.

2. Далее, спросим себя, каковы будут инварианты *системы* заданных выражений $f(x, y, z; p, q)$, $\varphi(x, y, z; p, q)$ и т. д. при произвольных преобразованиях прикосновения. Как раз этим вопросом Ли занимался подробно в 8-м томе Math. Annalen и выяснил, *что при этом всегда дело идет о рассмотрении скобок* (f, φ). В подробности мы здесь входить не можем.

3. Наконец, мы должны рассмотреть специальный тип уравнения второго порядка — уравнения Монжа-Ампера, о котором мы уже упоминали в § 32. Эти уравнения имеют вид:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0,$$

где A, B, C, D, E обозначают произвольные функции от x, y, z; p, q, а r, s, t — частные производные второго порядка от z по x, y. Следует отметить, что Дарбу построил *геометрическую теорию* этого типа уравнений (Surfaces, т. 3, стр. 263 и след.), в которой, например, указывается, что уравнения Монжа-Ампера обладают характеристическими полосами и т. д.; только Дарбу не столь непосредственно пользуется точкой зрения Ли, как это было бы желательно.

Ампер главным образом рассматривал те случаи, в которых эти уравнения имеют *первые интегралы*. Под этим понимается соотношение

$$u(x, y, z; p, q) = f(v(x, y, z; p, q)),$$

в котором u и v обозначают какие-нибудь определенные функции от x, y, z; p, q, а f — произвольную функцию от v. Эта формула очевидно представляет собой бесчисленное множество дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, и легко убедиться посредством дифференцирования, что их интегральные поверхности удовлетворяют уравнению Монжа-Ампера.

Обратно: многие математики, по примеру Ампера, занимались, в частности, выяснением того, когда уравнение Монжа-Ампера вообще допускает подобный первый интеграл.

Затем в область этой теории вступает Ли, перенесший понятие преобразования прикосновения на случай уравнения Монжа-Ампера. Подобно тому, как отдельное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка может быть приведено к виду $z = 0$, *точно так же можно ожидать, что и отдельное уравнение Монжа-Ампера будет обладать простой нормальной формой. Я здесь вкратце приведу результаты, имеющиеся в упомянутом обзоре Ли; их доказательство полностью, повидимому, нигде не опубликовано.*

a) Всякое уравнение Монжа-Ампера можно путем надлежащего преобразования прикосновения сделать линейным, т. е. привести к простому виду:

$$B'r + C's + D't + E' = 0.$$

b) Если уравнение имеет первый интеграл $u = f(v)$, то можно добиться нормальной формы $r = 0$, или $s = 0$.

В обоих случаях интегральные поверхности получаются тотчас же. В случае $r=0$ они даются формулой $z=Y_1(y)+xY_2(y)$, где Y_1 и Y_2—произвольные функции от y; ясно, что вторая производная r от z равняется нулю. Точно так же интегральные поверхности уравнения $s=0$ даются формулой $z=X(x)+Y(y)$, где X—произвольная функция от x, а Y—произвольная функция от y. В последнем случае $z=X(x)$ и $z=Y(y)$ являются двумя первыми интегралами; нам надо только представить себе прежние u, v замененными через z и x, соответственно через z и y, что для нас не представляет никакого затруднения, так как мы уже привыкли уравнения $z=0$, соответственно, $x=0$ рассматривать как диференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

Таким образом теория диференциальных уравнений высших порядков может извлечь пользу из применения преобразований прикосновения. Теперь возникает естественный вопрос, не существуют ли также и преобразования соприкосновения второго порядка, т. е. преобразования, выражающие X, Y, Z; P, Q; R, S, T через x, y, z; p, q; r, s, t, подобно тому, как существуют преобразования прикосновения, выражающие X, Y, Z; P, Q через x, y, z; p, q. Беклунд (Bäcklund) показал в 9-м томе (1876) Math. Annalen (а раньше в 1874 г. в т. 10 Jahresschrift von Lund), что на этот вопрос приходится ответить отрицательно, т. е. что все преобразования соприкосновения сводятся к уже известным преобразованиям прикосновения.

Теперь вместо общих преобразований прикосновения можно рассматривать также исключительно алгебраические в частности однозначные или бирациональные преобразования прикосновения. Тогда для этих преобразований особый интерес будут представлять уравнения $f(x, y, z; p, q)=0$ с алгебраическими коэфициентами, т. е. такие уравнения, которые можно рассматривать во всем пространстве. Теперь спрашивается: какую специфическую алгебраическую теорию инвариантов доставляют эти алгебраические преобразования по сравнению с теорией инвариантов всех преобразований прикосновения? Как мы знаем, алгебраические уравнения, о которых идет речь, можно, следуя Клебшу, написать так же как коннекс: $f(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid u_1, u_2, u_3, u_4)=0$, с условием $ux=0$. Уравнение $f=0$ будет, в переменных x, однородным некоторой степени α, а в переменных u—однородным некоторой степени β. Следовательно, можно спросить: какие инвариантные свойства представляет подобное алгебраическое уравнение относительно произвольных бирациональных преобразований прикосновения? Но все же еще важнее для *изучения трансцендентных функций, определяемых алгебраическим диференциальным уравнением* $f=0$, *должно быть определение инвариантов подобного уравнения, которые это уравнение доставляет при подобных алгебраических преобразованиях переменных* x_i *и* u_i, *являющихся однозначными не для всего пространства, а только для элементов* $f=0$, *и притом имеющих для этих элементов характер преобразования прикосновения.*

Ли развивал теорию преобразований прикосновения только с аналитической точки зрения: алгебраическими преобразованиями он не интересовался. Надо надеяться, что тонкие исследования алгебраистов об

однозначных преобразованиях (М. Нетер) вступят во взаимодействие с общей трактовкой преобразований прикосновения, как ее разрабатывал Ли.

Прибавим к этому обзору теории преобразований прикосновения некоторые литературные сведения. Укажем еще раз на книгу Ли и Шеффера о преобразованиях прикосновения (Лейпциг, 1896), в которой подробно изложены многие из затронутых здесь геометрических вопросов. Общая теория Ли имеется во втором томе, изданной совместно с Энгелем, большой работы о группах преобразований (Лейпциг, 1890). В настоящее время Энгелем и Хейгаром (P. Heegaard) издается полное собрание сочинений Ли. Пока появились два тома этого выдающегося издания [1]). По поводу преобразований прикосновения в механике следует указать на появившуюся в 1924 г. в этой же серии книгу Уиттекера (E. T. Whittaker) о динамике [2]). Трактовка Ли диференциальных уравнений с точки зрения преобразований прикосновения принята во внимание в учебниках Гурса по этому предмету. К связи преобразований прикосновения с вариационным исчислением мы еще вернемся (§ 94, § 95).

---

[1]) В настоящее время издание закончено: Lie S., Gesammelte Abhandlungen, B-de I — VII, Leipzig — Oslo, 1922 — 35. *Прим. ред.*

[2]) Русский перевод: Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, М.—Л. 1936. *Прим. ред.*

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ.

ПРИМЕРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ИЗ ПОСЛЕДНИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ. ДОПОЛНЕНИЯ.

Теперь мы изложим ряд геометрических исследований, которые послужат нам для понимания путей дальнейшего развития геометрии, указанных Клейном и Ли. При этом, как уже показывает само заглавие этой третьей части, мы никоим образом не претендуем на исчерпывающую полноту, а приведем только несколько дополнений и детализаций к ранее рассмотренным вопросам.

Мы начнем с изложения геометрии линий Штуди, находящейся в тесной связи с рассмотренными в этих лекциях исследованиями по геометрии линий. Мы это делаем тем охотнее, что научная деятельность Клейна началась под влиянием Плюкера, как раз с геометрии линий, и что Клейн сохранил любовь к этой ветви геометрии и в позднейший период своей жизни, как это можно видеть из его замечаний к первому тому его полного собрания сочинений.

С другой стороны исследования Штуди оставались до сих пор мало известными, так что и с этой точки зрения наш обзор вполне уместен [1]).

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ ШТУДИ.

§ 77. Принцип перенесения Штуди.

Пусть x_0, x_1, x_2, x_3 — однородно написанные прямоугольные координаты, т. е.

$$\frac{x_1}{x_0}, \quad \frac{x_2}{x_0}, \quad \frac{x_3}{x_0}$$

уже обычные декартовы координаты. При этом мы их нумеруем иначе, чем раньше, так как для дальнейшего это будет целесообразнее. Тогда условие соединенного положения точки x и плоскости u будет выглядеть таким образом:

$$\sum_0^3 u_i x_i = 0 \tag{1}$$

и уравнение нуль-системы (§ 16) получит в плоскостных координатах вид:

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} u_i v_k = 0, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Для дальнейшего см. также C. Segre, Atti Torino 47, стр. 308 — 327 и 384 — 405.

Найдем ось этой нуль-системы. Для этой цели возьмем несобственную плоскость $u = \{1, 0, 0, 0\}$ и получим для ее полюса на основании (2) уравнение

$$\sum_k a_{0k} v_k = 0.$$

Следовательно, точечными координатами этого полюса будут коэфициенты a_{0k}. Поэтому плоскость, перпендикулярная направлению к этой точке, будет определяться уравнением

$$\lambda x_0 + \sum_k a_{0k} x_k = 0, \tag{3}$$

т. е. иметь координаты $u = \{\lambda, a_{01}, a_{02}, a_{03}\}$. Ее полюс по (2) будет иметь координаты

$$x_k = \sum_i a_{ik} u_i$$

или

$$x_k = \lambda a_{0k} + \sum_i a_{ik} a_{0i}. \tag{4}$$

Подробно написанные формулы (4) гласят:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2), \\ x_1 &= \lambda a_{01} - \begin{vmatrix} a_{02} & a_{03} \\ a_{31} & a_{12} \end{vmatrix}, \\ x_2 &= \lambda a_{02} - \begin{vmatrix} a_{03} & a_{01} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}, \\ x_3 &= \lambda a_{03} - \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{23} & a_{31} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эта точка x описывает при переменном λ искомую ось нуль-системы (§ 16).

Теперь мы утверждаем: *нуль-системы с координатами*:

$$\left.\begin{aligned} a'_{01} &= \sigma a_{01}, \quad a'_{23} = \tau a_{01} + \sigma a_{23}, \\ a'_{02} &= \sigma a_{02}, \quad a'_{31} = \tau a_{02} + \sigma a_{31}, \\ a'_{03} &= \sigma a_{03}, \quad a'_{12} = \tau a_{03} + \sigma a_{12} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

коаксиальны, т. е. имеют общую ось.

Именно, направление оси $a'_{0k} = \sigma a_{0k}$ не зависит от σ и τ. Далее: координаты полюса x'_k плоскости (3) (например при $\lambda = 0$), перпендикулярной неподвижному направлению оси, находятся из уравнений (5)

$$x'_k = \sigma^2 x_k,$$

т, е. этот полюс является неподвижным. Так как через него проходит ось постоянного направления, то и она является неподвижной, что и утверждалось. Обратно, легко убедиться, что соотношения (6) изображают все нуль-системы, коаксиальные с данной.

Если мы будем искать в пучке (6) нуль-систем (или линейных комплексов, если рассматривать нуль-линии нуль-системы) особые нуль-системы, т. е. такие, для которых

$$a'_{01}a'_{23} + a'_{02}a'_{31} + a'_{03}a'_{12} = 0,$$

то мы найдем для $\sigma : \tau$ уравнение

$$\sigma\tau(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) + \sigma^2(a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}) = 0.$$

Следовательно, в пучке существуют два особых комплекса, именно $\sigma = 0$ и

$$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = -\frac{a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}}{a_{01}a_{01} + a_{02}a_{02} + a_{03}a_{03}}, \tag{7}$$

если мы предполагаем знаменатель отличным от нуля. Этому последнему значению $\sigma_0 : \tau_0$ соответствует линейный комплекс, состоящий из всех прямых, пересекающих общую ось нашего коаксиального семейства. Поэтому, если подставить в уравнения (6) вместо σ и τ значения σ_0, τ_0, то в соответствующих a'_{ik} получатся линейные координаты этой оси.

Подстановку (6) можно представить себе еще следующим образом. Мы объединяем действительные числа a_{ik} в известные комплексные величины, положив

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_{01} + \varepsilon a_{23}, \\ A_2 &= a_{02} + \varepsilon a_{31}, \\ A_3 &= a_{03} + \varepsilon a_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где ε удовлетворяет соотношению $\varepsilon^2 = 0$. Это будут так называемые „дуальные“ числа, которые мимоходом рассматривались уже раньше (стр. 245). Если умножить эти A_k на общий удальный множитель $\sigma + \varepsilon\tau$, $A'_k = (\sigma + \varepsilon\tau)A_k$, то после выделения действительной и мнимой части получатся как раз формулы (6).

Итак, ы видим: всякой тройке дуальных чисел A_k соотвествует некоторая нуль-система, если только исключить тот случай, когда все $A_k = 0$. Умножение всех A_k на некоторый дуальный множитель $\sigma + \varepsilon\tau$, $\sigma \neq 0$, соответствует переходу от нашей нуль-системы к произвольной коакситльной нуль-системе.

Поэтому можно независимые друг от друга отношения дуальных чисел $A_1 : A_2 : A_3$, следуя Штуди, взять в качестве однородных дуальных координат для общей оси наших нуль-систем.

При этом приходится исключить только тот случай, когда все действительные числа a_{0k} одновременно равняются нулю. В противном случае мы будем иметь дело с особой нуль-системой ($a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = 0$) с неопределенной осью и, с другой стороны, с тремя дуальными числами εa_{23}, εa_{31}, εa_{12}, отношение которых неопределенно,

так как в силу соотношения $\varepsilon^2 = 0$ все они являются делителями нуля. Итак, числа A_k при ограничении, что не все $a_{0k} = 0$, образуют систему однородных координат для действительных собственных прямых нашего евклидова пространства.

Посмотрим, имеет ли геометрическое значение соотношение

$$\sum_{k=1}^{3} A_k A_k^* = 0 \tag{9}$$

для двух прямых A и A^*. Посредством умножения на множитель $\sigma_0 + \varepsilon\tau_0$ [σ_0 и τ_0 взяты из (7)] и $\sigma_0^* + \varepsilon\tau_0^*$ можно добиться того, чтобы соответствующие дуальным числам A_k и A_k^* числа a_{ik} и a_{ik}^* были линейными координатами. Тогда соотношение (9) дает условия

$$\left.\begin{aligned} a_{01}a_{01}^* + a_{02}a_{02}^* + a_{03}a_{03}^* &= 0, \\ a_{01}a_{23}^* + a_{02}a_{31}^* + a_{03}a_{12}^* + \\ + a_{23}a_{01}^* + a_{31}a_{02}^* + a_{12}a_{03}^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Первое уравнение говорит, что наши прямые нормальны; второе, что они пересекаются. Этим мы доказали: *соотношение* (9) *является характеризующим для нормально пересекающихся прямых.*

Теперь поступим таким образом, что распорядимся дуальным множителем (на который мы имеем право одновременно умножать дуальные линейные координаты A_1, A_2, A_3 Штуди) так, чтобы

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1. \tag{11}$$

Для всякой действительной собственной прямой это можно произвести двумя различными способами, так как действительная часть суммы квадратов, именно $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 > 0$. Уравнение (11) распадается на два различных действительных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 &= 1, \\ a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Следовательно, числа a_{0k} можно истолковывать как направляющие косинусы ориентированной прямой, имеющей обычные линейные координаты a_{ik}.

Поэтому мы видим: *дуальные точки единичной сферы* (11) *взаимно однозначно отображаются на (действительные, собственные) ориентированные прямые эвклидова пространства.*

Геометрическое содержание этого отображения выяснится, если мы сообразим, что соответствует в пространстве линий сферическому расстоянию между двумя точками сферы. Полярная форма

$$\begin{aligned} A_1A_1' + A_2A_2' + A_3A_3' = (a_{01}a_{01}' + a_{02}a_{02}' + a_{03}a_{03}') + \\ + \varepsilon\,(a_{01}a_{23}' + a_{02}a_{31}' + a_{03}a_{12}' + a_{23}a_{01}' + a_{31}a_{02}' + a_{12}a_{03}') \end{aligned} \tag{13}$$

распадается на действительную часть, дающую косинус угла φ между нашими направленными прямыми, и на мнимую часть, являющуюся „моментом" прямых, т. е. шестикратным объемом

$$M = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1' & x_2' & x_3' \\ 1 & y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix}$$

тетраэдра, из четырех вершин которого две лежат на прямой A, именно x_k и $y_k = x_k + a_{0k}$, а две другие на прямой A', именно x_k' и $y_k' = x_k' + a_{0k}'$. Следовательно, мнимая часть

$$M = -\bar{\varphi} \sin \varphi,$$

где $\bar{\varphi}$ — кратчайшее расстояние между двумя прямыми A и $\bar{A}$, а φ — угол между ними есть две величины, знаки которых надо по надлежащему правилу связать между собой. Поэтому:

$$A_1\bar{A}_1 + A_2\bar{A}_2 + A_3\bar{A}_3 = \cos(\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}) = \cos\varphi - \varepsilon\bar{\varphi}\sin\varphi. \qquad (14)$$

Итак, мы показали, что *дуальное сферическое расстояние между дуальными точками равно*

$$\text{угол} + \varepsilon \text{ расстояние} \qquad (15)$$

обеих соответствующих прямых.

Этим мы нашли принцип перенесения Штуди, который позволяет предложения сферической геометрии поставить в соответствие предложениям геометрии линий — принцип перенесения, подобный тому, который впервые установил Мёбиус в своей работе с характерным заглавием: „О способе перехода от соотношений, принадлежащих лангиметрии, к соответствующим предложениям планиметрии", 1852 г. (Werke, т. 2, стр. 189 — 204). Уясним себе лучше всего этот принцип перенесения на примере.

Как известно, высоты сферического треугольника сходятся в одной точке. Перенесем этот известный факт сферической геометрии на пространство линий. Будем исходить из трех попарно скрещивающихся прямых $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, соответствующих вершинам нашего треугольника, и построим для всякой пары из них, как например, для $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, нормально пересекающую их прямую $\mathfrak{B}_3$. Тогда точкам большого круга, проходящего через точки A_1 и A_2, на дуальной сфере будут соответствовать прямые, ортогонально пересекающие прямую $\mathfrak{B}_3$. Общие перпендикуляры $\mathfrak{E}_k$ к прямым $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ будут тогда аналогичным образом соответствовать трем высотам треугольника, между тем как каждой точке, например, на $\mathfrak{E}_3$ будет соответствовать перпендикуляр общему перпендикуляру прямых $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{B}_3$. Эти три прямые $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_3$ имеют общий перпендикуляр. Другими словами:

Пусть дан пространственный шестиугольник со сплошь прямыми углами. Построим к каждым двум из его противолежащих сторон общий перпендикуляр (предположим, что единственный). Тогда существует прямая, ортогонально пересекающая эти три перпендикуляра.

Эта теорема была дана Петерсоном (J. Peterson) и Морлеем (F. Morley) в 1898 г.[1]).

§ 78. Аналоги дуальным проективитетам на плоскости в геометрии линий.

Возьмем нормированные дуальные прямолинейные координаты A_1, A_2, A_3 с соотношением $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$ и подвергнем их ортогональной подстановке

$$A_i^* = \sum_{k=1}^{3} C_{ik} A_k, \quad \sum A_i^2 = \sum A_i^{*2} \tag{16}$$

с дуальными коэфициентами $C_{ik} = c_{ik} + \varepsilon \bar{c}_{ik}$. Получаем таким образом группу, зависящую от шести действительных параметров, преобразования которой сохраняют в пространстве линий дуальный угол (14), (15). Следовательно, дело идет о конгруэнтных преобразованиях пространства линий, т. е. об его евклидовых движениях и зеркальных отображениях. При этом под „зеркальным отображением" мы понимаем конгруэнтное отображение с изменением знака объема тетраэдра, следовательно, например, — зеркальное отражение от некоторой плоскости. Очевидно все движения можно составить из четного числа подобных зеркальных отражений, а все зеркальные отображения — из нечетного числа зеркальных отражений.

Найденную форму (16) движений евклидова пространства можно использовать, например, для того, чтобы перенести известное представление вращений вокруг одной точки с помощью кватернионов на пространственную геометрию; мы тотчас придем к параметрам, использованным Штуди для рассмотрения движения евклидова пространства, а через это вообще к интересным исследованиям Штуди по кинематике[2]); на этом, однако, мы задерживаться не будем. Упомянем только, что при этом положение координатного прямоугольного трехгранника (т. е. фигуры, зависящей от шести постоянных) вводится в качестве пространственного элемента; другими словами, в основу всего исследования кладется „группа параметров" группы движений.

Обратимся теперь к другой группе, содержащей группу движений в качестве подгруппы. Для этого рассмотрим все линейные подстановки

$$A_i^* = \sum C_{ik} A_k, \tag{17}$$

[1]) Ср. E. Study, Geometrie der Dynamen, стр. 107, Лейпциг, 1903.

[2]) См. E. Study, Geometrie der Dynamen, Anhang, стр. 555—596. Далее E. Study, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges., том 12, стр. 36—60, 1912.

где на коэфициенты $C_{ik} = c_{ik} + \varepsilon \bar{c}_{ik}$ наложим только то ограничение, что действительная часть их определителя $|c_{ik}| \neq 0$, для того, чтобы уравнения были разрешимы относительно A_k. Очевидно теперь нормировка $\sum A_i^2 = 1$ не имеет больше смысла, но будет вполне целесообразно наряду с преобразованиями (17) ввести еще контрагредиентные преобразования переменных A_i' таким образом, что уравнение $\sum A_i A_i' = 0$ сохраняется. Таким образом мы переносим проективную геометрию плоскости „дуальных точек" $A_1 : A_2 : A_3$ и „дуальных прямых" $A_1' : A_2' : A_3'$ на пространство линий, которое мы представляем себе дважды покрытым двумя „слоями" — слоем из прямых A и слоем из прямых A'. Поэтому мы получаем в пространстве линий группу, зависящую от восьми дуальных и, следовательно, от шестнадцати действительных существенных параметров — группу G_{16} *„радиальной проективной геометрии"* Штуди.

Если мы вспомним геометрический смысл уравнения (9), то увидим: *при преобразованиях группы G_{16} (действительные, собственные) прямые каждого отдельного слоя таким образом преобразуются друг в друга, что ортогональное пересечение прямых различных слоев сохраняется.*

Это свойство характеризует группу G_{16}, если мы ее расширим до группы G_{17} путем прибавления преобразований подобия:

$$a_{0k}^* = a_{0k}, \quad \text{при} \quad i \neq 0 \quad a_{ik}^* = \lambda a_{ik}, \quad \lambda \neq 0.$$

Если в подстановке (17) выделить действительную и мнимую части, то получим линейные подстановки комплексных координат a_{ik}; так как соотношение $B_i = (\rho + \varepsilon\tau) A_i$ остается неизменным, такого рода подстановки координат a_{ik} переводят коаксиальные комплексы опять в коаксиальные комплексы. Нетрудно сформулировать этот результат в виде второй характеристики радиально-проективной геометрии:

Преобразования группы G_{17} состоят из отображений осей линейных комплексов, соответствующих тем линейным подстановкам комплексных координат, которые переводят коаксиальные комплексы опять в коаксиальные.

Отсюда можно вывести, каким образом проще всего находить классы алгебраических многообразий прямых, инвариантных относительно группы G_{17}, а значит также и G_{16}. Для этого надо взять, как в § 22, линейные семейства линейных комплексов и определить их оси. Сообщим о простейшем имеющемся здесь случае, именно, об осях пучка линейных комплексов. Они образуют в частном случае прямые пучка, а в общем случае — образующие линейчатой поверхности, которую обычно называют, следуя Кели, *цилиндроидом*. Обе названные фигуры с точки зрения нашей группы G_{16} не являются различными.

Соответствующий образ на „плоскости" $A_1 : A_2 : A_3$ состоит из всех тех дуальных точек дуальной прямой, которые с тремя точками имеют *действительное* двойное отношение.

Простой способ получения цилиндроида, справедливость которого тотчас видна, заключается в следующем: *общие перпендикуляры прямых пучка (с собственной точкой) и постоянной прямой образуют цилиндроид.* Этот последний сам вырождается в пучок, если плоскость данного пучка перпендикулярна к плоскости заданной прямой.

Вообще имеет место:

Общие перпендикуляры образующих цилиндроида и постоянной прямой образуют, в общем случае, опять-таки некоторый цилиндроид, а в специальном случае, когда постоянная прямая является нормалью к цилиндроиду, некоторый пучок.

Приведем еще одну элементарно геометрическую теорему Аппеля в качестве оправдания термина „цилиндроид". Если провести из постоянной точки P ко всем образующим линейчатой поверхности F нормальные плоскости, то они будут пересекать соответствующие образующие поверхности F в точках некоторой кривой, которую мы (в соответствии с введенным нами в § 75 названием для случая плоскости) будем называть подэрой точки P относительно поверхности F. Тогда имеет место предложение:

Если для всех точек P пространства подэра линейчатой поверхности F является плоской кривой, то F будет либо цилиндром, либо цилиндроидом[1]).

Если мы представим себе твердый координатный трехгранник K_0 повернутым вокруг каждой образующей $A(t)$ линейчатой поверхности F на угол π, то получим непрерывное семейство $K(t)$ подобных трехгранников, посредством которого описывается однопараметрический процесс движения твердого тела. Траектории $P(t)$ точки этого твердого тела $K(t)$ получим, если сначала найдем для соответствующей точки P_0 тела K_0 подэру относительно F и затем эту подэру увеличим подобно в отношении $1:2$.

Следовательно, наш последний вопрос находится в родстве с вопросом о всех однопараметрических процессах движения твердого тела, при которых все траектории являются плоскими кривыми.

В этой формулировке настоящий вопрос был решен Дарбу уже в 1881 г. (Comptes Rendus за этот год, стр. 118)[2]). В случае движений, соответствующих цилиндроидам в качестве траектории, получаются эллипсы.

Аналогичным образом двупараметрические процессы движений связаны с системой осей двупараметрического линейного семейства линейных комплексов.

Мы еще исследуем, каким образом из нашей группы G_{16} преобразований прямых пространства может быть получена группа G_6 преобразований направленных прямых плоскости, с которыми мы уже познакомились в § 67, как с преобразованиями Лагерра. Если в дуальной плоскости $A_1 : A_2 : A_3$ направить внимание только на те отображения (17)

---

[1]) P. Appell, Soc. math. France, том 28, стр. 261—265 (1900).

[2]) См. также заметку Дарбу: G. Darboux, Sur les mouvements algébriques в книге G. Koenigs, Leçons de cinématique, стр. 352, Париж, 1897.

группы G_{16}, которые переставляют между собой дуальные точки прямой $A_3 = 0$, именно на отображения

$$\left.\begin{aligned} A_1^* &= C_{11}A_1 + C_{12}A_2, \\ A_2^* &= C_{21}A_1 + C_{22}A_2, \\ A_3^* &= A_3, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

то мы увидим, что соответствие дуальных точек на прямой $A_3 = 0$ дается линейной подстановкой в двух однородных дуальных координатах $A_1 : A_2$.

Но точно таким же образом мы могли бы в § 67 представить группу G_6 Лагерра на плоскости, только тогда мы писали формулы преобразования неоднородно. В применении к пространству можно сказать:

Вызываемые преобразованиями группы G_{16} преобразования прямых, зависящих от двух параметров $A_1 : A_2$, пересекающих ортогонально прямую $A_1' = 0$, $A_2' = 0$, $A_3' = 1$, могут быть отображены взаимно однозначно на лагерровы преобразования направленных прямых плоскости.

Для того чтобы установить соответствия, найденные аналитически, так же и геометрически, мы поступим следующим образом. Прямая A_1, A_2, 0 определяет, вместе с прямой $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, угол ψ и кратчайшее расстояние $\bar{\psi}$ в соответствии с формулой

$$\frac{A_2}{A_1} = \operatorname{tg}(\psi + \varepsilon\bar{\psi}), \tag{19}$$

как это легко получить из формулы (14). Если мы вспомним из § 67, что преобразования Лагерра давались дробно линейными подстановками в

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}}{2},$$

где φ обозначает угол на плоскости между направленной прямой и некоторым постоянным направлением, а $\bar{\varphi}$ — ее расстояние от постоянной точки, то увидим, что достаточно положить

$$\psi + \varepsilon\bar{\psi} = \frac{\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}}{2}$$

или

$$\psi = \frac{\varphi}{2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\bar{\varphi}}{2}, \tag{20}$$

чтобы получить искомое соответствие. *Отображение* (20) *направленных прямых плоскости на прямые, ортогонально пересекающие постоянную прямую* ($A_1' = 0$, $A_2' = 0$, $A_3' = 1$), *переводит направленные окружности плоскости в цилиндроиды*, образующие которых ортогонально пересекают неподвижную прямую, причем к цилиндроидам следует также отнести и пучки прямых.

§ 79. Аналоги дуальному сродству окружностей в геометрии линий. Литература.

В § 77 мы отобразили направленные прямые пространства на дуальные точки шаровой поверхности. Если в пространстве этой сферы ввести вместо неоднородных координат A_1, A_2, A_3 однородные, написав вместо A_i отношение $A_i : A_4$, то уравнение сферы примет вид:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 \doteq 0. \qquad (21)$$

Если теперь мы рассмотрим линейные подстановки

$$A_i^* = \sum_{k=1}^{4} C_{ik} A_k, \qquad (i = 1, \ldots, 4) \qquad (22)$$

имеющие дуальные коэфициенты $C_{ik} = c_{ik} + \varepsilon \bar{c}_{ik}$, с $|c_{ik}| \neq 0$, и переводящие уравнение сферы (21) само в себя, то получим дуальное сродство окружностей на сфере — группу G_{12}, зависящую от $6 \times 2 = 12$ действительных параметров.

Мы теперь укажем на то, каким образом найденную группу G_{12} преобразований направленных прямых пространства можно вывести из евклидовых движений пространства.

Всякая (собственная) изотропная плоскость, т. е. всякая (собственная) плоскость, касающаяся абсолютного конического сечения, содержит только одну единственную действительную прямую; этой прямой является ее линия пересечения с комплексно-сопряженной плоскостью, которая также изотропна. Обратно: через всякую действительную собственную прямую проходят две комплексно-сопряженные изотропные плоскости. Это соответствие между действительными прямыми и изотропными плоскостями можно сделать однозначным в обоих направлениях, снабдив прямые определенной ориентацией. Если G — такая направленная прямая, то мы совместим с G также и по направлению совпадающую с нею ось x_3 некоторого (например, право-винтового) прямоугольного координатного трехгранника и условимся, чтобы соответствующая направленной прямой изотропная плоскость имела уравнение $x_1 + ix_2 = 0$ ($i^2 = -1$).

Итак, этим устанавливается соответствие между (собственными) изотропными плоскостями и (действительными, собственными) прямыми нашего евклидова пространства, — соответствие, являющееся инвариантным относительно действительных движений.

Но если над этими изотропными плоскостями совершать комплексные евклидовы движения, т. е. допустить также и комплексные коэфициенты в формулы преобразований, то мы получим в качестве действительного образа этих преобразований двенадцатипараметрическую группу действительных отображений направленных прямых пространства; и эта группа совпадет с ранее найденной другим путем непрерывной группой G_{12}.

Приведем вкратце доказательство этого утверждения. На сфере можно установить взаимно однозначное соответствие между семейством

комплексных образующих и действительными точками сферы, если потребуем, чтобы каждая образующая этого семейства проходила через соответствующую точку. Разумеется, это соответствие является не чем иным, как геометрической формулировкой для числовой сферы Римана. Если теперь эти образующие сферы подвергнуть какому-нибудь действительному движению (вращению), переводящему сферу самое в себя, то действительные образы подвергнутся тому же самому движению. Если же мы подвергнем образующие комплексному движению, то мы получим в качестве действительного образа преобразование из непрерывной шестипараметрической группы сродства окружностей на этой сфере. Теперь снова удвоим число измерений на нашей сфере. Именно, сначала нам были необходимы два действительных параметра для определения точек сферы. Затем мы допустили еще два комплексных параметра, что соответствует четырем действительным. Теперь мы допустим для обоих параметров комплексно-дуальные значения вида:

$$(a+ib)+\varepsilon(\bar{a}+i\bar{b}), \qquad (i=-1,\ \varepsilon^2=0)$$

вследствие чего мы приходим к восьми независимым действительным параметрам на сфере. Перенесем теперь наши рассмотрения на комплексно-дуальную область и получим, таким образом, дуальное сродство окружностей (22) в качестве образа комплексно-дуальных движений семейства образующих сферы. Теперь остается только отметить, что комплексно-дуальным точкам подобной образующей соответствуют известным образом ориентированные прямые изотропной плоскости, чтобы сразу с помощью принципа перенесения Штуди получить сформулированный выше результат.

Заметим попутно, что преобразования группы G_{12} могут быть также представлены посредством дробно-линейных подстановок в комплексно-дуальных числах

$$\frac{A_3-A_4}{A_1+iA_2}=(a+ib)+\varepsilon(\bar{a}+i\bar{b}); \tag{23}$$

в этой формуле постоянные преобразования также комплексно-дуальны.

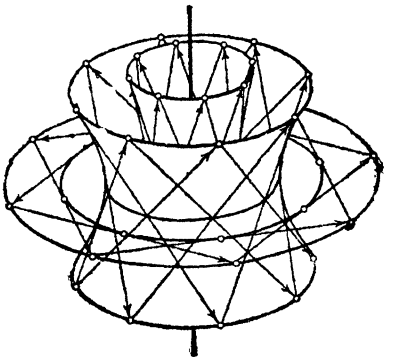
Если теперь пользоваться попеременно обоими способами получения нашей группы G_{12}, то легко найти инвариантные относительно G_{12} классы многообразий направленных прямых. Если, например, воспользоваться первым способом, то мы увидим, что̀ соответствует окружностям на сфере. С помощью (14) и (15) из § 77 мы тотчас увидим, что соответствующее многообразие направленных прямых возникает из произвольной их прямой посредством того, что эту последнюю подвергают всевозможным винтовым движениям вокруг постоянной оси. Другими словами: направленные прямые, соответствующие дуальной окружности сферы, образуют с постоянной прямой постоянный угол и имеют от нее постоянное кратчайшее расстояние. Если мы будем исходить из второго способа получения нашей группы G_{12}, то мы можем действительный образ всех изотропных плоскостей рассматривать посредством собственной комплексной точки. Таким образом получается

некоторая фигура с симметрией вращения (см. черт. 85); именно, известным образом ориентированные образующие поверхностей второго порядка некоторого конфокального семейства с симметрией вращения.

С помощью принципа перенесения Штуди теперь можно легко получить дальнейшие важные группы преобразований геометрии линий, если, например, сначала распространить на дуальную область конформное отображение на сферу, а затем сделать перенесение на пространство линий. Однако мы здесь на этом не будем останавливаться, а лучше дадим некоторые исторические и литературные сведения.

К линейно-геометрическим исследованиям Штуди, связанным также с идеями английского геометра Клиффорда, можно притти, исходя из одной мысли Клейна, которую Клейн изложил в своей работе: Eine Übertragung des Pascalschen Satzes auf die Raumgeometrie (Erlanger Ber. 1873 = Ges. Abhandlungen, т. 1. стр. 406 = Math. Annalen, т. 22. стр. 246, 1883).

Клейн пересекает комплексными прямыми плоскости раз навсегда выбранное коническое сечение K этой плоскости, являющееся носителем комплексного параметра t. Если теперь комплексные числа t истолковать как действительные точки римановой числовой сферы, то мы увидим, что каждой комплексной прямой плоскости (не касающейся K) соответствует пара действительных точек на числовой сфере или соединяющая их прямая пространства.



Черт. 85.

Если прямые плоскости подвергнуть теперь комплексным проективным преобразованиям, то соответственным образом и в пространстве получится группа преобразований прямых, зависящая от шестнадцати действительных параметров. Если, далее, путем надлежащего перехода к пределу, перейти от неевклидовой, а именно, гиперболической геометрии, имеющей в качестве абсолютной поверхности числовую сферу, к евклидовой геометрии, то из только что найденной группы возникает группа Штуди G_{16} (§ 78).

Новые идеи Штуди изложены в „неопубликованных лекциях“ „О неевклидовой геометрии и геометрии линий“, из которых первые (I—IV) появились в Jahresbericht der Math. Ver., т. 11 (1902), стр. 313, а позднейшие (V—XII) там же в томе 15 (1906), стр. 476. В этих „Лекциях“ главным образом рассматривается геометрия линий в неевклидовом пространстве, в то время как евклидова геометрия линий Штуди, т. е. такие группы преобразований геометрии линий, которые содержат в качестве подгруппы евклидовы движения, рассматривается в его обширной работе Geometrie der Dynamen (Лейпциг, 1903), Большое количество геометрических идей, содержащихся в этой книге, пока еще мало известно, что отчасти обусловливается изложением.

В этих работах Штуди много места занимает *введение несобственных элементов* в случае заданной группы преобразований. Непрерывные группы преобразований, зависящие от n параметров, могут быть написаны при одном ограничении [1]) путем введения надлежащих координат в виде группы проективных преобразований, т. е. группы линейных однородных подстановок. Элементам, над которыми первоначально производились наши преобразования, в нашем проективном пространстве будут соответствовать точки некоторого (в употребительных случаях) алгебраического многообразия, замкнутого по представлениям проективной геометрии этого пространства. Если теперь к этим собственным элементам присоединить в качестве несобственных элементов те исключительные точки этого алгебраического многообразия, которые не являются образами (собственных) элементов, то желаемая замкнутость многообразия элементов будет достигнута. Но этот процесс, как можно уже видеть на простейших примерах, отнюдь не является однозначным и поэтому дает место весьма обширным изысканиям. Но к счастью для большинства геометрических исследований, например, для исследований, касающихся группы G_{16}, введение несобственных элементов так же не нужно, как в элементарной геометрии плоскости (т. е. в плоской геометрии движений) не нужно говорить о несобственных (бесконечно удаленных) точках, в то время как введение этих точек, конечно, совершенно необходимо для разумного изложения проективной геометрии. Причина этого очевидна: при движениях собственные точки переставляются между собой, тогда как при проективитетах это не имеет места.

Дальнейшие литературные указания по поводу § 77, 78 имеются в статье Фано: *G.* Fano Kontinuierliche geometrische Gruppen (Enzyklopädie, III, AB 4b, Nr. 17—20, стр. 325). Некоторые применения к диференциальной геометрии имеются у Бляшке [2]).

Обратимся к литературе, относящейся к рассмотренной в этом параграфе группе G_{12}. В частности, особые преобразования из группы G_{12} рассматривал Рибокур (A. Ribaucour) в своей работе о минимальных поверхностях (Bruxelles Mém. cour., том 44, 1880). Это связано с тем, что отображения из G_{12} переводят так называемые изотропные системы лучей опять в такие же системы, как это мы увидим из второго способа получения группы G_{12}, если обратим внимание на то, что всякая подобная система лучей является действительным образом касательных плоскостей некоторой изотропной развертывающейся поверхности. Но из этих изотропных систем лучей Рибокур выводит минимальные поверхности. Штуди в Geometrie der Dynamen на стр. 230 также указывает на нашу группу G_{12}. С помощью второго способа получения группы G_{12} ее рассматривал Вебер (E. v. Weber, в Leipziger Berichten, т. 55, стр. 384, 1903), а с помощью первого — Грюнвальд (J. Grünwald), в Wiener Monatshefte, том 17, стр, 81, 1906.

[1]) Именно, если группа не имеет непрерывного „центра". К центру принадлежат все элементы группы, перестановочные со всеми прочими элементами.

[2]) См. Бляшке В., Диференциальная геометрия, т. I, ОНТИ, М.—Л. 1936, гл. 9.

Одинаково обе точки зрения были приняты во внимание в диссертации Бляшке, опубликованной в Wiener Monatshefte, том 21, стр. 1—107 (1910).

Систематического использования принципа перенесения Штуди в диференциальной геометрии до сих пор еще не имеется. Применения методов Штуди к механике недавно дал Мизес (R. v. Mises, в Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 4, стр. 155, 193, 486; 1924).

§ 80. Евклидово отображение эллиптической неевклидовой пространственной геометрии.

Простейшая трактовка неевклидовой геометрии получается, как это заметил Клейн, с помощью проективного мероопределения Кели посредством введения абсолютной поверхности второго порядка, как это было изложено в § 39. Например, мы получим так называемую эллиптическую геометрию, если положим в основу в качестве абсолютной поверхности некоторую нулевую поверхность второго порядка Ф, причем *„расстояние“* между двумя точками P и Q пространства определим, например, посредством формулы Лагерра (см. стр. 160):

$$\frac{1}{2i}\lg DV(PQRS), \tag{24}$$

в которой фигурирует двойное отношение двух точек P, Q с точками пересечения R, S прямой PQ и абсолютной поверхности Ф. *„Движениями“* этого неевклидова пространства называют непрерывную шестипараметрическую группу проективных преобразований поверхности Ф в себя.

Следуя Фубини, Хьелмслеву и Штуди, мы получим отсюда более наглядное истолкование этого неевклидова мероопределения, показав что:

Направленные прямые G эллиптического пространства можно таким образом отобразить на пары точек l, r двух евклидовых единичных сфер K_l и K_r, чтобы „движениям“ эллиптического пространства соответствовали независимые друг от друга евклидовы вращения обеих сфер.

Следующее доказательство находится в тесной связи с уже упомянутой в § 79 работе Клейна Eine Übertragung des Pascalschen Satzes..., 1873 г.

Представим себе абсолютную поверхность Ф, оба семейства образующих которой будем различать с помощью слов „левый“ и „правый“, и всякую образующую „левого“ семейства будем взаимно однозначно определять посредством комплексного параметра t_l, точно так же всякую образующую „правого“ семейства — посредством комплексного параметра t_r. Докажем, что это возможно. „Левая“ образующая взаимно однозначно определяется точкой пересечения ее с некоторой раз навсегда выбранной „правой“ образующей. Но точки этой последней, разумеется, могут быть представлены взаимно однозначным образом с помощью комплексного параметра t_l. Кроме того мы видим на

этом пути, что „движениям" эллиптического пространства соответствуют дробно линейные подстановки:

$$\left.\begin{aligned} t_l^* &= \frac{a_l t_l + b_l}{C_l t_l + d_l}, & t_r^* &= \frac{a_r t_r + b_r}{C_r t_r + d_r}, \\ a_l d_l - b_l c_l &\neq 0, & a_r d_r - b_r c_r &\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Пусть теперь G будет действительной прямой эллиптического пространства и R, S — обе ее комплексно-сопряженные точки пересечения с абсолютной поверхностью Ф. Так как Ф нулевая поверхность, то $R \neq S$. Можно ориентировать прямую G, рассматривая ее точки пересечения R, S с поверхностью Ф в определенном порядке, т. е. объявив, например, точку R „первой" точкой. Тогда с помощью формулы Лагерра (24) можно определить расстояние между двумя точками P и Q на прямой G также и по его знаку. Поэтому действительная ориентированная прямая G будет взаимно-однозначно определяться заданием ее „первой" точки пересечения R с абсолютной поверхностью Ф; тогда вторая точка пересечения S будет комплексно-сопряженной по отношению к R. В свою очередь точку R можно определить заданием обоих параметров t_l и t_r образующих, проходящих через эту точку поверхности Ф. Далее мы истолковываем комплексные числа t_l и t_r как действительные точки двух римановых числовых сфер K_l и K_r и вследствие этого, наконец, получаем, что направленные прямые эллиптического пространства, как мы этого хотели, отобразились взаимно однозначно на пары точек l, r сфер K_l, K_r, причем теперь все стало действительным.

Чтобы теперь выяснить, каким образом переносятся движения эллиптического пространства на нашу пару сфер, посмотрим, что соответствует „перемене направлений" в неевклидовом пространстве, т. е. отображению, ставящему в соответствие каждой ориентированной прямой G совпадающую с ней, но ориентированную противоположно, прямую $\overline{G}$. На „первые" точки пересечения прямых с абсолютной поверхностью Ф наше отображение переносится таким образом, что каждой точке R ставится в соответствие комплексно-сопряженная точка $S = \overline{R}$, через которую проходят комплексно-сопряженные образующие поверхности Ф. Образующая, комплексно сопряженная в отношении к t_l, принадлежит опять к левому семейству (следовательно, можно обозначить ее параметр через $\overline{t_l}$), потому что если бы она принадлежала к правому семейству, то она имела бы с образующей t_l точку пересечения. Но эта последняя должна быть действительной; но это несовместно с тем, что Ф является нулевой поверхностью. Следовательно, мы имеем в соответствии с „сопряженной" $R \to \overline{R}$ на Ф отображение $t_l \to \overline{t_l}$, $t_r \to \overline{t_r}$ обеих сфер. Если мы возьмем четыре левых образующих, параметры которых имеют *действительное* двойное отношение, то это последнее при „сопряжении" переходит в комплексно-сопряженное число, т. е. остается действительным. Но четырем комплексным числам t_l с действительным двойным отношением соответствуют лежащие на одной окружности четыре точки сферы K_l. Итак, мы видим: соответствие $t_l \to \overline{t_l}$, и точно

так же $t_r \to \bar{t}_r$, является сродством окружностей. Так как, сверх того, оно инволюторно ($\bar{\bar{t}}_l = t_l$) и не имеет неподвижных точек, ибо не существует никаких действительных образующих поверхности Ф, то мы получаем: сродство окружностей $t_l \to \bar{t}_l$ или $l \to \bar{l}$ на сфере K_l с геометрической стороны устроено так, что прямые, соединяющие соответственные точки l и $\bar{l}$, проходят через постоянную точку O_l внутри сферы K_l, потому что так устроено самое общее инволюторное сродство окружностей сферы K_l без (действительных) неподвижных точек. С помощью проективного преобразования сферы K_l в себя можно точку O_l перевести в центр K_l и точно так же точку O_r в центр сферы K_r.

Таким образом мы получаем:

Перемене направлений $G \to \bar{G}$ в эллиптическом пространстве соответствуют зеркальные отображения $l \to \bar{l}$ и $r \to \bar{r}$ обеих сфер K_l и K_r относительно их центра.

В силу формул (25) каждому движению $G \to G^*$ эллиптического пространства соответствуют сродства окружностей $l \to l^*$, $r \to r^*$ обеих сфер. Так как всякое движение коммутативно с „переменой направлений" (т. е. совпадающие, но противоположно ориентированные, прямые переходят опять в такие же прямые), то сродства окружностей $l \to l^*$, $r \to r^*$ должны переводить диаметрально противоположные точки опять в такие же. Следовательно, соответствующие проективные преобразования сфер должны сохранять их центры, т. е. будут евклидовыми движениями (вращениями) этих сфер.

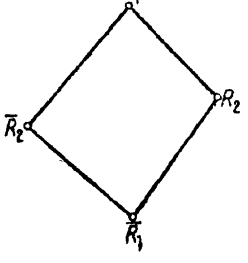
Если мы теперь подсчитаем число параметров наших групп, то увидим, что сформулированная выше теорема Штуди доказана. Непрерывная группа G_6 движений эллиптического пространства зависит от шести, каждая из непрерывных групп G_3^l, G_3^r от трех существенных параметров, причем группа G_6 не содержит шестипараметрических подгрупп, а группы G_3 — трехпараметрических подгрупп, но между обеими группами существует взаимно однозначное соответствие такого рода, что каждому эллиптическому движению $G \to G^*$ соответствует два евклидовых вращения $l \to l^*$, $r \to r^*$ и обратно: каждой паре подобных независимых вращений соответствует некоторое эллиптическое движение.

Теперь выясним, как отображаются точки и плоскости эллиптического пространства на пару сфер K_l, K_r.

Пусть P — действительная точка и E — ее полярная плоскость относительно абсолютной поверхности Ф. Рассмотрим инволюторную коллинеацию (перспективу) пространства, имеющую точку P в качестве центра и плоскость E в качестве центральной плоскости, при которой, следовательно, каждая точка Q переходит в такую точку Q^* прямой PQ, что пара точек Q, Q^* гармонически разделяет другую пару, которая состоит из точки P и точки пересечения прямой PQ с плоскостью E. Эта коллинеация переводит Ф в себя и может быть рассматриваема как неевклидово зеркальное отображение относительно точки P или плоскости E. Будем рассматривать это зеркальное

отображение, как отображение $G \to G^*$ прямых эллиптического пространства, и найдем его евклидов образ.

Зеркальное отображение пространства, следовательно коллинеация с отрицательным определителем, необходимо переставляет между собой оба семейства образующих нашей поверхности Ф, т. е. переводит левое семейство в правое и наоборот. Это можно обнаружить, например, так: пусть R_1, $\bar{R}_1$ и R_2, $\bar{R}_2$ будут обеими парами точек пересечения двух прямых G_1, G_2 с поверхностью Ф, так что $R_1R_2\bar{R}_1\bar{R}_2$ будет пространственным четырехугольником (см. схематический черт. 86). Тогда определитель четырех точек



Черт. 86.

$$(R_1R_2\bar{R}_1\bar{R}_2) \neq 0$$

будет действительным, потому что комплексно-сопряженный определитель

$$(\bar{R}_1\bar{R}_2R_1R_2)$$

с ним совпадает. Если теперь определитель

$$(R_1R_2\overline{R_1}\,\overline{R_2}) > 0,$$

то можно установить, должны ли образующие R_1R_2 и $\bar{R}_1\bar{R}_2$ поверхности Ф называться левыми и, следовательно, $R_2\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2R_1$ — правыми, а в случае

$$(R_1R_2\bar{R}_1\bar{R}_2) < 0$$

наоборот. При проективном преобразовании определитель $(R_1R_2\bar{R}_1\bar{R}_2)$ умножается на определитель подстановки; следовательно, если этот последний отрицателен, то проективное преобразование переставляет оба семейства образующих, как это и утверждалось.

Если мы будем поступать так же, как и раньше при рассмотрении отображения движения эллиптического пространства, то мы придем к следующему результату: в качестве образа зеркального отображения S

$$\{G\}\, S = G^*$$

эллиптического пространства мы получаем два сродства окружностей T_1, T_2

$$\{l\}\, T_1 = r^*, \quad \{r\}\, T_2 = l^*,$$

переводящие диаметрально противоположные точки опять в диаметрально противоположные. Из свойства зеркального отображения S быть инволюторным, т. е. после двукратного почленного применения давать тождество J:

$$S \cdot S = J,$$

вытекает для T_1 и T_2

$$T_1 \cdot T_2 = J;$$

следовательно, $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$. Так как зеркальное отображение S в эллиптическом пространстве может быть непрерывно переведено во

всякое другое зеркальное отображение и так как можно еще естественным образом определить, какое отображение сферы K_l на сферу K_r мы назовем конгруэнтным и какое симметрическим, то можно установить:

Всякому зеркальному отображению $\{G\}S=G^*$, *относительно плоскости* E *эллиптического пространства, соответствует пара симметрических отображений*

$$\{l\}T=r^*, \quad \{l^*\}T=r$$

обеих сфер K_l, K_r *друг на друга.*

Далее, действительные прямые плоскости E являются действительными прямыми эллиптического пространства, переходящими при зеркальном отображении S сами в себя также и по своему направлению

$$\{l\}T=r,$$

в то время как прямые, проходящие через полюс P плоскости E относительно поверхности Ф, изменяют свое направление на обратное. Если мы обозначим через O зеркальное отображение сфер K_l и K_r относительно их центров, то найдем для прямых G, проходящих через точку P,

$$\{l\}T=r^*=\{r\}0,$$

$$\{l^*\}T=r=\{r^*\}0,$$

т. е.

$$\{l\}TO^{-1}=\{l\}TO=r.$$

Так как T и O являются симметрическими отображениями обеих сфер, то TO будет конгруэнтным отображением.

Итак, мы получаем:

Направленным прямым, проходящим через некоторую точку, соответствует конгруэнтное отображение $l\to r$, *направленным прямым плоскости соответствует симметрическое отображение* $l\to r$ *обеих сфер друг на друга.*

Сопоставим теперь соответствующие друг другу предметы.

Эллиптическое пространство	*Евклидовы сферы* K_l, K_r
1. Направленная прямая G	1. Упорядоченная пара точек l, r.
2. Перемена направлений.	2. Зеркальные отображения обеих сфер $l\to l^*$, $r\to r^*$ относительно их центров.
3. Движение.	3. Независимое вращение $l\to l^*$, $r\to r^*$ обеих сфер.
4. Прямые, проходящие через точку P.	4. Вращение $P: l\to r$.
5. Прямые плоскости E.	5. Зеркальное отображение $E: l\to r$.
6. Пересекающиеся прямые G_1, G_2.	6. Пары точек l_1, r_1 и l_2, r_2 с одинаковым сферическим расстоянием $l_1l_2=r_1r_2$.
7. Левые параллельные прямые G_1, G_2.	7. Пары точек l_1, r_1; l_2, r_2 с $l_1=l_2$.
8. Правые параллельные прямые G_1, G_2.	8. $r_1=r_2$.

Только что определенный „параллелизм" прямых в эллиптическом пространстве был введен впервые Клиффордом и не имеет никакого

непосредственного отношения к параллелизму Леви-Чивита, о котором мы будем говорить позднее (в § 82 и след.). Проведем теперь наше сопоставление дальше:

9. Система нормалей семейства параллельных поверхностей.	9. Сохраняющее площадь отображение.
10. Система нормалей семейства поверхностей с равной нулю кривизной (Бьянки).	10. Левая и правая точки-образы, каждая из которых независимо движется по некоторой кривой.
11. Изотропная система лучей.	11. Сохраняющее ориентацию конформное отображение $l \to r$.
12. Непрерывная группа G_{12} радиально-проективной геометрии эллиптического пространства.	12. Независимые сродства окружностей $l \to l^*$, $r \to r^*$.
13. Расстояние между двумя точками P_1 и P_2.	13. Угол поворота $P_1P_2^{-1}$.
14. Угол между двумя плоскостями E_1 и E_2.	14. Угол поворота $E_1E_2^{-1}$.
15. Развертывающиеся поверхности.	15. Кривые $\{l\}$, $\{r\}$, отображенные друг на друга с сохранением длин.
16. Абсолютные поляры, т. е. поляры относительно поверхности Ф.	16. Левые образы одинаковые, а правые диаметрально противоположные (или наоборот).

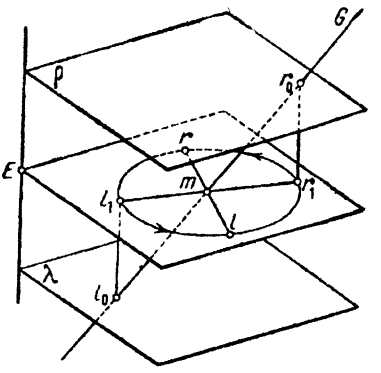
На этом мы остановимся и относительно дальнейших свойств этого соответствия укажем на следующие работы: E. Study, Über nichteuklidische und Liniengeometrie, которую мы уже назвали в предыдущем § 79. Далее, Штуди „Исследования по неевклидовой геометрии“ (American Journal of Mathematics, т. 29, 1907), особенно II „Понятие «левой» и «правой» в эллиптической геометрии“ (стр. 116—159), где, например, имеется представление движений эллиптического пространства с помощью кватернионов — алгебраический аналог геометрически выведенному здесь отображению прямых эллиптического пространства на пары точек двух сфер. Почти одновременно со Штуди это отображение нашел также Фубини в своей диссертации (Пиза, 1900): G. Fubini, Il parallelismo di Clifford negli spazii ellitici. Далее, см. I. Petersen (= Hjelmslew), Géométrie des droites dans l'espace non euclidien (Kopenhagen Akademie, 1900, стр. 305—330). См. также W. Blaschke, Differenzialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum (Mathematische Zeitschrift, т. 15, стр. 309—320, 1922 г.).

§ 81. Кинематическое отображение.

В заключение наших рассмотрений по геометрии линий мы приведем еще отображение прямых пространства на пары точек плоскости, которое можно получить из приведенного выше (§ 80) отображения посредством предельного перехода и которое называется „кинематическим отображением“; оно было одновременно получено в 1911 г. Грюнвальдом и Бляшке. Мы сейчас, независимо от предыдущего, выведем главные свойства этого кинематического отображения.

Прежде всего ладим конструкцию отображения прямых G пространства на упорядоченные пары точек l, r евклидовой плоскости E (см. черт. 87). Пусть λ и ρ будут двумя плоскостями, параллельными

плоскости E и отстоящими от нее на одинаковом расстоянии, так что E будет расположена посредине между λ и ρ. Пусть G — произвольная прямая пространства, непараллельная плоскости E; l_0 и r_0 — ее точки пересечения с λ и ρ, а l_1 и r_1 — их ортогональные проекции на плоскость E. Установим в плоскости E „положительное" направление обхода и повернем отрезок l_1, r_1 в положительном направлении на прямой угол вокруг его центра m, т. е. вокруг точки пересечения прямой G с плоскостью E. Так как это построение обратимо, то мы получаем взаимнооднозначное соответствие между (действительными, собственными) прямыми G пространства не параллельными исходной плоскости E и упорядоченными парами (действительных, собственных) точек l, r этой исходной плоскости E.

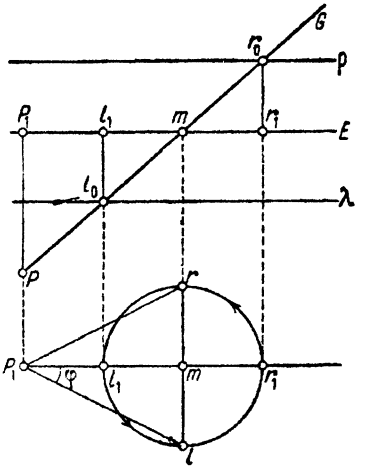


Черт. 87.

Следующее предложение представляет здесь наибольший интерес:

Всем прямым G пространства, проходящим через некоторую точку P (которая не должна лежать на несобственной прямой плоскости E) соответствуют на плоскости пары точек l, r, зависящие от двух параметров такого рода, что поле точек l конгруэнтно полю точек r, т. е. что существует евклидово движение плоскости E, переводящее все точки l в соответствующие точки r.

Другими словами: *прямым пространства соответствуют евклидовы движения плоскости.* Отсюда и название „кинематическое" отображение.



Черт. 88.

Доказательство нашего утверждения очень простое. Если мы рассмотрим все пары точек l_1, r_1, соответствующие прямым, проходящим через точку P, то поле точек l_1 будет подобно полю точек r_1 относительно ортогональной проекции P_1 точки P на плоскость E. Все фигуры (см. черт. 88) P_1, l_1, r_1, l_2, r_2 будут между собой подобны, причем точка P_1 будет соответствовать сама себе и уже в этом содержится справедливость нашего утверждения. Если плоскости ρ и λ удалены от плоскости E на расстояние единицы, то (при условии надлежащего выбора знаков) между углом поворота 2φ вращения $l \to r$ в плоскости E

и расстоянием z соответствующей точки P от плоскости E имеется соотношение

$$z = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Ортогональная проекция P_1 точки P на плоскость E является неподвижной точкой при соответствующем вращении $l \to r$.

Легко показать, что:

Прямым G пространства, лежащим в одной плоскости α, не параллельной E, соответствует в плоскости E зеркальное отображение $l \to r$. Пусть S будет следом плоскости α на плоскости E и ω — угол между α и E. Тогда зеркальное отображение $l \to r$ плоскости E можно произвести таким образом, что плоскость E сначала отображается от прямой S и затем сдвигается вдоль прямой S на $2 \operatorname{ctg} \omega$.

При этом надо установить надлежащий выбор знаков. Сопоставим еще раз вкратце полученные результаты.

Пространство	*Плоскость*
1. Прямая G.	1. Пара точек l, r.
2. Пересекающиеся прямые G, G'.	2. Изометрические пары точек l, r, l', r'; $ll' = rr'$.
3. Точка.	3. Движение.
4. Плоскость.	4. Зеркальное отображение.

Это соответствие находит себе некоторое применение, например, в начертательной геометрии, где этим путем известные свойства линейчатых поверхностей второго порядка отображаются на свойства Ivory конфокальных конических сечений. Из работ по поводу этого „кинематического отображения“ мы назовем:

W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie (Zeitschrift f. Math. u. Physik, m. 60, стр. 61—91 и стр. 203—204, 1911).

J. Grünwald, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft (Sitzungsberichte, Math.—Nat. Klasse, Wien Abt. II a, т. 120, стр. 677—741, 1917).

См. далее в первом томе мюллеровских лекций:

E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie; Die linearen Abbildungen, стр. 240—277 (Leipzig und Wien 1923). Эта книга вообще замечательна тем, что в ней для целей начертательной геометрии пользуются мыслями Клейна и Ли.

РАДОНОВЫ МЕХАНИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПАРАЛЛЕЛИЗМЕ ЛЕВИ-ЧИВИТА.

В § 57—60 мы познакомились с теорией инвариантов квадратичных диференциальных форм. Придерживаясь исторического развития, мы исходили из теории поверхностей Гаусса, т. е. исходили от случая двух переменных. Затем мы видели, как Риман установил те же понятия для n-мерного пространства и, наконец, познакомились с дальнейшим построением этой теории математиками Бельтрами, Кристоффелем и Липшитцем.

Расскажем теперь о новейшем развитии этой области. Принципиальное упрощение и объединение методов было достигнуто Риччи [1]), „Абсолютное дифференциальное исчисление" которого представляет собой мощное вспомогательное средство. Но выведение „исчисления" Риччи из формальных теоретико-инвариантных точек зрения было трудно и совершенно лишено геометрической наглядности, так что этим исчислением пользовались только в отдельных случаях, и в обзорных изложениях нашего предмета его избегали (ср. например „Дифференциальную геометрию" Бьянки).

Но в этом положении вещей наступил полный переворот, когда в 1916 г. Эйнштейн в своей общей теории относительности [2]) открыл область, в которой вообще почти невозможно было обойтись без исчисления Риччи, и вскоре затем Леви-Чивита [3]), в названном по его имени „бесконечно-малом параллельном сдвиге", дал средство к пониманию методов Риччи наглядно-геометрическим образом.

На основании этого весьма важного понятия мы в состоянии новым методом построить внутреннюю диференциальную геометрию поверхностей, как частный случай общих римановых пространств, причем целый ряд важнейших понятий (геодезические линии, геодезическая кривизна, полная кривизна и т. п.) появляются в новом свете. Здесь даже появились совершенно новые пути развития диференциальной геометрии, как, например, „чистая бесконечно малая геометрия" (reine Infinitesimalgeometrie) [4]) Вейля (H. Weyl).

Имеется много руководств по этому предмету; прежде всего, разумеется, учебники теории относительности Эйнштейна, из которых здесь мы назовем только: Weyl, Raum, Zeit, Materie (Berlin, 1923, 5-ое изд.) и Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung [5]) (Berlin, 1925); они уделяют достаточно много внимания изложению „исчисления Риччи". Далее следует указать на короткое и очень простое изложение в „Диференциальной геометрии" Бляшке (Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. II, Berlin, 1923, § 53—57, 66), равно как и на исчерпывающее изложение Схоутена: Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924 г.

Чтобы правильно понять основную мысль параллельного сдвига, мы напомним понятие геодезической кривизны кривой на поверхности. Если бы мы хотели определить ее аналогично определению кривизны плоской кривой с помощью предела отношения

изменение направления : длина дуги

---

[1]) Суммарное изложение метода, разработанного Риччи (G. Ricci—Curbastro, 1853—1924), см. в Math. Annalen, том 54 (Ricci и Levi-Civita, Méthodes de Calcul differentiel absolu).

[2]) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (Ann. d. Physik, том 49).

[3]) T. Levi-Civita: Rendiconti di Palermo, том 42 (1917). (Nozione di parallelismo...)

[4]) См. появившуюся под этим заглавием работу в Math. Zeitschrift, том 2, точно так же, как и упомянутую в тексте книгу Вейля.

[5]) Русский перевод с английского издания: А. С. Эддингтон, Теория относительности, ОНТИ, М.-Л. 1934.

при стремящейся к нулю длине дуги, то этому помешало бы то обстоятельство, что мы прекрасно можем сравнивать друг с другом два направления в одной и той же точке, но не можем сравнивать их в различных точках поверхности, т. е. не можем говорить об угле, определенном этими направлениями. Прежде всего надо установить правило, которое позволило бы направление в исходной точке „сдвинуть параллельно" в конечную точку нашей дуги для того, чтобы в конечной точке можно было определить возникшее изменение направления. В установлении надлежащего, т. е. инвариантно-связанного с метрикой нашего многообразия, определения параллельного сдвига некоторого направления вдоль заданного пути и заключается сущность работы Леви-Чивита.

В последующем мы попытаемся вывести параллельный сдвиг из наглядных *механических* рассмотрений. Эта мысль принадлежит Радону (J. Radon) и опубликовывается здесь впервые. Часто пользуются вращением плоскости качания маятника Фуко для пояснения имеющихся здесь обстоятельств. Наоборот, будем исходить из равносильной механической задачи, которая должна нас привести к параллельному сдвигу. Разумеется, при этом речь будет итти о поверхностях трехмерного евклидова пространства; в заключение мы покажем, как можно произвести соответствующие рассмотрения также и для „внутренней" геометрии общего (в первую очередь двумерного) риманова многообразия.

Если представить себе при опыте Фуко землю неподвижной, а зато наблюдателя с маятником идущего вдоль параллели, то получится известное из механики вращение направления качания. Если наблюдатель для ориентировки будет пользоваться этим направлением вместо компаса, то он может сказать, что это направление переносится параллельно из одной точки в другую. Затем после полного обхода он заметит, что направление в „исходной" точке изменилось и, если он обладает достаточными познаниями из геометрии и механики, он отсюда заключит, что поверхность земли не может быть плоскостью.

Теперь если мы возьмем вместо поверхности земного шара произвольную поверхность и вместо параллели — произвольную кривую, то мы придем к рассматриваемой в последующем задаче. Можно ожидать, что с помощью таким образом полученного перенесения направлений мы узнаем кое-что о геометрии на нашей поверхности.

Так как поле тяжести, с которым мы имели дело в опыте с маятником в случае произвольной поверхности, с физической точки зрения было бы очень искусственно, то лучше воспользоваться упругими колебаниями и вообразить наблюдателя снабженным инструментом, который мы назовем *„осциллятором"*. Он состоит из материальной точки M (массу которой мы примем равной 1), которая может двигаться по плоскости („ведущей плоскости") и которую упругая сила связывает с некоторой неподвижной точкой ведущей плоскости — „ведущей точкой" P. Тогда потенциал упругой силы надо положить равным

$$\frac{k^2}{2}\overline{MP}^2$$

и представить себе, что мы можем в случае нужды произвольно изменять k^2, в частности, как угодно увеличивать. Оказывается, что как раз при *больших* k^2 в первом приближении мы придем к простому описанию процесса движения, который в остальном должен происходить так: наблюдатель перемещает осцилятор таким образом, что ведущая точка P производит заданное движение на поверхности, в то время как ведущая плоскость все время совпадает с касательной плоскостью поверхности в точке M. (Надо отметить, что при этом дело идет очевидно только о *полосе*, которую образуют двумерные элементы нашей поверхности вдоль траектории точки P.)

§ 82. Уравнения движения.

Пусть наша поверхность задана в параметрической форме Гаусса тремя уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{1}$$

Пусть ведущая точка P движется согласно уравнениям

$$u = u(t), \quad v = v(t), \tag{2}$$

так что ее пространственные координаты X, Y, Z определяются уравнениями:

$$X = x[u(t), v(t)], \ldots \tag{3}$$

Движение ведущей точки, т. е. функции $u(t)$, $v(t)$, считается заданным раз навсегда.

Положение колеблющейся точки M мы будем определять тем, что мы будем линейно составлять вектор PM из обеих независимых, также лежащих в ведущей плоскости, векторов

$\mathfrak{x}_u$ с компонентами x_u, y_u, z_u

$\mathfrak{x}_v$ с компонентами x_v, y_v, z_v.

Поэтому координаты точки M окажутся представленными следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \alpha x_u + \beta x_v, \\ y &= Y + \alpha y_u + \beta y_v, \\ z &= Z + \alpha z_u + \beta z_v. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда для потенциала получим

$$V = \frac{k^2}{2} \sum (x - X)^2 = \frac{k^2}{2} (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2), \tag{5}$$

при употреблении классических обозначений Гаусса:

$$E = \sum x_u^2, \quad F = \sum x_u x_v, \quad G = \sum x_v^2.$$

Из (4) путем диференцирования по времени (причем производные по t обозначаются штрихом) получаем:

$$\frac{dx}{dt} = x_u(u' + \alpha') + x_v(v' + \beta') + (x_{uu}u' + x_{uv}v')\alpha + \\ + (x_{uv}u' + x_{vv}v')\beta, \ldots$$

и отсюда для живой силы:

$$T = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(E\alpha'^2 + 2F\alpha'\beta' + G\beta'^2) + \alpha\alpha'\left(\sum x_u x_{uu}u' + \right. \\ \left. + \sum x_u x_{uv}v'\right) + \alpha\beta'\left(\sum x_v x_{uu}u' + \sum x_v x_{uv}v'\right) + \\ + \beta\alpha'\left(\sum x_u x_{uv}u' + \sum x_u x_{vv}v'\right) + \beta\beta'\left(\sum x_v x_{uv}u' + \sum x_v x_{vv}v'\right) + \\ + E\alpha'u' + F(\alpha'v' + \beta'u') + G\beta'v' + F_2(\alpha, \beta). \qquad (6)$$

При этом через F_2 обозначен многочлен второй степени относительно α и β, коэфициенты которого суть функции времени, определяемые только „ведущим движением". Как увидим в дальнейшем, с этим выражением ближе не придется иметь дела.

В формуле (6) фигурирует целый ряд образований, которые, следуя Кристофелю, называют „трехиндексными символами первого рода" и обозначают так:

$$\left.\begin{aligned} \sum x_u x_{uu} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sum x_u x_{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \sum x_u x_{vv} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \sum x_v x_{uu} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \sum x_v x_{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \sum x_v x_{vv} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Их можно выразить, и это весьма существенно, через E, F, G и их производные. Именно, легко установить, что:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}E_u, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}E_v, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}G_u, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}G_v \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

и легко еще написать „обратные формулы":

$$\left.\begin{aligned} E_u &= 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_u = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ E_v &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_v = 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Так как выше были вычислены T и V, то, следуя Лагранжу, можно уравнения движения точки M в „обобщенных координатах" α, β написать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'}\right) = \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'}\right) = \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial V}{\partial \beta}. \qquad (10)$$

Произведя выкладки и воспользовавшись символами Кристофеля, получим в качестве первого уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left\{E\alpha'+F\beta'+\alpha\left(\begin{bmatrix}1&1\\1\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}v'\right)+\beta'\left(\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}2&2\\1\end{bmatrix}v'\right)+Eu'+Fv'\right\}=$$
$$=\alpha'\left(\begin{bmatrix}1&1\\1\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}v'\right)+\beta'\left(\begin{bmatrix}1&1\\2\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}1&2\\2\end{bmatrix}v'\right)+\frac{\partial F_2}{\partial\alpha}-k^2(E\alpha+F\beta). \quad (11)$$

Если мы вычислим производную в левой части и подставим, например, в

$$\frac{dE}{dt}=E_u u'+E_v v',$$

вместо E_u и E_v их выражения из (9), то уравнения движения примут вид:

$$\left.\begin{aligned}E\alpha''+F\beta''+2\alpha'\left(\begin{bmatrix}1&1\\1\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}v'\right)+2\beta'\left(\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}2&2\\1\end{bmatrix}v'\right)+\\+k^2(E\alpha+F\beta)+L_1(\alpha,\beta)=0,\\F\alpha''+G\beta''+2\alpha'\left(\begin{bmatrix}1&1\\2\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}1&2\\2\end{bmatrix}v'\right)+2\beta'\left(\begin{bmatrix}1&2\\2\end{bmatrix}u'+\begin{bmatrix}2&2\\2\end{bmatrix}v'\right)+\\+k^2(F\alpha+G\beta)+L_2(\alpha,\beta)=0.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Здесь в $L_1(\alpha,\beta)$ и $L_2(\alpha,\beta)$ собраны члены, линейные относительно α и β. Их коэфициенты являются функциями времени, определенными ведущим движением.

Если, теперь, мы разрешим эти уравнения относительно α'' и β'', введя одновременно, следуя Кристофелю, „трехиндексные символы второго рода“:

$$\left\{\begin{matrix}i,&k\\1\end{matrix}\right\}=\frac{G\begin{bmatrix}i,&k\\1\end{bmatrix}-F\begin{bmatrix}i,&k\\2\end{bmatrix}}{EG-F^2},\quad \left\{\begin{matrix}i,&k\\2\end{matrix}\right\}=\frac{E\begin{bmatrix}i,&k\\2\end{bmatrix}-F\begin{bmatrix}i,&k\\1\end{bmatrix}}{EG-F^2}, \quad (13)$$

то получим уравнения движения в окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned}\alpha''+2\alpha'\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}u'+\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}v'\right)+2\beta'\left(\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}u'+\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}v'\right)+\\+k^2\alpha+L_3(\alpha,\beta)=0,\\\beta''+2\alpha'\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}u'+\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}v'\right)+2\beta'\left(\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}u'+\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}v'\right)+\\+k^2\beta+L_4(\alpha,\beta)=0.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

L_3 и L_4 имеют такое же значение, как раньше L_1 и L_2.

В уравнениях (14) мы имеем систему двулинейных диференциальных уравнений второго порядка для определения „компонент вектора“ α и β, как функции времени. При известных $\alpha(t)$, $\beta(t)$ формулы (4) дают движение колеблющейся точки M.

§ 83. Асимптотическая интеграция.

Полная интеграция уравнений (14) требует, разумеется, знания ведущего движения в явном виде. Но в наши намерения это отнюдь не входит. Скорее мы спросим себя: что можно заключить об уравнениях движения, если при фиксированном ведущем движении „упругая связь“ k^2 неограниченно возрастает? Естественно возникает предположение, что случайности ведущего движения тем более теряют в своем влиянии, чем больше становится упругая сила и что при неограниченно возрастающем k^2 все яснее и яснее вырисовывается просто описываемое предельное движение.

Аналитически дело обстоит так: мы хотим уравнения (14) приближенно интегрировать при большом k^2.

Подобной же задачей является известная теория Штурм-Лиувилля, в которой, следуя Лиувиллю [1]), „асимптотически“ интегрируют дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y + A(x)\,y + B(x) = 0$$

при большом k^2. Если бы в уравнениях (14) отсутствовали члены с первыми производными, то можно было бы в точности следовать Лиувиллю; мы получили бы, что в первом приближении решения уравнений (14) даются решениями уравнений колебаний

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' + k^2\alpha &= 0, \\ \beta'' + k^2\beta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

Поэтому естественно попытаться удалить мешающие члены. С этой целью мы отнесем вектор PM не к векторам $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, а к другой паре основных векторов $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Если эти последние связаны с векторами $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ посредством уравнений:

$$\mathfrak{a}_1 = w_{11}\mathfrak{x}_u + w_{12}\mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{a}_2 = w_{21}\mathfrak{x}_u + w_{22}\mathfrak{x}_v, \tag{15}$$

и если

$$PM = \xi_1\mathfrak{a}_1 + \xi_2\mathfrak{a}_2, \tag{16}$$

то нам придется в (14) внести:

$$\alpha = w_{11}\xi_1 + w_{21}\xi_2, \quad \beta = w_{12}\xi_1 + w_{22}\xi_2.$$

Если затем мы приравняем нулю коэфициенты при ξ_1' и ξ_2', то получим для w_{ik} следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} w_{11}' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}v'\right)w_{11} + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 1\end{Bmatrix}v'\right)w_{12} &= 0, \\ w_{12}' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}v'\right)w_{11} + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 2\end{Bmatrix}v'\right)w_{22} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17,1}$$

$$\left.\begin{aligned} w_{21}' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}v'\right)w_{21} + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 1\end{Bmatrix}v'\right)w_{22} &= 0, \\ w_{22}' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}v'\right)w_{21} + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix}u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 2\end{Bmatrix}v'\right)w_{22} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17,2}$$

[1]) Liouville: Journal des mathem., том 2 (1837). См. например изложение в книге: Bieberbach, Differentialgleichungen, Берлин, 1923, II часть, 3 гл., § 4.

Так как обе полученные пары уравнений совершенно одинаково построены, то можно сказать:

Для того чтобы обеспечить отсутствие членов с первыми производными, надо ввести с помощью формул (15) два новых „основных вектора" $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Это надо сделать таким образом, чтобы относительно старой системы (ξ_u, ξ_v) компоненты w_1, w_2 каждого из этих векторов $\mathfrak{a} = w_1\xi_u + w_2\xi_v$ удовлетворяли диференциальным уравнениям первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} w_1' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix} u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix} v'\right) w_1 + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix} u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 1\end{Bmatrix} v'\right) w_2 = 0,\\ w_2' + \left(\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix} u' + \begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix} v'\right) w_1 + \left(\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix} u' + \begin{Bmatrix}2 & 2\\ 2\end{Bmatrix} v'\right) w_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17^*)$$

Разумеется, системы решений w_{11}, w_{12} и w_{21}, w_{22} должны быть взяты линейно независимыми для того, чтобы новые основные векторы имели различные направления.

Мы получаем теперь новые уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1'' + k^2\xi_1 = X_1(\xi_1, \xi_2),\\ \xi_2'' + k^2\xi_2 = X_2(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

где в правых частях стоят линейные выражения относительно переменных ξ_1, ξ_2, коэфициенты которых являются функциями времени, определенными ведущим движением.

В случае покоя, т. е. в случае $u(t) = \text{const}$, $v(t) = \text{const}$ выражения X_i, как легко видеть, равны нулю. В этом случае решениями уравнений (18), как известно, будут функции:

$$\xi_1 = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt,$$
$$\xi_2 = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt.$$

Назовем движение, соответствующее этим решениям, *простым колебанием*, траектории которого будут, как известно, эллиптическими или прямолинейными.

Теперь будем интегрировать систему (18) методом вариации постоянных, причем мы будем рассматривать ξ_1 и ξ_2 в правых частях, как известные функции времени. Это дает после простого вычисления:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(t) = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t X_1(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \sin k(t-\tau)\, d\tau,\\ \xi_2(t) = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t X_2(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \sin k(t-\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Таким образом решения системы (18) распадаются на два слагаемых. Первое слагаемое можно рассматривать как простое колебание; назовем его „оскулирующим простым колебанием" нашего движения. Легко видеть, что при $t = 0$ функции ξ и их первые производные по времени

совпадают со значениями, соответствующими оскулирующему простому колебанию, чем и оправдывается термин „оскулирующий". Члены с интегралами представляют „погрешность", величину которой мы сейчас будем оценивать.

Установим для времени t верхнюю границу T, так что мы интересуемся только течением движения между $t=0$ и $t=T$. Тогда (непрерывные) коэфициенты линейных функций X_1, X_2 будут по абсолютной величине оставаться меньше некоторой грани γ. Пусть, далее, при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|\xi_1(t)| \leqslant |\xi_1(t_1)| = \rho_1,$$
$$|\xi_2(t)| \leqslant |\xi_2(t_2)| = \rho_2.$$

Здесь t_1 и t_2 обозначают две точки интервала $0 \leqslant t \leqslant T$, в которых $|\xi_1|$ и соответственно $|\xi_2|$ достигают своего максимума. Теперь из (19) следует, если положить $t=t_1$ соответственно t_2, после легко понятной оценки:

$$\rho_1 \leqslant |A_1| + |B_1| + \frac{\gamma T}{k}(\rho_1 + \rho_2 + 1),$$
$$\rho_2 \leqslant |A_2| + |B_2| + \frac{\gamma T}{k}(\rho_1 + \rho_2 + 1).$$

Складывая получаем:

$$(\rho_1 + \rho_2)\left(1 - \frac{2\gamma T}{k}\right) \leqslant |A_1| + |B_1| + |A_2| + |B_2| + \frac{2\gamma T}{k};$$

если взять

$$k \geqslant 4\gamma T, \tag{20}$$

то

$$\rho_1 + \rho_2 \leqslant 2(|A_1| + |B_1| + |B_2| + |A_2|) + 1,$$

так что при $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место оценка:

$$|\xi_1(t)| + |\xi_2(t)| \leqslant 2(|A_1| + |B_1| + |A_2| + |B_2|) + 1. \tag{21}$$

Но отсюда следует, что величина каждой из „погрешностей" остается меньше следующей грани (надо принять во внимание значение γ):

$$\frac{2\gamma T}{k}(1 + |A_1| + |B_1| + |A_2| + |B_2|).$$

Поэтому „погрешности" при неограниченно возрастающем k и при заданных постоянных интеграции A_i, B_i (или, что то же, при фиксированной траектории оскулирующего простого колебания) равномерно сходятся к нулю во всяком конечном интервале времени.

Этот последний шаг асимптотической интеграции уже дает нам все желаемое, показывая, *что при достаточно большом k^2 движение с произвольной степенью точности изображается оскулирующим простым колебанием.*

Если ведущее движение известно в явной форме, то можно подставить полученное первое приближение в подлежащие исправлению члены и вследствие этого получить второе приближение и т. д.

§ 84. Параллельное перенесение.

Теперь нам предстоит ближе заняться системой (17*), так как на ее интеграции основывалось введение новых основных векторов $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, которые придали нашим уравнениям простой вид (18).

Система (17*) содержит время только кажущимся образом, а в действительности зависит от *траектории* ведущего движения (но не от закона движения по этой траектории). Мы тотчас это увидим, если напишем эту систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} dw_1 + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} dv\right) w_1 + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} dv\right) w_2 = 0, \\ dw_2 + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} dv\right) w_1 + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} dv\right) w_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Квадратом длины вектора $\mathfrak{a} = w_1 \mathfrak{x}_u + w_2 \mathfrak{x}_v$ является выражение

$$\mathfrak{a}^2 = E w_1^2 + 2F w_1 w_2 + G w_2^2 .$$

Если мы будем рассматривать его изменение в течение ведущего движения, то, принимая во внимание (9), получим:

$$d\mathfrak{a}^2 = 0.$$

Рассмотрим, далее, два различных вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, которые во время ведущего движения подчиняются закону (22). Тогда их „внутреннее произведение“ будет:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = E w_{11} w_{21} + F(w_{11} w_{22} + w_{12} w_{21}) + G w_{12} w_{22} .$$

Так как вектор $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ точно так же изменяется в соответствии с (22), то

$$0 = d(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^2 = d(\mathfrak{a}_1^2) + d(\mathfrak{a}_2^2) + 2d(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2),$$

откуда:

$$d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 0.$$

Так как угол и длины обоих векторов $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ определяются посредством $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_1^2$, $\mathfrak{a}_2^2$, то отсюда следует, что „перенесение векторов“, определенное системой (22), оставляет инвариантными длины и углы. Итак, если представить себе систему всех векторов ведущей плоскости, выходящих из ведущей точки, перенесенной вдоль траектории ведущей точки согласно уравнениям (22), то это просто сведется к тому, что ведущая плоскость вращается определенным образом в целом, как *твердое* тело вокруг ведущей точки.

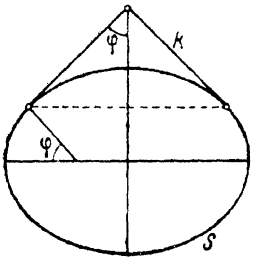
В частности, представим себе оба „основных вектора“ $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ взятыми в качестве взаимно перпендикулярных единичных векторов. Тогда они сохранят это свойство в течение всего движения, так что ξ_1, ξ_2 мы можем истолковывать, как *обычные прямоугольные координаты* точки M ведущей плоскости, если координаты системы, т. е. оба основных вектора, переносятся от точки к точке согласно формулам (22).

Если до момента $t = 0$ наблюдатель находился *в покое*, то осцилятор производил простое колебание, которое можно считать прямолинейным:

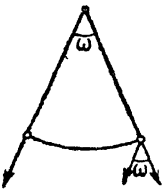
$$\xi_1 = a_1 \cdot \sin kt, \quad \xi_2 = a_2 \cdot \sin kt.$$

Если же с момента $t = 0$ наблюдатель начинает двигаться, то „оскулирующее" простое колебание, очевидно, будет изображаться теми же самыми формулами. Но так как, согласно результату § 83, оно является первым приближением к фактическому движению, то можно сказать:

Движение осцилятора для больших k^2 в первом приближении протекает таким образом, что „вектор колебания" компонентами которого в системе ξ_1, ξ_2 являются a_1, b_1, переносится вдоль траектории ведущей точки согласно формулам (22). *Полученный вследствие этого „закон параллельного перенесения" векторов сохраняет неизменными длины и углы. Этот закон, согласно формулам* (22), *определяется лишь теми величинами, которые зависят от E, F, G и их производных, и, следовательно, является инвариантом изгибания.*



Черт. 89.



Черт. 90.

Далее, из заключительного замечания перед § 82 ясно, что определяемое формулами (22) перенесение зависит только от „поверхностной полосы", вдоль которой происходит движение. Поэтому, если две поверхности касаются друг друга вдоль некоторой кривой, то процесс перенесения (22) вдоль этой кривой будет одним и тем же для обеих поверхностей.

Оба последних замечания позволяют, например, получить известное вращение плоскости качания маятника Фуко почти без всяких вычислений. Именно, если мы опишем вокруг земли S вдоль параллели, определяемой географической широтой φ, конус вращения K (см. черт. 89), то мы можем при параллельном перенесении заменить земной сфероид этим конусом вращения. Если развернуть этот конус на плоскость, разрезав его вдоль какой-нибудь образующей (черт. 90), то центральный угол ω получившегося кругового сектора, как легко видеть, будет даваться формулой:

$$\omega = 2\pi \sin \varphi.$$

Но так как процесс перенесения является инвариантом изгибания, а для плоскости переходит в элементарный параллелизм, то мы получаем (см. черт. 90), что при обходе параллели будет иметь место вращение относительно меридиана на величину ω, что совпадает с результатом, получаемым обычным образом [1]).

[1]) Ср. модель Схоутена, которая изображена на 47 стр. книги Стройка: Struik, Mehrdimensionale Differentialgeometrie (Берлин, 1922).

§ 85. Применение параллельного перенесения в теории поверхностей.

Определенное формулами (22) параллельное перенесение векторов является не чем иным, как параллельным перенесением Леви-Чивита. Мы ближе познакомимся с его значением, если поставим его в связь с некоторыми основными понятиями теории поверхностей.

Пусть „ведущая кривая" C будет произвольной кривой поверхности. Рассмотрим касательный единичный вектор:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{r}_u \frac{du}{ds} + \mathfrak{r}_v \frac{dv}{ds}.$$

При переходе от точки t к близкой точке $t+\delta t$ кривой C мы получаем в точке $t+\delta t$, с одной стороны, опять-таки касательный единичный вектор $\mathfrak{t}'$ с компонентами:

$$\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}\delta s, \quad \frac{dv}{ds} + \frac{d^2v}{ds^2}\delta s,$$

а с другой стороны — вектор $\mathfrak{t}''$, возникший из вектора $\mathfrak{t}$ путем параллельного перенесения, с компонентами согласно с (22):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{ds} - \left[\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\frac{du}{ds} + \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds} + \left(\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\frac{du}{ds} + \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}\right]\delta s, \\ &\frac{dv}{ds} - \left[\left(\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\frac{du}{ds} + \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds} + \left(\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\frac{du}{ds} + \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}\right]\delta s. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Угол $\delta\tau$ между $\mathfrak{t}'$ и $\mathfrak{t}''$ может служить *мерой изменения направления* вектора $\mathfrak{t}$ вдоль δs. По известным формулам теории поверхностей [1]):

$$\sin\delta\tau = \sqrt{EG-F^2}\begin{vmatrix} \dfrac{du}{ds} - \left[\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2\right]\delta s, & \dfrac{du}{ds} + \dfrac{d^2u}{ds^2}\delta s \\ \dfrac{dv}{ds} - \left[\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2\right]\delta s, & \dfrac{dv}{ds} + \dfrac{d^2v}{ds^2}\delta s \end{vmatrix}.$$

Следовательно, если ограничиться членами первого порядка относительно δs

$$\sin\delta\tau = \sqrt{EG-F^2}\left[\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} + \left[\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \ldots\right]\frac{du}{ds} - \left[\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \ldots\right]\frac{dv}{ds}\right]\delta s. \quad (24)$$

Наконец, получаем:

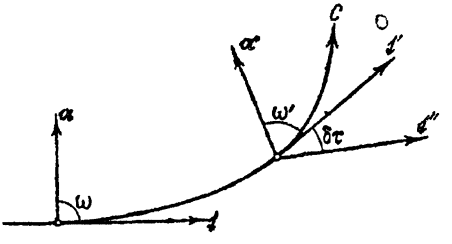
$$\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\tau}{\delta s} = K_g,$$

[1]) См., например, E. Salkowski, Algemeine Flächentheorie в Pascals Repetorium, 2 изд., 2 том, 2 половина, стр. 1070, формула (10).

т. е. как раз *геодезическую кривизну* кривой C в точке t, потому что правая часть формулы (24), будучи разделена на δs, как раз равна геодезической кривизне [1]).

Итак, на основе параллельного перенесения это важное понятие может быть введено чрезвычайно простым образом, именно, совершенно так же, как кривизна плоской кривой.

Знак геодезической кривизны имеет следующее значение: $K_g > 0$ означает, что касательная кривой повернулась в положительном направлении относительно параллельно перенесенной касательной, т. е. в направлении кратчайшего поворота „δu-элемента" в „δv-элемент", а $K_g < 0$ означает противоположное. Это вытекает из смысла знака $\sin \delta\tau$ в вышеприведенной формуле.



Черт. 91.

Так как *геодезические линии* характеризуются равенством $K_g = 0$, то мы приходим к следующей формулировке:

Геодезические линии на поверхности являются такими кривыми, касательная к которым при продвижении вдоль кривой переносится параллельно самой себе.

Так как мы знаем, что при параллельном перенесении все векторы вращаются с сохранением углов, то $\delta\tau$ можно истолковывать так же, как *„убывание"* угла ω между касательной к кривой и *произвольным* вектором $\mathfrak{a}$ при параллельном перенесении этого последнего (черт. 91). Наоборот, вследствие этого вполне определяется параллельное перенесение вдоль кривой формулой

$$\delta\omega = -K_g \delta s, \quad \delta(\mathfrak{a}^2) = 0$$

с помощью ее геодезической кривизны.

Рассмотрим теперь *замкнутую кривую* C на поверхности, ограничивающую просто связный кусок поверхности площади Δo. Можно считать, что система координат (u, v) не имеет никаких особенностей внутри и на границе Δo (как это было бы, например, в случае географической долготы и широты в полюсах земли); тогда можно определить в каждой точке „нулевое направление", например, посредством положительного направления $v = \text{const}$. Тогда при обходе (в положительном направлении) кривой C касательный вектор повернется относительно нулевого направления на угол 2π.

Если угол между вектором $\mathfrak{t}$ и нулевым направлением обозначить τ, а угол между произвольным вектором $\mathfrak{a}$, перемещаемым вдоль кри-

[1]) Это получается из общей формулы Бельтрами (см. Бляшке, Дифференциальная геометрия, I, § 83, изд. ОНТИ, М.—Л. 1935) посредством специализации на тот случай, когда в качестве параметра взята длина дуги.

вой C параллельно самому себе, и нулевым вектором обозначить через α, то для угла $\omega = (\mathfrak{t}, \mathfrak{a})$ получим:

$$\omega = \alpha - \tau.$$

Так как при параллельном перенесении вектора $\mathfrak{a}$:

$$\delta\omega = \delta\alpha - \delta\tau = -K_g \delta s,$$

то

$$\int_C \delta\omega = \int_C \delta\alpha - 2\pi = -\int_C K_g \delta s$$

или

$$\text{полное вращение } a = \int_C \delta\alpha = 2\pi - \int_C K_g \delta s.$$

Но по известной формуле Гаусса-Бонне [1]) это равняется:

$$\int\int_{\Delta o} K\, do,$$

где K обозначает гауссову кривизну поверхности. Этот результат позволяет определить кривизну следующим образом с помощью параллельного перенесения:

Перенесем произвольный вектор $\mathfrak{a}$ параллельно самому себе вдоль некоторой замкнутой кривой C. Угол, на который он повернется после полного обхода, разделим на площадь ограниченного кривой C куска поверхности. Если затем кривая C будет стягиваться в точку P, то в пределе рассматриваемое отношение обратится в гауссову кривизну поверхности в точке P.

Если в n-мерном римановом пространстве уже определено параллельное перенесение, то можно поступать следующим образом. Если мы воспользуемся в качестве кривой C бесконечно малым параллелограмом, определенным направлениями dx_i соответственно δx_i, то мы тотчас увидим, что в этом случае для каждого положения „пучка" $(dx, \delta x)$ получится некоторое значение кривизны (ср. § 59). Надлежащее вычисление приводит к описанному в § 59 результату Римана.

Далее, мы видим: необходимым и достаточным условием того, что параллельное перенесение вдоль произвольного замкнутого пути приводит всякий вектор в его исходное положение — или, что то же, что параллельное перенесение вектора *не зависит от пути* — является обращение в нуль гауссовой кривизны, т. е. *развертываемость поверхности на плоскость*.

Следовательно, параллельное перенесение по Леви-Чивита можно произвести независимо от пути только в случае евклидовых двумерных многообразий. Это дословно переносится на случай n измерений.

---

[1]) См., например, Бляшке, Дифференциальная геометрия, I, § 77, изд. ОНТИ, М. — Л. 1935.

§ 86. Выведение параллельного перенесения из внутренней геометрии поверхности.

Только что приведенное выведение параллельного перенесения имеет тот недостаток, что оно предполагает поверхность помещенной в евклидовом пространстве, в то время как потом оказывается, что дело идет только о первой гауссовой основной форме $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. Так как мы пользовались классической механикой, то нельзя устранить этого недостатка, который, впрочем, имелся и в первом выводе Леви-Чивита. Покажем вкратце, как при естественных допущениях о механике *на* самой поверхности можно достигнуть этой цели.

Сначала еще следует упомянуть, каким образом по Вейлю[1]) можно ввести параллельное перенесение, с помощью простого, хотя может быть и не вполне естественного, определения, не покидая „геометрии на самой поверхности". Надо только потребовать:

a) Параллельное перенесение не зависит от выбора системы координат;

b) Оно оставляет неизменными длины и углы;

c) *Для каждой точки поверхности* P существует система координат, в которой параллельное перенесение векторов в точке P определяется равенствами:

$$\delta w_1 = 0, \quad \delta w_2 = 0.$$

Из b) легко следует, что в подобной системе координат в самой точке P обращаются в нуль первые частные производные от E, F, G. Но тогда в точке P обращаются в нуль все трехиндексные символы, и формулы (22) совпадают с требованием c) Вейля. Так как наш прежний способ вывода указывает на независимость параллельного перенесения от системы координат, то также и в произвольной системе координат при вейлевском определении ничего другого не может получиться, как наше параллельное перенесение.

Обратимся теперь к обещанному рассмотрению и вообразим себе двумерное риманово многообразие абстрактно заданным основной формой:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Рассмотрим опять „осцилятор", состоящий из двух упруго-связанных точек P и M нашего многообразия, из которых P, как и раньше, будет „ведущей" точкой.

Составим опять, следуя Лагранжу, уравнения движения. Современная физика нас приучила к подобному перенесению классических приемов на неевклидово пространство. Напишем опять потенциал силы:

$$V^* = \frac{k^2}{2}\overline{MP}^2.$$

Но теперь возникает затруднение: что следует понимать под „расстоянием" между точками M и P? Однако, если мы ограничимся случаем

[1]) H. Weyl. Raum, Zeit, Materie (4 изд.) § 14.

малых колебаний, то это затруднение отпадает, потому что, если точки P и M имеют координаты

$$P:\ u,\ v,\quad M:\ u+\alpha,\quad v+\beta,$$

то нам понадобятся в случае малых колебаний только члены до второго порядка, относительно α и β включительно, которые, очевидно, даются во всех случаях формулой:

$$\overline{MP}^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 + \dots$$

Никаких затруднений не встречается при перенесении понятия живой силы. Разумеется:

$$T^* = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\{E(u+\alpha,\ v+\beta)(u'+\alpha')^2 + \\ + 2F(u+\alpha,\ v+\beta)(u'+\alpha')(v'+\beta') + G(u+\alpha,\ v+\beta)(v'+\beta')^2\};$$

если мы и здесь остановимся на членах второго порядка, то получим:

$$T^* = \frac{1}{2}\{E\alpha'^2 + 2F\alpha'\beta' + G\beta'^2 + 2E_u u'\alpha\alpha' + 2E_v u'\beta\alpha' + \\ + 2F_u v'\alpha\alpha' + 2F_v v'\beta\alpha' + 2F_u u'\alpha\beta' + 2F_v u'\beta\beta' + \\ + 2G_u v'\alpha\beta' + 2G_v v'\beta\beta'\} + F_2^*(\alpha,\ \beta),$$

где F_2^* — опять-таки некоторый полином второй степени.

В то время как

$$V^* = \frac{k^2}{2}(E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)$$

совпадает с прежним V, для T^* и T этого уже нет. Именно, привлекая формулы (9), мы получим:

$$T^* - T = \alpha\alpha'\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1\end{bmatrix}u' + \begin{bmatrix}1&1\\2\end{bmatrix}v'\right\} + (\beta\alpha' + \alpha\beta')\left\{\begin{bmatrix}1&2\\1\end{bmatrix}u' + \begin{bmatrix}1&2\\2\end{bmatrix}v'\right\} + \\ + \beta\beta'\left\{\begin{bmatrix}2&2\\1\end{bmatrix}u' + \begin{bmatrix}2&2\\2\end{bmatrix}v'\right\} + \text{ многочлен 2 степени относительно } \alpha \text{ и } \beta.$$

Следовательно, при установлении уравнений движения появляются следующие новые члены:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T^*-T)}{\partial\alpha'} - \frac{\partial(T^*-T)}{\partial\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T^*-T)}{\partial\beta'} - \frac{\partial(T^*-T)}{\partial\beta}.$$

Но при вычислении этих членов производные α' и β' совершенно выпадают, а оставшиеся члены, *линейные* относительно α и β, не мешают, так как и выше нам вовсе не приходилось обращать внимание на подобные члены. Поэтому, в конце концов, получаются те же заключения, как и выше, чем и достигнута наша цель.

Перенесение набросанных в этом параграфе рассмотрений на n-мерный случай не представляет никаких затруднений.

Укажем некоторые *литературные источники*. Почти одновременно с основной работой Леви-Чивита о его параллелизме к этому понятию очень близко подошел Гессенберг (G. Hessenberg) в Math. Annalen, т. 78, 1917, стр. 187—217. О родственных исследованиях Схоутена см. на стр. 332 в его уже названной книге. См. также Бомпиани (E. Bompiani), Atti Ist. Veneto, 1920—21, стр. 356, 839, 1113).

Под руководством Вейля из параллелизма возник новый тип геометрического рассмотрения, ставящий во главу всего понятие параллелизма и в конце концов приведший к тому, чтобы теоретико-групповое обоснование геометрии Клейна-Ли построить новым более общим образом при ограничении бесконечно малым. Здесь мы назовем следующие работы:

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, 1923. Несколько работ Картана, начиная с 1922 г., особенно E. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés (Acta mathematica, т. 48, 1925, стр. 1—42). Далее исследования Схоутена, которые он изложит во втором издании своего „исчисления Риччи". Наиболее общими являются исследования Виртингера, привлекающие к рассмотрению преобразования прикосновения; см. в частности: W. Wirtinger, Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung (Abhandlungen Hamburg, т. 4, 1925, стр. 178—200).

Из новых учебников по римановой геометрии и тензорному анализу назовем еще:

T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto, Rom 1925;
E. Cartan, La géométrie des espaces de Riemann, Paris 1925;
P. Appell, Traité de Mécanique, т. 5, Paris 1926 г.;
L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton 1926.

ИЗ ТОПОЛОГИИ: АРТИНОВЫ КОСЫ.

На всем протяжении этих лекций, за немногими исключениями, мы предполагали встречающиеся геометрические образы аналитическими и сверх того ограничивались, по большей части, рассмотрением „регулярных" точек. Одно из преимуществ такого рассмотрения состояло в том, что легко можно было привлечь к рассмотрению и мнимые образы, также могущие быть полезными для достижения результатов в действительной области; замечательным примером этого является теория минимальных поверхностей С. Ли.

Между тем уже в геометрии рассмотренных нами групп можно притти ко многим новым и интересным постановкам вопроса, если направить свое внимание только на действительные образы в теснейшем смысле этого слова, но зато отбросить требование изобразимости аналитическими функциями.

Вот пример. Положим в основу плоской геометрии, например, шестичленную группу преобразований круга Мебиуса. Под „кривой" на этой плоскости мы подразумеваем однозначный и непрерывный образ круга. Затем мы исследуем те кривые, которые ни с каким кругом не пересекаются более чем в четырех точках. Легко показать, что всякая подобная кривая имеет в точности четыре „вершины",

в которых круг имеет с кривой четыре совпадающие общие точки. Очевидно, что таким образом определенные кривые образуют естественно обобщение упомянутых в § 12 циклических кривых Дарбу.

Подобные постановки вопроса с большим успехом разрабатывал датский геометр C. Juel, причем следует особенно отметить его „Теорию элементарных поверхностей третьего порядка“ (Math. Annalen, т. 76, 1915, стр. 548—574). В этой работе остался неразрешенным весьма замечательный вопрос о том, существуют ли вообще неаналитические элементарные поверхности третьего порядка; следовательно, будет ли обязательно алгебраической, удовлетворяющая известным условиям регулярности, поверхность проективного пространства, которая со всякой не лежащей на ней прямой пересекается не более, чем в трех точках.

Сюда также относится *теория выпуклых тел*, которая занимала геометров, начиная с Архимеда, и которая в новейшее время оказалась важной для теории чисел, как это было выяснено в работах Минковского. До сих пор не имеется общего обзора, охватывающего многочисленные результаты, полученные в теории выпуклых тел (среди этих результатов следует отметить работы Брунна (H. Brunn) в 1887 и 1889 гг.). Начало этому положено небольшой книжкой Бляшке (W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916).

В вопросах топологии совершенно не выдерживает критики ограничение аналитическими образами, которое, разумеется, совершенно неестественно и ненаглядно. Положим в основу элементарно геометрическое представление о пространстве. Точечное преобразование в этом пространстве называется *топологическим*, если оно, так же как и его обращение, однозначно и непрерывно. Тогда *„топология“* или Analysis situs определяется как теория инвариантов относительно этих преобразований.

Если мы, при изучении какого-нибудь геометрического образа, рассмотрим сначала его элементарно-геометрические свойства, сохраняющиеся при движении этого образа, затем его проективные свойства и, наконец, топологические, то с каждым разом будет оставаться все меньше свойств. Сначала мы имеем перед собой пестрое элементарно-геометрическое платье; затем простейшие формы тел проективной геометрии и, наконец, остается только топологический скелет. Зато у нас будет то удовлетворение, что мы достигаем все более и более существенных свойств.

Первым важным топологическим результатом была теорема Эйлера о многогранниках, которая по утверждению Лейбница восходит еще к Декарту:

$$\text{Число граней} - \text{число ребер} + \text{число вершин} = 2(1 - p);$$

эта теорема справедлива для любых замкнутых полиэдров и была известна Эйлеру для случая $p = 0$. Число p, являющееся топологическим инвариантом, называется *„родом“* полиэдра.

Новейшее развитие топологии связано, прежде всего, с двумя именами — с Пуанкаре (H. Poincaré) и с Брауэром (L. E. J. Brouwer). С этими двумя именами связаны два направления этой важной и трудно доступной ветви геометрии, именно: с одной стороны *комбинаторная*

топология и с другой стороны *теоретико-множественная топология*. В комбинаторной топологии (говоря грубо) кривые заменяются полигонами, поверхности — полиэдрами, причем допускаются известные преобразования. При этом обобщения теоремы Эйлера о многогранниках играют существенную роль и к этому присоединяются известные связи с теорией дискретных групп. Лучше всего мы выясним себе характерные черты этой комбинаторной топологии на примере артиновой теории кос (пример, отклоняющийся от обычного пути, указанного Пуанкаре).

Бросим сначала взгляд на теоретико-множественную топологию. Старейшей ее теоремой является теорема Жордана (C. Jordan) на плоскости. Эта теорема утверждает: топологический образ окружности определяет на плоскости в точности две области (областью называется точечное множество, состоящее только из внутренних точек) и совпадает с общей границей этих двух областей. Среди многочисленных доказательств, которые, начиная с Жордана, давались этой столь наглядно звучащей теореме, особенно следует отметить доказательство Шмидта (E. Schmidt, в Berliner Akademieberichte, 1923, стр. 318—329). С этой теоремой связана теорема об *инвариантности области* (об инвариантности размерности) при топологическом отображении, которая для произвольной размерности была впервые доказана Брауэром (Math. Annalen, т. 70, 1911, стр. 161). Постараемся сейчас выяснить характерные черты теоретико-множественной топологии на простом примере „теоремы о деформации" Титце (H. Tietze).

Из новейших общих курсов топологии в настоящей серии вышел первый том книги Керекьярто: B. v. Kerékjárto, Vorlesungen über Topologie, т. 1, Berlin, 1923; эта работа оставляет еще желать многого.

§ 87. Доказательство Александера теоремы Титце.

Рассмотрим группу топологических отображений круга $x^2+y^2\leqslant 1$ самого на себя. По теореме об инвариантности области при подобном отображении граница $x^2+y^2=1$ переходит сама в себя и нам следует различать два случая в зависимости от того, сохраняет ли отображение ориентацию граничной окружности или же не сохраняет ее. Если мы рассмотрим только отображения первого типа, то естественно возникает предположение, что они образуют непрерывную группу; это и составляет содержание теоремы Титце о деформации. Следовательно, если мы на мгновение представим себе круг $x^2+y^2\leqslant 1$ осуществленным в двух плоскостях $z=0$ и $z=1$, то утверждается, что для всякого заданного топологического отображения круга $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=0$ на круг $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=1$ всякая точка может быть соединена со своей соответствующей посредством нити в цилиндре $x^2+y^2\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ таким образом, чтобы каждая нить пересекала всякую плоскость $z=\text{const}$ ($\geqslant 0$, $\leqslant 1$) в точности в одной точке и чтобы нити однократно заполняли весь цилиндр.

Покажем, что без ограничения общности в существенном можно считать, что при нашем отображении центр круга и все краевые точки остаются неподвижными. Именно, если центру круга O соответствует точка O^*, то посредством непрерывного семейства топологических

отображений, оставляющих неподвижными краевые точки, можно перевести O^* в O, представив, что к краевым точкам и точке O^* прикреплены эластические нити и что затем O^* движется прямолинейно и равномерно в точку O и при этом тянет за собой нити. Кому не нравится эта „каучуковая терминология", тот пусть переведет ее на язык формул. Если, после того, как это достигнуто (r и φ — полярные координаты, а φ и φ^* — углы соответствующих друг другу краевых точек), то, в силу предположенного выше сохранения ориентации, φ^* будет непрерывной, монотонно возрастающей функцией переменного φ с периодом 2π. Если мы теперь выполним семейство сохраняющих ориентацию топологических преобразований $T(t)$ круга, при которых радиус r остается неизменным и при которых на краю

$$\varphi(t) = (1-t)\varphi^* + t\varphi,$$

то эти отображения переведут всякую краевую точку ($r=1$, φ^*) в ее прообраз ($r=1$, φ), если t будет непрерывно изменяться от нуля до единицы.

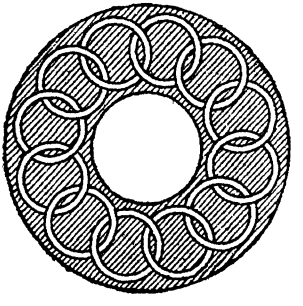
Итак: *пусть дано топологическое отображение $T(P_0 \to P_1)$ круга $x^2+y^2 \leqslant 1$ самого на себя, при котором центр круга ($x=y=0$) и всякая краевая точка ($x^2+y^2=1$) соответствует сама себе. Надо доказать, что существует непрерывное семейство таких же отображений круга, переводящих тождественное отображение в данное отображение.*

Прежде всего распространим отображение T непрерывно на всю плоскость, поставив в соответствие всякой точке области $x^2+y^2>1$ самое себя. Затем введем отображение $T(t)$, соответствующие точки которого получаются из соответствующих точек $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ отображения T посредством преобразования подобия $A(t)\{x^*=tx, y^*=ty (0<t\leqslant 1)\}$ и которое опять-таки является топологическим отображением, определенным на всей плоскости и оставляющим неподвижным начало координат и каждую краевую точку $x^2+y^2=1$. $[T(t)=A^{-1}(t)TA^{+1}(t)]$. Если мы заставим t пробегать все значения от $t=1$ до $t=0$, то мы получим непрерывное семейство отображений $T(t)$, совпадающее при $t=1$ с заданным отображением, а при $t=0$ с тождественным отображением. Этим теорема Титце доказана.

Это доказательство принадлежит американскому математику Александеру (J. W. Alexander, On the deformation of an n-cell; Proc. Nat. Ac. U. S. A., т. 9, 1923, стр. 406). Первоначально доказательство Титце (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, т. 38, 1914, стр. 247—304) было сложнее, но оно имеет перед доказательством Александера то преимущество, что оно легче может быть перенесено на другие случаи.

Примеры теоремы Жордана и теоремы Титце могли бы привести к мысли, что устанавливаемые в топологии факты почти наглядно очевидны и что теоретико-множественная топология удовлетворяется тем, что она на более или менее простом пути точно доказывает вещи, с самого начала наглядно очевидные. Чтобы опровергнуть это мнение приведем один пример, указанный Антуаном (L. Antoine), который кажется весьма парадоксальным.

Будем понимать под „кольцом" область, описываемую шаром, если этот последний вращается вокруг непересекающей его оси. Внутри подобного кольца R_1 возьмем цепочку из малых колец R_2, как это показано на черт. 92. Внутри каждого кольца R_2 таким же образом построим цепочку из колец R_3 и т. д. Рассмотрим теперь множество M всех точек, лежащих в бесчисленном множестве этих колец.



Черт. 92.

Множество M — совершенное (т. е. состоит только из предельных точек и содержит все свои предельные точки) и может быть топологически отображено на совершенное нигде неплотное множество, лежащее на окружности. Это топологическое отображение не может быть распространено ни на какую, хотя бы как угодно малую, окрестность, так как множество M обладает тем замечательным свойством, что всякая поверхность, являющаяся топологическим образом сферы и имеющая в обеих, определенных согласно теореме Жордана, областях точки множества M, необходимо сама содержит точки M.

Ср. Антуан, диссертация, Страсбург 1921.

Обратимся теперь к примеру из комбинаторной топологии, именно к артиновой теории кос [1]). Начнем с общей постановки вопроса.

§ 88. Проблема узлов.

Одной из важных задач топологии, решение которой еще до сих пор не доведено до конца, является так называемая проблема узлов и ее обобщение — проблема цепей. Займемся прежде всего постановкой вопроса в этих задачах.

Под узлом понимают непрерывную замкнутую пространственную кривую без двойных точек. При этом два узла K_1 и K_2 рассматривают как тождественные, если существует такое топологическое отображение трехмерного пространства самого на себя, которое переводит K_1 в K_2. Сверх того от отображения еще требуется, чтобы оно сохраняло „индикатрису" пространства, т. е. ориентацию пространства.

Это определение эквивалентности двух узлов, очевидно, является строгой заменой следующего интуитивного требования: должно быть, возможно непрерывное деформирование кривой K_1, в кривую K_2 при непременном условии не допускать самоперенесения кривой. Трудности, которые скрываются в понятии деформации, если не желать обратиться к деформации самого пространства, скоро выяснятся.

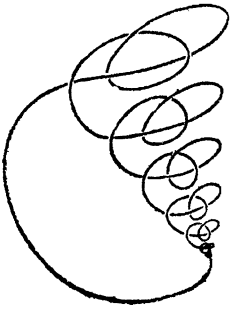
Проблема узлов заключается в нахождении всегда годного и в каждом отдельном случае действительно выполнимого способа, с помощью которого можно решить, будут ли между собой эквивалентны или нет две данные пространственные кривые.

[1]) E. Artin, Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar Hamburg, том 4, стр. 47—72 (1925).

По возможности следует еще присоединить перечисление всевозможных различных типов узлов.

Но в такой общей постановке вопроса проблему узлов приходится считать безнадежной. Это происходит из-за свойств непрерывной кривой „im Kleinen", причем, как заметил Титце, прежде всего причиняет затруднения случай заузления бесконечно-высокого порядка. Ведь изображенный на черт. 93 случай, в котором узлы убывающей величины скапливаются в некоторой точке, является одним из самых простых; эти особенности можно еще сгустить.

Для того чтобы выделить из совокупности пространственных кривых простой класс, в случае которого было бы больше шансов решения проблемы, следует, например, потребовать, чтобы кривые состояли из конечного числа прямолинейных отрезков или по крайней мере были бы эквивалентны, в смысле нашего определения, некоторой кривой этого типа.



Черт. 93.

Вот этот-то более узкий класс кривых и кладется собственно в основу проблемы узлов. Он охватывает те случаи, которые могут быть фактически осуществлены с помощью нитей.

Как уже было упомянуто, понятие деформации следует употреблять с осторожностью. Если бы ее определить просто, как непрерывное видоизменение без самопересечения, то всякий узел можно было бы деформировать в окружность.

В самом деле. Представим себе наш узел осуществленным с помощью замкнутой нерастяжимой нити и притом так, чтобы собственно заузленная часть была мала по сравнению с общей длиной нити. Далее, будем стягивать заузленную часть до тех пор, пока кривая не перейдет в незаузленную кривую, т. е. в такую кривую, которую можно деформировать в окружность; при этом самопересечения не происходили.

Если все же желательно сохранить деформации, наглядное значение которых нельзя оспаривать, то в качестве меры предосторожности следует, например, потребовать, чтобы на всем протяжении непрерывного видоизменения наша кривая состояла из конечного числа прямолинейных отрезков. Число отрезков должно быть ограничено и их длины должны оставаться больше некоторой положительной грани. Коль скоро деформации определяются только в этом смысле, их применение не может повести ни к каким неприятностям.

В проблеме цепей дело идет о *множестве* конечного числа замкнутых пространственных кривых без двойных точек. Эквивалентность двух цепей определяется так же, как и в случае узлов; и опять-таки требуется указать конечный процесс, с помощью которого можно было бы решить, будут ли две заданные цепи эквивалентны или нет.

Приведем еще несколько примеров отдельных узлов.

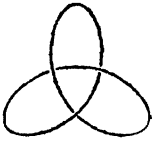
На чертеже 94 изображены два узла, называющиеся *клеверными петлями* (*Kleeblattschlingen*). Один из этих узлов является зеркальным образом другого. Следовательно, существует отображение всего

пространства на себя, переводящее одну клеверную петлю в другую; но это отображение не сохраняет индикатрисы пространства. Ден (M. Dehn) впервые доказал, что не существует никакого отображения пространства самого на себя, которое бы сохраняло индикатрису и переводило бы одну клеверную петлю в другую. Следовательно, эти петли являются различными узлами.

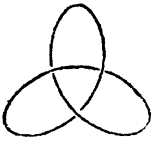
Узел, изображенный на чертеже 95, называется *двойной петлей*. В противоположность клеверной петле этот узел может быть деформирован в свой зеркальный образ.

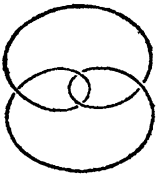
Наконец, упомянем еще об одном, встречающемся на практике, узле. Это так называемый *ткацкий узел*, изображенный на чертеже 96; он может быть составлен простым образом из обеих клеверных петель.

Мы зашли бы слишком далеко, если бы стали останавливаться на всех результатах, полученных в исследованиях по теории узлов. Поэтому мы укажем на работы Дена [1]) по этому поводу. До сих пор проблему

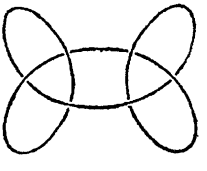


Черт. 94.





Черт. 95.



Черт. 96.

узлов только удалось свести к некоторой задаче теории групп в том случае, когда одна из кривых незаузлена. Но мы еще далеки от решения этой теоретико-групповой задачи.

§ 89. Группа кос.

Трудности проблемы узлов побуждают нас заняться более простой задачей подобного же рода, которая относится к плетению нитей.

Под косой Z n-го порядка мы понимаем следующий топологический образ:

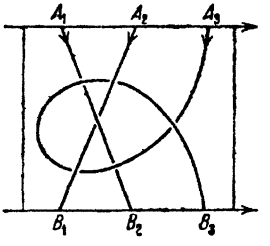
Пусть в пространстве дан прямоугольник с противоположными сторонами g_1, g_2 и h_1, h_2 („рама“ косы Z). На каждой из обеих сторон g_1 и g_2 даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем направление нумерации идет от h_1 к h_2. Пусть каждой точке A_i поставлена однозначно в соответствие некоторая точка B_{r_i}, с которой она соединена пространственной кривой μ_i без двойных точек, которая не пересекает никакую другую из кривых μ_k. Кривая μ_i ориентирована от точки A_i к точке B_{r_i}.

Две такие косы называются эквивалентными или, короче, равными, если они могут быть деформированы одна в другую без самопересе-

[1]) M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann., том 69, стр. 137. Die beiden Kleeblatt schlingen. Math. Ann, том 75, стр. 402. См. также три заметки Рейдемейстера (K. Reidemeister) в Abhandlungen des math. Seminars Hamburg, том 5 (1927) об узлах и группах.

чения. При этой деформации продолжения сторон g_1 и g_2 рассматриваются так же, как непроницаемые. Следует учитывать обе, имеющиеся в каждой косе, ориентации. Одна из них относится к нумерации точек A_i, другая же — к направлению кривых μ_i. При деформации необходимо считаться с этими ориентациями.

Теперь сузим это определение посредством следующего требования: после надлежащей деформации косы Z, проекции кривых μ_i на плоскость „рамы" должны лежать целиком внутри прямоугольника, пересекаться только в конечном числе точек и со всякой прямой, параллельной стороне g_1, пересекаться только в одной точке. Так как кратные точки можно превратить с помощью легкого видоизменения в двойные точки, то можно также еще считать, что при проектировании будут получаться только одни простые точки пересечения. Тогда схематически коса может быть изображена рисунком, как это показано на черт. 98. На чертеже 97 изображено сплетение, которое мы не будем называть косой. В дальнейшем мы будем предполагать, что косы даны в указанном „нормальном виде".



Черт. 97.

Из двух кос Z_1 и Z_2 n-ого порядка может быть посредством комбинирования составлена некоторая третья коса следующим путем. Посредством деформации нормального вида надо в некоторой плоскости таким образом приложить друг к другу оба прямоугольника, чтобы сторона g_2 косы Z_1 примкнула к стороне g_1 косы Z_2, чтобы точки B_i косы Z_1 совпали с точками A_i косы Z_2 и чтобы стороны h_1', h_2' являлись продолжениями сторон h_1, h_2. Теперь отождествим стороны $g_2 = g_1'$. В результате этого получится новая коса, которую мы будем обозначать Z_1Z_2. Значит, короче говоря, коса Z_1Z_2 получается посредством соединения обеих кос Z_1 и Z_2. На чертеже 98 это изображено наглядно. При этом опять-таки следует принимать во внимание ориентации. Мы еще подчеркнем, хотя это уже ясно из всего сказанного, что при таком процессе i-тая нить косы Z_1 не обязательно соединяется с i-той же нитью косы Z_2. Если нить μ_i соединяет точку A_i с точкой B_{r_i}, то ведь надо совместить точку B_{r_i} с точкой A_{r_i} косы Z_2, так что нить μ_i будет связана с нитью μ'_{r_i} косы Z_2. Например на чертеже 98 первая нить косы Z_1 оказывается связанной с третьей нитью косы Z_2.

Ассоциативный закон

$$Z_1(Z_2Z_3) = (Z_1Z_2)Z_3 \tag{1}$$

для нашей операции непосредственно очевиден, потому что мы получим ту же самую косу, если прибавим к Z_1 уже составленную косу Z_2Z_3, и, то же самое, если сначала соединим косы Z_1 и Z_2 и только к результату присоединим косу Z_3. Напротив, порядок кос Z_1 и Z_2, вообще говоря, является существенным, т. е. коммутативный закон, вообще говоря, не имеет места.

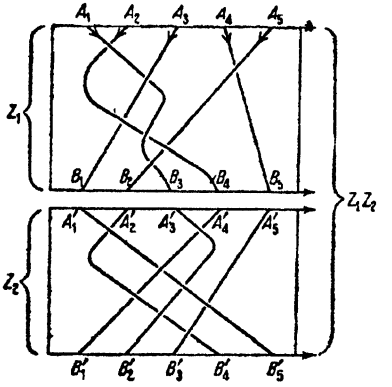
Простейшие типы кос n-го порядка изображены на черт. 99. Мы имеем:

1. Коса E, в которой каждая точка A_i соединяется с точкой B_i и нити μ_i не перепутываются друг с другом. Тогда после надлежащей деформации проекции наших кривых не будут пересекаться. Очевидно:

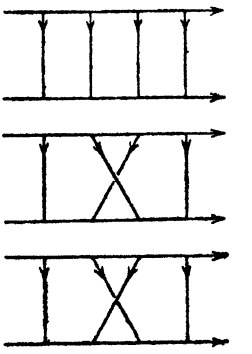
$$ZE = EZ = Z, \tag{2}$$

где Z — произвольная коса. Следовательно, наша коса E играет роль единицы и поэтому мы будем ее обозначать цифрой 1.

2. Коса σ_i, в которой точка A_i соединяется с точкой B_{i+1} и точка A_{i+1} — с точкой B_i, причем i-тая нить один раз проходит *над* $(i+1)$-ой нитью, а прочие нити идут так же, как и в случае косы E,



Черт. 98.



Черт. 99.

т. е. идут не перепутываясь друг с другом от точки A_r к точке B_r.

3. Коса σ_i^{-1}, в которой имеется то же положение вещей, как и в случае σ_i, но только i-ая нить проходит *под* $(i+1)$-ой нитью.

Если соединить косу σ_i с косой σ_i^{-1}, то i-ую нить можно снять с $(i+1)$-ой, вследствие чего получится коса E. То же самое получится при соединении косы σ_i^{-1} с косой σ_i. Следовательно имеем:

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1. \tag{3}$$

По этой причине третий тип обозначается как σ_i^{-1}.

Далее можно видеть, что всякая коса может быть получена как надлежащая комбинация элементарных кос $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, так как после легких деформаций всякую косу можно разложить на такие слои, чтобы в каждом отдельном слое лежала только одна точка перекрещивания. Например, изображенные на чертеже 100 косы допускают следующее представление:

$$Z_1 = \sigma_1\sigma_4^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1};$$

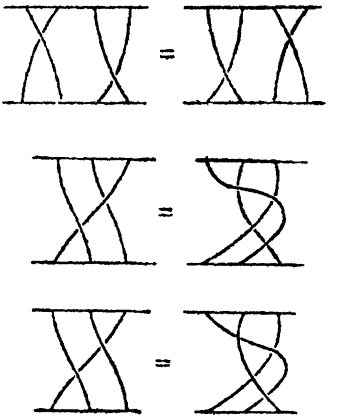
$$Z_2 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4\sigma_3^{-1}.$$

Это имеет следствием то обстоятельство, что для всякой косы Z существует обратная ей коса Z^{-1}, для которой имеет место:

$$ZZ^{-1} = Z^{-1}Z = 1. \tag{4}$$

Так, например, $Z_1^{-1} = \sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_4\sigma_1^{-1}$. Геометрический смысл косы Z^{-1} ясен непосредственно. Именно, мы получим обратную косу, если отобразим зеркально проекцию косы Z относительно прямой g_2 и изменим ориентацию кривых в зеркальном образе на обратную.

Итак, косы n-го порядка образуют группу $\mathfrak{Z}_n$ с $(n-1)$ образующими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.



Черт. 100.

§ 90. Определяющие соотношения.

Представление косы Z с помощью σ_i разумеется не однозначно, так как между σ_i имеются некоторые соотношения, которые имеют источником дозволенные деформации. Прежде всего речь будет итти о том, чтобы найти „определяющие" соотношения нашей группы, следовательно, об арифметизации деформаций. Легко видеть, что деформация косы Z из нормального вида в другой всегда может быть произведена также в нормальном виде, так что дело сводится только к переброске нитей.

Расчленим эту переброску на отдельные шаги. Вместо того, чтобы перетягивать несколько нитей одновременно, можно по очереди протянуть отдельные нити под или над другими. При этом, вообще говоря, придется возвращаться несколько раз к одной и той же нити, уже переложив надлежащим образом другие нити. Во всяком случае каждый отдельный шаг заключается в том, что деформируется одна определенная нить, а остальные нити остаются неизменными.

Этот отдельный шаг может быть разложен дальше на еще более простые. Именно, если мы проследим за деформацией нити, то наша нить в некоторые моменты будет проходить под или над соседними нитями; далее, будут сдвигаться точки перекрещивания, в которых участвует наша нить. Если это происходит одновременно в нескольких местах, то это опять-таки можно произвести поочередно. Если мы теперь представим себе в какой-нибудь точке i-тую нить надвигающейся на $(i+1)$-ую, то тотчас после перехода в этом месте косы появится вдвинутой часть $\sigma_i\sigma_i^{-1}$. Следовательно, это не дает нам никакого соотношения. Точно так же обратная операция означает только выпускание некоторой части $\sigma_i\sigma_i^{-1}$.

Итак, остается рассмотреть только „сдвиг" точек перекрещивания. Пусть дело идет, например, о σ_i. Пока мы не проходим с σ_i через

точку перекрещивания, в котором участвует $(i+1)$-ая нить, то самое большее, что может произойти в выражении косы Z, это то изменение, что σ_i, стоявшая до сдвига позади элемента σ_k, после сдвига окажется впереди него. При этом k не должно равняться $(i+1)$, так как i-тая и $(i+1)$-ая нити в рассматриваемой части косы участвуют только в перекрещивании σ_i (см. черт. 100). Следовательно, эта деформация дает соотношение:

$$\sigma_i\sigma_k = \sigma_k\sigma_i. \tag{5}$$

Но если при „сдвиге" σ_i (например, „вверх") перейти перекрещивание, в котором участвует $(i+1)$-ая нить, следовательно $\sigma_i^{\pm 1}$, то мы найдем из чертежа 100:

$$\sigma_{i+1}^{\pm 1}\sigma_i = \sigma_i^{\mp 1}\sigma_{i+1}\sigma_i^{\pm 1}\sigma_{i+1}^{\pm 1}.$$

Это в обоих случаях дает соотношение:

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}. \tag{6}$$

Полная симметрия соотношения (6) уже указывает на то, что мы не получим ничего нового, если будем сдвигать σ_i „вниз", или если протянем i-тую нить над $(i+1)$-ой. В этом можно без труда убедиться. Точно так же сдвиг косы σ_i^{-1} приводит только к соотношениям (5) и (6).

Итак, преобразование нитей приводит только к повторному применению соотношений (5) и (6), так что эти последние являются системой определяющих соотношений для нашей группы. Следовательно, мы имеем:

Группа $\mathfrak{Z}_n$ кос n-ого порядка может быть построена из $(n-1)$ образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, между которыми существуют соотношения:

$$\sigma_i \rightleftarrows \sigma_k, \qquad (k \neq i-1, \quad i+1) \tag{7}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \tag{8}$$

При этом значок $\rightleftarrows$ обозначает коммутативность элементов σ_i и σ_k, следовательно соотношение (7) является лишь другим способом записи соотношения (5).

Для $n=3$ соотношение (7) отпадает и остается лишь соотношение:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2. \tag{9}$$

Прежде всего заметим, что группа $\mathfrak{Z}_n$ всегда может быть представлена с помощью двух образующих. Именно, положим:

$$a = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_{n-1}, \tag{10}$$

$$\sigma = \sigma_1. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь выражение $a\sigma_1$. Так как элемент σ_i перестановочен почти со всеми σ_k, то его можно сдвинуть довольно сильно влево и таким образом получить:

$$a\sigma_i = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+2}\sigma_{i+3}\ldots\sigma_{n-1}.$$

Если применить (8), то получим:

$$a\sigma_i = \sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_{n+1},$$

а в силу (7):

$$a\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{n-1} = \sigma_{i+1}a,$$

или

$$\sigma_{i+1} = a\sigma_i a^{-1}. \tag{12}$$

Отсюда посредством повторного применения получаем:

$$\sigma_i = a^{i-1}\sigma a^{-(i-1)}. \tag{13}$$

Но в этом равенстве элементы σ_i выражены с помощью обеих кос a и σ, так что косы a и σ могут быть также взяты в качестве образующих.

Теперь нам предстоит вывести все независимые соотношения между a и σ. При этом надо действовать с большой осторожностью, так как недостаточно просто выразить старые соотношения с помощью новых переменных.

Мы поступим так:

Можно также считать, что группа $\mathfrak{Z}_n$ порождается $(n+1)$ образующими σ_i, a, σ с соотношениями: (7), (8), (10), (11), (13), потому что ведь в силу (10) и (11) образующие a и σ прибавлены зря, а соотношение (3) является следствием (7) и (8).

Далее, (12) является следствием (13). Если умножить соотношение

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

слева на a, а справа на a^{-1}, то из (12) вытекает, что:

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3.$$

Повторным применением этого процесса можно из этого получить общее соотношение (8). Следовательно, вместо (8) можно взять более специальное соотношение $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma\sigma_1\sigma_2$.

Но и это излишне. Именно, в силу (7) σ_1 перестановочно с произведением $\sigma_3\sigma_4\ldots\sigma_{n-1}$, а следовательно в силу (10) — с $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}a$. Это дает:

$$\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}a = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}a\sigma_1.$$

Далее, по (12): $a\sigma_1 = \sigma_2 a$. Если это подставить в предыдущую формулу, то получим:

$$\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

Но это опять приводит после легкого вычисления к соотношению $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. Итак, достаточно соотношений (7), (10), (11), (13).

Подобно тому, как в случае соотношения (8), получаем также, что и в случае (7) достаточно значения $i = 1$; следовательно:

$$\sigma_1\sigma_k = \sigma_k\sigma_1. \qquad (k \geqslant 3)$$

Если сюда внести (13), то после легкого изменения обозначений получим:

$$\sigma \rightleftarrows a^i \sigma a^{-i} \quad \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant n-2 \tag{14}$$

(для $n=3$ не будет никакого соотношения).

Обратно, (14) и (13) дают соотношение (7). Следовательно, остаются еще соотношения (10), (11), (13), (14). Внесем теперь (13) в (10) и получим тогда:

$$a = \sigma a \sigma \ldots a \sigma a^{-(n-2)} = a^{-1}(a\sigma)^{n-1} a^{-(n-2)}.$$

Это дает соотношение:

$$a^n = (a\sigma)^{n-1}. \tag{15}$$

Из (15) и (13), обратно, получается (10), так что в основу группы $\mathfrak{Z}_n$ можно также положить соотношения (11), (13), (14), (15). Но из них соотношения (11) и (13) носят характер обозначений и поэтому могут быть опущены. Но тогда остаются лишь обе образующие a и σ с соотношениями (14) и (15).

Также и элементы a и $a\sigma$ порождают всю группу. По формуле (15) a^n является степенью каждой из этих образующих. Поэтому a^n коммутативно с ними, а следовательно и со всяким элементом группы. Это следует из соотношения (15). Теперь легко видеть, что половину соотношений (14) можно отбросить. Именно, из (14) следует:

$$a^{-i}\sigma a^i \rightleftarrows \sigma,$$

следовательно,

$$\sigma \rightleftarrows a^{-i}\sigma a^i = a^n a^{-i}\sigma a^i a^{-n}$$

или

$$\sigma \rightleftarrows a^{(n-i)}\sigma a^{-(n-i)}.$$

Итак, мы доказали:

В группе $\mathfrak{Z}_n$ имеются две образующих a и σ с определяющими соотношениями:

$$a^n = (a\sigma)^{n-1},$$

$$\sigma \rightleftarrows a^i \sigma a^{-i} \quad \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}.$$

§ 91. Замкнутая коса.

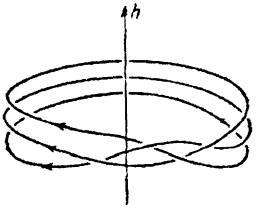
Рассмотрим в пространстве какую-либо прямую h в качестве „оси". Далее, пусть задана какая-нибудь коса Z. Окружим косой Z, не перекручивая ее, ось h таким образом, чтобы прямая g_1 совместилась с прямой g_2 и точки A_i совместились с точками B_i. Возникший топологический образ, в котором, следовательно, конец нити $\mathfrak{u}_i$ отождествлен с началом нити $\mathfrak{u}_{r_i}$, называется замкнутой косой, соответствующей косе Z.

В качестве допустимых преобразований рассмотрим произвольные деформации нитей, при которых ось h не должна быть перейденной. При этом деформация может быть также применена и к прежде неподвижным точкам A_i, которые теперь равноправны со всеми прочими

точками. Так как вследствие этого определяемая раньше точками A_i ориентация теряет всякий смысл, то в замкнутой косе имеется лишь одна ориентация, именно та, которую сохраняют нити, т. е. направление обхода вокруг оси h. На чертеже 101 изображен пример замкнутой косы с $n=3$. Она соответствует замкнутой косе:

$$Z=\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}.$$

Какие косы Z' порождают такую же замкнутую косу, как и коса Z? К ранее описанным преобразованиям теперь добавляется возможность изменения точек прикрепления. Следовательно там можно вдвинуть член $X^{-1}X$. Но это приводит нас к косе $Z'=XZX^{-1}$. Сверх того надо еще применить соотношения группы $\mathfrak{Z}_n$. Если разрезать замкнутую косу в другом месте, например, таким образом, чтобы только после части косы Y находилось старое место прикрепления, то это приведет к косе $Z''=YZY^{-1}$, так как ведь сзади часть Y должна опять отсутствовать. Это все вновь прибавляющиеся допустимые преобразования; так что мы находим:



Черт. 101.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы две косы Z и Z' порождали одну и ту же замкнутую косу, заключается в существовании такой косы X, что

$$Z'=XZX^{-1}$$

или, следовательно, что Z' является трансформацией Z.

Итак, каждой замкнутой косе соответствует целый класс „эквивалентных“ элементов из группы $\mathfrak{Z}_n$, и наоборот.

Если теперь в замкнутой косе устранить ось h, то эта коса перейдет в цепь известного числа замкнутых ориентированных кривых или, в частности, в узел. На нашем чертеже 101 изображена одна единственная кривая, следовательно, узел (именно двойная петля).

Здесь начинается связь с произвольными цепями и узлами. Именно, имеет место:

Всякая произвольная цепь (или узел) может быть представлена при произвольной ориентации компонент как замкнутая коса (разумеется не однозначно).

Простым и коротким доказательством этого предложения мы обязаны Александеру [1]). Так как в дальнейшем мы не будем им пользоваться, то мы только указываем на него.

В частности, обе клеверные петли порождают косу второго порядка и имеет место: $Z=\sigma_1^3$, соответственно $Z=\sigma_1^{-3}$. Напротив, двойная петля имеет порядок 3 и имеет место $Z=(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2$.

Если мы хотим этим путем подойти ближе к проблеме узлов, то прежде всего надо ответить на следующие вопросы:

[1]) J. W. Alexander, A Lemma on Systems of knotted curves. Proc. Nat. Ac. U. S. A., том 9 (1923), стр. 93.

1. Когда две косы Z и Z' будут равны друг другу? Этот вопрос сводится к следующему: можно ли на основе определяющих соотношений перевести друг в друга два произведения Z и Z' образующих σ_i или же это невозможно?

2. Когда две замкнутые косы Z и Z' будут равны друг другу, т. е. когда элемент Z является трансформацией элемента Z'?

Впрочем оба эти вопроса имеют смысл и для произвольной группы.

Пусть дана группа с конечным числом образующих и конечным числом соотношений между этими образующими. Относительно двух заданных произведений образующих требуется выяснить, можно ли их на основе соотношений перевести друг в друга или трансформировать друг в друга. Первый вопрос, следуя Дену, мы будем называть „проблемой слова", второй, далее идущий вопрос, „проблемой трансформации" для нашей группы. От решения этих вопросов для произвольно заданной группы мы в настоящее время еще очень далеки.

Напротив, для нашей специальной группы $\mathfrak{Z}_n$ можно ответить по крайней мере на первый из этих двух вопросов. Но здесь мы займемся не общим случаем, а только случаем $n=3$. Здесь также возможно разрешить и вторую нашу проблему, т. е. проблему трансформации. Что же касается случая произвольного n, то мы укажем на уже цитированную на стр. 346 работу Артина.

Когда обе упомянутые проблемы будут решены, надо будет еще исследовать, сколькими различными способами можно представить узел как замкнутую косу. Об этом пока мы еще ничего не знаем.

Прежде чем обратиться к „проблеме слова" для $n=3$, нам еще нужно ввести одно общее понятие из теории групп, которое само по себе играет важную роль в самых основах теории групп. Речь идет о так называемом свободном произведении групп.

§ 92. Свободное произведение групп.

Пусть дано произвольное конечное или бесконечное множество групп $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ Среди них могут находиться и изоморфные группы, но для двух элементов из различных групп (будут ли эти последние изоморфны между собой или нет) не установлено никакого закона группового умножения.

Тогда под свободным произведением групп мы понимаем множество $\mathfrak{G}$ следующих символов:

1. Единицы 1.

2. Всех символов вида

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

где α_i — произвольные элементы из наших групп $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ Но при этом надо принимать во внимание еще следующие добавочные условия:

a) Ни одно α_i не должно быть равно 1;

b) Соседние элементы α_i и α_{i+1} должны принадлежать различным группам.

То обстоятельство, что мы пишем α_i и α_{i+1} рядом пока еще не имеет смысла группового умножения, так как для элементов из различных групп закон перемножения пока не определен.

Два элемента из $\mathfrak{G}$ называются тогда и только тогда равными:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = \beta_1\beta_2\ldots\beta_m,$$

когда $n = m$ и $\alpha_i = \beta_i$.

Теперь определим закон перемножения двух элементов из $\mathfrak{G}$.

Прежде всего естественно установить, что:

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A.$$

Если же

$$A = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n; \quad B = \beta_1\beta_2\ldots\beta_m,$$

то мы сначала записываем оба элемента один за другим:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m.$$

Этот символ, вообще говоря, не будет элементом из $\mathfrak{G}$, так как в месте стыка элементов A и B могут стоять два элемента одной и той же группы, т. е. условие b) будет не выполнено.

Теперь мы определяем:

1. Если α_n и β_1 принадлежат различным группам, то пусть:

$$AB = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m.$$

2. Если α_n и β_1 принадлежат одной и той же группе и $\alpha_n\beta_1 = \gamma$, то в случае $\gamma \neq 1$ пусть:

$$AB = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\gamma\beta_2\beta_3\ldots\beta_m.$$

3. Если же $\alpha_n\beta_1 = 1$, то обозначим

$$A' = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}; \quad B' = \beta_2\beta_3\ldots\beta_m$$

и определим $AB = A'B'$.

Так как A' и B' являются более короткими выражениями, то можно считать, что для них закон перемножения уже определен. Путем повторения этого процесса придем, наконец, в худшем случае к перемножению двух элементов, из которых один является 1.

Коротко правило умножения можно сформулировать следующим образом: оба элемента пишут один за другим и затем производят возможные сокращения в месте стыка.

Покажем теперь, что относительно этого закона перемножения множество $\mathfrak{G}$ образует группу. Заметим, что в $\mathfrak{G}$ имеется единица и что для каждого элемента существует обратный элемент. Действительно, для элемента A обратным является элемент:

$$A^{-1} = \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}^{-1}\ldots\alpha_1^{-1},$$

как это легко проверить.

Следовательно, остается только еще доказать справедливость ассоциативного закона:

$$(AB)C = A(BC).$$

Если один из трех элементов является единицей, то доказывать нечего. Если $A = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, то целесообразно назвать число n длиною A и при доказательстве применить полную индукцию.

Если A и C оба имеют длину 1, то в произведении $(AB)C$ и точно так же в произведении $A(BC)$ самое большее может измениться первый и последний член у B. Следовательно, если B имеет длину бо́льшую 1, то закон ассоциативности выполнен. Если же и элемент B имеет длину 1, то во всяком случае ассоциативный закон будет иметь место тогда, когда не все три элемента принадлежат одной и той же группе. Но в последнем случае этот закон и подавно будет иметь место, так как в каждой отдельной группе $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, ... он заведомо выполнен.

Этим мы уже положили начало индукции. Предположим теперь, что ассоциативный закон доказан для всех систем, в которых сумма длин A и C меньше k, какова бы ни была длина элемента B. Пусть теперь сумма длин A и C будет равна $k \geqslant 3$.

Тогда либо A, либо C будет иметь длину бо́льшую 1. Предположим, что это будет иметь место для элемента A.

Если $A = \alpha_1\alpha_2 \ldots, \alpha_n$, то положим $A' = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$.

Для того чтобы образовать по правилу перемножения произведение AB, нужно, прежде всего, объединить последний член элемента A с элементом B, так что произведение $AB = A'(\alpha_n B)$; следовательно:

$$(AB)C = (A'(\alpha_n B))C.$$

Теперь сумма длин элементов A' и C уже меньше k, так что по нашему предположению:

$$(A'(\alpha_n B))C = A'((\alpha_n B)C).$$

Но A имело длину бо́льшую единицы. Поэтому предположение индукции выполнено также и для элементов α_n и C, так что:

$$(\alpha_n B)C = \alpha_n(BC);$$

следовательно:

$$(AB)C = A'(\alpha_n(BC)).$$

Для того чтобы, согласно правилу умножения, помножить A на BC, надо опять-таки последний член A, т. е. α_n объединить с BC, так что:

$$A(BC) = A'(\alpha_n(BC)).$$

Но отсюда и из предыдущего уравнения получается закон ассоциативности. Если бы A имело длину 1, то C имело бы длину бо́льшую 1, и аналогичное рассуждение опять привело бы к цели.

Этим доказано, что свободное произведение $\mathfrak{G}$ образует группу. Отныне выражение A имеет смысл и тогда, когда условия a) и b) не выполнены, потому что ведь закон перемножения обобщен. Теперь мы уверены, что каждый элемент может быть записан лишь одним способом в виде произведения элементов, удовлетворяющих условиям a) и b). Эту форму называют нормальной формой рассматриваемого элемента.

Теперь становится совершенно ясным смысл наших исследований. Подобно тому, как обычно доказывают отсутствие противоречий при вычислении с обыкновенными комплексными числами с помощью доказательства справедливости элементарных правил вычисления для пар чисел, так же и мы теперь установили отсутствие противоречия в формальном не коммутативном исчислении. Важность этого очевидна для оснований теории групп. При этом здесь существенным пунктом является доказательство справедливости ассоциативного закона [1]).

Рассмотрим теперь специальный случай свободного произведения циклической группы третьего порядка, состоящей из элементов $1, a^{\pm 1}$ с соотношением $a^3 = 1$ и циклической группы второго порядка, состоящей из двух элементов 1 и b с соотношением $b^2 = 1$.

Нормальной формой элементов свободного произведения здесь будет:

$$a^{\pm 1} b a^{\pm 1} b a^{\pm 1} \ldots b a^{\pm 1} b,$$

в которой первый член $a^{\pm 1}$, или последний член b, может и отсутствовать. Эта нормальная форма однозначна, т. е. два элемента тогда и только тогда равны, когда они имеют одинаковые формы.

Для приведения к нормальному виду произвольного произведения

$$a^{\nu_1} b^{\nu_1} \ldots a^{\nu_r} b^{\nu_r}$$

нужно только повторно пользоваться обоими соотношениями $a^3 = 1$ и $b^2 = 1$, именно для того чтобы понизить показатели ν_i.

Следовательно, наша группа может быть определена с помощью определяющих соотношений $a^3 = 1$, $b^2 = 1$.

§ 93. Косы третьего порядка.

Мы не будем останавливаться на случае $n = 2$, так как в этом случае имеется только одна образующая σ_1 и ни одного соотношения. Следовательно, группа $\mathfrak{Z}_2$ является просто бесконечно циклической группой, состоящей из степеней σ_1.

В случае же $n = 3$ поступим следующим образом. Воспользуемся образующими a и σ формул (10) и (11) и примем во внимание, что при $n = 3$ соотношение (17) отпадает, так что остается одно соотношение (16), которое здесь примет вид:

$$a^3 = (a\sigma)^2.$$

Введем теперь вместо σ новую образующую b с помощью подстановки:

$$b = a\sigma.$$

[1]) Для того специального случая, когда все множители свободного произведения являются циклическими группами бесконечного порядка. Деном впервые было дано геометрическое доказательство непротиворечивости. По устному сообщению для общего случая впервые нашел доказательство ассоциативного закона Шрейер (O. Schreier).

Тогда элементы σ_1 и σ_2 будут связаны с a и b следующим образом (σ_2 по формуле (12)):

$$a = \sigma_1\sigma_2, \qquad b = \sigma_1\sigma_2\sigma_1,$$
$$\sigma_1 = a^{-1}b, \quad \sigma_2 = ba^{-1}.$$

Теперь соотношение между a и b имеет следующий простой вид[1]):

$$a^3 = b^2. \tag{18}$$

Прежде всего докажем:

Никакая степень образующей a не может равняться 1. Действительно, уравнение $a^k = 1$ не может быть следствием (18), потому что в бесконечной циклической группе, состоящей из степеней элемента x, элементы $a = x^2$ и $b = x^3$ удовлетворяют соотношению (18). И тем не менее не существует никакой степени x (а следовательно и степени a), которая равнялась бы 1.

Обозначим для краткости

$$c = a^3 = b^2. \tag{19}$$

По только что доказанному $c_n = c_m$ тогда и только тогда, когда $n = m$.

Элемент c, будучи степенью a, коммутативен с a. Так как c является и степенью b, то он коммутативен также и с b. Но a и b являются образующими нашей группы, так что c коммутативен вообще со всяким элементом группы.

Теперь приведем элементы нашей группы к известной нормальной форме. Пусть имеем элемент:

$$Z = a^{\nu_1}b^{\mu_1}a^{\nu_2}b^{\mu_2}\ldots a^{\nu_r}b^{\mu_r}.$$

Если ν_i делится на 3, то можно положить:

$$a^{\nu_i} = c^{\frac{1}{3}\nu_i};$$

точно так же для четного μ_i:

$$b^{\mu_i} = c^{\frac{1}{2}\mu_i}.$$

Встречающиеся при этом степени c можно объединить и сдвинуть направо. После применения этого процесса мы получим, наконец, выражение вида:

$$a^{\lambda_1}b^{\varkappa_1}a^{\lambda_2}b^{\varkappa_2}\ldots a^{\lambda_s}b^{\varkappa_s}c^{k},$$

где λ_i не делится на 3, а $\varkappa$ не делится на 2. При этом еще вначале может выпасть член a^{λ_1}, а в конце — член $b^{\varkappa_s}$.

Так как λ_i не делится на 3, то можно положить $\lambda_i = 3\rho_i \pm 1$; следовательно:

$$a^{\lambda_i} = a^{\pm 1}c^{\rho_i}$$

---

[1]) Употребленная здесь нормальная форма принадлежит Шрейеру: O. Schreier, Über die Gruppen $A^aB^b = 1$, Abh. Hamburg, том 3, стр. 167 (1925).

и аналогично $x_i = 2\tau_i + 1$; следовательно:

$$b^{x_i} = bc^{\tau_i}.$$

Если мы опять сдвинем все возникшие степени c направо, то получим:

$$Z = a^{\pm 1} ba^{\pm 1} b \ldots a^{\pm 1} bc^m, \tag{20}$$

причем первый член $a^{\pm 1}$ и последний член b могут и отсутствовать. Формула (20) и является искомой нормальной формой для Z.

Тот факт, что косы с одинаковыми нормальными формами равны, — тривиален. Но мы докажем и обратное, т. е. однозначность наших нормальных форм.

Пусть для нашего элемента Z, кроме формы (20), имеется еще вторая нормальная форма. Тогда форму (20) можно привести к этому новому виду с помощью соотношений (18) и (19).

Но это преобразование должно быть возможно также и в случае, когда (20) рассматривается как элемент группы с соотношениями $a^3 = 1$, $b^2 = 1$. В этой группе соотношение $a^3 = b^2$ выполнено, так что и тогда можно произвести подобные преобразования. Но в этой группе сверх того $c = 1$. Если принять во внимание это обстоятельство, то в формуле (20) и в другой нормальной форме для Z останутся лишь части, не содержащие c и притом как раз в нормальной форме для элементов нашей группы $a^3 = 1$, $b^2 = 1$, про которую мы ведь уже знаем, что она является свободным произведением. Так как для свободного произведения однозначность нормальной формы уже установлена, то в формуле (20) часть свободная от c однозначно определяется элементом Z.

Итак, в нашей группе соотношениями (18) и (19) вторая нормальная форма для Z может отличаться от формы (20) только степенью c. Но если во второй форме стоит c^n вместо c^m, то необходимо $c^n = c^m$, т. е. $n = m$. Этим и доказана однозначность нормальной формы.

Следовательно, решение вопроса о том, будут ли две данные косы равны друг другу или нет, сведен к установлению их нормальных форм.

Этим примером из комбинаторной топологии мы заканчиваем наше сообщение о новейших геометрических исследованиях и переходим к тому, чтобы дать еще два дополнения к рассмотренным ранее темам: одно из анализа, другое из алгебры.

О ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МОНЖА. ИХ ОТНОШЕНИЕ К ТЕОРИИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ.

§ 94. Уравнение Гамильтона.

1. Уравнение

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \tag{1}$$

которого мы лишь вкратце коснулись в этих лекциях (§ 18,3), заслуживает более подробного рассмотрения. Мы увидим далее, что оно тесно связано как с теорией диференциальных уравнений с частными

производными, так и с вариационным исчислением. И притом здесь наибольший интерес представляет тот случай, который в § 18 остался в стороне: именно, когда уравнение *не является линейным* соотношением между y' и z'. В этом случае мы будем называть уравнение (1) уравнением Монжа в трех переменных (x, y, z).

Мы сейчас покажем, каковы заслуги Монжа [1]) в теории уравнения (1). Простейшая трактовка уравнения (1) заключается в следующем: в качестве y берут некоторую произвольную функцию от x. Тогда уравнение (1) представляет собой обыкновенное диференциальное уравнение для определения z. Итак, для решения задачи, поставленной уравнением (1), нам надо сначала взять произвольную функцию, а затем произвести интеграцию. Но Монж показал, что интеграция уравнения (1) может быть произведена гораздо более наглядным образом. Его результат, который мы скоро здесь получим, заключается в следующем: находят полный интеграл некоторого, тесно связанного с уравнением (1), диференциального уравнения с *частными производными* первого порядка. Вслед за тем общее решение определяется путем простого процесса диференцирования и исключения. Оно разумеется содержит произвольную функцию, как это следует из „полуопределенного" характера задачи, поставленной уравнением (1). Итак, преимущество решения, данного Монжем, заключается в том, что интеграция произведена раз навсегда и решения уравнения (1) могут быть написаны в явном виде („свободное от интегралов" представление решений).

2. Как уже упоминалось в § 18, уравнение (1) ставит в соответствие каждой точке *конус направлений*, который в нашем случае не вырождается в плоскость. Рассмотрим теперь этот конус, как огибающую его касательных плоскостей, и получим, таким образом, в каждой точке x, y, z однопараметрическую систему элементов поверхности, т. е. будем иметь перед собой *диференциальное уравнение с частными производными первого порядка*, которое мы будем называть уравнением Гамильтона, соответствующим уравнению (1). Можно ожидать, что его теория тесно связана с уравнением (1); и действительно, оно как раз и является уравнением, встречающимся у Монжа. Сейчас мы его выведем.

Охарактеризовав элемент поверхности точки (x, y, z) обычным образом с помощью двух параметров p, q, мы выведем условие того, что этот элемент содержит два соседних направления y', z' и $y'+\eta, z'+\zeta$ из конуса Монжа. То есть должно иметь место:

$$z' = p + qy', \quad \zeta = q\eta$$

для всех решений уравнения

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad \eta f_{y'} + \zeta f_{z'} = 0.$$

Следовательно, мы должны из

$$f = 0, \quad f_{y'} + q f_{z'} = 0, \quad z' = p + qy' \tag{2}$$

[1]) G. Monge, см. Mémoires de l'Academie des Sciences, 1784.

исключить y' и z'. Представим себе, что y' и z' определены из первых двух уравнений и подставлены в третье уравнение; тогда результат исключения можно записать в следующем виде:

$$p + h(x, y, z, q) = 0. \tag{3}$$

Это и есть уравнение Гамильтона.

3. Для того чтобы изложить способ Монжа решения уравнения (1), мы заметим следующее: пусть известен „полный" интеграл (см. стр. 281) уравнения (3). Мы его можем написать, например, в виде:

$$V(x, y, z, a) = b. \tag{4}$$

Тогда, согласно принципам Лагранжа, мы получим общее решение уравнения (3), если будем искать огибающую взятого из (4) однопараметрического семейства решений, которое можно представить в виде $V = \varphi(a)$. Подобная огибающая имеет, как известно, *ребро возврата*, которое можно получить из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} V(x, y, z; a) &= \varphi(a), \\ V_a(x, y, z; a) &= \varphi'(a), \\ V_{aa}(x, y, z; a) &= \varphi''(a). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Теперь покажем, что каждое такое ребро возврата можно получить из уравнения (1). Это вытекает просто из того, что ребро возврата по общей теории огибающих однопараметрических семейств поверхностей касается кривых

$$V = \varphi(a), \quad V_a = \varphi'(a).$$

Эти последние являются характеристиками уравнения (3) и вследствие этого в каждой точке имеют в качестве направления касательной одно из направлений конуса Монжа. Этим доказано это утверждение.

Теперь еще остается вопрос, можно ли таким образом получить все решения уравнения (1). Рассмотрим произвольное решение уравнения (1) и поставим в соответствие каждой его точке элемент поверхности, касающийся конуса направления вдоль направления, определенного касательной решения. Таким образом мы получим *полосу*, элементы которой удовлетворяют уравнению Гамильтона. Теперь мы можем с ее помощью получить решение уравнения (3), построив выходящую из каждого ее элемента характеристическую полосу. По теории Коши (§ 72) эти характеристические полосы смыкаются в решения уравнения (3), а наше решение уравнения (1) будет как раз ребром возврата интегральной поверхности уравнения (3), так как характеристики „касаются" его.

Но более точное рассмотрение показывает нам, что здесь перед нами имеется как раз выпущенный в § 72 исключительный случай ($N = 0$). Следовательно, требуется еще специально обосновать, что построенные полосы „лежат соединенно" (ср. стр. 280). Мы это сделаем так:

Пусть дано произвольное однопараметрическое семейство характеристических полос посредством функций:

$$y(x, c), \quad z(x, c), \quad p(x, c), \quad q(x, c).$$

Тогда функции y, z, q будут удовлетворять нижеприведенным дифференциальным уравнениям (16), а p может быть взято из (1). Если продифференцировать все эти уравнения по параметру c, то легко установить следующее тождество:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right) + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right) = 0. \qquad (*)$$

Если семейство полос должно образовать поверхность, то необходимо, чтобы уравнение

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

удовлетворялось для всех элементов полос (условие соединенного положения). Это может быть написано так:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right)dc + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{dy}{dx}\right)dx = 0$$

и в силу дифференциальных уравнений (16) это сводится к выражению:

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = 0. \qquad (**)$$

Но так как по (*) это выражение удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка с независимым переменным x, то его тождественное обращение в нуль следует уже из его обращения в нуль в какой-нибудь одной точке каждой из наших полос.

Если мы построим теперь наше семейство полос, исходя из произвольной „исходной полосы“:

$$x_0(c), \quad y_0(c), \quad z_0(c), \quad p_0(c), \quad q_0(c),$$

элементы которой удовлетворяют уравнению Гамильтона, то будет:

$$y_0(c) = y(x_0(c), c), \qquad p_0(c) = p(x_0(c), c)$$
$$z_0(c) = z(x_0(c), c), \qquad q_0(c) = q(x_0(c), c);$$

из условия соединенного положения:

$$dz_0 - p_0\,dx_0 - q_0\,dy_0 = 0$$

для элементов исходной полосы после легких вычислений получится, что (**) обращаются в нуль при $x = x_0(c)$.

Семейство полос, для которого мы только что установили „соединенное положение“, только тогда будет образовывать настоящую поверхность, представимую в форме $z = \varphi(x, y)$, когда $\frac{\partial y}{\partial c}$ не равняется тождественно нулю. Если же $\frac{\partial y}{\partial c}$ тождественно равно нулю, то из (**)

следует, что $\frac{\partial z}{\partial c}$ также равно нулю. Тогда все наши характеристические полосы имеют в качестве „носителя" одну и ту же кривую, которая тождественна с решением уравнения (1), из которого мы исходили. Но так как в каждой точке решения уравнения (1) однозначно определена соответствующая касательная плоскость конуса Монжа, то характеристические полосы вообще совпадают.

Вследствие этого можно сказать: решения уравнения (1) доставляются:

a) характеристическими уравнениями (3),

b) ребрами возврата решений уравнений (3).

Мы можем их все найти с помощью полного интеграла (4) уравнения (3), потому что характеристики, как известно, являются зависящими от трех параметров кривыми:

$$V(x, y, z, a) = b, \quad V_a(x, y, z, a) = c, \tag{6}$$

в то время как аналитическое представление ребер возврата нами уже было дано выше в уравнениях (5).

4. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$c^2(1 + y'^2) = z'^2,$$

характеризующее *линии постоянного наклона*, направление касательных к которым образует с плоскостью (x, y) постоянный угол φ, причем тангенс этого угла равен c. Соответствующим уравнением Гамильтона здесь будет:

$$p = \sqrt{c^2 - q^2} \quad \text{или} \quad p^2 + q^2 - c^2 = 0.$$

Это диференциальное уравнение является уравнением *поверхностей постоянного подъема*, нормали которых образуют с направлением оси z постоянный угол φ. Мы легко получим полный интеграл, если будем отыскивать те плоскости, которые имеют предписанный наклон. Их уравнения можно написать (введя некоторый рациональный параметр a), например, в таком виде:

$$ax + \frac{1 - a^2}{2} y + \frac{1 + a^2}{2c} z = b;$$

тогда мы получим, разрешив систему (5) относительно x, y, z, в качестве уравнений линий постоянного наклона уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'(a) - a\varphi''(a), \\ y &= \varphi(a) - a\varphi'(a) - \frac{1 - a^2}{2}\varphi''(a), \\ z &= c\left[\varphi(a) - a\varphi'(a) + \frac{1 + a^2}{2}\varphi''(a)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Кроме того сюда надо еще присоединить прямые с углом наклона φ, являющиеся характеристиками уравнения (3).

Полученные формулы находят свое важнейшее применение в случае $c = i$. Именно, в этом случае уравнение (1) является уравнением

минимальных кривых или *изотропных* кривых пространства. Разумеется здесь, поскольку мы вступили в комплексную область, в качестве $\varphi(a)$ надо взять аналитическую функцию комплексного переменного a. Тогда формулы (7) приведут, в соответствии с точкой зрения Ли, к теории минимальных поверхностей, прямо к известным формулам Вейерштрасса (§ 47). Сравни об этом, например, Бляшке, Диференциальная геометрия, I [1]).

5. Рассмотрим теперь ближе характеристики или, вернее, характеристические полосы уравнения (3). Для этой цели удобнее другая форма уравнения Гамильтона: именно, представим теперь себе решения уравнения (3) заданным в неявном виде

$$W(x, y, z) = \text{const}$$

и найдем для W диференциальное уравнение с частными производными. Мы на это можем еще так смотреть, что положение элемента поверхности определяется не с помощью

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

а с помощью трех *однородных* координат:

$$\pi = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \varkappa = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \rho = \frac{\partial W}{\partial z},$$

связанных с p и q уравнениями:

$$\pi + \rho p = 0, \quad \varkappa + \rho q = 0.$$

По существу от этого ничего не меняется, но формальная трактовка приводит к важным результатам именно на этом пути. Потребовав опять, чтобы элемент поверхности π, $\varkappa$, ρ содержал два соседних элемента конуса Монжа

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad \pi + \varkappa y' + \rho z' = 0,$$
$$\eta f_{y'} + \zeta f_{z'} = 0, \quad \varkappa\eta + \rho\zeta = 0,$$

мы прежде всего исключим η и ζ таким образом, что при введении параметра λ получим:

$$\varkappa = \lambda f_{y'}, \quad \rho = \lambda f_{z'}. \tag{8a}$$

Тогда

$$\pi = -\lambda (y' f_{y'} + z' f_{z'}) \tag{8b}$$

и из этих уравнений в соединении с уравнением $f = 0$ надо исключить y', z' и λ. Далее будем поступать таким образом, что мы вычислим три названных переменных из уравнений $f = 0$ и (8a) и подставим полученное значение в (8b) так, что мы получим уравнение Гамильтона в виде:

$$\pi + H(x, y, z, \varkappa, \rho) = 0. \tag{9}$$

[1]) Издание ОНТИ, М.—Л. 1935 г., §§ 106—107. *Прим. ред.*

Очевидно H будет однородной функцией первого измерения в переменных $\varkappa$ и ρ.

Для того чтобы определить характеристические полосы по Коши, надо интегрировать следующую систему:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{H_\varkappa} = \frac{dz}{H_\rho} = \frac{dW}{\pi + \varkappa H_\varkappa + \rho H_\rho} = -\frac{d\pi}{H_x} = -\frac{d\varkappa}{H_y} = -\frac{d\rho}{H_z}.$$

Здесь существенное значение имеют только следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial \varkappa}, & \frac{d\varkappa}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial \rho}, & \frac{d\rho}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Оба оставшихся уравнения сводятся (в силу однородности H) к $dW : dx = 0$ и $d\pi : dx = -H_x$; но последнее уравнение можно не принимать во внимание, так как π больше в системе не встречается и в конце может быть взято из $\pi = -H$.

Система (10) имеет вид, встречающийся в механике „канонической системы"; однако имеющийся здесь случай однородности первого измерения функции H в механике исключен. Характеристические полосы уравнения (9) изображаются уравнениями (10). При интегрировании уравнений (10) войдут четыре постоянных; но легко сообразить, что в силу однородности функции H одна из постоянных интеграции войдет множителем при $\varkappa$ и ρ, так что — в силу того обстоятельства, что π, $\varkappa$, ρ являются *однородными* координатами элемента — мы получим характеристические полосы, зависящие только от трех параметров. Введем теперь в уравнения (10) вместо $\varkappa$ и ρ опять переменные y', z', λ. По смыслу функции H имеем:

$$dH = d(\varkappa y' + \rho z') = y'd\varkappa + z'd\rho + \lambda(f_{y'}\,dy' + f_{z'}\,dz'),$$

что (если принять во внимание уравнение $f = 0$) переходит в:

$$dH = -\lambda(f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz) + y'dx + z'd\rho.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda f_y, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\lambda f_z, \quad \frac{\partial H}{\partial \varkappa} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial \rho} = z'$$

и два правых из уравнений (10) дают:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\lambda f_{y'})}{dx} - \lambda f_y &= 0, \\ \frac{d(\lambda f_{z'})}{dx} - \lambda f_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

в то время как два левых переходят в тривиальные тождества:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = z'.$$

Следовательно, характеристические полосы уравнения (3), соответственно (9), можно изобразить также уравнениями (11) в соединении

с уравнением $f=0$; при этом из названных дифференциальных уравнений сначала определятся *кривые*, являющиеся носителями полос, т. е. *характеристики*, в то время как сами полосы мы получим, если добавим еще уравнения (8a, b).

6. Но уравнения (11) хорошо известны еще и с другой точки зрения, именно, как дифференциальные уравнения экстремалей некоторой задачи вариационного исчисления, которую называют простейшим случаем так называемой задачи Майера. Она заключается в следующем: среди всех кривых, соединяющих неподвижную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с точкой P_1, двигающейся по прямой $x=x_1$, $y=y_1$ и удовлетворяющих уравнению (1), требуется найти такую, для которой аппликата z точки P_1 имела бы экстремальное (максимальное или минимальное) значение. Очевидно, ортогональная проекция искомой кривой на плоскость x, y может быть взята произвольно и тогда посредством нее и посредством z_0 течение кривой полностью определяется в силу уравнения (1); таким образом речь идет о том, чтобы надлежащим образом выбрать названную проекцию в качестве кривой, соединяющей точки x_0, y_0 и x_1, y_1. Далее доказывается, что *экстремали* этой вариационной задачи, т. е. кривые, обращающие в нуль „первую вариацию“ z_1, *как раз и характеризуются дифференциальными уравнениями* (11) *и* (1).

Мы хотим проследить еще дальше эту связь между нашими рассмотрениями и вариационным исчислением в том специальном случае, когда f не зависит от z. Именно, тогда мы имеем случай простейшей задачи вариационного исчисления, в котором положение вещей легче всего разобрать. Но особенно следует подчеркнуть, что и в общем случае положение вещей будет отличаться не существенно.

Возьмем уравнение (1) в виде

$$z' - \varphi(x, y, y') = 0$$

и получим

$$z_1 - z_0 = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx. \tag{12}$$

Наша экстремальная задача может быть теперь сформулирована следующим образом: среди всех кривых плоскости x, y, соединяющих точку x_0, y_0 с точкой x_1, y_1, требуется отыскать ту, которая сообщает интегралу (12) экстремальное значение.

Разумеется в этой формулировке принимаются во внимание лишь те прямые, которые могут быть представлены в виде $y=y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. Далее, функция $y(x)$ должна быть диференцируемой и интеграл (12) должен существовать. Обо всем этом, как и о более точном понятии „экстремум“, см. учебники вариационного исчисления [1]):

O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909.

I. Hadamard, Leçons sur le calcul de variations, I, Paris 1910 г.

A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2 изд., Braunschweig, 1925 г.

[1]) На русском языке см. книгу: М. Лаврентьев и Л. Люстерник, Основы вариационного исчисления, том I, ОНТИ, М.—Л. 1935, а также учебник: Лаврентьев М. и Люстерник Л., Курс вариационного исчисления, ГОНТИ, М.—Л. 1938. *Прим. ред.*

Воспользуемся опять формулой (3) уравнения Гамильтона; ясно, что оно так же не будет содержать z, потому что конус направлений Монжа будет одним и тем же для всех точек с одинаковыми x и y. Следовательно, мы будем иметь:

$$p + h(x, y, q) = 0, \tag{13}$$

если исключим y' из $p = \varphi - y'\varphi_{y'}$, $q = \varphi_{y'}$ и для определения характеристик мы получим каноническую систему:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{14}$$

Но по прежнему результату можно также получить характеристики из уравнений (11). Второе из них дает $\lambda = \text{const}$, так что первое превращается в

$$\frac{d\varphi_{y'}}{dx} - \varphi_y = 0.$$

Это уравнение действительно является хорошо известным диференциальным уравнением нашей вариационной задачи, впервые выведенным Эйлером.

Экстремали можно определить, как характеристики уравнения (13), с помощью полного интеграла уравнения Гамильтона. Этот интеграл здесь может быть взят в виде

$$z = V(x, y, a) + b$$

и дает нам вместе с уравнением

$$V_a(x, y, a) = c \qquad \text{(ср. (6))}$$

искомые характеристики. Этот факт называют *теорией Гамильтона-Якоби* для случая простейшей вариационной задачи.

7. Покажем еще, что наши экстремали при надлежащих ограничениях действительно сообщают интегралу (12) экстремум.

Пусть

$$y = y(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

будет дугой экстремали. Если мы еще добавим функции

$$q(x) = \varphi_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$
$$p(x) = \varphi(x, y(x), y'(x)) - y'(x)\varphi_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$
$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

то $y(x)$, $q(x)$ будут удовлетворять канонической системе (14) и функции

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad p = p(x), \quad q = q(x)$$

будут изображать характеристическую полосу уравнения (13).

Предположим теперь:

а) что эта полоса лежит на некотором решении уравнения (13), которое регулярно в некоторой своей окрестности, т. е. при

$x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $|y - y(x)| < \delta$. Это условие, которое мы назовем условием Якоби, наверное выполнено, если x_1 достаточно близко к x_0, как это следует из построения решения уравнения (13) с помощью характеристик Коши;

b) что для всех x, y, y' дуги экстремали и для всех достаточно близких к ним значений функция $\varphi_{y'y'}$ имеет постоянный знак (например, положительный). Это условие называется условием Лежандра.

Пусть далее $z(x, y)$ интеграл уравнения (13), существующий по условию a). Через каждую из его точек проходит характеристика $dy : dx$, которую мы обозначим через $\eta'(x, y)$. Если теперь $Y(x)$ является кривой, которая связывает те же точки x_0, y_0 и x_1, y_1, как и наша экстремаль, и которая целиком содержится в области существования решения $z(x, y)$, то

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\,dx - z(x_1) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} [z_x(x, Y) + z_y(x, Y)\,Y']\,dx.$$

Но

$$z_x(x, Y) = p(x, Y) = (\varphi - y'\varphi_{y'})_{x, Y, \eta'(x, Y)},$$

$$z_y(x, Y) = q(x, Y) = \varphi_{y'}(x, Y, \eta'(x, Y))$$

и, пользуясь „$\mathcal{E}$-функцией“ Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y, y', \bar{y}') = \varphi(x, y, \bar{y}') - \varphi(x, y, y') - (\bar{y}' - y')\,\varphi_{y'}(x, y, y'),$$

можно вышеприведенный результат написать так:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E}(x, Y, \eta'(x, y), Y')\,dx.$$

Из этого „преобразования Вейерштрасса“ мы непосредственно видим, что наша экстремаль наверное не дает большего значения для интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi\,dx,$$

чем кривая $Y(x)$, коль скоро $\mathcal{E}$-функция все время остается $\geqslant 0$. Но так как по формуле Тэйлора

$$\mathcal{E}(x, y, y', \bar{y}') = \frac{1}{2}(\bar{y}' - y')^2 \varphi_{y'y'}(x, y, \tilde{y}'),$$

где $\tilde{y}'$ обозначает промежуточное значение между y' и $\bar{y}'$, то в силу условия b) $\mathcal{E}$-функция действительно будет $\geqslant 0$, если только $|Y - y|$ и $|Y' - y'|$ будут все время оставаться достаточно малыми. Этим уже доказано минимальное свойство в том объеме, который вариационное

исчисление называет „*слабым минимумом*“. Но можно видеть, что при замене условия b) надлежащим предположением об $\mathcal{E}$-функции, требование „$|Y-y|$ достаточно мало“ является уже достаточным (*сильный минимум*). Подробное рассмотрение этого вопроса см. в уже названных учебниках вариационного исчисления [1]).

§ 95. Соответствующие преобразования прикосновения.

8. В заключение мы еще произведем одно рассмотрение, которое свяжет предмет наших исследований с теорией *преобразований прикосновения* (§ 63, § 74).

Рассмотрим характеристические полосы диференциального уравнения с частными производными первого порядка:

$$p+h(x,\ y,\ z,\ q)=0; \tag{15}$$

как мы знаем (стр. 277), они определяются уравнениями:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial h}{\partial q},\quad \frac{dz}{dx}=q\frac{\partial h}{\partial q}-h,\quad \frac{dq}{dx}=-\frac{\partial h}{\partial y}-q\frac{\partial h}{\partial z}. \tag{16}$$

Если подобную полосу пересечь двумя плоскостями $x=\text{const}$, то *линейные элементы* $(y,\ z,\ q)$ обеих плоскостей будут отображены друг на друга некоторым определенным образом, потому что через всякий линейный элемент первой плоскости проходит определенная характеристическая полоса, которая пересекает вторую плоскость опять по некоторому линейному элементу. Это преобразование является *преобразованием прикосновения*, так как по Коши и Ли полосы, порожденные элементами кривой, лежащей в первой плоскости, образуют некоторую поверхность, которая пересечет вторую плоскость опять же по некоторой кривой.

Применим это рассмотрение в частности к двум *соседним* плоскостям $x=x_0$ и $x=x_0+\varepsilon$. Если ограничиться членами первого порядка относительно ε, то тогда получившееся „*бесконечно малое*“ преобразование прикосновения в силу уравнений (16) будет определяться формулами:

$$\bar{y}=y+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial q},\quad \bar{z}=z+\varepsilon\left(q\frac{\partial h}{\partial q}-h\right),\quad \bar{q}=q-\varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial y}+q\frac{\partial h}{\partial z}\right). \tag{17}$$

Легко показать, что таким образом можно получить самое общее бесконечно малое преобразование прикосновений, — результат, принадлежащий Ли, который в последующем нам не понадобится.

Для того чтобы составить себе геометрическое представление об этом бесконечно малом преобразовании прикосновения, спросим себя: во что обратятся линейные элементы $(y,\ z,\ q)$ какой-нибудь точки плоскости $x=x_0$? Разумеется они обратятся в линейные элементы некоторой кривой.

---

[1]) Связь с задачей Майера и диференциальными уравнениями с частными производными первого порядка установил впервые Кнезер D. M. V. Jahresbe richt, том 24, 1915.

По уравнениям (17) это будет та кривая плоскости $x = x_0 + \varepsilon$, которую опишет точка y, z, если при неизменных y и z изменять параметр q. Но в силу геометрического смысла уравнений (16), выражения

$$\frac{\partial h}{\partial q} = y', \quad q\frac{\partial h}{\partial q} - h = z'$$

дают как раз то из направлений конуса Монжа, вдоль которого элемент поверхности p, q касается конуса. Итак, мы получаем: *точка x_0, y, z переходит, в силу нашего бесконечно малого преобразования прикосновения, как раз в линию пересечения ее конуса Монжа с плоскостью $x = x_0 + \varepsilon$.*

Особенный интерес здесь представляет тот случай, когда h не зависит от x. Именно, тогда бесконечно малое преобразование прикосновения не зависит от специального значения x_0; в этом случае оно всегда одно и то же. В силу основных понятий теории групп Ли характеристические полосы нашего диференциального уравнения определяют *однопараметрическую группу* преобразований прикосновения, которая порождается бесконечно малым преобразованием (17).

Если применить эти рассмотрения к разобранной выше вариационной задаче, в которой ничто не зависело от переменного z, то (переменив роли z и x) можно сказать:

Вариационной задаче — сделать интеграл $\int \varphi\, dx$ экстремальным — соответствует определенное бесконечно малое преобразование прикосновения линейных элементов плоскости (x, y). Оно состоит в том, что элементы точки x, y переходят в линейные элементы кривой, которую мы получим, если пересечем конус Монжа точки $(x, y, 0)$ плоскостью $z = \varepsilon$.

Очевидно эта кривая определяется уравнением:

$$(\xi - x)\,\varphi\left(x,\ y,\ \frac{\eta - Y}{\xi - x}\right) = \varepsilon, \tag{18}$$

где ξ, η — текущие координаты. Оно является *направляющим уравнением* (§ 74) нашего бесконечно малого преобразования прикосновений. Удобнее вместо (18) рассматривать кривую

$$\xi\varphi\left(x,\ y,\ \frac{\eta}{\xi}\right) = 1, \tag{19}$$

из которой (18) получается посредством перенесения начала координат в точку x, y и изменения масштаба в отношении $\varepsilon : 1$. Кривая (19) введена в вариационное исчисление под названием *индикатрисы Каратеодори*; она позволяет весьма наглядно произвести многие рассмотрения вариационного исчисления, о чем см. упомянутые выше учебники.

9. Если, теперь, $z = W(x, y)$ является решением диференциального уравнения Гамильтона, соответствующего нашей вариационной задаче, то мы назовем кривые $W = \text{const}$ на плоскости x, y *системой геодезических параллельных кривых*. Порождающие это решение $z = W$ характеристики проектируются на плоскость x, y в качестве семейства экстремалей нашей вариационной задачи. Они определяются тем, что конус Монжа в точке (x, y, z) касается поверхности $z = W$ в напра-

влении их касательных. На основании геометрического смысла индикатрисы это можно сформулировать следующим образом: направление касательных, проходящих через точку (x, y) экстремалей, параллельно радиусу-вектору индикатрисы, который идет от начала координат к точке прикосновения той касательной, которая параллельна касательной, проходящей через точку x, y кривой $W = \text{const}$. Далее, по известным теоремам, через произвольно взятую кривую $W(x, y) = z = \text{const}$ проходит решение уравнения (15). Семейство кривых $W = \text{const}$ можно получить очень наглядным образом: так как в силу рассмотрения пункта 8 отдельные сечения поверхности $z = W$ с плоскостью $z = \text{const}$ переходят при нашем бесконечно малом преобразовании прикосновения друг в друга, то мы получим в первом приближении соседнюю к кривой $W = c$ кривую $W = c + \varepsilon$, если построим для каждой из ее точек индикатрису или, вернее, кривую (18) и найдем огибающую всех таких маленьких кривых. Это построение явно напоминает способ, которым в оптике с помощью принципа Гюйгенса строят для данной волновой поверхности соседнюю поверхность, как огибающую к элементарным волнам. Эта связь станет непосредственно ясной, если, исходя из принципа Ферма о „кратчайшем пути света", ввести световые лучи в среду с меняющейся от точки к точке скоростью света $v(x, y)$ в качестве экстремалей вариационной задачи с

$$\varphi(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)}.$$

Тогда (18) станет круговой элементарной волной и наше построение совпадает с конструкцией Гюйгенса; экстремали, т. е. световые лучи, будут ортогональными траекториями „волновых поверхностей" (или, точнее, кривых) $W = \text{const}$.

Здесь мы подошли к тем рассмотрениям геометрической оптики, которые послужили Гамильтону исходной точкой тех его исследований, вследствие которых его имя связывают с этим кругом идей. С другой стороны, уже Иоганн Бернулли воспользовался этой оптической аналогией для решения одной вариационной задачи, а в новейшее время этот старый метод был снова введен в вариационное исчисление математиком Каратеодори.

По этому поводу смотрите:

Whittaker, Analitische Dynamik, § 125 [1]).

Joh. Bernoulli; в Acta Eruditorum, 1697 (переиздано в „Ostwalds Klassiker", № 46).

C. Carathéodory; в Gött. Nachr., 1905 und Rendiconti, di Palermo, 1908.

C. Carathéodory, Variationsrechnung (в Die Differential und Integralgleichungen..., т. 1, стр. 170—212, Braunschweig 1925).

10. В заключение надо еще сказать о том, как далеко можно распространить эти рассмотрения на случай произвольного числа переменных. Надо отметить, что всякая так называемая неособенная задача

[1]) Русский перевод с английского: Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, М.—Л. 1937, § 125. *Прим. ред.*

Мейера вариационного исчисления[1]) приводит к уравнению Гамильтона, характеристики которого являются экстремалями задачи Мейера. Все сказанное о бесконечно малом преобразовании прикосновения переносится без изменений также на случай многих переменных. Иначе дело обстоит с свободным от интегралов решением Монжа уравнения (1). Для этого решения не всегда имеется соответствующий аналог, скорее таким образом разрешимые задачи можно рассматривать как простейший „класс" полуопределенных диференциальных уравнений (по этому поводу см. Hilbert, Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen (Weber — Testschrift, Leipzig 1912). Случаями подобной разрешимости занимался Гурса в работе, опубликованной в Bulletin de la soc. math. de France 1905 и, весьма обстоятельным образом, Гросс (W. Gross, в Math. Annalen, том 73 и 76). Здесь можно только в виде намека указать, что дело идет об изучении многообразий возврата решений *систем* диференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Было бы весьма желательно получить более *геометрически* наглядное изложение результатов Гросса.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ.

Уже в 1868 г. в своей диссертации Клейн пришел к вопросу о классификации пар квадратичных форм; для разрешения этого вопроса он мог воспользоваться теорией элементарных делителей, опубликованной в том же году Вейерштрассом в Monatsberichten der Berliner Akademie. В этих лекциях мы также наталкиваемся на относящиеся сюда вопросы, например, при классификации циклид Дарбу (§ 12). Геометры не очень любят общую теорию Вейерштрасса, так как ввиду небольшого числа и простоты тех фактов, которыми пользуются из нее для геометрии, нельзя отделаться от впечагления, что будто здесь происходит стрельба из пушек по воробьям. Поэтому мы сейчас приведем простые доказательства важнейших теорем на основе мыслей, восходящих к Г. Вейлю и проведенных О. Шрейером.

§ 96. Линейные подстановки и исчисление матриц.

Переход от одной системы переменных $x_1, \ldots, x_n$ к другой системе $y_1, \ldots, y_n$ с помощью уравнений

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, h) \quad (\alpha)$$

называется *линейной подстановкой*. Подстановка однозначно определяется n^2 коэфициентами a_{ik}, и обратно, две подстановки только тогда дают те же системы значений y_i, для каждой определенной системы значений x_i, когда их коэфициенты по отдельности совпадают. Квадратная таблица из этих n^2 коэфициентов называется матрицей под-

[1]) Выражение *неособенный* в случае n переменных означает исключение таких задач, при которых касательные плоскости конуса Монжа зависят менее чем от $n-2$ параметров. В выше рассмотренном случае $n=3$, следовательно, как раз надо исключить линейные (пфаффовы) уравнения.

становки и обозначается коротко $(a_{ik}) = A$; при этом i обозначает номер строки, k — номер столбца элемента a_{ik}. В символической форме мы будем записывать нашу подстановку в виде $y = A(x)$. Если, далее, мы перейдем от переменных y_i к новым переменным z_i с помощью линейной подстановки

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или короче $z = B(y)$, то очевидно, что переменные z будут связаны с переменными x так же посредством линейной подстановки:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} a_{\nu k}\right) x_k.$$

Матрица этой подстановки называется *произведением* обеих матриц B и A и обозначается BA; если обозначить ее элементы через c_{ik}, то значит $c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} a_{\nu k}$, т. е. элемент i-той строки и k-того столбца матрицы-произведения получается посредством „компонирования“ i-той строки первого множителя на k-тый столбец второго множителя. Нетрудно видеть, что для определенного нами перемножения матриц имеет место ассоциативный закон

$$(AB)\,C = A\,(BC),$$

в силу чего произведение нескольких матриц имеет определенный смысл также и без расстановки скобок; только при этом всегда следует принимать во внимание порядок множителей, потому что, вообще говоря, $AB \neq BA$. Определитель $|a_{ik}|$ мы будем обозначать также через $|A|$. Из определения произведения матриц и из теоремы об умножении определителей непосредственно следует, что:

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \qquad (\beta)$$

В частности, мы можем образовать матрицу, получающуюся при повторном перемножении матрицы A самой на себя. Эти матрицы мы будем коротко обозначать A, A^2, A^3, ..., A^ν, ...; в этом специальном случае имеет место $A^\mu A^\nu = A^\nu A^\mu = A^{\mu+\nu}$.

Особую роль играет матрица, соответствующая тождественной подстановке $y_i = x_i$. Обозначим ее через E, а ее элементы — через δ_{ik} ($\delta_{ik} = 1$, если $i = k$, и $\delta_{ik} = 0$, если $i \neq k$). Для всякой матрицы A имеет место

$$EA = A = AE.$$

Поэтому матрицу E называют *единичной матрицей*.

Если $|a_{ik}| \neq 0$, то подстановка (α) называется неособенной в противном случае она называется особенной. В первом случае уравнения (α) могут быть разрешены относительно x_i; тогда переменные x будут получаться из переменных y также с помощью некоторой

линейной подстановки. Обозначим матрицу соответствующей подстановки через A^{-1}. Имеет место

$$AA^{-1}=E, \quad A^{-1}A=E$$

и притом матрица A^{-1} характеризуется каждым из этих уравнений.

В силу (β) произведение неособенных матриц является также неособенной матрицей. Следовательно, если A и B неособенные матрицы, то можно образовать $(AB)^{-1}$. При этом имеем: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, потому что $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=E$.

Наряду с умножением матриц рассматривают также их *сложение* и *умножение их на числовой множитель*. Под матрицей $A+B$ мы понимаем матрицу с элементами $a_{ik}+b_{ik}$; под матрицей $\lambda A=A\lambda$ понимают матрицу с элементами λa_{ik}. Имеют место следующие правила для производства выкладок:

$$A+B=B+A,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

$$(A+B)C=AC+BC; \quad A(B+C)=AB+AC;$$

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A); \quad \lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B),$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B; \quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$$

Если в матрице $A=(a_{ik})$ все элементы с неравными индексами равны нулю, то матрица A называется *диагональной матрицей*.

§ 97. Геометрическое истолкование линейных подстановок.

Среди многих геометрических истолкований, которые допускают формулы (α), для дальнейшего целесообразно рассмотреть следующие истолкования.

Пусть в линейном векторном пространстве n измерений взяты две координатные системы, т. е. две системы, из которых каждая состоит из n линейно-независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут компонентами некоторого вектора $\mathfrak{x}$ относительно первой системы координат, а $x_1^*, \ldots, x_n^*$ — его компоненты относительно второй системы координат; следовательно

$$\mathfrak{x}=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{k=1}^{n}x_k^*e_k^*.$$

Но обязательно имеют место соотношения вида

$$e_k^*=\sum_{i=1}^{n}t_{ik}e_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

и притом, в силу линейной независимости векторов e_k^*, определитель $|t_{ik}|\neq 0$. После подстановки получаем:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k^*,$$

т. е. компоненты произвольного вектора относительно двух координатных систем связаны посредством неособенной линейной подстановки. Обратно, если задана неособенная подстановка

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k^*$$

и если x_i являются компонентами некоторого вектора относительно координатной системы $\{e_i\}$, то x_k^* будут его компонентами относительно координатной системы:

$$\left\{ e_k^* = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\, e_i \right\}.$$

Другое истолкование (применимое так же и к особым подстановкам) мы получим следующим образом. Пусть опять x_i будут компонентами произвольного вектора $\mathfrak{x}$ относительно координатной системы $\{e_i\}$. Равным образом будем рассматривать y_i в уравнениях (α) как компоненты некоторого вектора $\mathfrak{y}$ в той же координатной системе. Тогда уравнения (α) выражают, что каждому вектору $\mathfrak{x}$ поставлен однозначно в соответствие некоторый вектор $\mathfrak{y}$. Обозначим этот вектор через $\mathbf{A}(\mathfrak{x})$. Имеем: $\mathbf{A}(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) = \mathbf{A}(\mathfrak{x}_1) + \mathbf{A}(\mathfrak{x}_2)$ и $\mathbf{A}(\lambda\mathfrak{x}) = \lambda\mathbf{A}(\mathfrak{x})$. Обратно, если $\{\mathfrak{x} \to \mathbf{A}(\mathfrak{x})\}$ отображение, обладающее обоими этими свойствами, то компоненты вектора $\mathbf{A}(\mathfrak{x})$ относительно какой-нибудь координатной системы $\{e_i\}$ выражаются линейно через компоненты вектора $\mathfrak{x}$, потому что, если положим

$$\mathbf{A}(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

то получим:

$$\mathbf{A}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right) e_i,$$

что и утверждалось. Подобное отображение $\mathbf{A}$ векторов какого-нибудь пространства называется линейным преобразованием; $A = (a_{ik})$ называется его матрицей в отношении координатной системы $\{e_i\}$.

Выясним теперь, каким образом связаны между собой матрицы некоторого линейного преобразования $\mathbf{A}$ относительно двух различных координатных систем $\{e_i\}$ и $\{e_i^*\}$. Пусть, следовательно,

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

и

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i^* e_i^*,$$

причем

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad \text{и} \quad y_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* x_k^*.$$

Далее, пусть

$$e_k^* = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i,$$

следовательно:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k^* \quad \text{и} \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} y_k^*.$$

Тогда мы имеем в символическом способе записи § 98, с одной стороны,

$$y = A(x) = A(T(x^*)) = AT(x^*),$$

с другой —

$$y = T(y^*) = T(A^*(x^*)) = TA^*(x^*);$$

следовательно

$$AT = TA^* \quad \text{или} \quad A^* = T^{-1}AT.$$

Это положение вещей выражают еще так: *матрица A^* получается из матрицы A путем „трансформации" с помощью (неособенной) матрицы T.* Всякая матрица, которая может быть получена таким путем из матрицы A, называется *эквивалентной A.*

§ 98. Нормальная форма линейных преобразований [1]).

Попытаемся теперь при заданном линейном преобразовании A выбрать координатную систему таким образом, чтобы соответствующая матрица приняла как можно более простой вид. Для этого нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

Характеристическим многочленом матрицы A называют многочлен $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$. Характеристический многочлен не меняется при переходе от матрицы A к эквивалентной ей матрице. Действительно:

$$\lambda E - T^{-1}AT = T^{-1}\lambda ET - T^{-1}AT = T^{-1}(\lambda E - A)T,$$

следовательно:

$$|\lambda E - T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |T| = |\lambda E - A| \cdot |T^{-1}| \cdot |T| = |\lambda E - A| \cdot |T^{-1}T| = |\lambda E - A|.$$

Поэтому имеет смысл ввести следующее определение: *характеристическим многочленом линейного преобразования называется характеристический многочлен его матрицы относительно произвольной системы координат.*

Если линейное пространство $\mathfrak{L}_1$ рассматриваемого пространства $\mathfrak{L}$ обладает тем свойством, что наряду со всяким своим вектором $\mathfrak{x}$ оно содержит также и вектор $A(\mathfrak{x})$, то мы говорим: $\mathfrak{L}_1$ *инвариантно* относительно линейного преобразования A. В этом случае A индуцирует в $\mathfrak{L}_1$ некоторое линейное преобразование. Если мы выберем теперь координатную систему $\{e_1\}$ в $\mathfrak{L}$ таким образом, чтобы $\{e_1, \ldots, e_p\}$

[1]) Содержание этого отдела в существенном заимствовано из книги Вейля: H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, стр. 88 и след. Berlin, 1923.

образовывала некоторую координатную систему в $\mathfrak{L}_1$ и обозначим матрицу преобразования $\mathbf{A}$ относительно этой координатной системы через $A=(a_{ik})$, то будем иметь: $a_{ik}=0$, для $k\leqslant p\leqslant i$, а для $i, k=1, 2, \ldots, p$ элементы a_{ik} равны элементам матрицы индуцированного в $\mathfrak{L}_1$ преобразования относительно координатной системы $\{e_1, \ldots, e_p\}$.

Если кроме $\mathfrak{L}_1$ существует еще второе подпространство $\mathfrak{L}_2$, инвариантное относительно $\mathbf{A}$ и такое, что $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ не имеют общих векторов, а вместе порождают все пространство $\mathfrak{L}$, и если, далее, $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ линейные преобразования, индуцированные отображением $\mathbf{A}$ в подпространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то характеристический многочлен преобразования $\mathbf{A}$ равняется произведению характеристических многочленов преобразований $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Это получается непосредственно из сказанного выше с помощью простого применения теоремы Лапласа о разложении определителей.

Для тех векторов, которые пропорциональны своим векторам-образам, мы получаем условие:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=\lambda x_i$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda\delta_{ik}-a_{ik})\,x_k=0. \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Но для того чтобы эта система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя, т. е. *тогда и только тогда существует не равный нулю вектор* $\mathfrak{x}_0$, *для которого* $\mathbf{A}(\mathfrak{x}_0)=\lambda_0\mathfrak{x}_0$, *когда* λ_0 *является нулем характеристического многочлена преобразования* $\mathbf{A}$.

Пусть $f(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\ldots+c_r\lambda^r$—некоторый многочлен от одного переменного λ. Тогда под $f(A)$ (где A произвольная матрица) мы понимаем матрицу $c_0E+c_1A+c_2A^2+\ldots+c_rA^r$ и равным образом под $f(\mathbf{A})$ (где $\mathbf{A}$ произвольное линейное преобразование) линейное преобразование $\{\mathfrak{x}\to c_0\mathfrak{x}+c_1\mathbf{A}(\mathfrak{x})+c_2\mathbf{A}^2(\mathfrak{x})+\ldots+c_r\mathbf{A}^r(\mathfrak{x})\}$, причем $\mathbf{A}^\nu(\mathfrak{x})$ определяется рекурентно посредством соотношения $\mathbf{A}^\nu(\mathfrak{x})=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\nu-1}(\mathfrak{x}))$. Если A является матрицей преобразования $\mathbf{A}$ относительно некоторой определенной системы координат, то $f(A)$ является матрицей преобразования $f(\mathbf{A})$ относительно той же системы. Имеет место следующая важная теорема: *если* $\mathbf{A}$ *некоторое линейное преобразование и* $\varphi(\lambda)$ *его характеристический многочлен, то* $\varphi(\mathbf{A})$ *будет линейным преобразованием, ставящим каждому вектору в соответствие нулевой вектор.*

Для доказательства, очевидно, достаточно показать следующее: если A некоторая матрица и $\varphi(\lambda)$ ее характеристический многочлен, то $\varphi(A)$ будет нуль-матрицей, т. е. матрицей, все элементы которой равны нулю (Теорема Гамильтона-Кели). Но это можно установить следующим образом. Пусть

$$b_{ik}(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{ik}^{(\nu)}\lambda^\nu$$

будет алгебраическим дополнением элемента $\lambda\delta_{ki} - a_{ki}$ в определителе $|\lambda\delta_{ik} - a_{ik}|$; далее введем обозначение:

$$B(\lambda) = (b_{ik}(\lambda)) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (b_{ik}^{(\nu)}) \lambda^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} B^{(\nu)} \lambda^\nu.$$

Тогда

$$B(\lambda)(\lambda E - A) = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu}(\lambda)(\delta_{\nu k}\lambda - a_{\nu k})\Big) = \delta_{ik}\varphi(\lambda);$$

следовательно, $B(\lambda)(\lambda E - A) = \varphi(\lambda) E$. Это тождество относительно λ. Чтобы выражения, стоящие слева и справа, привести к виду

$$\sum_{\nu=0}^{n} c^{(\nu)} \lambda^\nu,$$

нам потребуется только дистрибутивный (распределительный) закон и равенства $\lambda E = E\lambda$, $\lambda A = A\lambda$. Но умножения матриц дистрибутивно и имеют равенства $AE = EA$, $AA = AA$; следовательно, в нашем тождестве можно заменить λ через A; тогда получим $\varphi(A) = (0)$.

Теперь можно доказать основную для всего последующего теорему

Теорема *A. Если* A *некоторое линейное преобразование в* $\mathfrak{L}$, $\varphi(\lambda)$ — *его характеристический многочлен и* $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$ *разложение* $\varphi(\lambda)$ *на два не имеющих общих множителей многочлена со старшими коэфициентами 1, то тогда однозначно определяются два линейных подпространства* $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, *обладающих следующими свойствами*: $\mathfrak{L}_1$ *и* $\mathfrak{L}_2$ *инвариантны относительно* A; $\mathfrak{L}_1$ *и* $\mathfrak{L}_2$ *не имеют общих векторов и вместе порождают все пространство* $\mathfrak{L}$, *причем* $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ *являются характеристическими многочленами линейных преобразований, индуцированных преобразованием* A *в пространствах* $\mathfrak{L}_1$ *и* $\mathfrak{L}_2$.

В силу теоремы Гамильтона-Кели речь идет лишь о тех векторах из пространства $\mathfrak{L}_1$, которые удовлетворяют уравнению $\varphi_1(A)(\mathfrak{x}) = 0$. Поэтому мы требуем: пусть $\mathfrak{L}_i$ будет совокупность векторов $\mathfrak{x}_i$, удовлетворяющих уравнению $\varphi_i(A)(\mathfrak{x}_i) = 0$, $(i = 1, 2)$. Тогда непосредственно ясно, что $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ являются линейными пространствами, которые, сверх того, инвариантны относительно A. Так как $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ не имеют общих множителей, то можно определить два многочлена $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$ таким образом, что $\varphi_2(\lambda)\psi_1(\lambda) + \varphi_1(\lambda)\psi_2(\lambda) \equiv 1$, следовательно так же $\varphi_2(A)\psi_1(A)(\mathfrak{x}) + \varphi_1(A)\psi_2(A)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ (для всякого вектора $\mathfrak{x}$). Но по теореме Гамильтона-Кели

$$\varphi_1(A)(\varphi_2(A)\psi_1(A)(\mathfrak{x})) = \varphi(A)(\psi_1(A)(\mathfrak{x})) = 0$$

и

$$\varphi_2(A)(\varphi_1(A)\psi_2(A)(\mathfrak{x})) = \varphi(A)(\psi_2(A)(\mathfrak{x})) = 0.$$

Следовательно, всякий вектор $\mathfrak{x}$ может быть представлен в виде суммы некоторого вектора из $\mathfrak{L}_1$ и некоторого вектора из $\mathfrak{L}_2$; $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ *порождают все пространство* $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{x}$ общий вектор $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то $\mathfrak{x} = \psi_1(A)\varphi_2(A)(\mathfrak{x}) + \psi_2(A)\varphi_1(A)(\mathfrak{x}) = 0$, следовательно $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ *не имеют общих векторов*. Если, вследствие этого, мы обозначим через $\chi_1(\lambda)$, $\chi_2(\lambda)$ характеристические многочлены линейных преобразований, инду-

цированных преобразованием $\mathbf{A}$ в пространствах $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то имеет место $\varphi(\lambda) = \chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)$. (Для того случая, когда одно из подпространств сводится к нулевому вектору, рассматриваемый характеристический многочлен следует положить равным 1.) Пусть теперь λ_0 произвольный корень $\chi_1(\lambda)$. Положим $\varphi_1(\lambda) = \overline{\varphi}_1(\lambda)(\lambda - \lambda_0) + \varphi_1(\lambda_0)$.

Пусть, далее, $\mathfrak{x}_0$ неравный нулю вектор из $\mathfrak{L}_1$, удовлетворяющий уравнению $(\mathbf{A} - \lambda_0)(\mathfrak{x}_0) = 0$. (На основании выше сказанного подобный вектор всегда существует.) Тогда:

$$\varphi_1(\mathbf{A})(\mathfrak{x}_0) = \overline{\varphi}_1(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_0)(\mathfrak{x}_0) + \varphi_1(\lambda_0)\mathfrak{x}_0.$$

В этом равенстве вектор, стоящий в левой части, равен нулю (так как $\mathfrak{x}_0$ принадлежит к $\mathfrak{L}_1$), так же, как и первое слагаемое правой части (по построению $\mathfrak{x}_0$); следовательно, также $\varphi_1(\lambda_0)\mathfrak{x}_0 = 0$ или, в силу $\mathfrak{x} \neq 0$, $\varphi_1(\lambda_0) = 0$. Поэтому $\chi_1(\lambda)$ не имеет общих множителей с $\varphi_2(\lambda)$ и, следовательно, является делителем многочлена $\varphi_1(\lambda)$. Аналогичным образом доказывается, что $\chi_2(\lambda)$ является делителем многочлена $\varphi_2(\lambda)$. Но так как старшие коэфициенты многочленов $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ равны единице, то отсюда следует, что: $\chi_1(\lambda) \equiv \varphi_1(\lambda)$, $\chi_2(\lambda) \equiv \varphi_2(\lambda)$. Этим и заканчивается доказательство теоремы *A* [1]).

Посредством повторных применений теоремы *A* получаем следующую теорему:

Теорема *B*. *Пусть* $\mathbf{A}$ *линейное преобразование пространства* $\mathfrak{L}$ *и*

$$\varphi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

его характеристический многочлен ($\lambda_h \neq \lambda_j$ *при* $h \neq j$); *тогда существует одно и только одно „расщепление" пространства* $\mathfrak{L}$ *на* r *подпространств* $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_r$, *обладающее следующим свойством:* $\mathfrak{L}_h$ *инвариантно относительно* $\mathbf{A}$ *и* $(\lambda - \lambda_h)^{n_h}$ *является характеристическим многочленом преобразования пространства* $\mathfrak{L}_h$, *индуцированного преобразованием* $\mathbf{A}$; ($h = 1, 2, \ldots, r$).

Если мы выберем систему координат $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства $\mathfrak{L}$ таким образом, чтобы вектора $e_1, \ldots, e_{n_1}$ принадлежали к $\mathfrak{L}_1$, вектора $e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}$ к $\mathfrak{L}_2$ и т. д., то матрица преобразования $\mathbf{A}$ относительно этой системы координат примет вид:

$$\begin{Vmatrix}
a_{11} \ldots a_{1n_1} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n_1 1} \ldots a_{n_1 n_1} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots \\
0 \ldots 0 & a_{n_1+1,\,n_1+1} \ldots a_{n_1+1,\,n_1+n_2} & 0 \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
0 \ldots 0 & a_{n_1+n_2,\,n_1+1} \ldots a_{n_1+n_2,\,n_1+n_2} & 0 \ldots \\
0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & a_{n_1+n_2+1,\,n_1+n_2+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{Vmatrix}$$

[1]) Утверждаемая в теореме однозначность непосредственно вытекает из доказательства.

Для многих целей существенно приводить далее к более простому виду те подматрицы, на которые распалась матрица A нашего преобразования после введения векторов $e_1, \ldots, e_n$. Сделаем это, например, для матрицы $A_1 = (a_{ik})$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n_1)$. Вектора пространства $\mathfrak{L}_1$ определяются равенством $(A - \lambda_1)^{n_1}(\xi) = 0$. Пусть m наименьшее число такого рода, что для всех векторов ξ пространства $\mathfrak{L}_1$ удовлетворяется уравнение $(A - \lambda_1)^m(\xi) = 0$. Пусть $\mathfrak{L}_1^{(j)}$ будет линейным подпространством пространства $\mathfrak{L}_1$, которое определяется равенством $(A - \lambda_1)^j(\xi) = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Очевидно, $\mathfrak{L}_1^{(j)}$ является подпространством $\mathfrak{L}_1^{(j+1)}$. Пусть размерности этих пространств будут: p_1, $p_1 + p_2^1$, $\ldots$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n_1$. Число p_m заведомо больше нуля, потому что в противном случае $\mathfrak{L}_1^{(m-1)} = \mathfrak{L}_1^{(m)} = \mathfrak{L}_1$, что противоречит определению m. Выберем теперь векторы $e_1^{(1)}, \ldots, e_{p_m}^{(1)}$ таким образом, чтобы они вместе с $\mathfrak{L}_1^{(m-1)}$ порождали все пространство $\mathfrak{L}_1$, и положим: $A(e_i^{(1)}) = \lambda_1 e_i^{(1)} + e_i^{(2)}$. Векторы $e_i^{(2)}$ принадлежат пространству $\mathfrak{L}_1^{(m-1)}$, потому что

$$(A - \lambda_1)^{m-1}(e_i^{(2)}) = (A - \lambda_1)^m(e_i^{(1)}) = 0;$$

далее, они линейно независимы между собой и от векторов пространства $\mathfrak{L}_1^{(m-2)}$, так как из

$$(A - \lambda_1)^{m-2}(c_1 e_1^{(2)} + \ldots + c_{p_m} e_{p_m}^{(2)}) = 0$$

следует:

$$(A - \lambda_1)^{m-1}(c_1 e_1^{(1)} + \ldots + c_{p_m} e_{p_m}^{(1)}) = 0;$$

значит $c_1 e_1^{(1)} + \ldots + c_{p_m} e_{p_m}^{(1)}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_1^{(m-1)}$, что по определению векторов $e_i^{(1)}$ возможно только тогда, когда все c_i равны нулю. Поэтому $p_{m-1} \geqslant p_m$. Если $p_{m-1} > p_m$, то мы выбираем $p_{m-1} - p_m$ векторов $e_{p_m+1}^{(2)}, \ldots, e_{p_{m-1}}^{(2)}$, которые вместе с $\mathfrak{L}_1^{(m-2)}$ и векторами $e_1^{(2)}, \ldots, e_{p_m}^{(2)}$ порождают все пространство $\mathfrak{L}_1^{(m-1)}$. Таким же образом мы поступаем и дальше, т. е. мы полагаем

$$A(e_i^{(2)}) = \lambda_1 e_i^{(2)} + e_i^{(3)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p_{m-1})$$

и доказываем, что векторы $e_i^{(3)}$ принадлежат к пространству $\mathfrak{L}_i^{(m-2)}$ и линейно независимы как между собой, так и от векторов пространства $\mathfrak{L}_i^{(m-3)}$. В случае $p_{m-2} > p_{m-1}$ мы опять присоединяем к векторам $e_i^{(3)}$ еще $p_{m-2} - p_{m-1}$ векторов $e_{p_{m-1}+1}^{(3)}, \ldots, e_{p_{m-2}}^{(3)}$, которые вместе с $\mathfrak{L}_1^{(m-3)}$ и векторами $e_1^{(3)}, \ldots, e_{p_{m-1}}^{(3)}$ порождают все простран-

ство $\mathfrak{L}_1^{(m-2)}$. В конце концов мы получаем систему координат пространства $\mathfrak{L}_1$, состоящую из векторов $e_i^{(k)}$, $(k=1, 2, \ldots, m;$ $i=1, 2, \ldots, p_{m-k+1})$. Преобразование A теперь гласит:

$$\mathbf{A}(e_i^{(k)}) = \lambda_1 e_i^{(k)} + e_i^{(k+1)}, \qquad (k=1, 2, \ldots, m-1)$$
$$\mathbf{A}(e_i^{(m)}) = \lambda_1 e_i^{(m)}.$$

Следовательно, если мы положим

$$e_i^{(k)} = e^*_{(i-1)m+k}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant p_m),$$
$$e_i^{(k)} = e^*_{p_m m+(i-p_m-1)(m-1)+k-1}, \qquad (p_m+1 \leqslant i \leqslant p_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то матрица A_1, после введения координатной системы $\{e_i^*\}$, распадается на подматрицы вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda, & 1, & 0 \ldots 0 \\ 0, & \lambda, & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0 \ldots \lambda \end{Vmatrix}$$

и притом будет иметься p_m матриц m-строчных, $(p_{m-1}-p_m)$ матриц $(m-1)$-строчных, ..., (p_1-p_2) матриц-однострочных. Этим действительно матрица A_1 приведена к однозначной определенной нормальной форме.

Если матрица при преобразовании A является действительной в первоначальной системе координат и все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ действительны, то сам вывод нормальной формы непосредственно показывает, что переход к системе координат $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ может быть осуществлен посредством действительной подстановки [1]).

Особую важность представляет тот случай, когда матрица преобразования A в надлежаще выбранной системе координат сводится к диагональной матрице. Пусть, следовательно, A будет подобным преобразованием и $(a_i \delta_{ik})$ его матрица в известной системе координат. Тогда для характеристического полинома A мы получаем выражение: $\varphi(\lambda) \equiv (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_n)$. Таким образом, числа a_i с точностью до порядка совпадают с числами λ_k (считаемыми с надлежащей кратностью). Вследствие этого все векторы нашего подпространства $\mathfrak{L}_k$ удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{A} - \lambda_k)(\mathfrak{x}) = 0.$$

Если же, наоборот, это условие выполнено, то на основании вышеприведенного вывода нормальная форма матрицы сводится к некоторой диагональной матрице. Посредством легкого видоизменения только что полученного условия мы приходим к следующей теореме:

[1]) Легко также и в случае комплексных корней дать такие нормальные формы, которые могут быть получены на действительном пути.

Теорема *C. Для того чтобы линейное преобразование* **A** *могло быть представлено посредством диагональной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы* $\chi(A) = 0$, *где* A *обозначает матрицу преобразования* **A** *в какой-нибудь системе координат, а* $\chi(\lambda)$ *обозначает тот многочлен, который всякий корень характеристического многочлена преобразования* **A** *имеет в качестве простого корня и имеет только эти корни. Переход к диагональной форме при действительной исходной матрице может быть осуществлен посредством действительных подстановок тогда и только тогда, когда все корни многочлена* $\chi(\lambda)$ *действительны.*

§ 99. Пары квадратичных форм.

Применим теперь теоремы о линейных преобразованиях к одной задаче из теории квадратичных форм.

Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} x_i x_k \qquad (f_{ik} = f_{ki})$$

некоторая квадратичная форма в n переменных. Рассмотрим одновременно с ней билинейную форму (полярная форма):

$$\sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} x_i y_k = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} y_i x_k.$$

Будем рассматривать x_i и y_i опять как компоненты двух произвольных векторов $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ n-мерного линейного векторного пространства относительно координатной системы $\{e_i\}$. Положим:

$$\boldsymbol{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} x_i y_k.$$

$F = (f_{ik})$ называется матрицей квадратичной формы. Для коэфициентов мы получаем выражения: $f_{ik} = \boldsymbol{f}(e_i, e_k)$. Исследуем, прежде всего, как меняется матрица F при введении новых координат. Если мы положим $x = T(x^*)$ и $y = T(y^*)$, где T обозначает неособенную матрицу, то получим:

$$\boldsymbol{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k,\mu,\nu=1}^{n} f_{\mu\nu} t_{\mu i} x_i^* t_{\nu k} x_k^* = \sum_{i,k=1}^{n} \Big(\sum_{\mu,\nu=1}^{n} t_{\mu i} f_{\mu\nu} t_{\nu k} \Big) x_i^* x_k^*.$$

Следовательно,

$$f_{ik}^* = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} t_{\mu i} f_{\mu\nu} t_{\nu k} = f_{ki}^*$$

или, если обозначить через $\widetilde{T}$ „*транспонированную матрицу*“, возникающую из T посредством зеркального отображения относительно главной диагонали, $F^* = \widetilde{T} F T$.

Посредством подобного преобразования всегда можно добиться (это обычно доказывается методом математической индукции), чтобы в преобразованной форме фигурировали только квадратичные члены, т. е. чтобы $f_{ik}^* = 0$ $(i \neq k)$ и при этом, если ограничиться действительными формами и действительными преобразованиями, число положительных, отрицательных и равных нулю чисел среди f_{ii}^* не будет зависеть от того, каким именно образом мы производим приведение к нормальному виду. (*Закон инерции квадратичных форм.*)

Для дальнейшего особую роль играют те векторы $\mathfrak{x}$, для которых $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ тождественно обращается в нуль в $\mathfrak{y}$. Для их компонент мы получаем уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik} x_k = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Следовательно, если под F мы будем понимать то линейное преобразование, матрица которого относительно координатной системы $\{e_i\}$ совпадает с матрицей F квадратичной формы, то наши векторы будут охарактеризованы уравнением $F(\mathfrak{x}) = 0$. Если только нулевой вектор удовлетворяет этому уравнению, то форма называется невырождающейся, в противном же случае вырождающейся. Для того, чтобы форма f была вырождающейся, необходимо и достаточно, чтобы $F = 0$.

Задача, которой нам предстоит заняться, заключается в следующем: *пусть даны две квадратичные формы*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} x_i x_k, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k.$$

Требуется отыскать координатную систему, в которой обе формы приняли бы простой вид, и в частности выяснить, существует ли такая система координат, в которой обе формы сводятся к сумме чисто квадратичных членов. При этом мы всегда будем предполагать, что вторая форма является невырождающейся.

Пусть $F = (f_{ik})$, $G = (g_{ik})$. Рассмотрим затем линейное преобразование A, матрица которого относительно первоначальной системы координат дается равенством $A = G^{-1}F$ [1]). Если мы введем новые координаты с помощью уравнения $x = T(x^*)$, то $A^* = T^{-1}AT$ будет матрицей преобразования A относительно новой системы координат; наши же формы будут иметь в новых координатах матрицы: $F^* = \widetilde{T}FT$, $G^* = \widetilde{T}GT$. Следовательно, $A^* = G^{*-1}F^*$, т. е. линейное преобразование A, не зависит от того, из какой системы координат мы исходим. Пусть, далее, $\varphi(\lambda)$—характеристический многочлен преобразования A; докажем, что исследование всегда можно свести к тому случаю, когда $\varphi(\lambda)$ является степенью линейного множителя. В противном случае мы разложим $\varphi(\lambda)$, как это делалось выше, на два множителя

[1]) Этим преобразованием пользуется также Ковалевский (G. Kowalewski) Leipz. Ber. 1917, стр. 333.

без общих делителей со старшими единичными коэфициентами: $\varphi(\lambda) \equiv \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$. Тогда однозначно определяются два инвариантные относительно A подпространства $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, обладающие свойствами теоремы *A*. И при этом компоненты векторов подпространства $\mathfrak{L}_i$ даются уравнением $\varphi_i(G^{-1}F)(x) = 0$. Опять мы определяем многочлены $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ таким образом, чтобы $\psi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) + \psi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda) \equiv 1$. Тогда имеем

$$E = \psi_1(G^{-1}F)\varphi_2(G'F) + \psi_2(G^{-1}F)\varphi_1(G^{-1}F)$$

и следовательно:

$$F = F\psi_1(G^{-1}F)\varphi_2(G'F) + F\psi_2(G^{-1}F)\varphi_1(G^{-1}F) = F_1 + F_2,$$
$$G = G\psi_1(G^{-1}F)\varphi_2(G^{-1}F) + G\psi_2(G^{-1}F)\varphi_1(G^{-1}F) = G_1 + G_2.$$

F_1, F_2, G_1, G_2 являются симметричными матрицами, потому что они линейно вырождаются через матрицы вида $FG^{-1}F \ldots FG^{-1}F$, а эти последние очевидно симметричны. Этому разложению F и G соответствует разложение соответствующих форм на два слагаемых:

$$\boldsymbol{f}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \boldsymbol{f}_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \boldsymbol{f}_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad f \equiv f_1 + f_2,$$
$$\boldsymbol{g}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \boldsymbol{g}_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \boldsymbol{g}_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad g \equiv g_1 + g_2.$$

Теперь легко видеть, что f_1 и g_1 тождественно исчезают в $\mathfrak{y}$, если в качестве $\mathfrak{x}$ взять вектор из $\mathfrak{L}_2$. (Аналогичное обстоятельство имеет место для f_2 и g_2.) Векторы, обладающие этим свойством в первоначальной системе координат, определяются соответственно уравнениями $F_1(x) = 0$, соответственно $G_1(x) = 0$, а это в силу $F_1 = F\psi_1 = (G^{-1}F)\varphi_2(G^{-1}E)$, соответственно $G_1 = G\psi_1(G^{-1}F)\varphi_2(G^{-1}F)$, выполняется для векторов подпространства $\mathfrak{L}_2$. Вследствие этого, если мы возьмем систему координат таким образом, чтобы векторы $e_1^*, \ldots, e_p^*$ порождали все пространство $\mathfrak{L}_1$, $e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*$ порождали все пространство $\mathfrak{L}_2$, то f_1 и g_1 будут зависеть только от переменных $x_1^*, \ldots, x_p^*$, а f_2 и g_2 будут зависеть только от остальных переменных. Если, далее, F_i^*, G_i^* матрицы таким образом возникающих из f_i и g_i форм в p, соответственно в $(n-p)$, переменных, то $\varphi_i(\lambda)$ будет характеристическим многочленом матрицы $G_i^{*-1}F_i^*$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные корни многочлена

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}.$$

Тогда путем повторного применения наших рассуждений мы приходим к следующему результату: можно ввести новые координаты $x_1^*, \ldots, x_n^*$ таким образом, чтобы каждая из двух форм f и g распалась на сумму r форм: $f \equiv f_1 + f_2 + \ldots + f_r$, $g \equiv g_1 + g_2 + \ldots + g_r$, где f_1 и g_1 содержат только переменные $x_1^*, \ldots, x_{n_1}^*$, f_2 и g_2 содержат только переменные $x_{n_1+1}^*, \ldots, x_{n_1+n_2}^*$ и т. д., и чтобы, если F_h^*, G_h^* обозначают матрицы этих форм только от n_h переменных, выражение $(\lambda - \lambda_h)^{n_h}$

было характеристическим многочленом матрицы $G_h^{*-1} F_h^k$. Если, в частности, f и g — действительные формы и все корни многочлена $\varphi(\lambda)$ действительны, то это преобразование координат выполнимо в действительной области.

Теперь без всяких затруднений можно найти условие того, что обе формы f и g в некоторой, надлежащим образом выбранной, системе координат одновременно сводятся к сумме чисто квадратичных членов. Именно, пусть $\{\hat{e}_i\}$ — такая система координат, что

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i \hat{x}_i \hat{y}_i.$$

и

$$g(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_i \hat{x}_i \hat{y}_i.$$

Тогда матрица нашего линейного преобразования $\mathbf{A}$ в этой системе координат будет иметь вид:

$$(\hat{a}_{ik}) = \left(\frac{\hat{f}_i}{\hat{g}_i} \delta_{ik}\right).$$

Необходимое условие для наличия подобной системы координат вследствие этого заключается в том, чтобы линейное преобразование $\mathbf{A}$ было представлено посредством диагональной матрицы. Докажем, что это условие является также и достаточным. Именно, если оно выполнено, то для матриц преобразований, индуцированных преобразованием $\mathbf{A}$ в подпространствах $\mathfrak{L}_k$, имеет место (как бы ни были выбраны координаты в $\mathfrak{L}_k$): $A_k = \lambda_k E_k$, где E_k обозначает n_k-строчную единичную матрицу (ср.. доказательство теоремы C в § 98). Следовательно, $f_k \equiv \lambda_k g_k$. Поэтому, если мы возьмем (что всегда возможно) систему координат в пространстве $\mathfrak{L}_k$ таким образом, чтобы g_k сводилось к сумме чисто квадратичных членов, то это само собой осуществится для f_k. Также и здесь непосредственно получается усиление теоремы, касающееся действительной области.

Необходимым и достаточным условием того, что две действительные квадратичные формы

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} f_{ik} x_i x_k, \qquad \sum_{i,\,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k,$$

из которых вторая невырождающаяся, могут быть одновременно приведены посредством действительной линейной подстановки к сумме чисто квадратичных членов, является эквивалентность матрицы

$$A = (g_{ik})^{-1} (f_{ik}),$$

действительной диагональной матрице (ср. теорему C).

В заключение покажем, что это условие всегда выполнено, если вторая форма положительно определенная, т. е. в своей нормальной форме содержит только положительные квадраты. Очевидно, без всякого ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} g_{ik}x_i x_k \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

(потому что в случае нужды этого можно достигнуть с помощью действительного преобразования координат). Тогда матрица A нашего линейного преобразования A сводится к $F = (f_{ik})$. Покажем, что многочлен $\varphi(\lambda) = |\lambda E - F|$ имеет только действительные корни. Пусть λ_0 — один из этих корней $\varphi(\lambda)$. Пусть, далее, $\{x_i\}$ — нетривиальное решение уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}x_k = \lambda_0 x_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Помножим i-е уравнение на $\bar{x}_i$, где $\bar{x}_i$ — комплексно сопряженное число по отношению к x_i; если мы сложим все n уравнений, то получим:

$$\lambda_0 = \frac{\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} f_{ik}\bar{x}_i x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i}.$$

В силу симметрии матрицы f_{ik} отсюда непосредственно следует, что $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$, т. е. действительно. Вследствие этого можно посредством действительного преобразования координат в соответствии с разложением

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

разложить формы f и g на сумму r форм: $f \equiv f_1 + f_2 + \ldots + f_r$, $g \equiv g_1 + g_2 + \ldots + g_r$. Произведем дальнейшее рассмотрение, например, для f_1 и g_1. Как и выше, можно считать, что

$$g_1 \equiv \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{*2},$$

так как в противном случае нужно выполнить только действительное преобразование координат в $\mathfrak{L}_1$, чтобы добиться желаемого. Тогда — так были выбраны нами координаты —

$$\left|\lambda\delta_k^{n_1} - f_{ik}^*\right|_{i,\,k=1} \equiv (\lambda - \lambda_1)^{n_1},$$

а если для краткости обозначить $f_{ik}^* - \lambda_1\delta_{ik} = d_{ik}$ и вместо λ ввести переменную $\mu = \lambda - \lambda_1$, то $|\mu\delta_{ik} - d_{ik}| \equiv \mu^{n_1}$. Сравнивая коэфициенты при μ^{n_1-1} и μ^{n_1-2} в обеих частях уравнения, мы получаем:

$$\sum_{i=1}^{n_1} d_{ii} = 0; \qquad \sum_{\substack{i,\,k=1 \\ i<k}}^{n_1} (d_{ii}d_{kk} - d_{ik}d_{ki}) = 0.$$

Во втором уравнении мы имеем право заменить условие суммирования $i < k$ условием $i \neq k$, переставив сначала i и k, а затем сложив полученные уравнения. Но так как члены при $i = k$ равны нулю каждый по отдельности, то в силу $d_{ik} = d_{ki}$ имеет место

$$\sum_{i,\,k=1}^{n_1} d_{ik}^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n_1} d_{ii} d_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{n_1} d_{ii} \right)^2 = 0,$$

откуда в силу действительности чисел d_{ik} вытекает, что $d_{ik} = 0$ или $f_{ik}^* = \lambda_1 \delta_{ik}$. Но это и означает, что f_1 содержит только квадратичные члены.

Из последнего доказательства непосредственно следует, что:

Всякая действительная квадратичная форма может быть приведена к сумме чисто квадратичных членов посредством действительного ортогонального преобразования, т. е. преобразования, переводящего

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{в} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^{*2}.$$

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелевы интегралы 230, 231
Абсолютная геометрия 196
Абсолютная точка 160, 173, 175, 181, 182, 187, 228, 229
Абсолютное диференциальное исчисление Риччи 327
Абсолютное коническое сечение 159, 160, 186—189, 229, 230
Абсолютный инвариант 163, 164, 178
Адамар (I. Hadamar) 368
Алгебраическая геометрия 65, 76
Алгебраическая функция 9, 28
Алгебраические образы 64, 65
Алгебраические точечные преобразования 225
Александер (J. W. Alexander) 344, 345, 355
— доказательство теоремы Титце 344
Ампер (A. M. Ampère) 137, 303
Analysis situs 343
Аналитическая геометрия 7, 20, 65
Аналитическая функция 8
Аналитическое продолжение 9, 15
Ангармонизм 157
Антиколлениация 183
Антуан (L. Antoine) 345, 346
Аполлоний 43, 48
Аппель (P. Appell) 313, 342
Артин (E. Artin) 346, 356
Артиновы косы 342—344
Архимед 343
Асимптотическая интеграция 332—334
Асимптотические линии 13, 14, 114—119, 132, 133, 240, 270, 283, 284
Аффинная теория поверхностей 179
Аффинное преобразование 29, 142

Барицентрические координаты 17, 18
Бек (H. Beck) 11
Бекер (H. F. Baker) 11
Беклунд (V. Bäcklund) 304
Бельтрами (E. Beltrami) 216, 218, 219, 326, 338
Бернулли И. 373
Бернулли Я. 168, 169, 174
Бертини (E. Bertini) 124
Berzolari L. 104
Бесконечно малый параллельный сдвиг 327
Бесконечно удаленная точка 50, 142
— удаленный круг сферы 187
Билинейное уравнение 65—67, 69, 74, 75
Билинейные формы 75
Билинейный ковариант 209
Бирациональные преобразования 225, 226, 229, 230, 231
„Близкие" образующиеся развертывающейся поверхности 115
Бляшке (W. Blaschke) 14, 134, 179, 252, 259, 299, 318, 319, 324, 327, 338, 343, 366
Болл (R. St. Ball) 73, 94, 95, 103
Bolza O. 368
Больцано (Bolzano) 8
Бомпиани (E. Bompiani) 64, 117, 179, 342
Бонне (O. Bonnet) 257, 339
Бохер (M. Böcher) 6
Брауэр (L. E. J. Brouwer) 343, 344
Брианшон (Ch. J. Brianchon) 66, 80
Брио (Briot) 11
Брузотти (L. Brusotti) 82
Брунн (H. Brunn) 343
Буа дю- (Du Bois) 272
Буке (Bouquet) 11
Бьянки (L. Bianchi) 14, 324, 327

Вариационное исчисление 361, 362
Вариация постоянных 299—301, 333
Вебер (E. v. Weber) 318
Вебер (H. Weber) 220
Ведущая плоскость 328
Вейерштрасс (Weierstrass) 8, 43, 193, 366, 370, 374
Вейерштрасса формула 191
Вейль (H. Weyl) 220, 327, 340, 342, 374, 378
Вейнгартен (J. Weingarten) 170
Вейтценбек (R. Weitzenböck) 167
Веретенообразные циклиды 62, 63
Веронезе (G. Veronese) 202
Вершины кривой 342
Взаимная диаграмма 205
— поверхность 234
Взаимное соответствие 50
Взаимность 97, 99, 123, 124, 233
Взаимные полюсы 48, 49, 50, 52, 59

Взаимные планы сил 75, (§ 53) 203
Вильчинский (E. J. Wilczynski) 179
Винт Болла 73, 94, 95, 120
— взаимные винты 95
Винтовая линия 73
Винтовое движение 72, 73
Виртингер (W. Wirtinger) 179, 342
Возмущающий член 300
Возмущенное диференциальное уравнение 300
Волновая поверхность 373
Вурф 161, 171
Выпуклые тела 343, 347
Выражение Пфаффа 208, 209, 211—213, 223, 230, 231, 291
Вырождающаяся форма 385
Высокий рельеф 150
Высшая геометрия сфер 118, 256

Гальфен (G. H. Halphen) 175, 176, 178, 179
Гамильтон (W. R. Hamilton) 92, 219, 220, 300, 361, 362, 373
Гамильтона уравнение (§ 94) 361—371
Гармоническое двойное отношение 157
— расположение 145
Гаусс (K. F. Gauss) 10, 12, 77, 214, 215, 218, 222, 224, 326, 329, 339
Гауссова кривизна 12, 13, 134, 215, 218, 222, 339
Гауссова основная форма 340
Гейзер (Geiser) 43, 44
Гексасферические координаты 109, 111, 245, 258
Генричи (O. Henrici) 30
Генричи теорема 36—37
Геодезическая кривизна 218, 327, 338
Геодезическая линия 12—15, 30—37, 38, 188, 189, 217—219, 287, 288, 327, 338
Геодезическая поверхность 217
Геодезические параллельные кривые 372
Геометрическая оптика 92
Геометрическое истолкование диференциальных уравнений (§ 18) 76—79, 126
— — линейных подстановок (§ 97) 376
— построение наиболее общей колленациации 142
Геометрия алгебраических образов 10
— в ограниченном куске пространства 10, 12, 64
— в полном пространстве 10, 11, 64
— кругов в пространстве R_3 (§ 29) 124—126
— Лагерра (§ 67) 250, 251, 256, 257, 299, 313, 314
— линий Штуди 306
Геометрия прямых линий 85, 224, 232, 241, 259—267, 283
— обратных радиусов 196, 197, 198, 200
— сфер 108—114, 116—120, 124, 126, 232, 241—244, 254, 256, 263—267, 283
Гессе (L. O. Hesse) 11, 17, 121, 167 200, 201
Гессенберг (G. Hessenberg) 154, 342
Гефтер (L. Heffter) 11
Гильберт (D. Hilbert) 60, 374
Гипербола 26, 34, 38, 39, 63
Гиперболическая кривизна 15
Гиперболически искривленная поверхность 13, 14
Гиперболический параболоид 93, 184
Гиперболоид 36—39, 99, 106, 113
— образование 19, 20, 113
Гиперплоскость 123
Гиперцикл 252
Гиперэллиптические интегралы 15, 35
Гишар (C. Guichard) 60
Главная конциденция 127
Главное сечение 12
Главный коннекс 127, 131
Главный радиус кривизны 12
Гольтье (Gaultier) 42, 45
Gonseth, F. 38
Гомография 141
Грассман (H. Grassmann) 121, 124, 158, 221
Графостатика 75, 203—207
Гревс (Graves) 38, 182
Гросс (W. Gross) 374
Группа геометрии прямых линий Плюкера (§ 69) 259
Группа кос 348—352
— Лагерра 250, 251, 254
— Лоренца 256, 259
— обратных радиусов 196
— поверхностей 14
— преобразований геометрии сфер (§ 64) 241
— сродства кругов Мебиуса 196, 197
Грюнвальд (J. Grünwald) 318, 324
Гурса (E. Goursat) 214, 305
Гюйгенс (Ch. Huygens) 373

Дарбу (G. Darboux) 7, 11, 14, 59—61, 109, 179, 248, 252, 257, 288, 303, 313, 343, 374
Движения 160, 311
— неевклидова пространства 319
— твердого тела 73
— эллиптического пространства 319
Двойная касательная 82—84
— петля 348, 355
— точка 82—84, 116
Двойные отношения 153
Двойственное преобразование 84, 232, 262, 296

Двойственное преобразование как преобразование прикосновения (§ 62) 232—235
— — координат 261
Двойственность (§ 15) 65—67, 80, 81, 84, 135
Двойственности принцип 80—82
Двуполостный гиперболоид 25, 26, 34, 37, 128, 184
Дезарг (Desargues) 202
Действительное коническое сечение 183
Действительные геометрические фигуры 25
Декарт (R. Descartes) 343
Декартовы координаты 16, 17, 19
Делонэ (Ch. E. Delaunay) 15
Демулен (A. Demoulin) 60
Ден (M. Dehn) 348, 356, 359
Деформация 347
— теорема Титце 345
Джиббс (J. W. Gibbs) 121
Джиорджини (Giorgini) 68
Диагональная матрица 375, 376, 383, 384
Директрисса 91
Дискретная группа 344
Дискриминант формы 165
Дифференциальная геометрия 12, 65, 76
— — поверхностей 113, 114
Дифференциальное уравнение асимптотических линий 13, 132, 133
— — геодезических линий 14
— — изотропных линий 215
— — конического сечения 176
— — потенциала 24
— — с частными производными в плоскостных координатах 136
— — Эйлера 369
Дифференциальные уравнения 76, 128, 283
— — Гамильтона 300
— — геометрическая их трактовка 126
— — второго порядка 14, 79, 132
— — классификация по классам и порядкам 128
— — Майнарди и Кодацци 224
— — Монжа 361, 362
— — однородная формулировка 127
— — первого порядка 13, 35, 78, 126, 362
— — полуопределенные 374
Дифференциаторы Бельтрами (§ 58) 216—220
Длина элементов дуг 36
Дуальные прямолинейные координаты 311
— точки 309, 310
— числа 254, 308, 309
Дуальный угол 310, 311
W-кривые 130, 131, 169, 170, 171, 286
W постоянное двойное отношение 173
W-поверхности 170
Дюпен (Ch. Dupin) 12, 200, 258
Дюпена теорема 15, 28, 248

Евклидова точечная геометрия пространства R_4 118
Евклидово отображение эллиптической неевклидовой пространственной геометрии (§ 80) 319
Евклидово пространство *n*-измерений 223
Единичная матрица 375
— коса 350

Жергонн (J. D. Gergonne) 42, 81, 344—346
Живая сила 341
Жордан (C. Jordan) 344, 346
Juel C. 343

Задача Мейера 368, 371, 373, 374
Закон взаимности 108
Закон инерции 106, 110, 111, 185
— — квадратичных форм 101, 102, 385
— сохранения энергии 220
Замена пространственных элементов 79
Замкнутая коса 354—356
Зеркальное отображение (преобразование) 50, 228
— — Лагерра 251
Зубчатые колеса 296, 297

Ivory 326
Изгибания 215, 216
Изолированная точка 116
Изолированные двойные точки 82
Изоморфные группы 356
Изотермические поверхности 24
Изотропная проекция 119, 244—250, 258
— развертывающаяся поверхность 247
Изотропное направление 188
Изотропные кривые 188—191, 198, 247, 254
— прямые 186—188, 198, 199, 215, 267
Изотропный комплекс 286
— конус 119
Инвариантное линейное подпространство 379
Инвариантность двойного отношения при проективном преобразовании 154
— области 344
Инвариантные уравнения 163
Инварианты 90, 95, 96, 100, 101, 103, 165, 208, 209
— бирациональных преобразований 229
— изгибания 215
— линейных комплексов 90 95

Инварианты преобразований прикосновения 302
— теория 121, (§ 40) 162, 208
Инверсия 48—54, 56, 58, 62, 63, 195, 228—230, 250
— Лагерра 252
Инверсор 53, 54
Инволюторное преобразование (соответствие) 50, 95
— расположение двух комплексов 95, 103
— — — комплексов сфер 113
— — — функций 293
Инволюционное соответствие 75
Инволюция 95—100, 103, 104, 105, 108, 181, 182
Индикатриса 346, 373
— Дюпена 12, 13, 114
— Каратеодори 372
Интегральная поверхность 78, 274, 275, 277, 279—281
Интегральное многообразие M_1 275
— — M_2 272—275, 282, 283
— — проблемы Пфаффа 237
Интегральный инвариант 178
Инцидентность 126
Исчисление матриц 374—376

Каналовидные поверхности 63, 115, 116, 287
Каноническая система 367
Caporali E. 75
Каратеодори (C. Carathéodory) 373
Картан (E. Cartan) 179, 214, 342
Касательная 19, 77, 82, 83
— плоскость 78, 79
Касательная перегиба 82
Касательная расстояния 257
Касательный комплекс 255
— ряд кругов 247
— — сфер в R_3 254
Кастельнуово (G. Castelnuovo) 126, 229, 230
Квадратичное многообразие 120
— преобразование 226, 228—230
— квадратичные формы 100—105, 110—112, 184, 185
— дифференциальные формы 208, (§ 57) 214—216, (§ 60) 223—225
Квадратичный комплекс сфер 113, 119
Кватернионы 259
Кебе (P. Koebe) 65
Келер (C. Koehler) 11
Кели (A. Cayley) 121, 124, 159, 160, 162, 185, 202, 203, 291, 312, 319
Кемпе (Kempe) 54
Кенигс (G. Koenigs) 60, 138, 224, 225
Керекьярто (B. v. Kerékjártó) 344
Кинематическое отображение 324—326
Клебш (A. Clebsch) 11, 21, 126—129, 226, 228, 231, 304
Клеверная петля 347, 348
Клейн (F. Klein) 7, 11, 21, 38, 59, 61, 94, 103—105, 109, 124, 129, 131, 159, 161, 162, 168, 170, 173, 182, 223, 226, 258, 259, 284, 306, 317, 319, 342
Клиффорд (W. K. Clifford) 228, 254, 317, 323
Кнезер (A. Kneser) 371
Коаксиальная нуль-система 307, 308
Ковалевский (G. Kowalewski) 385
Ковариант изгибания 215
Ковариантны 167, 208, 210
—пучка 221
Когредиентные линейные подстановки 163
Кодацци (D. Codazzi) 224
Коллинеарные точки 141
Коллинеация 130, 131, 141—145
— мнимая 183 и сл.
— с обращающимся в нуль определителем 151
— сферы 196
Кольцеобразная поверхность 184
— циклида 63
Комбинаторная топология 343, 344, 361
Comessatti A. 202
Комплекс второго порядка 104
— кривых 138
— кругов 246
Конгруэнтные линейные подстановки 163
Конгруэнция 92, 96, 268
— кривых 138
— сфер 256
Конические сечения 66, 84
— — группы 202
— — конфокальные, в мнимой области (§ 43) 179
— — проективное порождение 157
Коннексы Клебша 126—132, 231
Контравариант 167, 208, 209
— изгибания 216
Контраградиент 234
Конус 78, 90
Конус Монжа 362, 363, 365, 366, 369, 372
— направлений 77, 362
Конфигурации 103, 200, 202, 203, 256
Конфокальные комплексы 105
— конические сечения 39, 179, 326
— поверхности 25, 27, 28, 30—32, 38, 41, 61, 63, 105
— циклиды 61, 105, 248
— циклические кривые 194
Конформная геометрия 200.
— точечная геометрия пространства R_4 и высшая геометрия сфер пространства R_3 254
Конформные отображения 187, 188—191, 197—200
— преобразования 52, 242, 245, 246, 249, 250, 254, 257, 259

Конциненция 127, 128
Координатный тетраэдр 17, 194
Координаты геометрического образа 21
— кругов в пространстве 125
Координаты пучка 221
Корреляция 157, 233
Коссер (Cosserat) 60, 126
Кососимметрическая матрица 21, 210
Кососимметрическое билинейное уравнение 67
Косы 342
— 3-го порядка (§ 93) 359—361
— *n*-го порядка 350
Коттер (E. Kötter) 158
Коши (A. Cauchy) 363, 367, 371
Кратчайшие линии 13
Кратчайший путь света 373
Кремона (L. Cremona) 159, 205, 216, 225, 226, 241
Кремоновы преобразования 225—232, 228, 241, 290, 291, 296
Кривая комплекса 284
Кривая 3-го порядка, состоящая из одной ветви 152
— — — — из двух ветвей 152
— — — с двойной точкой 152
— — — с изолированной двойной точкой 152
— — — с острием 152
Кривизна 12, 114, 132
— поверхности 132—134
Кривые параллели 217
— пересечения ортогональной системы 28
— 2-го класса 180
— 3-го порядка — классификация Ньютона 151—152
— 4-го порядка 83
Криволинейные координаты 16, 23, 24, 28, 219
Кристоффель (E. B. Christoffel) 223, 323, 326, 330, 331
Круговая точка 160
Кулидж (J. L. Coolidge) 64, 126, 182, 185, 259
Кульман (K. Culmann) 205
Куммер (E. Kummer) 42
Кусок поверхности 278

Лагерр (E. Laguerre) 111, 160, 173, 187, 250—252, 254, 256—258, 281, 282, 300, 313, 314, 319, 320
Лагранж (J. L. Lagrange) 8, 330, 340
Ламэ (G. Lame) 16, 24, 61, 216, 219
Лангиметрия 310
Лаплас 379
Леви-Чивита (T. Levi-Civita) 222, 324, 326—328, 337, 339, 340, 342
Лейбниц (G. Leibnitz) 343
Ли Софус (S. Lie) 7, 59, 76, 80, 109, 113, 114, 118, 119, 129, 131, 138, 168, 170, 173—175, 186, 188, 191—193, 202, 210, 232, 235, 236, 239, 247, 256—258, 263, 268, 270—275, 277, 282—284, 286—288, 290—293, 301—306, 326, 342, 366, 371, 372
Линдеман (F. Lindemann) 11, 226
Линейная конгруэнция 33—35, 91, 92, 106, 113, 283, 284, 286
Линейное многообразие 89—94, 120
— преобразование 140—145, 183, 196, 199, 202, 232, 261, 262
Линейные координаты (§ 2) 16
— подстановки 100—102, 104, 374—378
Линейный комплекс 74, 85, 86, 89, 92, 94—100, 103—106, 108, 113, 283, 284, 286
— — кругов 246
— — сфер 113, 255, 287
— линейчатый комплекс 89, 94
— элемент 31, 371
Линейчатая геометрия 74, 89—94, 102, 105—109, 112—114, 117, 118, 120, 125, 241
— — аналоги дуальным проективитетам (§ 78) 311
— — — дуальному сродству окружностей (§ 79) 315
— конгруэнция 85, 92
— поверхность 65, 85, 93, 117
Линейчатое семейство на гиперболоиде 106, 113
Линии кривизны 13, 14, 38, 63, 65, 114—119, 133, 248, 270
— — на поверхностях каналов 116
— — на сфере 115
— — циклид 63, 116
Линия постоянного наклона 365
— равных степеней 45
Липшитц (R. Lipschitz) 223, 326
Лиувилль (J. Liouville) 156, 197, 198, 200, 241, 256, 257, 332
Логарифмическая спираль 169, 171, 175
Логарифмическое отображение 286
Лоренц (H. A. Lorentz) 256, 259
Лучевые координаты 87

Майнарди (G. Mainardi) 224
Максвелл (J. C. Maxwell) 64, 75, 205, 256
Малюс (Malus) 92
Маскерони (Mascherani) 41, 42
Матрица 86, 87, 122—124
— их исчисление 374—376
— билинейной формы 210
— подстановки 375
Маятник Фуко 328, 336
Мебиус (A. F. Möbius) 16, 17, 68, 74, 81, 119, 140—142, 157, 161, 183, 186, 199, 200, 252, 291, 310, 342
Мейер А. (A. Mayer) 291
Мейер Ф. (F. Mayer) 200
Метрика Кели 160, 185

Мизес (R. Mises) 319
Минимальные кривые 188, 193, 366
— поверхности 14, 15, 134, 137, 191—193, 342
— прямые 186
Минковский (H. Minkowski) 343
Минор 86, 87, 122, 123
Мнимая подстановка 104, 107
Мнимое пространство 121—124
Мнимые коллинеации (§ 44) 183
— поверхности 25
— элементы 179
Мнимый шаровой круг 159
Многообразие 84
— постоянной меры кривизны 223
Модуль кривой 230
Момент двух прямых 225, 310
Монж (G. Monge) 12, 42, 65, 76—78, 92, 158, 176, 191, 193, 198, 271, 277, 361—363, 365, 366, 369, 372, 374
Морлей (F. Morley) 311
Мутар (Th. Moutard) 61
Müller E. 326

Направленная (ориентированная) схема 111
Направленные круги 119
Направляющая 91, 96, 97
Направляющее уравнение 289, 290, 301, 372
Невырождающаяся форма 385
Неевклидова геометрия 185
Неособенная линейная подстановка 375, 377
— матрица 376
Несобственные элементы 18, 19, 67, 70, 187
Нетер (M. Noether) 121, 228, 231, 291, 305
Нитяная конструкция поверхностей 2-й степени (§ 7) 38—41, 182
Нормаль 72, 78, 114, 115
Нормальная плоскость 73
— форма линейных преобразований (§ 98) 378
— — элемента группы кос 360, 361
Нормальное сечение 12, 114
Норм-кривая 201, 202
Нулевая поверхность 25, 183, 184
— сфера 55, 56
Нулевое коническое сечение 183
Нулевой круг 51, 52
Нуль-плоскость 74 и сл.
Нуль-прямая 74, 90
Нуль-система 67—77, 90, 91, 95, 169, 206, 212, 307
— — применение 72—76, 206
Ньютон (I. Newton) 153

Область 344
Обобщенные координаты 100, 220
Образ второй степени (класса) 84
Образующие гиперболоида 93, 99
— группы кос 352
Обратная коса 351
Обратных радиусов принцип 50
Общая теория относительности Эйнштейна 327
Общее понятие координат 15, 16
Общие аналитические точечные преобразования 207—209
— криволинейные координаты 23
— треугольные координаты 17, 18
Общий интеграл 282
Овальная поверхность 184
Ovidio E. 259
Огибающая 34—36, 63, 65
Однозначные аналитические функции 65
Однополостный гиперболоид 19, 20, 25, 26, 28, 33—37, 85, 93, 113, 184—186, 259
Однородные координаты 17, 86, 140
— — кругов в пространстве 125
— — прямолинейные 86
— переменные 86, 140
— уравнения 18, 19
Одноступенные образы 156
Окружность 62, 117, 118
Определитель Гессе бинарной формы 167
— формы 165
— Якоби 23, 208
Оптическое преобразование прикосновения 299
Ориентация сфер 242
Ориентированные прямые 309
Ортогональная проекция изотропной кривой 247
Ортогональные круги 42, 47—49
— системы 27, 28, 63
— сферы 55—58, 61
— траектории 29, 30
Ортогональность 45
Осевые координаты 87
Оскулирующее простое колебание 333, 334
Основные формулы для кривизны поверхности (§ 31) 132
Особая касательная 82
— нуль-система 308
Особенная подстановка 375, 377
Особое решение дифференциальных уравнений с частными производными 1-й степени 274, 280—282
Особые круги комплекса 248
Особый элемент 248
Осцилятор 328, 329, 340
Ось нуль-системы 69
— пересечения двух плоскостей 87
— перспективы 148
Отдельная сфера комплекса 255
Относительный инвариант 164

Отображение кругов плоскости на точки R_3 119
— направленных прямых эллиптического пространства на пару точек двух евклидовых сфер 319
— сфер пространства R_3 на точки пространства R_4 118

Падение функции 216
Пантограф 145—149
Папп (Pappus) 153, 155
Парабола 63
Параболическая кольцеобразная циклида 63
— роговидная циклида 62
Параболический круг 246
Параболоид 79
Параллелограмм Уатта 53
Параллельное перенесение 328, 335—342
— преобразование 250, 287
Параметр нуль-системы 70
Пары квадратичных форм (§ 99) 384
— чисел 359
Паскаль (Bl. Pascal) 66
Паш (M. Pasch) 161
Пентасферические координаты 24, 54—61, 105—109, 197, 241, 243, 245
— — применение 58—61
Пентацикл Стефаноса 124—126
Первоначальное диференциальное уравнение 300
Перспектива 145
— изображения (§ 35) 150
Перспектограф 145—149
Песталоцци (Pestalozzi) 43
Петерсон (J. Petersen) 311, 324
Pezzo P. 75
Планиметрия 310
Плоская диаграмма 205
Плоские конфигурации (§ 52) 202, 203
Плоский рельеф 150
Плоскостная перспектива 148
Плоскостные координаты 32, 79, 81, 135—138
— — Бонне и Дарбу 257
— — в диференциальных уравнениях (§ 32) 135
Плоскость перспективы 150
Плюкер (J. Plücker) 16, 20—23, 43, 45, 50, 67, 79—81, 84, 85, 87, 120, 121, 124, 135, 137, 138, 225, 226, 259, 306
Плюкера принцип 79—85
Поверхность Веронезе 202
— вращения второго порядка 15
— второй степени 20, 38
— переноса 192
— постоянной кривизны 12, 14, 15
— Шиллинга 15
Подвижной гиперболоид Генричи 30
Подобные отображения 344
Подэры 295, 296, 313
Полисферические координаты 197, 200, 246
Полиэдры 74, 75
Полная кривизна 327
Полная функция 9, 10
Полный диференциал 78
— интеграл 281, 282
Полоса 237, 238, 240, 255, 266, 273, 275, 282, 329, 363
— кривизны 255, 270, 271, 288
— поверхности 364
— прикосновения 284
Поля прямых 261, 262
Поляра 19, 66, 68, 69, 112
Полярное соответствие 75
— уравнение 107, 108, 112, 243
Полярные координаты 16
Полюс 66
Понселе (J. V. Poncelet) 80, 81, 153, 159, 182
Порядок пар точек 145
Поселье (Peaucellier) 53, 54
Построения Маскерони 41
Потенциал 24, 217
Правые параллельные прямые 323
Преобразование 74, 139, 141, 356
— Вейерштрасса 370
— подобия 149
— посредством обратных радиусов 48—54, 56, 57, 75, 196, 228, 229
— прикосновения 232—241, 249, 256, 264—271, 282, 283, 287, 297, 302, 304, 372
— — бесконечно малое 371
— — общая теория 288—294
— — примеры 295—301
— — теория инвариантов 302—305
— с обращающимся в нуль определителем 140
Прикосновение 111, 112
Принцип двойственности 80 241
— Гюйгенса 373
— Лагранжа 373
— перенесения Гессе (§ 51) 200—202
— — Штуди 306—311, 316, 317
— подсчета постоянных 22, 23
— Ферма 373
Проблема Пфаффа 77, 78, 208, 213, 214, 231, 237, 272, 273, 288, 291
— узлов 346—348
— цепей 346—355
Проективная геометрия 19, 80, 95, 132, 161, 196, 197, 262
— — сферы 196
— диференциальная геометрия (§ 42) 175
Проективное порождение однополостного гиперболоида, конического сечения, кривой третьего порядка, поверхности третьего порядка 158

Проективное порождение ортогональности двух плоскостей 189
— преобразование 237
— ($n-1$)-мерное пространство 121
— соответствие между одноступенными образами 156
Произведение матриц 375
Простое колебание 333
Пространственный образ 138
— элемент 80, 120
Пространство 80
— Грассмана и Кели 123
— Римана 220—223
Прямая удаления 149
Прямолинейная нормальная полоса 269, 270
Прямолинейно-сферическое преобразование (§§ 70, 71) 263, 266—271
Прямолинейные координаты 79, (§ 20) 85—89
— образующие 35, 37
— — сферы 186, 196, 198
Прямоугольные координаты 29
Птолемей 187
Пуанкаре (H. Poincaré) 343, 344
Пучок линейных комплексов 91
— окружностей 46—49
Пфафф (J. F. Pfaff) 77, 208, 209, 231, 272, 273, 288, 374

Равенство двух кос 356
Радиальная проективная геометрия 312
Радикальная ось 45—47
Радикальный центр 46
Радиус кривизны 76, 77, 175
Радон (J. Radon) 326, 328
Развертывающаяся поверхность 65, 115, 117, 118, 134, 195, 215, 339
Ранг матрицы 184
Распадающаяся конгруэнция 92
Расширенная линейчатая геометрия 108, 109
Рациональная кривая 64
— функция 9
Рациональный инвариант 166
Ребро возврата 363
Рейе (Th. Reye) 11, 84, 119, 158, 173
Рейдемейстер (K. Reidemeister) 348
Рельефная перспектива (§ 35) 150, 151
Рибокур (A. Ribaucour) 193, 318
Риман (B. Rimann) 220—223, 316, 326, 339
Риманова геометрия 342
— кривизна 222
— поверхность 159
— теория функций 330
Риманово пространство (§ 59) 221, 339, 340
Риттер (C. Ritter) 146, 204
Риччи (G. Ricci) 327, 342
Роговидные циклиды 62
Род 343
— кривой 230, 231
Родство между точками 74
Розанес (J. Rosanes) 228
Ряды кругов 246
— соприкосновения 117, 118

Салвиотти (Salviotti) 205
Salkowski 337
Сальмон (G. Salmon) 11
Сверхплоскость — см. Гиперплоскость
Свободное произведение групп (§ 92) 356—359
Свойства меры 153
— положения 153
Связка лучей 261, 262
Связные кривые 76
Севери (F. Severi) 159
Сегре (C. Segre) 25, 85, 124, 126, 183, 185, 202, 229
Секстатические точки 177
Семейство сфер 113
Сети поверхностей 84
Сеть Мебиуса 143, 144, 183, 199
— сфер 108
Силовой многоугольник 206
Сильвестр (J. J. Sylvester) 121, 162
Сильный минимум 371
Символы Кристоффеля 331
Синусоида 84
Синтетическая геометрия 7, 20, 65, 234
Система лучей 33, 92
— лягушачьих лап 146
— пяти сфер 58
— уравнений Максвелла 256
Слабый минимум 371
Сложение матриц 376
Собственные элементы 142, 187
Совместные инварианты 167
— — двух комплексов 95
Сокращенные обозначения 21, 46, 191
Соприкасающаяся парабола 77
— полоса 240, 270, 271
Соприкасающееся многообразие 237
Соприкасающиеся касательные 13
— круги 42, 43
— сферы 133, 134
Соприкасающийся параболоид 79, 132
Соприкосновение 237
Сопряжение 25
Сопряженные поляры 68, 69
Специальный комплекс кругов 246, 247
— — сфер 113
— линейный комплекс — см. Линейный комплекс
Средняя кривизна 12, 134
Сродство окружностей 50
Степенная точка 46
Степенной ряд 8, 9

Степень точки 44, 51, 54, 57, 106
Стереографическая проекция 185—188, 193—196, 241
Стефанос (K. Stephanos) 125
Стройк (D. J. Struik) 336
Сфера 62—64, 105, 106, 108, 117, 185, 196
— касающаяся заданной сферы 113
— соприкосновения 117, 118, 133
Сферическая геометрия 310
— конгруэнция 256, 286, 287
Сферические координаты 16, 112
Сферический комплекс 286, 287
Сферообразная круговая полоса 269
Схоутен (A. Schouten) 327, 342

Теорема Аппеля 313
— Брианшона 66
— Гамильтона-Кели 379, 380
— Гревса 39, 40
— Дарбу 248
— Дюпена 15, 28, 200, 248, 258
— Жордана 344, 345, 346
— инвариантности области 344
— Кебе 65
— Лиувилля (§ 50) 197—200, 241, 249, 256, 257
— о деформации Титце 344
— Паскаля 66
— Паппа 153, 155
— Эйлера для однородных функций 19
— — о кривизне 12
— — — многогранниках 343
Теоретико-множественная топология 344
Теория Гамильтона 219
— Гамильтона-Якоби 369
— групп 168, 372
— дифференциальных уравнений с частными производными Лагранжа 281
— минимальных поверхностей (§ 47) 191
— относительности Эйнштейна 208, 220, 256
— перенесения 337, 340
— поверхностей 12
— — Гаусса 326
— полиэдров 74, 75
— поляр конических сечений 66
— характеристик дифференциальных уравнений 271
— Штурм-Лиувилля 332
— элементарных делителей 374
Тетрациклические координаты 54, 60, 193—196
Тетраэдр 19, 20, 74, 75, 86
— координатный 71, 194
Тетраэдральные координаты—см. Треугольные координаты
Тетраэдральный комплекс 174, 284—286
Титце (H. Tietze) 344, 345, 347
Ткацкий узел 348
Томсен (G. Thomsen) 179, 259
Томсон (W. Thomson) 50
Топологический инвариант 343, 344
Топологическое отображение 343—345
Топология 343, 344 и сл.
Точечная геометрия пентасферических координат 105—109, 118
Точечные координаты 16, 20, 21, 23, 64, 79, 105
— преобразования пространства 139 и сл.
Точка возврата 82—84
— заострения 117
— перегиба 82, 84, 177
— -сфера 106, 263—265
Точко-плоскостные системы 231
Траекторный круг 255, 269, 270, 287
Траектория механической задачи 300
Трансверсаль 30
Транспонированная матрица 384
— подстановка 234
Трансляционная поверхность 192
Треугольные координаты 16, 17, 19—21, 64, 65
Трехиндексные символы 1-го рода 330
— — 2-го рода 331
Трехмерное многообразие поверхностей 137
Трилинейная форма 75
Тройная ортогональная система 27, 61, 200
Трубчатые поверхности 63, 65

Узлы (§ 88) 346, 355
Уиттекер (E. J. Whittaker) 305, 373
Униформизация 65
Упругая связь 332
Уравнение второй степени в пентасферических координатах 60
— Гамильтона 300, 361—367, 369, 372, 374
— главных радиусов кривизны 134
— движения 329—331
— минимальных поверхностей 137
— Монжа 77
— Монжа-Ампера 137, 303
— поверхностей постоянного подъема 365
— Пфаффа 208, 212, 231, 236, 237
Условие Лежандра 370
— Якоби 370

Фано (G. Fano) 318
Фермы 203
Фидлер (W. Fiedler) 11, 119
Финстервальдер (S. Finsterwalder) 15
Фокальная гипербола 26, 63
— парабола 63
— поверхность 33, 85, 138
— — конгруэнции 256, 268, 274

Фокальная гипербола линейчатого образа 85
— — системы лучей 33
Фокальные точки 181
Фокальный отрезок 38
— эллипс 26, 63
Фосс (A. Voss) 60, 225, 231
Формула Гаусса-Бонне 339
— Тейлора 370
Формулы Якоби 35
Фробениус (Frobenius) 210
Фубини (G. Fubini) 179, 185, 319, 324
Фундаментальные величины второго порядка теории поверхностей 223
— прямые 226
— точки 226, 229
Функции Ламэ 61
Функциональный определитель 23, 208

Характер 211, 212, 231
Характеристики 274, 277, 284, 365, 368—370, 372
— дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка 271—283
Характеристические полосы 274—277, 279—282, 284, 286, 292, 293, 299, 300, 363, 364, 369
— — сферического комплекса 287
Характеристический многочлен матрицы 376
Хейгар (P. Heegard) 305
Хордаль 45
Хьелмслев (J. Hyelmslev) 319, 324

Цейтен (H. G. Zeuthen) 23
Центр перспективы 148
Центральное проектирование 196
Циклиды 60, 61, 104, 105
— Дарбу 105, 374
— Дюпена (§ 13) 62—64, 113, 116, 258
Циклические кривые 60, 194, 228
— — Дарбу 252
Циклография 119
Цилиндр 313
Цилиндроид 312—314
Циндлер (K. Zindler) 105

Чех (E. Čech) 179
Числовая сфера Римана 316
Чистая бесконечно малая геометрия Вейля 327
Чтение уравнений 21

Шаль (M. Chasles) 31, 34, 59, 119, 141, 157, 159, 160, 191, 233
Шаровой круг 159
Шенфлис (A. Schänflies) 159
Шефферс (G. Scheffers) 191, 252, 288, 305
Шмидт (E. Schmidt) 344
Шрейер (O. Schreier) 359, 360, 374
Шретер (H. Schröter) 43, 120
Штауде (O. Staude) 38, 39
Штаудт (Ch. v. Staudt) 158, 159, 161, 162, 171, 182
Штейнер (J. Steiner) 43, 44, 119, 120, 157—159
Штейниц (E. Steinitz) 202
Штеккель (P. Stäckel) 215
Штуди (E. Study) 73, 132, 178, 182, 185, 247, 254, 257, 259, 299, 306, 308—312, 316—319, 321, 324
Штурм (K. Sturm) 44, 332
Шуберт (H. Schubert) 23
Шур (E. Schur) 158, 206

Эволюта плоской кривой 247
Эддингтон (A. S. Eddington) 327
Эйзенхарт (L. P. Eisenhart) 60, 342
Эйлер Леонард (L. Euler) 12, 92, 343, 344, 369
Эйлера теорема 19
Эйнштейн (A. Einstein) 208, 220, 227, 256
Эквидистантные кривые 288
Эквилонгальные отображения на плоскости 250—254
— — в пространстве 257
Экстремали задачи Мейера 368
Элемент дуги поверхности 214
— поверхности 236, 272
— функции 9
Элементарная геометрия круга (§ 9) 44, 124
— — сфер 108, 109, 119, 241
— коса 350
— поверхность 3-го порядка 343
Элементарные делители 374
Элементы касательных плоскостей 237
— 2-го порядка на плоскости 132
Эллипс 26, 38—41, 63, 82, 83, 313
Эллипсоид 25, 26, 28, 29, 33—35, 38, 117, 184
Эллиптическая неевклидова геометрия 319
Эллиптические координаты 24, 25—32
— кривые 64
Эллиптический параболоид 184
Эллиптическое искривление 13
Энгель (F. Engel) 8, 121, 305
Энриквес (F. Enriques) 146, 230
Эпициклоида 296, 297
$\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса 37, 371
Эрлангенская программа 7, 11, 168
Эрмитовы формы 185

Якоби (C. G. Jacobi) 15, 33, 34, 37, 121, 124, 129, 131, 208, 362
Якоби формулы 34, 35
Якобиан 208