РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ РЕПЕРЕ

По лекциям Эли Картана,
читанным в Сорбонне
в 1926—1927 гг.

Перевод и редакция
проф. С. П. Финикова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1960

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошо известный курс лекций по геометрии римановых пространств Эли Картана (1928 г.), переведенный на русский язык в 1936 г., основывается на материале лекций, читанных им в Сорбонне в 1925—1926 гг. Он мало отличается от традиционного изложения. Автор ставит задачу подчеркнуть *геометрию* римановых пространств, «по возможности избегать слишком формальных выкладок, в которых вакханалия индексов маскирует геометрическую картину, подчас очень простую». Однако в этих лекциях математическая основа осталась прежней.

Во втором французском издании 1946 г. Картан ввел несколько новых статей, не меняя общего построения. Здесь следует отметить интересную особенность книги Э. Картана: в ней очень интересно в современном стиле вводится понятие многообразия, в частности, риманова пространства. В книге очень хорошо, в духе глобальной геометрии, рассматриваются локально евклидовы римановы пространства, мастерски используется евклидово пространство сопряжения, позволяющее почти автоматически переносить геометрические свойства кривых из евклидова пространства в риманово.

В своих лекциях 1926—1927 гг. Э. Картан с самого начала вводит метод внешних форм, все время пользуется ортогональным репером.

В устном преподавании Картан стремится *научить* своих слушателей. Для этого он прежде всего учит их новому методу — методу внешних форм, решает целый ряд очень своеобразных задач в евклидовом пространстве.

Имея в виду, что студенты Сорбонны по каждому предмету, который они выбирают, сдают и письменный, и устный экзамены, а письменный экзамен представляет собой решение задачи, предложенной на тему прочитанного курса, Картан вводит в курс неевклидовы геометрии, рассматривает в своих лекциях ряд вариационных задач на геодезические линии, решает много задач на геометрию вложенных многообразий. Все это подается в невероятно простом виде. Все эти вопросы не были затронуты ни в первом, ни во втором издании книги.

Именно это и прельстило меня, когда я сначала перевел для моих слушателей первые лекции Картана, посвященные методу внешних форм, а затем обработал для печати весь курс под заглавием «Риманова геометрия в ортогональном репере». Картановский метод подвижного репера одинаково хорошо применим и к косоугольным реперам (как вообще к реперам любой группы преобразований), и в этой книге можно найти примеры этого. Ни в какой другой книге нельзя найти теории римановых многообразий в ортогональном репере.

Рассматривая это как основную задачу книги, я не мог отказать себе в удовольствии присоединить ряд статей из печатного курса, главным образом те, которые не вошли в русское издание. Они отличаются даже стилем от основного текста.

Я жалею только, что не мог поместить их целиком.

С. П. Фиников

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА I

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

1. Компоненты инфинитезимальных смещений. Рассмотрим обычное трехмерное евклидово пространство. В произвольной точке M берем правый прямоугольный трехгранник. Совокупность всех ортогональных трехгранников пространства зависит от шести параметров (три координаты вершины и три эйлерова угла, определяющие поворот трехгранника по отношению к начальному):

$$u_1, u_2, \ldots, u_6.$$

Выбранный трехгранник можно определить радиусом-вектором вершины $\vec{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}}$ и тремя единичными взаимно ортогональными векторами осей

$$\vec{\mathbf{I}}_1, \vec{\mathbf{I}}_2, \vec{\mathbf{I}}_3.$$

Определим по отношению к этому трехграннику трехгранник инфинитезимально* близкий, присоединенный к точке M'. Положение нового трехгранника по отношению к старому определяется приращениями радиуса-вектора вершины

$$\vec{\mathbf{M}}' - \vec{\mathbf{M}} = d\vec{\mathbf{M}}$$

и единичных векторов осей; обозначая новые векторы штрихами

$$\vec{\mathbf{I}}_k{}' - \vec{\mathbf{I}}_k = d\vec{\mathbf{I}}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

и проектируя полученные дифференциальные приращения векторов на оси первого трехгранника, получим уравнения инфи-

* Координаты отличаются на дифференциалы $u_1 + du_1, \ldots, u_6 + du_6$.

нитезимальных (дифференциальных) смещений нашего трехгранника

$$\left.\begin{aligned} d\vec{M} &= \omega^1\vec{I}_1 + \omega^2\vec{I}_2 + \omega^3\vec{I}_3, \\ d\vec{I}_1 &= \omega_1^1\vec{I}_1 + \omega_1^2\vec{I}_2 + \omega_1^3\vec{I}_3, \\ d\vec{I}_2 &= \omega_2^1\vec{I}_1 + \omega_2^2\vec{I}_2 + \omega_2^3\vec{I}_3, \\ d\vec{I}_3 &= \omega_3^1\vec{I}_1 + \omega_3^2\vec{I}_2 + \omega_3^3\vec{I}_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

или, короче,

$$d\vec{M} = \omega^i\vec{I}_i, \quad d\vec{I}_i = \omega_i^j\vec{I}_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь все величины $\omega^i (i = 1, 2, 3)$ являются проекциями дифференциала $d\vec{M}$ на старые оси; следовательно, они бесконечно малы и линейно выражаются через дифференциалы независимых переменных $du_\alpha (\alpha = 1, \ldots, 6)$, т. е. являются линейными дифференциальными формами; так же дело обстоит с величинами ω_i^j:

$$\left\{\begin{aligned} \omega^i &= \Gamma_\alpha^i du^\alpha, \\ \omega_i^j &= \Gamma_{i\alpha}^j du^\alpha \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

(суммирование по указателю

$\alpha = 1, \ldots, 6$)

Здесь и далее два одинаковых индекса, один нижний, другой верхний, означают суммирование.

2. Соотношения между формами ортонормированного репера. Линейные формы ω^i, ω_i^j нельзя задавать произвольно. Прежде всего надо наложить связи, вытекающие из ортонормированности первого и второго трехгранников (векторы $\vec{I}_k$ единичные и взаимно ортогональные). Это условие выражается формулами

$$\begin{gathered} \vec{I}_1^2 = 1, \quad \vec{I}_2^2 = 1, \quad \vec{I}_3^2 = 1, \\ \vec{I}_1\vec{I}_2 = 0, \quad \vec{I}_2\vec{I}_3 = 0, \quad \vec{I}_3\vec{I}_1 = 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Дифференцируя эти тождества, получим

$$\vec{I}_i d\vec{I}_i = 0, \quad \vec{I}_j d\vec{I}_i + \vec{I}_i d\vec{I}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Внося сюда значения дифференциалов из уравнений (1.1) и учитывая соотношения (1.3), получим

$$\omega_i^i = 0, \ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j). \tag{1.4}$$

Таким образом, остаются только три различные формы ω_i^j, а именно: $\omega_2^3, \omega_3^1, \omega_1^2$. Их можно назвать *компонентами вращения трехгранника.*

Позднее мы увидим, что на формы ω^i, ω_i^j накладываются еще некоторые дифференциальные соотношения.

3. Определение компонентов заданного семейства трехграников. Если задано движение трехгранника, т. е. известны координаты радиуса-вектора $\vec{\mathbf{M}}$ и единичных векторов осей $\vec{\mathbf{I}}_i$, то компоненты поступательного движения ω^i и вращения ω_i^j трехгранника легко вычисляются из уравнений (1.1).

Предположим, что векторы $\vec{M}$ и $\vec{\mathbf{I}}_i$ заданы координатами

$$\vec{\mathbf{M}}(x, y, z), \quad \vec{\mathbf{I}}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i).$$

Умножая первое уравнение (1.1) на вектор $\vec{\mathbf{I}}_1$, получим

$$\vec{\mathbf{I}}_1 d\vec{\mathbf{M}} = \omega^1 \vec{\mathbf{I}}_1 \vec{\mathbf{I}}_1 + \omega^2 \vec{\mathbf{I}}_1 \vec{\mathbf{I}}_2 + \omega^3 \vec{\mathbf{I}}_1 \vec{\mathbf{I}}_3,$$

или в силу соотношений (1.3)

$$\omega^1 = \vec{\mathbf{I}}_1 d\vec{\mathbf{M}}, \tag{1.5}$$

или

$$\omega^1 = \vec{\mathbf{I}}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot d\vec{\mathbf{M}}(dx, dy, dz),$$

или если перемножить попарно координаты векторов $\vec{\mathbf{I}}_1$ и $d\vec{\mathbf{M}}$

$$\omega^1 = \alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz.$$

Вообще

$$\omega^i = \alpha_i dx + \beta_i dy + \gamma_i dz, \tag{1.6}$$

аналогично

$$\omega_2^3 = \vec{\mathbf{I}}_3 d\vec{\mathbf{I}}_2 = \alpha_3 d\alpha_2 + \beta_3 d\beta_2 + \gamma_3 d\gamma_2 \tag{1.7}$$

и

$$\omega_i^j = \alpha_j d\alpha_i + \beta_j d\beta_i + \gamma_j d\gamma_i. \tag{1.8}$$

Теорема. *При всяком выборе шести параметров* u_α ($\alpha = 1, \ldots, 6$) *шесть форм* ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$ *будут линейно независимы.*

Для доказательства достаточно заметить, что не только обращение в нуль дифференциалов du_α ($\alpha = 1, \ldots, 6$) обращает в нуль дифференциалы $d\vec{\mathbf{M}}$, $d\vec{\mathbf{I}}_i$, а следовательно, и формы ω^i, ω_i^j, но и обратно: при обращении в нуль шести форм ω^i, ω_i^j в силу уравнений (1.1) обратятся в нуль дифференциалы $d^i\vec{\mathbf{M}}$, $d\vec{\mathbf{I}}_i$, трехгранник будет неподвижен, и все параметры u_α— постоянны.

4. Подвижной репер. Совершенно так же можно присоединять к каждой точке M пространства вместо ортогонального (точнее, *ортонормированного* с единичными векторами осей) трехгранника произвольный косоугольный трехгранник (невырожденный) с меняющимися углами и длинами базисных векторов, лишь бы эти векторы были линейно независимы (не лежали в одной плоскости).

Точнее, присоединим к каждой точке с радиусом-вектором $\vec{\mathbf{M}}$ три произвольных вектора $\vec{\mathbf{e}}_i$ ($i=1, 2, 3$) с неравным нулю скалярным смешанным произведением

$$(\vec{\mathbf{e}}_1 \vec{\mathbf{e}}_2 \vec{\mathbf{e}}_3) \neq 0,$$

т. е. отличным от нуля определителем из координат этих векторов относительно неподвижной системы координат.

Фигура, образованная точкой M и тремя векторами $\vec{\mathbf{e}}_i$ (т. е. подвижная система косоугольных координат с разными масштабами осей), называется *репером*, или *подвижным репером*. Эти векторы $\vec{\mathbf{M}}$, $\vec{\mathbf{e}}_i$ можно рассматривать как функции от $3 + 3 \cdot 3 = 12$ произвольных параметров u^α (по числу их координат относительно неподвижной декартовой системы; $\alpha = 1, \ldots, 12$). Тогда дифференциалы $d\vec{\mathbf{M}}$, $d\vec{\mathbf{e}}_i$ будут линейными однородными функциями дифференциалов независимых переменных du^α. Векторы $d\vec{\mathbf{M}}$, $d\vec{\mathbf{e}}_i$ разлагаются по осям нашей системы, т. е. по тройке линейно независимых векторов $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$, и мы получаем систему уравнений, аналогичную системе (1.1)

$$d\vec{\mathbf{M}} = \omega^1\vec{\mathbf{e}}_1 + \omega^2\vec{\mathbf{e}}_2 + \omega^3\vec{\mathbf{e}}_3,$$

$$d\vec{\mathbf{e}}_i = \omega_i^1\vec{\mathbf{e}}_1 + \omega_i^2\vec{\mathbf{e}}_2 + \omega_i^3\vec{\mathbf{e}}_3, \qquad (1.9)$$

где ω^i, ω_i^j по-прежнему будут линейными формами относительно дифференциалов независимых переменных du^α. Однако формулы (1.3) теперь не имеют места и уравнения (1.4) не существуют.

5. Линейный элемент пространства. Введем обозначения

$$\vec{\mathbf{e}}_i \vec{\mathbf{e}}_j = g_{ij} \quad (g_{ij} = g_{ji}) \tag{1.10}$$

для скалярных произведений базисных векторов; по геометрическому смыслу скалярного произведения величина g_{ij} равна произведению модулей векторов $\vec{\mathbf{e}}_i$, $\vec{\mathbf{e}}_j$ на косинус угла между ними. С другой стороны, возвышая в квадрат обе части первого уравнения (1.9), получим в левой части квадрат линейного элемента пространства

$$ds^2 = (d\vec{\mathbf{M}})^2.$$

В правой части, пользуясь правилом возвышения в квадрат многочлена (сумма квадратов и удвоенных произведений всех членов многочлена), получим в обозначениях (1.10)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\vec{\mathbf{e}}_1)^2 (\omega^1)^2 + \ldots + 2\vec{\mathbf{e}}_1\vec{\mathbf{e}}_2\, \omega^1\omega^2 + \ldots = \\ &= g_{11} (\omega^1)^2 + g_{22} (\omega^2)^2 + g_{33} (\omega^3)^2 + 2g_{12}\, \omega^1 \omega^2 + \\ &\quad + 2g_{23}\, \omega^2\omega^3 + 2g_{31}\, \omega^3\omega^1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Короче это записывается в виде

$$ds^2 = g_{ij}\, \omega^i\omega^j. \tag{1.12}$$

Эта формула и предыдущие справедливы и для n-мерного пространства, когда i, j пробегают значения $1, 2, \ldots, n$.

В формуле (1.12) имеется две пары одинаковых индексов i и j, каждое суммирование выполняется самостоятельно; при этом для каждой пары неравных чисел, например 1 и 2, будут два члена: один для $i = 1$, $j = 2$, другой для $i = 2$, $j = 1$; в силу симметрии (1.10) коэффициентов g_{ij} эти два члена равны. Отсюда в развернутой сумме (1.11) все члены с различными индексами $i \neq j$ входят с коэффициентом 2. Аналогично подсчитывается скалярное произведение двух векторов

$$\vec{\mathbf{X}} = X^i\vec{\mathbf{e}}_i, \quad \vec{\mathbf{Y}} = Y^j\vec{\mathbf{e}}_j.$$

Перемножая по правилам скалярного умножения векторов, получим

$$\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{Y}} = \vec{\mathbf{e}}_i \vec{\mathbf{e}}_j X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j. \tag{1.13}$$

Отсюда, косинус угла φ между двумя векторами $\vec{X}$, $\vec{Y}$ будет

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij} X^i Y^j}{\sqrt{g_{ij} X^i X^j} \sqrt{g_{ij} Y^i Y^j}}. \qquad (1.14)$$

6. Контравариантные и ковариантные компоненты. Умножим вектор

$$\vec{X} = X^k \vec{e}_k \qquad (1.15)$$

скалярно на вектор $\vec{e}_i$. Обозначая произведение X_i, получим с помощью формулы (1.10)

$$X_i = g_{ik} X^k. \qquad (1.16)$$

Компоненты X^k носят название *контравариантных* компонентов вектора, компоненты X_i — *ковариантных* компонентов. Контравариантные компоненты обозначаются индексами вверху, ковариантные — индексами внизу.

Умножая обе части равенства (1.16) на X^i и суммируя по индексу i, получим

$$X_i X^i = g_{ik} X^i X^k = \vec{X}^2; \qquad (1.17)$$

анлогично,

$$\vec{X}\vec{Y} = g_{ik} X^i Y^k = X^i Y_i. \qquad (1.18)$$

Чтобы перейти от ковариантных компонентов вектора к контравариантным, надо разрешить систему (1.16) из n уравнений ($i = 1, 2, \ldots, n$) с n неизвестными X^k ($k = 1, \ldots, n$). По известной формуле алгебры это решение будет

$$X^k = g^{ik} X_i, \qquad (1.19)$$

где g^{ik} — *приведенный минор* элемента g_{ik} в определителе

$$g = det\, | g_{ij} | \neq 0,$$

т. е. адъюнкт элемента g_{ik}, деленный на определитель g. Все это относится также к инфинитезимальным компонентам ω^i или ω_i.

Для ортонормированного репера

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

поэтому по формуле (1.16)

$$X_i = X^i,$$

т. е. ковариантные компоненты вектора равны контравариантным. Мы будем писать без различия $\omega^i = \omega_i$, $\omega_i^j = \omega_{ij}$, сохраняя условие суммирования (1.2) по двум одинаковым, одному — верхнему, другому — нижнему, индексам.

7. Инфинитезимальные афинные преобразования репера. Заметим еще, что при косоугольном репере мы уже не можем говорить, что уравнения (1.9) определяют движения репера, ибо наши трехгранники теперь не конгруэнтны. Нетрудно заметить, однако, что преобразование координат x^1, x^2, x^3 при переходе от одного координатного трехгранника к другому будет определяться линейной подстановкой. Действительно, если обозначить через a_j^i косинусы углов между старыми и новыми осями, через x^i — старые координаты произвольной точки, через $x^{i'}$ — новые координаты ее и через x_0^i — координаты нового начала в старой системе, то получим для старых координат формулу

$$x^i = x_0^i + a_1^i x^{1'} + a_2^i x^{2'} + a_3^i x^{3'}.$$

Поскольку общая линейная подстановка определяет афинное преобразование, *уравнения* (1.9) *определяют инфинитезимальные афинные преобразования репера*.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ПФАФФОВЫХ ФОРМ

Возвращаемся к ортонормированному реперу.

Мы видели, что при заданном движении репера, т. е. при заданных координатах радиуса-вектора $\vec{M}$ и единичных векторов осей $\vec{I}_i$ в виде функций от параметров u^α, мы можем найти 6 компонент ω^i, ω_j^k инфинитезимальных смещений репера.

Возникает проблема: могут ли произвольно заданные шесть форм ω^i, ω_j^k, линейные относительно du^α, представлять смещения трехгранника в обычном пространстве?

Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется сделать отступление в область анализа и рассмотреть свойства пфаффовых форм.

8. Дифференцирование в заданном направлении. Пусть дана форма Пфаффа

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \ldots + a_n dx^n.$$

Дифференциалы независимых переменных $dx^1, \ldots, dx^n$ обыкновенно рассматриваются как новые независимые переменные, но можно также рассматривать их как заданные функции независимых переменных

$$dx^i = \xi^i (x^1, \ldots, x^n)$$

(*направленное смещение* с определенным символом дифференцирования). Рассмотрим два символа дифференцирования d и δ и два ряда дифференциалов

$$d\delta x^1, \quad d\delta x^2, \ldots, d\delta x^n,$$
$$\delta dx^1, \quad \delta dx^2, \ldots, \delta dx^n,$$

вообще различных.

Мы можем условиться, что эти два символа дифференцирования перестановочны переместительны

$$d\delta x^i = \delta d x^i. \tag{2.1}$$

Теорема. *Если символы дифференцирования d и δ переместительны для независимых переменных, то они переместительны и для функций.*

Действительно, рассмотрим функцию

$$f = f(x^1, \ldots, x^n).$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x^i;$$

второе дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \delta df &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \, \partial x^k} dx^i \delta x^k + \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta d x^i, \\ d\delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \, \partial x^k} \delta x^i d x^k + \frac{\partial f}{\partial x^i} d \delta x^i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь вторые члены равны в силу условия (2.1); что касается первых, то, меняя во второй формуле (2.2) индексы суммирования i на k и k на i, получим сумму

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \, \partial x^i} \delta x^k \, dx^i,$$

которая отличается от аналогичной суммы в выражении δdf только порядком дифференцирования во второй производной, а поскольку в смешанных частных производных результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, первые члены в правых частях выражений (2.2) совпадают, и мы имеем

$$\delta df = d\delta f. \tag{2.3}$$

Следствие. *Свойство переместительности для двух символов дифференцирования d и δ не зависит от выбора независимых переменных.*

Иначе дело обстоит с дифференцированием линейных форм Пфаффа.

9. Билинейный ковариант Фробениуса. Рассмотрим пфаффову форму

$$\omega(d) = a_i dx^i$$

и составим выражение

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d).$$

Дифференцируя $\omega(d)$ с символом дифференцирования δ, получим

$$\delta\omega(d) = \delta a_i dx^i + a_i \delta dx^i$$

и аналогично

$$d\omega(\delta) = da_i \delta x^i + a_i d\delta x^i.$$

Вычитая из второго первое, заметим, что вторые суммы в силу (2.1) взаимно уничтожаются, и мы получим

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = da_i\delta x^i - \delta a_i dx^i = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \delta x^i - \\ - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i.$$

Изменим в последней сумме указатели суммирования i на k и наоборот; получим

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k\delta x^i - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \delta x^i dx^k = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right) dx^k \delta x^i.$$

Если же суммировать по сочетаниям, то для каждой пары чисел i, k будут два члена

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right) dx^k\delta x^i + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}\right) dx^i \delta x^k = \\ = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right) \cdot (dx^k\delta x^i - dx^i\delta x^k).$$

Вынося за скобку общий множитель $\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}$ и обозначая суммирование по сочетаниям знаком суммы с поставленными в скобках индексами суммирования, получим окончательно

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \sum_{(i,k)} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right)(dx^k\delta x^i - dx^i\delta x^k). \quad (2.4)$$

Полученная справа форма линейна относительно каждой серии дифференциалов $dx^1, \ldots, dx^n$ и $\delta x^1, \ldots, \delta x^n$. Она инвариантна относительно замены независимых переменных, т. е. при замене переменных x^i в обеих частях уравнения (2.4) равенство сохраняется. Выражение (2.4) называется *билинейным ковариантом Фробениуса* по имени ученого, который ввел такие формы.

Теорема. *Если билинейный ковариант пфаффовой формы равен нулю*

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = 0, \tag{2.5}$$

то форма ω *будет точным дифференциалом.*

Действительно, обращение формы (2.4) в нуль при произвольных дифференциалах dx^i, δx^i имеет следствием обращение в нуль коэффициентов

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} = 0,$$

а это, как известно, является необходимым и достаточным условием того, чтобы форма

$$\omega = a_i dx^i = d\varphi$$

была точным дифференциалом.

Теорема. *Если билинейный ковариант формы* ω *равен нулю, то интеграл*

$$u = \int_{M_0}^{M_1} \omega(d)$$

между двумя точками $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и $M_1(x_1^1, \ldots, x_1^n)$ *не зависит от выбора пути интеграции; при этом предполагается, что пути интеграции, соединяющие эти две точки, образуют непрерывное семейство.*

Эта теорема эквивалентна предыдущей, но мы докажем ее независимо, так что это доказательство может служить доказательством и предыдущей теоремы.

Рассмотрим непрерывное семейство путей, соединяющих точки M_0 и M_1:

$$x^i = x^i(t, \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где α — параметр линии семейства, t — параметр точки на линии α этого семейства. Параметр t выбран так, что значение $t = 0$ соответствует точке M_0 и значение $t = 1$ — точке M_1.

Таким образом,

$$x^i(0, \alpha) = x_0^i,$$

$$x^i(1, \alpha) = x_1^i$$

независимо от выбора α.

Введем символы дифференцирования

$$d = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

они, очевидно, переместительны, ибо

$$\delta df = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \, \partial t}, \qquad d\,\delta f = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \, \partial \alpha}.$$

По условию (в силу обращения в нуль коварианта Фробениуса) имеем

$$d\,\omega(\delta) - \delta\,\omega(d) = 0. \tag{2.5}$$

Положим

$$u(t, \alpha) = \int_0^t \omega(d). \tag{2.6}$$

Отсюда

$$\omega(d) = \frac{\partial u}{\partial t} = du, \quad \delta\,\omega(d) = \delta\,du,$$

и уравнение (2.5) запишется

$$d\,\omega(\delta) - \delta\,du = 0,$$

или в силу (2.1)

$$d\,\{\omega(\delta) - \delta\,u\} = 0$$

для любого t и α, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\omega(\delta) - \delta\,u\} = 0.$$

Поскольку производная по t равна нулю, разность $\omega(\delta) - \delta u$ не зависит от t, но для $t = 0$, т. е. в точке M_0, все пути сходятся, и по формуле (2.6) начальное значение $u = 0$. Следовательно,

$$\omega(\delta) = a_i \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} = 0, \quad u = 0,$$

и при всяком t

$$\omega(\delta) - \delta u = 0.$$

В точке M_1, т. е. для $t = 1$, опять все пути сходятся, и

$$\omega(\delta) = 0;$$

следовательно, при $t = 1$

$$\delta u = 0,$$

т. е. для любого пути интегрирования непрерывного семейства кривых интеграл (2.6) дает одно и то же значение. Это и требовалось доказать.

Билинейный ковариант зависит от двух серий дифференциалов dx^i, δx^i и меняет знак при их перестановке. Билинейные алгебраические формы двух серий переменных u^i и v^k, меняющие знак при перестановке u^i и v^k, называются *кососимметричными.*

10. Кососимметричные билинейные формы. 1°. *Коэффициенты кососимметричных форм сами кососимметричны, т. е. при перестановке индексов меняют знак.*

Пусть

$$F = a_{ij} u^i v^j - \qquad (2.7)$$

кососимметричная форма; тогда при перестановке u и v получим

$$F = -a_{ij} v^i u^j,$$

или, меняя обозначения индексов суммирования i на j и наоборот, получим

$$F = -a_{ij} v^j u^i. \qquad (2.8)$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), имеем

$$a_{ij} u^i v^j = -a_{ji} v^j u^i$$

и

$$a_{ij} = -a_{ji}, \; a_{ii} = 0.$$

2°. *Кососимметричная форма остается кососимметричной при одновременной, с одними и теми же коэффициентами, линейной подстановке обеих серий переменных.*

Рассмотрим подстановку

$$U^i = A^i_k u^k, \quad V^i = A^i_k v^k.$$

При этом, очевидно, билинейная форма F перейдет в билинейную форму Φ

$$F(u, v) = \Phi(U, V).$$

Действительно, при замене u^k на v^k, очевидно, меняется U^i на V^i, и форма Φ меняет знак вместе с формой F. Значит

$$\Phi(U, V) = -\Phi(V, U),$$

что и надо было доказать.

11. **Внешние квадратичные формы.** Если в записи формы F по формуле (2.7) перейти к суммированию по сочетаниям указателей i, j, то в силу кососимметричности коэффициентов $a_{ij} = -a_{ji}$ получим

$$F = \sum_{(i,j)} a_{ij}(u^i v^j - u^j v^i) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix}.$$

Введем новое обозначение:

$$[u^i u^j] = \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

Произведение $[u^i u^j]$ будем называть *внешним произведением*. Определитель, стоящий в правой части, будем называть *значением внешнего произведения*. Чтобы получить значение внешнего произведения, надо задаться двумя сериями значений базисных элементов u^i, u^j и v^i, v^j.

Все действия над внешними произведениями подчиняются общему правилу: *любое преобразование выражения с внешними произведениями законно, если значения этого выражения до преобразования и после преобразования равны при всяком выборе двух серий значений базисных элементов.*

Например, если имеем две линейные формы

$$f_1 = a_i u^i, \quad f_2 = b_j u^j,$$

то

$$[f_1 f_2] = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ f_1(v) & f_2(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i u^i & b_k u^k \\ a_i v^i & b_k v^k \end{vmatrix} = a_i u^i b_k v^k - a_i v^i b_k u^k =$$

$$= a_i b_k (u^i v^k - v^i u^k) = a_i b_k \begin{vmatrix} u^i & u^k \\ v^i & v^k \end{vmatrix} = a_i b_k [u^i u^k] =$$

$$= \sum_{(i,k)} (a_i b_k - a_k b_i)[u^i u^k].$$

Следствия. 1. *При перестановке множителей внешнее произведение меняет знак.*

2. *Внешние произведения равных множителей или отличающихся множителем пропорциональности равны нулю:*

$$[ff] = 0, \quad [f, cf] = 0.$$

3. *Скалярный множитель можно выносить за скобку внешнего произведения.*

12. Обратные теоремы. Лемма Картана. Теорема 1. *Чтобы при заданной линейной форме f (не равной нулю) имело место равенство*

$$[f\varphi] = 0, \tag{2.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы форма φ была пропорциональна форме f с некоторым множителем пропорциональности:

$$\varphi = cf.$$

Достаточность вытекает из следствия 2. Чтобы доказать необходимость, изменим базис $u^1, u^2, \ldots, u^n$, введя в него заданную форму f и еще $n - 1$ любых линейных форм $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, лишь бы вместе с формой f они образовали линейно независимый базис (отличный от нуля определитель из коэффициентов в разложении этих форм по старому базису). Например, если форма f в своем разложении по элементам базиса содержит u^n, то можно принять каждое

$$f_i = u^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

После замены базиса искомая форма φ будет

$$\varphi = cf + c^1 f_1 + \ldots + c^{n-1} f_{n-1}$$

и уравнение (2.10) примет вид

$$c\,[ff] + c^1 [ff_1] + \ldots + c^{n-1} [ff_{n-1}] = 0;$$

первый член пропадает в силу следствия 2; все остальные произведения линейно независимы, как произведения различных элементов базиса; следовательно, равны нулю коэффициенты

$$c^1 = c^2 = \ldots = c^{n-1} = 0$$

и

$$\varphi = cf.$$

Теорема 2. (Лемма Картана.) *Чтобы при заданных линейно независимых формах* $f^1, f^2, \ldots, f^p$ (ранг матрицы коэффициентов равен p) *имело место тождество*

$$[f^1\varphi_1] + [f^2\varphi_2] + \ldots + [f^p\varphi_p] = 0, \tag{2.11}$$

необходимо и достаточно, чтобы формы φ_i $(i = 1, \ldots, p)$ *линейно выражались через заданные формы* f^k $(k = 1, \ldots, p)$ *с симметричной матрицей коэффициентов*

$$\varphi_i = c_{ik}f^k, \quad c_{ik} = c_{ki}. \tag{2.12}$$

Дополним заданные формы $f^1, \ldots, f^p$ еще $n - p$ новыми формами $f^{p+1}, \ldots, f^n$ так, чтобы все n форм $f^1, \ldots, f^n$ образовали линейно независимый базис. Поскольку ранг матрицы коэффициентов в разложении форм f^k $(k = 1, \ldots, p)$ по элементам базиса $u^1, \ldots, u^n$ равен p, в этой матрице существует отличный от нуля определитель порядка p.

Допустим, что этот определитель образован коэффициентами при элементах базиса $u^1, \ldots, u^p$; тогда достаточно принять

$$f^\lambda = u^\lambda \quad (\lambda = p+1, \ldots, n).$$

Допустим, что разложение искомых форм $\varphi_i (i = 1, \ldots, p)$ по элементам нового базиса будет

$$\varphi_i = c_{ik}f^k + c_{i\lambda}f^\lambda, \qquad k = 1, \ldots, p, \quad \lambda = p+1, \ldots, n,$$

тогда

$$[f^i\varphi_i] = c_{ik}[f^if^k] + c_{i\lambda}[f^if^\lambda],$$

и равенство (2.11) примет вид

$$c_{ik}[f^if^k] + c_{i\lambda}[f^if^\lambda] = 0. \tag{2.13}$$

Во второй сумме каждый член содержит новую форму f^λ, которая нигде больше не встречается; следовательно, все коэффициенты $c_{i\lambda}$ равны нулю:

$$c_{i\lambda} = 0.$$

Значит *искомые формы* φ_i *разлагаются только по формам* $f^k (k = 1, \ldots, p)$. В первой сумме равенства (2.13) при суммировании по сочетаниям указателей i, k найдется два подобных члена (с одними и теми же формами f^i, f^k)

$$c_{ik}[f^if^k] + c_{ki}[f^kf^i] = (c_{ik} - c_{ki})[f^if^k].$$

Теперь равенство

$$\sum_{(i,k)} (c_{ik} - c_{kl}) [f^i f^k] = 0$$

не содержит подобных членов; следовательно, все коэффициенты равны нулю

$$c_{ik} - c_{kl} = 0.$$

Это и приводит к формулам (2.12).

Теорема 3. *Чтобы квадратичная форма*

$$F = \sum_{(i,j)} a_{ij} [u^i u^j] \qquad (2.14)$$

обращалась в нуль, если элементы базиса u^i ($i = 1, \ldots, n$) связаны соотношением

$$f = c_i u^i = 0, \qquad (2.15)$$

необходимо и достаточно, чтобы форма F была вида

$$F = [f, \varphi], \qquad (2.16)$$

где φ — подходяще выбранная линейная форма.

Действительно, если выбрать новый базис $f, f^1, \ldots, f^{n-1}$, то уравнение (2.14) примет вид

$$F = b_j [f f^j] + \sum_{(i,j)} b_{ij} [f^i f^j] \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

и после того, как мы внесем $f = 0$, получим условие

$$\sum_{(i,j)} b_{ij} [f^i f^j] = 0, \text{ т. е. } b_{ij} = 0.$$

Таким образом, форма F будет иметь вид

$$F = b_j [f f^j] = [f, b_j f^j],$$

совпадающий с формулой (2.16), если положить

$$\varphi = b_j f^j.$$

Теорема 4. *Чтобы квадратичная форма F обращалась в нуль в силу системы*

$$f^1 = 0, \ldots, f^p = 0, \tag{2.17}$$

где $f^i (i = 1, \ldots, p)$ — линейно независимые линейные формы, необходимо и достаточно, чтобы

$$F = [f^1 \varphi_1] + [f^2 \varphi_2] + \ldots + [f^p \varphi_p]. \tag{2.18}$$

Действительно, поскольку формы $f^i (i = 1, \ldots, p)$ линейно независимы, их можно дополнить формами $f^\lambda (\lambda = p + 1, \ldots, n)$ до полного линейно независимого базиса. После замены базиса квадратичная форма F примет вид

$$F = c_{ij} [f^i f^j] + c_{i\lambda} [f^i f^\lambda] + c_{\lambda\mu} [f^\lambda f^\mu]; \quad \begin{array}{l} i, j = 1, \ldots, p; \\ \lambda, \mu = p + 1, \ldots, n. \end{array}$$

После внесения в силу (2.17) $f^i = 0$ получим уравнение

$$[c_{\lambda\mu} f^\lambda f^\mu] = 0.$$

Таким образом, форма F примет вид

$$F = [f^i, c_{ij} f^j + c_{i\lambda} f^\lambda],$$

что совпадает с представлением (2.18), если положить

$$\varphi_i = c_{ij} f^j + c_{i\lambda} f^\lambda.$$

13. Внешний дифференциал. Так же как билинейную форму можно заменить внешней квадратичной формой, так билинейный ковариант Фробениуса

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = (da_1 \delta x^1 - \delta a_1 dx^1) + \ldots + (da_p \delta x^p - \delta a_p dx^p)$$

от формы

$$\omega = a_1 dx^1 + \ldots + a_p dx^p$$

можно представить как *внешний дифференциал*

$$d\omega = [da_1 dx^1] + \ldots + [da_p dx^p]. \tag{2.19}$$

Правило внешнего дифференцирования произведения скалярной функции на форму.

Пусть m — функция переменных $x^1, \ldots, x^n$ и ω — линейная форма

$$\omega = a_i dx^i.$$

Подсчитаем внешний дифференциал произведения $m\omega$:

$$d(m\,\omega) = d\{(ma_i)\,dx^i\} = [d(ma_i)\,dx^i],$$

но

$$d(ma_i) = m da_i + a_i dm.$$

Следовательно,

$$d(m\,\omega) = m\,[da_i dx^i] + [dm,\, a_i dx^i],$$

или

$$d(m\omega) = md\,\omega + [dm\,\omega]. \tag{2. 20}$$

ГЛАВА III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

14. Интегральное многообразие системы. Рассмотрим систему r уравнений Пфаффа

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \dots, \theta_r = 0, \tag{3.1}$$

где θ_α означают r линейных дифференциальных форм, построенных на $n+r$ переменных $x^1, x^2, \dots, x^{n+r}$ и их дифференциалах так, что коэффициенты при дифференциалах класса C^1, т. е. допускают непрерывные частные производные первого порядка. Будем предполагать эти формы линейно независимыми; иначе говоря, будем считать ранг матрицы коэффициентов $\mathfrak{M}$ равным r.

Пользуясь геометрическим языком, будем рассматривать переменные x^i как координаты точки в пространстве $n+r$ измерений и называть точку A этого пространства *общей точкой*, если для координат этой точки ранг матрицы $\mathfrak{M}$ в точности равен r.

Рассмотрим в этом пространстве n-мерное непрерывно дифференцируемое многообразие V, т. е. такое, что координаты любой из его точек можно выразить непрерывно дифференцируемыми функциями n параметров; будем говорить, что V — *интегральное многообразие системы* (3.1) или, что оно образует *решение системы* (3.1), если каждый из его касательных элементов, определяемых координатами некоторой точки многообразия V и направляющими параметрами $dx^1, dx^2, \dots, dx^{n+r}$ касательной к многообразию V в этой точке, удовлетворяет уравнениям (3.1). Если рассматриваемая точка A — общая точка пространства и определитель из r последних столбцов матрицы $\mathfrak{M}$ в этой точке не равен нулю, что всегда можно допустить, меняя в случае надобности нумерацию координат, то уравнения (3.1) можно разрешить в окрестности точки A относительно дифференциалов $dx^{n+1}, \dots, dx^{n+r}$; следовательно, переменные $x^{n+1}, \dots, x^{n+r}$, рассматриваемые на многообразии V как функции параметров $x^1, x^2, \ldots, x^n$, допускают в точке A и во всех точках, достаточно близких к точке A, непрерывные производные первого порядка.

Полагая для удобства изложения

$$x^{n+\alpha} = z^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

и оставляя для указателей i, j только значения $i, j = 1, \ldots, n$, можем записать формы θ_α в виде

$$\theta_\alpha = c_{\alpha\beta}\, dz^\beta + a_{\alpha i} dx^i \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r), \tag{3.2}$$

$$det\,|\, c_{\alpha\beta} \,| \neq 0$$

и определить многообразие V посредством r уравнений

$$z^\alpha = z^\alpha (x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r) \tag{3.3}$$

Поскольку z^α допускают непрерывные частные производные первого порядка, можно сказать, что всякая точка интегрального многообразия, которая является общей точкой пространства, будет *регулярной* точкой многообразия: это и означает возможность в окрестности этой точки аналитического представления многообразия V в виде (3.3).

15. **Необходимое условие полной интегрируемости.** Определение. *Система Пфаффа* (3.1) *называется вполне интегрируемой, если через каждую общую точку пространства проходит одно интегральное многообразие.*

Конечно, мы требуем существования этого интегрального многообразия в достаточно малой окрестности рассматриваемой общей точки.

Нетрудно найти необходимое условие полной интегрируемости. Действительно, образуем внешние дифференциалы форм θ_α: это будут внешние квадратичные формы, построенные на переменных $x^k (k = 1, \ldots, n + r)$ и их дифференциалах.

В окрестности общей точки A, для которой имеют место сделанные выше допущения, уравнения (3.2) разрешаются относительно dz^β и внешняя квадратичная форма $d\theta_\alpha$ будет выражена через n дифференциалов dx^i и r линейно независимых форм θ_β. Мы получим

и $$d\theta_\alpha = \frac{1}{2} A_{\alpha ij} [dx^i\, dx^j] + B^\beta_{\alpha i} [dx^i\, \theta_\beta] + \frac{1}{2} C^{\beta\gamma}_\alpha [\theta_\beta\, \theta_\gamma], \tag{3.4}$$

где индексы суммирования пробегают значения $i, j = 1, \ldots, n$; $\beta, \gamma = 1, \ldots, r$ и

$$A_{\alpha ij} = - A_{\alpha ji}, \quad C^{\beta\gamma}_\alpha = - C^{\gamma\beta}_\alpha.$$

Пусть теперь V — интегральное многообразие, содержащее общую точку A; если перемещаться по этому многообразию, то формы θ_α будут тождественно равны нулю и точно также формы $d\theta_\alpha$; левая часть равенства (3.4) и две последние суммы правой части обратятся в нули. С другой стороны, в окрестности точки A, для которой имеет место аналитическое представление (3.3), переменные $x^1, \ldots, x^n$ остаются независимыми, и, следовательно, коэффициенты $A_{\alpha ij}$ в соотношениях (3.4) будут равны нулю. Отсюда вытекает существование в этой окрестности тождеств вида

$$d\theta_\alpha = [\tilde{\omega}_\alpha^\beta \theta_\beta], \tag{3.5}$$

где $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ — подходяще выбранные линейные дифференциальные формы с непрерывными функциями в качестве коэффициентов; можно положить, например,

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = B_{\alpha i}^\beta dx^i + \frac{1}{2} C_\alpha^{\gamma\beta}\theta_\gamma .$$

Условие (3.4) можно рассматривать как необходимое условие полной интегрируемости системы (3.1). Еще проще можно написать его в виде сравнений

$$d\theta_\alpha \equiv 0 \qquad (mod\, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r). \tag{3.6}$$

16. Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы уравнений Пфаффа. Теперь мы формулируем общую теорему для вполне интегрируемых систем Пфаффа.

Теорема. *Чтобы система Пфаффа* (3.1) *была вполне интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой общей точки пространства внешние дифференциалы* $d\theta_\alpha$ *левых частей системы были сравнимы с нулем по модулю этих левых частей* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

Это необходимое и достаточное условие можно высказать другими словами: *система внешних дифференциалов*

$$d\theta_1 = 0, \quad d\theta_2 = 0, \ldots, \quad d\theta_r = 0 \tag{3.7}$$

должна быть алгебраическим следствием системы (3.1).

Действительно, из равенств (3.5) прямо вытекает обращение в нуль системы (3.7), если равны нулю $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$. С другой стороны, из теоремы 4 п.12 непосредственно следует, что квадратичные формы $d\theta_\alpha$, обращающиеся в нуль, как алгебраическое следствие системы $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0, \ldots, \theta_r = 0$, имеют строение вида (2.18), что в точности совпадает с условием (3.5).

Переходим к доказательству основной теоремы. Необходимость условия (3.5) или (3.6) вытекает из построения этого тождества. Для доказательства достаточности мы рассмотрим несколько вспомогательных теорем.

Нам будет удобно рассмотреть n-мерное пространство параметров с точками (x^i).

Теорема 1. *Система* (3.1) *допускает не более одного решения* (3.3) *с начальными значениями*

$$z^\alpha = z_0^\alpha \text{ для } x^i = x_0^i; \quad z_0^\alpha, \; x_0^i = \text{const}. \tag{3.8}$$

Допустим, что решение (3.3) существует, тогда мы можем найти его значение в точке $M(x^i)$. Берем в пространстве (x^i) точку $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и задаемся значениями $z_0^1, \ldots, z_0^r$. Допустим, что точка $M(x^i)$ лежит вместе с точкой M_0 в одной односвязной области, где имеет место аналитическое представление (3.3). Покажем, что в точке $M(x^i)$ функции z^α получают вполне определенные значения. Для этого соединим точку M_0 с точкой M путем, проходящим внутри рассматриваемой области

$$x^1 = f^1(t), \quad x^2 = f^2(t), \ldots, x^n = f^n(t), \tag{3.9}$$

где t — параметр, определяющий положение точки на линии M_0M, со значением $t = t_0$ в точке M_0, и все функции $f^i(t)$ класса C^1.

Внося выражения (3.9) в уравнения (3.1), деля на дифференциал dt и разрешая их в силу п. 14 относительно производных $\frac{dz^\alpha}{dt}$, получим для неизвестных функций z^α систему Коши

$$\frac{dz^\alpha}{dt} = Z^\alpha(t; z^1, \ldots, z^r). \tag{3.10}$$

Наше решение (3.3) должно удовлетворять этой системе, а поскольку система Коши допускает только одно решение с заданными начальными значениями (3.8), то это решение будет единственным.

17. Независимость решения от пути интегрирования. Теорема 2. *Если условие* (3.5) *или* (3.6) *удовлетворено, то в окрестности общей точки M_0 при заданном непрерывном семействе путей, соединяющих точку M_0 с точкой M, значение (z^α) не будет зависеть от пути интегрирования.*

Рассмотрим односвязную область в пространстве параметров (x^i), в ней две точки M_0 и M_1, достаточно близкие, чтобы при интегрировании системы (3.10) по любому пути непрерывного семейства линий

$$x^1 = f^1(t, \alpha), \quad x^2 = f^2(t, \alpha), \ldots x^n = f^n(t, \alpha), \tag{3.11}$$

соединяющих точку M_0 с точкой M_1, интервал, на который распространяется теорема существования решения Коши, содержал точку M_1 как внутреннюю точку.

В уравнениях (3.11) параметр t по-прежнему определяет точку на линии семейства M_0M_1 со значениями $t = 0$ в точке M_0, $t = 1$ в точке M_1; параметр α определяет линию семейства; функции $f^i(t,\alpha)$ класса C^1. По каждому из этих путей мы интегрируем систему (3.1), выходя из точки M_0 с одним и тем же начальным значением (3.8). Надо доказать, что независимо от выбора пути мы придем в точку M_1 с одними и теми же значениями z^α.

Введем два символа дифференцирования:

1) вдоль пути интегрирования

$$d = \frac{\partial}{\partial t};$$

2) при переходе от одного пути к другому

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

В точке M_0, т. е. для $t = 0$, все пути сходятся и все неизвестные функции z^α принимают одни и те же начальные значения $z^\alpha = z_0^\alpha$. Следовательно, вариации равны нулю

$$\delta x^i = 0, \quad \delta z^\alpha = 0,$$

и мы имеем для $t = 0$

$$\theta_\alpha(\delta) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{3.12}$$

В точке M_1, т. е. для $t = 1$, все пути сходятся и

$$\delta x^i = 0;$$

надо лишь доказать, что $\delta z^\alpha = 0$. Пользуясь формулой (3.2), имеем для $t = 1$

$$\theta_\alpha(\delta) = c_{\alpha 1}\frac{\partial z^1}{\partial \alpha} + c_{\alpha 2}\frac{\partial z^2}{\partial \alpha} + \ldots + c_{\alpha r}\frac{\partial z^r}{\partial \alpha}. \tag{3.13}$$

В любой точке линии M_0M_1, т. е. для любого t, интегрируем систему $\theta_\alpha = 0$; следовательно, всюду

$$\theta_\alpha(d) = 0. \tag{3.14}$$

Расписываем теперь квадратичные формы (3.5) для двух символов дифференцирования

$$d\theta_\alpha(\delta) - \delta\theta_\alpha(d) = \tilde{\omega}_\alpha^\beta(d)\,\theta_\beta(\delta) - \tilde{\omega}_\alpha^\beta(\delta)\,\theta_\beta(d). \tag{3.15}$$

В силу соотношений (3.14) пропадает $\theta_\alpha(d)$, и мы имеем

$$d\,\theta_\alpha(\delta) = \tilde{\omega}_\alpha^\beta(d)\,\theta_\beta(\delta). \qquad (3.16)$$

Введем обозначения

$$\theta_\alpha(\delta) = H_\alpha, \quad \tilde{\omega}_\alpha^\beta(d) = p_\alpha^\beta\,dt;$$

система (3.14) примет вид системы Коши для одного независимого переменного t

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial t} = p_\alpha^1 H_1 + p_\alpha^2 H_2 + \ldots + p_\alpha^r H_r. \qquad (3.17)$$

Начальные условия получаем из равенств (3.12)

$$H_\alpha = 0 \text{ для } t = 0. \qquad (3.18)$$

Система Коши (3.17) имеет только одно решение при заданном начальном условии. Это решение очевидно: поскольку система (3.17) однородна, она допускает нулевое решение, которое удовлетворяет и условию (3.18).

Следовательно,

$$\theta_\alpha(\delta) = 0 \text{ и для } t = 1.$$

Уравнения (3.13) дают теперь для производных $\frac{\partial z^1}{\partial \alpha}, \frac{\partial z^2}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial z^r}{\partial \alpha}$ в точке $t = 1$ однородную систему с отличным от нуля определителем

$$\det|c_{\alpha\beta}| \neq 0.$$

Значит, все

$$\frac{\partial z^\beta}{\partial t} = 0,$$

и значения z^β в точке M_1 не зависят от пути интеграции.

18. Сведение задачи интегрирования вполне интегрируемой системы к интегрированию системы Коши. Теорема 3. *Задача интегрирования вполне интегрируемой системы сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Коши.*

Пусть $A(x_0^i, z_0^\alpha)$ — общая точка пространства, удовлетворяющая поставленным выше условиям. Всякое интегральное многообразие, проходящее через точку A, допускает аналитическое представление (3.3). Вводим в n-мерном пространстве параметров (x^i) полярную систему координат с началом в точке A посредством уравнений

$$x^i - (x^i)_0 = ta^i, \tag{3.19}$$

где t — новая, существенно положительная координата. Параметры a^i принимают любые значения, удовлетворяющие условию

$$(a^1)^2 + (a^2)^2 + \ldots + (a^n)^2 = 1; \tag{3.20}$$

для всякой системы значений a^i точка (x^i) описывает при изменении t полупрямую, выходящую из точки A; все полупрямые заполнят n-мерное пространство. Эти прямые теперь будут представлять собой непрерывное семейство путей (3.11). После замены dx^i на $a^i\,dt$ и $dx^{n+\alpha}$ на dz^α получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz^\alpha}{dt} = Z^\alpha (a^i, t, z^\beta) \tag{3.21}$$

с начальными значениями

$$z^\alpha = (z^\alpha)_0 \text{ для } t = 0.$$

В полученном решении мы можем положить $t = 1$ и считать a^i произвольными величинами, не связанными условием (3.20). Внося вместо a^i значения (3.19), получим уравнение интегрального многообразия V.

Полученные значения неизвестных функций z^α в каждой точке (x^i) односвязной области составляют решение системы (3.1).

Действительно, произвольную точку M этой области можно соединить путями с точками M' ее окрестности так, чтобы совокупность касательных к этим путям в точке M совпадала со всей связкой прямых в точке M пространства (x^i). Так как значения (z^α) получались интегрированием системы (3.1), то значения (z^α), (dz^α) вдоль этих путей удовлетворяют системе (3.1). В частности, в точке M значения (z^α), (dz^α), (x^i), (dx^i) соответствуют точке M и любой касательной из этой точки. Следовательно, можно рассматривать dx^i как вполне произвольные величины (дифференциалы независимых переменных), а dz^α — как полные дифференциалы функций (z^α). Они удовлетворяют системе (3.1); следовательно, (z^α) составляют решение вполне интегрируемой системы (3.1), соответствующее начальным значениям

$$z^\alpha = (z^\alpha)_0 \text{ для } x^i = (x^i)_0.$$

19. Первые интегралы вполне интегрируемой системы. Рассмотрим вполне интегрируемую систему

$$\theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{3.22}$$

Общее решение такой системы

$$z^\alpha = f^\alpha (x^1, \ldots, x^n; u^1, \ldots, u^r) \tag{3.23}$$

содержит r произвольных постоянных — начальных значений неизвестных функций

$$u^\alpha = z_0^\alpha \quad \text{для} \quad x^i = x_0^i \, (i = 1, \ldots, n). \tag{3.24}$$

Система (3.23) содержит два ряда значений неизвестных функций: z^α в точке (x^i) и $u^\alpha = z_0^\alpha$ в точке M_0. Они равноправны, поэтому систему (3.23) можно разрешить относительно постоянных

$$u^\alpha = F^\alpha (x^1, \ldots, x^n; z^1, \ldots, z^r). \tag{3.25}$$

Функции u^α становятся постоянными, когда z^α будут заменены их значениями в виде функций от всех x^i $(i = 1, \ldots, n)$. Они называются *первыми интегралами* системы. Сама система (3.22) эквивалентна системе

$$dF^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{3.26}$$

Следовательно, система (3.22) вполне интегрируема, если она алгебраически эквивалентна системе вида (3.26).

20. Соотношение между внешними дифференциалами и формулой Стокса. В трехмерном пространстве, как известно из анализа, формула Стокса записывается в виде

$$\oint_L (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right\}, \tag{3.27}$$

где справа интеграл берется по площади S простого куска поверхности, ограниченного контуром L, а слева — по этому контуру. В записи интеграла по поверхности, например,

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz$$

произведение дифференциалов $dydz$ надо понимать как внешнее произведение, ибо при преобразовании переменных, например,

$$y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

произведение $dydz$ преобразуется по формуле

$$dydz \to \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

что в точности соответствует преобразованию внешнего произведения

$$[dy\, dz] = \left[\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv, \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial u}\right)[du\, dv].$$

Если воспользоваться этой записью, то можно отметить замечательный факт.

Положим

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

и подсчитаем внешний дифференциал этой формы

$$d\omega = \left[\frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz, dx\right] + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial z} dz, dy\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy, dz\right],$$

или, собирая члены с произведениями $[dydz]$, $[dzdx]$, $[dxdy]$,

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)[dy\, dz] + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)[dz\, dx] +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[dx\, dy].$$

Это в точности совпадает с подынтегральным выражением правой части равенства (3.27).

Таким образом, формулу Стокса (3.27) можно записать в виде

$$\int_L \omega = \iint_S d\,\omega. \tag{3.28}$$

Справедливость этой формулы можно увидеть из таких инфинитезимальных соображений.

Рассмотрим замкнутый контур, ограничивающий некоторую область поверхности

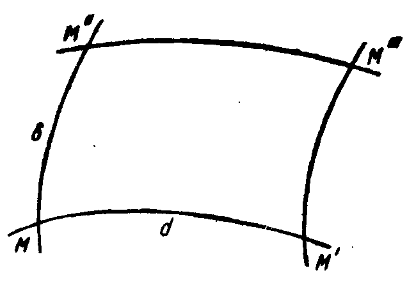
$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v).$$

Разобьем всю область интегрирования на криволинейные параллелограммы, определяемые пересечением координатных линий. Для определения криволинейного интеграла по контуру области можно сложить интегралы по контурам каждого элементарного параллелограмма. При сложении интегралы по внутренним делениям, проходимым дважды навстречу, сократятся, и мы получим интеграл по контуру области, а интегралы по площадям сложатся. Таким образом, достаточно доказать формулу (3.28) для элементарного параллелограмма.

21. Ориентация. Формула Стокса (3.28) предполагает согласованный выбор положительного обхода по контуру и положительной стороны поверхности для интеграла по поверхности.

В некоторой точке M поверхности S можно произвольно установить положительное направление вращения. Это положительное направление вращения можно шаг за шагом переносить от точки к точке по принципу непрерывности.

Обозначая буквами M, M', M'', M''' вершины криволинейного параллелограмма (фиг. 1) так, что смещение MM' вдоль



Фиг. 1

линии u и смещение MM'' вдоль линии v соответствуют символам дифференцирования

$$d = \alpha \frac{\partial}{\partial u}, \qquad \delta = \beta \frac{\partial}{\partial v},$$

$$\int_{M}^{M'} = \omega(d), \qquad \int_{M}^{M''} = -\omega(\delta).$$

Смещение $M'M''$ тоже идет вдоль линии v, а $M''\ M'''$—вдоль линии u, но уже с новыми значениями u или v так, что можно положить

$$\int\limits_{M'}^{M'''} = \omega(\delta) + d\,\omega(\delta), \quad \int\limits_{M'''}^{M'} = -\,\omega(d) - \delta\,\omega(d).$$

Складывая, получим для интеграла по контуру

$$\int\limits_{MM'M'''M''M} \omega = \omega(d) + \{\omega(\delta) + d\,\omega(\delta)\} + \{-\,\omega(d) - \delta\omega(d)\} -$$
$$-\,\delta\,\omega(d) = d\,\omega(\delta) - \delta\,\omega(d),$$

т. е. элемент интеграла по поверхности в правой части равенства (3.28). Если это направление будет сохраняться при обходе по каждому замкнутому контуру, то поверхность будет называться *ориентируемой* (двусторонней).

Точно так же можно ориентировать поверхность, присоединяя к каждой точке бивектор (совокупность двух касательных векторов, взятых в определенном порядке).

От ориентированной поверхности нетрудно перейти к ориентации контура (положительное направление на контуре). Если взять точку M на контуре и первый вектор из точки M направить вне области, ограниченной контуром, а второй по касательной в положительном направлении контура, то ориентации контура и поверхности будут согласованы, если построенный бивектор будет положительным относительно выбранных для ориентации поверхности бивекторов.

ГЛАВА IV

ОБОБЩЕНИЕ

22. Внешние дифференциальные формы любого порядка. Рассмотрим внешнюю квадратичную форму

$$\omega = a_{ij}[dx^i dx^j]$$

и присоединенную билинейную форму

$$\omega(d, \delta) = \sum_{(i,j)} a_{ij}(dx^i \delta x^j - dx^j \delta x^i).$$

Написанное для трех символов дифференцирования d_1, d_2, d_3 выражение

$$d_1\omega(d_2 d_3) + d_2\omega(d_3 d_1) + d_3\omega(d_1 d_2) \tag{4. 1}$$

не будет содержать дифференциалов второго порядка. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть один член

$$\omega = A[dx\,dy] = A\begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}.$$

Выражение (4.1) будет содержать только следующие члены со вторыми дифференциалами

$$A\begin{vmatrix} d_1d_2x & d_1d_2y \\ d_3x & d_3y \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d_2d_3x & d_2d_3y \\ d_1x & d_1y \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d_3d_1x & d_3d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix} +$$
$$+ A\begin{vmatrix} d_2x & d_2y \\ d_1d_3x & d_1d_3y \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d_3x & d_3y \\ d_2d_1x & d_2d_1y \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_3d_2x & d_3d_2y \end{vmatrix}.$$

В силу переместительности символов дифференцирования

$$d_1 d_2 x d_3 y - d_2 d_1 x d_3 y = 0$$

и аналогичные уничтожаются и остаются только

$$\begin{vmatrix} d_1A & d_2A & d_3A \\ d_1x & d_2x & d_3x \\ d_1y & d_2y & d_3y \end{vmatrix} = [dA\, dx\, dy].$$

Это *трилинейный ковариант, или внешний дифференциал квадратичной формы* ω:

$$d\omega = \sum_{(i,j)} [da_{ij}\, dx\, dy]. \qquad (4.2)$$

Отсюда *правило внешнего дифференцирования* внешней формы любого порядка: если внешняя форма ω порядка p имеет общий член вида

$$A\,[dx^1\, dx^2 \ldots dx^p],$$

то внешним дифференциалом $d\omega$ называется внешняя форма порядка $p+1$ с общим членом

$$[dA\, dx^1 \ldots dx^p].$$

Внешнее умножение внешних форм любого порядка. При внешнем умножении двух внешних форм порядков p и q каждый член одной формы умножается на каждый член другой с сохранением порядка множителей, а при перемножении одночленов коэффициенты перемножаются, а линейные формы каждого одночлена переписываются с сохранением порядка.

Если мы перемножим внешним образом формы порядков p и q

ω с общим членом $A\cdot[dx^1 dx^2 \ldots dx^p]$,

$\bar{\omega}$ с общим членом $B\ [dy^1\, dy^2 \ldots dy^q]$,

то получим внешнее произведение порядка $p+q$

$[\omega\bar{\omega}]$ с общим членом $AB\,[dx^1\, dx^2 \ldots dx^p\, dy^1 \ldots dy^q]$. (4.3)

Правило дифференцирования произведения внешних форм. Допустим, что мы дифференцируем произведение (4.3). Общий член внешнего дифференциала $d[\omega\bar{\omega}]$ будет

$$[d(AB), dx^1 \dots dx^p dy^1 \dots dy^q] =$$
$$= B[dAdx^1 \dots dx^p dy^1 \dots dy^q] + A[dBdx^1 \dots dx^p dy^1 \dots dy^q].$$

Первый член можно написать в виде

$$B[dAdx^1 \dots dx^p dy^1 \dots dy^q] = [d\omega, \bar{\omega}].$$

Второй член, если dB поменять местами по очереди с дифференциалами $dx_1, \dots, dx^p$, меняя каждый раз знак, преобразуется в

$$A[dBdx^1 \dots dx^p dy^1 \dots dy^q] =$$
$$= (-1)^p [Adx^1 \dots dx^p dBdy^1 \dots dy^q] = (-1)^p [\omega d\bar{\omega}].$$

Итак,

$$d[\omega\bar{\omega}] = [d\omega\bar{\omega}] + (-1)^p [\omega d\bar{\omega}], \qquad (4.4)$$

где p — порядок первой формы ω.

23. Теорема Пуанкаре. *Второй внешний дифференциал от дифференциальной формы тождественно равен нулю.*

Рассмотрим один из членов формы ω

$$A[dx^1 \dots dx^p].$$

Внешний дифференциал его равен

$$[dAdx^1 \dots dx^p]. \qquad (4.5)$$

Если A — функция переменных $x^1, x^2, \dots, x^p$, то dA будет линейной комбинацией дифференциалов $dx^1, dx^2, \dots, dx^p$, и внешнее произведение (4.5) обращается в нуль. Если A — функционально независимо от $x^1, \dots, x^p$, т. е. содержит хотя бы одну независимую переменную x^{p+1}, то, сменив базис, можно считать dA за дифференциал новой независимой перемеиной.

Поскольку теперь коэффициент при произведении дифференциалов равен единице, а при составлении внешнего дифференциала надо умножить слева внешнее произведение дифференциалов на дифференциал коэффициента, а он будет равен нулю, то мы получим

$$d(d\omega) = 0. \qquad (4.6)$$

24. Формула Остроградского.

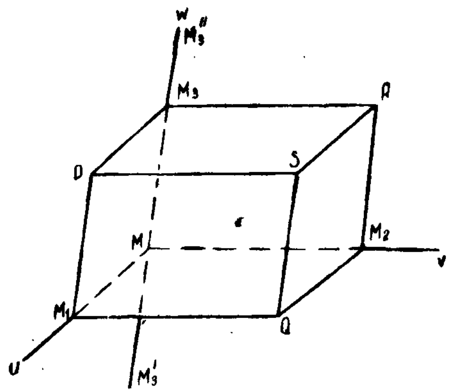
$$\iint_F (A dy\, dz + B dz\, dx + C dx\, dy) =$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz. \qquad (4.7)$$

Речь идет о распространении этой формулы на n-мерное пространство. В пространстве n измерений рассмотрим трехмерную область D (т. е. предположим, что существует система параметров u, v, w такая, что можно каждой точке области D сопоставить взаимно-однозначно тройку чисел u, v, w), ограниченную двумерной поверхностью F. Если ω — внешняя квадратичная форма, то имеем

$$\iint_F \omega = \iiint_D d\,\omega. \qquad (4.8)$$

Предположим, что область D ориентируема, гомеоморфна аналитическому кубу, т. е. можно выбрать параметры u, v, w так, чтобы они устаиавливали взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками области D и точками аналитического куба. Ориентацией может служить тривектор, образованный координатным трехгранником, направления трех осей которого соответствуют положительным приращениям du, dv и dw (фиг. 2).



Фиг. 2

Введем символы дифференцирования

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Внешний дифференциал $d\omega$ в трилинейной форме запишется

$$d\,\omega(d_1 d_2 d_3) = d_1\,\omega(d_2 d_3) + d_2\,\omega(d_3 d_1) + d_3\,\omega(d_1 d_2).$$

После интегрирования по объему «параллелепипеда» $MM_1M_2M_3$ получим

$$\iiint\limits_{MM_1M_2M_3} d\,\omega(d_1 d_2 d_3) = -\iint\limits_{MM_2RM_3} \omega(d_2 d_3) + \iint\limits_{M_1QSP} \omega(d_2 d_3) -$$

$$-\iint\limits_{MM_1PM_3} \omega(d_3 d_1) + \iint\limits_{M_2QSR} \omega(d_3 d_1) - \iint\limits_{MM_1QM_2} \omega(d_1 d_2) + \iint\limits_{M_1PSR} \omega(d_1 d_2).$$

Согласование знаков: если бивектор MM_1M_2 отрицателен, то тривектор $MM'_3M_1M_2$ отрицателен; если бивектор M_3PQ положителен, то и тривектор $M_3M''_3PQ$ положителен и т. д. Это преобразование можно обобщить на любое число измерений. Пусть дана область D размерности $p+1$ и ее граница F—p измерений. Допустим, что область допускает ориентацию, т. е. можно задать положительный порядок векторов репера в каждой точке, непрерывно переносимый от точки к точке. Ориентация области D переносится на ее границу F, именно, если точка M лежит на границе F и $\overrightarrow{\mathbf{MT}}$ внешний вектор (направлен из точки M во внешнюю часть пространства), а $\overrightarrow{\mathbf{MT}}_1$, $\overrightarrow{\mathbf{MT}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{MT}}_p$ — векторы внутри p-мерного многообразия F, то поливектор $MT_1\ldots T_p$ положителен, если объемлющий поливектор $MTT_1\ldots T_p$ положителен, при этих условиях

$$\int\limits_F^{(p)} \omega = \int\limits_D^{(p+1)} d\,\omega. \qquad (4.9)$$

25. Обобщение теоремы 1 п. 12. Теорема. *Необходимым и достаточным условием, чтобы внешнее произведение формы F на линейную форму f обращалось в нуль, будет равенство формы F произведению f на подходящую форму φ.*

Доказательство. *Это условие достаточно.* Если

$$F = [f\varphi],$$

то

$$[Ff] = [f\varphi f] = 0,$$

ибо каждый член присоединенной полилинейной формы будет иметь вид определителя с двумя равными строками. *Это усло-*

вие необходимо. Заменим базис линейных форм, включив в новый базис форму f:

$$f, f^1, \ldots, f^{n-1}.$$

Если бы в новом базисе после приведения подобных членов форма F имела член, не содержащий множителей f

$$a_{12\ldots p}[f^1, f^2, \ldots, f^p], \tag{4.10}$$

то произведение

$$[Ff] = 0$$

содержало бы член

$$a_{12\ldots p}[f^1, f^2, \ldots f^p, f],$$

который не равен нулю, ибо все множители $f^1, f^2, \ldots, f^p, f$ — различные формы базиса, и который не может уничтожиться с другими членами произведения $[Ff]$, ибо форма F имеет только один член (4.10) с таким набором базисных форм.

Пример. Дана форма

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Уравнение $\omega = 0$ вполне интегрируемо, если $d\omega = 0$ есть алгебраическое следствие $\omega = 0$.

В силу доказанной теоремы это условие эквивалентно уравнению

$$[\omega, d\omega] = 0.$$

Поскольку

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)[dydz] + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)[dzdx] + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[dxdy],$$

$$[\omega, d\omega] = \left\{P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \\ + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}[dxdydz],$$

то условием полной интегрируемости будет обращение в нуль фигурной скобки.

А. ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА V

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОГООБРАЗИЯ РЕПЕРОВ ПРИ ЗАДАННЫХ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТАХ ω^i, ω_i^j

26. Многообразие косоугольных трехгранников. Мы возвращаемся к геометрическим проблемам. В начале второй главы была поставлена задача: при заданных компонентах ω^i, ω_i^j инфинитезимальных смещений ортонормированного трехграиника существует ли многообразие трехгранников, допускающих такие компоненты?

Нам будет удобнее рассмотреть сначала случай косоугольных трехгранников, когда векторы репера не связаны никакими дополнительными условиями, кроме условия линейной независимости.

Обратимся к системе (1.9)

$$\left.\begin{aligned} d\vec{\mathbf{M}} &= \omega^i\vec{\mathbf{e}}_i, \\ d\vec{\mathbf{e}}_i &= \omega_i^j\vec{\mathbf{e}}_j \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

и допустим, что формы ω^i, ω_i^j заданы линейными комбинациями дифференциалов du^α с коэффициентами класса C^1. Если система (I) допускает решение, то подставив его в уравнения (I), мы получим тождества, которые можно почленно дифференцировать.

Дифференцируя внешним образом в этом предположении обе части равенств (I), мы получим в левой части нуль (внешний дифференциал от полного дифференциала), а в правой части будет

$$[d\vec{\mathbf{e}}_i\omega^i] + \vec{\mathbf{e}}_i d\omega^i = 0,$$

$$[d\vec{e}_j\,\omega_i^j] + \vec{e}_j\,d\,\omega_i^j = 0,$$

или, внося по формулам (I) $d\vec{e}_i$, $d\vec{e}_j$, получим

$$[\omega_i^j\,\omega^i]\,\vec{e}_j + \vec{e}_i d\,\omega^i = 0,$$

$$[\omega_j^k\,\omega_i^j]\,\vec{e}_k + \vec{e}_j\,d\,\omega_i^j = 0;$$

сменив в первых членах индексы суммирования (в первом уравнении i на j, во втором k на j) и вынося за скобку общий множитель соответственно $\vec{e}_i$ или $\vec{e}_j$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_i\,\{d\omega^i + [\omega_j^i\,\omega^j]\} = 0, \\ \vec{e}_j\,\{d\omega_i^j + [\omega_k^j\,\omega_i^k]\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

По условию базисные векторы $\vec{e}_i$ линейно независимы, следовательно, обращаются в нуль выражения в фигурных скобках

$$\left.\begin{aligned} d\,\omega^i = [\omega^j\,\omega_j^i], \\ d\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j]. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Это *структурные уравнения пространства*. Им должны удовлетворять решения системы (I), если они существуют. Покажем, что эти условия не только необходимы, но и достаточны, чтобы система (I) определяла многоообразие трехгранников.

Теорема. *Если линейные формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям* (II), *то система* (I) *вполне интегрируема, и для всякого начального положения невырожденного трехгранника T_0 (совокупность векторов $\vec{M}_0$, $\vec{e}_i^{\,0}$ в точке M_0) определяет многообразие реперов, получаемых из начального T_0 подходящими афинными преобразованиями.*

Действительно, мы видели, что внешнее дифференцирование уравнений системы (I) приводит с помощью уравнений системы к системе (5.1). Уравнения этой системы обращаются в тождества, если формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям (II). Следовательно, система (I) в условиях теоремы вполне интегрируема, и для всяких начальных значений координат вектора $\vec{M}_0$ и независимых векторов $\vec{e}_i^{\,0}$ для $u^\alpha = u_0^\alpha$ существует решение с таким числом независимых переменных u^α (не больше 12), с каким числом этих параметров заданы линейные дифференциальные формы ω^i, ω_i^j.

27. Многообразие ортонормированных трехгранников. Уравнения инфинитезимальных смещений ортонормированного трехгранника (1.1) представляют частный случай общей системы (1.9). Следовательно, доказанная теорема существования решения распространяется и на эту систему. Однако здесь мы имеем добавочные условия (1.3) п. 2. Докажем, что если начальный трехгранник T_0 удовлетворяет этим условиям, то и все трехгранники T интегрального многообразия будут им удовлетворять. Запишем уравнения (1.3) более компактно в виде

$$\vec{\mathbf{I}}_i \vec{\mathbf{I}}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{5.2}$$

Мы предполагаем, что условия (5.2) удовлетворены в точке M_0, т. е. для $u^\alpha = u_0^\alpha$.

Обозначим вообще

$$\vec{\mathbf{I}}_i \vec{\mathbf{I}}_j = g_{ij}. \tag{5.3}$$

Дифференцируя это тождество и пользуясь уравнениями (1.1), получим

$$dg_{ij} = \vec{\mathbf{I}}_j d\vec{\mathbf{I}}_i + \vec{\mathbf{I}}_i d\vec{\mathbf{I}}_j = \vec{\mathbf{I}}_j \omega_i^k \vec{\mathbf{I}}_k + \vec{\mathbf{I}}_i \omega_j^k \vec{\mathbf{I}}_k,$$

или в силу (5. 3)

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}. \tag{5.4}$$

При заданных формах ω_i^j это система дифференциальных уравнений (в полных дифференциалах) для неизвестных функций g_{ij}. Мы видели (теорема 1, п. 16), что такая система допускает не более одного решения с начальными значениями

$$g_{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{для } u^\alpha = u_0^\alpha, \tag{5.5}$$

но такое решение очевидно; оно определяется, теперь для всех значений переменных u^α, уравнениями (5.5) После подстановки значений (5.5) в левой части получим нули, а в правой

$$\omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^k \delta_{ik} = 0,$$

или

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0,$$

что, очевидно, удовлетворено в силу (1.4).

Следовательно, достаточно выбрать ортонормированным начальный трехгранник, чтобы все трехгранники обладали этим свойством и мы имели решение нашей задачи.

28. Многообразие косоугольных трехгранников с заданным линейным элементом. Ортонормированный трехгранник имеет все базисные векторы $\mathbf{I}_i$ взаимно-перпендикулярными с длиной, равной единице. Такие трехгранники, если они одной ориентации (например, все правые, как мы условились в п. 1), конгруэнтны. Поэтому мы говорим, что система (1.1) при условиях (1.4) и (II) определяет движение трехгранника в пространстве, а система (1.1) при условии (II), но без уравнений (1.4) определяет инфинитезимальные афинные преобразования трехгранника.

Однако не следует думать, что это заключение неразрывно связано с ортонормированностью реперов. Легко заметить, что уравнения (1.4) представляют частный случай системы (5.4) и получаются из нее в силу соотношений (1.3). Если мы сохраним систему (5.4) и зададимся произвольным начальным репером (невырожденным), т. е. для $u^\alpha = u_0^\alpha$ значениями векторов $\vec{M}_0^\alpha$, $\vec{e}_i^0$, лишь бы векторы $\vec{e}_i^0$ не лежали в одной плоскости, то различным начальным реперам будут соответствовать афинные преобразования полученного многообразия трехгранников, ибо существует одно и только одно афинное преобразование пространства, которое переводит начальный трехгранник в произвольно заданный (невырожденный) трехгранник, а если совпадут начальные реперы, то совпадает все первое многообразие реперов со вторым, так как линейное с постоянными коэффициентами афинное преобразование векторов одновременно в левой и правой частях уравнений (1.9) не меняет относительных компонентов ω^i, ω_i^j.

Если же мы преобразуем начальный репер, сохраняя начальные значения коэффициентов (1.10)

$$g_{ij} = g_{ij}^0 \text{ для } u^\alpha = u_0^\alpha,$$

то система (5.4) дает то же решение и в каждой точке останется тот же линейный элемент пространства (1.12) Все расстояния будут сохранены и преобразование интегрального многообразия реперов будет простым перемещением (ср. п. 32).

29. Интегрирование системы (I) методом инвариантности форм. Рассмотрим все ортонормированные трехгранники обычного евклидова пространства. Они определяются тремя координатами x, y, z вершины M и тремя эйлеровыми углами θ, φ, ψ, определяющими поворот трехгранника.

Подсчитаем для этих трехгранников компоненты инфинитезимальных смещений

$$\tilde{\omega}^i(x, y, z, \theta, \varphi, \psi;\ dx, dy, dz, d\theta, d\varphi, d\psi),$$

$$\tilde{\omega}_i^j\ (x, \ldots, \psi; dx \ldots, d\psi).$$

Это линейные формы, соответствующие любому действительному перемещению ортонормированного трехгранника в пространстве. Следовательно, они удовлетворяют уравнениям структуры

$$\left.\begin{aligned} d\tilde{\omega}^i &= [\tilde{\omega}^k \tilde{\omega}_k^i], \\ d\tilde{\omega}_i^j &= [\tilde{\omega}_i^k \tilde{\omega}_k^j]. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Если существует решение системы (1.1) для форм ω^i, ω_i^j, которое соответствует перемещению трехгранника в пространстве, то должны существовать такие функции x, y, z, θ, φ, ψ от переменных u^α, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}^i(x, \ldots \psi, dx, \ldots, d\psi) &= \omega^i(u^1, \ldots, u^6;\ du^1, \ldots, du^6) \\ \tilde{\omega}_i^j(x, \ldots, \psi, dx, \ldots, d\psi) &= \omega_i^j(u^1, \ldots, u^6; du^1, \ldots, du^6) \end{aligned}\right\}. \tag{5.7}$$

Это, очевидно, система в полных дифференциалах. Дифференцируя внешним образом обе части уравнения, получим

$$d\tilde{\omega}^i = d\omega^i,$$

$$d\tilde{\omega}_i^j = d\omega_i^j,$$

или в силу (5.5) и (5.7)

$$[\tilde{\omega}^k \tilde{\omega}_k^i] = [\omega^k \omega_k^i],$$

$$[\tilde{\omega}_i^k \tilde{\omega}_k^j] = [\omega_i^k \omega_k^j].$$

Очевидно, в силу (5.7) эти уравнения удовлетворены. Следовательно, система (5.7) вполне интегрируема, и для всякого начального расположения трехгранника

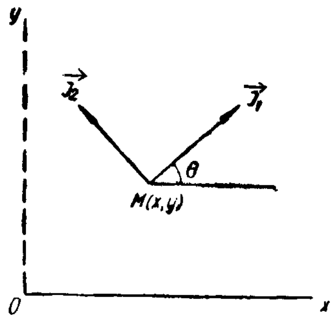
$$x = x^0,\ y = y^0,\ z = z^0,$$

$$\theta = \theta^0,\ \varphi = \varphi^0,\ \psi = \psi^0 \text{ для } u^\alpha = u_0^\alpha$$

имеется единственное решение, определяющее движение трехгранника T.

З а м е ч а н и е. Примененный здесь метод сравнения компонентов ω и $\tilde{\omega}$ является методом определения преобразований группы движений трехгранника. Уравнения (II) — структурные уравнения группы, формы ω^i, ω_i^j — инвариантные формы группы.

30. Частные случаи. *Евклидова плоскость.* Имеем две оси $\vec{I}_1, \vec{I}_2$, три формы $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$, три параметра x, y, θ (фиг. 3).



Фиг. 3

ω^1, ω^2 — проекции вектора (dx, dy) соответственно на оси $\vec{I}_1, \vec{I}_2$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 &= dx \cdot \cos\theta + dy \cdot \sin\theta, \\ \omega^2 &= -dx \cdot \sin\theta + dy \cdot \cos\theta, \\ \omega^3 &= d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

Условия (II) удовлетворены:

$$d\omega^1 = [\omega^2 \omega_2^1],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1 \omega_1^2],$$

$$d\omega_1^2 = 0.$$

Действительно,

$$d\omega^1 = -\sin\theta\,[d\theta\, dx] + \cos\theta\,[d\theta\, dy] = [d\theta \omega^2] = [\omega_1^2 \omega^2] =$$

$$= [\omega^2 \omega_2^1]$$

и аналогично два остальных.

П р и м е р. Зададимся формами

$$\begin{aligned} \omega^1 &= du - v\,dw, \\ \omega^2 &= dv + u\,dw, \\ \omega_1^2 &= dw. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Система (II) удовлетворена. Следовательно, эти формы определяют прямоугольный репер, если начальный трехгранник будет прямоугольным. Применим второй метод. Из сравнения уравнений (5.8) и (5.9) получим

$$dx \cdot \cos\theta + dy \cdot \sin\theta = du - v\,dw,$$

$$-dx \cdot \sin\theta + dy \cdot \cos\theta = dv + u\,dw,$$

$$d\theta = dw.$$

Из последнего уравнения интегрированием получаем

$$\theta = w + c, \quad c = \text{const}.$$

Из двух первых уравнений определяем dx:

$$dx = \cos(w+c)\cdot du - \sin(w+c)\,dv -$$
$$- \{v\cos(w+c) + u\sin(w+c)\}\,dw,$$

откуда посредством квадратуры получаем

$$x = u\cos(w+c) - v\sin(w+c) + a.$$

Аналогично

$$y = u\sin(w+c) + v\cos(w+c) + b,$$
$$a, b = \text{const}.$$

Уравнения (II) *являются уравнениями структуры группы движений.*

Теория поверхностей Дарбу. Дарбу рассматривал движения, зависящие от двух параметров. Он полагал

$$\omega^1 = \xi\,du + \xi_1\,dv, \quad \omega_2^3 = p\,du + p_1\,dv,$$
$$\omega^2 = \eta\,du + \eta_1\,dv, \quad \omega_3^1 = q\,du + q_1 dv,$$
$$\omega^3 = \zeta\,du + \zeta_1\,dv, \quad \omega_1^2 = r\,du + r_1 dv.$$

Условия (II) тогда принимают вид:

п е р в а я   с е р и я

$$d\omega^1 = [\omega^2\,\omega_2^1] + [\omega^3\,\omega_3^1],$$
$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial v} = (\eta r_1 - \eta_1 r) + (\zeta q_1 - \zeta_1 q) \tag{5.10}$$

и т. д. одновременной круговой заменой двух серий букв ξ, η, ζ и p, q, r;

в т о р а я   с е р и я

$$d\,\omega_2^3 = [\omega_2^1\,\omega_1^3],$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} = rq_1 - r_1 q \tag{5.11}$$

и т. д. круговой заменой букв p, q, r.

31. Пространства трехгранников. *Семейство трехгранников с общим началом.* Как определить его дифференциальными уравнениями?

Поскольку начало M неподвижно, имеем

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0. \tag{5.12}$$

Это система уравнений с тремя неизвестными функциями от трех независимых переменных. Система вполне интегрируема; это очевидно из геометрических соображений (такое семейство существует), но можно и непосредственно проверить обращение в тождество уравнений (II).

Семейство трехгранников с общей плоскостью. Оно определяется системой:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0.$$

Система вполне интегрируема.

Семейство трехгранников с общим ребром $\vec{\mathbf{I}}_3$. Такое семейство трехгранников определяется системой

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{5.13}$$

Эта конфигурация зависит от 4 произвольных параметров, что соответствует известному факту: трехмерное точечное пространство по отношению к новому образующему элементу — прямой будет четырехмерным.

Точка как конфигурация трехгранников. Точку как конфигурацию трехгранников можно определить еще иначе.

Рассмотрим трехгранник и точку A с координатами a_1, a_2, a_3 относительно этого трехгранника. Потребуем, чтобы эта точка оставалась неподвижной при смещениях трехгранника внутри семейства.

Имеем

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{M}} + a^1\vec{\mathbf{I}}_1 + a^2\vec{\mathbf{I}}_2 + a^3\vec{\mathbf{I}}_3.$$

Здесь модуль вектора $\vec{\mathbf{A}}$ — расстояние от неподвижного начала до точки A (a^1, a^2, a^3).

Дифференцируя, в силу неподвижности точки A, имеем

$$d\vec{\mathbf{M}} + a^1 d\vec{\mathbf{I}}_1 + a^2 d\vec{\mathbf{I}}_2 + a^3 d\vec{\mathbf{I}}_3 = 0,$$

или, внося значения $d\vec{\mathbf{M}}$, $d\vec{\mathbf{I}}_i$ по формулам (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых векторах $\vec{\mathbf{I}}_1, \vec{\mathbf{I}}_2, \vec{\mathbf{I}}_3$, получим

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 + a^2\omega_2^1 + a^3\omega_3^1 = 0,\\ \omega^2 + a^1\omega_1^2 + a^3\omega_3^2 = 0,\\ \omega^3 + a^1\omega_1^3 + a^2\omega_2^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Эта система вполне интегрируема.

Таким образом, можно рассматривать трехгранники как конструктивный элемент пространства и определять точки, плоскости, прямые как конфигурации трехгранников.

Откуда следует эквивалентность различных определений точки?

Положим

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1 + a^2\,\omega_2^1 + a^3\,\omega_3^1,$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + a^1\,\omega_1^2 + a^3\,\omega_3^2,$$

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3 + a^1\,\omega_1^3 + a^2\,\omega^3,$$

$$\tilde{\omega}_2^3 = \omega_2^3,$$

$$\tilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1,$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2.$$

Новые формы $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_i^j$ удовлетворяют условиям (II), и точка будет определяться посредством

$$\tilde{\omega}^1 = 0, \quad \tilde{\omega}^2 = 0, \quad \tilde{\omega}^3 = 0. \tag{5.15}$$

Рассмотрим две системы параметров $x, y, \ldots, \psi, x', y', \ldots, \psi'$, обозначим через $\tilde{\omega} = \omega(x', \ldots, \psi')$. Система

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i, \quad \tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j \tag{5.16}$$

вполне интегрируема. Это — система 6 уравнений для 6 неизвестных функций $x', y', z', \theta', \varphi', \psi'$ при 6 независимых переменных $x, y, z, \theta, \varphi, \psi$.

Выбирая начальные данные, получим, что всякому перемещению трехгранника $T(x, y, z, \ldots \psi)$ в $T_1(x_1, y_1 \ldots, \psi_1)$ будет соответствовать перемещение трехгранника $T'(x', y', \ldots, \psi')$ в $T_1'(x_1', y_1', \ldots, \psi_1')$, причем все формы ω^i, ω_i^j соответственно равны $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_i^j$ и будут представлять одно и то же перемещение в пространстве.

Уравнения (5.16) определяют совокупность перемещений в пространстве.

ГЛАВА VI

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА МЕТРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

32. Неизгибаемость точечного пространства. Теорема Вейля. *Формы* $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, *заданные в функциях параметров* u^α *так, что вершины трехгранников заполняют трехмерную область пространства* (т. е. формы ω^i линейно независимы), *однозначно определяют формы* $\overset{3}{\omega_2}, \overset{1}{\omega_3}, \overset{2}{\omega_1}$.

Доказательство (общий случай). *Уравнения* (II) п. 26

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i] \tag{II$_1$}$$

имеют только одно решение.

Допустим, что будет два решения ω_i^j и $\tilde{\omega}_i^j$; обозначим

$$\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j.$$

Тогда, составляя разность левых и правых частей двух уравнений (II), одного — для решения ω_k^i, другого для $\tilde{\omega}_k^i$, получим

$$[\omega^k \bar{\omega}_k^i] = 0,$$

откуда по лемме Картана получим

$$\bar{\omega}_k^i = c_{kh}^i \omega^h, \tag{6.1}$$

$$c_{kh}^i = c_{hk}^i. \tag{6.2}$$

С другой стороны, в силу антисимметричности форм ω_k^i имеем

$$c_{kh}^i = -c_{ih}^k, \tag{6.3}$$

откуда, применяя по очереди преобразования (6.2) и (6.3), получим

$$c_{kh}^i = c_{hk}^i = -c_{ik}^h = -c_{ki}^h = c_{hi}^k = c_{ih}^k = -c_{kh}^i = 0$$

и

$$\bar{\omega}_k^i = 0, \text{ т. е. } \omega_k^i = \tilde{\omega}_k^i.$$

33. Геометрический смысл теоремы Вейля. Будем рассматривать преобразование семейства трехгранников, устанавливающих точечное соответствие пространств.

Рассмотрим две окрестности: точки M первого и соответствующей ей точки M' второго семейства. Предположим, что эти окрестности равны до бесконечно малых второго порядка. Тогда, перенося все первое семейство трехгранников так, чтобы точка M после переноса совпала с точкой M', мы можем совместить их окрестности первого порядка. Такое преобразование называется *изгибанием пространства*.

Теорема утверждает, что единственные изгибания нашего пространства будут простыми перемещениями; иначе говоря, *точечное пространство неизгибаемо*.

Вот некоторые подробности этих рассуждений.

Точке M_0 соответствует некоторая точка $\bar{M}_0$ так, что инфинитезимальная часть пространства, окружающая точку M_0 (вместе с ней самой), равна соответствующей части, окружающей точку $\bar{M}_0$. Присоединим к точке M_0 трехгранник T с началом в точке M_0; ему соответствует трехгранник $\bar{T}_0$ с началом $\bar{M}_0$.

Если (ω^i) — инфинитезимальный вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и $(\bar{\omega}^i)$ — соответствующий ему вектор $\overrightarrow{\bar{M}_0\bar{M}}$, то рассматриваемое преобразование определяется уравнениями

$$\omega^1 = \bar{\omega}^1, \quad \omega^2 = \bar{\omega}^2, \quad \omega^3 = \bar{\omega}^3. \tag{6.4}$$

Действительно, перенесем второе семейство трехгранников так, чтобы $\bar{T}_0$ совпал с T_0. Допустим, что точка $\bar{M}$ перейдет при этом в точку M'. В силу равенств (6.4) мы видим, что точка M' совпадает с M вплоть до бесконечно малых второго порядка (точка M предполагается инфинитезимально близкой к точке M_0).

Обратно, рассмотрим точечное преобразование, которое части пространства вокруг точки M_0 сопоставляет равную ей часть пространства около $\overline{M}_0$.

Поставим в соответствие реперу T_0 трехгранник $\overline{T}_0$, который в перемещении, приводящем к совпадению соответствующие окрестности двух пространств, совпадает с трехгранником T_0.

Тогда имеем

$$\omega^i = \overline{\omega}^i,$$

откуда

$$\omega_i^j = \overline{\omega}_i^j$$

и преобразование будет простым перемещением пространства как твердого тела.

Замечание. Полученное свойство не так очевидно. Это можно увидеть на примере тангенциального пространства (пространства плоскостей).

34. Изгибание тангенциального пространства. Рассмотрим две точки M и M' и в них трехгранники T и T'. Пусть некоторая точка P имеет относительно триэдра T координаты x, y, z, а относительно триэдра T' — координаты x', y', z'.

Тогда, проектируя радиус-вектор $\overrightarrow{\mathbf{M'P}}$ на оси первого трехгранника T, получим

$$x = \omega^1 + x' \vec{\mathbf{I}}_1' \vec{\mathbf{I}}_1 + y' \vec{\mathbf{I}}_2' \vec{\mathbf{I}}_2 + z' \vec{\mathbf{I}}_3' \vec{\mathbf{I}}_3 \tag{6.5}$$

и два аналогичных выражения для y и z.

Кроме того, по формулам (1.1), считая точки M и M' инфинитезимально близкими, имеем

$$\vec{\mathbf{I}}_1' = \vec{\mathbf{I}}_1 + d\vec{\mathbf{I}}_1 = \vec{\mathbf{I}}_1 + \omega_1^2 \vec{\mathbf{I}}_2 + \omega_1^3 \vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$\vec{\mathbf{I}}_2' = \vec{\mathbf{I}}_2 + \omega_2^1 \vec{\mathbf{I}}_1 + \omega_2^3 \vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$\vec{\mathbf{I}}_3' = \vec{\mathbf{I}}_3 + \omega_3^1 \vec{\mathbf{I}}_1 + \omega_3^2 \vec{\mathbf{I}}_2.$$

Следовательно, уравнения (6.5) примут вид

$$x = \omega^1 + x' + y' \omega_2^1 + z' \omega_3^1,$$

$$y = \omega^2 + y' + x' \omega_1^2 + z' \omega_3^2,$$

$$z = \omega^3 + z' + x' \omega_1^3 + y' \omega_2^3$$

и, обратно,

$$x' = -\omega^1 + x - y\,\omega_2^1 - z\,\omega_3^1,$$
$$y' = -\omega^2 + y - x\,\omega_1^2 - z\,\omega_3^2,$$
$$z' = -\omega^3 + z - x\omega_1^3 - y\omega_2^3.$$

Отсюда следует, что трехгранники имеют одну и ту же плоскость xy, уравнения $z = 0$ и $z' = 0$ совпадают, если

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0.$$

Иначе, уравнение плоскости $z' = 0$ относительно трехгранника T в общем случае будет

$$z = \omega^3 + x\omega_1^3 + y\omega_2^3.$$

Следовательно, формы

$$\omega^3, \quad \omega_1^3, \quad \omega_2^3$$

являются тангенциальными координатами инфинитезимально близкой плоскости. Эти формы будут линейно независимы, если семейство плоскостей содержит все плоскости в некоторой трехмерной области пространства, что мы и будем предполагать.

Рассмотрим теперь два пространства плоскостей (или два раза одно пространство) и в каждом пространстве семейство трехгранников, инфинитезимальные смещения которых определяются формами ω^i, ω_i^j для первого, $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_i^j$—для второго. Можно считать, что формы ω^i, ω_i^j написаны для переменных u^α, а формы $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_i^j$ — для v^α.

Рассмотрим соответствие, которое устанавливается между трехгранниками системой

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3, \; \tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3, \; \tilde{\omega}_2^3 = \omega_2^3. \tag{6.6}$$

Нетрудно проверить, что эта система вполне интегрируема, но она устанавливает соответствие не между трехгранниками первого и второго пространств, а между семействами трехгранников, именно: если в первом пространстве трехгранники описывают семейство с общей плоскостью xy, то

$$\omega^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 0,$$

а, следовательно, в силу (6.6)

$$\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^3 = 0,$$

и, значит, соответствующие им трехгранники второго пространства тоже образуют семейство с общей плоскостью $x'y'$. Таким образом, система (6.6) устанавливает соответствие между плоскостями первого и второго пространства.

Рассмотрим теперь две соответствующие плоскости P_0 и $\overline{P}_0$ первого и второго пространства и два соответствующих им репера T_0 и $\overline{T}_0$.

Перенесем все второе пространство с его плоскостями и трехгранниками так, чтобы плоскость $\overline{P}_0$ с овпала сплоскостью P_0 и трехгранник $\overline{T}_0$ совпал с трехгранником T_0.

Рассмотрим какую-нибудь плоскость P в инфинитезимальной окрестности плоскости P_0 первого пространства и соответствующую ей в соответствии (6.6) плоскость $\overline{P}$ в инфинитезимальной окрестности плоскости $\overline{P}_0$ второго пространства.

Прежде всего заметим, что соответствующая плоскость $\overline{P}$ действительно окажется инфинитезимально близкой к плоскости $\overline{P}_0$. Дело в том, что плоскость P относительно трехгранника T_0 имеет координаты

$$\omega^3, \omega_1^3, \omega_2^3;$$

в силу соответствия (6.6) плоскость $\overline{P}$ относительно репера $\overline{T}_0$ имеет координаты

$$\tilde{\omega}^3, \tilde{\omega}_1^3, \tilde{\omega}_2^3,$$

которые в точности совпадают с координатами плоскости P. Следовательно, после перемещения второго пространства и совпадения плоскостей $\overline{P}_0$ с P и трехгранников $\overline{T}_0$ с T_0, плоскости P и $\overline{P}$ будут иметь одни и те же координаты (до бесконечно малых второго порядка) относительно одного и того же репера T_0; следовательно, они совпадают до бесконечно малых второго порядка.

Так определяется изгибание первого порядка в пространстве плоскостей. Обратно, если две плоскости совпадают вместе со своими бесконечно близкими (до бесконечно малых второго порядка), то и координаты плоскостей относительно общего репера совпадают (до бесконечно малых второго порядка); следовательно,

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3, \quad \tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_2^3 = \omega_2^3. \tag{6. 6}$$

Следует ли из этих равенств совпадение остальных компонентов и конгруэнтность обоих пространств?

Рассмотрим последовательно внешние дифференциалы форм (6.6), используя везде эти равенства для замены титлованных форм $\tilde{\omega}$ обыкновенными ω. Имеем:

для трехгранника T для трехгранника $\bar{T}$

$$d\omega^3 = [\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3], \qquad d\tilde{\omega}^3 = [\tilde{\omega}^1 \omega_1^3] + [\tilde{\omega}^2 \omega_2^3],$$

$$d\omega_1^3 = [\omega_1^2 \omega_2^3], \qquad d\omega_1^3 = [\tilde{\omega}_1^2 \omega_2^3],$$

$$d\omega_2^3 = [\omega_2^1 \omega_1^3], \qquad d\omega_2^3 = [\tilde{\omega}_2^1 \omega_1^3].$$

Сравнивая равенства двух последних строк, имеем

$$[\tilde{\omega}_1^2 - \omega_1^2, \omega_2^3] = 0,$$

$$[\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^1, \omega_1^3] = 0,$$

откуда в силу теоремы 1 п. 12

$$\tilde{\omega}_1^2 - \omega_1^2 = \alpha\omega_2^3,$$

$$\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^1 = \beta\omega_1^3.$$

Складывая почленно эти равенства в силу $\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0$, получим

$$\alpha\omega_2^3 + \beta\omega_1^3 = 0,$$

откуда при линейно независимых формах ω_1^3, ω_2^3 имеем

$$\alpha = \beta = 0$$

и

$$\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2. \tag{6.7}$$

Сравнение уравнений первой строки дает

$$[\tilde{\omega}^1 - \omega^1, \ \omega_1^3] + [\tilde{\omega}^2 - \omega^2, \omega_2^3] = 0,$$

откуда в силу (2.11), (2.12)

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 - \omega^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^3, \\ \tilde{\omega}^2 - \omega^2 &= b\omega_1^3 + c\omega_2^3. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Внешнее дифференцирование уравнения (6.7) приводит к тождеству, а уравнений (6.8) — к внешним квадратичным уравнениям для da, db, dc, вообще не равных нулю.

Таким образом, изгибание пространства плоскостей не сводится к простому переносу. Следовательно, *тангенциальное пространство менее твердо, чем точечное*; в нем можно построить преобразование, не меняющее малые куски пространства, но глубоко изменяющие полное пространство.

35. Изгибание плоскости как геометрического места прямых. Рассмотрим две плоскости с координатами (x, y) и (x', y'). Пользуясь формулами п. 30, мы можем на каждой плоскости задать прямоугольную систему координат, определяемую бивекторами $(M, \vec{I}_1, \vec{I}_2)$ и $(M', \vec{I}_1', \vec{I}_2')$. Тогда на первой плоскости

$$\left.\begin{aligned} d\vec{M} &= \omega^1\vec{I}_1 + \omega^2\vec{I}_2, \\ d\vec{I}_1 &= \omega_1^2\vec{I}_2, \\ d\vec{I}_2 &= \omega_2^1\vec{I}_1, \end{aligned}\right\} (6.9) \qquad \left.\begin{aligned} \omega^1 &= dx\cdot\cos\theta + dy\cdot\sin\theta, \\ \omega^2 &= -dx\cdot\sin\theta + dy\cos\theta, \\ \omega_1^2 &= d\theta, \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

и на второй плоскости формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}_1^2$ выражаются теми же уравнениями со штрихованными переменными x', y', θ'.

Устанавливаем соответствие бивекторов

$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2. \qquad (6.11)$$

Поскольку здесь только два уравнения, а бивектор определяется тремя координатами x, y, θ, то соответствие будет устанавливаться между семействами бивекторов.

Полагая

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \qquad (6.12)$$

мы увидим из формул (6.9), что векторы $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ не вращаются, а точка M описывает ось x. Таким образом, уравнения (6.11) определяют семейство бивекторов с общей осью x.

Из уравнений (6.11) мы видим, что этому семейству на второй плоскости соответствуют бивекторы с общей осью x'. Значит система (6.11) устанавливает соответствие прямых на двух плоскостях.

Внося в уравнения (6.11) выражения (6.10), получим

$$\begin{gathered} -dx'\cdot\sin\theta' + dy'\cdot\cos\theta' = -dx\cdot\sin\theta + dy\cdot\cos\theta, \\ d\theta' = d\theta. \end{gathered} \qquad (6.13)$$

Второе уравнение (6.13) интегрируется

$$\theta' = \theta + c, \quad c = \text{const},$$

а тогда первое уравнение (6.13) можно записать

$$d(-x'\sin\theta' + y'\cos\theta') + (x'\cos\theta' + y'\sin\theta')\,d\theta' =$$
$$= d(-x\sin\theta + y\cos\theta) + (x\cos\theta + y\sin\theta)\,d\theta,$$

или

$$d\{-x'\sin\theta' + y'\cos\theta' + x\sin\theta - y\cos\theta\} =$$
$$= \{x'\cos\theta' + y'\sin\theta' - x\cos\theta - y\sin\theta\}\,d\theta,$$

т. е. получаем уравнение

$$du = v\,dw,$$

которое удовлетворяется любой функцией

$$u = f(w),$$

если взять

$$\frac{du}{dw} = v, \quad \text{т. е.} \quad v = f'(w).$$

Следовательно, прямая

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \tag{6.14}$$

преобразуется в новую прямую по закону

$$\theta' = \theta + c, \quad p' = p + \dot{f}, \quad \dot{f} = \frac{df}{d\theta},$$

ибо

$$v = x'\cos\theta' + y'\sin\theta' + p' - (x\cos\theta + y\sin\theta + p) =$$
$$= \frac{d}{d\theta}\{-x'\sin\theta' + y'\cos\theta' + f + x\sin\theta - y\cos\theta\} = \frac{d}{d\theta}u.$$

Преобразование прямой (6.14) в прямую (6.15)

$$x\cos(\theta + c) + y\sin(\theta + c) - (p + \dot{f}) = 0 \tag{6.15}$$

зависит от произвольной функции

$$f = f(\theta)$$

и не является движением плоскости, хотя определяет изгибание первого порядка плоскости как геометрического места прямых.

36. Линейчатое пространство. Прямая, или, лучше, семейство трехгранников с общей осью, определена условиями (5.13)

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0.$$

Пусть имеем два многообразия (два пространства) трехгранников так, что

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega^2, \quad \tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_2^3 = \omega_2^3. \tag{6.16}$$

Всякий раз, как в одном пространстве выделим семейство с общей осью, в другом соответствующие трехгранники тоже образуют семейство с общей осью, т. е. этими формулами будет установлено соответствие между прямыми двух пространств. Кроме того, если перенести второе пространство так, чтобы одна прямая и один избранный трехгранник ее совпадали бы с соответствующими прямой и трехгранником другого пространства, то всякая бесконечно близкая прямая совпадает со своей соответствующей.

Основные уравнения дадут тогда:
для трехгранника T

$$d\omega^1 = [\omega^2 \omega_2^1] + [\omega^3 \omega_3^1],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1 \omega_1^2] + [\omega^3 \omega_3^2],$$

$$d\omega_1^3 = [\omega_1^2 \omega_2^3],$$

$$d\omega_2^3 = [\omega_2^1 \omega_1^3];$$

для трехгранника T' после замены (6.16)

$$d\omega^1 = [\omega^2 \tilde{\omega}_2^1] + [\tilde{\omega}^3 \omega_3^1],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1 \tilde{\omega}_1^2] + [\tilde{\omega}^3 \omega_3^2],$$

$$d\omega_1^3 = [\tilde{\omega}_1^2 \omega_2^3].$$

$$d\omega_2^3 = [\tilde{\omega}_2^1 \omega_1^3].$$

Из последних двух пар уравнений следует

$$\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2.$$

Первые дают

$$[\tilde{\omega}^3 - \omega^3, \omega_3^2] = 0, \ [\tilde{\omega}^3 - \omega^3, \omega_3^2] = 0,$$

откуда следует

$$\tilde{\omega}^3 - \omega^3 = \alpha\omega_1^3 = \beta\omega_2^3,$$

α и β — множители пропорциональности.

Если между ω_1^3 и ω_2^3 нет линейной зависимости, то $\alpha = \beta = 0$ и

$$\tilde{\omega}^3 = \omega^3,$$

т. е. *линейчатое пространство неизгибаемо.*

Линейная зависимость основных форм ω_1^3, ω_2^3 показывала бы, что многообразие прямых, описываемых осями z трехгранников, не четырехмерное, а трехмерное.

ГЛАВА VII

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ В ЕВКЛИДОВОМ N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

37. Преобразование пространства с сохранением линейного элемента. Возвращаемся к точечному пространству и будем предполагать его n-мерным.

В теореме Вейля п. 32 мы рассматривали отдельно компоненты

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$$

для доказательства неизгибаемости пространства. Покажем теперь, что достаточно рассмотреть сумму их квадратов, т. е. линейный элемент длины

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2. \tag{7.1}$$

Теорема. *Всякое точечное преобразование пространства, сохраняющее линейный элемент ds^2, сводится к простому перемещению.*

Эта теорема сильнее предыдущей. Ранее мы требовали, чтобы при перемещении точки M' в точку M всякая инфинитезимально близкая к M' точка M_1' перешла в соответствующую точку M_1 окрестности точки M. Теперь мы требуем только равенства длин

$$MM_1 = M' M_1'.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим лемму.

Лемма. *Линейный элемент ds^2 зависит только от координат вершины трехгранника и их производных.*

Пусть имеем n независимых пфаффовых форм

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n,$$

выраженных с помощью $r > n$ переменных и удовлетворяющих условиям

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \tag{II$_1$}$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{7.2}$$

Докажем, что линейный элемент

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2$$

можно представить в виде

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Система уравнений

$$\omega^1 = 0, \ \omega^2 = 0, \ldots, \omega^n = 0 \tag{7.3}$$

вполне интегрируема, ибо, согласно системе (II), внешние дифференциалы $d\omega^i$, или $[\omega^k \omega_k^i]$, обращаются в нуль в силу уравнений системы (7.3).

Эта система имеет n первых интегралов.

Обозначим их

$$u^1, u^2, \ldots, u^n.$$

Они определяют положение вершины M трехгранника, ибо при

$$u^1 = \text{const}, \ u^2 = \text{const}, \ldots, \ u^n = \text{const}$$

все формы ω^i обращаются в нуль и точка M стоит на месте. Дополняем эти n переменных еще $r - n$ другими и принимаем их за новые независимые переменные

$$u^1, u^2, \ldots u^n, u^{n+1}, \ldots, u^r.$$

Тогда

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Докажем, что все g_{ij} не зависят от $u^{n+1}, \ldots, u^r$.

Введем два символа дифференцирования:

d — перемещение вершины, т. е. изменение $u^1, \ldots, u^n$;

δ — изменение вторичных параметров $u^{n+1}, \ldots, u^r$.

Надо доказать, что

$$\delta(ds^2) = 0.$$

Так как $\delta u^i = 0$, то

$$\delta\, du^i = d\,\delta u^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

и потому

$$\omega^i(\delta) = 0. \tag{7.4}$$

Обозначим

$$\omega_i^j(\delta) = e_i^j. \tag{7.5}$$

В применении к этим двум символам дифференцирования уравнеиие (II_1) может быть расписано в виде билинейной формы

$$\delta\,\omega^i(d) - d\,\omega^i(\delta) = \begin{vmatrix} \omega^k(\delta) & \omega_k^i(\delta) \\ \omega^k(d) & \omega_k^i(d) \end{vmatrix},$$

или в силу (7.4) и (7.5)

$$\delta\,\omega^i = -\,e_k^i\,\omega^k, \tag{7.6}$$

где в правой части обычное произведение.

Дифференцируя с символом δ наше выражение

$$ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2,$$

получим

$$\delta(ds^2) = \delta\sum_i(\omega^i)^2 = 2\sum_i \omega^i\,\delta\,\omega^i = -2\sum_{i,k} e_k^i\,\omega^i\,\omega^k,$$

но в силу уравнения (7.2) форма e_k^i так же, как ω_k^i, кососимметрична, и, суммируя по сочетаниям, будем иметь

$$\delta(ds^2) = -2\sum_{(i,k)}(e_k^i\,\omega^i\,\omega^k + e_i^k\,\omega^k\,\omega^i) =$$

$$= -2\sum_{(i,k)}(e_k^i + e_i^k)\,\omega^i\,\omega^k = 0.$$

Итак,

$$\delta(ds^2) = 0,$$

и лемма доказана.

Геометрически формула

$$\delta\omega^i = -e^i_k\,\omega^k \qquad (7.6)$$

дает изменение при переходе от одного трехгранника к другому с той же вершиной; ω^i — компоненты вектора смещения вершины, $\delta\omega^i$ есть изменение компонентов ω^i при бесконечно малом преобразовании координат (поворот осей).

Обращаемся теперь к основной теореме метрической геометрии.

Доказательство. Так как ds^2— положительно определенная дифференциальная форма, то ее всегда можно представить в виде суммы квадратов

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2.$$

Выберем в точке M ортогональный репер так, чтобы величины $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ были координатами точки M' ($MM' = ds$) по отношению к этому реперу. Допустим пока, что это возможно.

Выбирая таким же образом репер в точке $\overline{M}$ второго пространства, получим $\overline{\omega^i} = \omega^i$, откуда и следует теорема.

38. Равносильность приведения линейного элемента к сумме квадратов и выбора репера ортогональным. Докажем лемму, на которую мы ссылались.

Лемма. *Всякое представление квадратичной формы ds^2 в виде суммы квадратов*

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2 \qquad (7.1)$$

приводит к ортогональному реперу.

Эта лемма следует из формул (1.10), (1.12); если $g_{ij} = \delta_{ij}$, то скалярные произведения базисных векторов $\vec{e}_i\,\vec{e}_j$ ($i \neq j$) равны нулю и векторы ортогональны; но мы дадим прямое доказательство.

Пусть имеем линейный элемент вида (7.1); проведем координатные линии, определяемые уравнениями

$$\omega^i = \delta^i_k, \quad \delta^i_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k, \end{cases} \qquad (7.7)$$

где $k = 1, \ldots, n$, и рассмотрим единичные векторы касательных к этим линиям. Выражение (7.1) дает нам правило подсчета квадрата вектора и его модуля.

В частности, векторы $\vec{I}_i$, определяемые уравнениями (7.7), имеют компоненты

$$\vec{I}_1(1, 0, \ldots, 0),\ \vec{I}_2(0, 1, \ldots, 0), \ldots, \vec{I}_n(0, 0, \ldots, 1) \qquad (7.8)$$

и будут единичными.

Скалярное произведение векторов $\vec{U}$ и $\vec{V}$ определяется как коэффициент при 2λ в развертывании квадрата линейной комбинации

$$(\vec{U}+\lambda\vec{V})^2 = \vec{U}^2+2\lambda\vec{U}\vec{V}+\lambda^2\vec{V}^2.$$

Между тем для векторов (7.8) линейная комбинация $\vec{I}_1+\lambda\vec{I}_2$ имеет коордиаты

$$(1, \lambda, 0, \ldots, 0);$$

отсюда квадрат ее по формуле (7.1) будет

$$(\vec{I}_1+\lambda\vec{I}_2)^2 = 1+\lambda^2,$$

а при развертывании

$$(\vec{I}_1+\lambda\vec{I}_2)^2 = 1+2\lambda\vec{I}_1\vec{I}_2+\lambda^2,$$

откуда $\vec{I}_1\vec{I}_2 = 0$, и векторы ортогональны.

Можно дать *кинематическое истолкование* этой теоремы. Назовем прямыми линии, дающие минимум для ds^2. Они перейдут после преобразования в прямые, так как по условию ds^2 сохраняется. Отрезки сохранят свою длину. Пусть материальная система обладает подвижностью, но так, что расстояния между точками сохраняются. *Система тогда не деформируется, а переносится как одно целое.*

39. Конгруэнтность и симметрия. Если ds^2 дано, то пространство известно. Два пространства с одним ds^2 могут быть совмещены простым перенесением. Но существуют два вида перемещений: *движения первого рода*, или *собственные движения*, которые при совмещении фигур приводят к *конгруэнтности*, и *движения второго рода*, или *движения вместе с симметричным преобразованием*, которые при совмещении фигур обнаруживают их *симметричность*. Осталось выяснить одно сомнение, будут ли представлены движения первого и второго рода одним и тем же аналитическим выражением или для правых и левых трехгранников инфинитезимальные компоненты движений будут различны.

Рассмотрим многообразие точек M и систему правых трехгранников с началом в M и компонентами ω^i, ω_i^j, заданными в функциях от u^1, u^2, u^3, и многообразие точек M' и систему левых трехгранников с началом в M' и компонентами $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$, заданными в функциях от v^1, v^2, v^3.

Перемещая левый трехгранник, мы можем совместить точку M' с точкой M и оси $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ с осями $\vec{I}_1'$, $\vec{I}_2'$, но оси $\vec{I}_3$ и $\vec{I}_3'$ будут направлены в разные стороны. Отсюда

$$\overline{\omega}^1 = \omega^1, \quad \overline{\omega}^2 = \omega^2, \quad \overline{\omega}^3 = \omega^3.$$

Пользуясь уравнениями структуры

$$d\,\omega^i = [\omega^k \omega^i_k],$$

получим

$$\overline{\omega}^2_1 = \omega^2_1, \quad \overline{\omega}^3_1 = -\,\omega^3_1, \quad \overline{\omega}^3_2 = -\,\omega^3_2.$$

Система

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}^1(v, dv) = \omega^1(u, du), && \overline{\omega}^2_1(v, dv) = \omega^2_1(u, du),\\
&\overline{\omega}^2(v, dv) = \omega^2(u, du), && \overline{\omega}^3_1(v, dv) = -\,\omega^3_1(u, du),\\
&\overline{\omega}^3(v, dv) = -\,\omega^3(u, du), && \omega^3_2(v, dv) = -\,\omega^3_2(u, du)
\end{aligned}$$

вполне интегрируема, но она не дает движения первого рода. Если для $u^i = u^i_0$, $v^i = v^i_0$ точка M'_0 совпала с точкой M_0, то точки

$$M(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \text{ и } \overline{M}(\omega^1, \omega^2, -\,\omega^3)$$

не совпадут и будут симметричны.

Конгруэнтность и симметрия определяются различными системами уравнений.

40. Определение форм ω^j_i по заданным формам ω^i. Поставим задачу: даны формы $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$, определить формы ω^j_i, так, чтобы они удовлетворяли системе (II_1) п. 32 и были кососимметричны:

$$d\,\omega^i = [\omega^j \omega^i_j], \tag{II_1}$$

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{7.2}$$

Внешний дифференциал $d\omega^i$ — квадратичная форма относительно дифференциалов $du^1, du^2, \ldots, du^n$, а следовательно, и относительно форм $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$. Поэтому ее можно представить в виде

$$d\,\omega^i = \sum_{(j,k)} c^i_{jk}[\omega^j \omega^k], \tag{7.9}$$

здесь суммирование по сочетаниям. Допустим, кроме того, что

$$\omega_i^j = \gamma_i{}^j{}_k \omega^k. \tag{7.10}$$

Наши уравнения (7.2) и (II₁), (7.9) преобразуются

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = 0,$$
$$c_{ijk} = \gamma_{jik} - \gamma_{kij}, \tag{7.12}$$

так как при подстановке в (II₁) выражений (7.10) сочетание $[\omega^j\omega^k]$ получается из двух скобок $[\omega^j\omega_j^i]$ и $[\omega^k\omega_k^i]$. Выполняем теперь над равенством (7.12) два раза круговую перестановку индексов i, j, k, получаем

$$\gamma_{jik} - \gamma_{kij} = c_{ijk},$$
$$\gamma_{kji} - \gamma_{ijk} = c_{jki},$$
$$\gamma_{ikj} - \gamma_{jki} = c_{kij}.$$

Вычитая из последней строки две первые, получим в силу (7.11)

$$\gamma_{ijk} = \frac{c_{kij} - c_{ijk} - c_{jki}}{2}. \tag{7.13}$$

Это удовлетворяет всем уравнениям, т. е. и уравнениям (II₁).

Ничто не показывает, что ds^2 принадлежит к евклидову пространству.

41. Трехмерный случай. *В случае трех измерений* можно поступать иначе; формы ω_i^j означают теперь бесконечно малые вращения.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \omega_2^3 &= p_1\,\omega^1 + p_2\,\omega^2 + p_3\,\omega^3, \\ \omega_3^1 &= q_1\,\omega^1 + q_2\,\omega^2 + q_3\,\omega^3, \\ \omega_1^2 &= r_1\,\omega^1 + r_2\,\omega^2 + r_3\,\omega^3. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Система (II₁) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} d\omega^1 &= [\omega^2\,\omega_2^1] + [\omega^3\,\omega_3^1] = -(q_2+r_3)[\omega^2\,\omega^3] + q_1[\omega^3\,\omega^1] + \\ &\qquad + r_1[\omega^1\,\omega^2], \\ d\omega^2 &= [\omega^1\,\omega_1^2] + [\omega^3\,\omega_3^2] = -(p_1+r_3)\,[\omega^3\,\omega^1] + \\ &\qquad + r_2[\omega^1\,\omega^2] + p_2[\omega^2\,\omega^3], \\ d\omega^3 &= [\omega^1\,\omega_1^3] + [\omega^2\,\omega_2^3] = -(q_2+p_1)[\omega^1\,\omega^2] + \\ &\qquad + p_3[\omega^2\,\omega^3] + q_3[\omega^3\,\omega^1]. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Приложим эти формулы к заданному линейному элементу в полярных координатах

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2;$$

мы можем принять за компоненты ω^i выражения

$$\omega^1 = d\rho, \quad \omega^2 = \rho\, d\theta, \quad \omega^3 = \rho \sin\theta \, d\varphi.$$

Три единичных вектора $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{I}_3$ соответствуют изменению $d\rho$, $d\theta$ и $d\varphi$. Составим внешние дифференциалы:

$$d\omega^1 = 0,$$

$$d\omega^2 = [d\rho\, d\theta] = \frac{1}{\rho}[\omega^1 \omega^2],$$

$$d\omega^3 = \sin\theta\,[d\rho\, d\varphi] + \rho\cos\theta\,[d\theta\, d\varphi] = \frac{1}{\rho}[\omega^1 \omega^3] + $$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho}[\omega^2 \omega^3],$$

Сравнивая с выражениями (7.12), имеем

$$q_2 + r_3 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = 0,$$

$$p_1 + r_3 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{\rho}, \quad p_2 = 0,$$

$$p_1 + q_2 = 0, \quad p_2 = q_2 = 0, \quad q_3 = -\frac{1}{\rho},$$

или

$$p_1 = q_1 = r_1 = 0, \quad p_2 = q_2 = 0, \quad r_3 = 0,$$

$$r_2 = \frac{1}{\rho}, \quad p_3 = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho}, \quad q_3 = -\frac{1}{\rho},$$

т. е. в силу (7.11)

$$\omega_2^3 = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho}\omega^3 = \cos\theta\, d\varphi,$$

$$\omega_3^1 = -\frac{1}{\rho}\omega^3 = -\sin\theta\, d\varphi,$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\rho}\omega^2 = d\theta.$$

Геометрически очевидно, что изменение $d\rho$ не вращает трехгранника, $d\theta$ вращает около оси $\vec{I}_3$, $d\varphi$ вращает около оси $\vec{I}_1 \cos\theta - \vec{I}_2 \sin\theta$.

Линейный элемент евклидова пространства. Как можно убедиться, что ds^2 определяет евклидово пространство?

Представляем ds^2 в виде суммы квадратов

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^n)^2.$$

Вычисляем, как выше, ω_i^j и проверяем, удовлетворяют ли они уравнениям

$$d\,\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j]. \tag{7.16}$$

Если удовлетворяют, то ds^2 принадлежит к евклидову пространству.

Рекомендуется проверить это для ds^2 в полярных координатах.

42. Абсолютное дифференцирование. Рассмотрим поле векторов, т. е. допустим, что в каждой точке пространства присоединен вектор с компонентами

$$(X^1, X^2, \ldots, X^n).$$

При переходе от точки M к соседней инфинитезимально близкой точке вектор испытывает изменение (вариацию). Выпишем его.

Вектор

$$\vec{\mathbf{X}} = X^k \vec{\mathbf{I}}_k.$$

Его дифференциал

$$d\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{I}}_k \{d X^k + \omega_k^h X^k\},$$

или после смены во второй сумме индексов k и h на h и k

$$d\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{I}}_k \{dX^k + \omega_h^k X^h\}.$$

Здесь dX^k — относительные изменения компонентов вектора;

$$DX^k = dX^k + \omega_h^k X^h \tag{7.17}$$

есть полное изменение. Это *абсолютный дифференциал*. Он сводится к обычному, если оси остаются параллельными.

Приложение. *Ускорение движущейся точки.*

Пусть

$v^1, v^2, \ldots v^n$ — компоненты скорости,

$\omega^i = v^i dt$ — компоненты перемещения.

Ускорение есть абсолютная производная скорости.

Компонента ускорения определяется формулой

$$g^k = \frac{dv^k}{dt} + \omega_h^k v^h.$$

Пусть

$$\omega_i^j = \gamma_{ijk}\,\omega^k,$$

тогда

$$g^k = \frac{dv^k}{dt} + v^h \gamma_{hkl} v^l,$$

или после подстановки индексов $\binom{khl}{ikh}$

$$g^i = \frac{dv^i}{dt} + \gamma_{kih} v^k v^h = \frac{dv^i}{dt} - \gamma_{ikh} v^k v^h.$$

Когда

$$g^i = \frac{dv^i}{dt}\ ?$$

Это будет если $\gamma_{ikh} + \gamma_{ihk} = 0$, т. е. γ меняет знак при изменении двух последних индексов, но γ не меняет своей величины при круговой замене. Значит, все γ_{ijk} равны нулю, кроме

$$\gamma_{123} = a;$$

поэтому

$$\omega_2^3 = a\omega^1,\ \ \omega_3^1 = a\omega^2,\ \ \omega_1^2 = a\omega^3.$$

Но в таком случае

$$d\omega_2^3 = [\omega_1^2\,\omega_3^1] = a^2[\omega^3\omega^2] = [da\omega^1] + ad\,\omega^1 = [da\omega^1] +$$
$$+ a\,([\omega^2\,\omega_2^1] + [\omega^3\,\omega_3^1]),$$

или

$$[da\,\omega^1] - 2a^2\,[\omega^2\,\omega^3] = 0,$$

но произведение $[\omega^2\omega^3]$ не делится на ω^1; следовательно, оба члена обращаются в нуль отдельно.

Отсюда

$$a = 0.$$

Значит все $d\omega^i = 0$, т. е. ω^i — полные дифференциалы:

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = dv, \quad \omega^3 = dw$$

и

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2.$$

43. Дивергенция вектора. Дана замкнутая поверхность; $d\sigma$ — элемент площади этой поверхности.

Рассмотрим поток векторов $\vec{X}(X^1, X^2, X^3)$ через поверхность. Пусть d и δ — символы дифференцирования, соответствующие сторонам бесконечно малого параллелограмма на каждом делении площади поверхности. Поток векторов через элемент поверхности равен

$$\Omega = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ \omega^1(d) & \omega^2(d) & \omega^3(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega^2(\delta) & \omega^3(\delta) \end{vmatrix} = X^1[\omega^2\omega^3] + X^2[\omega^3\omega^1] + $$
$$+ X^3[\omega^1\omega^2]. \qquad (7.18)$$

Преобразуем двойной интеграл по поверхности S в тройной по объему V

$$\iint_S \Omega = \iiint_V d\Omega,$$

тогда $div\,\vec{X}$, т. е. дивергенция поля, определяется равенством

$$\iiint_V d\Omega = \iiint_V div\,\vec{X}\,[\omega^1\omega^2\omega^3], \qquad (7.19)$$

т. е. дивергенция есть коэффициент при элементе объема $[\omega^1\omega^2\omega^3]$ в выражении внешнего дифференциала $d\Omega$.

Пример. *Определить дивергенцию поля в пространстве, отнесенном к полярным координатам* (п. 41)

$$\omega^1 = d\rho, \quad \omega^2 = \rho\, d\theta, \quad \omega^3 = \rho\sin\theta\, d\varphi.$$

Теперь формула (7.18) запишется

$$\Omega = X^1\rho^2\sin\theta\,[d\theta\, d\varphi] + X^2\rho\sin\theta\,[d\varphi d\rho] + X^3\rho\,[d\rho d\theta],$$

и внешний дифференциал

$$d\Omega = \frac{\partial}{\partial\rho}(X^1\rho^2\sin\theta)\,[d\rho d\theta d\varphi] + \frac{\partial}{\partial\theta}(X^2\rho\sin\theta)\,[d\rho d\theta d\varphi] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\varphi}(X^3\rho)\,[d\rho d\theta d\varphi] = div\,\vec{X}\cdot\rho^2\sin\theta\,[d\rho d\theta d\varphi].$$

Так определяется $div\vec{X}$; *нет необходимости знать формы вращения* ω_i^j.

Другой метод получения дивергенции. Предположим, что имеем поле векторов $\vec{X}$ и в каждой точке прямоугольный репер. Тогда абсолютный дифференциал по формуле (7.17)

$$DX^i = dX^i + X^k \omega_k^i$$

обращается в нуль вместе с формами $\omega^1, \omega^2, \omega^3$. Он не зависит от выбранной ориентации репера; следовательно, он представляет линейную форму относительно ω^i. Отсюда

$$DX^i = X_{i1}\omega^1 + X_{i2}\omega^2 + X_{i3}\omega^3.$$

Очевидно, DX^i не зависит от выбранного репера.

Величины X_{ik} определяют то, что называется *производным тензором* вектора X^i (п. 51). Чтобы доказать это, достаточно отметить, что скалярное произведение

$$d\vec{X}\,\delta\vec{M} = DX_i\omega^i(\delta) = X_{ij}\,\omega^i(d)\,\omega^j(\delta)$$

инвариантно.

Поскольку теперь

$$d\{X_1[\omega^2\omega^3] + X_2[\omega^3\omega^1] + X_3[\omega^1\omega^2]\} = \\ = (X_{11} + X_{22} + X_{33})[\omega^1\omega^2\omega^3],$$

то

$$div\,\vec{X} = X_{11} + X_{22} + X_{33}, \qquad (7.20)$$

т. е. свернутый тензор абсолютной производной вектора.

44. Дифференциальные параметры. Пусть V — любая класса C^2 скалярная функция точки и

$$dV = V_1\omega^1 + \ldots + V_n\omega^n.$$

Величины V_i определяют вектор, который называется *градиентом* функции V

$$dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot d\vec{M} = V_i\omega^i.$$

В ортогональных декартовых координатах

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial u^1}, V_2 = \frac{\partial V}{\partial u^2}, \ldots, V_n = \frac{\partial V}{\partial u^n}.$$

Дифференциальный параметр первого рода есть квадрат модуля градиента

$$\Delta_1 V = (V_1)^2 + \ldots + (V_n)^2. \tag{7.21}$$

Дифференциальный параметр второго рода есть дивергенция градиента

$$\Delta_2 V = V_{11} + V_{22} + \ldots + V_{nn}. \tag{7.22}$$

В прямоугольных декартовых координатах он равен

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 V}{(\partial x^2)^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{(\partial x^n)^2}. \tag{7.23}$$

В произвольных координатах он определяется уравнением

$$\iint\limits_S \{V_1[\omega^2\omega^3] + V_2[\omega^3\omega^1] + V_3[\omega^1\omega^2]\} =$$

$$= \iiint\limits_V \Delta_2 V [\omega^1\omega^2\omega^3]. \tag{7.24}$$

Пример. Подсчитаем $\Delta_2 V$ в полярных координатах. Имеем (п. 41)

$$\omega^1 = d\rho, \quad \omega^2 = \rho\, d\theta, \quad \omega^3 = \rho \sin\theta\, d\varphi,$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\rho\, d\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\rho\sin\theta\, d\varphi.$$

Значит

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad V_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad V_3 = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

и поток векторов равен

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\rho^2\sin\theta[d\theta d\varphi] + \frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\theta[d\varphi d\rho] + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{1}{\sin\theta}[d\varphi d\theta].$$

Дифференцируя внешним образом, находим $\Delta_2 V$ по формуле (7.24)

$$\Delta_2 V \rho^2 \sin\theta [d\rho\, d\theta\, d\varphi] = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\rho^2\right)[d\rho\, d\theta\, d\varphi] +$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)[d\theta\, d\varphi\, d\rho] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}[d\varphi\, d\rho\, d\theta]$$

и

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \rho^2 \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Если V зависит только от ρ, то

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dV}{d\rho} \right).$$

ГЛАВА VIII

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

45. Понятие тензора. *Тензор* — совокупность чисел, присоединенных к точке пространства и определяющих там некоторый объект (геометрический или физический). Следовательно, сам тензор зависит от точки, а не от выбранной системы координат (репера), хотя компоненты тензора при изменении системы координат (выбора репера) меняются. Впрочем понятие тензора значительно уже этого определения; как мы сейчас увидим, тензор связан вполне определенным способом преобразования его компонентов.

Примером тензора может служить вектор (компоненты вектора). Мы видели [п. 6, формулы (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), (1.19)], что при неортогональном репере вектор $\vec{\mathbf{X}}$ имеет две серии компонентов: контравариантных X^k и ковариантных X_k, причем скалярный квадрат получается свертыванием ковариантных компонент с контравариантными

$$X_iX^i = X_1X^1 + X_2X^2 + \ldots X_nX^n = \vec{\mathbf{X}}^2,$$

скалярное произведение векторов $\mathbf{X}$ и $\vec{\mathbf{Y}}$ — свертыванием контравариантных компонентов одного множителя с ковариантными другого

$$\vec{\mathbf{X}}\,\vec{\mathbf{Y}} = X^iY_i.$$

Все это переносится на тензоры, и последняя формула после такого перенесения становится его определением. Проще всего строго определить тензор требованием, чтобы после свертывания с достаточным числом ковариантных или контравариантных компонентов векторов (в остальном произвольных) получался скаляр, и этот скаляр был инвариантом относительно выбора репера. Например, компоненты a_{ijk} определяют трехвалентный трижды ковариантный тензор, если для контравариантных компонентов трех произвольных векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ свернутое произведение

$$a_{ijk} X^i Y^j Z^k \tag{8.1}$$

является инвариантом (не зависит от выбора репера).

Теперь мы можем вывести закон инфинитезимальных преобразований тензора при вариации репера — закон, который может служить определением тензора.

По формуле (7.17) абсолютный дифференциал компонентов контравариантного вектора равен нулю при неподвижной точке приложения вектора:

$$DX^k = dX^k + \omega_h^k X^h = 0. \tag{8.2}$$

Обозначим вариацию репера символом δ и форму $\omega_h^k(\delta)$ символом e_h^k. Тогда из уравнения (8.2) получим

$$\delta X^k = -e_h^{\cdot k} X^h = e^k_{\cdot h} X^h. \tag{8.3}$$

Этим определяется изменение компонентов вектора при вариации репера.

Для трехвалентного трижды ковариантного вектора a_{ijk} мы нашли инвариант (8.1); следовательно, имеет место равенство

$$\delta(a_{ijk} X^i Y^j Z^k) = 0,$$

или

$$\delta a_{ijk} X^i Y^j Z^k - a_{ijk} Y^j Z^k e_h^{\cdot i} X^h - a_{ijk} X^i Z^k e_h^{\cdot j} Y^h -$$

$$- a_{ijk} X^i Y^j e_h^{\cdot k} Z^h = 0,$$

или, сменяя указатели $\binom{h}{i}$ во второй сумме, $\binom{h}{j}$ — в третьей и $\binom{h}{k}$ — в четвертой, получим

$$(\delta a_{ijk} - a_{hjk} e_i^{\cdot h} - a_{ihk} e_j^{\cdot h} - a_{ijh} e_k^{\cdot h}) X^i Y^j Z^k = 0.$$

Поскольку векторы X^i, Y^j, Z^k вполне произвольны, равняется нулю выражение в скобках

$$\delta a_{ijk} = a_{hjk} e_i^{\cdot h} + a_{ihk} e_j^{\cdot h} + a_{ijh} e_k^{\cdot h}. \tag{8.4}$$

Это необходимое и достаточное условие для того, чтобы величины a_{ijk} определяли трижды ковариантный тензор.

Аналогично пишутся формулы для вариации контравариантных векторов.

Дифференцируя с символом δ (вариация репера) основное равенство (1.16) п. 6

$$X_i = g_{ij} X^j$$

и пользуясь (8.3) и (5.4), получим

$$\delta X_i = X^j \delta g_{ij} + g_{ij} \delta X^j = X^j (g_{kj} e_i^{\cdot k} + g_{ik} e_j^{\cdot k}) + g_{ij} e^j_{\cdot h} X^h,$$

или, сменяя в последней сумме индексы $\binom{j\ h}{h\ j}$ и пользуясь формулой (1.16), а также тождеством $e_j^{\cdot k} + e^j_{\cdot k} = 0$, получим

$$\delta X_i = e_i^{\cdot k} X_k. \tag{8.5}$$

Теперь для двухвалентного тензора $a_i^{\cdot j}$, один раз ковариантного и один раз контравариантного, составляем инвариантное произведение

$$\delta (a_i^{\cdot j} X^i Y_j) = 0$$

и, дифференцируя с помощью (8.3) и (8.5), получаем

$$\delta a_i^{\cdot j} X^i Y_j + a_i^{\cdot j} (e^i_{\cdot h} X^h Y_j + e_j^{\cdot k} X^i Y_k) = 0$$

и

$$\delta a_i^{\cdot j} + a_h^{\cdot j} e^h_{\cdot i} + a_i^{\cdot h} \cdot e_h^{\cdot j} = 0,$$

или

$$\delta a_i^{\cdot j} = a_h^{\cdot j} e_i^{\cdot h} + a_i^{\cdot h} e^j_{\cdot h}.$$

Для ортогонального репера контравариантные и ковариантные компоненты совпадают, и расположение вверху или внизу индексов преследует только обозначение суммирования.

46. Тензорная алгебра. 1°. *Свертывание индексов**. Из тензора с двумя индексами a_{ij} можно получить свернутое произведение (скалярный инвариант)

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn};$$

оно не зависит от выбора осей.

* Для простоты выкладок мы будем пользоваться ортогональным репером.

Действительно, сменяя во второй сумме индексы $\binom{i\ k}{k\ i}$, получим

$$\delta \sum_i a_{ii} = -\sum_{(i,k)} (e_i^{\cdot k} a_{ki} + e_i^{\cdot k} a_{ik}) = -\sum_{(i,k)} e_i^{\cdot k} (a_{ik} + a_{ki}) =$$

$$= -\sum_{(i,k)} a_{ki} \, (e_i^{\cdot k} + e_k^{\cdot i}) = 0,$$

ибо

$$e_i^{\cdot k} + e_k^{\cdot i} = 0.$$

Другое доказательство. Выражения

$$a_{ij} X^i Y^j \text{ и } a_{ij} X^j Y^i$$

не зависят от выбора осей, а потому не зависит от выбора осей и их сумма

$$a_{ij} (X^i Y^i + X^j Y^i),$$

или, меняя во второй сумме индексы $\binom{j}{i}$ и полагая $Y^i = X^i$, будем иметь

$$(a_{ij} + a_{ji}) X^i X^j = b_{ij} X^i X^j.$$

Это квадратичная симметричная форма, ибо $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$. Нетрудно заметить, что $\sum\limits_i b_{ii}$ — инвариант. Действительно, составим разность

$$\sum_{i,j} b_{ij} X^i X^j - \lambda \sum_i (X^i)^2.$$

Равенство нулю дискриминанта (характеристическое уравнение)

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \ldots b_{2n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависит от выбора осей.

Корни λ характеристического уравнения будут скалярными тензорами, а симметричные функции корней — инвариантами; в частности, сумма корней

$$b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn} = 2 \sum_i a_{ii} —$$

инвариант.

2°. *Сложение тензоров.* Два тензора с одинаковым числом индексов в попарной сумме компонентов дают тензор

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}.$$

Действительно, если a_{ij} и b_{ij} — тензоры, то, свертывая каждый из них с произвольными векторами X^i, Y^j, получаем инвариант, а потому это будет справедливо и для суммы

$$c_{ij}X^iY^j = a_{ij}X^iY^j + b_{ij}X^iY^j.$$

Приложение. *Всякий тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.* Действительно,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

есть тензор, ибо $b_{ij}X^iY^j = a_{ji}X^iY^j$ есть число, независящее от выбора осей. Отсюда

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \text{ — тензор симметричный,}$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \text{ — тензор антисимметричный}$$

и

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

3°. *Умножение тензоров.* Общее умножение. Если a_{ij} и b_{khl} — тензоры, то

$$c_{ijkhl} = a_{ij}b_{khl}$$

есть тензор; ибо, умножая на векторы X^i, Y^j, Z^k, U^h, V^l, получим произведение инвариантов, следовательно, инвариант:

$$c_{ijkhl}X^iY^jZ^kU^hV^l = (a_{ij}X^iY^j)(b_{khl}Z^kU^hV^l).$$

Внутреннее умножение (или умножение со свертыванием). Сумма произведений

$$b_{ij} = a_{ijk}X^k$$

есть двухвалентный тензор, ибо

$$b_{ij}Y^iZ^j = a_{ijk}X^kY^iZ^j$$

есть инвариант.

Отсюда

$$c_k = a^{\,i}_{i\cdot k}$$

есть одновалентный тензор. Каждое свертывание уменьшает валентность (число индексов) тензора на две единицы.

Кососимметричный тензор. Рассмотрим два вектора X^i, Y^j и их общее произведение

$$a^{ij} = X^i Y^j.$$

Составим разность

$$c^{ij} = a^{ij} - a^{ji} = X^i Y^j - X^j Y^i.$$

Это кососимметричный тензор с $\frac{n(n-1)}{2}$ компонентами. Очевидно $c^{ji} = -c^{ij}$.

47. Геометрический смысл кососимметричного тензора. Мы видели, что кососимметричный тензор определяется двумя векторами, взятыми в определенном порядке (бивектор). Чтобы выяснить его геометрический смысл, определим, когда такие два тензора будут равны.

1°. Когда вектор $\vec{\mathbf{Z}}$ лежит в плоскости векторов $\vec{\mathbf{X}}$ и $\vec{\mathbf{Y}}$? Рассмотрим уравнения, выражающие это условие.

Если матрица

$$\begin{Vmatrix} X^1 X^2 \dots X^n \\ Y^1 Y^2 \dots Y^n \\ Z^1 Z^2 \dots Z^n \end{Vmatrix}$$

имеет все определители третьего порядка равными нулю, то Z^i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{matrix} Z^1 c^{23} + Z^2 c^{31} + Z^3 c^{12} = 0, \\ Z^1 c^{24} + Z^2 c^{41} + Z^4 c^{12} = 0, \end{matrix} \quad c^{ij} = \begin{vmatrix} X^i X^j \\ Y^i Y^j \end{vmatrix} \qquad (8.6)$$

Очевидно, положение плоскости векторов $\overrightarrow{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ зависит только от компонентов c^{ij} бивектора.

Плоскость векторов $\vec{\mathbf{X}}$, $\vec{\mathbf{Y}}$ *входит существенным элементом в понятие тензора* c^{ij}. Чтобы два кососимметричных тензора c^{ij}, c_*^{ij} были равны, прежде всего необходимо, чтобы плоскости векторов ($\vec{\mathbf{X}}$, $\vec{\mathbf{Y}}$) и ($\vec{\mathbf{X}}_*$, $\vec{\mathbf{Y}}_*$) совпадали.

2°. Возьмем плоскость бивектора c^{ij} за плоскость (1,2). Тогда наши векторы будут иметь только по две координаты, отличные от нуля

$$\vec{X} = X^1 \vec{I}_1 + X^2 \vec{I}_2,$$

$$\vec{I} = X^1 \vec{I}_1 + Y^2 \vec{I}_2,$$

и останется только один компонент тензора c^{ij}

$$c^{12} = X^1Y^2 - X^2Y^1,$$

все остальные будут равны нулю.

Нетрудно заметить, что этот компонент по абсолютной величине равен модулю векторного произведения

$$\vec{X} \times \vec{I} = (X^1 \vec{I}_1 + X^2 \vec{I}_2) \times (Y^1 \vec{I}_1 + Y^2 \vec{I}_2) = (X^1Y^2 - X^2Y^1) \vec{I}_3.$$

Следовательно, это — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{X}$, $\vec{Y}$; при этом компонент c^{12} положителен, если вращение от вектора $\vec{X}$ к вектору $\vec{Y}$ идет в положительном направлении (относительно выбранного репера $\vec{I}_1 \vec{I}_2 \vec{I}_3$). Итак, *бивектор c^{ij} есть ориентированный параллелограмм.*

Два бивектора равны, если у них одна плоскость (или параллельные плоскости), *одна площадь и одно расположение векторов* (одинаковая ориентация).

Площадь параллелограмма можно заменить любой другой ориентированной площадью.

Пример бивектора: внешнее произведение $[\omega^i \omega^j]$ будет бивектором, представляющим элемент площади: $\omega^i(d)\,\omega^j(\delta) - \omega^i(\delta)\,\omega^j(d)$. Сумма бивекторов не всегда будет бивектором. *Всякий кососимметричный тензор можно рассматривать как сумму* (систему) *бивекторов.*

В трехмерном пространстве кососимметричный тензор всегда бивектор.

В *четырехмерном* пространстве, исключая из двух первых уравнений (8.6) Z^1, получим

$$Z^2 (c^{24} c^{31} - c^{23} c^{41}) + Z^3 c^{24} c^{12} - Z^4 c^{23} c^{12} = 0;$$

между тем в системе (8.6) найдется уравнение для Z^2, Z^3, Z^4 вида

$$Z^2 c^{34} + Z^3 c^{42} + Z^4 c^{23} = 0.$$

Умножая его на c^{12} и прибавляя к предыдущему, заметим, что уничтожатся члены не только с Z^4, но и с Z^3, ибо $c^{24} = -c^{24}$. Поскольку мы можем считать $Z^2 \neq 0$, получаем

$$c^{24}c^{31} - c^{23}c^{41} + c^{34}c^{12} = 0. \qquad (8,7)$$

Нетрудно проверить, что при условии (8.7) система (8.6) будет совместна и определит векторы $\vec{Z}$, лежащие в плоскости ($\vec{X}$, $\vec{Y}$); тем самым будет доказано существование плоскости, определяемой тензором c^{ij}, а следовательно, и пары векторов $\vec{X}$, $\vec{Y}$, которые определяют бивектор c^{ij}.

Следовательно, равенство (8.7) является условием того, чтобы c^{ij} был бивектором в четырехмерном пространстве.

48. Скалярное произведение бивектора на вектор и на бивектор. Произведение бивектора на вектор. Если a_{ij} — бивектор, то произведение

$$b_i = a_{ji}X^j$$

будет вектором.

Чтобы выяснить геометрический смысл этого вектора, выберем плоскость бивектора за плоскость (1,2); тогда $a_{12} \neq 0$, все остальные $a_{ij} = 0$ и

$$b_1 = -a_{12}X^2, \quad b_2 = a_{12}X^1, \quad b_3 = \ldots = b_n = 0.$$

Вектор (b_i), очевидно, лежит в плоскости бивектора, он зависит только от проекции вектора $\vec{X}$ на плоскость бивектора: эта проекция умножается на величину площади бивектора и повернута на прямой угол.

Итак, *произведение (b_i) есть проекция вектора $\vec{X}$ на плоскость a_{ij} бивектора, повернутая на прямой угол в положительном направлении бивектора и умноженная на алгебраическую величину его.*

Дважды свернутое произведение двух бивекторов.

$$a_{ij}b^{ij} = a_{11}b^{11} + 2a_{12}b^{12} + \ldots \qquad (8.8)$$

Это скалярное произведение. Чтобы выяснить геометрический смысл его, выберем плоскость первого бивектора за плоскость (1,2). Тогда для первого бивектора имеем $a_{12} \neq 0$ и все остальные $a_{ij} = 0$. Произведение (8.8) содержит только один член и равно

$$\frac{1}{2}\sum_{(i,j)} a_{ij}b^{ij} = a_{12}b^{12}.$$

Это будет произведение площади первого бивектора на проекцию второго на плоскость первого.

Отсюда скалярный квадрат бивектора равен

$$(a_{12})^2 + (a_{13})^2 + \ldots, \tag{8.9}$$

и косинус угла плоскостей двух бивекторов будет

$$\cos\varphi = \frac{a_{ij}\, b^{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j}(a_{ij})^2 \cdot \sum\limits_{i,j}(b^{ij})^2}}. \tag{8.10}$$

Это распространяется на тривекторы и т. д.

49. Простое вращение твердого тела вокруг точки. Рассмотрим вращение (ω_i^j) репера вокруг точки O. Движение переноса точки $P(X^i)$ будет

$$X^i\, \omega_k^i;$$

если положить

$$a_{ki} = \frac{\omega_k^i}{dt},$$

то скорость переноса v_i точки P будет

$$v_i = X^k a_{ki}.$$

Это вводит кососимметричную систему чисел (a_{ki}), ибо $a_{ij} = -a_{ji}$. Эта совокупность чисел есть тензор. Действительно,

$$a_{ki} X^k Y^i = v_i Y^i = \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{Y}}$$

скалярное произведение двух векторов, следовательно, инвариант. В трехмерном пространстве можно, следовательно, вращение представить бивектором.

Полагая

$$v_1 = a_{21}X^2 + a_{31}X^3,$$
$$v_2 = a_{12}X^1 + a_{32}X^3,$$
$$v_3 = a_{13}X^1 + a_{23}X^2$$

и обозначая

$$a_{23} = p, \quad a_{31} = q, \quad a_{12} = r,$$

$$X^1 = x, \quad X^2 = y, \quad X^3 = z,$$

получим хорошо известные формулы компонент скорости $\vec{V}$ по осям координат:

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qz.$$

Для $n > 3$ *простым вращением* называется вращение, аналитически представляемое бивектором. Общее вращение может быть представлено только системой бивекторов. Всякое вращение в n-мерном пространстве является суммой $\frac{n(n-1)}{2}$ простых вращений, имеющих только один компонент a_{kl}. Тогда

$$a_{kl} X^k$$

будет свернутым произведением бивектора (a_{kl}) на вектор (X^k).

ГЛАВА IX

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

50. Абсолютное дифференцирование. Рассмотрим поле тензоров и будем определять абсолютный дифференциал тензора этого поля. Начнем с векторов.

1°. Векторы. Абсолютным дифференциалом

$$D\vec{X} = \vec{X}' - \vec{X}$$

называется главная часть разности инфинитезимально близких векторов $\vec{X}'$ и $\vec{X}$.

Если оси реперов постоянны (параллельны), то эта разность будет иметь координатами дифференциалы

$$dX^i.$$

При перемещенных осях мы получили для абсолютного дифференциала выражение (7.17)

$$DX^i = dX^i + \omega_k^i X^k.$$

2°. Тензоры. То же можно построить для тензоров. Перейдем из точки M в точку M'. Если оси реперов параллельны, то изменение тензора a_{ij} определяется дифференциалами

$$(da_{ij}).$$

Если оси не параллельны, то это изменение будет определяться абсолютным дифференциалом

$$(Da_{ij}).$$

Построим два равномерных поля векторов X^i и Y^i, т. е. таких, что

$$\left.\begin{aligned} dX^i + \omega^i_k X^k = 0, \\ dY^j + \omega^j_k X^k = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

По определению тензора свернутое произведение

$$c = a_{ij} X^i Y^j$$

является инвариантом и не зависит от выбора осей.

Вычислим двумя способами дифференциал: при параллельных осях и при меняющихся осях.

В первом случае

$$dc = Da_{ij} X^i Y^j, \qquad (9.2)$$

ибо векторы X^i, Y^j не меняются.

Во втором случае

$$dc = da_{ij} X^i Y^j + a_{ij} dX^i Y^j + a_{ij} X^i dY^j,$$

или, заменяя dX^i и dY^j по формулам (9.1),

$$dc = da_{ij} X^i Y^j - a_{ij} \omega^i_k X^k Y^j - a_{ij} X^i \omega^j_k Y^k,$$

или после смены индексов $\begin{pmatrix} i & k \\ k & i \end{pmatrix}$ во второй и $\begin{pmatrix} j & k \\ k & j \end{pmatrix}$ третьей суммах, получим

$$dc = \{ da_{ij} - a_{kj} \omega^k_i - a_{ik} \omega^k_j \} \cdot X^i X^j, \qquad (9.3)$$

но c не зависит от выбора осей, а следовательно, и dc тоже не зависит. Сравнивая две полученные формулы (9.2) и (9.3), получим

$$Da_{ij} = da_{ij} - a_{kj} \omega^k_i - a_{ik} \omega^k_j \qquad (9.4)$$

Это и есть *абсолютное дифференцирование тензора.*

Формула (9.4) распространяется на произвольное число индексов.

51. Правила абсолютного дифференцирования. 1°. *Дифференциал произведения.* Т е о р е м а. Если

$$c_{ijk} = a_i b_{jk},$$

то

$$Dc_{ijk} = Da_i \cdot b_{jk} + a_i \cdot Db_{jk}. \qquad (9.5)$$

Теорема очевидна, если оси реперов в точках M и M' параллельны. Поскольку абсолютное дифференцирование не зависит от выбора реперов, формула (9.5) будет справедлива всегда.

2°. *Дифференциал свернутого произведения.* Теорема. Если

$$c_i = a_k b_i^{\cdot k},$$

то

$$Dc_i = Da_k \cdot b_i^{\cdot k} + a_k \cdot Db_i^{\cdot k}. \qquad (9.6)$$

Доказывается так же, как выше.

3°. *Производный тензор от заданного тензора.* Абсолютное дифференцирование позволяет из поля тензоров получить новое поле тензоров с числом индексов на единицу больше.

Абсолютный дифференциал Da_{ij} равен нулю, если мы остаемся в той же точке M, т. е. если $\omega^k = 0$; поскольку Da_{ij} обращается в нуль вместе с формами ω^k, абсолютный дифференциал Da_{ij} — линейная однородная функция относительно ω^k

$$Da_{ij} = a_{ijk}\omega^k. \qquad (9.7)$$

Покажем, что величины a_{ijk} определяют новый трехвалентный тензор.

Обозначим

$$b_{ij} = a_{ijk}X^k,$$

где X^k—вектор, например, вектор скорости $\vec{X}$ движущейся точки, которая проходит через точку M, с компонентами ω^k. Если обозначить через t время, то компоненты скорости $\vec{X}$ будут

$$X^k = \frac{\omega^k}{dt}.$$

Следовательно, если обе части равенства (9.7) разделить на dt, то получим

$$\frac{Da_{ij}}{dt} = a_{ijk}\frac{\omega^k}{dt} = a_{ijk}X^k = b_{ij}.$$

Левая часть нашего сложного равенства выражена в абсолютных дифференциалах и определяет скорость изменения компонента a_{ij} при движении по кривой, к которой вектор $\vec{X}$ (скорость) служит касательной. Таким образом, b_{ij} будет двухвалентным тензором, как производная от тензора a_{ij} в заданном направлении, производная абсолютная, т. е. независящая от выбора осей.

Значит при любых векторах $\vec{Y}$ и $\vec{Z}$

$$b_{ij}Y^iZ^j = a_{ijk}X^kY^iZ^j$$

будет инвариантом, а следовательно, и a_{ijk} есть тензор. Этот тензор a_{ijk} называется *производным тензором* от тензора a_{ij}.

Пример. Пусть V — любая (класса C^2) функция точки, тогда V^i будет градиентом (т. е. вектором), V^{ij} будет двухвалентным тензором и т. д.

52. Тензорная внешняя дифференциальная форма. Начнем со скалярной формы. Если a_i есть вектор, то

$$\vec{a} \cdot d\vec{M} = a_i\omega^i$$

есть форма, независящая от выбора осей, как скалярное произведение вектора a_i на вектор ω^i.

Для бивектора a_{ij} произведение a_{ij} $[\omega^i\omega^j]$ при условии $a_{ij} = -a_{ji}$ — инвариантная внешняя дифференциальная форма. Действительно, $[\omega^i\omega^j]$ есть элемент поверхности, т. е. бивектор, и мы имеем скалярное произведение бивектора на бивектор.

Это можно обобщить. Если тензор a_{ijk} удовлетворяет условию,

$$a_{ijk} = a_{jki} = a_{kij} = -a_{ikj} \text{ и т. д.,}$$

т. е. определяет тривектор, то форма

$$a_{ijk}[\omega^i\omega^j\omega^k]$$

не зависит от выбора осей, как скалярное произведение двух тривекторов. Так же можно построить *векторные формы*. Пусть a_{ij} — тензор, тогда

$$\tilde{\omega}_i = a_{ij}\omega^j$$

есть вектор, присоединенный к паре бесконечно близких точек $\vec{M}$ и $\vec{M} + d\vec{M}$. Это свернутое произведение тензора с инфинитезимальным вектором данного направления ω^k.

Таким же образом, если a_{ijk} есть тензор, кососимметричный относительно индексов j, k, т. е. если

$$a_{ijk} = -a_{ikj},$$

то

$$\omega_i = a_{ijk}[\omega^j\omega^k]$$

есть вектор, отнесенный к элементу площади, или *векторная внешняя квадратичная форма.*

Идя далее, построим тензорную форму. Если a_{ijk} — тензор, кососимметричный относительно первых двух индексов

$$a_{ijk} = -a_{jik},$$

то форма

$$\tilde{\omega}_{ij} = -a_{ijk}\omega^k$$

будет кососимметричным двухвалентным тензором, отнесенным к линейному элементу, определяемому компонентами ω^k, или бивекторной пфаффовой формой и т. д.

53 Проблема абсолютного внешнего дифференцирования. Рассмотрим линейную дифференциальную форму $\tilde{\omega}^i$ и некоторый объем V, ограниченный поверхностью S, с каждым элементом которой связан вектор $\tilde{\omega}^i$. Геометрическая сумма векторов (векторных форм) на поверхности равна геометрической сумме внешних дифференциалов, приложенных ко всем точкам объема. Если во всех точках области оси параллельны, то по формуле Остроградского (4.8) имеем

$$\iint\limits_S \tilde{\omega}^i = \iiint\limits_V d\tilde{\omega}^i.$$

Если оси не параллельны, то введем однородное поле векторов X_i и рассмотрим сумму произведений

$$X_i\tilde{\omega}^i.$$

Внешний дифференциал не зависит от выбора осей. Если они параллельны, то внешний дифференциал будет

$$X_i d\tilde{\omega}^i,$$

ибо поле однородно, и вектор X_i не дифференцируется. *Если оси не параллельны*, то внешний дифференциал получим в виде

$$X_i d\tilde{\omega}^i + [dX_i\tilde{\omega}^i]$$

или, пользуясь формулами (8.2)

$$dX_i = \omega_i^k X_k,$$

в виде

$$X_i d\tilde{\omega}^i + X_k[\omega_i^k \tilde{\omega}^i] = X_i d\tilde{\omega}^i + X_i[\omega_k^i \tilde{\omega}^k].$$

Обозначим абсолютный дифференциал от формы $\tilde{\omega}^i$ через $D\tilde{\omega}^i$; тогда

$$X_i D\tilde{\omega}^i = X_i \{d\tilde{\omega}^i + [\omega_k^i \tilde{\omega}^k]\},$$

откуда

$$D\tilde{\omega}^i = d\tilde{\omega}^i + [\omega_k^i \tilde{\omega}^k], \tag{9. 8}$$

т. е. то же правило, что и выше.

Пример. $\tilde{\omega}^i = \omega^i$ есть, очевидно, тензор.

Внешняя абсолютная производная $D\omega^i$ будет по правилам подсчитываться в виде

$$D\omega^i = d\omega^i + [\omega_k^i \omega^k] = d\omega^i - [\omega^k \omega_k^i] = 0$$

и равна нулю в силу основных уравнений. Это легко понять: при ортогональности осей $\omega^i = dx^i$, т. е. полный дифференциал. *Тензорная алгебра распространяется на дифференциальные формы.* Если даны $\tilde{\omega}^i$, θ_i, то внешнее произведение

$$[\tilde{\omega}^i \theta_j]$$

есть тоже тензор. Например, $[\omega^i \omega^k]$ есть элемент поверхности.

Теорема. *Каковы бы ни были два тензора $\tilde{\omega}_{ij}$, θ_k, внешний дифференциал их внешнего произведения $[\tilde{\omega}_{ij}\, \theta_k]$ будет*

$$[D\tilde{\omega}_{ij}\theta_k] + (-1)^p [\tilde{\omega}_{ij} D\theta_k], \tag{9. 9}$$

где $D\tilde{\omega}_{ij}$ есть абсолютный внешний дифференциал от $\tilde{\omega}_{ij}$, а $D\theta_k$ — от θ_k; p есть порядок формы $\tilde{\omega}_{ij}$ (т. е. число перемножаемых дифференциалов). Для доказательства достаточно взять параллельные оси.

Пример:

$$[\omega^i \omega^j].$$

Внешний дифференциал произведения $[\omega^i \omega^j]$ будет равен нулю

$$[D\omega^i, \omega^j] - [\omega^i, D\omega^j] = 0,$$

ибо

$$D\omega^i = D\omega^j = 0.$$

Б. УЧЕНИЕ О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ГЛАВА X

ПОНЯТИЕ МНОГООБРАЗИЯ

54. Общее понятие о многообразии. Общее понятие многообразия достаточно трудно точно определить. Поверхность дает представление о двумерном многообразии. Если мы возьмем сферу или тор, мы можем разложить эти поверхности на конечное число частей так, что будет существовать взаимно однозначное непрерывное отображение каждой из этих частей на односвязную область евклидовой плоскости.

Точнее, если задана произвольная точка P_0 многообразия, то можно найти для окрестности точки P_0 систему координат u, v так, что если u_0, v_0 будут координатами точки P_0, то найдется положительное число r, обладающее следующим свойством: всякая система чисел u, v, удовлетворяющая неравенству

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2 \tag{10.1}$$

служит координатами одной и только одной точки многообразия в окрестности точки P_0, и обратно: в достаточно малой окрестности точки P_0 каждая точка P имеет координаты u, v, удовлетворяющие неравенству (10.1).

Сфера и тор — двумерные многообразия без границы. Круглый цилиндр, гиперболический параболоид — открытые двумерные многообразия (с границей в бесконечности); одна полость круглого конуса, если исключить вершину, образует многообразие с одной границей в бесконечности и одной границей на конечном расстоянии (вершина).

Объем, заключенный внутри сферы, образует открытое многообразие трех измерений с границей в виде поверхности сферы. Объем, заключенный внутри сферы, вместе с ее поверхностью, образует трехмерное многообразие с границей, но эта граница составляет часть многообразия, которое поэтому называется *замкнутым*. В этих примерах каждое многообразие определялось как множество точек, лежащих в существующем уже пространстве; можно представить себе многообразие *абстрактно*. В общем случае n-мерное многообразие характеризуется возможностью аналитического представления окрестности каждой точки P_0 посредством системы n координат u^i, способных принимать всевозможные значения в окрестности системы величин $(u^i)_0$, которая представляет точку P_0.

55. Аналитическое представление. Координаты, способные аналитически представлять часть многообразия, могут выбираться бесконечным числом способов. При переходе от одной системы координат к другой предполагается, что новые координаты будут непрерывными функциями старых (класса C^0) и наоборот. *Топология* имеет задачей изучение свойств многообразий, инвариантных относительно таких преобразований координат.

В дифференциальной геометрии прибавляются другие условия: новые координаты, рассматриваемые как функции старых, не только непрерывны, но и допускают непрерывные частные производные до определенного порядка q (класса C^q). Поле инвариантных относительно таких координат преобразований уже значительно шире, чем в топологии.

Определим, например, линию, задавая координаты ее точек функциями параметра t. Сказать, что эти функции дифференцируемы по переменному t, значит объявить свойство линии, сохраняющееся при всяком допустимом преобразовании координат: мы приходим таким образом к понятию *линейного элемента*. Аналитически линейный элемент определяется посредством n координат $u^1, \ldots, u^n$ и взаимных отношений дифференциалов $du^1, \ldots, du^n$. Геометрически он определяется совокупностью линий, которые в заданной точке *касаются друг друга*.

Мы приходим к понятию *плоского элемента*, рассматривая множество линейных элементов, выходящих из одной и той же точки и удовлетворяющих одной и той же системе $n - 2$ уравнений, линейных относительно дифференциалов $du^1, \ldots, du^n$; это, очевидно, такое свойство этой совокупности, которое сохраняется при допустимых преобразованиях координат. Также определяются плоские элементы 3, 4 и более измерений.

Если из заданной точки выходит 4 линейных элемента, касающихся одного и того же плоского элемента, то сложное (ангармоническое) отношение этих линейных элементов будет числом, которое сохраняется при произвольной замене координат. Можно различными способами обобщать эти соображения.

Резюмируя, можно сказать, что изучение свойств этого рода является геометрией многообразия с точки зрения группы *непрерывных* и *дифференцируемых* точечных преобразований, в то время как *топология* будет геометрией многообразия с точки зрения группы просто *непрерывных* точечных преобразований.

Если предположить, что новые координаты допускают непрерывные частные производные двух первых порядков относительно старых (класса C^2) и обратно, то поле геометрических понятий еще расширится. Тогда можно говорить о линиях, имеющих между собой касание второго порядка и т. д.

56. Римановы многообразия. Регулярная метрика. *Римановы многообразия, или римановы пространства*, будут многообразиями с присоединенной *метрикой*: это значит, что в каждой части многообразия, имеющей аналитическое представление посредством системы координат u^i, задается квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ij}\,du^i du^j.$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты g_{ij} будут функциями класса C^2. Мы будем допускать только такие преобразования координат, когда новые координаты допускают непрерывные частные производные двух первых порядков относительно старых (класса C^2) и обратно.

Мы будем говорить, что *метрика регулярна* в заданной области многообразия, если в каждой точке этой области квадратичная форма ds^2 будет положительно определенной относительно дифференциалов du^i.

Мы, конечно, будем предполагать, что если многообразие составлено из нескольких частей, допускающих различные аналитические представления, то возможно согласование метрик между соседними частями. Можно, например, предположить, что аналитическое представление каждой части может быть немного продолжено в соседние части и две формы ds^2, получаемые таким образом в общих частях, могут быть переведены одна в другую заменой координат, позволяющей перейти от одного аналитического представления к другому.

ГЛАВА XI

ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВЫ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

57. Определение локально евклидова пространства. Риманово многообразие называется *локально евклидовым*, если в каждой из частей этого многообразия, аналитически определяемой с помощью некоторой системы координат u^i, форма ds^2 удовлетворяет условиям (II) п. 26 линейного элемента евклидова пространства. Это значит, в силу того что было сказано выше, что многообразие в достаточно малой окрестности какой-нибудь из своих точек M_0 допускает отображение на малую область евклидова пространства с сохранением формы ds^2.

Будем говорить, что это отображение образует *развертывание* части рассматриваемого многообразия на евклидово пространство, или область евклидова пространства *наложима* на соответствующую малую область многообразия.

Если метрика риманова многообразия всюду регулярна, то можно шаг за шагом развернуть все многообразие на евклидово пространство. Однако заранее при этом нельзя быть уверенным в том,

1°) что всякая точка евклидова пространства может быть получена при этом развертывании;

2°) что некоторая точка евклидова пространства, полученная при развертывании многообразия, не может получиться более одного раза.

58. Примеры. Прежде чем идти дальше, рассмотрим несколько простых примеров.

1°. *Круглый цилиндр* в обыкновенном пространстве имеет линейный элемент

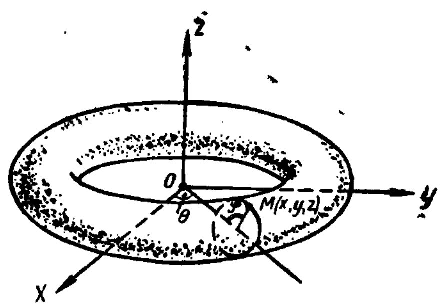
$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

если обозначить через u криволинейную абсциссу ($0 \leqslant u \leqslant l$) сечения, нормального к оси цилиндра, и через v — ординату;

это евклидов линейный элемент; но многообразие, образованное цилиндром, неодносвязно, и развертывание на евклидову плоскость дает последовательность бесконечных полос шириной l: каждая точка цилиндра имеет соответствующими бесконечное множество точек плоскости, получающихся одна из другой переносом в фиксированном направлении, с длиной равной произвольному кратному отрезка l.

Мы видим, что здесь плоскость покрыта вся целиком только один раз. Мы получим образ многообразия, выделяя на плоскости полосу, неограниченную в обе стороны, шириной l, и полагая тождественными две точки параллельных линий, ограничивающих полосу, если прямая, соединяющая эти точки, перпендикулярна к этим параллельным прямым.

2°. Другой пример представляет *тор*; положение точки на торе вполне определяется двумя углами θ и φ (каждый от 0 до 2π), из которых первый дает поворот радиуса окружности большого круга, а второй — поворот радиуса окружности меридиана (фиг. 4).



Фиг. 4

Аналитическое представление тора будет

$$\left.\begin{aligned} x &= (a - b\cos\varphi)\cos\theta, \\ y &= (a - b\cos\varphi)\sin\theta \\ z &= b\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Задавая на торе *произвольно* линейный элемент *

$$ds^2 = a\,d\theta^2 + 2b\,d\theta\,d\varphi + c\,d\varphi^2 \qquad (11.2)$$

* Само собой понятно, что этот линейный элемент не имеет ничего общего с линейным элементом, индуцированным объемлющим пространством в аналитическом представлении, заданном системой (11.1). Киллинг (W. Killing) заметил, что это многообразие конкретно реализуется (при $b = 0$) в четырехмерном евклидовом пространстве на поверхности, определяемой уравнениями

$$x_1 = \sqrt{a}\cos\theta,\ x_2 = \sqrt{a}\sin\theta,\ x_3 = \sqrt{c}\cos\varphi,\ x_4 = \sqrt{c}\sin\varphi.$$

Клиффорд (Clifford) дал другую интерпретацию в эллиптическом пространстве трех измерений.

с постоянными коэффициентами, мы определяем на этом многообразии евклидову метрику. В евклидовой плоскости переменные θ и φ будут декартовыми координатами. Следовательно, тор развертывается на евклидову плоскость в параллелограмм

$$0 \leqslant \theta < 2\pi; \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Чтобы определить развертывание, ограничиваются только проведением линий, не пересекающих ни линии $\theta = 0$, ни линии $\varphi = 0$. Если снять эти ограничения, то тор будет развертываться на всю плоскость, которая будет покрыта только один раз; но областью аналитического представления многообразия будет параллелограмм, противоположные стороны которого не рассматриваются как различные.

3°. Последний пример представляется одной неограниченной полостью *кругового конуса*, линейный элемент которого вытекает из метрики объемлющего пространства (обычного). Эта форма ds^2 тоже, как известно, евклидова. Только здесь *вершина конуса — особая точка метрики*, так как полупрямая, выходящая все время из вершины конуса и проходящая последовательно все направления (на конусе), *описывает угол, меньший* 2π. Если мы хотим избежать исследования особых точек метрики, мы должны исключить вершину из рассматриваемого многообразия: оно будет теперь *открытым* в сторону вершины (и в сторону бесконечности), становясь, таким образом, с точки зрения топологии, гомеоморфным круглому цилиндру.

Развертывание этого многообразия на евклидову плоскость дает всю плоскость (*за исключением одной точки*), но плоскость эта покрыта бесконечное число раз (если только синус половины угла при вершине будет числом иррациональным).

4°. Наконец, произвольная *развертывающаяся поверхность* тоже имеет евклидову форму ds^2, но ребро возврата будет геометрическим местом особых точек метрики; рассматривая только одну полость поверхности, получаем развертывание, которое покрывает только одну часть евклидовой плоскости и может покрыть эту часть много раз и даже бесконечное число раз.

59. Риманово пространство с повсюду регулярной метрикой. *Расстоянием* $[AB]$ между двумя точками A и B риманова пространства с повсюду регулярной метрикой называется нижняя граница длин дуг (спрямляемых) линий, соединяющих точки A и B. При заданных произвольно трех точках A, B, C, очевидно, имеет место неравенство

$$[AC] \leqslant [AB] + [BC].$$

Сферой с центром A и радиусом R называется множество точек M, удовлетворяющих неравенству

$$[AM] \leqslant R.$$

Бесконечное множество точек пространства называется *ограниченным*, если расстояние фиксированной точки A от точек множества ограничено; это свойство не зависит от выбора точки A.

Точка P риманова пространства называется *предельной точкой* бесконечного множества (E) точек этого пространства, если в каждой сфере с центром P и произвольно малым радиусом r существует по крайней мере одна точка множества (E), отличная от P. Их будет тогда бесконечное множество.

60. Локально компактное пространство. Риманово пространство с повсюду регулярной метрикой называется *локально компактным, если всякое ограниченное бесконечное множество точек этого пространства допускает по крайней мере одну предельную точку*.

Очевидно, одна бесконечно простирающаяся полость конуса (*без вершины*), рассматриваемая как двумерное риманово пространство, снабженное метрикой, индуцированной евклидовым пространством (обыкновенным), в которое конус погружен, не обладает этим свойством.

Мы будем говорить, что риманово пространство локально компактное, с повсюду регулярной метрикой *нормальное*. Цилиндр, тор (снабженные метрикой, описанной выше); само евклидово пространство, очевидно, нормальны. Существуют два больших класса нормальных пространств.

1°. *Нормальное риманово пространство называется замкнутым* (*clos*), или *компактным, если всякое бесконечное множество точек допускает по крайней мере одну предельную точку*. В таком пространстве расстояние $[AM]$ фиксированной точки A от переменной точки M ограничено.

2°. Незамкнутые нормальные римановы пространства — *открытые в бесконечность*; например, круглый цилиндр и само евклидово пространство открыты в бесконечность. Это выражение само собой понятно: оно утверждает существование бесконечных последовательностей точек, неограниченно удаляющихся от заданной точки A, не имея предельной точки.

Можно доказать, что нормальное риманово пространство с евклидовой метрикой при развертывании на евклидово пространство покрывает это пространство и только один раз.

Всякое односвязное нормальное риманово пространство с евклидовой метрикой тождественно евклидовому пространству.

61. Группа голономии. Если нормальное, локально евклидово риманово пространство не будет односвязным, то точка M_0

при развертывании на евклидово пространство дает несколько точек (и даже бесконечное множество их)

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots;$$

каждая из них снабжена декартовым репером

$$(R_0),\ (R_1),\ (R_2), \ldots,$$

соответствующим числовым значениям коэффициентов g_{ij} (которые дают модули координатных векторов и косинусы углов между ними) в точке M_0. Все эти реперы, следовательно, равны или симметричны.

Если бы мы начали развертывать, сопоставляя точке M_0 точку P_1, снабженную репером (R_1), то развертывание риманова пространства не претерпело бы никакого существенного изменения; если некоторый путь (γ), идущий из M_0 в M, приводил в первом случае в точку P, снабженную репером (R), то новое развертывание приведет в точку P' с репером (R'), расположенным по отношению к реперу (R_1) так же, как P и (R) были расположены по отношению (R_0). Отсюда следует, что перемещение S_1 (в сопровождении симметрии или без нее), которое переводит в евклидовом пространстве (R_0) в совпадение с (R_1), преобразует между собой реперы

$$(R_0),\ (R_1),\ (R_2), \ldots$$

Действительно, репер (R_i) получается из (R_0) развертыванием некоторого замкнутого контура (цикла) (γ_i), выходящего из M_0 и туда же возвращающегося; развертывание того же цикла, отправляясь от (R_1), даст некоторый репер (R_j), расположенный относительно (R_1), как (R_i) относительно (R_0); этот репер (R_j) можно получить, развертывая сначала цикл (γ_1), а потом (γ_i). Эти соображения показывают, что перемещения

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots$$

образуют группу. Действительно, мы видим, что при выполнении последовательно операций S_1 и S_i репер (R_0) сначала переходит в (R_1), затем — в (R_j); результирующим перемещением будет S_j:

$$S_1 S_i = S_j.$$

Эта группа G называется *группой голономии* риманова пространства. Каждому реперу (R_i) соответствует определенная операция группы, и только одна, а именно та, которая переводит репер (R_0) в совпадение с (R_i). Реперу (R_0) соответствует *тождественная операция.*

Операции группы голономии могут прилагаться к любой точке евклидова пространства, ибо начальная точка развертывания P_0 вполне произвольна. Две точки, соответствующие одной и той же точке риманова пространства, называются *гомологичными*.

62. Дискретность группы голономии локально евклидова пространства. Пусть P — произвольная точка евклидова пространства; ей соответствует определенная точка M риманова пространства; к этой точке можно присоединить положительное число r такое, что всякая точка P', отличная от P и расположенная от нее на расстоянии, меньшем r, получается из точки M', отличной от M. Следовательно, *все точки, гомологичные точке P, находятся от нее на расстоянии, большем r.* Это показывает дискретность группы голономии. Бывает, что для дискретной группы существуют исключительные точки, которые служат своими собственными гомологичными точками для некоторого числа преобразований. Здесь это не имеет места.

Теорема. *Группа голономии локально евклидова риманова пространства дискретна, и никакая ее операция, кроме тождественной, не оставляет инвариантной никакую точку пространства.*

ГЛАВА XII

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО, КАСАТЕЛЬНОЕ В ТОЧКЕ

63. Евклидова касательная метрика. Рассмотрим риманово пространство, определенное как многообразие, снабженное произвольным линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \tag{12. 1}$$

Будем предполагать, что в правой части стоит положительно определенная дифференциальная форма с коэффициентами g_{ij} класса C^1.

Мы будем называть евклидовой метрикой, касательной в точке A $(u_0^1, \ldots, u_0^n)$ к метрике (12.1), метрику, определяемую линейным элементом

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j, \tag{12. 2}$$

построенную с переменными u^i, такую, что для $u^i = u_0^i$ было бы $\gamma_{ij} = g_{ij}$.

Очевидно, существует бесчисленное множество евклидовых метрик, касательных в данной точке: достаточно, например, принять

$$\gamma_{ij} = (g_{ij})_0.$$

С другой стороны, множество этих метрик не зависит от выбора координат, которые аналитически определяют риманово пространство, ибо прн замене переменных u^i другими определенными переменными v^i новые значения в точке A коэффициентов линейного элемента зависят только от их старых значений в точке A.

Равенство $\gamma_{ij} = g_{ij}$ сохранится в точке A и для новых переменных.

Вместо того чтобы говорить: мы снабжаем рассматриваемое многообразие новой метрикой (евклидовой), можно сказать: мы отображаем риманово пространство на евклидово так, что в этом представлении линейный элемент евклидова пространства будет $d\sigma^2$. Это евклидово пространство будем называть *евклидовым пространством, касательным в точке A к заданному риманову пространству*. Это условный знак, удобный потому, что он дает наглядность.

Можно сказать, что существует бесконечное множество евклидовых пространств, касательных в точке A, в том смысле, что линейный элемент $d\sigma^2$ зависит от бесконечного числа произвольных параметров, но, поскольку мы будем рассматривать в дальнейшем только геометрические свойства, общие всем этим пространствам, мы можем смело говорить об одном евклидовом пространстве, касательном в точке A.

64. Касательное евклидово пространство. Первое геометрическое понятие, которое влечет за собой рассмотрение касательного евклидова пространства, будет понятие расстояния между точкой A и точкой бесконечно близкой — расстояния, равного $d\sigma$ или ds,— это то понятие, которое лежит в основе определения риманова пространства

1°. *Угол двух направлений* (du^i) и (δu^i). В касательном евклидовом пространстве значение косинуса угла двух векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ получается из скалярного произведения $\vec{X}\cdot\vec{Y}$, которое совпадает с коэффициентом при 2λ в разложении квадрата суммы

$$(\vec{X}+\lambda\vec{Y})^2=\vec{X}^2+2\lambda\vec{X}\vec{Y}+\lambda^2\vec{Y}^2;$$

в римановом пространстве надо рассмотреть произведение

$$g_{ij}(du^i+\lambda\delta u^i)(du^j+\lambda\delta u^j)=$$
$$=g_{ij}(du^i du^j+\lambda^2\delta u^i\delta u^j)+2\lambda g_{ij}du^i\delta u^j.$$

Следовательно, искомый косинус угла будет

$$\cos\varphi=\frac{g_{ij}du^i\delta u^j}{ds\,\delta s} \qquad (12.3)$$

Мы можем быть заранее уверенными, что *правая часть* этого равенства *не зависит от выбора системы координат*, ибо именно по этой формуле определяется угол двух направлений в касательном евклидовом пространстве с метрикой $d\sigma^2$.

Можно так же определять угол между p-мерным плоским элементом и q-мерным плоским элементом и т. д., если они имеют общую вершину.

2°. Мы воспользуемся понятием угла между направлениями в точке риманова пространства, чтобы получить *прямоугольные координаты и ортогональный репер.*

Как известно, положительно определенная форма

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

всегда может быть представлена в виде суммы квадратов

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2, \tag{12.4}$$

где

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a^1_1 du^1 + a^1_2 du^2 + \ldots + a^1_n du^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \det|a^j_i| \neq 0 \\ \omega^n &= a^n_1 du^1 + a^n_2 du^2 + \ldots + a^n_n du^n. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь векторы $\vec{I}_i$ касательного евклидова пространства с координатами X^k, удовлетворяющими уравнениям:

$$\text{для } \vec{I}_1 \begin{cases} a^1_1 X^1 + \ldots + a^1_n X^n = 1, \\ a^2_1 X^1 + \ldots + a^2_n X^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^n_1 X^1 + \ldots + a^n_n X^n = 0; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{для } \vec{I}_n \begin{cases} a^1_1 X^1 + \ldots + a^1_n X^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^n_1 X^1 + \ldots + a^n_n X^n = 1. \end{cases}$$

Выражение, стоящее в числителе формулы (12.3), является билинейной формой, присоединенной к квадратичной форме (12.1). После канонизации квадратичной формы (12.1) она приняла вид (12.4). Билинейная форма (12.3) примет теперь вид

$$\omega^1(d)\,\omega^1(\delta) + \ldots + \omega^n(d)\,\omega^n(\delta) = 0, \tag{12.5}$$

где

$$\omega^i(d) = a^i_k\,du^k, \quad \omega^i(\delta) = a^i_k\,\delta u^k.$$

Рассмотрим два вектора $\vec{I}_1$. $\vec{I}_2$; для первого имеем

$$\frac{\omega^1(d)}{dt} = 1, \quad \omega^2(d) = 0, \ldots, \omega^n(d) = 0,$$

для второго

$$\omega^1(\delta) = 0, \ \frac{\omega^2(\delta)}{\delta t} = 1, \dots, \ \omega^n(\delta) = 0.$$

Внося эти значения в билинейную форму (12.5), увидим, что она тождественно обращается в нуль. Следовательно, векторы $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ ортогональны (ср. п. 38). Таким образом доказываются остальные соотношения

$$\vec{I}_j \vec{I}_k = \delta_{jk}.$$

Следовательно, репер, построенный на n векторах $\vec{I}_j$ в касательном евклидовом пространстве, будет ортонормированным репером. Компонентами поступательных смещений репера будут те формы ω^i, которыми мы пользовались для его определения.

3°. В точке A касательного евклидова пространства можно определять *векторы* (в косоугольном репере ковариантные и контравариантные), *бивекторы*, *поливекторы* и вообще произвольные *тензоры*. Все это переносится в риманово пространство; более того, мы можем вводить понятия, имеющие отношение ко всей линии или поверхности.

Прежде всего, поскольку известно инфинитезимальное расстояние бесконечно близких точек, путем сложения (интеграции) получается длина дуги произвольной кривой

$$s = \int \sqrt{\sum_i (\omega^i)^2} \, ;$$

отсюда немедленно следует (Риман) понятие *прямой*, или *геодезической*, как линии, осуществляющей экстремум расстояния. Мы здесь отмечаем эту возможность, чтобы вернуться к ней позднее. Элемент объема пространства, как известно, определяется посредством

$$d\tau = [\omega^1 \omega^2 \dots \omega^n];$$

отсюда интегрированием получается понятие конечного объема.

65. Основные понятия векторного анализа. Если в римановом пространстве дано поле векторов, то мы не сумеем еще определить производного тензора, ибо для этого надо уметь сравнивать тензоры в разных точках пространства. Тем не менее мы можем определить *ротацию* (вихрь) поля. Зададимся, например, скалярным полем; пусть V — функция точки

$$V = V(u^1, \dots, u^n).$$

Дифференциал dV линейно зависит от $du^1, du^2, \ldots, du^n$. Следовательно, его можно представить в виде:

$$dV = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 + \ldots + V_n\omega^n. \tag{12.6}$$

Величины V_i определяют *градиент* функции.

Пусть имеем поле векторов

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Касательная тензорная форма будет

$$\tilde{\omega} = X_1\omega^1 + \ldots + X_n\omega^n.$$

Возьмем внешний дифференциал. Так как дифференциал от X_i линейно выражается через ω^j, то

$$d\tilde{\omega} = X_{ij}[\omega^i\omega^j], \tag{12.7}$$

X_{ij} — кососимметричный тензор, так называемая ротация (вихрь) поля векторов.

Например, для выражения

$$\tilde{\omega} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

внешний дифференциал

$$[dX\,dx] + [dY\,dy] + [dZ\,dz] =$$

$$= \sum\left(\frac{\partial X}{\partial y}[dydx] + \frac{\partial X}{\partial z}[dzdx]\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)[dydz] +$$

$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)[dzdx] + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)[dxdy],$$

обычный в евклидовом пространстве вид *вихря* (ротации).

Также выведем *дивергенцию*. Поток векторов определяет тензорную форму

$$\tilde{\omega} = X_1[\omega^2\omega^3] + X_2[\omega^3\omega^1] + X_3[\omega^1\omega^2],$$

где внешние произведения $[\omega^i\omega^j]$ определяют некоторые площади.

Внешний дифференциал имеет вид:

$$d\tilde{\omega} = a[\omega^1\omega^2\omega^3].$$

Здесь a есть *дивергенция* вектора.

Если возьмем поток градиентов

$$V_1 [\omega^2\omega^3] + V_2 [\omega^3\omega^1] + V_3 [\omega^1\omega^2] \tag{12.8}$$

и продифференцируем внешним образом, то получим второй дифференциальный параметр

$$\Delta_2 V [\omega^1\omega^2\omega^3].$$

Пример. Возьмем линейный элемент

$$ds^2 = z^2 dx^2 + z^2 dy^2 + dz^2,$$

так что

$$\omega^1 = z dx, \quad \omega^2 = z dy, \quad \omega^3 = dz.$$

Как найти второй дифференциальный параметр?

Чтобы определить градиент, дифференцируем V

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz =$$

$$= V_1 \omega^1 + V_2 \omega^2 + V_3 \omega^3 = V_1 z dx + V_2 z dy + V_3 dz.$$

Следовательно,

$$V_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad V_3 = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Это компоненты градиента. Элементарный поток векторов будет

$$V_1 [\omega^2\omega^3] + V_2 [\omega^3\omega^1] + V_3 [\omega^1\omega^2] =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x} [dydz] + \frac{\partial V}{\partial y} [dzdx] + \frac{\partial V}{\partial z} [dxdy].$$

Дифференцируем внешним образом:

$$\Delta_2 V [\omega^1\omega^2\omega^3] = \Delta_2 V \cdot z^2 [dxdydz] =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} [dxdydz] + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} [dydzdx] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial V}{\partial z} \right) [dzdxdy],$$

т. е.

$$\Delta_2 V = \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right\}. \tag{12.9}$$

Функция V будет гармонической в этом римановом пространстве, если $\Delta_2 V = 0$.

66. Три способа введения связности. Несмотря на большое число понятий, которые мы могли перенести в риманово пространство из касательного евклидова (путем обобщения), еще много осталось основных элементарных понятий, которых нам нехватает, например, угол поворота вектора поля при переходе из одной точки пространства в другую.

Вообще всякое геометрическое понятие, которое вводит в каждой точке *скаляр*, легко обобщается; то же можно сказать о понятии, которое вводит один или несколько векторов, но *при условии, что все они имеют общее начало.*

Дивергенция векторного поля, казалось бы, представляет исключение, но в действительности элементарный *поток векторов вводит поле только в одной точке.*

Суммируя, мы видим, что риманово пространство для нас до сих пор было только *собранием малых частей евклидова пространства*, оно было в некотором отношении *аморфным*, поскольку мы не связали еще эти различные куски взаимной ориентацией.

Для этого нам надо определить поворот репера при смещении точки в пространстве. Это можно сделать разными способами.

Риман исходил из постулата, что геодезическая линия пространства, экстремум длины дуги,— не только кратчайшая, но и прямейшая, т. е. не вращает репера.

Другой путь — тот же, который привел нас к касательному евклидову пространству: выделение соприкасающейся евклидовой метрики и перенесение ее связности на риманово пространство.

Третий путь — аксиоматический: наложение более или менее естественных требований. Он, может быть, наиболее интересен, потому что допускает обобщение на пространства другой фундаментально-групповой связности.

Мы здесь изложим второй и третий методы.

67. Соприкасающаяся в точке евклидова метрика. Соприкасающаяся евклидова метрика в точке $A(u_0^i)$ к заданной метрике определяется линейным элементом

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j,$$

если коэффициенты γ_{ij} и их частные производные первого порядка имеют в точке A те же числовые значения, что и для заданного линейного элемента.

Если существуют соприкасающиеся евклидовы метрики, то их совокупность не зависит от выбора системы координат, ибо для заданной замены переменных новые числовые значения коэффициентов g_{ij} и их частных производных первого порядка известны, если известны старые числовые значения тех же величин. Поэтому, вместо того чтобы говорить о соприкасающейся евклидовой метрике, можно говорить о *соприкасающемся евклидовом пространстве.*

Прежде всего надо доказать существование соприкасающихся евклидовых пространств в заданной точке A риманова пространства.

Из формул (1.9), (1.10), (5.4) для косоугольного репера в евклидовом пространстве имеем

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i, \tag{12.10}$$

$$d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k, \quad \omega_i^k = \gamma^k_{i\,j}\, \omega^j,$$

$$g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j, \quad dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}; \tag{12.11}$$

если выбрать так называемый *натуральный репер*, т. е. положить

$$\omega^i = du^i, \tag{12.12}$$

то

$$d\omega^i = 0,$$

и из первых уравнений структуры (II) п. 26

$$[du^j \omega_j^i] = 0$$

получим

$$\omega_j^i = \Gamma_{j\,k}^{\,i} du^k, \quad \Gamma_{j\,k}^{\,i} = \Gamma_{k\,j}^{\,i}, \tag{12.13}$$

$$dg_{ij} = (\Gamma_{i\,h}^{\,k}\, g_{kj} + \Gamma_{j\,h}^{\,k}\, g_{ik})\, du^h. \tag{12.14}$$

Отсюда прямо вытекает

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} = \Gamma_{i\,l}^{\,k} g_{kj} + \Gamma_{j\,l}^{\,k} g_{ik}. \tag{12.15}$$

Следовательно, если γ_{ij} в точке $u^i = u_0^i$ совпадают с $(g_{ij})_0$ и коэффициенты $\Gamma_{i\,j}^{\,k}$ евклидова репера в начальной точке равны соответствующим значениям римановой метрики $(\Gamma_{i\,j}^{\,k})_0$ для $u^i = u_0^i$, то не только коэффициенты линейного элемента g_{ij}, но и их производные $\frac{dg_{ij}}{du^k}$ будут соответственно равны в обеих метриках.

Это нетрудно сделать; поскольку из уравнений (12.10), (12.13) следует

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{M}}}{\partial u^i} = \vec{\mathbf{e}}_i \qquad \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{M}}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{i\ j}^{\ k} \vec{\mathbf{e}}_k, \tag{12.16}$$

надо только подобрать параметризацию евклидова пространства так, чтобы для $u^i = \overset{i}{u}_0$ уравнения (12.16) были удовлетворены.

Строим в произвольной точке O евклидова пространства декартову косоугольную систему координат $(\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n)$ так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\vec{\mathbf{e}}_i \vec{\mathbf{e}}_j = (g_{ij})_0 \quad \text{для} \quad u^i = \overset{i}{u}_0. \tag{12.17}$$

Относительно этой системы определяем координаты x^i произвольной (текущей) точки M евклидова пространства посредством уравнений

$$x^i = u^i - \overset{i}{u}_0 + \frac{1}{2} (\Gamma_{r\ s}^{\ i})_0 (u^r - \overset{r}{u}_0)(u^s - \overset{s}{u}_0) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12.18}$$

Линейный элемент евклидова пространства, отнесенный к этой системе криволинейных координат, будет обладать искомыми свойствами: совпадение значений γ_{ij} и g_{ij} в точке $u^i = \overset{i}{u}_0$ вытекает из построения начального репера, в частности, из формул (12.17); совпадение значений $\Gamma_{i\ j}^{\ k}$ для евклидова и риманова пространств вытекает по формулам (12.16) из уравнений (12.18). Следовательно, числовые значения функций γ_{ij}, $\frac{d\gamma_{ij}}{du^k}$ и g_{ij}, $\frac{dg_{ij}}{du^k}$ в точке $u^i = \overset{i}{u}_0$ совпадают, что и требовалось доказать.

ГЛАВА XIII

СОПРИКАСАЮЩЕЕСЯ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

68. Абсолютное дифференцирование векторов в римановом пространстве. Все геометрические понятия, общие для различных соприкасающихся евклидовых пространств в некоторой точке, будут, очевидно, внутренними (инвариантными) геометрическими свойствами риманова пространства. Так будет для всех тех свойств, которые зависят только от числовых значений в точке A коэффициентов g_{ij} и $\Gamma_{i\ j}^{\ k}$.

Представим себе, что в соприкасающемся евклидовом пространстве фиксирована точка A и репер (R_0), к ней присоединенный. Всякая точка M риманова пространства представлена точкой $\bar{M}$, координаты которой относительно репера (R_0) вполне определены с точностью до бесконечно малых порядка *выше второго*. Репер, присоединенный к точке $\bar{M}$ в евклидовом пространстве вполне определен по величине и ориентации с точностью до бесконечно малых порядка *выше первого*; кроме того, он равен реперу, присоединенному к точке M в римановом пространстве с точностью до бесконечно малых порядка выше первого. Всякий вектор риманова пространства с вершиной в точке M представлен с той же степенью приближения равным вектором.

Вообще, если M и N — две произвольные точки в окрестности точки A риманова пространства и если соответствующие им точки лежат в сферической окрестности с центром A и радиусом r, то скалярное произведение двух векторов, которые представляют векторы с вершинами M и N, вполне определено с точностью до бесконечно малых порядка радиуса r включительно.

Вектор $\vec{X}$ с вершиной в точке A и вектор $\vec{X}'$ с вершиной в бесконечно близкой точке A' риманова пространства представлены в соприкасающемся евклидовом пространстве двумя векторами, разность которых определена до бесконечно малых порядка выше первого. Это приводит нас к распространению на произвольное риманово пространство понятия *абсолютного дифференциала* (или *ковариантного дифференциала для натурального репера*) от вектора или вообще тензора, для которого мы сохраним обозначение буквой D.

По формуле (7.17) он равен

$$DX^i = dX^i + X^k \omega_k^i, \tag{13.1}$$

$$DX_i = dX_i - X_k \omega_i^k \tag{13.2}$$

для контравариантного (X^i) и ковариантного (X_i) векторов; в ортогональном репере оба определения совпадают, так как тогда

$$X^k = X_k \text{ и } \omega_i^{\cdot k} = \omega_{ik} = \omega_{\cdot k}^{i} = -\omega_k^{\cdot i};$$

знак минус появляется вследствие изменения порядка следования индексов.

Важно отметить, что абсолютный дифференциал в евклидовой геометрии — настоящий дифференциал, тогда как нельзя быть уверенным, что так же будет в геометрии римановых пространств.

В частности, обозначая (п. 4) через $\vec{e}_i$ координатные (базисные) векторы, имеем

$$D\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k.$$

Определение. Два вектора в бесконечно близких точках A и A' называются *эквиполентными*, если абсолютный дифференциал первого вектора (при переходе ко второму) будет равен нулю.

Поэтому условия эквиполентности будут

$$dX^i + X^k \omega_k^i = 0, \tag{13.3}$$

$$dX_i - X_k \omega_i^k = 0. \tag{13.4}$$

69. Геодезические линии риманова пространства. *Определение ускорения* движущейся в римановом пространстве точки не представляет теперь затруднения: если $\vec{v}$ — вектор скорости, то вектор ускорения будет

$$\frac{D\vec{v}}{dt}.$$

Например, чтобы написать контравариантные компоненты ускорения γ^i в натуральном репере с координатами (u^i), заметим, что в силу (12.12), (12.13), (12.14) скорость будет

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\omega^i}{dt}\vec{e}_i = \frac{du^i}{dt}\vec{e}_i, \qquad v^i = \frac{du^i}{dt}.$$

Прилагая формулу (13.1) к компонентам v^i и учитывая (12.13), имеем

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{d^2u^i}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\omega_k^i = \frac{d^2u^i}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\Gamma_{kh}^i\frac{du^h}{dt}$$

и

$$\gamma^i = \frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma_{kh}^i\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt}. \tag{13.5}$$

Точка, двигающаяся с ускорением, все время равным нулю, имеет скорость, постоянно эквиполентную самой себе. Те линии риманова пространства, у которых касательная все время остается эквиполентной самой себе называются *геодезическими* (прямейшими) линиямн пространства. Если такая линия пробегается с постоянной скоростью, равной единице, то ускорение равняется нулю. Отсюда уравнения *геодезических* линий в римановом пространстве

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma_{kh}^i\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt} = 0. \tag{13.6}$$

Это система Коши для неизвестных функций u^i и независимого переменного t. В условиях теоремы Коши она допускает решение, и только одно, при начальных условиях

$$u^i = (u^i)_0, \qquad \frac{du^k}{dt} = (v^k)_0 \text{ для } t = t_0; \tag{13.7}$$

$(u^i)_0$, $(v^k)_0$ — постоянные.

Отсюда теорема: *через всякую точку в области регулярности риманова пространства, по всякому направлению проходит одна и только одна геодезическая*, ибо первое уравнение (13.7) определяет начальную точку пространства, а второе — начальную скорость.

70. Обобщение формул Френе. Кривизна н кручение линии. *Теория кривизны линий* без изменения переносится из евклидова пространства в произвольное риманово пространство.

Действительно, пусть M — точка кривой, $\vec{T}$ — единичный вектор касательной в точке M, ds — элемент дуги кривой.

Вектор $\frac{D\vec{T}}{ds}$ нормален к вектору $\vec{T}$ (непосредственно видно, если привлечь соприкасающееся в точке M евклидово пространство).

Пусть

$$\frac{D\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N},$$

где $\vec{N}$ означает единичный вектор (*главная нормаль*). Пусть $\vec{B}$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\vec{T}$ и $\vec{N}$ и образующий с ними правый трехгранник, и допустим, что

$$\frac{D\vec{N}}{ds} = \alpha\vec{T} + \beta\vec{N} + \gamma\vec{B},$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \alpha'\vec{T} + \beta'\vec{N} + \gamma'\vec{B}.$$

Соотношения

$$\vec{T}\cdot\vec{N} = 0, \quad \vec{T}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{N}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{N}^2 = 1, \quad \vec{B}^2 = 1$$

дают после абсолютного дифференцирования

$$\frac{1}{\rho} + \alpha = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \gamma + \beta' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0.$$

Полагая теперь

$$\gamma = -\beta' = \frac{1}{\tau},$$

имеем обобщенные формулы Френе

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\vec{T}}{ds} &= \frac{1}{\rho}\vec{N}, \\ \frac{D\vec{N}}{ds} &= -\frac{1}{\rho}\vec{T} + \frac{1}{\tau}\vec{B}, \\ \frac{D\vec{B}}{ds} &= -\frac{1}{\tau}\vec{N}. \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

Величины $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{\tau}$ будут *кривизной* и *кручением* кривой. Прямые (геодезические) риманова пространства будут линиями нулевой кривизны. Что касается линий нулевого кручения, то они характеризуются тем, что соприкасающийся в точке M нашей кривой плоский элемент параллелен соприкасающемуся плоскому элементу в бесконечно близкой точке M'; векторы

$$\vec{\mathbf{T}} + D\vec{\mathbf{T}}, \quad \vec{\mathbf{N}} + D\vec{\mathbf{N}},$$

которые будут единичными векторами соответственно касательной и главной нормали в точке M', параллельно перенесенные из M' в M, становятся

$$\vec{\mathbf{T}} + \frac{ds}{\rho}\vec{\mathbf{N}}, \quad \vec{\mathbf{N}} - \frac{ds}{\rho}\vec{\mathbf{T}} + \frac{ds}{\tau}\vec{\mathbf{B}};$$

они попадут в соприкасающийся плоский элемент в точке M, если *кручение* $\frac{1}{\tau}$ *равно нулю*, и только в этом случае.

Если отобразить риманово пространство на соприкасающееся в точке M евклидово, то заданная кривая (C) будет иметь образом некоторую кривую (Γ), *которая имеет ту же кривизну в точке M, что и (C)*. Более того, векторы $\vec{\mathbf{T}}$, $\vec{\mathbf{N}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ кривой будут образами аналогичных векторов кривой (C). Еще отчетливей можно это представить в таком виде: *примем ли мы в римановом пространстве заданную метрику или евклидову метрику, соприкасающуюся в точке M, кривая (C) будет иметь в точке M ту же касательную, те же главную нормаль, бинормаль и ту же кривизну, но не обязательно в обеих метриках одно и то же кручение.* В частности, всякая прямая (геодезическая) риманова пространства представляет в точке M точку перегиба для наблюдателя, который принял соприкасающуюся в M евклидову метрику.

71. Теория кривизны поверхностей в римановом пространстве. Классическая теория кривизны поверхностей переносится с большой легкостью на римановы пространства*. Различные кривые, проведенные на поверхности (S) и проходящие через заданную точку M этой поверхности, имеют ту же главную нормаль и даже кривизну, принять ли метрику риманова пространства или соприкасающуюся в точке M евклидову метрику. Отсюда следует, что законы, которые управляют изменением кривизны этих кривых, когда они поворачивают свою касательную вокруг точки M, те же самые, что и в евклидовом пространстве.

---

* Теория кривизны поверхностей в евклидовом пространстве излагается в главе XXIII.

Все кривые, касающиеся между собой, имеют одну и ту же *нормальную кривизну*; эта нормальная кривизна равна $\frac{\cos V}{\rho}$, где V — угол главной нормали кривой с нормалью к поверхности и ρ — радиус кривизны кривой; это — *теорема Менье.*

Существуют два ортогональных касательных направления на поверхности, соответствующих максимуму и минимуму нормальной кривизны: это *главные направления*; соответствующие им нормальные кривизны будут *главными кривизнами.*

Линиями кривизны будут линии, которые в каждой своей точке касаются одного из главных направлений в этой точке. Если θ — угол, который образует кривая с линией кривизны первого семейства, то для этой кривой

$$\frac{\cos V}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}, \tag{13.9}$$

где $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ означают две главные кривизны.

Асимптотические линии — те кривые, нормальная кривизна которых равна нулю; их соприкасающийся плоский элемент касается поверхности. Прямая (геодезическая) риманова пространства, касающаяся в точке M асимптотической, имеет в этой точке касание второго порядка с поверхностью.

Линии кривизны характеризуются условием: в произвольной точке M линии касательная к этой линии, нормаль к поверхности и нормаль в инфинитезимально близкой точке M' этой линии, после параллельного переноса из M' в M будут лежать в одном плоском элементе.

Если обозначить буквой $\vec{\nu}$ единичный вектор нормали к поверхности, а через $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$— единичные векторы касательных к линиям кривизны, то, смещаясь в направлении вектора $\vec{T}_1$ на длину ds_1, имеем

$$D_1\vec{\nu}=-\frac{ds_1}{R_1}\vec{T}_1,$$

а смещаясь в направлении $\vec{T}_2$ на длину ds_2, получим

$$D_2\vec{\nu}=-\frac{ds_2}{R_2}\vec{T}_2.$$

Эти формулы обобщают на риманово пространство классические *уравнения Олинда Родрига.*

Если сместиться в направлении, образующем угол θ с главным направлением $\vec{T}_1$, на отрезок ds, то получим вообще

$$\frac{D\vec{\nu}}{ds} = -\frac{\cos\theta}{R_1}\vec{T}_1 - \frac{\sin\theta}{R_2}\vec{T}_2. \qquad (13.10)$$

Наконец, полную кривизну $\frac{1}{R_1 R_2}$ поверхности в точке M можно определить методом Гаусса для евклидова пространства. Возьмем элемент поверхности $d\sigma$ около точки M и в евклидовом пространстве, касательном в точке M,— сферу радиуса 1 с центром в M. Перенесем параллельно в M нормали к поверхности в различных точках элемента $d\sigma$ и рассмотрим малую область сферы, определяемую пересечением со сферой перенесенных нормалей; отношение $\frac{d\omega}{d\sigma}$ площади этой части сферы к заданной площади в пределе равно полной кривизне $\frac{1}{R_1 R_2}$. Можно рассматривать $d\omega$ как телесный угол при вершине конуса M, полученный параллельным переносом нормалей из различных точек элемента $d\sigma$.

72. Геодезическое кручение. Теорема Эннепера. На самые общие римановы пространства распространяется понятие *геодезического кручения* кривой на поверхности.

Действительно, обозначим через $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ единичные векторы касательной, нормали и бинормали кривой и сохраним обозначение $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{\nu}$ для касательных главных направлений и нормали к поверхности. Наконец, через θ обозначим угол касательной к кривой с касательной первого главного направления и через V — угол главной нормали кривой с нормалью к поверхности. Направляющие косинусы векторов $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ по отношению к векторам $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{\nu}$ даются таблицей:

	$\vec{T}_1$	$\vec{T}_2$	$\vec{\nu}$
$\vec{T}$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
$\vec{N}$	$-\sin\theta\sin V$	$\cos\theta\sin V$	$\cos\theta$
$\vec{B}$	$\sin\theta\cos V$	$-\cos\theta\cos V$	$\sin\theta$

Отправляемся от обобщенных формул Френе

$$\left.\begin{aligned}\frac{D\vec{\mathbf{T}}}{ds} &= \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}},\\ \frac{D\vec{N}}{ds} &= -\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}} + \frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}},\\ \frac{D\vec{\mathbf{B}}}{ds} &= -\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}}\end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

и уравнения

$$\frac{D\vec{\nu}}{ds} = -\frac{\cos\theta}{R_1}\vec{\mathbf{T}}_1 - \frac{\sin\theta}{R_2}\vec{\mathbf{T}}_2.$$

Дифференцируя соотношения

$$\vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\nu} = 0, \quad \vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\nu} = \cos V, \quad \vec{\mathbf{B}}\vec{\nu} = \sin V,$$

получаем два различных уравнения

$$\frac{\cos V}{\rho} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}, \tag{13.12}$$

$$\frac{dV}{ds} + \frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta. \tag{13.13}$$

Второе из этих уравнений содержит в левой части то, что называется *геодезическим кручением* кривой; форма правой части показывает, что оно одно и то же для всех линий с одной и той же касательной. Оно обращается в нуль для линий кривизны.

Если формулу (13.13) приложить к асимптотической линии, отличной от прямой $\left(V = \frac{\pi}{2}\right)$, то получим

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta;$$

между тем для асимптотической линии имеет место

$$\frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{1}{\tau} = \pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}. \tag{13.14}$$

Это *теорема Бельтрами — Эннепера для произвольного риманова пространства.*

Асимптотические линии, выходящие из точки M поверхности, имеют в этой точке равные по абсолютной величине и противоположные по знаку кручения, абсолютная величина которых равна квадратному корню из полной кривизны поверхности с противоположным знаком.

В частности, кручение сдвоенной асимптотической линии тождественно равно нулю.

Известно, что в евклидовом пространстве, если два семейства асимптотических совпадают, то они будут прямыми. Эта теорема уже неверна в произвольном римановом пространстве *. Тем не менее в силу теоремы Эннепера можно утверждать, что это — линии с нулевым кручением.

73. Сопряженные направления. Теория *сопряженных касательных* обобщается на произвольное риманово пространство. Если M и M'— две инфинитезимально близкие точки кривой (C), проведенной на поверхности (S), то плоский элемент, касательный к поверхности в точке M', после параллельного переноса в точку M, имеет с плоским элементом, касательным в M, общее направление, сопряженное направлению линии (C) в M. Два сопряженных направления гармонически сопряжены по отношению к асимптотическим направлениям. Наконец, абсолютный дифференциал единичного вектора нормали к поверхности при переходе из M в M' перпендикулярен к сопряженному направлению кривой. Все эти свойства становятся очевидными после отображения на соприкасающееся евклидово пространство в точке M.

74. Теорема Дюпена о триортогональной системе. Закончим обобщением *знаменитой теоремы Дюпена*. Известно, что триортогональной системой называется система, образованная из трех однопараметрических семейств поверхностей, пересекающихся под прямым углом. Теорема Дюпена утверждает, что линия пересечения каждой пары поверхностей, принадлежащих к двум разным семействам, будет линией кривизны для каждой из них.

Аналитическое доказательство, которое мы дадим, прилагается одинаково к римановым пространствам и к евклидову. Примем за координаты параметры u^1, u^2, u^3 поверхностей трех семейств.

Линейный элемент пространства будет

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 + g_{33}(du^3)^2,$$

поскольку косинусы углов, под которым и пересекаются различ-

* E. Cartan. Sur les courbes de torsion nulle et les surfaces developpables dans les espaces de Riemann. Comptes rendus, t. 184, 1927, pp. 138—142.

ные координатные линии, равны нулю. Условие, которое выражает, например, что координатная линия (C_1) (переменное u^1) будет линией кривизны для поверхности S_1 (u^3 постоянно), состоит в том, что вектор

$$\vec{e}_3 + D_1\vec{e}_3\, du^1,$$

нормальный к этой поверхности в точке M', инфинитезимально близкой точке M на линии (C_1), должен быть в том же плоском элементе, что и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$; иначе говоря, коэффициент при $\vec{e}_2$ в выражении $D_1\vec{e}_3$ должен равняться нулю. Между тем мы имеем

$$D\vec{e}_3 = \omega_3^1\,\vec{e}_1 + \omega_3^2\,\vec{e}_2 + \omega_3^3\,\vec{e}_3,$$

$$D_1\vec{e}_3 = \Gamma_3{}^1{}_1\vec{e}_1 + \Gamma_3{}^2{}_1\vec{e}_2 + \Gamma_3{}^3{}_1\vec{e}_3.$$

Надо, следовательно, доказать, что $\Gamma_1{}^2{}_3 = 0$; между тем, внося в уравнение (12.14) указатели $i = 1$, $j = 2$, $h = 3$ и помня, что $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$, получим

$$\Gamma_1{}^2{}_3 g_{22} + \Gamma_2{}^1{}_3 g_{11} = 0,$$

$$\Gamma_2{}^3{}_1 g_{33} + \Gamma_3{}^2{}_1 g_{22} = 0,$$

$$\Gamma_3{}^1{}_2 g_{11} + \Gamma_1{}^3{}_2 g_{33} = 0,$$

где два последних уравнения получены круговой заменой. В силу (12.13) коэффициенты $\Gamma_i{}^k{}_j$ симметричны по нижним индексам. Следовательно, складывая первые два равенства и вычитая третье, получим

$$2\Gamma_3{}^2{}_1 g_{22} = 0 \qquad g_{22} \neq 0$$

и

$$\Gamma_3{}^2{}_1 = 0.$$

ГЛАВА XIV

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО СОПРЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЛИНИИ

75. Развертывание римaнова пространства на евклидово вдоль линии. Развертывание риманова пространства на евклидово вдоль линии открывает новые возможности.

Предположим, что координаты текущей точки линии выражены в функциях параметра t, который в начальной точке A_0 принимает значения $t = 0$. Возьмем в евклидовом пространстве исходную точку O и декартов репер (R_0), определяемый по величине и по форме значениями коэффициентов g_{ij} в точке A_0. Будем сопоставлять каждой точке $M(t)$ точку M' евклидова пространства и декартов репер $(\vec{\mathbf{e}}'_i)$, присоединенный к этой точке. Отправляясь от уравнений (I) п. 26, будем предполагать репер натуральным

$$\left.\begin{aligned} d\vec{\mathbf{M}}' &= du^i\vec{\mathbf{e}}'_i, \\ d\vec{\mathbf{e}}'_i &= \omega_i^j\,\vec{\mathbf{e}}'_j \end{aligned}\right\} \qquad (14.1)$$

с независимой переменной в виде параметра t и начальными условиями: для $t = 0$ точке M' совпадает с точкой O, вектор $\vec{\mathbf{e}}'_i$ равен вектору $(\vec{\mathbf{e}}'_i)_0$ репера (R_0). Как в п. 28, докажем, что в репере (R), присоединенном к точке $M'(t)$, скалярные произведения его векторов $\vec{\mathbf{e}}'_i\vec{\mathbf{e}}'_j$ равны коэффициентам g_{ij}. Более того, если M и M_1— произвольные инфинитезимально близкие точки данной линии, а M', M_1'— их образы в евклидовом пространстве, то два эквиполентных вектора в точках M, M_1 имеют образами эквиполентные (просто параллельные) векторы в M', M'_1.

Благодаря заданию в каждой точке M' декартова репера (R) в действительности мы получаем развертку на евклидово пространство не только заданной линии, но и всей бесконечно малой окрестности этой линии в римановом пространстве. Чтобы получить абсолютную геометрическую вариацию вектора, начало которого описывает в римановом пространстве дугу заданной линии, *достаточно теперь построить обыкновенную разность двух векторов, полученных в предыдущем развертывании.*

Таким образом, мы получили точную и строгую реализацию этой абсолютной геометрической вариации.

Мы знаем теперь в строгой и точной формулировке, что значит перенести вектор по принципу эквиполентности вдоль заданного пути.

76. Полученное отображение и соприкасающееся евклидово пространство. Докажем, что полученное развертывание в каждой точке линии обладает свойствами соприкасающегося евклидова пространства, т. е. что полученный евклидов линейный элемент с переменными u^i имеет вдоль линии коэффициенты g_{ij} и их частные производные первого порядка совпадающими по своим числовым значениям с числовыми значениями коэффициентов и их первых производных заданного линейного элемента.

Рассмотрим более внимательно операцию развертывания на евклидово пространство. Будем предполагать для простоты $n = 3$ и, не ограничивая общности, примем, что линия определяется уравнениями $u^1 = 0$; $u^2 = 0$.

Развертывание на евклидово пространство нам дает в функциях от u^3 точку M' и векторы $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$; в силу уравнений (14.1) мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{M}'}{du^3} &= \vec{e}'_3, \\ \frac{d\vec{e}'_i}{du^3} &= \Gamma_{i\,3}^{\,k}\vec{e}'_k. \end{aligned}\right\} \tag{14. 2}$$

Теперь определяем в функциях от u^1, u^2, u^3 точку P евклидова пространства с начальными условиями: для $u^1 = u^2 = 0$

$$\begin{gathered} \vec{P} = \vec{M}, \\ \frac{\partial\vec{P}}{\partial u^1} = \vec{e}'_1, \qquad \frac{\partial\vec{P}}{\partial u^2} = \vec{e}'_2 \\ \frac{\partial^2\vec{P}}{(\partial u^1)^2} = (\Gamma_{1\,1}^{\,k})^* \vec{e}'_k, \quad \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial u^1\partial u^2} = (\Gamma_{1\,2}^{\,k})^* \vec{e}'_k, \end{gathered} \tag{14.3}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{(\partial u^2)^2} = (\Gamma_2{}^k{}_2)^* \vec{e}_k{}',$$

где $(\Gamma_i{}^h{}_j)^*$ — значения этих коэффициентов для u^1, $u^2 = 0$. Эти условия, очевидно, совместны; достаточно, например, принять

$$\vec{P} = \vec{M} + u^1 \vec{e}_1{}' + u^2 \vec{e}_2{}' + \frac{1}{2}(u^1)^2 (\Gamma_1{}^k{}_1)^* \vec{e}_k{}' +$$

$$+ u^1 u^2 (\Gamma_1{}^k{}_2)^* \vec{e}_k{}' + \frac{1}{2} (u^2)^2 (\Gamma_2{}^k{}_2)^* \vec{e}_k{}'.$$

В этой формуле евклидово пространство отнесено к системе криволинейных координат u^1, u^2, u^3. Для $u^1 = u^2 = 0$ натуральный репер, присоединенный к точке P (которая теперь совпадает с точкой M'), определяется векторами $\frac{d\vec{P}}{du^i}$, которые совпадают теперь с $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$; коэффициентами линейного элемента ds^2 в евклидовом пространстве будут коэффициенты g_{ij} линейного элемента, заданного в римановом пространстве. Что касается любого из коэффициентов $\Gamma_i{}^k{}_j$ евклидова пространства, то он получится, если сравнить коэффициенты при $\vec{e}_k{}'$ в выражении $\frac{d^2 \vec{P}}{du^i du^j}$. Если указатели i и j оба не равны 3, то в силу (14.3) находим сами коэффициенты Г риманова пространства; если указатель i не равен 3, а j равен 3, то для $u^1 = u^2 = 0$ в силу уравнений (14.2) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial u^i \partial u^3}\right)_0 = \frac{d}{du^3}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial u^i}\right)_0 = \frac{d\vec{e}_i{}'}{du^3} = \Gamma_i{}^k{}_3 \vec{e}_k{}'$$

и то же заключение. Если, наконец, $i = j = 3$, то

$$\left[\frac{\partial^2 \vec{P}}{(\partial u^3)^2}\right]_0 = \frac{d\vec{e}_3{}'}{du^3} = \Gamma_3{}^k{}_3 \vec{e}_k{}',$$

и заключение по-прежнему имеет место. Теорема доказана.

Мы видим, что *определение евклидова пространства сопряжения вдоль данной линии не требует интегрирования, если выполнено развертывание линий на евклидово пространство.*

Следствия этой теоремы исключительно многочисленны и важны. Прежде всего, *наблюдатель, который перемещается только вдоль заданной линии и ограничивается измерениями в непосредственной окрестности этой линии, не имеет возможности заметить, что он не находится в евклидовом пространстве, если пренебрегает бесконечно малыми порядка выше первого.*

Другое важное следствие: если рассматривать в римановом пространстве дугу линии, бесконечно близкой к заданной линии (C), то *длина дуги этой линии, будь она измерена метрикой риманова пространства или с помощью евклидовой метрики сопряжения вдоль линии* (C),— *одна и та же, с точностью до бесконечно малых второго порядка* *.

Действительно, в бесконечно близкой точке от линии (C) коэффициенты заданного линейного элемента и линейного элемента евклидова пространства сопряжения равны с точностью до бесконечно малых второго порядка. *Отображение риманова пространства на евклидово пространство сопряжения сохраняет, следовательно, расстояния, измеренные в окрестности данной линии.*

77. Геодезические линии. Параллельные поверхности. Когда развертывают линию на евклидово пространство, развернутая линия в каждой точке имеет ту же кривизну и то же кручение, что и заданная кривая, потому что в развертывании абсолютный дифференциал вектора, начало которого описывает кривую, становится обычной геометрической вариацией этого вектора. Обобщенные формулы Френе в евклидовом пространстве сопряжения становятся *обычными* формулами Френе:

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}}, \quad \frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}} + \frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}},$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}}.$$

Кривая с нулевым кручением развертывается, следовательно, в плоскую линию, линия с нулевой кривизной — в прямую.

Прямые (геодезические) риманова пространства будут линиями, которые развертываются в прямые. Отсюда немедленно следует эквивалентность прямых (геодезических), как мы определяли, с геодезическими по определению Римана.

Действительно, если линия (C) развертывается в прямую и мы проведем в римановом пространстве бесконечно близкую линию (C'), выходящую из заданной точки A и оканчивающуюся в заданной точке B линии (C), то образ — *линия в евклидовом пространстве сопряжения* будет иметь ту же длину, что и (C') с точностью до бесконечно малых второго порядка. Между тем

---

* Надо предположить, что две дуги линий соответствуют своими точками так, что в двух соответствующих точках направления касательных элементов бесконечно близки.

в этом евклидовом пространстве линия — образ кривой (C') проистекает из вариации сегмента прямой, следовательно, ее длина, с точностью до бесконечно малых второго порядка, — *та же*, что и сегмента прямой. Значит, в римановом пространстве первая вариация длины сегмента прямой (геодезической) тождественно равна нулю, и «прямая» (геодезическая) реализует экстремум расстояния, согласно классическому определению Римана.

Отсюда другое следствие; если рассматривать дугу геодезической AB и дугу бесконечно близкой геодезической $A'B'$, то, *как и в евклидовом пространстве*, с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\text{дуга } A'B' - \text{дуга } AB = -AA' \cos(\widehat{AB, AA'}) - BB' \cos(\widehat{BA, BB'}).$$

В частности, откладывая из точки A на различных геодезических, выходящих из точки A, постоянную длину R, получим в качестве геометрического места концов некоторую поверхность, аналогичную сфере: *плоский элемент, касательный к этой поверхности в точке M, нормален к геодезической, выходящей из A и оканчивающейся в точке M*. То же будет, если мы проведем из A только семейство геодезических, порождающих поверхность: если отложить на каждой из них постоянную длину, то геометрическое место концов образует линию; линейный элемент, касательный к этой линии в произвольной точке M, нормален к геодезической, выходящей из A и кончающейся в M.

Другое следствие — обобщение свойства *параллельных поверхностей*. Если в различных точках поверхности построить нормальные геодезические и на каждой геодезической отложить постоянную длину, то геометрическое место полученных таким образом точек будет поверхностью, которая в каждой из своих точек нормальна к соответствующей геодезической. Отсюда следует, что, если двупараметрическое семейство геодезических нормально к некоторой поверхности, то оно нормально к бесконечному множеству поверхностей.

78. Геодезическая линия на поверхности. То, что мы делали для линии вообще, нельзя сделать для поверхности: *вообще говоря, не существует евклидова пространства сопряжения вдоль поверхности*. Причина очень простая: вообще нельзя развернуть поверхность на евклидово пространство. Тем не менее, *если развертывание на евклидово пространство возможно, то существует евклидово пространство сопряжения вдоль поверхности*.

Отметим последнее приложение понятия евклидова пространства сопряжения. Возьмем в трехмерном римановом пространстве поверхность (S) и *геодезическую (C) этой поверхности*, т. е. линию, которая осуществляет минимум расстояния *на поверхности*. В евклидовом пространстве сопряжения вдоль линии

(C) эта линия (C) имеет стационарную длину относительно всех линий, проведенных на поверхности и имеющих свои концы в двух заданных точках линии (C); следовательно, в силу классического свойства геодезических поверхности в евклидовом пространстве, соприкасающаяся плоскость в любой точке линии (C) нормальна к поверхности. *Это свойство*, верное для евклидова пространства сопряжения, *будет верно и в римановом пространстве*.

В. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА XV

ПРОСТРАНСТВО ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТИ

79. Определение форм ω_i^j по заданным формам ω^i. В п. 66 мы поставили задачу определения связности риманова пространства и наметили ряд путей, которые ведут к этой цели. Прежде всего выяснилось, что эта задача эквивалентна проблеме абсолютного дифференцирования векторов и зависит от выбора коэффициентов $\Gamma_i{}^j{}_k$, которые иногда называются объектом связности, или форм $\omega_i{}^j$, что одно и то же.

Мы широко использовали понятие соприкасающейся в точке евклидовой метрики и получили ряд геометрических результатов.

Теперь мы хотим исследовать, в какой мере необходим этот постулат о перенесении связности соприкасающейся метрики иа риманово пространство.

Чтобы не осложнять вопрос выбором репера, будем предполагать, что к каждой точке риманова пространства присоединен ортонормированный репер.

Мы видели (п. 64), что достаточно привести положительно определенную квадратичную форму к сумме квадратов, что всегда возможно,

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2, \tag{15. 1}$$

чтобы компоненты ω^i определили ортонормированный репер.

Будут ли при этом определяться формы $\omega_i{}^j$?

Мы видели, что в евклидовом пространстве формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры (II) п. 26.

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \tag{II$_1$}$$

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \tag{II$_2$}$$

и, конечно, условию ортонормированности

$$\omega_i^j = -\omega_j^i. \tag{15.2}$$

Условие (15.2) вытекает из нашего выбора ортонормированного репера. Остаются два уравнения (II$_1$), (II$_2$). Если они оба удовлетворены, то пространство евклидово. Уравнение (II$_2$) совсем не содержит форм ω^i, а между тем эти формы теперь определяют линейный элемент (15.1). Естественно, следовательно, искать формы $\omega_i{}^j$, удовлетворяющие системе (II$_1$), (15.2).

Теорема. *Если даны формы* ω^i, *то можно найти* $\frac{n(n-1)}{2}$ *форм* ω_i^j, *удовлетворяющих уравнениям* (II$_1$), (15.2), *и такое решение будет единственным.*

Будем предполагать, что с каждой точкой пространства связан только один репер; следовательно, формы ω_i^j линейно зависят от форм ω^i:

$$\omega_i^j = \gamma_i{}^j{}_k \omega^k. \tag{15.3}$$

Надо найти коэффициенты $\gamma_i{}^j{}_k$ так, чтобы удовлетворить системе (II$_1$), (15.2).

Дифференцируя внешним образом заданную нам форму ω^i, получим внешнюю квадратичную форму относительно базисных форм ω^k в виде *

$$\begin{gathered} d\omega^i = c^i_{[jk]}[\omega^j\omega^k], \\ c^i_{[jk]} = c^i_{jk} - c^i_{kj}. \end{gathered} \tag{15.4}$$

Тогда уравнение (II$_1$) примет вид

$$c^i_{[jk]}[\omega^j\omega^k] = [\omega^k\omega_k^i]. \tag{15.5}$$

Внося в уравнения (15.5), (15.2) выражение (15.3) и сравнивая коэффициенты при независимых произведениях $[\omega^j\omega^k]$, получим

$$c^i_{[jk]} = \gamma^i_{jk} - \gamma^i_{kj}, \tag{15.6}$$

$$0 = \gamma^i_{jk} + \gamma^j_{ik}. \tag{15.7}$$

Уравнения (15.6) и (15.7) определяют $\gamma_i{}^j{}_k$ единственным образом.

---

* Здесь и далее при альтернированных коэффициентах $c^i_{[jk]}$ предполагается, что суммирование идет по сочетаниям:

$$c^i_{[jk]}[\omega^j\omega^k [= \sum_{(j,k)} c^i_{jk}[\omega^j\omega^k].$$

Действительно, совершая два раза круговую перестановку индексов i, j, k в уравнении (15.6) и используя соотношение (15.7), получим

$$c^i_{[jk]} = \gamma^i_{jk} + \gamma^k_{ij},$$
$$c^j_{[ki]} = \gamma^j_{ki} + \gamma^i_{jk},$$
$$c^k_{[ij]} = \gamma^k_{ij} + \gamma^j_{ki}.$$

Складывая два первых уравнения и вычитая третье, получим

$$\gamma^i_{jk} = \frac{c^i_{[jk]} + c^j_{[ki]} - c^k_{[ij]}}{2}. \qquad (15.8)$$

80. Требование инвариантности линейного элемента. Пусть теперь квадратичная форма ds^2 разложена на квадраты наиболее общим способом, т. е. с $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольными параметрами

$$v^1,\ v^2, \ldots, v^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

по числу форм ω^j_i, независимых при наличии соотношений (15.2). Сложность проблемы зависит от того, что формы ω^i, хотя и линейны относительно $du^1, \ldots, du^n$, но коэффициенты могут зависеть от u^i и v^α. Следовательно, при внешнем дифференцировании войдут и dv^α. По условию линейный элемент

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2 -$$

не зависит от v^α. Выразим это требование.

Всегда можно выбрать новые формы $\tilde{\omega}^i_k$, которые могут зависеть и от v^α и dv^α так, чтобы

$$d\omega^i = [\omega^k \tilde{\omega}^i_k], \qquad (15.9)$$

или в билинейном виде

$$d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) = \omega^k(d)\,\tilde{\omega}^i_k(\delta) - \omega^k(\delta)\,\tilde{\omega}^i_k(d). \qquad (15.10)$$

Допустим, что символ дифференцирования d соответствует дифференцированию по переменным u^i, а символ δ — по параметрам v^α. Тогда по условию

$$\omega^i(\delta) = 0.$$

Обозначим, кроме того,

$$\tilde{\omega}_k^i(\delta) = e_k^i, \quad \omega^i(d) = \omega^i.$$

Тогда равенство (15.10) примет вид

$$\delta\omega^i = -e_k^i\,\omega^k.$$

Берем производную по параметру v^α от ds^2

$$\delta(ds^2) = 2\sum_i \omega^i\delta\omega^i = -2e_{ki}\omega^i\omega^k.$$

Согласно условию $\delta(ds^2) = 0$; следовательно,

$$e_{ki}\omega^i\omega^k = 0.$$

Значит, при всяком выборе форм ω^k при суммировании по сочетаниям $\omega^i\omega^i$, $\omega^i\omega^j$ все коэффициенты равны нулю

$$e_{ii} = 0, \quad e_{ij} + e_{ji} = 0.$$

Это показывает, что при неизменных u^i имеем

$$\tilde{\omega}_i^j(\delta) + \tilde{\omega}_j^i(\delta) = 0,$$

и, следовательно, при любом изменении вторичных параметров эта сумма будет зависеть только от дифференциалов du^1, du^2, ..., du^n, т. е. от форм ω^i. Итак,

$$\tilde{\omega}_i^j(d) + \tilde{\omega}_j^i(d) = a_{ik}^j\omega^k,$$

$$a_{ik}^j = a_{jk}^i. \qquad (15.11)$$

Будем теперь искать формы ω_i^j в виде суммы форм $\tilde{\omega}_i^j$, которые могут зависеть от dv^α, и линейной комбинации форм ω^i

$$\omega_i^j = \tilde{\omega}_i^j + \lambda_{ik}^j\omega^k, \qquad (15.12)$$

где неизвестными будут коэффициенты $\lambda_i{}^j{}_k$.

Уравнение (15.2) дает теперь

$$\tilde{\omega}_i^j + \tilde{\omega}_j^i + (\lambda_{ik}^j + \lambda_{jk}^i)\,\omega^k = 0,$$

или в силу (15.11)

$$(a_{ik}^j + \lambda_{ik}^j + \lambda_{jk}^i)\,\omega^k = 0, \qquad (15.13)$$

т. е.

$$a^j_{ik} + \lambda^j_{ik} + \lambda^i_{jk} = 0. \tag{15.14}$$

Разность уравнений (II_1) и (15.9) дает

$$[\omega^k, \ \ \omega^i_k - \tilde{\omega}^i_k] = 0,$$

или в силу (15.12)

$$\lambda^i_{kh}[\omega^k\omega^h] = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{(k,h)} (\lambda^i_{kh} - \lambda^i_{hk})[\omega^k\omega^h] = 0$$

и при независимых формах $[\omega^k\omega^h]$

$$\lambda^i_{kh} - \lambda^i_{hk} = 0. \tag{15.15}$$

Выполняя круговую замену указателей i, j, k в равенстве (15.14), получим

$$\left.\begin{aligned} a^j_{ik} + \lambda^j_{ik} + \lambda^i_{jk} = 0, \\ a^k_{ji} + \lambda^k_{ji} + \lambda^j_{ki} = 0, \\ a^i_{kj} + \lambda^i_{kj} + \lambda^k_{ij} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.16}$$

Вычитая из последнего уравнения сумму двух первых и пользуясь (15.15), получим

$$\lambda^j_{ik} = \frac{a^i_{kj} - a^j_{ik} - a^k_{ji}}{2}. \tag{15.17}$$

Здесь в силу (15.11) коэффициенты $a_i{}^j{}_k$ симметричны относительно указателей i, j, что впрочем видно и из уравнений (15.16). Решение (15.17) удовлетворяет системе (15.14), (15.15). Итак, уравнениям (15.1), (15.2) всегда можно удовлетворить. Теорема доказана.

81. Аксиомы эквиполентности векторов. Будет ли различным разложениям ds^2 на сумму квадратов соответствовать одно и то же абсолютное дифференцирование $D\vec{X} = \{dX^i + X^k\omega^i_k\}\vec{e}_i$? Мы видели, что всякому разложению линейного элемента ds^2 на сумму квадратов, т. е. заданию линейного элемента и выбору ортогонального репера, соответствует вполне определенная связность, задаваемая компонентами связности ω^j_i; эти компоненты, и только они, удовлетворяют первой группе уравнений структуры (II_1). Поскольку связность, устанавливаемая соприкасающимся евклидовым пространством, тоже вполне определена с точнотью до преобразования координатных линий, и компоненты этой связности удовлетворяют уравнениям (II_1), то обе связности совпадают.

Мы только показали, что эта связность может быть получена решением системы (II_1), (15.2). Чтобы обобщить понятие эквиполентности вектора, надо идти другим путем.

Пусть заданы две бесконечно близкие точки M и N; установим между векторами в точке M и в точке N соответствие *эквиполентности* (параллелизм Леви-Чивита) следующими пятью требованиями:

1°. *Если вектор* $\vec{\mathrm{X}}'$ *эквиполентен вектору* $\vec{\mathrm{X}}$, *то* $m\vec{\mathrm{X}}$ *эквиполентен* $m\vec{\mathrm{X}}'$, *где* m — *произвольный скаляр.*

Это и следующие требования можно записать в виде формул:

1°. если $\vec{\mathrm{X}} \approx \vec{\mathrm{X}}'$, то $m\vec{\mathrm{X}} \approx m\vec{\mathrm{X}}'$,

2°. если $\vec{\mathrm{X}} \approx \vec{\mathrm{X}}'$, $\vec{\mathrm{Y}} \approx \vec{\mathrm{Y}}'$, то $\vec{\mathrm{X}} + \vec{\mathrm{Y}} \approx \vec{\mathrm{X}}' + \vec{\mathrm{Y}}'$,

3°. если $\vec{\mathrm{X}} \approx \vec{\mathrm{X}}'$, то $\vec{\mathrm{X}}^2 = (\vec{\mathrm{X}}')^2$,

т. е. *эквиполентные векторы имеют равные длины,*

4°. *если* $\vec{\mathrm{X}} \approx \vec{\mathrm{X}}'$, *то соответствующие компоненты векторов бесконечно мало отличаются друг от друга.*

5°. Условие будет дано ниже.

Условия 1° и 2° показывают, что векторы $\vec{\mathrm{X}}$ и $\vec{\mathrm{X}}'$ связаны линейной зависимостью

$$X^{i'} = \alpha^i_k X^k.$$

В силу условия 4° этому равенству можно придать вид

$$X^{i'} = X^i + \omega^i_k X^k, \tag{15.18}$$

где ω^i_k — бесконечно малые.

Теперь вводим последнее пятое условие.

5°. *Компоненты* ω^i_k *линейны относительно дифференциалов независимых переменных.*

Условие 3° показывает равенство сумм квадратов компонентов векторов $\vec{\mathrm{X}}$ и $\vec{\mathrm{X}}'$

$$\sum_i (X^i)^2 = \sum (X^{i'})^2.$$

Внося сюда выражение (15.18) и пользуясь законом дистрибутивности, получим

$$\sum_i (X^i)^2 = \sum_i (X^i + \omega^i_k X^k)^2 = \sum_i (X^i)^2 +$$
$$+ 2\sum_{i,k} \omega^i_k X^k X^i + \sum_i (\omega^i_k X^k)^2.$$

Сокращая первые члены $\sum_i (X^i)^2$ и отбрасывая последний (как бесконечно малый второго порядка), получаем

$$\sum_{i,k} \omega^i_k X^i X^k = 0,$$

или, суммируя по сочетаниям,

$$\sum_i \omega^i_i (X^i)^2 + \sum_{(i,k)} (\omega^i_k + \omega^k_i) X^i X^k = 0,$$

откуда в силу произвольности вектора X^i следует

$$\omega_i = 0, \quad \omega^k_i + \omega^i_k = 0. \qquad (15.19)$$

Отсюда, если

$$\vec{X}' = \vec{X} + d\mathrm{X},$$

то

$$dX^i = \omega^i_k X^k,$$

или

$$dX^i + \omega^i_k X^k = 0. \qquad (15.20)$$

Это та же по внешности формула, что и раньше, но теперь все ω^j_i — произвольные кососимметричные линейные формы.

Отсюда заключение: соответствие эквиполентности определяется *произвольной кососимметричной системой форм* ω^j_i.

82. Пространство евклидовой связности. Пусть теперь задана определенная эквиполентность, т. е. дан закон соответствия векторов в точке M и в соседней точке N; тогда скалярные произведения векторов сохраняются

$$\vec{X}\cdot\vec{Y} = \vec{X}'\cdot\vec{Y}'.$$

В самом деле, в силу 1° и 2°

$$(\vec{X} + \lambda\vec{Y})^2 = \vec{X}^2 + \lambda^2\vec{Y}^2 + 2\lambda\vec{X}\vec{Y};$$

но в силу 3°

$$\vec{X}^2 = \vec{X}'^2, \quad \vec{Y}^2 = (\vec{Y}')^2.$$

Отсюда

$$\vec{X}\cdot\vec{Y} = \vec{X}'\cdot\vec{Y}'.$$

Из сохранения скалярного произведения (и сохранения модулей векторов) следует сохранение углов между соответствующими векторами.

Заметим, что мы можем определить положение точки N относительно репера в точке M посредством компонент смещения ω^i. Если фиксировать закон эквиполентности, мы можем представить в одном и том же евклидовом пространстве точку M, точку N и векторы, выходящие из точек M и N; и два «эквиполентных» вектора становятся *действительно эквиполентными* (параллельными) в этом евклидовом пространстве.

Таким образом, мы определили *евклидову связность* в «обобщенном пространстве», т. е. мы связали, как в евклидовом пространстве, окрестности двух инфинитезимально близких точек M и N. Для произвольных точек M и N это, вообще говоря, невозможно, однако, две не бесконечно близкие точки A и B можно связать *определенным* путем AB.

Тогда мы можем представить окрестность точки M_1, инфинитезимально близкой к точке A на линии AB, затем перейти от M_1 к M_2 и т. д. шаг за шагом тем же самым способом (следует заметить, что получаемое соответствие зависит от выбранного пути AB).

Как же эффективно выполняется переход к пределу?

83. Евклидово пространство сопряжения. Пусть точка μ, представляющая текущую точку M дуги AB, двигается в евклидовом пространстве по дуге $\alpha\beta$, которая представляет линию AB. Имеем для репера в точке μ формулы

$$\left.\begin{aligned} d\vec{\mu} &= \omega^1\vec{i}_1 + \omega^2\vec{i}_2 + \ldots + \omega^n\vec{i}_n, \\ d\vec{i}_i &= \omega_i^k\,\vec{i}_k. \end{aligned}\right\} \qquad (15.21)$$

Если точка M описывает дугу AB так, что координаты ее представлены непрерывно дифференцируемыми (класса C^1) функциями параметра t, то

$$\begin{aligned} \omega^i &= p^i dt, \\ \omega_i^j &= p_i^j\, dt, \end{aligned} \tag{15.22}$$

где при фиксированном пути AB величины p^i, p_i^j — вполне определенные функции независимого переменного t. Внося эти значения в уравнения (15.21), получаем систему Коши

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{\mu}}{dt} &= p^k \vec{\mathrm{i}}_k, \\ \frac{d\vec{\mathrm{i}}_l}{dt} &= p_l^k \vec{\mathrm{i}}_k, \end{aligned}\right\} \tag{15.23}$$

и мы приходим после интегрирования к *евклидову пространству сопряжения вдоль линии* (п. 75).

Выбрав определенную евклидову связность, мы можем распространить на нее тензорный анализ, определяя абсолютный дифференциал вектора формулами для контравариантного и ковариантного векторов (в ортонормированном репере они совпадают)

$$\left.\begin{aligned} DX^i &= dX^i + X^k\omega_k^i, \\ DX_i &= dX_i - X_k\omega_i^k. \end{aligned}\right\} \tag{15.24}$$

84. Абсолютный внешний дифференциал. Наиболее важный момент представляет распространение на пространство евклидовой связности понятие абсолютного внешнего дифференцирования дифференциальных форм.

В обобщенном пространстве нельзя складывать векторы с разными началами, если эти точки не связаны определенными путями.

Рассмотрим некоторую точку A внутри рассматриваемой области и представим себе семейство путей, связывающих точку A с различными точками области. Тогда мы можем рассматривать интегралы по поверхности или по объему и т. д.

Действительно, пусть вектор $(\tilde{\omega}^i)$ присоединен к точке M поверхности S. Перенесенный посредством эквиполентности по пути MA в точку A, этот вектор будет

$$\xi^i = c_k^i\, \tilde{\omega}^k.$$

Сумма всех этих векторов на p-мерной поверхности S будет изображаться интегралом

$$\int \underset{(p)}{\cdots} \int \xi^i = \int \underset{(p)}{\cdots} \int \alpha^i_k \tilde{\omega}^k.$$

Применяя обобщенную формулу Остроградского, представим этот интеграл в виде

$$\int \underset{(p+1)}{\cdots} \int \{\alpha^i_k d\tilde{\omega}^k + [d\alpha^i_k \tilde{\omega}^k]\}. \tag{15.25}$$

Теперь ограничим себя областью достаточно малой, чтобы можно было рассматривать только один элемент нашего интеграла.

Мы увидим, что в этих условиях результат не зависит от выбора путей.

Действительно, общая формула

$$\xi^i = X^k \alpha^i_k$$

показывает, что в точке A, где $\xi^i = X^i$ все α^i_k обратятся в нуль, кроме α^i_i:

$$\alpha^i_k = 0, \quad k \neq i, \quad \alpha^i_i = 1.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (15.25) сведется к сумме

$$D\tilde{\omega}^i = d\tilde{\omega}^i + [d\alpha^i_k \tilde{\omega}^k].$$

В точке M, бесконечно близкой к точке A,

$$\xi^i = X^i + d\alpha^i_k X^k$$

и, с другой стороны,

$$X^i = \xi^i + \omega^i_k \xi^k.$$

Следовательно,

$$d\alpha^i_k = \omega^i_k$$

и

$$D\tilde{\omega}^i = d\tilde{\omega}^i + [\omega^i_k \tilde{\omega}^k]. \tag{15. 26}$$

Это обобщает евклидову формулу абсолютного внешнего дифференциала.

Аналогично

$$D\tilde{\omega}_i^j = d\tilde{\omega}_i^j - [\omega_i^k \tilde{\omega}_k^j] + [\omega_k^j \tilde{\omega}_i^k]. \qquad (15.27)$$

85. Кручение пространства. Возьмем бесконечно малый контур около точки A. Пусть M и M' — две бесконечно близкие точки на контуре. Присоединим к точке M бесконечно малый вектор $\vec{ds} = \overrightarrow{MM'}$; его компоненты будут

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i.$$

Возьмем сумму всех этих векторов. В силу бесконечной малости контура заменяем сумму одним вектором. В евклидовом пространстве эта сумма равна нулю. Здесь имеем

$$D\omega^i = d\omega^i + [\omega_k^i \omega^k] = d\omega^i - [\omega^k \omega_k^i] = \Omega^i. \qquad (15.28)$$

Эта сумма может быть нулем: *это будет внутренним свойством пространства*, ибо при всех разложениях ds^2 на квадраты (при всяком выборе ω^i) она останется нулем.

Чтобы удовлетворить этому соотношению, надо выбрать ω_i^j так, чтобы

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i].$$

Мы видели, что это всегда можно сделать и только одним способом.

Это одна из возможных евклидовых связностей для ds^2. На ней Риман и остановился.

Это значит, что сумма векторов замкнутого вокруг точки контура равна нулю.

Это не единственно возможная связность при данном ds^2. Если рассматривать общую формулу

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i] + \Omega^i,$$

где ω_k^i зависят от вторичных параметров v^α (определяющих разложение ds^2 на сумму квадратов), то квадратичная форма Ω^i не зависит от этих параметров, не зависит от форм ω_k^i. Форма Ω определяет *кручение* пространства.

86. Уравнения структуры пространства евклидовой связности. Посмотрим теперь, как изменятся уравнения структуры (II_2)

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \qquad (\mathrm{II}_2)$$

в новой связности.

Присоединим к каждой точке M цикла Γ вектор $\vec{X}$ и рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} D\vec{X},$$

который в евклидовом пространстве равен нулю.

Для произвольной связности компоненты $D\vec{X}$ будут

$$\tilde{\omega}^i = dX^i + X^k\omega_k^i. \tag{15.29}$$

Прилагая формулу абсолютного внешнего дифференциала (15.26) к (15.29), получим

$$D\tilde{\omega}^i = [dX^k\omega_k^i] + X^k d\omega_k^i + [\omega_k^i dX^k + X^h\omega_h^k] =$$

$$= X^k\{d\omega_k^i + [\omega_h^i\,\omega_k^h]\}.$$

Обозначим

$$d\omega_k^i + [\omega_k^h\,\omega_h^i] = \Omega_k^i.$$

Тогда

$$\int D\vec{X} = \iint X^k\,\Omega_k^i.$$

Квадратичные формы Ω_k^i кососимметричны; они определяют то вращение, которое сообщает вектору $\vec{X}$ вариацию $\int D\vec{X}$. Итак, имеем вообще

$$d\omega^i = [\omega^k\omega_k^i] + \Omega^i. \tag{15.30}$$

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j] + \Omega_i^j. \tag{15.31}$$

87. Смещение и вращение, присоединенные к циклу. Возьмем в качестве путей AM дуги AM рассматриваемого цикла и развернем его в линию $\alpha\mu\alpha'$ евклидова пространства (фиг. 5). Вектор $\vec{X}$, присоединенный к точке A, отображается на вектор $\vec{X}_0$ в точке α и на вектор $\vec{X}'_0$ в α'. Когда переходим из M в M', проводим $\vec{X}'$ в μ', $\vec{X}$ в μ и подсчитываем

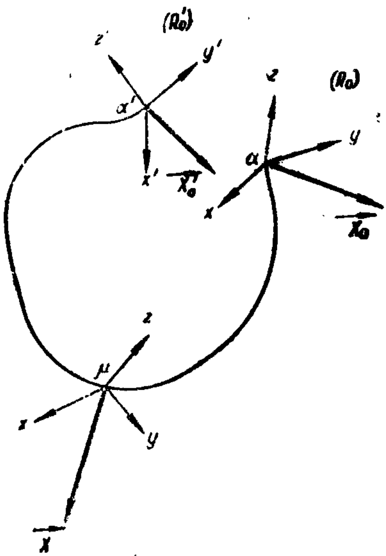
$$D\vec{X} = \vec{X}' - \vec{X},$$

т. е. в евклидовой связности разность $\vec{X}' - \vec{X}$ в обычном смысле слова, без переноса в точку α.

Следовательно,

$$\int \overrightarrow{DX}$$

будет обыкновенным интегралом для пути $\alpha'\mu\alpha$, т. е. разностью $\vec{X}'_0 - \vec{X}_0$. Мы видим, что этот результат зависит только от значения поля в точке A (dX^k исчезает при подсчете).



Фиг. 5

Переходим от вектора $\vec{X}_0$ к вектору $\vec{X}'_0$ простым инфинитезимально малым вращением, которое переводит репер (R_0) в точке α в репер (R'_0) в точке α', т. е. приводит $\vec{X}'_0$ к параллельности с $\vec{X}'_0$ (так как координаты $\vec{X}'_0$ относительио (R_0) — те же, что $\vec{X}'_0$ относительно (R'_0)).

Величины Ω_i^j будут компонентами на (R'_0)бесконечно малого вращения, приводящего (R_0) к параллельности с (R'_0). Точно так же величины Ω^i (см. выше) будут компонентами бесконечно малого смещения, переводящего α в α'.

Итак, перемещение, переводящее (R_0) в (R'_0), имеет компонентами Ω^i, Ω_i^j.

Это перемещение исчезает в евклидовом пространстве. Мы будем называть перемещением, *присоединенном к циклу*, перемещение *обратное*, т. е. то, которое переводит (R'_0) в (R_0).

Рассмотрим поле эквиполентных векторов. В евклидовой связности вектор $\vec{Y}$ (α') эквиполентен в обычном смысле слова (равен) вектору $\vec{X}_0$. В то же время наблюдатель риманова пространства рассматривает как начальный вектор $\vec{X}'_0$, который не эквиполентен вектору $\vec{Y}$. Вариацией будет $\vec{Y} - \vec{X}'_0$, т. е. вращение Ω_i^j присоединенное к циклу.

Таким образом, вращением, присоединенным к циклу, будет то, которое испытывает вектор, переносимый вдоль цикла по эквиполентности.

. Присоединенное вращение определяет *кривизну*, перенос — *кручение* в точке A.

88. Тождества Бианки. Рассмотрим уравнения структуры пространства евклидовой связности (15.30) и (15.31).

Здесь

$$\Omega^i = R^i_{[jk]}[\omega^j\omega^k], \quad \Omega^j_i = R^j_{i[kh]}[\omega^k\omega^h],$$

где

$$R^i_{[jk]} = R^i_{jk} - R^i_{kj}, \quad R^j_{i\,[kh]} = R^j_{i\,kh} - R^j_{i\,hk}.$$

Чтобы получить тождества Бианки, дифференцируем уравнения (15.30), (15.31) внешним образом

$$0 = [d\omega^k\omega^i_k] - [\omega^k d\omega^i_k] + d\Omega^i,$$

$$0 = [d\omega^k_i\,\omega^j_k] - [\omega^k_i\,d\omega^j_k] + d\Omega^j_i.$$

В обыкновенном евклидовом пространстве тождества выполняются сами собой. Значит, после подстановки $d\omega^i$, $d\omega^j_i$ из (15.30), (15.31) должны уничтожиться все члены, кроме тех, что содержат формы Ω.

$$0 = [\Omega^k\omega^i_k] - [\omega^k\Omega^i_k] + d\Omega^i, \tag{15.32}$$

$$0 = [\Omega^k_i\,\omega^j_k] - [\omega^k_i\,\Omega^j_k] + d\Omega^j_i. \tag{15.33}$$

Это первая группа тождества Бианки, написанная для пространства евклидовой связности.

89. Теорема сохранения кривизны и кручения. Обращаемся к интерпретации уравнений (15.32), (15.33). Начинаем с уравнений (15.33). Они показывают, что абсолютный внешний дифференциал формы Ω^j_i равен нулю.

По формулам (15.26) абсолютный внешний дифференциал от $\tilde{\omega}^i$ действительно есть

$$D\tilde{\omega}^i = d\tilde{\omega}^i + [\omega^i_k\,\tilde{\omega}^k].$$

Аналогично, абсолютный дифференциал от формы $\tilde{\omega}^j_i$ будет

$$D\tilde{\omega}^j_i = d\tilde{\omega}^j_i - [\omega^k_i\,\tilde{\omega}^j_k] + [\omega^j_k\tilde{\omega}^k_i].$$

Прилагая к форме Ω^i, получим, что абсолютный дифференциал

$$D\Omega_i^j = d\Omega_i^j + [\omega_i^k \Omega_k^j] + [\omega_k^j \Omega_i^k] = 0$$

обращается в нуль в силу уравнений (15.33).

Действительно, уравнения (15.33) содержат первую сумму с обратным знаком, так как $\omega_k^i = -\omega_i^k$. Что касается второй, то $[\omega_k^j \Omega_i^k] = [\Omega_i^k \omega_k^j]$, ибо форма Ω_i^k — четного порядка, и, следовательно, от перестановки множителей произведение не изменит знака.

Итак, Ω_i^j есть система бивекторов (кососимметричный тензор). Возьмем объем V, ограниченный поверхностью S. Рассмотрим бивекторы Ω_i^j, приложенные к поверхности S. Их сумма равна нулю. Это следует из уравнения (15.33) в силу теоремы Остроградского

$$\iint\limits_S \Omega_i^j = \iiint\limits_V D\Omega_i^j.$$

Обращаемся к уравнениям (15.32). Абсолютный внешний дифференциал от Ω^i будет

$$D\Omega^i = d\Omega^i + [\Omega^k \omega_k^i];$$

в силу уравнения (15.32)

$$D\Omega^i = [\omega^k \Omega_k^i].$$

Рассмотрим, например, пространство трех измерений, в нем ориентированный, т. е. с направлением бесконечно малого цикла элемент поверхности. Каждому циклу соответствует перемещение Ω^i и вращение Ω_i^j с компонентами

$$\Omega^1, \ \Omega^2, \ \Omega^3; \qquad \Omega_2^3, \ \Omega_3^1, \ \Omega_1^2.$$

Вращение Ω_i^j можно изобразить вектором $(\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\omega}^3)$. Перемещение Ω^i можно представить как момент пары.

Таким образом, на поверхности образуется двойная система векторов. Рассмотрим сумму всех векторов и всех пар. Надо связать некоторую точку A определенными путями со всеми точками M на поверхности.

Если (X^1, X^2, X^3) — вектор, то его можно перенести в точку A по формуле

$$\xi^i = a_k^i X^k.$$

Компоненты пары находятся из матрицы

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\left\| a_k^1\tilde{\omega}^k a_k^2\tilde{\omega}^k a_k^3\tilde{\omega}^k \right\|$$

и будут

$$y a_k^3\tilde{\omega}^k - z a_k^2\tilde{\omega}^k,$$

$$z a_k^1\tilde{\omega}^k - x a_k^3\tilde{\omega}^k, \qquad x a_k^2\tilde{\omega}^k - y a_k^1\tilde{\omega}^k,$$

где x, y, z — координаты точки M по отношению к триэдру (R_0).

Сумма векторов равна нулю в силу уравнений (15.32). Сумма пар

$$\iint\limits_S \{a_1^1\Omega^1 + a_2^1\Omega^2 + a_3^1\Omega^3 + y\,(a_1^3\Omega_2^3 +$$
$$a_2^3\Omega_3^1 + a_3^3\Omega_1^2) - z\,(a_1^2\Omega_2^3 + a_2^2\Omega_3^1 + a_3^2\Omega_1^3 + \ldots\}.$$

Интеграл по всей поверхности преобразуется в интеграл по объему

$$\iiint\limits_V \{a_1^1 d\Omega^1 + [da_1^1\Omega^1] + \ldots + yd\,(a_1^3\Omega_2^3 + \ldots) +$$
$$+ [dy,\ a_1^3\Omega_2^3 + \ldots] - \ldots\},$$

или, если объем очень мал, то полагая $a_1^1 = 1$, $a_1^2 = a_1^3 = 0$,

$$da_1^1 = 0,\ da_i^k = \omega_i^k,\ y = z = 0,$$
$$dy = \omega^2, \quad dz = \omega^3, \ldots,$$

получим

$$\iiint\limits_V \{d\Omega^1 + [\omega_k^1\,\Omega^k] + [\omega^2\,\Omega_1^2] - [\omega^3\Omega_3^1]\},$$

но в силу первого уравнения (15.32)

$$d\Omega^1 + [\omega_k^1\,\Omega^k] = d\Omega^1 + [\omega_k^1\,\Omega^k] - [\omega^2\Omega_2^1] -$$
$$- [\omega^3\Omega_3^1] = 0.$$

Итак, теорема: *в римановом пространстве евклидовой связности малому объему соответствуют и векторы, и пары, которые определяют перемещения и вращения, ассоциированные с циклом на поверхности. Система векторов и пар геометрически равна нулю.*

В механике можно найти интерпретацию в силах упругости, действующих на элементарную площадку.

ГЛАВА XVI

РИМАНОВА КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА

90. Тождества Бианки в римановом пространстве. Точка зрения самого Римана соответствует связности без кручения

$$\Omega^i = 0.$$

Тождества Бианки теперь принимают вид

$$[\omega^k \Omega_k^i] = 0, \tag{16.1}$$

$$[\Omega_i^k \omega_k^j] - [\omega_i^k \Omega_k^j] + d\Omega_i^j = 0. \tag{16.2}$$

Первое показывает, что моментов пар нет, так как отсутствует перемещение Ω^i, второе — что сумма векторов равна нулю.

Мы разложили ds^2 на квадраты и выбрали единственным способом ω_k^i так, что

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \tag{16.3}$$

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j. \tag{16.4}$$

Можно ли дать определение ω_k^i независимо от выбора осей? Оно ие зависит от способа разложения ds^2 на квадраты. Возьмем наиболее общее разложение ds^2 на квадраты; ω_i^j зависят от переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$ и от параметров, определяющих способ разложения $v^1, v^2, \ldots, v^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Очевидно, Ω_{ij} могут зависеть и от ω^i, и от ω_i^j. Покажем, что Ω_{ij} зависят только от ω^i. Это следует из нашей теоремы. Докажем независимо от нее.

В силу уравнений (15.33)

$$\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0.$$

Отсюда в силу уравнений (15.32) следует, что Ω_i^j были бы равны нулю, если бы они были линейными формами, но они — квадратичные формы.

Обозначим величины ω_{ij} через ω_α с греческими индексами.

Квадратичные формы Ω_{ij} вообще зависят и от ω^i, и от ω_α. Можно положить

$$\Omega_{ki} = a_{ki\,[hl]}\,[\omega^h\omega^l] + b^\alpha_{kil}\,[\omega^l\omega_\alpha\,] +$$
$$+ c^{[\alpha\beta]}_{ki}\,[\omega_\alpha\,\omega_\beta\,],$$

где

$$a_{ki\,[hl]} = -a_{ki\,[lh]},$$
$$c^{[\alpha\beta]}_{ki} = -c^{[\beta\alpha]}_{ki}.$$

Внося это выражение Ω_{ki} в уравнения (16.1), получим

$$[\omega^k\Omega_{ki}] = a_{ki\,[hl]}\,[\omega^k\omega^h\omega^l] +$$
$$+ b^\alpha_{kil}\,[\omega^k\omega^l\omega_\alpha\,] + c^{[\alpha\beta]}_{ki}\,[\omega^k\omega_\alpha\,\omega_\beta\,].$$

Прежде всего, в последней сумме все члены содержат различные комбинации базисных форм ω^k, ω_α, ω_β, ибо относительно α, β суммирование идет по сочетаниям и подобных членов нет; следовательно,

$$c^{[\alpha\beta]}_{ki} = 0,$$

и форма Ω_{ki} не содержит членов с произведением $[\omega_\alpha\omega_\beta\,]$. Во второй сумме для тройки базисных форм $\omega^k, \omega^l, \omega_\alpha$ возможны две комбинации

$$b^\alpha_{kil}\,[\omega^k\omega^l\omega_\alpha\,] + b^\alpha_{lik}\,[\omega^l\omega^k\omega_\alpha\,].$$

Отсюда симметрия по двум нижним индексам

$$b^\alpha_{kil} = b^\alpha_{lik}; \qquad (16.5)$$

с другой стороны, в силу антисимметричности Ω_{ki}, имеем

$$b^\alpha_{kil} = -b^\alpha_{ikl}. \qquad (16.6)$$

Применяя по очереди преобразования (16.5) и (16.6), получим

$$b^\alpha_{kil} = b^\alpha_{lik} = -b^\alpha_{ilk} = -b^\alpha_{kli} =$$
$$= b^\alpha_{lki} = b^\alpha_{ikl} = -b^\alpha_{kil},$$

откуда

$$b^\alpha_{kil} = 0,$$

и форма Ω_{ij} не зависит от форм ω_α.

91. Тензор Римана—Кристоффеля. Итак, имеем

$$\Omega_i^j = R_{i\ [kh]}^{\ j} [\omega^k \omega^h]. \tag{16.7}$$

Коэффициенты $R_i{}^j{}_{[kh]}$ образуют тензор, так как свертывание по индексам k и h с векторамн ω^k и ω^h приводит к тензорной дифференциальной форме Ω_j^i. Этот тензор называется *тензором Римана — Кристоффеля.*

Уравнения структуры (16.3), (16.4) запишутся теперь в виде

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \tag{16.8}$$

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] + R_{i[kh]}^j [\omega^k \omega^h]. \tag{16.9}$$

Первые тождества Бианки (16.1), еслн в них внести Ω_k по формуле (16.7), дают

$$R_k{}^i{}_{hl} [\omega^k \omega^h \omega^l] = 0.$$

Циклируя по трем нижним индексам, чтобы собрать подобные члены, и приравнивая нулю коэффициенты, получим

$$R_k{}^i{}_{hl} + R_h{}^i{}_{lk} + R_l{}^i{}_{kh} = 0,$$

или

$$(i) = R_{ikhl} + R_{ihlk} + R_{ilkh} = 0. \tag{16.10}$$

Если выбрать произвольные четыре числа i, k, h, l, среди $1, 2, \ldots, n$, то между компонентами R_{ikhl} с этими индексами найдется ряд зависимостей. Эти индексы естественно разбиваются на пары i, k и h, l.

1°. *От перестановки индексов одной пары* R_{ikhl} *меняет знак.* Для первой пары i, k это следует из кососимметричности формы $\Omega_i{}^k$; для второй пары h, l это вытекает из сопутствующей перестановки множителей ω^h, ω^l во внешнем произведении $[\omega^h \omega^l]$ при неизменности левой части равенства Ω_k^i.

2°. *От перестановки пар индексов между собой* R_{ikhl} *не меняет знак.* Для доказательства рассмотрим равенства (16.10) и получаемые из него круговой заменой четырех указателей i, k, h, l,

$$(i) = R_{ikhl} + R_{ihlk} + R_{ilkh} = 0,$$

$$(k) = R_{khli} + R_{klih} + R_{kihl} = 0,$$

$$(h) = R_{hlik} + R_{hikl} + R_{hkli} = 0,$$

$$(l) = R_{likh} + R_{lkhi} + R_{lhik} = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\{(i)+(k)-(h)-(l)\}=$$

$$=R_{khli}-R_{likh}=0, \qquad (16.11)$$

что и требовалось доказать.

Обращаемся ко второй группе тождеств Бианки (16.2):

$$d\Omega_i^j+[\Omega_i^k\,\omega_k^j]-[\omega_i^k\,\Omega_k^j]=0.$$

Внося сюда Ω_i^j по формуле (16.7), получим

$$[dR_i{}^j{}_{kh}\omega^k\omega^h]+R_i{}^j{}_{kh}[\omega^l\omega_l^k\,\omega^h]-R_i{}^j{}_{kh}[\omega^k\omega^l\omega_l^h]+$$

$$+R_i{}^k{}_{lh}[\omega^l\omega^h\omega_k^j]-R_k{}^j{}_{lh}[\omega_i^k\,\omega^l\omega^h]=0.$$

Меняя индексы суммирования, имеем

$$[dR_i{}^j{}_{kh}-R_i{}^j{}_{lh}\omega_k^l-R_i{}^j{}_{kl}\omega_h^l+R_i{}^l{}_{kh}\omega_l^j-$$

$$-R_l{}^j{}_{kh}\omega_i^l,\quad \omega^k,\quad \omega^h]=0.$$

Пользуясь обозначением ковариантного (абсолютного) дифференцирования, получим

$$[DR_i{}^j{}_{kh},\quad \omega^k,\omega^h]=0.$$

или

$$R_i{}^j{}_{kh|l}[\omega^l\omega^k\omega^h]=0.$$

Циклируя три индекса l, k, h и сравнивая с нулем коэффициенты, получим вторую группу условий на ковариантные производные тензора Римана — Кристоффеля

$$R_i{}^j{}_{kh|l}+R_i{}^j{}_{hl|k}+R_i{}^j{}_{lk|h}=0. \qquad (16.12)$$

Отсюда число всех компонентов тензора Римана — Кристоффеля:

$$\frac{n(n-1)}{2}\ \text{типа}\ R_{ij,\,ij};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\ \text{типа}\ R_{ij,\,ik};$$

$$2\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\ \text{типа}\ R_{ij,\,kh};$$

всего

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

различных компонентов.

Всегда можно найти риманово пространство, соответствующее произвольным значениям этих величин.

92. Риманова кривизна. Рассмотрим в точке A бивектор, определяемый координатами $p^{ij} = -p^{ji}$. Это ориентированный элемент поверхности. К нему присоединено некоторое вращение Ω_{ij} и, поскольку

$$[\omega^k \omega^h] = p^{kh},$$

имеем

$$q_{ij} = -R_{ij\,[kh]}\,p^{kh}.$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение

$$p^{ij}q_{ij} = R_{ij,\,kh}p^{ij}p^{kh},$$

где $q_{ij} = -\Omega_{ij}$ — компоненты присоединенного вращения. *Риманова кривизна* в точке A в рассматриваемом плоском направлении определяется формулой

$$K = \frac{p^{ij}q_{ij}}{\sum\limits_{(ij)}(p^{ij})^2} = -\frac{R_{ij,\,kh}\,p^{ij}\,p^{kh}}{\sum\limits_{(ij)}(p^{ij})^2}. \tag{16.13}$$

93. Случай n=2. Мы имеем только одну квадратичную форму, именно

$$\Omega_1^2 = R_1{}^2{}_{12}[\omega^1\omega^2] = -K[\omega^1\omega^2]. \tag{16.14}$$

Это риманова кривизна пространства.

Мы видели, что с циклом связано определенное вращение. Если $d\sigma$ — площадь, ограниченная циклом, то вектор $\vec{X}$, остающийся при обходе по циклу эквиполентным самому себе, после обхода не вернется в прежнее положение $\vec{X}$, но займет новое $\vec{X}'$, которое образует с прежним угол

$$d\sigma.$$

Уравнения структуры т

$$d\omega^1 = [\omega^2\omega_2^1],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2],$$

$$d\omega_1^2 = -K[\omega^1\omega^2].$$

Риманова кривизна вообще является функцией точки.

Особо простой случай представляет пространство постоянной кривизны

$$K = \text{const}.$$

Пример такого пространства представляет сфера в обычном пространстве; кривизна ее $K = \frac{1}{R^2}$, где R — радиус сферы.

Действительно, пусть R — радиус сферы, O — центр сферы. Присоединяем в точке O трехгранники Ox_1, x_2, x_3, зависящие от трех параметров.

При неподвижной точке O трехгранник вращается с компонентами

$$\overline{\omega}_{12},\ \overline{\omega}_{23},\ \overline{\omega}_{31};$$

если M — точка пересечения третьей оси со сферой, то

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = R\overrightarrow{\mathbf{I}}_3 —$$

радиус-вектор точки M сферы.

Для этих трехгранников имеем следующие уравнения структуры и уравнения инфинитезимальных смещений осей

$$\left.\begin{aligned}
d\overline{\omega}_{23} &= [\overline{\omega}_{21}\overline{\omega}_{13}], & d\overrightarrow{\mathbf{I}}_1 &= \overline{\omega}_{12}\overrightarrow{\mathbf{I}}_2 + \overline{\omega}_{13}\overrightarrow{\mathbf{I}}_3,\\
d\overline{\omega}_{31} &= [\overline{\omega}_{32}\overline{\omega}_{21}], & d\overrightarrow{\mathbf{I}}_2 &= \overline{\omega}_{21}\overrightarrow{\mathbf{I}}_1 + \overline{\omega}_{23}\overrightarrow{\mathbf{I}}_3,\\
d\overline{\omega}_{12} &= [\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{32}], & d\overrightarrow{\mathbf{I}}_3 &= \overline{\omega}_{31}\overrightarrow{\mathbf{I}}_1 + \overline{\omega}_{32}\overrightarrow{\mathbf{I}}_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (16.15)$$

Перемещение точки M при постоянном R будет равно $d\overrightarrow{\mathbf{I}}_3$, умноженному на R:

$$d\overrightarrow{\mathbf{M}} = R\left(\overline{\omega}_3^1\overrightarrow{\mathbf{I}}_1 + \overline{\omega}_3^2\overrightarrow{\mathbf{I}}_2\right);$$

значит для сферы

$$\omega^1 = R\overline{\omega}_3^1,\quad \omega^2 = R\overline{\omega}_3^2,\quad \omega_1^2 = \overline{\omega}_1^2.$$

Уравнения структуры будут

$$d\omega^1 = Rd\overline{\omega}_{31} = R[\overline{\omega}_{32}\overline{\omega}_{21}] = [\omega^2\overline{\omega}_{21}],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1 \overline{\omega}_{12}],$$

$$d\omega_1^2 = d\overline{\omega}_{12} = [\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{32}] = -\frac{1}{R^2}[\omega^1\omega^2].$$

Отсюда кривизна равна $K = \frac{1}{R^2}$.

Это можно обобщить на произвольное число измерений Все эти результаты можно получить, отправляясь от линейного элемента сферы; он имеет вид

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где $\frac{\pi}{2} - \theta$ — широта, φ — долгота.

Значит

$$\omega^1 = R d\theta, \quad \omega^2 = R \sin\theta d\varphi.$$

Дифференцируя внешним образом, получим

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = R\cos\theta\,[d\theta d\varphi].$$

Поскольку

$$d\omega^1 = [\omega^2\omega_2^1], \quad d\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2],$$

и следовательно

$$[\omega_1^2 d\varphi] = 0, \quad [\omega_1^2 d\theta] = \cos\theta\,[d\varphi d\theta],$$

то

$$\omega_1^2 = \cos\theta d\varphi.$$

Далее

$$d\omega_1^2 = -\sin\theta\,[d\theta d\varphi] = -\frac{1}{R^2}[\omega^1\omega^2],$$

и следовательно кривизна равна $\frac{1}{R^2}$.

94. Случай n = 3. Теперь уравнения (16.7) напишутся

$$\Omega_{23} = R_{23,23}[\omega^2\omega^3] + R_{23,31}[\omega^3\omega^1] + R_{23,12}[\omega^1\omega^2],$$

$$\Omega_{31} = R_{31,23}[\omega^2\omega^3] + R_{31,31}[\omega^3\omega^1] + R_{31,12}[\omega^1\omega^2],$$

$$\Omega_{12} = R_{12,23}[\omega^2\omega^3] + R_{12,31}[\omega^3\omega^1] + R_{12,12}[\omega^1\omega^2].$$

Обозначим для краткости $R_{23,\,23}$ через $-K_{11}$, $R_{23,\,31}$ через $-K_{12}$ и т. д., заменяя в каждой группе пару индексов на дополнительный. Тогда

$$\Omega_{23} = -K_{11}[\omega^2\omega^3] - K_{12}[\omega^3\omega^1] - K_{13}[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_{31} = -K_{21}[\omega^2\omega^3] - K_{22}[\omega^3\omega^1] - K_{23}[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_{12} = -K_{31}[\omega^2\omega^3] - K_{32}[\omega^3\omega^1] - K_{33}[\omega^1\omega^2].$$

Перестановка пар примет вид простой симметрии

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13} \text{ и т. д,} \tag{16.16}$$

а условие

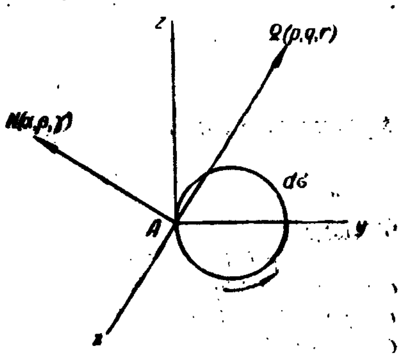
$$R_{i\ kh/l}^{\ j} + R_{i\ hl/k}^{\ j} + R_{i\ lk/h}^{\ j} = 0$$

запишется

$$\sum_k K_{ik/k} = 0. \tag{16.17}$$

Следует иметь в виду, что в уравнении (16.17) каждый из первых двух индексов изображает пару дополнительных указателей, а третий (после вертикальной черты) — индекс ковариантного дифференцирования — показывает ту форму ω^k, при которой ковариантная производная стоит в качестве коэффициента.

95. Геометрическое учение о кривизне трехмерного риманова пространства. Допустим, что репер присоединен к точке A и элементу поверхности $d\sigma$, проходящему через точку A (фиг. 6). Пусть $d\sigma$ — ориентированный цикл; α, β, γ—направляющие косинусы нормали; $pd\sigma$, $qd\sigma$, $rd\sigma$ — присоединенное к циклу вращение. Можно всегда предположить, что $d\sigma$ — бесконечно малый параллелограмм со сторонами ω^i (d)



Фиг. 6

$$\left\| \begin{matrix} \omega_1(d)\ \omega_2(d)\ \omega_3(d) \\ \omega_1(\delta)\ \omega_2(\delta)\ \omega_3(\delta) \end{matrix} \right\|.$$

Тогда

$$[\omega_2\omega_3] = \alpha d\sigma.$$

Следовательно, если $\Omega(p,\ q,\ r)$ — вращение, присоединенное к циклу, с компонентами

$$pd\sigma, \quad qd\sigma, \quad rd\sigma,$$

то

$$p d\sigma = K_{11}\alpha d\sigma + K_{12}\beta d\sigma + K_{13}\gamma d\sigma$$

. . . .

Отсюда

$$p = K_{11}\alpha + K_{12}\beta + K_{13}\gamma,$$
$$q = K_{21}\alpha + K_{22}\beta + K_{23}\gamma,$$
$$r = K_{31}\alpha + K_{32}\beta + K_{33}\gamma.$$

Эти формулы совпадают с формулами теории упругости, определяющими давление жидкости на элемент поверхности.

Вводим квадрику-индикатрису (поверхность второго порядка):

$$\Phi(x, y, z) = K_{11}x^2 + K_{22}y^2 + K_{33}z^2 + $$
$$+ 2K_{12}xy + 2K_{23}yz + 2K_{31}xz = 1.$$

Диаметральная плоскость, сопряженная направлению (α, β, γ), имеет направляющими параметрами

$$\frac{1}{2}\Phi'_\alpha, \ \frac{1}{2}\Phi'_\beta, \ \frac{1}{2}\Phi'_\gamma \quad \text{т. е.} \quad p, q, r;$$

$$\Phi'_\alpha = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=\alpha}.$$

Уравнение этой плоскости

$$x\Phi'_\alpha + y\Phi'_\beta + z\Phi'_\gamma = 0.$$

Отсюда

Теорема. *Вращение, присоединенное к элементу поверхности, нормально к диаметральной плоскости, сопряженной направлению нормали к элементу поверхности. Чтобы получить величину этого вращения, достаточно определить ее проекцию на направление* (α, β, γ).

Пусть P — точка пересечения квадрики-индикатрисы с нормалью AP к элементу поверхности (A — точка, в которой рассматривается элемент; это — центр квадрики).

Имеем

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\overrightarrow{AN}^2}.$$

Риманова кривизна в точке A в направлении (α, β, γ) равна проекции вектора вращения на это направление: это есть $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ (определение Шура).

Направления осей квадрики-индикатрисы называются *главными направлениями* в точке A.

Вращение, присоединенное к элементу, нормальному к главному направлению, происходит вокруг этого направления. Если выбрать осями оси квадрики, то в уравнении останутся только квадраты. Коэффициенты при этих квадратах будут *главными кривизнами*. Если индикатриса — сфера, то главные кривизны равны, и говорят, что пространство *изотропно* в точке.

96. Теорема Шура. *Если пространство изотропно в каждой точке, то риманова кривизна пространства одна и та же во всех точках.*

Действительно, вектор Ω_{ij} сводится к виду

$$-K\,[\omega^i\omega^j].$$

Обращение в нуль абсолютного внешнего дифференциала дает

$$[dK\omega^i\omega^j] = 0,$$

ибо

$$D\overline{\omega}_{ij} = d\overline{\omega}_{ij} + [\omega_{ki}\overline{\omega}_{kj}] + [\omega_{kj}\overline{\omega}_{ik}].$$

Все

$$D\overline{\omega}_{ij} = 0$$

в силу вторых тождеств Бианки (16.2).

Если

$$\overline{\omega}_{ij} = -K\,[\omega^i\omega^j],$$

то

$$d\omega_i^j = d(-K\,[\omega^i\omega^j] - K\,[\omega_k^i\,\omega^k\omega^j] - -K\,[\omega_k^j\omega^i\omega^k] = -[dK\omega^i\omega^j] - K\,[d\omega^i\omega^j] + + K\,[d\omega^i\omega^j] - K\,[d\omega^j\omega^i].$$

Следовательно,

$$[dK, \omega^i\,\omega^j] = 0;$$

из этого уравнения следует, что дифференциал dK зависит линейно только от ω^i, ω^j: между тем он не зависит от ω^i, значит $dK = 0$ и $K = \text{const}$.

Механическая интерпретация. Идеальная жидкость в равновесии под действием только внутренних сил испытывает постоянное давление во всех точках.

97. Пример риманова пространства постоянной кривизны. Рассмотрим твердое тело, вращающееся около неподвижной точки с компонентами скорости p, q, r. Живая сила, если эллипсоид инерции сводится к сфере, принимает вид

$$2T = A(p^2 + q^2 + r^2),$$

и мы имеем риманово пространство с линейным элементом

$$ds^2 = A(p^2 + q^2 + r^2)\,dt^2,$$

ибо

$$ds^2 = 2T\,dt^2.$$

Рассмотрим трехгранник отнесения, инвариантно связанный с телом.

Пусть $\tilde{\omega}_{23}$, $\tilde{\omega}_{31}$, $\tilde{\omega}_{12}$ — его компоненты вращения; имеем

$$\tilde{\omega}_{23} = p\,dt, \quad \tilde{\omega}_{31} = q\,dt, \quad \tilde{\omega}_{12} = r\,dt,$$

откуда

$$ds^2 = A\{(\tilde{\omega}_{23})^2 + (\tilde{\omega}_{31})^2 + (\tilde{\omega}_{12})^2\}.$$

Так как вращение происходит в евклидовом пространстве, имеем

$$d\tilde{\omega}_{23} = [\tilde{\omega}_{21}\tilde{\omega}_{13}],$$

$$d\tilde{\omega}_{31} = [\tilde{\omega}_{32}\tilde{\omega}_{21}],$$

$$d\tilde{\omega}_{12} = [\tilde{\omega}_{13}\tilde{\omega}_{32}].$$

Мы можем положить

$$\omega^1 = \sqrt{A}\,\tilde{\omega}_{23},$$

$$\omega^2 = \sqrt{A}\,\tilde{\omega}_{31},$$

$$\omega^3 = \sqrt{A}\,\tilde{\omega}_{12},$$

откуда

$$d\omega^1 = -\frac{1}{\sqrt{A}}[\omega^2\omega^3];$$

$$d\omega^2 = -\frac{1}{\sqrt{A}}[\omega^3\omega^1],$$

$$d\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{A}}[\omega^1\omega^2].$$

Предположим, что

$$\omega_{23} = \lambda\omega^1, \quad \omega_{31} = \lambda\omega^2, \quad \omega_{12} = \lambda\omega^3;$$

тогда

$$d\omega^1 = -[\omega^2\omega_1^2] - [\omega_3^1\omega^3] = -2\lambda[\omega^2\omega^3].$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{A}}$$

и

$$\omega_{23} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\omega^1, \quad \omega_{31} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\omega^2, \; \omega_{12} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\omega^3,$$

откуда

$$\Omega_{23} = d\omega_{23} - [\omega_{21}\omega_{13}] =$$
$$= -\frac{1}{2A}[\omega^2\omega^3] + \frac{1}{4A}[\omega^2\omega^3] = -\frac{1}{4A}[\omega^2\omega^3].$$

Окончательно,

$$K_{ij} = 0 \;\; (i \neq j), \;\; K_{ii} = \frac{1}{4A}.$$

Имеем пространство постоянной римановой кривизны $\frac{1}{4A}$.

98. Определение тензора Римана — Кристоффеля по римановой кривизне, заданной для всех плоских направлений.

Теорема. *Если известна риманова кривизна для всех плоских направлений, выходящих из точки A, то известны все компоненты $R_{ij,\,kh}$ тензора Римана — Кристоффеля.*

Заметим, что это не очевидно: величины p^{ij} не произвольны, ибо они являются компонентами одного бивектора и связаны известными соотношениями; следовательно, нельзя заранее утверждать, что знание кривизны

$$R_{ij,kh}\,p^{ij}p^{kh}$$

влечет за собой знание компонентов $R_{ij,\,kh}$.

Для этого надо показать, что из равенства

$$R_{ij,kh}\, p^{ij} p^{kh} = R'_{ij,kh} p^{ij} p^{kh}$$

для всех p^{ij} следует

$$R_{ij,kh} = R'_{ij,kh}.$$

Иначе говоря, если положить

$$S_{ij,kh} = R_{ij,kh} - R'_{ij,kh},$$

достаточно доказать, что из равенства

$$S_{ij,kh}\, p^{ij} p^{kh} = 0 \qquad (16.18)$$

следует

$$S_{ij,kh} \equiv 0.$$

Введем векторы $\vec{\mathbf{X}}$, $\vec{\mathbf{Y}}$, определяющие бивектор P с компонентами

$$p^{ij} = X^i Y^j - X^j Y^i.$$

Тогда равенство (16.18) запишется

$$S_{ij,kh}\,(X^i Y^j - X^j Y^i)\,(X^k Y^h - X^h Y^k) = 0,$$

где все векторы X^i, Y^j — независимы. Предыдущее равенство для аморфного суммирования записывается

$$S_{ijkh} X^i Y^j X^k Y^h = 0.$$

В этой сумме член $(X^i)^2 (Y^j)^2$ встретится только один раз: следовательно, коэффициент при этом члене равен нулю

$$S_{ij,ij} = 0.$$

Член $(X^i)^2 Y^j Y^h$ встретится два раза: следовательно,

$$S_{ij,ih} + S_{ih,ij} = 0,$$

но в силу (16.11)

$$S_{ij,ih} = S_{ih,ij}.$$

Следовательно,

$$S_{ij,ih} = S_{ih,ij} = 0.$$

Наконец, член $X^i X^k Y^j Y^h$ встретится 4 раза и даст

$$S_{ij,kh} + S_{kj,ih} + S_{ih,kj} + S_{kh,ij} = 0,$$

или в силу (16.11)

$$2S_{ij,kh}+2S_{ih,kj}=0,$$

или

$$S_{ij,kh}=S_{ih,jk}.$$

Аналогично

$$S_{ik,hj}=S_{ij,kh}.$$

Значит в равенстве, вытекающем из (16.10),

$$S_{ij,kh}+S_{ik,hj}+S_{ih,jk}=0,$$

все члены между собой равны, а потому

$$S_{ij,kh}=0;$$

что и требовалось доказать.

99. Изотропное n-мерное пространство. Пространство называется *изотропным* в точке A, если риманова кривизна одна и та же по всем направлениям, т. е. если

$$K=-\frac{R_{ij,kh}\,p^{ij}\,p^{kh}}{\sum\limits_{(ij)}(p^{ij})^2},$$

и K не зависит от p^{ij}, или если

$$R_{ij,kh}\,p^{ij}p^{kh}+K\sum_{(i,j)}(p^{ij})^2=0$$

для всех бивекторов p^{ij}.

Это сводится к предыдущей теореме, если положить

$$R'_{ij,ij}=-K,\qquad R'_{ij,kh}=0.$$

По доказанному компоненты R' должны равняться соответствующим компонентам R.

Значит

$$R_{ij,ij}=-K,$$

а все остальные

$$R_{ij,kh}=0.$$

Значит

$$\Omega_{ik}=-K\,[\omega^i\omega^j].$$

Это снова теорема Шура (*Schur*), но распространенная на все значения $n\geqslant 3$.

100. Кривизна по двум различным двумерным плоским направлениям. Пусть q_{ij}, q'_{ij} — вращения, присоединенные к двум элементам поверхности p^{ij}, p'^{ij}.

Имеем

$$p^{ij}q'_{ij} = R_{ij,kh}\,p'^{kh}p^{ij}.$$

Число

$$\frac{R_{ij,kh}\,p'^{kh}\,p^{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{(i,j)}(p^{ij})^2}\,\sqrt{\sum\limits_{(i,j)}(p'^{ij})^2}}$$

называется *смешанной кривизной* по двум направлениям. Кривизна K будет специальным случаем, когда оба плоских направления совпадают.

101. Риманова кривизна в направлении произвольного числа измерений. До сих пор мы рассматривали только плоские направления, определяемые бивекторами.

Возьмем теперь элемент трех измерений, к которому присоединена система тривекторов

$$\Omega_{ijk} = [\omega_i\Omega_{jk}] + [\omega_j\Omega_{ki}] + [\omega_k\Omega_{ij}].$$

Рассмотрим поверхность, ограничивающую этот элемент, и присоединим к каждому элементу поверхности скользящий скалярный бивектор (а не свободный, как раньше).

Геометрическая сумма этих бивекторов дает свободный тривектор Ω_{ijk}.

Рассмотрим направление p^{ijk}, к которому мы присоединяем систему тривекторов Ω_{ijk}, и рассмотрим выражение

$$K = -\frac{p^{ijk}\Omega_{ijk}}{\sum\limits_{(ijk)}(p^{ijk})^2} = -\frac{p^{ijk}R_{ik,\,hl}\,p_i^{hl}}{\sum\limits_{(ijk)}(p^{ijk})^2} =$$

$$= -\frac{R_{jk,hl}\,p^{ijk}p_i^{hl}}{\sum\limits_{(ijk)}(p^{ijk})^2}.$$

Это соответствующая риманова кривизна.

Так же определяют риманову кривизну для четырех измерений

$$K = -\frac{R_{ij,kh}\,p^{ij,\rho\sigma}\,p_{\rho\sigma}^{kh}}{\sum\limits_{(ij,\rho\sigma)}(p^{ij,\rho\sigma})^2}.$$

102. Тензор Риччи. Квадрика Эйнштейна. Для $(n-1)$ измерений получаются важные результаты.

Направление $(n-1)$ измерений определяется посредством $(n-1)$-мерного вектора, или посредством перпендикулярного вектора: если α_i — направляющие косинусы нормали, то можно положить

$$p_{234\ldots n} = \alpha_1 d\sigma, \; p_{134\ldots n} = -\alpha_2 d\sigma, \ldots$$

Кривизна будет тогда иметь в числителе форму

$$K_{[i,j]}\alpha^i\alpha^j,$$

где

$$K_{12} = R_{12k}{}^{k}, \; K_{11} = -R_{23,23} - R_{34,34} - \ldots$$

Введем *тензор Риччи*

$$R_{ij} = R_{i\;jk}^{\;k}.$$

Таким образом,

$$K_{ij} = R_{ij},$$

$$K_{11} = R_{11} - R_{..ij}^{\;\;ij} = R_{11} - \frac{1}{2}\sum_i R_{ii}.$$

Тензор K_{ij} можно назвать *тензором Эйнштейна.*

Мы возвращаемся к обозначениям случая $n = 3$; можно ввести *квадрику Эйнштейна*

$$K_{ij}X^iX^j = 1$$

и *изотропию второго рода* (квадрика Эйнштейна — сфера).

Имеется теорема, аналогичная теореме Шура.

Понятие пространства постоянной кривизны второго рода более общее (только $\frac{n(n-1)}{2}$ коэффициентов).

ГЛАВА XVII

ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

103. Конгруэнтность пространств одной и той же постоянной кривизны.

Уравнения структуры для пространства постоянной кривизны будут

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ d\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j] - K[\omega^i \omega^j]. \end{aligned}\right\} \qquad (17.1)$$

Все коэффициенты в этих уравнениях постоянны при произвольном выборе ортогонального репера.

Теорема. *Если существует пространство заданной постоянной кривизны K, то только одно.*

Это означает: если существуют два пространства с кривизной K и линейными элементами ds^2 и $d\sigma^2$, то в некоторой области подходящей заменой переменных можно привести ds^2 к совпадению с $d\sigma^2$. Возьмем окрестность точки M_0 одного из этих пространств и произвольную точку M_0', второго пространства; тогда можно наложить окрестность точки M_0 на второе пространство так, чтобы точка M_0 совпала с точкой M_0', репер (R_0), присоединенный к точке M_0, совпал с репером (R_0'), присоединенным к точке M_0'.

Доказательство. Пусть $u^1, \ldots, u^N$ $\left(N = \frac{n(n+1)}{2}\right)$ — параметры, определяющие наиболее общий репер в точке M_0; $v^1, \ldots, v^N$ — аналогичные параметры в точке M_0'. В точке M_0 имеют место уравнения (17.1), в точке M_0' — система

$$\left.\begin{aligned} d\overline{\omega}^i &= [\overline{\omega}^k \overline{\omega}_k^i], \\ d\overline{\omega}_i^j &= [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j] - K[\overline{\omega}^i \overline{\omega}^j]. \end{aligned}\right\} \qquad (17.2)$$

Установим соответствие между точками двух пространств

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega}^i = (v, dv) = \omega^i(u, du),\\ \overline{\omega}_i^j = (v, dv) = \omega_i^j(u, du),\end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

где v надо рассматривать как неизвестные функции от u. Эта система вполне интегрируема, ибо уравнения

$$\left.\begin{aligned}d\overline{\omega}^i - d\omega^i = 0,\\ d\overline{\omega}_i^j - d\omega_i^j = 0\end{aligned}\right\} \qquad (17.4)$$

являются алгебраическими следствиями системы (17.3) в силу (17.1) и (17.2).

В частности, она допускает такие решения, для которых начальная система значений (u_0) соответствует произвольной системе значений (v_0), т. е. соответствуют два произвольных репера первого и второго семейств.

Поскольку теперь

$$v^1 = f^1(u^1, \ldots, u^N),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$v^N = f^N(u^1, \ldots, u^N),$$

мы имеем точечное преобразование пространства.

Действительно, система уравнений $\omega^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ вполне интегрируема. Примем $u^1, \ldots, u^n$ за первые интегралы этой системы; при постоянных значениях (u^i) имеем $\omega^i = 0$, и точка M первого пространства фиксирована. Следовательно, u^i — криволинейные координаты первого пространства. Примем $v^1, \ldots, v^n$ за те значения первых интегралов вполне интегрируемой системы $\overline{\omega}^i = 0$, которые соответствуют значениям (u^i) при интегрировании системы (17.3). Поскольку

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \qquad (17.5)$$

v^i будут зависеть только от $u^1, \ldots, u^n$. Точке первого пространства соответствует точка второго.

Наконец, из равенств (17.5) прямо следует совпадение линейных элементов

$$ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2, \quad d\sigma^2 = \sum (\overline{\omega}^i)^2.$$

Следствие. В частности, *можно наложить пространство постоянной кривизны само на себя бесчисленным количеством способов*: это пространство допускает бесконечное множество движений (преобразований, сохраняющих расстояния).

Так же, как евклидово пространство, оно допускает ∞^N перемещений, где $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Замечание. Пространства постоянной кривизны наиболее общие из тех, которые допускают группу движений. Действительно, поскольку риманова кривизна определяется линейным элементом ds^2, при перемещениях, сохраняющих линейный элемент ds^2, сохраняется и риманова кривизна. В частности, возможно движение с сохранением неподвижной произвольной точки A. Следовательно, в этой точке A кривизна по всем направлениям одна и та же. Значит, пространство изотропно и имеет постоянную кривизну.

104. Существование пространств постоянной кривизны. Мы поставим этот вопрос в другой более общей форме. Уравнения (17.1) входят, как частный случай, в более общую систему уравнений

$$d\omega^i = c^i_{[jk]}[\omega^j\omega^k], \tag{17.6}$$

где

$$c^i_{[jk]} = c^i_{jk} - c^i_{kj} -$$

постоянные.

Вопрос сводится к следующему: допускает ли система (17.6) решения ω^j?

Необходимое условие существования решения, аналогичное тождествам Бианки, получим, дифференцируя внешним образом систему (17.6):

$$0 = c^i_{[jk]}\{[d\omega^j\omega^k] - [\omega^j d\omega^k]\},$$

или, сменяя во второй сумме индексы суммирования j на k и обратно и учитывая кососимметричность коэффициентов $c^i_{[jk]} = c^i_{jk} - c^i_{kj}$, а также соотношение $[\omega^j d\omega^k] = [d\omega^k\omega^j]$ в силу квадратичности формы $d\omega^k$, получим, сократив на 2,

$$0 = c^i_{[jk]}[d\omega^j\omega^k].$$

Вносим сюда выражение $d\omega^j$ по формуле (17.6) и получаем

$$c^i_{[jk]}c^j_{[hl]}[\omega^h\omega^l\omega^k] = 0.$$

Совершая круговую подстановку индексов h, l, k, чтобы собрать подобные члены, запишем

$$\{c^i_{[jk]}c^j_{[hl]} + c^i_{[jh]}c^j_{[lk]} + c^i_{[jl]}c^j_{[kh]}\}[\omega^h\omega^l\omega^k] = 0,$$

или окончательно

$$c^i_{[jk]} c^j_{[hl]} + c^i_{[jh]} c^j_{[lk]} + c^i_{[jl]} c^j_{[kh]} = 0. \qquad (17.7)$$

Уравнения (17.6) называются *структурными уравнениями группы преобразований*, а равенства (17.7) являются *условиями на структурные константы группы* $c^i_{[jk]}$. Преобразования группы получаются из вполне интегрируемой в силу уравнений (17.6) системы

$$\omega^i(v, dv) = \omega^i(u, du) \quad (i = 1, 2 \dots r),$$

где (u^i) — первоначальные координаты точки, а (v^i)— преобразованные.

Мы докажем, что условие (17.7) достаточно для существования r независимых форм Пфаффа, удовлетворяющих системе (17.6). В теории групп это соответствует третьей теореме Софуса Ли о существовании группы преобразований с коэффициентами структуры $c^i_{[jk]}$, удовлетворяющими условиям (17.7).

105. Доказательство Шура (*Schur*). Предположим, что имеем решение

$$\omega^i = A^i_k\, du^k,$$

где A^i_k — функции независимых переменных u^k. Поскольку система форм ω^i линейно независима, определитель из коэффициентов A^i_k необходимо отличен от нуля в начальной точке:

$$det\,|A^i_k| \neq 0 \text{ для } u^k = 0. \qquad (17.8)$$

Введем излишнее число $r + 1$ переменных вместо прежних r, полагая

$$u^k = v^k t.$$

Тогда

$$\omega^i = A^i_k v^k\, dt + tA^i_k\, dv^k.$$

Для $t = 0$ все коэффициенты при дифференциале dt сводятся к r функциям

$$A^i_k(0) \cdot v^k,$$

которые независимы в силу (17.8).

Введем величины

$$a^i = A^i_k \cdot v^k, \qquad (17.9)$$

которые можно рассматривать как новые переменные, так что теперь

$$\omega^i = a^i\,dt + \overline{\omega}^i(a, t, da), \tag{17.10}$$

где $\overline{\omega}^i$ линейны относительно da^k и обращаются в нуль для $t = 0$. Покажем, что можно построить решения вида (17.10) для системы (17.6).

Диффереицируя внешним образом равенства (17.10), получим

$$d\omega^i = [da^i\,dt] + \left[dt\,\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t}\right] + \textit{члены, не зависящие от } dt. \tag{17.11}$$

Действительно, форма $\overline{\omega}^i$ по условию имеет вид

$$\overline{\omega}^i = M^i_k\,da^k.$$

Следовательно,

$$d\overline{\omega}^i = \left[\frac{\partial M^i_k}{\partial t}\,dt\,da^k\right] = \frac{\partial M^i_k}{\partial t}\,[dt\,da^k] = \left[dt,\ \frac{\partial M^i_k}{\partial t}\,da^k\right] =$$

$$= \left[dt\,\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t}\right].$$

Члены, содержащие dt в правой части уравнений (17.6) для решения (17.10), будут

$$c^i_{[jh]}\,[dt,\ a^j\overline{\omega}^h - a^h\overline{\omega}^j] = c^i_{jh}a^j\,[dt\,\overline{\omega}^h], \tag{17.12}$$

где в правой части суммирование аморфное — отдельно по указателям j и h.

Поскольку t — независимое переменное, дифференциал dt тоже вполне произволен и после подстановки в уравнения (17.6) выражений (17.11) и (17.12) коэффициенты при dt в левой и правой части должны тождественно совпадать. Эти члены, содержащие dt, будут

$$[da^i\,dt] + \left[dt\,\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t}\right] = c^i_{jk}a^j\,[dt\,\overline{\omega}^k],$$

откуда

$$\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t} - da^i = c^i_{jk}a^j\overline{\omega}^k. \tag{17.13}$$

Формы $\overline{\omega}^i$, рассматриваемые как функции от t, удовлетворяют, следовательно, системе обыкновенных линейных с постоянными коэффициентами дифференциальных уравнений. Поэтому существует решение и только одно с начальными условиями

$$\overline{\omega}^i = 0 \quad \text{для} \quad t = 0.$$

Значит, если задача возможна, то мы можем эффективно подсчитать решение.

106. Построенное решение удовлетворяет системе. Допустим теперь, что решение $\overline{\omega}^i$ получено; мы внесем его в уравнения (17.10) и покажем, что система (17.6) будет удовлетворена тождественно, т. е., если положить

$$d\omega^i = c^i_{[jk]} [\omega^j \omega^k] + \Omega^i, \tag{17.14}$$

то получим тождественно

$$\Omega^i \equiv 0.$$

Действительно, дифференцируя (17.14) внешним образом, заметим, что члены, не содержащие формы Ω^i, обращаются в нуль в силу условий, которые были наложены и которые мы считаем выполненными. Мы имеем, следовательно,

$$d\Omega^i + c^i_{jk} [\Omega^j \omega^k] = 0. \tag{17.15}$$

Введем символ дифференцирования d для дифференцирования по переменному t и δ_α по переменному a^α.

Покажем, что

$$\Omega^i, (d, \delta_\alpha) \equiv 0, \quad \Omega^i (\delta_\alpha, \delta_\beta) \equiv 0. \tag{17.16}$$

Сказать, что

$$\Omega^i (d, \delta_\alpha) = 0.$$

значит сказать, что члены, содержащие dt, будут одни и те же в левой и правой частях уравнения (17.1), но ведь именно сравнением таких членов мы и получили уравнения (17.13), интегрированием которых получены формы $\overline{\omega}^i$.

Для оправдания второго уравнения (17.16) подсчитаем по формуле (17.14) билинейную форму для $t = 0$. Имеем

$$\Omega^i (\delta_\alpha, \delta_\beta) = \delta_\alpha \omega^i (\delta_\beta) - \delta_\beta \omega^i (\delta_\alpha) - c^i_{[jk]} \{\omega^j (\delta_\alpha) \omega^k (\delta_\beta) -$$
$$- \omega^j (\delta_\beta) \omega^k (\delta_\alpha)\} = 0,$$

потому что для $t = 0$

$$\omega^i (\delta_\alpha) = \omega^i (\delta_\beta) = 0.$$

Теперь трилинейный ковариант с символами дифференцирования d, δ_α, δ_β, присоединенный к уравнению (17.15), запишется в виде:

$$d\Omega^i(\delta_\alpha, \delta_\beta) + \delta_\alpha\Omega^i(\delta_\beta, d) + \delta_\beta\Omega^i(d, \delta_\alpha) + c^i_{[jk]}\{\Omega^j(d, \delta_\alpha)\,\omega^k(\delta_\beta) + \\ + \Omega^j(\delta_\alpha, \delta_\beta)\,\omega^k(d) + \Omega^j(\delta_\beta, d)\,\omega^k(\delta_\alpha)\} = 0.$$

Здесь в силу первого (доказанного) тождества (17.16) обращаются в нуль все формы Ω^i для двух символов дифференцирования d и δ.

Мы получим

$$d\Omega^i(\delta_\alpha, \delta_\beta) + c^i_{jk}\Omega^j(\delta_\alpha, \delta_\beta)\,\omega^k(d) = 0.$$

Если $\omega^k(d)$ заменить по формуле (17.10) и обозначить

$$H^i = \Omega^i(\delta_\alpha, \delta_\beta),$$

то наше уравнение запишется в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dH^i}{dt} + c^i_{jk}H^j a^k = 0.$$

Это — уравнение линейное однородное, следовательно, допускает решение

$$H^i = 0,$$

а поскольку для $t = 0$ по доказанному

$$\Omega^i(\delta_\alpha, \delta_\beta) = 0,$$

то это и будет единственно возможным решением для всякого t.

Таким образом, второе тождество (17.16) доказано, а отсюда прямо вытекает обращение внешней квадратичной формы Ω^i в нуль.

Остается посмотреть, будут ли все найденные формы ω^i линейно независимыми.

Заметим, что переменные a^i, t входят только в виде произведений $a^i t$. Действительно, уравнения (17.13), откуда определялись формы $\overline{\omega}^i$, допускают замену

$$t = kt', \quad a^i = \frac{\alpha^i}{k}, \quad k = \text{const}.$$

Чтобы проинтегрировать систему (17.1), мы интегрируем систему (17.13) с начальным условием:

$$\overline{\omega}^i = 0 \text{ для } t = 0.$$

Формы ω^i получаются при подстановке $t = 1$ в полученное решение $\overline{\omega^i}$: поскольку

$$\overline{\omega^i} = A^i_k \, du^k, \quad \overline{\omega^i} = tA^i_k \, dv^k, \quad u^k = v^k t,$$

то

$$\overline{\omega^i} = \omega^i \text{ для } t = 1.$$

Можно, следовательно, обратить в нуль те a^i из (17.9), которые) соответствуют двухиндексным формам ω^j_i.

Действительно, по формуле (17.10) мы получим тогда

$$\omega^i = a^i \, dt + \overline{\omega^i}, \quad \omega^j_i = \overline{\omega^j_i}.$$

1°. Например, для $K = 0$ (евклидово пространство), система (17.1) напишется

$$d\omega^i = [\omega^k \omega^i_k], \quad d\omega^j_i = [\omega^k_i \omega^i_k], \tag{17.17}$$

и система (17.13) будет

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\overline{\omega^i}}{dt} &= da^i + a^k \overline{\omega^i_k}, \\ \frac{d\overline{\omega^j_i}}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17. 18}$$

Действительно, сравнивая уравнения (17.17) с системой (17.6)

$$d\omega^i = c^i_{[jk]} [\omega^j \omega^k]$$

и принимая для перевода обозначений

$$\omega^j_i = \omega^\alpha, \quad (\alpha = n + 1, \ldots, N),$$

заметим:

а) все коэффициенты $c^i_{[jk]}$, если не обращаются в нуль, то равны единице;

b) для $i \leqslant n$ (случай первого уравнения (17.17)) и указатель j будет $j \leqslant n$, а указатель $k \geqslant n + 1$;

с) для $i > n$ (случай второго уравнения (17.17)) оба указателя j, $k > n$, но для столь большого j все $a_j = 0$.

Интегрируя систему (17.18), получаем

$$\overline{\omega^j_i} = 0, \quad \overline{\omega^i} = t \, da^i$$

и, следовательно,

$$\omega^i = da^i, \quad ds^2 = \sum_i (da^i)^2$$

(это еще раз показывает независимость форм ω^i).

2°. Если $K \neq 0$, то получим согласно (17.1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\overline{\omega}^i}{dt} &= da^i + a^k\overline{\omega}_k^i, \\ \frac{d\overline{\omega}_i^j}{dt} &= -K\,(a^i\overline{\omega}^j - a^j\overline{\omega}^i). \end{aligned}\right\} \qquad (17.19)$$

Отсюда, умножая первое на a_i и суммируя по индексу i, получим

$$a_i\frac{d\overline{\omega}^i}{dt} = a_i\,da^i, \qquad (17.20)$$

ибо

$$a_ia^k\overline{\omega}_k^i = \sum_{(i,\,k)}(a_ia^k\overline{\omega}_k^i + a_ka^i\overline{\omega}_i^k) = \sum_{(i,\,k)}a_ia_k(\overline{\omega}_k^i + \overline{\omega}_i^k) = 0.$$

Интегрируя уравнение (17.20) по t, поскольку a^i от t не зависит, получим при начальном условии $\omega^i = 0$ для $t = 0$

$$a_i\overline{\omega}^i = ta_i\,da^i. \qquad (17.21)$$

Теперь, дифференцируя первое уравнение (17.19) по t, получим

$$\frac{d^2\overline{\omega}^i}{dt^2} = a^k\frac{d\overline{\omega}_k^i}{dt} = -K\sum_k a^k(a_k\overline{\omega}^i - a_i\overline{\omega}^k) = -Ka^ka_k\overline{\omega}^i + Ka_ita_kda^k.$$

Первое преобразование выполнено с помощью второго уравнения (17.19), второе — с помощью равенства (17.21).

Следовательно,

$$\frac{d^2\overline{\omega}^i}{dt^2} = -Ka^ka_k\overline{\omega}^i + \varphi(t),$$

и можно интегрировать при независимом переменном t и неизвестной функции $\overline{\omega}^i$.

ГЛАВА XVIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

107. Пространство постоянной положительной кривизны Пространство постоянной кривизны можно получить, если рассматривать гиперсферу в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Покажем, что гиперсфера радиуса R имеет постоянную кривизну $\frac{1}{R^2}$. В $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве рассматриваем прямоугольную декартову систему координат с началом O и координатами $x^1, \ldots, x^{n+1}$. Линейный элемент пространства будет

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^{n+1})^2.$$

Уравнение гиперсферы с центром в начале и радиусом R будет

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = R^2.$$

Присоединим к фиксированной точке O ортогональный репер с единичными базисными векторами $\vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_{n+1}$. Обозначим буквой M точку гиперсферы, в которой ее пересекает радиус-вектор направления $\vec{I}_{n+1}$. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{I}_{n+1}. \qquad (18.1)$$

При неподвижном начале вариации репера будут определяться формами ω_α^β $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n+1)$ со структурными уравнениями

$$d\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta].$$

Греческие буквы пробегают значения $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n+1$, латинские $i, j, k = 1, \ldots, n$. Вариации точки **M** получаются дифференцированием уравнения (18.1)

$$d\vec{\mathbf{M}} = R\, d\vec{\mathbf{I}}_{n+1} = R\,(\omega_{n+1}^{1}\vec{\mathbf{I}}_1 + \ldots + \omega_{n+1}^{n}\vec{\mathbf{I}}_n).$$

Следовательно, компоненты инфинитезимальных смещений точки **M** будут

$$\omega^i = R\omega_{n+1}^{i}, \tag{18.2}$$

откуда

$$\omega_{n+1}^{i} = \frac{1}{R}\,\omega^i. \tag{18.3}$$

Дифференцируя внешним образом, получим

$$\frac{d\omega^i}{R} = [\omega_{n+1}^{k}\omega_k^i] = \frac{1}{R}\,[\omega^k\omega_k^i].$$

Итак,

$$d\omega^i = [\omega^k\omega_k^i]. \tag{18.4}$$

Аналогично

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j] + [\omega_i^{n+1}\omega_{n+1}^j]$$

и в силу (18.3), а также $\omega_i^{n+1} = -\,\omega_{n+1}^{i}$

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j] - \frac{1}{R^2}\,[\omega^i\omega^j]. \tag{18.5}$$

Следовательно, кривизна пространства

$$K = -\frac{1}{R^2}\,.$$

Из уравнений структуры $(n+1)$-мерного пространства

$$d\vec{\mathbf{I}}_\alpha = \omega_\alpha^\beta\vec{\mathbf{I}}_\beta$$

получаем в силу (18.2) и (18.1)

$$d\vec{\mathbf{M}} = \omega^i\vec{\mathbf{I}}_i \tag{18.6}$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_i = \omega_i^k\vec{\mathbf{I}}_k + \omega_i^{n+1}\vec{\mathbf{I}}_{n+1} = \omega_i^k\vec{\mathbf{I}}_k - \frac{\omega^i}{R^2}\,\overrightarrow{\mathbf{OM}},$$

и окончательно

$$d\vec{\mathbf{I}}_i = \omega_i^k\vec{\mathbf{I}}_k - K\omega^i\overrightarrow{\mathbf{OM}} \tag{18.7}$$

Будем называть *аналитической точкой* совокупность координат

$$x^1,\ x^2, \dots, x^{n+1}$$

и *скалярным квадратом точки*

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots (x^{n+1})^2 = \mathbf{M}^2 = \frac{1}{K}.$$

Отсюда *скалярные произведения*

$$\mathbf{M}^2 = \frac{1}{K},\ (\vec{\mathbf{I}}_i)^2 = 1,\ \overrightarrow{\mathbf{OM}} \cdot \vec{\mathbf{I}}_i = 0,\ \vec{\mathbf{I}}_i \cdot \vec{\mathbf{I}}_j = 0. \qquad (18.8)$$

Дифференциалы $d\mathbf{M}$, $d\vec{\mathbf{I}}_i$ позволяют определить, таким образом, дифференциалы любого вектора, рассматриваемого, как точка, имеющая определенный скалярный квадрат: $\vec{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^i \vec{\mathbf{I}}_i$.

108. Отображение на проективное n-мерное пространство. Чтобы интерпретировать отрицательную кривизну, удобно рассматривать совокупность $n+1$ чисел как однородные координаты точки пространства (эллиптического) размерности n. Здесь точки $(x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$ и $(-x^1, -x^2, \dots, -x^{n+1})$ рассматриваются как совпадающие *.

Следовательно, эллиптическое пространство составляет только половину сферического.

Сделаем замену однородных координат и предположим, что

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = F(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n+1'})$$

и

$$ds^2 = F(dx^{1'},\ dx^{2'}, \dots, dx^{n+1'}),$$

где F — однородный многочлен второй степени (форма).

Таким образом, получается определение пространства посредством квадратичной формы F вместе с соотношением

$$F(x^{1'},\ x^{2'}, \dots, x^{n+1'}) = \frac{1}{K}. \qquad (18.9)$$

Мы начали со знакоопределенной формы, но форма F может быть и неопределенной при условии, что ds^2 будет положительным. Мы приходим, таким образом, к гиперболическому ($K < 0$) пространству. Покажем, что это возможно, если только форма F является суммой n квадратов с положительными знаками и одного квадрата с отрицательным.

* Для $n = 2$ эллиптическая плоскость получается проектированием сферы из ее центра на касательную плоскость.

Надо, чтобы форма $F(dx)$ была положительной для всех значений dx, связанных соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x^{n+1}} dx^{n+1} = 0, \qquad (18.10)$$

которое получается дифференцированием равенства (18.9) и показывает, что точка $(dx^1, \ldots, dx^{n+1})$ лежит в полярной гиперплоскости точки $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ по отношению к абсолюту

$$F = 0. \qquad (18.11)$$

Если полярная гиперплоскость пересекает абсолют, то дифференциальная форма

$$ds^2 = F(dx^1, \ldots, dx^{n+1}) \qquad (18.12)$$

не сохраняет знака.

В трехмерном пространстве это требование исключает линейчатые поверхности второго порядка и допускает только два случая:

1°. *Абсолют — мнимая квадрика.* Форма F положительно определенная. Кривизна K — положительна. Пространство эллиптическое.

2°. *Абсолют — действительная нелинейчатая квадрика*, например эллипсоид. Чтобы полярная плоскость точки не пересекала квадрику, надо брать точку (полюс) внутри эллипсоида. Кривизна пространства отрицательна. Следовательно, гиперболическое пространство представляется внутренними точками абсолюта. Форма F разлагается на три положительных квадрата и один отрицательный.

109. Гиперболическое пространство. Покажем, что для n-мерного гиперболического пространства можно взять форму F из n положительных квадратов и одного — с отрицательным знаком.

Рассмотрим точку $\mathbf{P}(0, \ldots, 0, 1)$; чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению (18.9), достаточно взять F в виде

$$F = \frac{(x^{n+1})^2}{K} + 2a_i x^i x^{n+1} + a_{ij} x^i x^j.$$

Если сменить координату x^{n+1}, взяв новую координату, равную сумме

$$x^{n+1} + K a_i x^i,$$

то координаты точки $\mathbf{P}$ не изменятся и, предполагая преобразование уже выполненным, имеем

$$F = \frac{(x^{n+1})^2}{K} + \Phi(x^1, \ldots, x^n).$$

Линейное соотношение (18.10) в точке **P** сведется к одному члену

$$dx^{n+1} = 0,$$

и линейный элемент (18.12) в точке **P** будет положителен, если

$$\Phi(dx^1, \dots, dx^n) > 0.$$

Предполагая форму Φ положительно-определенной, придем к эллиптической геометрии, если $K > 0$ и получим гиперболическую, если $K < 0$.

При этом точки гиперболического пространства будут изображаться только теми точками евклидова пространства, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$F = \frac{(x^{n+1})^2}{K} + \Phi(x^1, \dots, x^n) < 0,$$

т. е. внутренними точками гиперквадрики (абсолюта).

110 Представление векторов в гиперболической геометрии. Пусть Q — гиперквадрика абсолюта и $M(x^i)$, $M'(x^i + dx^i)$ — две соседние внутренние точки.

Можно рассматривать dx^i как координаты точки, удовлетворяющие соотношению (18.10), которое показывает, что точка (dx^i) находится в полярной плоскости точки **M** по отношению к абсолюту.

Тот же результат имеем для конечного вектора, рассматриваемого как скорость $\frac{d\vec{X}}{dt}$. Квадрат длины вектора X^i будет

$$F(x^1, \dots, x^{n+1}).$$

Это скалярный квадрат точки, представляющей вектор. Следовательно, всякий *вектор изображается точкой, расположенной в полярной плоскости начала по отношению к абсолюту*; *скалярный квадрат этой точки равен квадрату длины вектора.*

Скалярное произведение двух векторов с общим началом равно скалярному произведению изображающих их точек.

Два вектора перпендикулярны, если изображающие их точки сопряжены, т. е. если направления этих двух векторов сопряжены относительно абсолюта.

Случай $n = 2$. Через точку можно провести бесконечное множество параллелей к прямой, т. е. прямых, которые не встречаются внутри абсолюта. Два перпендикуляра к одной прямой параллельны и т. д.

В эллиптической интерпретации для вектора

$$\vec{\mathbf{X}} = X\overset{i\to}{\mathbf{I}_i}$$

имеем

$$d\vec{\mathbf{X}} = dx^i\vec{\mathbf{I}}_i + x^i d\vec{\mathbf{I}}_i = dx^i\cdot\overleftarrow{\mathbf{I}}_i + x^i\{-K\omega_i\vec{\mathbf{OM}} + \omega_i^k\vec{\mathbf{I}}_k\} =$$

$$= -K\omega_i X^i\overrightarrow{\mathbf{OM}} + \vec{\mathbf{I}}_i\{dX^i + \omega_k^i X^k\} = -K\omega_i X^i\overrightarrow{\mathbf{OM}} + \vec{\mathbf{I}}_i DX^i,$$

откуда

$$d\vec{\mathbf{X}} = D\vec{\mathbf{X}} - K\omega_i X^i\overrightarrow{\mathbf{OM}}. \tag{18.13}$$

Здесь $d\vec{\mathbf{X}}$ — точный дифференциал, но не $D\vec{\mathbf{X}}$.

111. Геодезические линии в римановом пространстве. *Ускорением* называется абсолютная производная вектора скорости по времени.

Обозначая, как обычно, компоненты инфинитезимальных смещений двигающейся точки черзе ω^i, время через t и компоненты вектора скорости через v^i, имеем

$$\omega^i = v^i\,dt;$$

отсюда ускорение g^i равно

$$g^i = \frac{Dv^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + v^k\frac{\omega_k^i}{dt};$$

полагая

$$\omega_i^j = \gamma_i{}^j{}_k\omega^k,$$

получим

$$g^i = \frac{dv^i}{dt} + \gamma_k{}^i{}_h v^k v^h,$$

или

$$g^i = \frac{dv^i}{dt} - \gamma_{kh}^i v^k v^h.$$

Для геодезической $g^i = 0$. Отсюда уравнение геодезической

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \gamma_{kh}^i v^k v^h, \\ \omega^i &= v^i\,ds \end{aligned}\right\} \tag{18.14}$$

(положили $ds = dt$).

З а м е ч а н и е. Рассмотрим голономную систему с n параметрами $q^1, \ldots, q^n$, живая сила T определяется уравнением

$$T\,dt^2 = g_{ij}\,dq^i\,dq^j; \qquad (18.15)$$

мы предполагаем связи независимыми от времени.

Легко видеть, что мгновенные движения системы (без внешних сил) будут представляться геодезическими пространства $q^1, \ldots, q^n$.

Форма (18.15) рассматривалась Вольтерра *. Он называет v^i характеристиками движения.

Состояние системы в данный момент определяется величинами $(q^i, \dot{q}^i)$, где $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$, Вольтерра заменяет $\dot{q}^i$ линейными комбинациями v^i.

В частности, Вольтерра рассматривает случай

$$T = \sum (v^i)^2$$

Это наша точка зрения.

Вольтерра ставит следующую задачу: возможно ли выбрать v^i так, чтобы γ^i_{kh} были постоянными (система с независимыми характеристиками). Тогда можно отдельно интегрировать первые и вторые уравнения (18.14).

П р и м е р. Уравнения Эйлера (вращение твердого тела). Было бы интересно изучить римановы пространства с постоянными γ^i_{kh}.

112. Псевдоэквиполентные векторы; псевдопараллелизм. Можно ли в римановом пространстве выбрать в каждой точке прямоугольный репер, так, чтобы

$$g^i = \frac{dv^i}{dt}?$$

Тогда для всякой геодезической будет

$$v^i = \text{const}.$$

Следовательно, компоненты единичного касательного вектора будут постоянными вдоль геодезической.

Будем называть *псевдоэквиполентными* два вектора $\overrightarrow{MX}$ и $\overrightarrow{M'X'}$, если они имеют одни и те же компоненты соответственно по отношению к их реперам.

Единичные векторы, касательные к геодезической, будут псевдоэквиполентными.

* V o l t e r r a. Atti Torino, 1887.

Предположим, что два вектора к двум геодезическим будут псевдоэквиполентны в двух точках: они будут такими везде. Мы будем говорить, что такие геодезические *псевдопараллельны*.

Отсюда имеем следствия.

1°. *Всякая геодезическая псевдопараллельна самой себе.*

2°. *Две геодезические, псевдопараллельные третьей, псевдопараллельны между собой.*

3°. *Через всякую точку проходит одна и только одна геодезическая, псевдопараллельная заданной геодезической.*

4°. *Если две геодезические пересекаются, то две геодезические, псевдопараллельные им в своей общей точке, пересекаются под тем же углом.*

Мы покажем, обратно, что, если возможно определить псевдопараллельность, удовлетворяющую следующим двум требованиям (менее сильным):

1°) Через всякую точку O проходит только одна геодезическая, соответствующая данной геодезической,

2°) две геодезические, соответствующие двум пересекающимся геодезическим, сами пересекаются под тем же самым углом, что и первая пара,

то можно найти репер, дающий $v^i = \text{const}$.

Доказательство. Возьмем в точке O ортогональный репер. Присоединим к каждому направлению, выходящему из точки M, компоненты a_1, a_2, a_3 единичного вектора, касательного к соответствующей геодезической в точке O. Угол таких двух направлений (a) и (b) определяется формулой

$$\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Следовательно, в точке M существует определенный прямоугольный репер, такой, что, если направляющие косинусы геодезической будут a_1, a_2, a_3, то такие же косинусы для соответствующей геодезической в точке O будут тоже a_1, a_2, a_3.

Следовательно, всякой геодезической, исходящей из точки O, соответствует тоже геодезическая, выходящая из точки M. Компоненты скорости подвижной точки, пробегающей геодезическую, будут тоже константами. Отсюда следует, что

$$\gamma^i_{kh} v^k v^h \equiv 0.$$

Действительно, в произвольной точке M_0 имеем

$$\frac{d\overset{\circ}{v}{}^i}{ds} = 0,$$

и в силу (18.14)

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{kh} \overset{\circ}{v}{}^k \overset{\circ}{v}{}^h = 0,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что две геодезические будут псевдопараллельны, если им соответствует одна и та же геодезическая, выходящая из точки O.

В евклидовом пространстве имеем обыкновенный параллелизм.

Мы увидим, что в эллиптическом пространстве имеются два вида псевдопараллелизма.

Рассмотрим твердое тело, двигающееся с угловой скоростью (p, q, r) и моментами $A = B = C = 1$. Для оси, связанной с твердым телом,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0, \quad T = p^2 + q^2 + r^2$$

Отсюда параллелизм «абсолютный».

Уравнения остаются теми же самыми для неподвижных осей в пространстве.

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ. Если $\vec{\mathbf{T}}$ — диничный касательный вектор в точке M, то

$$\frac{d\vec{\mathbf{M}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}, \quad \frac{D\vec{\mathbf{T}}}{ds} = 0. \qquad (18.15)$$

113. Геодезические в пространствах постоянной кривизны. Имеем в силу (18.13)

$$d\vec{\mathbf{X}} = D\vec{\mathbf{X}} - K \cdot X^i \omega_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{OM}},$$

$$X^i \omega_i = \vec{\mathbf{X}}\, d\vec{\mathbf{M}}.$$

Для $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{T}}$ в силу (18.15) и $\vec{\mathbf{T}} \cdot d\vec{\mathbf{M}} = ds$

$$d\vec{\mathbf{T}} = -K\, ds\, \overrightarrow{\mathbf{OM}},$$

откуда

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = -K\, \overrightarrow{\mathbf{OM}}.$$

Положим $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{M}$. Исключая $\vec{\mathbf{T}}$ с помощью первого уравнения (18.15), получим

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} + K\mathbf{M} = 0 \qquad (18.16)$$

Следовательно, интегрируя как линейное уравнение с постоянными коэффициентами, получим, если $K > 0$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cos (s\sqrt{K}) + \mathbf{B} \sin (s\sqrt{K}),$$

A и **B** — постоянные точки.

Точка **M** описывает прямую **AB**.

Следовательно, геодезические эллиптического пространства будут обыкновенными прямыми.

Если $\mathbf{M}_0$— начальная точка прямой и $\mathbf{T}_0$ — точка, изображающая начальное направление, то легко получаем

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \cos (s\sqrt{K}) + \frac{\vec{\mathbf{T}}_0}{\sqrt{K}} \sin (s\sqrt{K}). \qquad (18.17)$$

Знаменатель во втором члене правой части объясняется тем, что согласно формулам (18.8) точка **M**, как и все аналитические точки, имеет модуль $\frac{1}{\sqrt{K}}$, между тем как $\vec{\mathbf{T}}_0$— единичный вектор.

ПОЛНАЯ ДЛИНА ПРЯМОЙ

1°. *Сферическое пространство*: $K = \frac{1}{R^2}$.

$$S_T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi R. \qquad (18.18)$$

Поскольку тригонометрические функции в уравнении (18.17) имеют период 2π, то аргумент $s\sqrt{K}$ может меняться от 0 до 2π, а, следовательно, длина дуги s от 0 до $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

2°. *Эллиптическое пространство*:

$$S_T = \frac{\pi}{\sqrt{K}} \qquad (18.19)$$

В эллиптическом пространстве отождествляются точки с противоположными знаками координат. Так как при увеличении аргумента на π обе тригонометрические функции уравнения (18.17) меняют знаки, то периодом для точки **M** следует считать возрастание $s\sqrt{K}$ на π и s на $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Можно непосредственно умножить обе части (18.17) на $\mathbf{M}_0$. Поскольку

$$\mathbf{M}_0\mathbf{T}_0 = 0, \quad (\mathbf{M}_0)^2 = \frac{1}{K},$$

получим

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \frac{1}{K} \cos (s\sqrt{K}) = R^2 \cos \frac{s}{R},$$

откуда по-прежнему при неподвижной точке $\mathbf{M}_0$ периодом для точки $\mathbf{M}$ надо считать $\frac{\pi}{R}$.

3°. *Гиперболическое пространство*: $K = -\frac{1}{R^2} < 0$. Теперь при интегрировании уравнения (18.16) вместо тригонометрических функций появятся гиперболические

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \operatorname{ch}(s\sqrt{-K}) + \frac{\vec{\mathbf{T}}_0}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh}(s\sqrt{-K}) =$$

$$= \mathbf{M}_0 \operatorname{ch}\left(\frac{s}{R}\right) + \vec{\mathbf{T}}_0 R \operatorname{sh}\left(\frac{s}{R}\right), \qquad (18.20)$$

Или, меняя нормирование аналитической точки $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0 R \operatorname{th}\left(\frac{s}{R}\right). \qquad (18.21)$$

Когда s меняется от 0 до ∞, $\mathbf{M}$ меняется от $\mathbf{M}_0$ до $\mathbf{M}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0 R$; последняя точка лежит на абсолюте, ибо

$$(\mathbf{M}_0 + \vec{\mathbf{T}}_0 R)^2 = (\mathbf{M}_0)^2 + R^2 = 0.$$

Значит, абсолют является геометрическим местом бесконечно удаленных точек прямых; каждая прямая имеет две бесконечно удаленные точки $\mathbf{P}(+\infty)$ и $Q(-\infty)$. При изменении знака s гиперболический тангенс $th\,\frac{s}{R}$ тоже меняет знак, но в гиперболическом пространстве нет отождествления точек с противоположными знаками их координат.

'**14. Мероопределение Кэли.** Кэли (*Cayley*) определял проективное расстояние MM_0 посредством сложного отношения

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_0\mathbf{Q}\mathbf{P});$$

поскольку параметры этих четырех точек пропорциональны числам

$$\operatorname{th}\frac{s}{R},\ 0,\ -1,\ +1, \text{ то}$$

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_0\mathbf{Q}\mathbf{P}) = \frac{1 + \operatorname{th}\frac{s}{R}}{1 - \operatorname{th}\frac{s}{R}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{s}{R} + \operatorname{ch}\frac{s}{R}}{-\operatorname{sh}\frac{s}{R} + \operatorname{ch}\frac{s}{R}} = e^{\frac{2s}{R}}.$$

Отсюда

$$s = \frac{R}{2} \ln(\mathbf{M}\mathbf{M}_0\mathbf{Q}\mathbf{P}).$$

З а м е ч а н и е. В трехмерном пространстве возьмем за абсолют евклидову сферу радиуса R.

Мы можем принять за параметр точки **M** евклидову длину $r = |OM|$. Легко получаем

$$r = R \operatorname{th} \frac{s}{R}$$

и

$$\mathbf{MM}_0 = -\frac{1}{R^2} \operatorname{sh} \frac{s}{R}.$$

Г. ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

ГЛАВА XIX

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

115. Поле геодезических. Мы будем рассматривать семейство линий, близких к дуге кривой AB, с параметром семейства α, который обращается в нуль для кривой AB.

Точки на каждой линии семейства определяются параметром t. За ось $\vec{I}_1$ возьмем вектор, касательный к дуге линии семейства. Символы дифференцирования полагаем

$$d = \frac{\partial}{\partial t}\cdot dt, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial \alpha}\cdot d\alpha,$$

$$\omega^i(d) = \omega^i, \quad \omega^i(\delta) = e^i;$$

в силу нашего выбора оси $\vec{I}_1$ имеем

$$\omega^1 = ds, \ \omega^2 = \ldots = \omega^n = 0.$$

Из уравнений структуры (17.1) следует

$$d\omega^1 = [\omega^i \omega_i^1],$$

$$d\omega^i = [\omega^1 \omega_1^i] + [\omega^k \omega_k^i] \quad (i,\ j,\ k = 2, \ldots, n),$$

$$d\omega_1^i = [\omega_1^k \omega_k^i] + R_{1i,\,1k}[\omega^1 \omega^k] + R_{1i,\,jk}[\omega^j \omega^k],$$

откуда получаем билинейные разложения

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega^1 &= de^1 + e^i \omega_i^1, \\ \delta\omega^i &= de^i + e^1 \omega_1^i - e_1^i \omega^1 + e^k \omega_k^i = 0, \\ \delta\omega_1^i &= de_1^i + (e_1^k \omega_k^i - e_k^i \omega_1^k) - R_{1i,\,1k} e^k \omega^i. \end{aligned}\right\} \qquad (19.1)$$

116. Стационарность длины дуги геодезической в семействе линий, соединяющих две данные точки. *Покажем, что* *длина дуги AB в семействе линий, проходящих через точки A и B, стационарна только для геодезической.*

Поскольку все линии семейства теперь проходят через точки A и B, вариация $\omega^i(\delta)$ в этих точках равна нулю:

$$e^i = 0 \text{ в точках } A \text{ и } B. \tag{19.2}$$

Поскольку дифференциал длины дуги кривой семейства равен ω^1, длина этой линии между точками A и B выражается интегралом

$$\lambda = \int_A^B \omega^1.$$

Отсюда вариация этой длины при переходе от одной кривой семейства к другой при фиксированных концах A и B будет

$$\delta\lambda = \int_A^B \delta\omega^1,$$

или с помощью формул (19.1)

$$\delta\lambda = \int_A^B (de^1 + e^i\omega_i^1) = \int_A^B de^1 + \int_A^B e^i\omega_i^1 = \int_A^B (e^2\omega_2^1 + \ldots + e^n\omega_n^1), \tag{19.3}$$

ибо первый интеграл $\int_A^B de^1$ сводится к разности значений e^1 в точках A и B и в силу условий (19.2) равен нулю.

Чтобы иметь $\delta\lambda = 0$ при любых вариациях $e^i (i = 2, \ldots, n)$, обращающихся в нуль в точках A и B, необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_1^i = 0 \quad (i = 2, \ldots, n), \tag{19.4}$$

а это показывает, что рассматриваемая дуга AB — геодезическая. Действительно, по формуле (15.24) абсолютный дифференциал касательной $\vec{I}_1$ будет

$$D\vec{I}_1 = \omega_1^i\vec{I}_i,$$

и при условии (19.4) касательная сохраняет направление. Таким образом, мы согласовали наше определение геодезической с определением Римана (п. 61).

З а м е ч а н и е. Мы видим, что всегда на геодезической можно так выбрать реперы, чтобы

$$\omega^i = 0, \ \omega_1^i = 0 \quad (i = 2, \ldots, n).$$

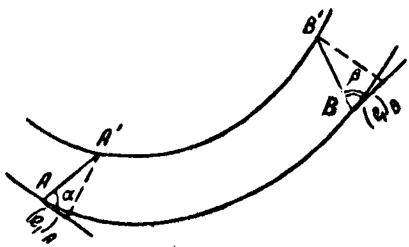
117. Первая вариация длины дуги геодезической. *Подсчитаем вариацию длины дуги геодезической AB, когда AB переходит в $A'B'$.*

Мы отказываемся от требования, чтобы все линии семейства (α) проходили через общие всем им точки A и B, и взамен этого потребуем, чтобы все линии семейства (α) были геодезическими. При этом условие (19.4) распространяется на все семейство (α).

Тогда вариация длины дуги геодезической (19.3) примет вид

$$\delta\lambda = \int\limits_A^B (de^1 + e^i\omega_i^1) = \int\limits_A^B de^1 = (e^1)_B - (e^1)_A.$$

Здесь $(e')_A$ есть проекция смещения AA' на касательную в точке A дуги AB; а $(e^1)_B$ — проекция смещения BB' на касательную в точке B дуги AB (фиг. 7).



Фиг. 7

Полагая углы между касательными AA' и AB в точке A и аналогично в точке B равными α и β:

$$\alpha = (\widehat{AA', AB}), \quad \beta = (\widehat{BB', AB}),$$

получим искомую вариацию длины в виде

$$\delta\lambda = -AA'\cos\alpha - BB'\cos\beta.$$

С л е д с т в и е. Рассмотрим семейство геодезических, не имеющих общих точек, и допустим, что их начала A описывают линию, ортогональную к геодезическим, и все геодезические имеют одну и ту же длину.

Тогда $\delta\lambda = 0$, ибо длина геодезической не меняется; $\cos\alpha = 0$ по условию ортогональности. Следовательно, $\cos\beta = 0$, и траектория конечной точки BB' будет тоже ортогональной к семейству геодезических.

Таким образом, *если из точек произвольной линии AA' проводить геодезические ортогонально к этой линии и на каждой геодезической откладывать один и тот же отрезок, то геометри-*

ческое место концов этих отрезков образует тоже ортогональную траекторию семейства геодезических.

Таким образом, получается понятие *параллельных кривых* AA' *и* BB'. Так же получается понятие *параллельных поверхностей* (различной размерности).

118. Вторая вариация длины дуги геодезической. *Подсчитаем вторую вариацию длины дуги геодезической при фиксированных концах* A *и* B.

Рассмотрим непрерывно-дифференцируемое семейство линий (α), соединяющих точки A и B, в окрестности геодезической $\alpha = 0$.

Теперь в уравнении (19.3)

$$\delta\lambda = \int_A^B de^1 + \int_A^B e^i\omega_i^1. \tag{19.5}$$

Мы не можем считать $\omega_1^i = 0$, ибо линии семейства (α), кроме $\alpha = 0$, вообще не геодезические. Зато при фиксированных концах A и B

$$\omega^1(\delta) = e^1 = 0 \quad \text{в точках } A \text{ и } B. \tag{19.6}$$

Следовательно, первый интеграл в правой части (19.5) равен нулю, и

$$\delta\lambda = \int_A^B e^i\omega_i^1.$$

Вторая вариация при неподвижных концах A и B будет

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \{\delta e^i\omega_i^1 + e^i\delta\omega_i^1\};$$

но для геодезической $\alpha = 0$ имеем $\omega_i^1 = 0$ и

$$\delta^2\lambda = \int_A^B e^i\delta\omega_i^1. \tag{19.7}$$

Дополнительные условия. Допустим, что в каждой точке геодезической AB репер получается из начального в точке A *параллельным переносом*. Это влечет за собой вдоль геодезической AB обращение в нуль ω_i^j:

$$\omega_i^j = 0 \quad (i,\ j = 1, \ldots, n). \tag{19.8}$$

Следовательно, по третьей формуле (19.1) в силу (19.8)

$$\delta\omega_1^i = de_1^i - R_{1i,\,1k}\,e^k\omega^1,$$

и равенство (19,7) примет вид (в силу $\omega_i^1 = -\omega_1^i$, $\omega^1 = ds$)

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \{-e^i de_1^i + R_{1i,\,1k} e^i e^k \, ds\}. \tag{19.9}$$

Между тем второе уравнение (19.1) даст теперь в силу

$$\omega^1 = ds, \; \omega^2 = \ldots = \omega^n = 0, \; \delta\omega^i = 0,$$

а также равенства (19.8)

$$de^i = e_1^i \, ds.$$

Теперь мы можем первый член правой части равенства (19.9) интегрировать по частям:

$$-\int_A^B e^i de_1^i = -\Big|_A^B e^i e_1^i + \int_A^B (e_1^i)^2 \, ds = \int_A^B (e_1^i)^2 \, ds,$$

ибо $e^i = 0$ в точках A и B.

Таким образом, вторая вариация по формуле (19.9) принимает вид

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \left\{\sum_i (e_1^i)^2 + R_{1i,\,1k} e^i e^k\right\} ds. \tag{19.10}$$

Рассмотрим теперь риманову кривизну в плоском направлении, определяемом геодезической MB и вектором $\overrightarrow{MM'}$, где M и M' соответствуют одному и тому же значению t на двух линиях семейства. Матрица компонент, определяющих эти направления, будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ e^1 & e^2 & e^3 \ldots e^n \end{pmatrix},$$

и риманова кривизна (16.13) равна

$$K = -\frac{R_{1i,\,1k} e^1 e^k}{\sum_i (e^i)^2} \quad (i \neq 1), \tag{19.11}$$

откуда по формуле (19.10)

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \left\{\sum (e_1^i)^2 - K \sum (e^i)^2\right\} ds. \tag{19.12}$$

Если кривизна отрицательна $K < 0$, то $\delta^2\lambda > 0$, и дуга геодезической имеет минимум (заключение не строгое).

Если $K < 0$ и дуга AB не слишком велика, то опять $\delta^2\lambda > 0$.

119. Минимум длины дуги геодезической (доказательство Дарбу). Проведем через точку A гиперповерхность, нормальную к дуге AB, и семейство параллельных гиперповерхностей, проходящих через точки дуги AB.

Если дуга AB не слишком велика, то через каждую точку, соседнюю с линией AB, пройдет одна и только одна из этих гиперповерхностей. Чтобы определить точку P, лежащую на гиперповерхности семейства, проходящей через точку M линии AB, примем за координаты параметр

$$u = AM$$

и параметры $v, w, \ldots$ гиперповерхности (M) с линейным элементом $d\sigma^2$. Тогда для линии, проходящей через точку P и соединяющей точки A и B, получим линейный элемент

$$ds^2 = du^2 + d\sigma^2$$

и, следовательно,

$$\int_0^{u_1} \sqrt{du^2 + d\sigma^2} > \int_0^{u_1} du,$$

т. е.

$$AP > AM$$

и геодезическая $\alpha = 0$ будет кратчайшей.

120. Семейство геодезических равной длины, пересекающих одну и ту же геодезическую под постоянным углом. *Пусть дано семейство геодезических одной длины a, выходящих из точек геодезической AB и составляющих с ней один и тот же угол φ. Найдем разность между длиной AB и длиной линии, образованной концами этого семейства геодезических, если отрезок a бесконечно мал.*

Для $\alpha = 0$ имеем, принимая $\delta = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}$ и $\delta a = 1$,

$$e^1 = \cos\varphi \tag{19.13}$$

и при подходящем выборе репера

$$e^2 = \sin\varphi, \ e^3 = \ldots = e^n = 0 \tag{19.14}$$

(выбор репера, очевидно, не совпадает с выбором его в п. 118). Вариация длины линии AB при смещении точек по геодезическим нашего семейства (при возрастании α) определяется по формуле (19.5)

$$\delta\lambda = \int_A^B de^1 + \int_A^B e^i \omega_i^1, \tag{19.15}$$

или

$$\delta\lambda = (e^1)_B - (e^1)_A + \int_A^B e^i\omega_i^1, \tag{19.16}$$

Вторая вариация будет

$$\delta^2\lambda = (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A + \int_A^B e^i\delta\omega_i^1,$$

или, учитывая формулы (19.13) и (19.14) и помня, что при ортогональном репере $\omega_1^1 = 0$, получим

$$\delta^2\lambda = (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A + \int_A^B e^2\delta\omega_2^1.$$

Так как $\delta\omega_2^1 = -\delta\omega_1^2$, то по третьей формуле (19.1), помня, что для геодезической $\alpha = 0$ в силу (19.4) форма ω_1^n равна нулю, будем иметь

$$\delta\omega_2^1 = -de_1^2 - e_1^k\omega_k^2 + R_{12,\,1i}e^i\omega^1$$

и потому

$$\delta^2\lambda = (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A - \sin\varphi\int_A^B \{de_1^2 + e_1^k\omega_k^2 - R_{12,\,1i}e^i\omega^1\}; \tag{19.17}$$

но из второго уравнения (19.1) для $i = 2$ получаем

$$0 = -e_1^2\,ds,$$

ибо на линии $\alpha = 0$ имеем $\omega^2 = 0$, $e^2 = \sin\varphi = \mathrm{const}$, $\omega_1^i = 0$, $\omega_k^i = 0$ и для $i > 2$

$$0 = -e_1^i\,ds + a_2^i\sin\varphi\,ds,$$

ибо для $i > 2$ имеем $\delta\omega^i = 0$, $e^i = 0$, $\omega_2^i = a_2^i\,ds$. Отсюда следует

$$e_1^2 = 0,\quad e_1^i = a_2^i\sin\varphi \quad (i > 2).$$

Следовательно, вторая вариация (19.17) принимает вид

$$\delta^2\lambda = (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A + \sin\varphi\int_A^B\left\{\sum (a_2^i)^2\sin\varphi\,ds + R_{12,\,12}\sin\varphi\,ds\right\} =$$

$$= (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A + \sin^2\varphi\int_A^B\left(\sum_i (a_2^i)^2 - K\right)ds,$$

где K — риманова кривизна в плоском направлении (AB, AA').

При нашем построении репера

$$De^i = \delta e^i + e^k e^i_k = 0,$$

а, поскольку линия AA'— геодезическая, то $e^1_k = 0$ и

$$\delta e^1 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta^2\lambda = \sin^2\varphi \int_A^B \left(\sum_i (a^i_2)^2 - K\right) ds, \qquad (19.18)$$

но

$$d\vec{I}_2 = \omega^i_2 \vec{I}_i = a^i_2 \vec{I}_i \, ds,$$

$$|d\vec{I}_2| = ds \sqrt{\sum_i (a^i_2)^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_i (a^i_2)^2 = \frac{1}{h^2},$$

где h — приведенный шаг винтового движения, которое переводит AA' в соседнее положение.

Следовательно,

$$\delta^2\lambda = \sin^2\varphi \int_A^B \left(\frac{1}{h^2} - K\right) ds \approx \sin^2\varphi \left(\frac{1}{h^2} - K\right) l, \qquad (19.19)$$

где

$$l = \int_A^B ds = AB.$$

Разлагая теперь длину

$$A'B' = \lambda$$

в ряд по степеням инфинитезимальной длины a, отложенной на геодезических семействах, получим

$$\lambda = l + a\delta\lambda + \frac{1}{2} a^2 \delta^2\lambda + \ldots; \qquad (19.20)$$

поскольку для геодезической $\alpha = 0$ первая вариация $\delta\lambda = 0$,

имеем

$$\lambda = l + \frac{1}{2} a^2 l \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{h^2} - K\right) \qquad (19.21)$$

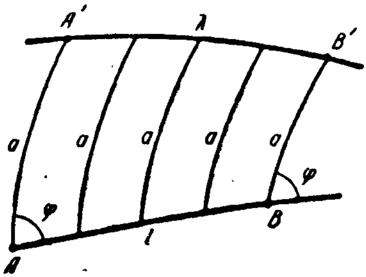
и

$$\lambda^2 = l^2 + a^2 l^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{h^2} - K\right),$$

или, если через S обозначить площадь «параллелограмма» (фиг. 8) $ABB'A'$

$$\frac{l^2 - \lambda^2}{S^2} = K - \frac{1}{h^2}. \qquad (19.22)$$

1°. Предположим, что $\frac{1}{h} = 0$. Тогда AA' и BB' будут «параллельными» в смысле Леви-Чивита. Леви-Чивита называет «*параллелограммоидом*» фигуру, которая получается, если про-



Фиг. 8

вести через концы A и B геодезической AB две «параллельные» геодезические AA', BB' одинаковой длины и соединить точки A', B' дугой геодезической $A'B'$.

Наш «параллелограмм» будет аналогичной фигурой при $h^{-1} = 0$. В этом случае

$$K = \frac{l^2 - \lambda^2}{S^2}. \qquad (19.23)$$

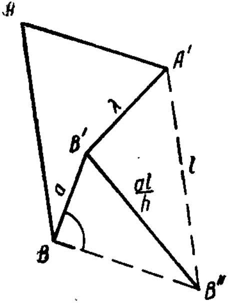
В евклидовом пространстве $l = \lambda$. В эллиптическом $\lambda < l$, в гиперболическом $\lambda > l$.

Пример. *Двумерное сферическое пространство* $\left(n = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. Мы видим, что дуга малого круга $A'B' < AB$; четырехугольник $ABB'A'$ не будет параллелограммоидом.

Снова получаем

$$K = \frac{1}{R^2} \quad (R \text{ — радиус сферы}).$$

2°. Предположим, что $\frac{1}{h} \neq 0$. Если $K < 0$, то разность



Фиг. 9

$$\lambda - l = \frac{\frac{1}{h^2} - K}{\lambda + l} S^2$$

увеличится по сравнению с евклидовой. Она может уменьшиться в эллиптическом пространстве, но можно так выбрать h, что будет $\lambda = l$ и даже $\lambda > l$ (фиг. 9).

Пример. $n = 3$, $K = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Опять находим

$$\lambda^2 = l^2 + \frac{a^2 l^2}{h^2}.$$

ГЛАВА XX

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОКОЛО ДАННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ

121. Расстояние между соседними геодезическими и кривизна пространства. Возвращаемся к реперу, выбранному в п. 118. Мы тогда переносили репер вдоль геодезических по принципу параллельности. Вдоль геодезической имеем

$$\omega_i^j = 0. \tag{20.1}$$

Пользуясь теперь формулами (19.1), получим

$$\left.\begin{aligned} &\delta\omega^1 = de^1, \\ &0 = de^i - e_1^i\, ds, \\ &0 = de_1^i - R_{1i,\,1k} e^k\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

Эти уравнения дают нам закон, по которому надо удаляться от геодезической AB, чтобы найти инфинитезимально близкую геодезическую.

Дифференцируя по s второе уравнение (20.2) и пользуясь третьим, чтобы исключить $\frac{de_1^i}{ds}$, получим

$$\frac{d^2e^i}{ds^2} - R_1{}^i{}_{1k} e^k = 0 \quad (i = 2, \ldots, n), \tag{20.3}$$

e^1 остается произвольным.

Полагая

$$R_1{}^i{}_{1k} = -A_k^i, \tag{20.4}$$

напишем

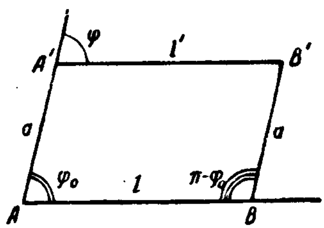
$$\frac{d^2e^i}{ds^2} + A^i_k e^k = 0. \qquad (20.5)$$

Кривизна в плоском направлении, определяемом геодезической и дугой (e^i), будет

$$K = \frac{A_{ij}e^i e^j}{\sum\limits_i (e^i)^2}, \qquad (20.6)$$

Образуем параллелограммоид $ABB'A'$ (фиг. 10). Полагаем

$$AB = l, \quad AA' = a.$$



Фиг. 10

Ищем верхнее основание (геодезическую, соединяющую точки A', B')

$$A'B' = l'.$$

Обозначим через φ_0 угол в точке A, следовательно, $\pi - \varphi_0$ — угол в точке B.

Пусть λ будет длиной дуги $A'B'$— геометрического места точек, равноудаленных от геодесической AB, тогда по формуле (19.23)

$$\frac{l^2 - \lambda^2}{S^2} = K. \qquad (20.7)$$

Разность $\lambda - l'$ не имеет значения в нашем приближении, которое останавливается на $a^2 l$ (см. (19.21)), ибо, если α — среднее расстояние между l и l', то $\lambda - l'$ будет порядка $\alpha^2 l'$ или $\alpha^2 l$, а α будет порядка al. Следовательно, разность $\lambda - l'$ будет порядка $a^2 l^3$.

Подсчитаем формулу (20.7) прямо.

Полагая $\delta = \frac{d}{da}$, из формулы (19.15) получим

$$\left.\begin{aligned} \delta\lambda &= (e^1)_B - (e^1)_A, \\ \delta^2\lambda &= (\delta e^1)_B - (\delta e^1)_A. \end{aligned}\right\} \tag{20.8}$$

Между тем мы имеем

$$\delta e^1 = e^i e_i^1$$

и в точках A и B по формулам (19.13), (19.14)

$$e^1 = \cos\varphi_0,\ e^2 = \sin\varphi_0,\ e^3 = \ldots = e^n = 0. \tag{20.9}$$

Следовательно, внося во второе уравнение (20.8), получим

$$\delta^2\lambda = (e_2 e_2')_B - (e_2 e_2')_A,$$

где в силу второго уравнения (20.2)

$$e_i' = \frac{de^i}{ds} = e_1^i$$

и

$$\delta^2\lambda = \sin\varphi_0 \{(e_2')_B - (e_2')_A\} = l\sin\varphi_0 (e_2'')_C,$$

где C—подходяще выбранная точка между A и B, а $e_2'' = \frac{d^2 e_2}{ds^2}$.

С помощью уравнения (19.19) при $\frac{1}{h} = 0$ получим

$$\delta^2\lambda = -Kl\sin^2\varphi_0,$$

т. е. в силу (19.20)

$$l' = l - \frac{1}{2}a^2 Kl\sin^2\varphi_0,$$

и мы возвращаемся к формуле

$$\frac{l^2 - l'^2}{S^2} = K.$$

122. Сумма углов параллелограммоида. Обозначим буквой φ угол между направлениями AA' и $A'B'$. Имеем в точке A в силу (20.9)

$$-\sin\varphi_0\delta\varphi = \delta e^1 = \sin\varphi_0 (e_2')_A;$$

сокращая на $\sin\varphi_0$ и интегрируя

$$\delta\varphi = -(e_2')_A$$

при условии $\delta a = 1$ (п. 120), получим

$$\varphi - \varphi_0 = -a(e_2')_A. \tag{20.10}$$

В точке B, поскольку $AB = l$, имеем

$$e_2 = (e_2)_A + l(e_2')_A + \frac{1}{2}l^2(e_2'')_A,$$

или по формулам (19.14) и (20.9)

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 + l(e_2')_A + \frac{1}{2}l^2(e_2'')_A;$$

так как

$$\sin\varphi - \sin\varphi_0 = (\varphi - \varphi_0)\cos\varphi_1, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \theta(\varphi - \varphi_0), \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

то, следовательно,

$$-a\cos\varphi_1(e_2')_A = l(e_2')_A + \frac{1}{2}l^2(e_2'')_A.$$

Считая $\frac{a}{l}$ стремящимся к нулю, будем иметь из последнего равенства

$$(e_2')_A = -\frac{1}{2}l(e_2'')_A,$$

откуда в силу (20.3)

$$(e_2')_A = -\frac{1}{2}Kl\sin\varphi_0. \tag{20.11}$$

Сравнивая равенства (20.10) и (20.11), имеем

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{1}{2}Kal\sin\varphi_0,$$

т. е.

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} KS,$$

где $S = al \sin \varphi_0$— площадь параллелограммоида.

Сумма двух внутренних углов A и A' будет

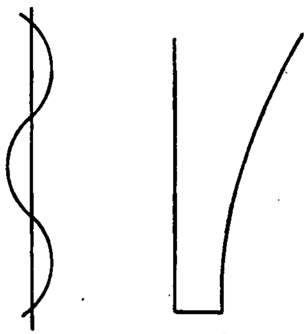
$$\pi + \frac{1}{2} KS,$$

а сумма всех углов параллелограммоида

$$2\pi + KS.$$

Это исследования Саккери (*Saccheri*).

123. Устойчивость движения материальной системы без внешних сил. *При заданной геодезической AB и бесконечно близкой геодезической $A'B'$ в точке A' будут ли все точки $A'B'$ оставаться бесконечно близкими к точкам AB?*



Фиг. 11

Можно в этом случае всегда так сделать, чтобы A_{ij} (см. (20.4) имели значения

$$A_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad A_{ii} = K_i.$$

Основные уравнения теперь с разделяющимися переменными

$$\frac{d^2 e^i}{ds^2} + K_i e^i = 0. \tag{20. 12}$$

Если один из компонентов $K_i < 0$, то будет неустойчивость. Если все $K_i > 0$, то движение устойчивое.

Предположим, что размерность пространства $n = 3$; развернем геодезическую в евклидово пространство. В привилегированном направлении e^2 (или e^3) изображение плоское. В других направлениях изображение в виде пространственной кривой (фиг. 11).

124. Исследование максимума и минимума длины геодезической при $A_{ij} = \text{const}$.

Допустим, что при фиксированных точках A и B имеем

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \sum \{(e_i')^2 - K_i (e_i)^2\} \, ds.$$

Примем пространство двумерным ($n = 2$) и постоянной кривизны. Тогда

$$\delta^2\lambda = \int_A^B \{(e')^2 - Ke^2\} \, ds,$$

где e удовлетворяет уравнению

$$U'' + KU = 0; \quad U'' = \frac{d^2U}{ds^2}.$$

Если уравнение $U'' + KU = 0$ допускает решение, не обращающееся в нуль между A и B, т. е. если есть соседняя геодезическая, не пересекающая AB, то $\delta^2\lambda > 0$, и минимум существует (при выполнении некоторых дополнительных условий). Пусть $K \leqslant 0$. Мы можем положить

$$e = \eta U, \quad \eta = 0 \text{ в точках } A \text{ и } B.$$

Тогда

$$\delta^2\lambda = \int_A^B (U^2\eta'^2 + 2UU'\eta\eta' + U'^2\eta^2 - KU^2\eta^2) \, ds.$$

При этом

$$\int_A^B 2UU'\eta\eta' \, ds = \int_A^B UU' \, d(\eta^2) = [UU'\eta^2]_A^B - \int_A^B \eta^2 \, d(UU') =$$

$$= \int_A^B \eta^2 (UU'' + U'^2) \, ds$$

и

$$\delta^2\lambda = \int_A^B (U^2\eta'^2 - UU''\eta^2 - KU^2\eta^2)\,ds = \int_A^B U^2\eta'^2\,ds > 0 \quad (20.13)$$

Это условие осуществляется, если $K \leqslant 0$.
Если $K > 0$, то

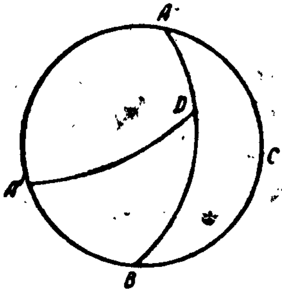
$$U = a \sin(s - s_0)\sqrt{K}.$$

При перемещении на длину, меньшую $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, условие $U \neq 0$ удовлетворяется, и мы имеем минимум.

Пример сферы. Если $ACBA' > \pi$ (фиг. 12), минимума геодезической нет. Действительно, рассмотрим соседнюю дугу $ADB = ACB = \pi$, где точка D — произвольная точка, близкая к точке B; проведем дугу большого круга DA'. Имеем

$$AD + DA' < AD + DB + BA' < ACBA'.$$

Можно всегда освободиться от особой точки D.



Фиг. 12

Вернемся к общей задаче для произвольной размерности n. Минимум обеспечен, если все $K_i \leqslant 0$. В противном случае возьмем наибольшее из положительных K_i. Минимум обеспечен для геодезической длины меньшей $\frac{\pi}{\sqrt{K_i}}$*.

125. Симметричные векторы. Рассмотрим точку O риманова пространства. При заданной точке M проведем геодезическую OM и на продолжении этой геодезической отложим дугу $OM' = OM$. Точка M' называется *симметричной* точке M относительно точки O.

Рассмотрим вектор $\vec{V}$, исходящий из точки M; это скорость подвижной точки, описывающей некоторую линию (C), для которой симметричной относительно O будет линия (C'). Скорость $\vec{V}'(V' = V)$ подвижной точки, описывающей линию (C'), будет вектором, *симметричным* вектору $\vec{V}$.

* Goursat. Cours d'Analyse III. Calcul des variations.

Перенесем посредством параллелизма $\vec{V}$ в $\vec{V}_1$ с началом в точке M'. *Вектор* $\vec{V}_1$ *противоположен вектору* $\vec{V}'$ *с точностью до бесконечно малых третьего порядка.*

Доказательство. Мы имеем семейство геодезических MOM', зависящее от параметра α. Переносим реперы из точки O в каждую точку M посредством параллелизма, так что

$$\omega_i^j = 0,$$

и имеем формулы (Леви-Чивита) (20.5)

$$\frac{d^2e^i}{ds^2} + A_k^i e^k = 0.$$

Все e^i обращаются в нуль для $s = 0$, следовательно, также все $e^{i'}$ обращаются в нуль при $s = 0$.
Положим

$$e^{i'} = a^i.$$

Мы имеем с точностью до четвертого порядка

$$e^i = a^i s - \frac{1}{6} s^3 A_k^i a^k.$$

Следовательно, в точке M

$$e^i(+l) = a^i l - \frac{1}{6} l^3 A_k^i a^k;$$

точке M'

$$e^i(-l) = -a^i l + \frac{1}{6} l^3 A_k^i a^k;$$

имеем в этих точках равные и противоположные значения.

Положим

$$a^i l = b^i;$$

тогда

$$e^i(l) = b^i - \frac{1}{6} l^2 A_k^i b^k,$$

$$e^i(-l) = -b^i + \frac{1}{6} l^2 A_k^i b^k;$$

с другой стороны

$$e^1(l) = l' - l,$$

$$-e^1(-l) = l' - l,$$

где l'—длина дуги соседней с OM геодезической. Следовательно, полагая

$$e^1(l) = b^1,$$

имеем *точно*

$$e^1(-l) = -b^1.$$

Для конечных векторов $\vec{V}$, $\vec{V}'$ все b^i будут конечны; отсюда следует объявленный результат, ибо компоненты $\vec{V}'_i$ будут те же, что и для $\vec{V}$.

126. Параллельный перенос посредством симметрии. Итак, чтобы перенести параллельно вектор $\vec{V}$ из точки M в точку M', строим вектор, симметричный вектору $\vec{V}$ в точке M', и берем вектор, противоположный $\vec{V}'$. Построение точно до бесконечно малых третьего порядка.

Построение будет вполне точным, если величины e^i — нечетны, т. е. величины A^i_k — четны. Так будет, если все A^i_k будут постоянными (случай, рассмотренный в пп. 123, 124). Кривизна в направлении плоского элемента сохраняется, когда переносят этот элемент посредством параллелизма касательно к этому элементу. Симметрия тогда сохраняет ds^2 (она будет *изометрическим преобразованием*).

Это сводится к тому, что две подвижные точки, постоянно симметричные относительно точки O, в каждый момент имеют одну и ту же скорость, что в силу предыдущего, очевидно.

Обратно допустим, что симметрия относительно некоторой точки O будет изометрией. Тогда параллельный перенос сохраняет кривизну.

Действительно, рассмотрим в точке M бивектор $(\vec{X}, \vec{Y})$ и перенесем его в бивектор $M'(\vec{X}', \vec{Y}')$.Пусть точка O — середина геодезической MM', и бивектор $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1)$ симметричен бивектору $(\vec{X}, \vec{Y})$. Поскольку симметрия изометрична, она сохраняет кривизну. Следовательно, кривизна площадки $M'(\vec{X}_1, \vec{Y}_1)$ равна кривизне площадки $M(\vec{X}, \vec{Y})$; но $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1)$ совпадает с $(\vec{X}', \vec{Y}')$ до бесконечно малых третьего порядка.

Следовательно, риманова кривизна K сохранится до бесконечно малых третьего порядка.

Замечание. Перенос не обязательно касателен к плоскому элементу.

Частный случай. Пространства постоянной кривизны.

Следствие. Возьмем две точки O и O' на одной геодезической и выполним последовательно две симметрии. В этом преобразовании геодезическая OO' скользит сама по себе. Это преобразование становится изометрией, если этим свойством обладает симметрия.

127. Определение трехмерных пространств, где параллельный перенос сохраняет кривизну. Оставим в стороне случай, когда квадрика-индикатрисы Q кривизны будет сферой.

Предположим сначала, что K_{11}, K_{22}, K_{33} различны. Этот случай не может представиться. Действительно, возьмем в каждой точке триэдры главных направлений. Главное направление остается главным при параллельном переносе. Следовательно, $\vec{I'}_1$ переносится в $\vec{I}_1$ и $D\vec{I}_1 = 0$, откуда

$$\omega_i^j = 0.$$

Значит, кривизна равна нулю, что противоречит условию.

Остается рассмотреть случай, когда квадрика Q будет поверхностью вращения:

$$K_{11} = K_{22} = A, \quad K_{33} = C, \quad A \neq C.$$

Совместим вектор $\vec{I}_3$ с осью вращения индикатрисы. Параллельный перенос переводит вектор $\vec{I}_3$ в $\vec{I'}_3$, но не обязательно сохраняет также $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$.

Имеем только

$$D\vec{I}_3 = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0$$

и также

$$A = \text{const}, \; C = \text{const}.$$

Обратно, допустим справедливость этих четырех равенств. Тогда параллельный перенос сохраняет кривизну

$$A(\alpha^2+\beta^2)+C\gamma^2,$$

поскольку A, C, γ и, следовательно, $\alpha^2+\beta^2$ сохраняются. В таком случае имеем уравнения структуры в виде

$$\left.\begin{aligned} d\omega^1 &= [\omega^2\omega_2^1], \\ d\omega^2 &= [\omega^1\omega_1^2], \\ d\omega^3 &= 0, \\ d\omega_1^2 &= -C[\omega^1\omega^2]. \end{aligned}\right\} \tag{20.14}$$

Кроме того,

$$d\omega_1^3 = -A[\omega'\omega^3].$$

Следовательно,

$$A = B = 0.$$

Существуют ли пространства, удовлетворяющие системе (20.14)?

Прежде всего, из третьего уравнения (20.14) следует

$$\omega^3 = dz.$$

Три других уравнения (20.14) будут уравнениями двумерного пространства постоянной кривизны $C \neq 0$.

Следовательно, все решения будут

$$ds^2 = dz^2 + d\sigma^2,$$

где $d\sigma^2$— линейный элемент двумерного пространства постоянной кривизны, не равной нулю.

Можно определить все изометричные преобразования этого пространства. Такое преобразование должно сохранять базисный вектор $\vec{I}_3$, а следовательно, и dz:

$$dz = dz',$$

$$z' = z + c.$$

Кроме того, есть еще два семейства изометричных преобразований $d\sigma^2$ (соответствующие собственным движениям и движениям вместе с симметрией).

Таким образом, имеется четыре семейства преобразований.

Замечание. Для пространств размерности более трех получаются важные результаты. Мы вернемся к этому вопросу в главе «Симметрия и параллельный перенос».

ГЛАВА XXI

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

128. Поверхность, геодезическая в точке. Метод Севери параллельного переноса вектора. Если через заданную точку A риманова пространства провести различные геодезические (пространства), касательные в этой точке к одному и тому же плоскому элементу, то получим поверхность, которая называется *геодезической* в точке A. Чтобы узнать, будет ли заданная поверхность геодезической в одной из своих точек, достаточно рассмотреть геодезические, касательные к поверхности в этой точке: они должны на ней лежать целиком.

Поверхность, геодезическая в точке A, обладает в этой точке нулевыми главными кривизнами, так как нормальная кривизна равна нулю при переходе из точки A к инфинитезимально близкой точке A' этой поверхности. Если параллельно перенести из точки A в точку A' вектор, касательный к поверхности в точке A, то он останется касательным к поверхности и в точке A' (до бесконечно малых порядка выше первого).

Отсюда можно получить геометрическую конструкцию Севери * для параллельного переноса вектора.

Чтобы перенести посредством эквиполентности вектор $\vec{\mathbf{X}}$ *с началом в точке* A *в инфинитезимально близкую точку* A', *надо построить геодезическую, соединяющую* A *и* A', *а также геодезическую поверхность в точке* A, *касающуюся в* A *этой геодезической и вектора* $\vec{\mathbf{X}}$; *искомый вектор* $\vec{\mathbf{X}}'$ *будет касаться в точке* A' *этой поверхности и образовывать с геодезической* AA', *продолженной за точку* A', *тот же угол, что заданный вектор* $\vec{\mathbf{X}}$ *образует в точке* A *с геодезической* AA'.

---

* F. Severi. Sulla curvatura di superficie e varieta. Rend. Circ. matem. di Palermo, 1917, t. 42, pp. 227—229.

Последняя часть теоремы вытекает из того, что направление геодезической AA' в точке A' *параллельно* ее направлению в точке A и параллельный перенос сохраняет угол двух направлений.

Важно заметить, что при параллельном переносе вектора $\vec{X}$ вдоль *конечной* дуги геодезической AA' (достаточно продолженной) получаемый вектор вообще не будет касаться рассматриваемой геодезической поверхности, ибо нет никаких оснований заранее утверждать, что поверхность, геодезическая в точке A, будет геодезической в других точках геодезической AA'.

Если две поверхности, пересекаясь по линии (C), будут геодезическими во всех ее точках, то они будут пересекаться под постоянным углом, ибо линию (C) можно рассматривать как линию кривизны на каждой из этих поверхностей.

Действительно, если развернуть линию (C) на евклидово пространство (п. 67), то в каждой точке это пространство будет касательным к первой и ко второй поверхности. Многообразие плоских касательных элементов каждой поверхности вдоль линии образует, «полосу кривизны» (в смысле Бляшке), т. е. после развертывания в окрестности развернутой линии (C) образы касательных плоскостей первой и второй геодезических поверхностей будут вести себя так, как касательные плоскости двух поверхностей в евклидовом пространстве, пересекающихся по общей линии кривизны.

В частности, сохраняется теорема Иоахимсталя о пересечении поверхностей под постоянным углом.

129. Вполне геодезические поверхности. Поверхность, геодезическая в каждой из своих точек, называется *вполне геодезической*.* (Адамар). Она обладает характеристическим свойством: всякая геодезическая, которая ее касается, вся ей принадлежит.

Другое характеристическое свойство: всякая геодезическая, имеющая с ней две общие точки (достаточно близкие), вся ей принадлежит. Действительно, пусть A и A' — эти две точки; из точки A выходит на поверхности бесконечное множество геодезических, которые заполняют всю поверхность в достаточно малой окрестности; одна из них, следовательно, проходит через точку A' и поскольку через две, достаточно близкие точки поверхности, проходит только одна геодезическая, то это и будет та геодезическая, которую мы рассматриваем. Обратная теорема доказывается так же. Вполне геодезические поверхности обладают, следовательно, характеристическими свойствами *плоскости* в евклидовом пространстве. Можно было бы сохранить за ними название *плоскостей*, но мы увидим, что *существование в римановом пространстве таких «плоскостей» — явление исключительное.*

---

* J. Hadamard. Bull. Soc. math., (2), t. 25, 1901, pp. 37—40.

Вполне геодезическая поверхность обладает следующими тремя свойствами, которые эквивалентны.

Во-первых, *она имеет в каждой своей точке нулевые главные кривизны.*

Во-вторых, *единичный вектор нормали к поверхности остается нормальным при произвольном параллельном переносе вдоль поверхности.*

В-третьих, *всякий вектор, касательный к поверхности, остается касательным при произвольном параллельном переносе вдоль поверхности.*

Второе свойство — непосредственное следствие первого, которое в свою очередь будет следствием второго. Что касается второго и третьего, то они, очевидно, эквивалентны друг другу.

Покажем, что третье свойство *характеристично* для вполне геодезической поверхности; отсюда будет следовать, что каждое из двух первых также характеристичны для этих поверхностей.

Предположим, что всякий касательный вектор к заданной поверхности (S) остается к ней касательным при параллельном переносе, когда его вершина описывает произвольную кривую на поверхности. Отсюда следует, что ускорение точки, которая описывает любую линию на поверхности, всегда касательно к поверхности. Если выразить координаты поверхности в функциях двух параметров α, β, то достаточно двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно α, β, чтобы выразить, что ускорение подвижной точки равно нулю; *следовательно, на поверхности существует геодезическая* (пространства), *проходящая через произвольную точку этой поверхности и имеющая в этой точке произвольное касательное к поверхности направление.* Проверка подсчетом не затруднительна.

130. Развертывание на плоскость линий вполне геодезической поверхности. Другое замечательное свойство вполне геодезической поверхности следующее: *всякая линия вполне геодезической поверхности при развертывании на евклидово пространство становится плоской.*

Действительно, поскольку абсолютный дифференциал единичного касательного вектора сам будет касательным вектором поверхности, главная нормаль будет касательной к поверхности; единичный вектор бинормали будет, следовательно, нормален к поверхности, и его абсолютный дифференциал равен нулю; значит, кручение кривой равно нулю. При развертывании кривая, имеющая нулевое кручение, становится плоской линией.

Обратное предложение тоже справедливо. Предположим, что кручение каждой линии на поверхности равно нулю, или, что сводится к тому же, что скорость, ускорение первого порядка и ускорение второго порядка точки, произвольно двигающейся по поверхности, будут все время компланарны. Пусть поверхность определяется уравнением $u^3=0$. Всегда можно себе представить другую точку, двигающуюся по поверхности так, чтобы в данный момент величины $\frac{du^i}{dt}$ и $\frac{d^2u^i}{dt^2}$ имели те же числовые значения, как и у первой точки, а величины $\frac{d^3u^1}{dt^3}$ и $\frac{d^3u^2}{dt^3}$ менялись от первой точки ко второй на величины (α^1, α^2). Отсюда следует, что произвольный вектор (α^1, α^2), касательный к поверхности, будет компланарен скорости и ускорению первой точки; значит, это ускорение лежит в касательной плоскости поверхности, и все линии на поверхности будут асимптотическими. Поверхность будет вполне геодезической.

131. Теорема Риччи об ортогональных траекториях семейства вполне геодезических поверхностей. Мы сейчас выведем из предыдущего замечательную теорему Риччи *.

Если в римановом пространстве существует однопараметрическое семейство плоскостей, то их ортогональные траектории устанавливают между различными плоскостями семейства изометрическое точечное соответствие.

Действительно, пусть (P) — плоскость семейства и (P') — бесконечно близкая плоскость. Пусть (C) — произвольная линия, проведенная на плоскости (P), и (C') — геометрическое место точек пересечения с плоскостью (P') ортогональных траекторий, проведенных через точки (C). Построим отображение риманова пространства на евклидово пространство сопряжения (п. 67) вдоль линий (C). В этом представлении линия (C) будет *плоской*, а линия (C') получается из нее, если провести через всякую точку линии (C) бесконечно малый отрезок, нормальный к плоскости линии (C); следовательно, первая вариация длины произвольной дуги линии (C) равна нулю при переходе от (C) к (C'). Поскольку, с другой стороны, длина (C') сохраняется в этом представлении до бесконечно малых второго порядка, мы видим, что в римановом пространстве первая вариация длины дуги линии (C) равна нулю при переходе от плоскости (P) к бесконечно близкой (P'). Это и требовалось доказать. Отсюда — интересное следствие. Возьмем в одной из плоскостей (P_0) семейства произвольную систему координат u, v и обозначим буквой w переменный параметр, определяющий различные плоскости семейства. Линейный элемент пространства будет тогда иметь вид

$$ds^2 = d\sigma^2 + H(u, v, w)\, dw^2, \qquad (21.1)$$

---

* Ricci. Formole fondamentale nella teoria generale della varietà e della loro curvatura; Rend. Acc. Lincei, 1903, t. 12, pp. 409—420.

где $d\sigma^2$ — линейный элемент плоскости (P_0):

$$d\sigma^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2. \qquad (21.2)$$

Поскольку полученный линейный элемент (21.1) содержит только одну произвольную функцию трех аргументов (и функции двух аргументов), следует, что римановы пространства, допускающие однопараметрическое семейство плоскостей, — исключительное явление, ибо, по замечанию Римана, наиболее общий линейный элемент с тремя переменными зависит от трех произвольных функций трех переменных (существует шесть произвольных коэффициентов, но возможность произвольной замены координат приводит число произвольных функций к трем).

Такое преобразование должно сохранять базисный вектор $\vec{I}_3$, а следовательно, dz:

$$dz = dz',$$

$$z' = z + c.$$

Мы приходим к заключению п. 127.

Д. ВЛОЖЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

ГЛАВА XXII

ЛИНИИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

132. Формулы Френе в римановом пространстве. Теория кривизны линий в римановом пространстве такая же, как и в евклидовом.

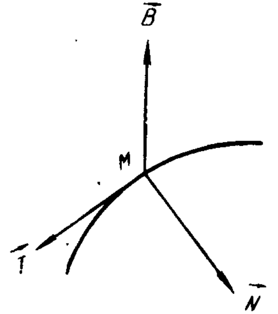
Напомним формулы Френе в евклидовом пространстве (фиг. 13)

$$\frac{d\vec{\mathbf{M}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}},$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}}, \qquad \frac{1}{\rho} \text{ — кривизна}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}} + \frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}}, \qquad \frac{1}{\tau} \text{ — кручение}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}}.$$



Фиг. 13

В римановом пространстве сначала имеем (ср. п. 70)

$$\frac{d\vec{\mathbf{M}}}{ds} = \vec{\mathbf{T}},$$

затем можно написать

$$\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}}.$$

Примем

$$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{I}}_1, \quad \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{I}}_2, \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{I}}_3; \tag{22. 1}$$

тогда

$$\omega^1 = ds,\ \omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0, \tag{22.2}$$

ибо

$$d\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{I}}_1\,ds;$$

далее

$$\omega_1^2 = \frac{ds}{\rho},\ \omega_1^3 = 0,$$

ибо

$$D\vec{\mathbf{T}} = D\vec{\mathbf{I}}_1 = \frac{ds}{\rho}\vec{\mathbf{I}}_2. \tag{22.3}$$

Положим

$$\omega_2^3 = \frac{ds}{\tau}. \tag{22.4}$$

Мы находим тогда два последних равенства

$$\frac{D\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}} + \frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}},$$

$$\frac{D\vec{\mathbf{B}}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}}.$$

В пространстве n измерений получаем последовательность уравнений, вводящих каждое новый параметр (вторую, третью и т. д. кривизну) и новый вектор (вторую, третью и т. д. нормаль).

133. Определение линии по заданным кривизне и кручению. Кривая нулевого кручения в пространстве постоянной кривизны. *Существуют ли кривые, у которых кривизна и кручение — заданные функции длины дуги?*

Присоединим к точке M наиболее общий репер и положим

$$\omega^1 = ds,\quad \omega^2 = 0,\quad \omega^3 = 0,$$

$$\omega_1^2 = \frac{ds}{\rho},\quad \omega_1^3 = 0,\quad \omega_2^3 = \frac{ds}{\tau}.$$

Это система дифференциальных уравнений, которая допускает решения, определяющие координаты точек линии и трехгранник Френе.

З а м е ч а н и е. Каждую кривую можно развернуть в евклидово пространство. Развернутая линия имеет ту же кривизну и то же кручение.

Кривые нулевого кручения. Допустим

$$\frac{1}{\tau}=0,$$

тогда

$$\frac{D\vec{\mathbf{B}}}{ds}=0.$$

Следовательно, бинормаль остается во всех точках параллельна сама себе. В евклидовом пространстве это плоские линии.

В пространстве постоянной кривизны, пользуясь формулами (18.6), (18.7)

$$d\mathbf{M}=\omega^i\vec{\mathbf{I}}_i,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_i=\omega_i^k\vec{\mathbf{I}}_k-K\omega^i\mathbf{M}$$

и соотношениями (22.1), (22.2), (22.3), получим

$$d\mathbf{M}=\omega^1\vec{\mathbf{I}}_1,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_1=\omega_1^2\vec{\mathbf{I}}_2-K\omega^1\mathbf{M},$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_2=\omega_2^1\vec{\mathbf{I}}_1+\omega_2^3\vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_3=\omega_3^2\vec{\mathbf{I}}_2,$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{M}}{ds}=\vec{\mathbf{T}},\quad \frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}}-K\mathbf{M},\\&\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}}+\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}},\quad \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}}.\end{aligned}\right\}\tag{22.5}$$

Если $\frac{1}{\tau}=0$, то

$$\frac{d\vec{\mathbf{B}}}{ds}=0,$$

и аналитическая точка **B** — фиксирована.

Поскольку скалярное произведение

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}=0$$

равно нулю, точка **M** лежит в полярной плоскости точки **B**; следовательно, линия будет *плоской*.

При постоянном ρ

$$\rho=\mathrm{const}$$

имеем

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{M}+\rho\vec{\mathbf{N}})=\vec{\mathbf{T}}+\rho\left(-\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}}\right)=0,$$

и точка

$$\mathbf{M}+\rho\vec{\mathbf{N}}$$

фиксирована; скалярный квадрат ее равен

$$(\mathbf{M}+\rho\vec{\mathbf{N}})^2=\mathbf{M}^2+2\rho\mathbf{M}\vec{\mathbf{N}}+\rho^2\vec{\mathbf{N}}^2=$$
$$=\frac{1}{K}+\rho^2.$$

Если $K>0$, то положим

$$\mathbf{C}=\frac{\mathbf{M}+\rho\vec{\mathbf{N}}}{\sqrt{1+K\rho^2}};$$

следовательно,

$$\mathbf{C}^2=\frac{1}{K};$$

Это показывает, что **C** — геометрическая точка.

Скалярное произведение

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}=\frac{\mathbf{M}^2+\rho\mathbf{M}\vec{\mathbf{N}}}{\sqrt{1+K\rho^2}}=\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+K\rho^2}};\tag{22.6}$$

С другой стороны, пользуясь уравнением (18.17) и полагая $\mathbf{M}_0=\mathbf{C}$ и значение длины дуги геодезической

$$s=\mathbf{M}_0\mathbf{M}=\mathbf{CM}=d,$$

получим

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{C} = \left\{\mathbf{C}\cos(s\sqrt{K}) + \frac{\vec{\mathbf{T}}_0}{\sqrt{K}}\sin(s\sqrt{K})\right\}\cdot\mathbf{C} =$$

$$= \frac{1}{K}\cos(d\sqrt{K}), \qquad (22.7)$$

ибо $\vec{\mathbf{T}}_0\,\mathbf{C} = 0$, как произведение вектора на точку.

Сравнивая выражения (22.6) и (22.7), получим

$$\cos(d\sqrt{K}) = \frac{1}{\sqrt{1+K\rho^2}}. \qquad (22.8)$$

Отсюда, расстояние d между точками C и M — постоянно, если K и ρ — постоянны.

Таким образом, геометрическое место точек M будет окружностью с центром C и радиусом ρ. Между тем, определяя ρ из уравиеиия (22.7), получим

$$K\rho^2 = \operatorname{tg}^2(d\sqrt{2})$$

и

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{K}}\operatorname{tg}(d\sqrt{2}).$$

Таким образом, радиус кривизны окружности в неевклидовом пространстве ($K > 0$) *не совпадает* с ее радиусом d (пример сферы, где радиус геодезической кривизны параллели — малого круга не равен расстоянию точки от центра окружности).

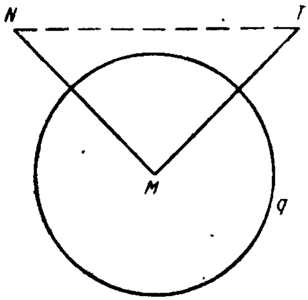
Итак, если $K > 0$, то линии нулевого кручения и постоянной кривизны будут окружностями.

134. Линии нулевого кручения и постоянной кривизны в пространстве постоянной отрицательной кривизны. Уравнения (22.5) будут

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \vec{\mathbf{T}}, \\ &\frac{d\vec{\mathbf{T}}}{ds} = -K\mathbf{M} + \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{N}}, \\ &\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{T}}; \quad K = \frac{1}{R^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (22.9)$$

Рассмотрим плоскую линию $\left(\frac{1}{\tau} = 0\right)$ постоянной кривизны $\frac{1}{\rho}$.

Пусть q — сечение абсолюта плоскостью этой кривой и $\mathbf{N}, \mathbf{T}$ — точки, представляющие векторы $\vec{\mathbf{N}}$, $\vec{\mathbf{T}}$ (фиг. 14). Треугольник MTN — автополярен относительно абсолюта. Неподвижная



Фиг. 14

точка $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$ имеет скалярный квадрат $\rho^2 - R^2$. Следует рассмотреть три случая.

1°. $\rho < R$. Точка $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$ лежит внутри абсолюта. Геометрическая точка, которая по своему положению совпадает с ней, определяется условием, чтобы скалярный квадрат ее был равен $-R^2$.

Если положить

$$\mathbf{C} = \lambda(\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}),$$

то, возвышая в квадрат, получим

$$-R^2 = \lambda^2(-R^2 + \rho^2),$$

откуда

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}, \quad \mathbf{C} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}(\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}).$$

Таким образом, обозначая $r = CM$ и обращаясь к уравнению (18.17), получим

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{M} = -R^2 \operatorname{ch} \frac{r}{R},$$

откуда

$$\operatorname{ch} \frac{r}{R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Следовательно, при постоянном ρ

$$r = \text{const}.$$

Геометрическое место точек M будет ортогональной траекторией прямых, выходящих из неподвижной точки C, т. е. окружностью с радиусом r и постоянной кривизной $\frac{1}{\rho}$. При этом

$$\rho = R \operatorname{th} \frac{r}{R}.$$

2°. $\rho = R$. Точка $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$ будет точкой C абсолюта. Нормали в точках этой кривой будут параллельны, т. е. пересекаются на абсолюте.

Линия является пределом окружности, радиус которой неограниченно возрастает.

3°. $\rho > R$. Точка $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$ выходит за абсолют. Пусть прямая AB — ее поляра и P — точка пересечения линии AB с нормалью к кривой (фиг. 15). Точка $\mathbf{P}$ сопряжена точке $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$. Она лежит на прямой, определяемой точками $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}$, и может быть представлена в виде

$$\mathbf{P} = \mu(\mathbf{M} + \sigma\vec{\mathbf{N}}) \qquad (22.10)$$

с условием

$$\mathbf{P}(\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}}) = 0.$$

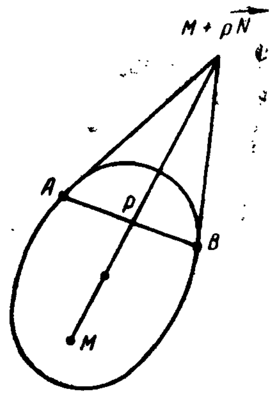
Внося сюда значение (22.10), получаем

$$\mu(\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{N}})\cdot(\mathbf{M} + \sigma\vec{\mathbf{N}}) = \mu\{\mathbf{M}^2 +$$

$$+ \mathbf{M}\vec{\mathbf{N}}(\rho + \sigma) + \rho\sigma\vec{\mathbf{N}}^2\} = 0$$

и по сокращении на μ

$$-R^2 + \rho\sigma = 0.$$



Фиг. 15

Следовательно,

$$\sigma = \frac{R^2}{\rho}, \quad \mathbf{P} = \mu\left(\mathbf{M} + \frac{R^2}{\rho}\vec{\mathbf{N}}\right).$$

Теперь требуем, чтобы модуль $\mathbf{P}$ как аналитической точки был равен $-R^2$:

$$\mathbf{P}^2 = -R^2,$$

т. е.

$$\mu^2\left(\mathbf{M}^2 + \frac{R^4}{\rho^2}\vec{\mathbf{N}}^2\right) = -R^2,$$

или в силу $\mathbf{M}^2 = -R^2$, $\vec{\mathbf{N}}^2 = 1$ имеем

$$\mu^2\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) = 1,$$

Значит,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\rho^2}}}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{M}+\frac{R^2}{\rho}\vec{\mathbf{N}}}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\rho^2}}}. \qquad (22.11)$$

Если расстояние PM обозначить буквой d, то по формуле (18.20), полагая $\mathbf{M}_0 = \mathbf{P}$ и $s = d$, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\operatorname{ch}\left(\frac{d}{R}\right) + \vec{\mathbf{T}}R\operatorname{sh}\left(\frac{d}{R}\right);$$

умножая обе части на $\mathbf{P}$ и помня, что $\mathbf{P}^2 = -R^2$, $\overrightarrow{\mathbf{PT}} = 0$, будем иметь

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{M} = -R^2\operatorname{ch}\left(\frac{d}{R}\right)$$

или, подставляя значение $\mathbf{P}$ по формуле (22.11),

$$-\frac{R^2}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\rho^2}}} = -R^2\operatorname{ch}\left(\frac{d}{R}\right)$$

и

$$\operatorname{ch}\left(\frac{d}{R}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R^2}{\rho^2}}}.$$

Отсюда при постоянных ρ и R, имеем

$$d = \mathrm{const}$$

и

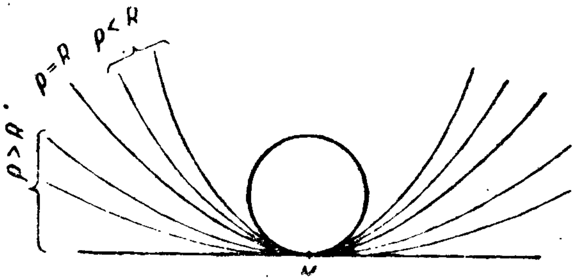
$$\rho^2 = R^2\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{R}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{R}\right)-1} = R^2\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{R}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{d}{R}\right)},$$

или

$$\rho = R\operatorname{cth}\left(\frac{d}{R}\right).$$

Линия будет геометрическим местом точек, получаемых, если восставить перпендикуляры в различных точках прямой AB

и отложить на этих прямых один и тот же отрезок d; это место точек будет ортогональной траекторией перпендикуляров; это — линия, параллельная прямой AB. Таким образом, если увеличивать радиус кривизны ρ линий, проходящих через точку M, то будем получать последовательно окружности возрастающих радиусов, окружность бесконечного радиуса и кривизны $\frac{1}{R}$, затем кривые убывающих кривизн, имеющие пределом прямую (фиг. 16)



Фиг. 16

135. Интегрирование уравнений Френе этих кривых. Формулы Френе образуют дифференциальную систему с постоянными коэффициентами, которая легко интегрируется.

Обозначая штрихами производные по длине дуги s, имеем, очевидно,

$$\mathbf{M}'' + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right)\mathbf{M}' = 0.$$

1°. $\rho < R$. Интеграл зависит от тригонометрических функций аргумента

$$s\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}};$$

следовательно, длина дуги L окружности будет

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}}} = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}} = 2\pi R \operatorname{sh}\left(\frac{\rho}{R}\right).$$

2°. $\rho > R$. Полагая

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2} = -\frac{1}{a^2},$$

имеем

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}e^{\frac{s}{a}} + \mathbf{B}e^{-\frac{s}{a}} + \mathbf{C}, \tag{22. 12}$$

откуда

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{A}}{a}e^{\frac{s}{a}} - \frac{\mathbf{B}}{a}e^{-\frac{s}{a}}. \tag{22. 13}$$

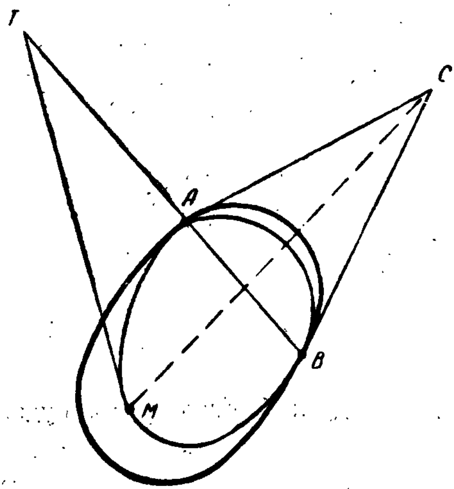
A, **B**, **C** — три фиксированные аналитические точки, определяемые условиями $\mathbf{M}^2 = -R^2$, $\vec{\mathbf{T}}^2 = 1$ для всякого s; это дает

$$\mathbf{A}^2 = 0,\ \mathbf{B}^2 = 0, \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = 0,\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = 0;$$

$$\mathbf{C}^2 + 2\mathbf{AB} = -R^2,\ \text{ или }\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -\frac{a^2}{2},$$

$$1 = -\frac{2}{a^2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\ \ \mathbf{C}^2 = a^2 - R^2 > 0.$$

Таким образом, A и B — две точки абсолюта и C — полюс прямой AB (фиг. 17)



Фиг. 17

Примем ABC за треугольник отнесения. Тогда

$$\mathbf{M} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}.$$

Для всякой точки кривой в силу (22.12)

$$x = e^{\frac{s}{a}}, \quad y = e^{-\frac{s}{a}}, \quad z = 1,$$

и уравнение кривой

$$xy = z^2.$$

Это кривая, дважды касающаяся абсолюта в точках A и B; только одна из дуг AMB описывается при изменении s от $-\infty$ до $+\infty$. В этой системе осей, уравнение абсолюта получается, если написать

$$(x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C})^2 = 0,$$

откуда

$$xy - \frac{(a^2 - R^2)}{a^2} z^2 = 0.$$

Точка $\mathbf{T}$, имея вид $x\mathbf{A} + y\mathbf{B}$, лежит на прямой AB. Это, следовательно, пересечение AB с касательной в точке M к кривой. Отсюда следует, что MC — нормаль в точке M к кривой, и N — точка, сопряженная точке $\mathbf{M}$ на прямой MC относительно абсолюта. Точка C — фиксированная точка, рассмотренная выше.

3°. $\rho = R$. Этот случай получается переходом к пределу из предыдущего. Находим коническое сечение, сверхсоприкасающееся с абсолютом. Окружности случая $\rho < R$ тоже касаются абсолюта, но хорда касания — внешняя, касание — мнимое.

136. Евклидово пространство сопряжения. Рассмотрим в произвольном римановом пространстве линию (C) с кривизной $\frac{1}{\rho}$ и кручением $\frac{1}{\tau}$, определенными во всякой точке M.

Рассмотрим в каждой точке трехгранник Френе. Развертка (C_0) линии (C) в евклидовом пространстве в каждой точке M_0, гомологичной точке M, имеет ту же кривизну $\frac{1}{\rho}$ и то же кручение $\frac{1}{\tau}$. Более того, гомологичные дуги имеют одинаковую длину.

Таким образом, мы имеем соответствие между точками M линии (C) и точками M_0 линии (C_0).

Мы распространим это соответствие на пространства, окружающие линии (C) и (C_0).

Для этого заметим, что всякой точке P в окрестности линии (C) соответствует одна и только одна геодезическая (G), нормальная к кривой (C) в некоторой точке M, такая, что длина дуги PM имеет некоторую величину u; направляющие косинусы линии (G) относительно трехгранника Френе в точке M имеют вполне определенные значения 0, β, γ.

Точке P сопоставим точку P_0, определенную следующим образом. В точке M_0 проводим нормаль к линии (C_0), которая имеет направляющие косинусы 0, β, γ по отношению к трехграннику Френе линии (C_0). Отложим на этой нормали дугу длиной $M_0P_0 = u$. Евклидово пространство точек (P_0) будет *пространством сопряжения* риманова пространства вдоль линии (C).

Мы покажем, что дуга $P_0Q_0 = \sigma_0$ пространства сопряжения отличается от дуги $PQ = \sigma$ риманова пространства только на величины второго порядка малости относительно максимального расстояния u. Отсюда следует, что наблюдатель, движущийся вдоль кривой (C) и измеряющий с точностью до бесконечно малых первого порядка, не мог бы определить природы пространства вокруг линии (C).

Чтобы показать это, положим $l = MN = M_0N_0$ (точка N присоединена к точке Q) и рассмотрим семейство линий, получаемых, если на геодезических $MP, \ldots, MQ$ откладывать длины, равные ku ($k < 1$). Эти линии зависят от параметра a. Мы будем полагать $a = 0$ для MN, $a = a_0$ — для PQ и $a = ka_0$ — для линии, соответствующей длине ku. Отсюда, если рассматривать величину a как меру времени, которое потребуется подвижной точке, чтобы пройти геодезические нормали, то движение этой точки будет равномерным.

Для всякой линии семейства примем

$$\vec{I}_1 = \vec{T}.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0.$$

Для $a = 0$ имеем

$$\omega_1^2 = \frac{ds}{\rho}, \quad \omega_1^3 = 0,$$

$$\omega_2^3 = \frac{ds}{\tau}, \quad \omega^1 = ds;$$

полагая символ дифференцирования

$$\delta = \frac{\partial}{\partial a},$$

имеем по формуле (19.5) п. 118

$$\delta\lambda = (e^1)_N - (e^1)_M + \int\limits_M^N (e^2\omega_2^1 + e^3\omega_3^1).$$

Но e^1, касательная компонента скорости вдоль линии (G), равна нулю. Следовательно,

$$\delta\lambda = -\int\limits_M^N e^2 \frac{ds}{\rho}.$$

Это показывает, что

$$\delta\lambda = \delta\lambda_0,$$

что и требовалось доказать.

137. Кривизна риманова пространства входит только в члены второго порядка малости. Приведенное доказательство не охватывает всех возможных дуг PQ. Чтобы иметь более полное доказательство, надо идти другим путем.

Точка P определяется геодезическим расстоянием r от точки M и параметрами

$$u = \beta r, \quad v = \gamma r,$$

где β и γ — направляющие косинусы геодезической нормали MP. При произвольно заданной точке P трехгранник в точке P будет трехгранником Френе в точке M, перенесенным по принципу параллелизма вдоль MP.

Мы будем сравнивать линейные элементы ds^2 обоих пространств.

В *евклидовом* пространстве:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{M}} + u\vec{\mathbf{N}} + v\vec{\mathbf{B}},$$

$$d\vec{\mathbf{P}} = ds\vec{\mathbf{T}} + du\vec{\mathbf{N}} - \frac{u}{\rho} ds \cdot \vec{\mathbf{T}} + \frac{u}{\rho} ds \vec{\mathbf{B}} + dv\vec{\mathbf{B}} - \frac{v}{\tau} ds\vec{\mathbf{N}},$$

откуда

$$\overline{\omega}^1 = \left(1 - \frac{u}{\rho}\right) ds, \quad \overline{\omega}^2 = du - \frac{v}{\tau} ds, \quad \overline{\omega}^3 = dv + \frac{u}{\tau} ds,$$

$$\overline{\omega}_1^2 = \frac{ds}{\rho}, \quad \overline{\omega}_1^3 = 0, \quad \overline{\omega}_2^3 = \frac{ds}{\tau}.$$

В *римановом* пространстве положим

$$\omega^i = \overline{\omega}^i + \widetilde{\omega}^i,$$

$$\omega_i^j = \overline{\omega}_i^j + \widetilde{\omega}_i^j.$$

Когда перемещаемся вдоль линии MP,

$$ds = 0, \quad \frac{u}{v} = \text{const},$$

или

$$u\,dv - v\,du = 0,$$

и трехгранник перемещается параллельно самому себе ($\omega_i^j = 0$), но тогда имеем уже $\overline{\omega}_i^j = 0$ и потому должны иметь $\widetilde{\omega}_i^j = 0$. Следовательно, ω_i^j имеют вид

$$\omega_i^j = \overline{\omega}_i^j + A_i^j\,ds + B_i^j\,(u\,dv - v\,du).$$

Когда мы перемещаемся по линии MP, эта линия MP скользит сама по себе, и тангенциальные компоненты смещения все время равны нулю, а остальные пропорциональны инвариантным величинам β, γ или u, v:

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 &= 0, \\ \omega^2 &= \beta\,dr = du, \\ \omega^3 &= \gamma\,dr = dv, \end{aligned}\right\} \quad \text{вдоль линии } MP$$

или

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}^1 &= 0, \\ \overline{\omega}^2 &= du, \\ \overline{\omega}^3 &= dv. \end{aligned}\right\} \quad \text{вдоль линии } MP$$

Следовательно, можно написать

$$\omega^i = \overline{\omega}^i + A_i\,ds + B_i\,(u \cdot dv - v \cdot du).$$

Если положить $u = v = 0$, то $A_i = A_i^j = 0$, (мы остаемся на линии (C) и потому $\omega^i = \overline{\omega}^i$, $\omega_i^j = \overline{\omega}_i^j$). Величины A, B определяются последовательными приближениями. Для членов первого порядка имеем

$$d\omega_i^j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial u}[du\,ds] + \frac{\partial A_{ij}}{\partial v}[dv\,ds] + 2B_i^j[du\,dv] = [\omega_i^k\omega_k^j] + \Omega_i^j.$$

Полагаем $u=0$, $v=0$; тогда $[\omega_i^k\omega_k^j]=0$, и мы имеем

$$\Omega_i^j = R_{i12}^j[ds\,du] + R_{i13}^j[ds\,dv] + R_{i23}^j[du\,dv].$$

Следовательно,

$$A_{ij} = -\{R_{ij,\,12}u + R_{ij,\,13}v\},$$

$$B_i^j = \frac{1}{2}R_{i23}^j.$$

Аналогично для членов первого порядка в $d\omega^i$ имеем

$$d\overline{\omega}^i + \frac{\partial A_i}{\partial u}[du\,ds] + \frac{\partial A_i}{\partial v}[dv\,ds] + 2B_i[du\,dv] = [\omega^k\omega_k^i]$$

Для $u=0$, $v=0$ правая часть сводится к $[\overline{\omega}^k\overline{\omega}_k^i] = d\overline{\omega}^i$ и

$$\frac{\partial A_i}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial A_i}{\partial v}=0,\quad B_i=0.$$

Мы снова получаем высказанный выше результат.

Чтобы найти вид членов первой степени малости в разложении $d\omega^i$, полагаем

$$A_1 = \frac{1}{2}(R_{12,\,12}u^2 + 2R_{12,\,13}uv + R_{13,\,13}v^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(R_{23,\,12}uv + R_{23,\,13}v^2),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(R_{23,\,12}u^2 + R_{23,\,13}uv),$$

$$B_1 = -\frac{1}{6}(R_{23,\,12}u + R_{23,\,13}v),$$

$$B_2 = \frac{1}{6}R_{23,\,23}v,$$

$$B_3 = \frac{1}{6}R_{23,\,13}u,$$

Откуда

$$ds^2 = \overline{ds}^2 + (R_{12,\,12}u^2 + 2R_{12,\,13}uv + R_{13,\,13}v^2)\,ds^2 -$$

$$-\frac{4}{3}(R_{12,\,23}u + R_{13,\,23}v)\,ds\,(u\,dv - v\,du) + \frac{1}{3}R_{23,\,23}(u\,dv - v\,du)^2.$$

Замечательно, что дополнительные члены не вводят основных инвариантов δ, τ линии (C).

Эта формула обобщает формулу Римана, дающую ds^2 в нормальных координатах $(\alpha r,\ \beta r,\ \gamma r)$.

ГЛАВА XXIII

ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

138. Первые два уравнения структуры и их геометрический смысл.

138. Первые два уравнения структуры и их геометрический смысл. Примем вектор $\vec{I}_3$ за нормаль к поверхности; тогда на поверхности

$$\omega^3 = 0.$$

Первые уравнения структуры принимают вид

$$\left.\begin{aligned} d\omega^1 &= [\omega^2\omega_2^1], \\ d\omega^2 &= [\omega^1\omega_1^2], \\ 0 &= [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3]. \end{aligned}\right\} \qquad (23.\ 1)$$

Геометрический смысл двух первых уравнений следующий: если рассматривать поверхность как двумерное риманово пространство, то формы ω_i^j этого пространства те же самые, что и объемлющего риманова пространства трех измерений.

Отсюда следует, что *геометрическая вариация $D\vec{X}$ вектора $\vec{X}$, касательного к поверхности, равна тангенциальной компоненте геометрической вариации этого вектора, рассматриваемого как вектор объемлющего пространства.*

Если геометрическая вариация в объемлющем пространстве нормальна к поверхности, то вектор $\vec{X}$ *перемещается по поверхности параллельно самому себе*. Таким образом, получаем новое определение параллельного переноса.

Предположим, в частности, объемлющее пространство евклидовым. Тогда строим вектор $\vec{X}'$ эквиполентным к вектору $\vec{X}$ в евклидовом смысле и проектируем его на касательную плоскость в точке M'. Это точка зрения Леви-Чивита.

139. Третье уравнение структуры. Инвариантные формы (обыкновенные и внешние). Рассмотрим теперь третье уравнение (23.1), оно влечет по лемме Картана линейные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^3 &= a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2, \\ \omega_2^3 &= a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{23. 2}$$

То, что ω_1^3 и ω_2^3 являются линейными комбинациями форм ω^1, ω^2, вытекает из деривационной формулы

$$D\vec{\mathrm{I}}_3 = \omega_3^1\vec{\mathrm{I}}_1 + \omega_3^2\vec{\mathrm{I}}_2;$$

она обращается в нуль, если точка M фиксирована, т. е. $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ имеют следствием $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^3 = 0$; но, кроме того, мы видим, что тензор (a_{ik}) симметричен.

Мы заключаем, что (a_{ik}) является тензором, замечая, что квадратичная форма

$$\varphi = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$$

имеет внутреннее значение:

$$\varphi = -d\vec{\mathrm{M}}\cdot D\vec{\mathrm{I}}_3.$$

Это вторая основная форма Гаусса (*Gauss*).

Кроме этих двух основных форм

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2,$$
$$\varphi = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3,$$

рассматривают еще *две обыкновенные квадратичные формы*:

$$d\sigma^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2 —$$

линейный элемент сферического изображения;

$$\psi = \begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 \end{vmatrix} —$$

якобиан форм φ *и* ds^2 (площадь параллелограмма со сторонами $\overrightarrow{dM}$, $\overrightarrow{DI_3}$) и *внешние квадратичные формы*:

$[\omega^1\omega^2]$ — *элемент площади поверхности*
$[\omega_1^3\omega_2^3]$ — *элемент площади сферического изображения;*
$[\omega^1\omega_2^3]$ — $[\omega^2\omega_1^3]$.

140. Вторая квадратичная форма поверхности. Мы возвращаемся к форме φ. Чтобы выяснить ее геометрический смысл, заметим, что (ω^1, ω^2) определяет смещение ds по некоторой линии поверхности.

Примем для этой линии касательный вектор $\vec{T}$ за первый базисный вектор $\vec{I}_1$

$$\vec{T} = \vec{I}_1;$$

тогда

$$\omega^1 = ds, \quad \omega^2 = 0$$

и

$$\varphi = a_{11}\, ds^2.$$

Имеем

$$\frac{D\vec{T}}{ds} = \frac{D\vec{I}_1}{ds} = \frac{\omega_1^2\vec{I}_2 + \omega_1^3\vec{I}_3}{ds} = \frac{\omega_1^2}{ds}\vec{I}_2 + \frac{a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2}{ds}\vec{I}_3,$$

т. е.

$$\frac{D\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N} = \frac{\omega_1^2}{ds}\vec{I}_2 + a_{11}\vec{I}_3.$$

Следовательно, a_{11} есть проекция на нормаль к поверхности $\vec{I}_3$ вектора кривизны кривой $\frac{1}{\rho}\vec{N}$: это *нормальная кривизна* $\frac{1}{\rho_n}$. Таким образом,

$$\varphi = \frac{ds^2}{\rho_n}.$$

Число

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\varphi}{ds^2} = \frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}$$

зависит только от отношения $\omega^2 : \omega^1$, т. е. от выбора касательной, и не зависит от выбранной индивидуально кривой.

Отсюда теорема Менье (*Meusnier*).

Все линии на поверхности, касающиеся в одной точке одной и той же прямой, имеют одну и ту же нормальную кривизну.

Замечание. Можно провести вычисление в общем случае. Обозначая угол векторов $\vec{I}_1$ и $\vec{T}$ буквой θ, имеем

$$\vec{T} = \vec{I}_1 \cos\theta + \vec{I}_2 \sin\theta.$$

Следовательно,

$$\omega^1 = \cos\theta\, ds, \quad \omega^2 = \sin\theta\, ds. \tag{23.3}$$

Нормальная составляющая вектора $D\vec{T}$, умноженная на ds, будет

$$\frac{ds^2}{\rho_n}\vec{I}_3 = \{\cos\theta\cdot\omega_1^3 + \sin\theta\cdot\omega_2^3\}\,\vec{I}_3\, ds = (\omega_1^3\omega^1 + \omega_2^3\omega^2)\,\vec{I}_3.$$

Будем обозначать $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ и называть *главными кривизнами* те кривизны, которые соответствуют осям, для которых вторая квадратичная форма принимает вид суммы квадратов *

$$\varphi = \frac{(\omega^1)^2}{R_1} + \frac{(\omega^2)^2}{R_2}. \tag{23.4}$$

Линии, соответствующие этим *главным направлениям* ($\omega^2 = 0$; $\omega^1 = 1$ или $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 1$), называются *линиями кривизны*.

Чтобы определить главные направления, достаточно выразить, что они соответствуют экстремумам нормальной кривизны

$$\frac{\varphi}{ds^2} = \frac{a_{11}(\omega^1)^2 + 2a_{12}\omega^1\omega^2 + a_{22}(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}.$$

---

* Как известно, квадратичную форму φ всегда можно привести к сумме или разности квадратов

$$\varphi = a_{11}(\omega^1)^2 + a_{22}(\omega^2)^2.$$

Мы обозначаем $a_{11} = \frac{1}{R_1}$, $a_{22} = \frac{1}{R_2}$.

Дифференцируя по ω^1 и по ω^2, получим по сокращении на $\frac{2}{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2}$:

$$a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 - \omega^1 \frac{\varphi}{ds^2} = 0,$$

$$a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2 - \omega^2 \frac{\varphi}{ds^2} = 0,$$

откуда, по исключении φ, получим по формулам (23.2)

$$\frac{\omega^1}{\omega_1^3} = \frac{\omega^2}{\omega_2^3},$$

или, вводя новую форму

$$\psi = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = \\ = a_{12}(\omega^1)^2 + (a_{22} - a_{11})\,\omega^1\omega^2 - a_{12}(\omega^2)^2, \qquad (23.5)$$

получим для определения главных направлений уравнение

$$\psi = 0.$$

Можно еще определить линии кривизны следующим образом: если рассматривать нормаль к точке M поверхности, то соседняя точка M' принадлежит линии кривизны, если нормаль в точке M' пересекает нормаль в точке M.

Надо, следовательно, выразить требование, чтобы геометрическая вариация нормали принадлежала плоскому элементу, определяемому двумя нормалями; поскольку эта вариация перпендикулярна к единичному вектору нормали, надо выразить, что она параллельна смещению MM':

$$\frac{\omega^1}{\omega_1^3} = \frac{\omega^2}{\omega_2^3},$$

что и требовалось доказать.

141. Асимптотические линии. Теорема Эйлера. Полная и средняя кривизна поверхности. *Асимптотическими* называются линии, *у которых нормальная кривизна равна нулю*, т. е. у которых соприкасающаяся плоскость является касательной плоскостью к поверхности. Они определяются уравнением

$$\varphi = 0.$$

Если

$$\varphi = \frac{(\omega^1)^2}{R_1} + \frac{(\omega^2)^2}{R_2},$$

то

$$\psi = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\omega^1\omega^2. \qquad (23.6)$$

Отсюда следует, что асимптотические касательные одинаково наклонены к главным касательным.

Теорема Эйлера. *Сумма нормальных кривизн двух ортогональных направлений постоянна.*

Это вытекает из равенства

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2},$$

которое получается делением обеих частей равенства (23.4) на ds^2, имея в виду формулы (23.3).

Эта постоянная будет *средней кривизной* поверхности

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Вообще

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = a_{11} + a_{22}. \qquad (23.7)$$

Полной кривизной называется

$$\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2. \qquad (23.8)$$

Это будут соответственно свернутый тензор (a_{ij}) и определитель тензора (a_{ij}).

142. Сопряженные касательные. Пусть $\vec{T}$ — вектор касательной в точке M к линии (C) поверхности, $\vec{T}'$ — характеристика огибающей касательных плоскостей к поверхности вдоль линии (C) (евклидово пространство). Пусть d — символ дифференцирования в направлении $\vec{T}$, δ — в направлении $\vec{T}'$.

Для обобщения мы будем определять направление $\vec{T}'$ как перпендикулярное к двум бесконечно близким нормалям поверхности в бесконечно близких точках M и M' линии (C). Будучи нормален к $\vec{I}_3$, вектор $\vec{T}'$ будет линейной комбинацией форм $\omega^1(\delta)$, $\omega^2(\delta)$: в то же время он нормален к вектору

$$D\vec{I}_3 = \omega_3^1(d)\vec{I}_1 + \omega_3^2(d)\vec{I}_2;$$

следовательно,

$$\omega^1(\delta)\,\omega_1^3(d) + \omega^2(\delta)\,\omega^2(d) = 0,$$

или

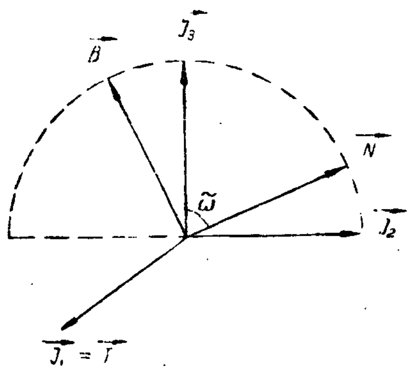
$$a_{11}\omega^1(d)\,\omega^1(\delta) + a_{12}\{\omega^2(d)\,\omega^1(\delta) + \omega^1(d)\,\omega^2(\delta)\} + \\ + a_{22}\omega^2(d)\,\omega^2(\delta) = 0.$$

Две сопряженные касательные гармонически разделяют направления асимптотических касательных.

143. Геометрический смысл формы ψ. Подсчитаем форму $\frac{\psi}{ds^2}$ для $\vec{T} = \vec{I}_1$; в силу того что теперь $\omega^2 = 0$, имеем по формуле (23.5)

$$\frac{\psi}{ds^2} = a_{12};$$

этот результат не зависит от выбранной кривой.



Фиг. 18

Пусть $\tilde{\omega}$ — угол, на который надо повернуть в положительном направлении вокруг касательной $\vec{T}$ вектор главной нормали, чтобы он совпал с нормалью к поверхности (фиг. 18). Тогда

$$(\widehat{\vec{I}_3, \vec{B}}) = \frac{\pi}{2} - \tilde{\omega}.$$

Имеем с помощью (23.2)

$$\omega_2^3 = \vec{\mathbf{I}}_3 \quad D\vec{\mathbf{I}}_2 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2,$$

но

$$\vec{\mathbf{I}}_2 = \vec{\mathbf{N}}\cdot\sin\tilde{\omega} - \vec{\mathbf{B}}\cdot\cos\tilde{\omega},$$

$$\vec{\mathbf{I}}_3 = \vec{\mathbf{N}}\cdot\cos\tilde{\omega} + \vec{\mathbf{B}}\cdot\sin\tilde{\omega}$$

и

$$\frac{D\vec{\mathbf{I}}_2}{ds} = \vec{\mathbf{I}}_3\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \sin\tilde{\omega}\left(-\frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{I}}_1 + \frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{B}}\right) + \cos\tilde{\omega}\cdot\frac{1}{\tau}\vec{\mathbf{N}} =$$

$$= \vec{\mathbf{I}}_3\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}(\vec{\mathbf{N}}\cos\tilde{\omega} + \vec{\mathbf{B}}\sin\tilde{\omega}) - \frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}\vec{\mathbf{I}}_1 =$$

$$= \vec{\mathbf{I}}_3\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) - \frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}\tilde{\mathbf{I}}_1$$

Следовательно,

$$\psi = ds^2\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right).$$

Сумма $\frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{\tau}$ называется *геодезическим кручением.*

Следствие. *Все линии на поверхности, имеющие одну и ту же касательную в общей точке, имеют в этой точке одно и то же геодезическое кручение.*

144. Геодезические линии на поверхности. Геодезическое кручение. Теорема Эннепера. Это будут геодезические линии двумерного риманова пространства; они характеризуются условием

$$D_t\vec{\mathbf{T}} = 0;$$

Но $D_t\vec{\mathbf{T}}$ является проекцией вектора $D\vec{\mathbf{T}}$ на касательную плоскость. Следовательно, $D\vec{\mathbf{T}}$ будет совпадать с нормалью к поверхности или, еще можно сказать: главная нормаль служит нормалью к поверхности.

Геодезической кривизной называют кривизну линии, подсчитанную в двумерном пространстве.

Возьмем

$$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{I}}_1;$$

тогда имеем

$$D\vec{\mathbf{I}}_1 = \overset{2}{\omega_1}\vec{\mathbf{I}}_2 + \overset{3}{\omega_1}\vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$D_t\vec{\mathbf{I}}_1 = \overset{2}{\omega_1}\vec{\mathbf{I}}_2,$$

или, полагая

$$\omega_1^2 = h_1\omega^1 + h_2\omega^2,$$

получим

$$\frac{D_t\vec{\mathbf{I}}_1}{ds} = h_1\vec{\mathbf{I}}_2.$$

Следовательно, геодезическая кривизна $\frac{1}{\rho_g}$ равна

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}.$$

Теорема Гаусса. *Геодезическая кривизна зависит только от линейного элемента ds^2 поверхности.*

Эта теорема непосредственно следует из того, что формы ω_i^j зависят лишь от линейного элемента. Геодезическая линия соответствует нулевой геодезической кривизне

$$\frac{1}{\rho_g} = 0.$$

Отсюда угол главной нормали с нормалью к поверхности $\tilde{\omega}$ равен нулю или π.

Геодезическая линия среди семейства касающихся линий в общей точке определяет нормальную кривизну $\frac{1}{\rho_n}$ и геодезическое кручение $\frac{1}{\tau_g}$, общие у всех линий этого семейства.

Действительно, вообще

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho},$$

так что для геодезической

$$\frac{1}{\rho_n}=\frac{1}{\rho},\quad \frac{1}{\tau_g}=\frac{1}{\tau}.$$

Это послужило основанием названия *«геодезическое кручение»*. Лучше было бы сказать *«нормальное кручение»*, потому что это как раз соответствует нормальной кривизне.

Пользуясь выражением (23.6) для формы ψ, мы получим

$$\frac{1}{\tau_g}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta. \tag{23.7}$$

Следовательно, *линии кривизны имеют нулевое геодезическое кручение.*

Поскольку для асимптотических линий $\tilde{\omega}=\frac{\pi}{2}$, геодезическое кручение совпадает с полным кручением (обычным), как вообще для всех линий с постоянным углом $\tilde{\omega}$. Имеем

$$\frac{1}{\tau}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta$$

с условием

$$\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\cos^2\theta}{R_1}=-\frac{\sin^2\theta}{R_2}=\frac{1}{R_1-R_2}.$$

Две асимптотические линии в общей точке имеют кручения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. Квадрат кручения равен

$$\frac{1}{\tau^2}=\left(\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}\right)^2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{(R_1-R_2)}{R_1R_2}\,\frac{\sin^2\theta}{R_2}\,\frac{\cos^2\theta}{R_1}=-\frac{1}{R_1R_2}.$$

Отсюда произведение кручений $\frac{1}{\tau_1}$, $\frac{1}{\tau_2}$ двух асимптотических в общей точке поверхности в силу $\frac{1}{\tau_2}=-\frac{1}{\tau_1}$, будет

$$\frac{1}{\tau_1}\,\frac{1}{\tau_2}=\frac{1}{R_1R_2},$$

т. е. *произведение кручений двух асимптотических линий в общей* *точке равно гауссовой кривизне поверхности в этой точке* (теорема Эннепера).

Две кривые, касательные к которым в точке их пересечения взаимно-перпендикулярны, имеют геодезические кручения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, ибо по формуле (23.7) геодезические кручения их будут отличаться только знаком, поскольку

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta\sin\theta,$$

То же самое имеет место для двух кривых, касательные к которым симметричны относительно главных направлений, ибо, поскольку в формуле (23.7) главные направления соответствуют значениям $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$, касательные, симметричные к ним, отличаются только знаком $\theta'=-\theta$, и, следовательно, опять

$$\sin\theta'\cos\theta'=-\sin\theta\cos\theta.$$

ГЛАВА XXIV

ФОРМЫ ЛАГЕРРА И ДАРБУ

145. Форма Лагерра. (*Laguerre*). Можно построить другие функции, которые, подобно нормальной кривизне $\frac{1}{\rho_n}$ и геодезическому кручению $\frac{1}{\tau_g}$, принадлежат одновременно всем кривым, касающимся друг друга в точке поверхности.

Рассмотрим с этой целью тензор, производный для тензора (a_{ij}):

$$\left.\begin{aligned} Da_{11} &= a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2, \\ Da_{12} &= a_{121}\omega^1 + a_{122}\omega^2, \\ Da_{22} &= a_{221}\omega^1 + a_{222}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{24. 1}$$

Форма Лагерра будет

$$\chi = (\omega^1)^2\, Da_{11} + 2\omega^1\omega^2 Da_{12} + (\omega^2)^2\, Da_{22}. \tag{24. 2}$$

Это тензорная форма третьей степени, так что отношение

$$\frac{\chi}{ds^3} = \frac{a_{111}(\omega^1)^3 + (a_{112} + 2a_{121})(\omega^1)^2\omega^2 + (2a_{122} + a_{221})\,\omega^1(\omega^2)^2 + a_{222}(\omega^2)^3}{ds^3},$$

допускает интерпретацию, аналогичную той, которую имеет $\frac{\varphi}{ds^2}$ и $\frac{\psi}{ds^2}$.

Примем опять

$$\vec{T} = \vec{I}_1, \tag{24. 3}$$

тогда

$$\chi = a_{111}(\omega^1)^3 = a_{111}\, ds^3.$$

Между тем по общей формуле абсолютного дифференцирования

$$Da_{ij} = da_{ij} + a_{kj}\omega_i^k + a_{ik}\omega_j^k$$

и, в частности,

$$Da_{11} = da_{11} + 2a_{12}\omega_1^2. \tag{24.4}$$

Следовательно, согласно (24.1), (24.2)

$$a_{111} \equiv \frac{da_{11}}{ds} - 2a_{12}\frac{\omega_{12}}{ds} \; (mod\; \omega^2).$$

Но при нашем отнесении (24.3)

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}, \\ \frac{\omega_{12}}{ds} &\equiv \frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho} \quad (mod\; \omega^2), \\ a_{12} &= \frac{\psi}{ds^2} = \frac{1}{\tau_g} = \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{24.5}$$

Следовательно,

$$\frac{\chi}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}\right) - 2\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right)\cdot\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}. \tag{24.6}$$

Эта формула, справедливая для отнесения (24.3), инвариантна относительно выбора репера и, следовательно, сохраняет свое значение для любого репера и для всех линий с общей касательной. Для геодезических линий этого семейства она имеет очень простое значение

$$\frac{\chi}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{24.7}$$

146. Форма Дарбу. Так называется якобиан форм χ и ds^2

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial(ds^2)}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial(ds^2)}{\partial\omega^2} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial\chi}{\partial\omega^2} \end{vmatrix} = \omega^1\frac{\partial\chi}{\partial\omega^2} - \omega^2\frac{\partial\chi}{\partial\omega^1}. \tag{24.8}$$

Если воспользоваться формулой (24.2), то можно заметить, что при $\omega^2 = 0$ все сводится к интерпретации суммы

$$a_{112} + 2a_{121}.$$

Тензор a_{ijk} будет симметричным, как легко видеть, только в евклидовом пространстве. Это усложняет подсчет, но метод остается тот же.

Для асимптотической линии $\left(\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}\right)$ форма Лагерра (24.6) принимает вид

$$-\frac{2}{\tau\rho}.$$

Форма Лагерра содержит только четыре коэффициента из шести компонент тензора (a_{ijk}). Следовательно, можно образовать новые инварианты; таким инвариантом будет вектор с компонентами

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_{121} - a_{112}, \\ b_2 &= a_{221} - a_{212}. \end{aligned}\right\} \tag{24. 9}$$

Действительно, свертывая тензор a_{ijk} с векторами X^i, Y^j, Z^k, получаем инварианты

$$a_{ijk}X^iY^jZ^k, \quad a_{ijk}X^iZ^jY^k,$$

их разность

$$a_{ijk}X^i\,(Y^jZ^k - Y^kZ^j)$$

будет тоже инвариантом.

Между тем, собирая члены для i, j, $k = 1, 2$, получим

$$(Y^1Z^2 - Y^2Z^1)\;(b_1X^1 + b_2X^2)$$

Первый множитель — бивектор, а второй — инвариантный вектор.

Можно получить этот вектор и менее абстрактным способом.

Рассмотрим малый цикл (C) на поверхности и интеграл по этому контуру

$$-\int\limits_C D\mathbf{I}_3 = \int\limits_C (\omega_1^3\mathbf{I}_1 + \omega_2^3\mathbf{I}_2) = \int\limits_C (a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2)\,\vec{\mathbf{I}}_1 + \int\limits_C (a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2)\,\vec{\mathbf{I}}_2.$$

Дифференцируя внешним образом подынтегральную форму, получим

$$[d\vec{I}_1, a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2] + \vec{I}_1 \{[da_{11}\omega^1] + [da_{12}\omega^2] + a_{11}\, d\omega^1 + a_{12}\, d\omega^2\} +$$

$$+ [d\vec{I}_2, a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2] + \vec{I}_2 \{[da_{12}\omega^1] + [da_{22}\omega^2] + a_{12}\, d\omega^1 + a_{22}\, d\omega^2\}$$

или в силу формул (24.1), (24.4), которые дают

$$da_{11} = 2a_{12}\omega_1^2 + a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2,$$

$$da_{12} = (a_{22} - a_{11})\,\omega_1^2 + a_{121}\omega^1 + a_{122}\omega^2,$$

$$da_{22} = -\,2a_{12}\omega_1^2 + a_{221}\omega^1 + a_{222}\omega^2,$$

получим после приведения подобных членов

$$\vec{I}_1 (a_{121} - a_{112})\,[\omega^1\omega^2] + \vec{I}_2 (a_{221} - a_{122})\,[\omega^1\omega^2]$$

и окончательно

$$-\int_C D\vec{I}_3 = \iint_S (b^1\vec{I}_1 + b^2\vec{I}_2)\,[\omega^1\omega^2], \tag{24.10}$$

где S — область поверхности, ограниченная циклом (C).

147. Риманова кривизна объемлющего пространства. Мы дошли теперь до того места в развитии теории поверхностей в римановом пространстве, когда необходимо ввести риманову кривизну объемлющего пространства. Для этого нам надо будет к трем уравнениям структуры (23.1) добавить еще три последних уравнения структуры

$$d\omega_1^2 = [\omega_1^3\omega_3^2] + R_{12,\,12}[\omega^1\omega^2], \tag{24.11}$$

$$\left.\begin{aligned} d\omega_1^3 &= [\omega_1^2\omega_2^3] + R_{13,\,12}[\omega^1\omega^2], \\ d\omega_2^3 &= [\omega_2^1\omega_1^3] + R_{23,\,12}[\omega^1\omega^2]. \end{aligned}\right\} \tag{24.12}$$

Левая часть первого уравнения определяет риманову кривизну поверхности, рассматриваемой как двумерное риманово пространство. Мы обозначим

$$d\omega_1^2 = -K_i\,[\omega^1\omega^2] \tag{24.13}$$

и будем называть скаляр K_i *внутренней римановой кривизной* поверхности.

В противоположность внутренней кривизне мы имеем *внешнюю кривизну* K_e

$$R_{12,\,12} = -K_e. \qquad (24.14)$$

Это кривизна объемлющего риманова пространства в направлении касательной плоскости поверхности. Наконец, средний член уравнения (24.11)

$$[\omega_1^3 \omega_3^2] = -[a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2,\ a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2] =$$

$$= -\{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\}[\omega^1\omega^2] = -\frac{1}{R_1R_2}[\omega^1\omega^2].$$

Здесь $\frac{1}{R_1R_2}$ — произведение главных кривизн — называется *эйлеровой кривизной*. Таким образом, уравнение (24.11) принимает вид

$$-K_i[\omega^1\omega^2] = -\frac{1}{R_1R_2}[\omega^1\omega^2] + R_{12,\,12}[\omega^1\omega^2],$$

или в силу (24.14)

$$K_i = \frac{1}{R_1R_2} + K_e. \qquad (24.15)$$

Внутренняя кривизна поверхности равняется сумме внешней и эйлеровой кривизн.

Замечание 1. Рассмотрим наблюдателя, не покидающего поверхности; он знает внутреннюю кривизну поверхности, потому что знает форму ω_1^2, определяющую вращение репера около нормали. Он знает эйлерову кривизну, потому что может измерить наибольшую и наименьшую кривизну нормального сечения поверхности. Следовательно, он может вычислить внешнюю кривизну

$$K_e = -R_{12,\,12},$$

т. е. ему известна одна компонента кривизны объемлющего пространства.

Замечание 2. С точки зрения исторической все было иначе. Изучались поверхности, погруженные в евклидово пространство, т. е. те, для которых

$$K_e = 0.$$

Отсюда теорема Гаусса: *полная кривизна* $\frac{1}{R_1R_2}$ *зависит только от линейного элемента* ds^2 *поверхности.*

148. Вторая группа структурных уравнений. Перейдем к уравнениям (24.12).

Тензор с компонентами (ω_1^3, ω_2^3) есть вектор. Абсолютный внешний дифференциал его имеет компоненты.

$$R_{13,\,12}\,[\omega^1\omega^2],\quad R_{23,\,12}\,[\omega^1\omega^2].$$

Следовательно,

$$\int\limits_C (\omega_1^3\vec{\mathbf{I}}_1 + \omega_2^3\vec{\mathbf{I}}_2) = \iint\limits_S (R_{13,\,12}\vec{\mathbf{I}}_1 + R_{23,\,12}\vec{\mathbf{I}}_2)\,[\omega^1\omega^2],$$

откуда, сравнивая с уравнением (24.10), получаем

$$b_1 = R_{13,\,12},\quad b_2 = R_{23,\,12}. \tag{24.16}$$

Следовательно, наблюдатель, находящийся на поверхности, может измерить не только компоненту $R_{12,\,12}$ римановой кривизны объемлющего пространства, но и еще две компоненты

$$R_{13,\,12},\quad R_{23,\,12},$$

т. е. всего три компоненты из шести компонент тензора кривизны.

Вращение, присоединенное к циклу на поверхности, определяется компонентами

$$p = -b_2,\quad q = b_1,\quad r = -R_{12,\,12}.$$

Оно зависит только от величин, доступных наблюдателю на поверхности; вектор (b_1, b_2) перпендикулярен к вектору (p, q); имеем $r = K_t - \dfrac{1}{R_1R_2}$.

149. Обобщение классических теорем о нормальной кривизне и геодезическом кручении. Мы видели, что классические теоремы относительно нормальной кривизны и геодезического кручения двух кривых, касающихся друг друга в точке поверхности,—теоремы, вытекающие по существу из тензорного характера коэффициентов a_{ij} второй квадратичной формы поверхности,—допускают обобщения, если рассматривать производные тензоры от тензора a_{ij}. В пп. 145, 146 мы рассматривали первый производный тензор a_{ijk}, определяемый уравнениями (24.1), (24.4)

$$\left.\begin{aligned} Da_{11} &= da_{11} - 2a_{12}\omega_1^2 = a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2,\\ Da_{12} = Da_{21} &= da_{12} + (a_{11} - a_{22})\,\omega_1^2 = a_{121}\omega^1 + a_{122}\omega^2 =\\ &= a_{211}\omega^1 + a_{212}\omega^2,\\ Da_{22} &= da_{22} + 2a_{12}\omega_1^2 = a_{221}\omega^1 + a_{222}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{24.17}$$

Формула (24.6) при $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = 0$ дает геометрический смысл компоненту

$$a_{111} = \frac{d\frac{1}{\rho_n}}{ds} - \frac{2}{\tau_g}\frac{1}{\rho_g}; \tag{24.18}$$

второе уравнение (24.17) с помощью (24.5) дает

$$a_{121} = a_{211} = \frac{da_{12}}{ds} + (a_{11} - a_{22})\frac{\omega_{12}}{ds} = \frac{d\frac{1}{\tau_g}}{ds} + \left(\frac{2}{\rho_n} - L\right)\frac{1}{\rho_g}, \tag{24.19}$$

где

$$L = a_{11} + a_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \tag{24.20}$$

средняя кривизна поверхности.

Наконец, уравнения (24.9) и (24.16) дают

$$a_{112} - a_{121} = K_{13},$$

$$a_{212} - a_{221} = K_{23},$$

где для краткости обозначены

$$K_{13} = -R_{13,\,12}, \quad K_{23} = -R_{23,\,12}.$$

Аналогично, второй производный тензор от тензора (a_{ij}) будет

$$Da_{111} = da_{111} - (a_{211} + a_{121} + a_{112})\,\omega_1^2 = a_{1111}\omega^1 + a_{1112}\omega^2,$$

$$Da_{121} = da_{121} - (a_{122} + a_{221} - a_{111})\,\omega_1^2 = a_{1211}\omega^1 + a_{1212}\omega^2$$

Отсюда для линии $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = 0$ имеем

$$a_{1111} = \frac{da_{111}}{ds} - (3a_{121} + K_{13})\frac{1}{\rho_g},$$

$$a_{1211} = \frac{da_{121}}{ds} - (2a_{221} - a_{111} + K_{23})\frac{1}{\rho_g},$$

или, заменяя

$$a_{221} = \frac{d}{ds}(a_{11} + a_{22}) - a_{111} = \frac{dL}{ds} - a_{111},$$

поскольку сумма первого и последнего уравнений (24.17) дает

$$\frac{d}{ds}(a_{11}+a_{22}) = (a_{111}+a_{221})\,\omega^1 + (a_{112}+a_{222})\,\omega^2,$$

и используя уравнения (24.18), (24.19), получим для $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = 0$

$$a_{1111} = \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho_n}\right)}{ds^2} - \frac{2}{\tau_g}\frac{\left(d\frac{1}{\rho_g}\right)}{ds} - \frac{1}{\rho_g}\left\{5\frac{\left(d\frac{1}{\tau_g}\right)}{ds} + K_{13}\right\} - $$

$$-\frac{3}{\rho_g^2}\left(\frac{2}{\rho_n} - L\right), \qquad (24.21)$$

$$a_{1211} = \frac{d^2\left(\frac{1}{\tau_g}\right)}{ds^2} + \left(\frac{2}{\rho_n} - L\right)\frac{d\left(\frac{1}{\rho_g}\right)}{ds} + \frac{1}{\rho_g}\left\{5\frac{d\left(\frac{1}{\rho_n}\right)}{ds} - \frac{6}{\tau_g}\frac{1}{\rho_g} - \right.$$

$$\left. - 3\frac{dL}{ds} - K_{23}\right\}. \qquad (24.22)$$

Отсюда теорема.

Если рассматривать в точке M поверхности, погруженной в трехмерное риманово пространство, различные линии (C) на поверхности с общей касательной в этой точке, то все эти линии будут иметь в этой точке одни и те же: нормальную кривизну, геодезическое кручение и еще 4 величины (24.18), (24.19), (24.20), (24.22).

Здесь $\frac{1}{\rho_n}$, $\frac{1}{\rho_g}$, $\frac{1}{\tau_g}$ — нормальная и геодезическая кривизны и геодезическое кручение; L — средняя кривизна поверхности (сумма главных кривизн), K_{23}— смешанная риманова кривизна в точке M объемлющего пространства для двух плоских элементов касательных к линиям (C): одного — касательного к поверхности, другого нормального к ней; наконец, K_{13}— смешанная риманова кривизна для плоских элементов, одного касательного к поверхности и другого нормального к линиям (C).

Величины K_{13}, K_{23} обращаются в нуль, если риманово пространство постоянной кривизны или если нормаль к поверхности совпадает с главным направлением объемлющего пространства.

В евклидовом пространстве $b_1 = b_2 = 0$ и тензор a_{ijk} симметричен. То же заключение имеет место в пространстве постоянной кривизны.

150. Поверхности с заданным линейным элементом в евклидовом пространстве. *Найдем все поверхности, обладающие заданным линейным элементом ds^2 в евклидовом пространстве.*

Мы знаем формы ω^1, ω^2, получаемые разложением квадратичной формы ds^2 в сумму квадратов; отсюда с помощью двух первых уравнений (23.1) находим форму ω_1^2 и внутреннюю кривизну $K_i(K_e=0)$. В этом двумерном римановом пространстве надо построить допустимый для данного линейного элемента тензор (a_{ij}). Он должен удовлетворять условиям (24.11), (24.9), а именно

$$a_{11}a_{22}-(a_{12})^2=K_i,$$

$$a_{121}-a_{112}=0,$$

$$a_{221}-a_{212}=0;$$

всего три уравнения с тремя неизвестными a_{11}, a_{12}, a_{22}, из которых одно уравнение конечное и два уравнения в частных производных первого порядка.

Обратно, допустим, что известно решение этой системы. Присоединим к каждой точке наиболее общий ортонормированный трехгранник, определяемый шестью параметрами u_i с компонентами инфинитезимальных смещений $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$ в функциях параметров u_i.

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{\omega}^1=\omega^1, & \overline{\omega}_1^2=\omega_1^2, \\ \overline{\omega}^2=\omega^2, & \overline{\omega}_1^3=\omega_1^3, \\ \overline{\omega}^3=0, & \overline{\omega}_2^3=\omega_2^3, \end{array}\right\} \qquad (24.23)$$

где формы ω_1^3, ω_2^3 построены на формах ω^1, ω^2 с коэффициентами a_{ij} из полученного решения.

Система (24.23) вполне интегрируема, ибо уравнения, полученные внешним дифференцированием системы (24.23), будут следствием самой системы, поскольку формы ω^i, ω_i^j так же, как $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$, удовлетворяют одним и тем же уравнениям структуры евклидова пространства.

Рассуждения остаются теми же и в пространстве постоянной кривизны.

Уравнения (24.12) будут уравнениями Петерсона — Кодацци.

151. Задачи на форму Лагерра. З а д а ч а 1. *Существуют ли линии, удовлетворяющие одновременно уравнениям*

$$\varphi=0, \quad \chi=0?$$

Поскольку они обращают в нуль вторую квадратичную форму φ, они должны быть асимптотическими; следовательно,

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

и по формуле (24.6)

$$\frac{\chi}{ds^2} = -\frac{2}{\rho\tau}.$$

Возможны два случая.

1°. $\frac{1}{\rho} = 0$. Кривизна равна нулю. Асимптотическая линия поверхности будет геодезической линией пространства («прямой»).

2°. $\frac{1}{\tau} = 0$. Асимптотическая линия имеет кручение, равное нулю. В силу теоремы Эннепера (п. 144) полная кривизна поверхности K_i равна нулю. Значит, асимптотическая линия сдвоенная.

Если это имеет место для семейства кривых (формы φ и χ имеют общий линейный множитель), то в первом случае 1° будет линейчатая поверхность, во втором случае 2° поверхность имеет только одно семейство асимптотических (развертывающаяся поверхность).

Рассмотрим этот последний случай. Выберем за вектор $\vec{I}_1$ касательный вектор асимптотической линии, поскольку теперь эта линия будет вместе с тем линией кривизны, то

$$a_{11} = 0, \ a_{12} = 0, \ a_{111} = 0, \tag{24.24}$$

между тем по формулам (24.17)

$$da_{11} + 2a_{12}\omega_2^1 = a_{111}\omega^1 + a_{112}\omega^2, \tag{24.25}$$

$$da_{12} + (a_{22} - a_{11})\,\omega_2^1 = a_{121}\omega^1 + a_{122}\omega^2. \tag{24.26}$$

Внося в уравнение (24.25) значения (24.24), получим

$$a_{112} = 0.$$

Если мы находимся в пространстве постоянной кривизны, то

$$a_{121} = a_{112} = 0.$$

Следовательно, вдоль асимптотической $\omega^2 = 0$ имеем в силу (24.26)

$$a_{22}\omega_2^1 = 0,$$

а при наших условиях коэффициент a_{22} не может равняться нулю, если поверхность не вырождается в плоскость. Следовательно, вдоль асимптотической

$$\omega_2^1 = 0,$$

т. е. равна нулю геодезическая кривизна, а поскольку нормальная кривизна уже равна нулю, то $\frac{1}{\rho} = 0$, и линия — геодезическая. Таким образом, в пространстве постоянной кривизны всякая развертывающаяся поверхность — линейчатая. Это заключение не имеет места в общем случае: можно найти развертывающиеся поверхности нелинейчатые.

З а д а ч а 2. *Существуют ли поверхности с тождественно равной нулю формой Лагерра* $\chi \equiv 0$?

Отметим просто свойство такой поверхности: все ее геодезические — линии постоянной кривизны.

З а д а ч а 3. *Найти поверхности, для которых тензор* (a_{ijk}) *тождественно равен нулю, т. е. такие поверхности, что эйлерова кривизна их сохраняется при параллельном переносе по поверхности (касательном).*

Нормаль к поверхности будет главным направлением пространства, поскольку теперь

$$|(b_1, b_2,)| = |(p, q)| = 0.$$

Вернемся к уравнениям (24.17)

$$da_{11} + 2a_{12}\,\omega_2^1 = 0, \tag{24.27}$$

$$da_{12} + (a_{22} - a_{11})\,\omega_2^1 = 0, \tag{24.28}$$

$$da_{22} + 2a_{12}\,\omega_2^1 = 0. \tag{24.29}$$

Мы можем предположить $a_{12} = 0$, что означает приведение второй квадратичной формы к алгебраической сумме квадратов. Тогда равенства (24.27) и (24.29) показывают, что главные кривизны a_{11} и a_{22} будут постоянными; равенство (24.28) принимает вид

$$(a_{22} - a_{11})\,\omega_2^1 = 0.$$

Отсюда: или $a_{11} = a_{22}$, т. е. главные кривизны равны и поверхность имеет только омбилические точки $\left(\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}\right)$, или $\omega_1^2 = 0$ и

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

т. е. поверхность налагается на плоскость (линейный элемент плоскости).

152. Инвариантность нормальной кривизны при параллельном перенесении вектора. Произвольная кривая, касающаяся единичного вектора (X^1, X^2), имеет нормальную кривизну

$$a_{ij} X^i X^j.$$

Перенесем этот вектор по принципу параллелизма по поверхности в вектор ($X^{1'}$, $X^{2'}$). Потребуем, чтобы нормальная кривизна не изменилась:

$$d\,(a_{ij} X^i X^j) = 0,$$

или

$$D_t a_{ij} \cdot X^i X^j = 0,$$

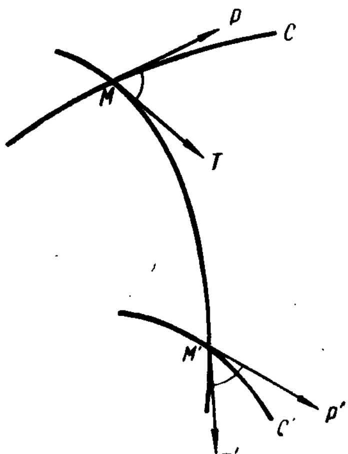
поскольку по самому построению $D_t X^i = 0$.

Итак,

$$a_{ijk} = 0.$$

Следствия. 1. *Параллельный перенос сохраняет главные направления, главные кривизны, асимптотические касательные и геодезические кривизны.*

2. Пусть M и M' — соседние точки линии кривизны. При параллельном переносе главные направления в точке M переходят в главные направления в точке M'. Следовательно, *линии кривизны будут геодезическими*, которые, впрочем, имеют нулевое кручение и постоянную кривизну.



Фиг. 19

3. Допустим, что существует *асимптотическая линия. Она одновременно будет геодезической линией*, которая будет геодезической пространства («прямая»).

4. Пусть через точку M проходит линия кривизны (C) и геодезическая (Г) (фиг. 19). Если перемещаться по геодезической (Г), то касательная MT к геодезической сохранит свое направление, перейдя в $M'T'$. Точно так же касательная главного направления MP перейдет в касательную главного направления $M'P'$. Следовательно, *геодезические линии пересекают линии кривизны под постоянным углом.*

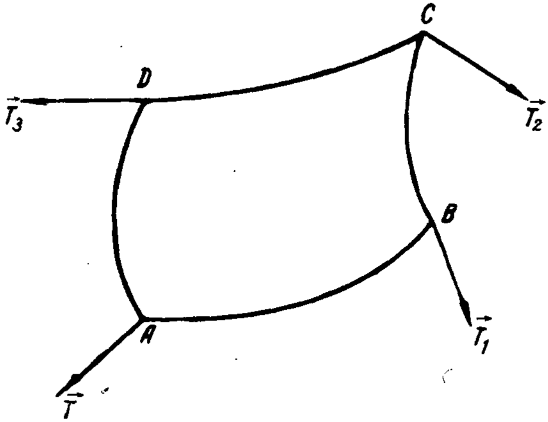
5. *Геодезические являются линиями постоянной кривизны и постоянного кручения.*

Замечание. Все предыдущее неприложимо к случаю $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ (неопределенные линии кривизны).

В этом случае геодезическое кручение тождественно равно нулю. Геодезические будут линиями нулевого кручения и постоянной кривизны.

6. Предположим $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$. Тогда *риманова кривизна поверхности равна нулю.*

Геометрическое доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ из четырех линий кривизны (фиг. 20).



Фиг. 20

Перенесем касательную $\vec{T}$ в точке A по принципу параллелизма вдоль $ABCD$; мы вернемся к исходному вектору $\vec{T}$; следовательно, вращение, присоединенное к циклу, равно нулю, и риманова кривизна поверхности равна нулю.

153. Поверхность в пространстве постоянной кривизны. Обратимся теперь к пространству постоянной кривизны.

Предположим сначала, что поверхность имеет два семейства действительных асимптотических линий. Тогда наша поверхность несет два семейства прямолинейных образующих, т. е. будет поверхностью 2-го порядка.

Если имеется только одно семейство асимптотических, то это будут развертывающиеся поверхности, ие обязательно второго порядка.

В общем случае, если $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$, нормальная кривизна и геодезическое кручение тождественно равны нулю. Асимптотические линии неопределенны. Геодезические линии будут прямыми. Если прямая имеет две точки, принадлежащие такой поверхности, то она вся принадлежит ей («плоскость»): в общем случае таких поверхностей не существует. Кручение всех линий на поверхности равно нулю. Такие поверхности (п. 129) называются *«вполне геодезическими»*. Тензор a_{ij} тождественно равен нулю. Эти поверхности нормальны к главным направлениям пространства.

Условие $a_{ijk} = 0$ эквивалентно требованию

$$\frac{1}{R_1} = \text{const}, \quad \frac{1}{R_2}, = \text{const}.$$

Обратимся к уравнениям структуры

$$\left.\begin{aligned} d\omega^1 &= [\omega^2\omega_2^1], \quad d\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2], \\ d\omega_1^2 &= [\omega_1^3\,\omega_3^2] - K\,[\omega^1\omega^2], \end{aligned}\right\} \tag{24.30}$$

$$\left.\begin{aligned} d\omega_1^3 &= [\omega_1^2\omega_2^3], \\ d\omega_2^3 &= [\omega_2^1\omega_1^3]. \end{aligned}\right\} \tag{24.31}$$

Обозначая через $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ главные кривизны, положим

$$\omega_1^3 = \frac{\omega^1}{\rho_1}, \quad \omega_2^3 = \frac{\omega^2}{\rho_2}.$$

Следовательно, внося это в последние два уравнения структуры (24.31), имеем для первого уравнения

$$\frac{1}{\rho_1}[\omega^2\omega_2^1] = \frac{1}{\rho_2}[\omega_1^2\omega^2].$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)[\omega^2\omega_2^1] = 0,$$

и аналогично последнее уравнение (24.31) даст

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)[\omega^1\omega_1^2] = 0.$$

1°. Если $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}$, то надо найти формы $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ так, чтобы

$$d\omega^1 = [\omega^2\omega_2^1],$$

$$d\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2],$$

$$d\omega_1^2 = -\left(\frac{1}{\rho^2} + K\right)[\omega^1\omega^2].$$

Это двумерное риманово пространство с постоянной римановой кривизной; существование его было доказано.

Имеем

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1\vec{\mathbf{I}}_1 + \omega^2\vec{\mathbf{I}}_2,\\ d\vec{\mathbf{I}}_1 &= -K\omega^1\mathbf{M} + \omega_1^2\vec{\mathbf{I}}_2 + \frac{1}{\rho}\,\omega^1\vec{\mathbf{I}}_3,\\ d\vec{\mathbf{I}}_2 &= -K\omega^2\mathbf{M} + \omega_2^1\vec{\mathbf{I}}_1 + \frac{1}{\rho}\,\omega^2\vec{\mathbf{I}}_3,\\ d\vec{\mathbf{I}}_3 &= -\frac{1}{\rho}\,\omega^1\vec{\mathbf{I}}_1 - \frac{1}{\rho}\,\omega^2\vec{\mathbf{I}}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (24.32)$$

Точка $\mathbf{M} + \rho\vec{\mathbf{I}}_3$ фиксирована.

В евклидовом или эллиптическом пространстве это сферы.

В гиперболическом пространстве имеем три класса поверхностей: сферы; квадрики, дважды касающиеся абсолюта; квадрики, имеющие касание второго порядка с абсолютом.

Риманова кривизна этих последних поверхностей (орисферы) равна нулю $\left(\text{ибо } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\right)$: геометрия евклидовой плоскости здесь осуществляется в совершенстве. Геодезическими служат плоские линии нулевого кручения; их плоскость, содержащая нормаль $\vec{\mathbf{I}}_3$, проходит через фиксированную точку C (точку касания с абсолютом). Геодезическими будут, следовательно, сечения орисферы плоскостями, проходящими через точку C; эти прямые встречаются, следовательно, в бесконечности. Параллелями служат сечения посредством плоскостей, проходящих через касательную в точке C к абсолюту.

2°. Если $\frac{1}{\rho_1} \neq \frac{1}{\rho_2}$, то

$$[\omega^1\omega_1^2] = 0, \quad [\omega^2\omega_2^1] = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = 0 \text{ и } \rho_1\rho_2 = -\frac{1}{K},$$

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = 0.$$

Таких поверхностей бесконечное множество.

В евклидовом пространстве это круглые цилиндры. В пространстве, где $K \neq 0$, поверхность имеет полную кривизну, отличную от нуля, но риманову кривизну, равную нулю.

Имеем

$$d\mathbf{M} = \omega^1\vec{\mathbf{I}}_1 + \omega^2\vec{\mathbf{I}}_2,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_1 = -K\omega^1\mathbf{M} + \frac{1}{\rho_1}\omega^1\vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_2 = -K\omega^2\mathbf{M} + \frac{1}{\rho_2}\omega^2\vec{\mathbf{I}}_3,$$

$$d\vec{\mathbf{I}}_3 = -\frac{1}{\rho_1}\omega^1\vec{\mathbf{I}}_1 - \frac{1}{\rho_2}\omega^2\vec{\mathbf{I}}_2.$$

Всегда можно предположить, что существует семейство линий кривизны из настоящих окружностей с центром

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} + \rho_1\vec{\mathbf{I}}_3$$

(предполагается $\rho_1 < R$). Имеем

$$d\mathbf{C} = d\mathbf{M} + \rho_1 d\vec{\mathbf{I}}_3 = \omega^2\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\vec{\mathbf{I}}_2. \tag{24.33}$$

Окружность описывает точка M при неподвижном центре, т. е. при $\omega^2 = 0$; при этом касательная определяется вектором $\vec{\mathbf{I}}_1$, а так как плоскость окружности проходит через центр, то она содержит два вектора $\vec{\mathbf{I}}_1$ и $\vec{\mathbf{I}}_3$.

Точка C перемещается нормально к этой плоскости в направлении $\vec{\mathbf{I}}_2$.

Поскольку теперь, при $K = -\frac{1}{\rho_1\rho_2}$, имеем

$$d\vec{\mathbf{I}}_2 = -K\omega^2\mathbf{M} + \frac{1}{\rho_2}\omega^2\vec{\mathbf{I}}_3 = -K\omega^2(\mathbf{M} + \rho_1\vec{\mathbf{I}}_3) = -K\omega^2\mathbf{C}, \quad (24.34),$$

из уравнений (24.33) и (24.34) следует, что прямая $(\mathbf{C}, \vec{\mathbf{I}}_2)$ неподвижна. Получаем аналогию с евклидовым цилиндром.

Рассмотрим центр (действительный или виртуальный)

$$\mathbf{M} + \rho_2 \vec{\mathbf{I}}_3$$

линий кривизны второго семейства.

Поскольку при $\omega^2 = 0$

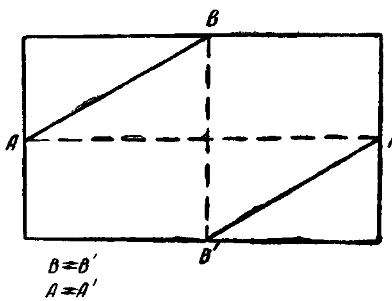
$$d(\mathbf{M} + \rho_2 \vec{\mathbf{I}}_2) = \omega^1 \vec{\mathbf{I}}_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega^1 \vec{\mathbf{I}}_1 = \omega^1 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \vec{\mathbf{I}}_1$$

этот центр описывает прямую направления $\vec{\mathbf{I}}_1$, сопряженную с $(C, \vec{\mathbf{I}}_2)$ относительно абсолюта.

В гиперболическом пространстве эта поверхность также реализует плоскую евклидову геометрию, но несовершенно, подобно евклидову цилиндру.

В эллиптическом пространстве поверхность будет линейчатым гиперболоидом, ее можно рассматривать как цилиндр вращения около двух ортогональных осей Δ и Δ'.

Если отбросить Δ' в бесконечность, то получим (неевклидовы) параллели с постоянным радиусом; образующие гиперболы будут окружностями с центрами в бесконечности.



Фиг. 21

Можно рассматривать эту поверхность двумя способами как тор. Здесь также реализуется плоская евклидова геометрия в форме, топологически эквивалентной тору (Клиффорд).

В сферическом пространстве можно представить поверхность прямоугольником с отождествлением противоположных точек (фиг. 21)

$$B \longleftrightarrow B', \quad A \longleftrightarrow A'.$$

В эллиптическом пространстве можно представить ромбом.

ГЛАВА XXV

p-МЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ n ИЗМЕРЕНИЙ

154. Абсолютная вариация касательного вектора. Внутреннее дифференцирование. Эйлерова кривизна. В точке Ф многообразия определяем p касательных векторов и компоненты касательного смещения

$$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$$

и $(n - p)$ нормальных векторов с нормальными смещениями

$$\omega^\alpha \quad (\alpha = p + 1, \ldots, n).$$

Первые уравнения структуры для многообразия будут

$$d\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \tag{25.1}$$

$$0 = [\omega^k \omega_k^\alpha]. \tag{25.2}$$

(латинские индексы обозначают $1, 2, \ldots, p$; греческие — $p+1, \ldots, n$). Последние $n-p$ уравнений (25.2) по лемме Картана дают

$$\omega_i^\alpha = \gamma_{ik}{}^\alpha \omega^k, \quad \gamma_{ik}{}^\alpha = \gamma_{ki}{}^\alpha. \tag{25.3}$$

Абсолютная вариация вектора X^i, касательного к многообразию, содержит тангенциальный компонент

$$dX^i + \omega_k^i X^k$$

и нормальный компонент

$$\omega_k^\alpha X^k.$$

Тангенциальный компонент составляет абсолютный дифференциал вектора, рассматриваемого как принадлежащий к p-мерному иманову пространству; формы ω_i^j определяют *внутреннее дифференцирование, касательное к многообразию.*

Что касается нормального компонента, то он вводит только значение вектора в точке P, а не в соседних точках, и зависит только от форм ω_k^α. Говорят, что формы ω_k^α определяют *«эйлерову кривизну»* многообразия (ср. в п. 139 формы ω_1^3, ω_2^3). Мы покажем, что существует еще *тензор эйлеровой кривизны.*

Рассмотрим теперь поле нормальных векторов Y^α; абсолютный дифференциал имеет касательный компонент

$$Y^\lambda \omega_\lambda^i.$$

и нормальный компонент

$$dY^\alpha + Y^\lambda \omega_\lambda^\alpha.$$

Формы ω_α^β играют для нормальных векторов ту же роль, что формы ω_i^j для тангенциальных векторов; нормальный компонент называется *внутренним нормальным дифференциалом.*

Следовательно, имеется два внутренних (инвариантных) дифференцирования, и, кроме того, эйлерова кривизна дает компонент (нормальный или тангенциальный) для абсолютной вариации вектора (тангенциального или нормального).

155. Тензорный характер эйлеровой кривизны. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\vec{Y}$ и $D\vec{X}$:

$$\vec{Y} \cdot D\vec{X} = Y_\lambda X^k \omega_k^\lambda.$$

Отсюда получается тензорный характер линейных форм ω_k^λ, но здесь тензор на «два лица» (двусторонний): один индекс относится к тангенциальному смещению, другой—к нормальному.

Таким образом, мы пришли к необходимости рассматривать тензоры вида

$$a_{ijk\ldots\,|\,\alpha\beta\gamma\ldots}$$

В случае $n = 3$ мы имели только один нормальный индекс, который опускался. Величины $\gamma_i{}^\alpha{}_j$ образуют тензор этого рода. Для этих тензоров вводится внутреннее дифференцирование, полагая, например,

$$d\,(a_{i\alpha} X^i Y^\alpha) = Da_{i\alpha} \cdot X^i Y^\alpha.$$

Если касательный вектор X^i и нормальный вектор Y^αпереносятся по принципу параллелизма, то

$$dX^i = -X^k \omega_k^i,$$

$$dY^\alpha = -Y^\lambda \omega^\alpha_\lambda.$$

Мы имеем, следовательно,

$$d(a_{i\alpha}X^iY^\alpha) = da_{i\alpha}X^iY^\alpha + a_{i\alpha}dX^iY^\alpha + a_{i\alpha}X^idY^\alpha =$$
$$= da_{i\alpha}X^iY^\alpha - a_{i\alpha}Y^\alpha X^k\omega^i_k - a_{i\alpha}X^iY^\lambda\omega^\alpha_\lambda =$$
$$= da_{i\alpha}X^iY^\alpha - a_{k\alpha}Y^\alpha X^i\omega^k_i - a_{i\lambda}X^iY^\alpha\omega^\lambda_\alpha =$$
$$= (da_{i\alpha} - a_{k\alpha}\omega^k_i - a_{i\lambda}\omega^\lambda_\alpha)X^iY^\alpha = Da_{i\alpha}X^iY^\alpha,$$

откуда в силу произвольности векторов X^i, Y^α, сравнивая коэффициенты, получаем правило абсолютного дифференцирования

$$Da_{i\alpha} = da_{i\alpha} - a_{k\alpha}\omega^k_i - a_{i\lambda}\omega^\lambda_\alpha. \tag{25.4}$$

Аналогично внутреннему внешнее дифференцирование линейной тензорной формы $\tilde{\omega}^\alpha_i$ определяется в виде

$$D\tilde{\omega}^\alpha_i = d\tilde{\omega}^\alpha_i + [\omega^k_i\tilde{\omega}^\alpha_k] + [\omega^\alpha_\lambda\tilde{\omega}^\lambda_i]. \tag{25.5}$$

156. Вторая система уравнений структуры. Рассмотрим вторую систему уравнений структуры

$$d\omega^j_i = [\omega^k_i\omega^j_k] + [\omega^\lambda_i\omega^j_\lambda] + R_{ij,kh}[\omega^k\omega^h], \tag{25.6}$$

$$d\omega^\beta_\alpha = [\omega^\lambda_\alpha\omega^\beta_\lambda] + [\omega^k_\alpha\omega^\beta_k] + R_{\alpha\beta,kh}[\omega^k\omega^h], \tag{25.7}$$

$$d\omega^\alpha_i = [\omega^k_i\omega^\alpha_k] + [\omega^\lambda_i\omega^\alpha_\lambda] + R_{i\alpha,kh}[\omega^k\omega^h]. \tag{25.8}$$

Внутренняя риманова кривизна многообразия (с точностью до знака) будет

$$D\omega^j_i = d\omega^j_i - [\omega^k_i\omega^j_k].$$

В силу первого уравнения структуры (25.6) она равна сумме:

1) римановой кривизны объемлющего пространства в том же плоском направлении,

2) выражения

$$[\omega^\lambda_i\omega^j_\lambda],$$

которое зависит только от эйлеровой кривизны многообразия. По аналогии со случаем $n = 3$ мы будем называть ее *гауссовой кривизной* (с точностью до знака).

Компоненты гауссовой кривизны определяются выражением

$$[\omega^\lambda_i\omega^\lambda_j].$$

Уравнение (25.8) показывает, что инвариантный внешний дифференциал эйлеровой кривизны ω_i^α зависит только от римановой кривизны объемлющего пространства.

Поскольку

$$\omega_i^\alpha = \gamma_{i\,j}^{\;\alpha}\omega^j.$$

этот внешний дифференциал

$$d\omega_i^\alpha = \gamma_{i\,[jk[}^{\;\alpha}[\omega^j\omega^k], \qquad \gamma_{i\,[jk]}^{\;\alpha} = \gamma_{i\,jk}^{\;\alpha} - \gamma_{i\,kj}^{\;\alpha}$$

зависит только от антисимметрической части производного тензора эйлеровой кривизны.

Что касается уравнения (25.7), то оно интерпретируется аналогично уравнению (25.6): бивектор

$$d\omega_\alpha^\beta - [\omega_\alpha^\lambda\omega_\lambda^\beta],$$

называемый (с точностью до знака) *римановым кручением* многообразия, является вращением, которое испытывает нормальный вектор после параллельного переноса вдоль цикла на многообразии. Член

$$[\omega_\alpha^k\omega_k^\beta],$$

зависящий только от эйлеровой кривизны, определяет *гауссово кручение.*

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

157. Главные направления и главные кривизны. Имеется только один нормальный индекс 4. Эйлерова кривизна определяется формами ω_i^4; можно положить

$$\omega_i^4 = a_{ik}\omega^k, \qquad a_{ik} = a_{ki}. \tag{25.9}$$

Симметричный тензор a_{ik} позволяет определить квадратичную форму

$$\varphi = \omega^i\omega_i^4 = a_{ij}\omega^i\omega^j. \tag{25.10}$$

Выражение

$$\frac{\varphi}{ds^2}$$

представляет *нормальную кривизну* линии на многообразии

Главными направлениями называются три оси репера, для которых

$$\varphi = \frac{(\omega^1)^2}{R_1} + \frac{(\omega^2)^2}{R_2} + \frac{(\omega^3)^2}{R_3};$$

коэффициенты $\frac{1}{R_i}$ будут *главными кривизнами*. Гауссова кривизна определяется формами

$$[\omega_i^4 \omega_j^4] = \frac{1}{R_i R_j} [\omega^i \omega^j]; \text{ (нет суммирования)};$$

таким образом, имеем *три главные гауссовые кривизны*:

$$\frac{1}{R_2 R_3}, \quad \frac{1}{R_3 R_1}, \quad \frac{1}{R_1 R_2}.$$

158. Гиперповерхность в евклидовом пространстве. Рассмотрим гиперповерхность в четырехмерном *евклидовом* пространстве. Главные гауссовы кривизны становятся римановыми кривизнами. Если изгибать гиперповерхность так, чтобы сохранялся линейный элемент ds^2, то

$$\frac{1}{R_2 R_3} = \frac{1}{R_2' R_3'}, \quad \frac{1}{R_3 R_1} = \frac{1}{R_3' R_1'}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1' R_2'},$$

т. е.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'}, \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_3'}$$

(кроме, может быть, знаков, что соответствовало бы симметрии относительно некоторой гиперплоскости).

Следовательно, налагающиеся гиперповерхности равны или симметричны. Вообще нельзя деформировать гиперповерхность, не меняя ds^2.

Это *теорема Beer* (1870). Ср. Суваров (*Souvarow*, Bull. Science Math., 1873). Если задана квадратичная форма относительно трех переменных, будет ли всегда ей соответствовать гиперповерхность в евклидовом пространстве четырех измерений? Трехмерное риманово пространство (гиперповерхность) зависит от трех функций трех аргументов (коэффициенты при разложении линейного элемента на сумму трех квадратов). Между тем в пространстве четырех измерений гиперповерхность определяется только одной функцией трех аргументов

$$x_4 = f(x_1, x_2, x_3).$$

Следовательно, вообще задача невозможна.

Чтобы ее разрешить, надо взять евклидово пространство шести измерений. Если

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то, сравнивая коэффициенты при всех сочетаниях (с повторениями) $du^i du^j$ в уравнении

$$\sum_{k=1}^{6} (dx_k)^2 = g_{ij} \, du^i \, du^j,$$

где x_k рассматриваются как функции от u^1, u^2, u^3, получим 6 уравнений на 6 неизвестных функций x_k относительно трех независимых переменных u^i, которые вообще допускают решение.

Вообще линейный элемент ds^2 с дифференциалами p параметров принадлежит многообразию p измерений в евклидовом пространстве размерности $\frac{p(p+1)}{2}$.

ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

159. Эллипс нормальной кривизны. Имеются два касательных индекса 1, 2 и два нормальных 3, 4. Эйлерова кривизна определяется формами

$$\omega_1^3, \ \omega_1^4, \ \omega_2^3, \ \omega_2^4,$$

или двумя квадратичными формами

$$\varphi^3 = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = a_{11}(\omega^1)^2 + 2a_{12}\omega^1\omega^2 + a_{22}(\omega^2)^2, \quad (25.11)$$

$$\varphi^4 = \omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 = b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\,\omega^1\omega^2 + b_{22}(\omega^2)^2. \quad (25.12)$$

Здесь мы найдем *вектор нормальной кривизны*

$$\left(\frac{\vec{1}}{\rho_n}\right) = \frac{\varphi^3\vec{I}_3 + \varphi^4\vec{I}_4}{ds^2}; \quad (25.13)$$

$\frac{\varphi^3}{ds^2}$, $\frac{\varphi^4}{ds^2}$ — компоненты нормальной кривизны по двум осям, нормальным к кривой.

Пусть θ — угол, образуемый касательной к кривой с первой осью в касательной плоскости $(\vec{I}_1, \vec{I}_2)$. Имеем

$$\omega^1 = \cos\theta ds, \quad \omega^2 = \sin\theta\, ds. \quad (25.14)$$

Пусть $\overrightarrow{MP}$ — вектор нормальной кривизны, x, y — координаты точки P в нормальной плоскости $(\vec{I}_3, \vec{I}_4)$ (фиг. 22) Имеем

$$x = \frac{\varphi^3}{ds^2}, \quad y = \frac{\varphi^4}{ds^2},$$

т. е.

$$\begin{cases} x = a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta, \\ y = b_{11}\cos^2\theta + 2b_{12}\cos\theta\sin\theta + b_{22}\sin^2\theta, \end{cases}$$

или

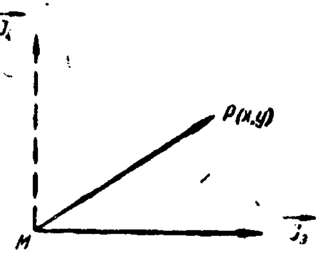
$$\begin{cases} x = \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} + \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\theta + a_{12}\sin 2\theta, \\[2ex] y = \dfrac{b_{11}+b_{22}}{2} + \dfrac{b_{11}-b_{22}}{2}\cos 2\theta + b_{12}\sin 2\theta. \end{cases} \tag{25.15}$$

Геометрическое место точек $P(x, y)$ будет, следовательно, эллипс с центром $H\left\{\frac{a_{11}+a_{22}}{2}, \frac{b_{11}+b_{22}}{2}\right\}$ — *эллипс индикатрисы нормальной кривизны.*

Вектор $\overrightarrow{MH}$ есть *вектор средней кривизны* (Бомпиани)

$$\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\vec{I}_3 + \frac{b_{11}+b_{22}}{2}\vec{I}_4; \tag{25.16}$$

он задается свернутым тензором эйлеровой кривизны.



Фиг. 22

Чтобы определить эйлерову кривизну, надо задать четыре существенные константы. Примем вектор $\vec{I}_3$ параллельным большой оси эллипса индикатрисы с центром $H(\alpha, \beta)$ и полуосями a, b; пусть $\theta = 0$ в конце большой оси. Тогда эллипс имеет уравнение

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + a\cos 2\theta, \\ y &= \beta + b\sin 2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{25.17}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} = \alpha, \quad \dfrac{b_{11}+b_{22}}{2} = \beta, \\[2ex] \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2} = a, \quad a_{12} = 0, \\[2ex] \dfrac{b_{11}-b_{22}}{2} = 0, \quad b_{12} = b, \end{cases} \tag{25.18}$$

и квадратичные формы равны

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3 &= (\alpha + a)(\omega^1)^2 + (\alpha - a)(\omega^2)^2, \\ \varphi_4 &= \beta(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + \beta(\omega^2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{25.19}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= (\alpha + a)\,\omega^1, & \omega_1^4 &= \beta\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_2^3 &= (\alpha - a)\,\omega^2, & \omega_2^4 &= b\omega^1 + \beta\omega^2 \end{aligned} \tag{25.20}$$

и

$$[\omega_1^3\omega_2^3] + [\omega_1^4\omega_2^4] = (\alpha^2 - a^2)[\omega^1\omega^2] + (\beta^2 - b^2)[\omega^1\omega^2].$$

Следовательно, гауссова кривизна равна

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 - b^2. \tag{25.21}$$

Это степень точки M по отношению к ортооптическому кругу эллипса.

Действительно, *ортооптической окружностью* называется геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом. Касательные к эллипсу в его вершинах несомненно пересекаются под прямым углом и определяют прямоугольник, вершины которого лежат на ортооптической окружности. Центр ее, очевидно, совпадает с центром эллипса (α, β), а радиус равен половине диагонали прямоугольника, т. е. равен $\sqrt{a^2 + b^2}$. Степень точки M относительно окружности равна произведению всей секущей из точки M на ее внешнюю часть. Вся секущая равна сумме расстояния от точки M до центра окружности и радиуса, а внешняя часть — разности этих отрезков.

Следовательно, искомая степень равна произведению

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right) = \\ = \alpha^2 + \beta^2 - (a^2 + b^2),$$

что и требовалось доказать.

В трехмерном пространстве индикатриса сводится к отрезку P_1P_2 из двух частей: $MP_1 = \frac{1}{R_1}$ и $MP_2 = \frac{1}{R_2}$; гауссова кривизна, или полная кривизна, — действительно степень точки M относительно ортооптической окружности — отрезка $P_1\,P_2$.

Переходим к гауссову кручению; имеем

$$[\omega_1^3\omega_1^4] + [\omega_2^3\omega_2^4] = 2ab\,[\omega^1\omega^2] \tag{25.22}$$

Следовательно, гауссово кручение равно $2ab$. Заметим, что, если мы положим $a>0$, то должны рассматривать $b > 0$, если эллипс описывается в положительном направлении при возрастании θ от 0 до π.

160. Обобщение классических понятий. *Линии кривизны.* Можно рассматривать линии кривизны как такие, которые соответствуют концам большой оси эллипса. Чаще говорят, что кривая на поверхности будет линией кривизны, если тангенциальная компонента абсолютного смещения какого-то нормального вектора будет касательной к этой линии.

Следовательно, для такой линии имеем

$$\omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = 0,$$
$$\omega^1\omega_2^4 - \omega^2\omega_1^4 = 0.$$

Ищем условие существования линий кривизны. Внося сюда значения (25.20), получим

$$-2a\omega^1\omega^2 = 0,$$
$$b\left\{(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2\right\} = 0.$$

Эти уравнения несовместны, если a и b не равны нулю. Условием существования линий кривизны будет обращение в нуль a или b, т. е. обращение в нуль гауссова кручения (25.22), и в этом случае будут два семейства ортогональных линий кривизны.

Асимптотические линии. Асимптотическая линия есть линия нулевой нормальной кривизны. Чтобы она существовала на поверхности, надо, чтобы эллипс индикатрисы нормальной кривизны проходил через точку M. Тогда будет существовать одно семейство асимптотических. Их будет два семейства, если эллипс индикатрисы выродится в сдвоенную прямую.

Если существуют асимптотические, то гауссова кривизна отрицательна (ибо точка M будет внутренней точкой ортооптической окружности).

Рассмотрим случай, когда эллипс индикатрисы — сдвоенная прямая, лежащая на оси $\vec{I}_3$. Тогда форма φ_4 тождественно равна нулю. Поверхность будет гиперплоской, т. е. это будет поверхность трехмерного евклидова пространства.

Действительно, дифференцируя внешним образом

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0 -$$

равенства, вытекающие из условия $\varphi^4 = 0$, получим

$$[\omega_1^3 \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^3 \omega_3^4] = 0.$$

Отсюда следует, что линейная форма ω_3^4 одновременно будет кратной линейно независимым ω_1^3 и ω_2^3, следовательно, она равна нулю. Значит,

$$d\vec{I}_4 = 0;$$

направление $\vec{I}_4$ фиксировано; точка M описывает гиперплоскость, которая и будет содержать нашу поверхность.

161. Минимальные поверхности. Предположим, что средняя кривизна (25.16) равна нулю; следовательно, в силу (25.18)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$

точка H совпадает с точкой M. Тогда, из (25.19)

$$\varphi^3 = a\left\{(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2\right\},$$
$$\varphi^4 = 2b\omega^1\omega^2.$$

Гауссова кривизна (25.21), равная теперь

$$-a^2 - b^2,$$

отрицательна.

Это свойство характеризует минимальную поверхность, т. е. поверхность наименьшей площади при заданном контуре.

Действительно, пусть символы d и δ соответствуют: первый — смещению по поверхности, второй — смещению с одной поверхности на другую инфинитезимально близкую.

Если мы предположим, что это последнее смещение ортогонально к поверхности, то, очевидно, формы $\omega_i^k(\delta) = e_i^k$ будут удовлетворять соотношениям:

$e_1 = 0$, $e_2 = 0$ на поверхности и $e_3 = 0$, $e_4 = 0$ на контуре.

Теперь вариация площади поверхности

$$\delta\int[\omega^1\omega^2] = \int[\delta\omega^1\omega^2] - \int[\omega^1\,\delta\omega^2];$$

но из структурного уравнения

$$d\omega^1 = [\omega^2\omega_2^1] + [\omega^\alpha\omega_\alpha^1].$$

получим

$$\delta\omega^1 = -e_2^1\omega^2 + e^\alpha\omega_\alpha^1$$

и аналогично

$$\delta\omega^2 = -e_1^2\omega^1 + e^\alpha\omega_\alpha^2,$$

следовательно,

$$\delta\int[\omega^1\omega^2] = \int e^\alpha\left([\omega^2\omega_1^\alpha] - [\omega^1\omega_2^\alpha]\right) \qquad \alpha = 3,4.$$

Таким образом, необходимое условие минимума площади (обращение в нуль первой вариации) будет

$$[\omega^1\omega_2^\alpha] - [\omega^2\,\omega_1^\alpha] = 0.$$

Если же положить

$$\omega_1^\alpha = a_{11}^\alpha\omega^1 + a_{12}^\alpha\omega^2,$$

$$\omega_2^\alpha = a_{12}^\alpha\omega^1 + a_{22}^\alpha\omega^2,$$

то получим

$$a_{11}^\alpha + a_{22}^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 3,\ 4),$$

или в обозначениях (25.18)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Если деформировать поверхность нормальным смещением перпендикулярно к прямой MH, то вариация площади будет равна нулю.

162. Отыскание минимальных поверхностей. Говорят, что функция V — гармоническая, если второй дифференциальный параметр равен нулю:

$$\Delta_2 V = 0.$$

В евклидовом n-мерном пространстве декартовы координаты точки минимальной поверхности будут гармоническими функциями на поверхности.

Действительно, координаты точки могут быть представлены аналитической точкой $\mathbf{M}$; компонентами градиента называются коэффициенты при формах ω^i в разложении

$$dV = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 + \ldots + V_n\omega^n.$$

Следовательно, для

$$dM = \omega^1\vec{I}_1 + \omega^2\vec{I}_2$$

компонентами градиента будут векторы $\vec{I_1}$ и $\vec{I_2}$. В пространстве постоянной кривизны аналогично формулам (24.32) получаем

$$DM_1 = D\vec{I}_1 = d\vec{I}_1 + \vec{I}_2\omega_2^1 = \omega_1^\alpha\vec{I}_\alpha - K\omega^1M = M_{11}\omega^1 + M_{12}\omega^2,$$

$$DM_2 = D\vec{I}_2 = d\vec{I}_2 + \vec{I}_1\omega_1^2 = \omega_2^\alpha\vec{I}_\alpha - K\omega^2M = M_{21}\omega^1 + M_{22}\omega^2.$$

Сравнивая два последних столбца, получим

$$M_{11} = \gamma_1{}^\alpha{}_1\vec{I}_\alpha - KM,$$

$$M_{22} = \gamma_2{}^\alpha{}_2\vec{I}_\alpha - KM$$

и

$$\Delta_2M = M_{11} + M_{22} = (\gamma_1{}^\alpha{}_1 + \gamma_2{}^\alpha{}_2)\,\vec{I}_\alpha - 2KM.$$

Если поверхность минимальная, то

$$\Delta_2M + 2KM = 0.$$

Если $K = 0$, то получаем уравнение, характеристическое для минимальных поверхностей

$$\Delta_2M = 0$$

Пусть форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

приведена к виду

$$A^2(du^2 + dv^2);$$

тогда

$$\omega^1 = Adu,\ \omega^2 = Adv,$$

Компонентами $\overrightarrow{gradV}$ будут

$$V_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial u},\quad V_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial v}$$

и

$$V_1\omega^2 - V_2\omega^1 = \frac{\partial V}{\partial u}\,dv - \frac{\partial V}{\partial v}\,du$$

будет элементарным потоком градиента; этот поток будет точным дифференциалом, если V — гармоническая функция, ибо

$$\int\limits_C (V_1\omega^2 - V_2\omega^1) = \iint\limits_S \Delta_2 V\,[\omega^1\omega^2].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0,$$

и функция V будет также гармонична по отношению к координатам u и v.

Если V будет обозначать функцию комплексного переменного, сопряженную функции f, то можно положить для определения минимальной поверхности

$$x_i = f_i(u + iv) + \varphi_i(u - iv).$$

Функции f_i должны быть такими, чтобы

$$ds^2 = A^2(du^2 + dv^2).$$

Имеем

$$ds^2 = A^2(du + idv)(du - idv) = A^2(du^2 + dv^2)$$

и

$$dx_i = f_i'(du + idv) + \varphi_i'(du + idv).$$

Необходимо, следовательно, чтобы

$$\sum_{i=1,\,2,\,3} (f_i')^2 = 0$$

Это распространение классического результата на случай четырех измерений.

Если заменить f_k на if_k, то получим минимальную поверхность, *присоединенную* к заданной. Теория присоединенных поверхностей распространяется на случай n измерений; касательные плоскости в соответственных точках будут параллельны и соответствующие касательные перпендикулярны.

Е. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

ГЛАВА XXVI

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ РИМАНА

163. Определение нормальных координат. Рассмотрим определенную точку O риманова пространства и ортогональный репер (R_0) в этой точке.

Всякая точка M в достаточно малой окрестности точки O лежит на определенной геодезической, выходящей из точки O; пусть v_0^i — направляющие косинусы ее касательной в начале и s — длина дуги геодезической OM. Тогда *нормальными координатами* точки M называются n величин x^i, определяемых уравнениями

$$x^i = v_0^i s. \tag{26.1}$$

Практически всегда можно, отправляясь от произвольной системы координат $(u^1, \ldots, u^n)$, подходящей линейной подстановкой с постоянными коэффициентами, получить другую так, чтобы в точке O все координаты равнялись нулю, а коэффициенты g_{ij} фундаментальной формы в начале принимали значения

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Воспользуемся уравнениями геодезических (18.14)

$$\omega^i = v^i ds, \quad \omega_i^j = \gamma_{i\ k}^{\ j} \omega^k,$$

$$\frac{dv^i}{ds} = \gamma_{kh}^{\ i} v^k v^h.$$

Эти формулы сохраняют силу и для неортогонального репера, включая натуральный, когда будем иметь (12.12):

$$\omega^i = du^i.$$

Следовательно,

$$v^i = \frac{du^i}{ds},$$

и уравнения геодезических примут вид

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{k\ h}^{\ i} \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0; \qquad (26.2)$$

при начальных условиях

$$u^i = 0 \quad \text{для} \quad s = 0$$

мы получим нормальные координаты (26.1), только теперь надо положить

$$x^i = s\left(\frac{du^i}{ds}\right)_0.$$

164. Отображение риманова пространства на евклидово, переводящее связку геодезических в связку прямых. Формулы (26.1) определяют, если угодно, отображение риманова пространства на евклидово, где x^i будут служить обыкновенными прямоугольными координатами.

Непосредственно видно, что геодезические линии, проходящие через точку O, отображаются в прямые линии евклидова пространства, что всякое геодезическое в точке O многообразие отображается в плоское многообразие.

Евклидово пространство, на которое производится это отображение, называется *нормальным евклидовым пространством, присоединенным к точке* O. Нетрудно заметить, что нормальное евклидово пространство является соприкасающимся к риманову пространству в точке O.

Действительно, система (26.2) в нормальных координатах x^i

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{k\ h}^{\ i} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^h}{ds} = 0$$

будет системой дифференциальных уравнений для геодезических и будет удовлетворяться, если вместо x^i подставить $v_0^{\ i} s$, где $v_0^{\ i}$ — произвольные постоянные; следовательно, во всякой точке геодезической

$$\Gamma_{k\ h}^{\ i} v_0^k v_0^h = 0. \qquad (26.3)$$

В частности в точке O, т. е. для $s = 0$, имеем

$$\left(\Gamma_{k\,h}^{\,i}\right)_0 = 0,$$

а это означает, что нормальное евклидово пространство соприкасается в точке O к риманову пространству (п. 62).

165. Построение семейства реперов, присвоенных нормальным координатам. Репер (R_0), присоединенный к точке O, был выбран ортогональным. Мы можем присоединить к каждой точке M в достаточно малой окрестности точки O ортогональный репер (R), получаемый параллельным переносом репера (R_0) вдоль дуги геодезической OM. Будем говорить, что это семейство реперов (R) присвоено нормальным координатам, которые определены начальным репером (R_0).

Сейчас мы подсчитаем формы $\omega^i = \omega_i$, $\omega_i^j = \omega_{ij} = -\omega_{ji}$, определяющие инфинитезимальные перенос и вращение при переходе от репера, присвоенного точке M, к реперу, присвоенному инфинитезимально близкой точке M'. При этом нам удобнее будет пользоваться координатами $a^i = v_0^i$, t в излишнем числе $n+1$ такими, что

$$x^i = a^i t.$$

Чтобы вернуться к нормальным координатам x^i, достаточно положить $t = 1$, $a^i = x^i$.

Если положить $a^i = \text{const}$ и менять t, то репер (R) будет переноситься параллельно и для одного и того же значения dt векторы $\overrightarrow{MM'}$ будут оставаться эквиполентными и сохранять те же компоненты; очевидно, при этом

$$\omega^i = a^i dt.$$

а все ω_i^j будут равны нулю.

Если обозначить через $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$ значения форм ω^i, ω_i^j при $dt = 0$ и переменных a^i, то получим

$$\left.\begin{aligned} \omega^i(t, a; dt, da^i) &= a^i dt + \overline{\omega}^i(t, a; da), \\ \omega_i^j(t, a; dt, da) &= \qquad\quad \overline{\omega}_i^j(t, a; da). \end{aligned}\right\} \tag{26.4}$$

166. Фундаментальные уравнения. Теперь мы будем определять формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$ *как функции от* t, рассматривая a^i, da^i как параметры.

Обращаясь к уравнениям структуры риманова пространства (16.8), (16.9), имеем

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ d\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j] + R_{i\,kh}^{\,j}\,[\omega^k \omega^h]. \end{aligned}\right\} \tag{26.5}$$

Заменяя ω^i, ω_i^j выражениями (26.4) и выделяя члены, содержащие dt, получим

$$\left.\begin{aligned} [da^i dt] + \left[dt\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t}\right] + d_a\overline{\omega}^i &= [a^k dt + \overline{\omega}^k,\ \overline{\omega}_k^i], \\ \left[dt\frac{\partial\overline{\omega}_i^j}{\partial t}\right] + d_a\overline{\omega}_i^j &= [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j] + R_{i\,kh}^{\,j}\,[a^k dt + \overline{\omega}^k,\ a^h dt + \overline{\omega}^h]. \end{aligned}\right\} \tag{26.6}$$

Символ дифференцирования d_a означает дифференцирование по всем $a^i (i = 1, \ldots, n)$ при $t = \mathrm{const}$.

Сравнивая члены, содержащие множитель dt, получаем искомые уравнения, которые будем называть *фундаментальными*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t} &= da^i + a^k\overline{\omega}_k^i, \\ \frac{\partial\overline{\omega}_i^j}{\partial t} &= R_{i\,[kh]}^{\,j}\,(a^k\overline{\omega}^h - a^h\overline{\omega}^k) = R_{i\,kh}^{\,j} a^k \omega^h. \end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

Здесь квадратная скобка $[kh]$ в $R_i{}^j{}_{[kh]}$ предполагает суммирование по сочетаниям.

Будем интегрировать эти уравнения. Начальные условия очевидны: для $t = 0$ получаем начальный репер (R_0) и для всех a^i, da^i

$$\overline{\omega}^i(0, a, da) = 0, \quad \overline{\omega}_i^j(0, a, da) = 0. \tag{26.8}$$

Исключая $\overline{\omega}_i^j$, получаем для форм $\overline{\omega}^i$ систему уравнений

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}^i}{\partial t^2} = R_{k\,hj}^{\,i} a^k a^h \overline{\omega}^j \tag{26.9}$$

с начальными условиями

$$\overline{\omega}^i = 0, \quad \frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t} = da^i \ \text{для}\ t = 0. \tag{26.10}$$

167. Однозначность линейного элемента при заданном тензоре Римана—Кристоффеля. Из уравнений (26.9) следует теорема.

Т е о р е м а 1. *Если известны — в функциях отнормальных координат относительно начального репера (R_0) — компоненты* *тензора Римана — Кристоффеля для семейства реперов, присвоенных этим координатам, то фундаментальная форма в этих нормальных координатах определяется однозначно.*

Действительно, при заданных R_{kihj} в функциях от $t, a_1, \ldots, a^n$ уравнения (26.9) допускают единственное решение при начальных условиях (26.10). С другой стороны, формы ω^i в силу (26.4) получаются из форм $\overline{\omega^i}$ при $t = 1$, $a^i = x^i$. Следовательно, линейный элемент ds^2 вполне определен.

Отсюда следует вторая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть даны два римановa пространства E, E' одного и того же числа n измерений и в них две системы нормальных координат относительно начальных ортогональных реперов (R_0), (R'_0); если компоненты тензора Римана — Кристоффеля, отнесенные в каждом пространстве к семейству реперов, присвоенных его системе координат, будут одними и теми же функциями соответствующих нормальных координат, то два пространства наложимы друг на друга.*

Действительно, две основные метрические формы будут иметь коэффициентами одни и те же функции нормальных координат.

Наложение будет только *локальным*, ибо теорема имеет смысл только в такой окрестности начальной точки, что через каждую точку окрестности проходит одна и только одна геодезическая, выходящая из начала и не покидающая этой окрестности.

168. Аналитическое риманово пространство. Допустим теперь, в частности, что риманово пространство *аналитическое*. Это значит, что можно выбрать систему координат u^i так, что компоненты g_{ij} фундаментального тензора будут *аналитическими* функциями координат u^i. В этом случае нормальные координаты x^i относительно произвольного начального репера (R_0) будут аналитическими функциями от u^i и компоненты R_{ijkh} римановой кривизны, отнесенные к семейству реперов, присвоенных этим нормальным кординатам x^i, также будут аналитическими функциями от x^i и, следовательно, от координат t и a^i. Они, следовательно, вполне определены, если известны для $t = 0$ их числовые значения так же, как значения их последовательных производных по параметру t; но, если варьировать t, сохраняя фиксированными $a^1, a^2, \ldots, a^n$, так, чтобы репер (R) перемещался, оставаясь параллельным самому себе, то обыкновенный дифференциал dR_{ijkh} по переменному t будет совпадать с абсолютным; следовательно, в каждой точке будем иметь

$$\frac{\partial R_{ijkh}}{\partial t} = R_{ijkh\,|\,l}a^l, \quad \frac{\partial^2 R_{ijkh}}{\partial t^2} = R_{ijkh\,|\,lm}a^l a^m, \ldots,$$

где вертикальной чертой отделяются индексы ковариантного дифференцирования.

Получаем теорему.

Линейный элемент ds^2 аналитического риманова пространства, выраженный посредством нормальных координат в точке O, вполне определен, если известны числовые значения в точке O компонентов тензора Римана — Кристоффеля и всех его последовательных ковариантных производных.

Этой теореме соответствует также достаточное условие наложимости двух аналитических римановых пространств одного и того же числа измерений.

169. Свойства основной метрической формы в нормальных координатах. Докажем две теоремы:

Теорема 1. *Форма*

$$\overline{\omega}^i - t\,da^i$$

является линейной комбинацией выражений

$$a^k da^h - a^h da^k.$$

Теорема 2. *Форма*

$$ds^2 - ds_0^2$$

является квадратичной формой относительно выражений

$$x^k dx^h - x^h dx^k.$$

Первое уравнение (26.7), поскольку a^i и t — независимые переменные, может быть записано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\omega}^i - t\,da^i) = a^k \overline{\omega}^i_k;$$

(26.9) при этом дает

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\overline{\omega}^i - t\,da^i) = R^i_{k\,hj} a^k a^h \overline{\omega}^j; \qquad (26.11)$$

положим *a priori*

$$\overline{\omega}^i - t\,da^i = A^i_{kh} a^k da^h \quad (A^i_{kh} = -A^i_{hk}). \qquad (26.12)$$

Уравнения (26.9) будут удовлетворены, если неизвестные функции A^i_{kh} удовлетворяют системе

$$\frac{\partial^2 A^i_{kh}}{\partial t^2} a^k\, da^h = R^i{}_{khj} a^k a^h \overline{\omega}^j = R^i{}_{khj} a^k a^h (t\,da^j + A^j_{rs} a^r da^s).$$

Меняя справа индексы суммирования: в первой сумме $\binom{j\ h}{h\ r}$ и во второй $\binom{k\ h}{r\ s}$, получим

$$\left(\frac{\partial^2 A^i_{kh}}{\partial t^2} - ta^r R_r{}^i{}_{kh} - a^r a^s R_r{}^i{}_{sj} A^j_{kh}\right) a^k da^h = 0,$$

откуда в силу линейной независимости $a^k da^h$ имеем систему

$$\frac{\partial^2 A^i_{kh}}{\partial t^2} = ta^r R_r{}^i{}_{kh} + a^r a^s R_r{}^i{}_{sj} A^j_{kh} \qquad (26.13)$$

с начальными условиями

$$A^i_{kh} = 0, \qquad \frac{\partial A^i_{kh}}{\partial t} = 0 \quad \text{для} \quad t = 0.$$

Эти уравнения допускают определенное решение; надо только проверить, что полученные функции будут кососимметричны по нижним индексам. Это очевидно, ибо сумма

$$A^i_{kh} + A^i_{hk}$$

и ее первые производные равны нулю для $t = 0$ и удовлетворяют системе *линейных однородных дифференциальных уравнений*. Первая теорема доказана.

170. Доказательство теоремы 2 п. 169. Обращаемся ко второй теореме.

Линейный элемент пространства ds^2 есть сумма квадратов форм $\bar{\omega}^i$ после замены t на единицу и a^i на x^i; формула (26.12)

$$\bar{\omega}^i = tda^i + A^i_{kh} a^k da^h \qquad (26.14)$$

указывает, что доказательство теоремы 2 сводится к тому, чтобы показать, что сумма

$$A^i_{kh} da^k$$

является линейной комбинацией выражений

$$a^r da^s - a^s da^r.$$

Итак, положим

$$A_{ikh} da^i = B_{khrs} a^r da^s \qquad (B_{khrs} = -B_{khsr} = -B_{hkrs}).$$

Эти соотношения будут совместны с уравнениями (26.13), если функции B_{khrs}, которые вместе со своими первыми производными обращаются в нуль для $t = 0$, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial^2 B_{khrs}}{\partial t^2} = tR_{rskh} + a^i R_{rsij} A^j_{kh}. \qquad (26.15)$$

Ясно, что решение этой системы уравнений (26.14), (26.15) вместе с начальными условиями будет кососимметрично одновременно и относительно указателей r и s, и относительно k и h.

Мы будем теперь искать первые члены разложения форм ω^i и основной метрической формы. Для этого мы определим разложение функций A^i_{kh} и B_{khrs} с точностью до членов порядка t^4, предполагая, конечно, что компоненты фундаментального тензора допускают непрерывные частные производные достаточно высокого порядка.

С помощью уравнений (26.13) и (26.15) получаем

$$A^i_{kh} = \frac{1}{6} t^3 a^r R_r{}^i{}_{kh} + \frac{1}{12} t^4 a^r a^s R_r{}^i{}_{kh\,|\,s},$$

$$B_{khrs} = \frac{1}{6} t^3 R_{rskh} + \frac{1}{12} t^4 a^u R_{rskh\,|\,u}.$$

Конечно, в правой части компоненты тензора Римана — Кристоффеля и их ковариантные производные принимают те же численные значения, которые они имели в начале.

Отсюда с помощью (26.14) имеем

$$\overline{\omega}^i = t\,da^i + \frac{1}{6} t^3 a^r \left(R_r{}^i{}_{kh} + \frac{1}{2} t a^s R_r{}^i{}_{kh\,|\,s}\right) a^k da^h,$$

откуда заменой $t = 1$, $a^i = x^i$ получаем

$$\omega^i = dx^i + \frac{1}{6} x^r \left(R_r{}^i{}_{kh} + \frac{1}{2} x^s R_r{}^i{}_{kh\,|\,s}\right) x^k\, dx^h. \qquad (26.16)$$

Линейный элемент ds^2 получается, если в сумме квадратов форм ω^i заменить $t = 1$, $a^i = x^i$:

$$ds^2 = ds_0^2 + G_{khrs} x^k x^r dx^h dx^s,$$

где

$$G_{khrs} = [B_{khrs} + B_{rskh} + A^i_{kh} A_{irs}]_{\substack{t=1\\ a^i=x^i}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(R_{rskh} + \frac{1}{2} x^u R_{rskh\,|\,u}\right);$$

отсюда (Риман)

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{3}\left(R_{rskh} + \frac{1}{2}x^u R_{rskh\,|\,u}\right)x^r x^k dx^s dx^h, \quad (26.17)$$

или

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{12}\left(R_{rskh} + \frac{1}{2}x^u R_{rskh\,|\,u}\right)\cdot$$

$$\cdot\,(x^r dx^s - x^s dx^r)\,(x^k dx^h - x^h dx^k). \quad (26.18)$$

ГЛАВА XXVII

СИММЕТРИЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

171. Перенос посредством симметрии. Пользуясь понятием нормальных координат, мы можем проще определить симметрию точек и векторов относительно точки O риманова пространства. Симметричные точки M и M' в нормальных координатах x^i относительно начала O определяются координатами

$$(x^i)' = -x^i;$$

для векторов, отнесенных к натуральным реперам, присвоенным нормальным координатам, симметрия определяется уравнениями

$$(X^i)' = -X^i.$$

Рассмотрим пару симметричных точек M и M' в малой окрестности точки O и два симметричных вектора $\vec{\mathbf{X}}$ и $\vec{\mathbf{X}}'$ в точках M и M'. Вектор $\vec{\mathbf{X}}''$ с началом M', равный и противоположный вектору $\vec{\mathbf{X}}'$, имеет те же компоненты, что и вектор $\vec{\mathbf{X}}$: поскольку Γ^i_{kh} равны нулю в точке O, вектор $\vec{\mathbf{X}}''$ следует рассматривать как перенесенный по принципу параллелизма из M в M' вектор $\vec{\mathbf{X}}$.

Отсюда снова получаем предложение:

чтобы перенести параллельно вектор $\vec{\mathbf{X}}$ с началом в M в инфинитезимально близкую точку M', достаточно построить вектор $\vec{\mathbf{X}}'$, симметричный вектору $\vec{\mathbf{X}}$ относительно середины O дуги геодезической MM', и затем — вектор $\vec{\mathbf{X}}''$, равный и противоположный вектору $\vec{\mathbf{X}}'$.

Мы будем называть это построение *переносом посредством симметрии.*

172. Порядок точности построения. Предыдущее построение дает результат с точностью только до бесконечно малых порядка выше первого, если принимать за основную бесконечно малую расстояние MM'. Мы покажем что *при параллельном переносе вдоль дуги геодезической MM' перенос посредством симметрии дает результат с точностью до бесконечно малых третьего порядка.*

Заметим, что при использовании ортогонального репера (R), присвоенного нормальным координатам, параллельный перенос вдоль геодезической, проходящей через точку O, не будет менять компоненты вектора относительно этих реперов (R); но компоненты вектора — не что иное, как формы $\omega^i(x, dx)$, где надо дать дифференциалам dx^i числовые значения компонентов X^i вектора, отнесенного к *натуральному* реперу с тем же началом, присвоенному нормальным координатам.

Тогда совершить перенос посредством симметрии относительно точки O — значит перейти от величин $\omega^i(x; dx)$ к величинам $\omega^i(-x; dx)$; поскольку параллельный перенос вдоль геодезической MM' сохраняет числовые значения форм ω^i, мы приходим к необходимости сравнивать величины $\omega^i(x; dx)$ и $\omega^i(-x, dx)$. Пользуясь разложением (26.16), мы получим

$$\omega^i(x, dx) - \omega^i(-x, dx) = \frac{1}{6} R_{r\,kh\,|\,s}^{\,i} x^r x^k x^s dx^h. \qquad (27.1)$$

Поскольку dx^h имеют конечные значения (компоненты вектора $\vec{X}$), порядок малости правой части определяется тремя бесконечно малыми множителями x^r, x^k, x^s.

Каким условиям должно удовлетворять риманово пространство, чтобы перенос посредством симметрии давал построение параллельного переноса вдоль геодезической с точностью до бесконечно малых четвертого порядка?

Нам надо потребовать, чтобы кубическая форма

$$F_{lj} \equiv R_{rikj\,|\,s} x^r x^k x^s \qquad (27.2)$$

была тождественно равна нулю. Это выразится через некоторое число линейных с постоянными коэффициентами соотношений между компонентами производного тензора от тензора Римана — Кристоффеля. Ясно, что при заданном геометрическом значении этих соотношений они не зависят от выбора реперов. Мы воспользуемся этим замечанием, а также тождествами Бианки

$$R_{ij\alpha\beta\,|\,\gamma} + R_{ij\beta\gamma\,|\,\alpha} + R_{ij\gamma\alpha\,|\,\beta} = 0.$$

Заметим, что компоненты $R_{ijkh\,|\,l}$ преобразуются при замене реперов, как произведение

$$X_i Y_j Z_k T_h U_l$$

компонентов пяти произвольных векторов. Рассмотрим теперь простое инфинитезимальное вращение репера параллельно плоскости двух базисных векторов $\vec{e}_r$, $\vec{e}_s$.

Если ε — инфинитезимальный угол поворота, компонент X_r вектора испытает элементарное приращение εX_s, а компонент X_s — приращение — εX_r, остальные компоненты останутся без изменения. Отсюда следует, что элементарное приращение, испытываемое компонентом $R_{ijkh\,|\,l}$, будет, с точностью до множителя ε, суммой компонентов, получаемых заменой указателя r на s повсюду, где только он встречается, и взятых с противоположным знаком компонентов, содержащих указатель s, который заменяется на r.

Будем обозначать это вращение символом $\{rs\}$.

173. Сохранение римановой кривизны при параллельном переносе. Приложим эти соображения к коэффициенту при $(x^i)^3$ формы F_{ij}; поскольку он равен нулю, имеем

$$R_{ijij\,|\,i}=0. \tag{27.3}$$

Вращение $\{jk\}$ позволит получить отсюда

$$R_{ijik\,|\,i}=0, \tag{27.4}$$

а вращение $\{ik\}$, приложенное к компоненту (27.3), дает

$$2R_{ijkj\,|\,i}+R_{ijij\,|\,k}=0. \tag{27.5}$$

Тождество Бианки

$$R_{ijij\,|\,k}+R_{ijjk\,|\,i}-R_{ijik\,|\,j}=0 \tag{27.6}$$

позволяет написать равенство (27.5) в виде

$$R_{ijik\,|\,j}-3R_{ijjk\,|\,i}=0.$$

откуда перестановкой индексов i и j получаем

$$R_{ijjk\,|\,i}-3R_{ijik\,|\,j}=0.$$

Из двух последних соотношений и равенства (27.5) следуют равенства

$$R_{ijik\,|\,j}=0,\quad R_{ijij\,|\,k},\quad R_{ijjk\,|\,i}=0. \tag{27.7}$$

Наконец, вращение $\{jl\}$, приложенное к первому равенству (27.7) дает

$$R_{ilik\,|\,j}+R_{ijik\,|\,l}=0,$$

откуда круговой подстановкой индексов j, k, l, получаются два новых соотношения, которые показывают, что сумма любых двух из трех компонентов

$$R_{ijlk\,|\,l}, \quad R_{ikil\,|\,j}, \quad R_{ilij\,|\,k}$$

равна нулю. Следовательно, все они равны нулю:

$$R_{ijik\,|\,l} = 0. \qquad (27.8)$$

Отсюда с помощью тождеств Бианки (27.6) получаем

$$R_{ijkl\,|\,i} = 0. \qquad (27.9)$$

Равенства (27.3) и (27.9) показывают, что единственными компонентами, которые могли бы не равняться нулю, будут компоненты с пятью различными индексами.

Однако вращение $\{im\}$, приложенное к равенству (27.9), дает

$$R_{klmj\,|\,i} + R_{klij\,|\,m} = 0,$$

откуда

$$R_{klij\,|\,m} = R_{kljm\,|\,i} = R_{klmi\,|\,j};$$

но сумма этих трех компонентов равна нулю в силу тождества Бианки. Следовательно, каковы бы ни были индексы i, j, k, l, m,

$$R_{ijkl\,|\,m} = 0. \qquad (27.10)$$

Все компоненты производного тензора Римана — Кристоффеля равны нулю.

Теорема. *Чтобы перенос посредством симметрии осуществлял параллельный перенос вдоль бесконечно малой дуги геодезической с точностью до бесконечно малых порядка выше трех, необходимо и достаточно, чтобы производный тензор от тензора Римана — Кристоффеля был равен нулю.*

Заметим, что обращение в нуль производного тензора римановой кривизны означает геометрически, что *параллельный перенос сохраняет риманову кривизну.*

Приведенное доказательство показывает, что это свойство является следствием только уравнений (27.3), которые показывают, что *риманова кривизна пространства в направлении плоского элемента имеет абсолютную производную, равную нулю в произвольном направлении этого плоского элемента.*

174. Необходимое и достаточное условие обращения в нуль производного тензора от тензора Римана—Кристоффеля. Мы докажем теперь теорему:

если производный тензор от тензора Римана — Кристоффеля равен нулю, то перенос посредством симметрии осуществляет *точно параллельный перенос вдоль дуги геодезической; более того, обращение в нуль этого тензора необходимо и достаточно, чтобы симметрия относительно некоторой точки была изометрией.*

Действительно, если параллельный перенос сохраняет риманову кривизну, то компоненты R_{ijkh} тензора Римана— Кристоффеля, отнесенные к системе ортогональных реперов (R), присвоенных системе нормальных координат с началом O, будут *абсолютными константами.* Обратимся тогда к системе основных дифференциальных уравнений, которые определяют формы:

$$\overline{\omega}^i(t, a; da), \quad \overline{\omega}_i^j(t, a; da);$$

в силу (26.7) они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t} &= da^i + a^k\overline{\omega}_k^i, \\ \frac{\partial\overline{\omega}_i^j}{\partial t} &= R_{i\ kh}^{\ j}\, a^k\overline{\omega}^h. \end{aligned}\right\} \tag{27.11}$$

Отсюда мы получим соотношения

$$\overline{\omega}^i(t, a; da) = \overline{\omega}^i(t, -a; da). \tag{27.12}$$

Действительно, положим

$$\overline{\omega}^i(t, a; da) - \overline{\omega}^i(t, -a; da) = \tilde{\omega}^i,$$

$$\overline{\omega}_i^j(t, a; da) + \overline{\omega}_i^j(t, -a; da) = \tilde{\omega}_i^j.$$

Непосредственный подсчет дает

$$\frac{\partial\tilde{\omega}^i}{\partial t} = a^k\tilde{\omega}_k^i, \qquad \frac{\partial\tilde{\omega}_i^j}{\partial t} = R_{i\ kh}^{\ j}\, a^k\tilde{\omega}^h.$$

Это система линейных однородных с постоянными коэффициентами дифференциальных уравнений; поскольку начальные значения иеизвестных функций равны нулю при $t = 0$, заключаем, что эти функции все равны нулю, откуда следует доказательство (27.12).

Заменяя теперь t на 1, a^k на x^k и da^k на dx^k, получим тождества

$$\omega^i(x, dx) = \omega^i(-x, dx). \tag{27.13}$$

Они показывают:

1) что перенос посредством симметрии вдоль дуги геодезической осуществляет точио параллельный перенос вдоль этой дуги;

2) что симметрия относительно точки O оставляет инвариантной основную форму; иначе говоря, является изометрией.

Нам остается доказать, что если симметрия относительно точки есть изометрия, то параллельный перенос сохраняет риманову кривизну. Это очевидно геометрически. Действительно, отправимся от плоского элемента с началом M, определяемого бивектором из двух векторов $\vec{X}, \vec{Y}$; симметрия относительно точки O преобразует их в векторы $\vec{X}', \vec{Y}'$ с вершиной в M'. Поскольку симметрия предполагается изометрической, она сохраняет риманову кривизну, которая получается однозначно из фундаментальной формы. Риманова кривизна вдоль плоского элемента $[\vec{X}\vec{Y}]$ будет та же самая, что и вдоль плоского элемента $[\vec{X}'\vec{Y}']$; между тем эти два плоских элемента получаются один из другого параллельным переносом с точностью до бесконечно малых третьего порядка. Следовательно, параллельный перенос сохраняет риманову кривизну с точностью до бесконечно малых третьего порядка; следовательно, абсолютная производная римановой кривизны равна нулю и параллельный перенос сохраняет точно риманову кривизну.

Теорема полностью доказана.

ГЛАВА XXVIII

СИММЕТРИЧЕСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

175. Два определения симметрических римановых пространств. Римановы пространства, называемые *симметрическими*, *могут быть определены с помощью двух свойств*, которые, как мы докажем, эквивалентны:

1°) *симметрия по отношению к произвольной точке есть изометрия;*

2°) *параллельный перенос сохраняет риманову кривизну.*

Докажем, что изыскание симметрических пространств сводится к алгебраической проблеме.

Введем в точке O пространства нормальные координаты, соответствующие ортогональному реперу (R_0) с вершиной O. Компоненты R_{ijkh} тензора Римана — Кристоффеля, отнесенные к реперам, присвоенным этой системе координат, будут абсолютными константами, удовлетворяющими классическим условиям симметрии

$$\left.\begin{aligned} R_{ijkh} = -R_{jikh} = -R_{ijhk}, \\ R_{ijkh} + R_{ikhj} + R_{ihjk} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (28.1)$$

С другой стороны, требуя, чтобы абсолютный дифференциал каждого компонента равнялся нулю, мы получаем соотношения

$$R_{rjkh}\omega_i^r + R_{irkh}\omega_j^r + R_{ijrh}\omega_k^r + R_{ijkr}\omega_h^r = 0,$$

откуда, предполагая введенными координаты в излишнем числе t, a^i и замечая, что $\omega_i^j = \overline{\omega}_i^j$, имеем с помощью основной дифференциальной системы уравнений (27.11)

$$R_{r\ kh}^{\ j} R_{i\ lm}^{\ r} - R_{i\ kh}^{\ r} R_{j\ lm}^{\ r} + R_{i\ rh}^{\ j} R_{k\ lm}^{\ r} + R_{\ ikr}^{\ j} R_{h\ lm}^{\ r} = 0. \qquad (28.2)$$

$$(i, j, k, h, l, m = 1, 2, \ldots, n)$$

176. Теорема существования. Мы теперь покажем обратно, что *всякой системе констант, удовлетворяющих линейным и квадратичным уравнениям* (28.1) *и* (28.2), *соответствует симметрическое риманово пространство, и это пространство локально налагается само на себя бесконечным числом способов.*

Действительно, проинтегрируем систему основных дифференциальных уравнений (27.11)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\omega}^i}{\partial t} &= da^i + a^k \overline{\omega}_k^i, \\ \frac{\partial \overline{\omega}_i^j}{\partial t} &= R_{ijkh} a^k \overline{\omega}^k \end{aligned}\right\} \qquad (27.11)$$

с начальными условиями $\overline{\omega}^i = 0$, $\overline{\omega}_i^j = 0$. Эта система дифференциальных уравнений линейных с постоянными коэффициентами, которые дают для форм $\overline{\omega}^i, \overline{\omega}_i^j$ линейные выражения относительно $da^1, da^2, \ldots, da^n$ с коэффициентами в виде целых функций относительно $t, a^1, \ldots, a^n$.

Если здесь положить $t = 1$ и заменить a^i на x^i, получим формы $\omega^i(x, dx), \omega_i^j(x, dx)$; определитель из коэффициентов при $dx^1, dx^2, \ldots dx^n$ в формах $\omega^1 \omega^2, \ldots, \omega^n$ отличен от нуля для достаточно малых значений x^i (он равен 1 в точке O).

Остается показать, что полученные таким образом формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют *уравнениям структуры*

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i], \\ d\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j] + R_{ij\,|kh|} [\omega^k \omega^h]; \end{aligned}\right\} \qquad (28.3)$$

достаточно, впрочем, показать, что эти соотношения будут удовлетворяться формами $\overline{\omega}^i(t, a; da)$, $\overline{\omega}_i^j(t, a; da)$, если внешние дифференциалы $d\omega^i$, $d\overline{\omega}_i^j$ будут подсчитываться при постоянном t. Положим

$$\left.\begin{aligned} d\overline{\omega}^i &= [\overline{\omega}^k \overline{\omega}_k^i] + \varepsilon^i, \\ d\overline{\omega}_i^j &= [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j] + R_{ij\,|kh|} [\overline{\omega}^k \overline{\omega}^h] + \varepsilon_i^j, \end{aligned}\right\} \qquad (28.4)$$

обозначая через ε^i, ε_i^j внешние квадратичные дифференциальные формы относительно дифференциалов $da^1, da^2, \ldots, da^n$, очевидно равных нулю для $t = 0$, ибо для $t = 0$ сами формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_i^j$ тождественно равны нулю.

Мы выведем систему линейных однородных дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять формы ε^i, ε^j_i. Раз это будет сделано, станет очевидно, что эти формы, равные нулю при $t=0$, будут тождественно равны нулю, что и докажет соотношение (28.3).

Мы придем к искомой системе дифференциальных уравнений, дифференцируя по параметру t уравнения (28.4). Достаточно заметить, что если $\overline{\omega}$ есть дифференциальная форма с коэффициентами, зависящими от t, то операция дифференцирования по t и операция внешнего дифференцирования переместительны:

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\overline{\omega}) = d\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t}. \tag{28.5}$$

Действительно, если, например,

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} a_{ij}(u, t)\,[du^i\, du^j],$$

то выражение

$$d\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t\,\partial u^k}\,[du^i du^j du^k]$$

и выражение

$$\frac{\partial (d\overline{\omega})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\,[du^i du^j\, du^k]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t\,\partial u^k}\,[du^i du^j du^k]$$

очевидно совпадают.

Приложим соотношение (28.5) к форме $\overline{\omega}^i$; мы получим, принимая во внимание (28.1),

$$\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} = d\,\frac{\partial \overline{\omega}^i}{\partial t} - \left[\frac{\partial \overline{\omega}^k}{\partial t}\;\overline{\omega}^i_k\right] - \left[\overline{\omega}^k\,\frac{\partial \overline{\omega}^i_k}{\partial t}\right],$$

или в силу (26.7)

$$\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} = \left[\,da^k \overline{\omega}^i_k\,\right] + a^k\,[\overline{\omega}^h_k \overline{\omega}^i_h] + a^k R_k{}^i{}_{\alpha\beta}\,[\omega^\alpha \omega^\beta] +$$
$$+ a^k_h \varepsilon^i_k - [da^k + a^h \overline{\omega}^k_h,\ \overline{\omega}^i_k] - [\overline{\omega}^k,\ R_k{}^i{}_{\alpha\beta} a^\alpha \overline{\omega}^\beta],$$

или по приведении подобных членов

$$\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} = a^k \varepsilon^i_k. \tag{28.6}$$

Подсчет $d\dfrac{\partial\bar{\omega}_i^j}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}(d\bar{\omega}_i^j)$ дает

$$d\frac{\partial\bar{\omega}_i^j}{\partial t}=d(R_{i\,kh}^{\,j}a^k\bar{\omega}^h)=R_{i\,kh}^{\,j}[da^k\bar{\omega}^h]+$$

$$+R_{i\,kh}^{\,j}a^k[\bar{\omega}^l\bar{\omega}_l^h]+R_{i\,kh}^{\,j}a^k\varepsilon^h,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\bar{\omega}_i^j)=\frac{\partial}{\partial t}\{[\bar{\omega}_i^k\bar{\omega}_k^j]+R_{i\;kh}^{\,j}[\bar{\omega}^k\bar{\omega}^h]+\varepsilon_i^j\}=$$

$$=R_{i\,hl}^{\,k}a^h[\bar{\omega}^l\bar{\omega}_k^j]-R_{k\,hl}^{\,j}a^h[\bar{\omega}^l\bar{\omega}_i^k]+$$

$$+R_{i\,kh}^{\,j}[da^k+a^l\bar{\omega}_l^k,\ \bar{\omega}^h]+\frac{\partial\varepsilon_i^j}{\partial t}.$$

Сравнение этих двух формул дает

$$\frac{\partial\varepsilon_i^j}{\partial t}=R_{i\,kh}^{\,j}a^k\varepsilon^h+a^h[\bar{\omega}^l,\ R_{i\,hk}^{\,j}\bar{\omega}_l^k+R_{k\,hl}^{\,j}\bar{\omega}_i^k-$$

$$-R_{i\,hl}^{\,k}\bar{\omega}_k^j+R_{i\,kl}^{\,j}\bar{\omega}_h^k],$$

но форма

$$R_{i\,hk}^{\,j}\bar{\omega}_l^k+R_{k\,hl}^{\,j}\bar{\omega}_i^k-R_{i\,hl}^{\,k}\bar{\omega}_k^j+R_{i\,kl}^{\,j}\bar{\omega}_h^k,\tag{28.7}$$

равная нулю для $t=0$, допускает производную по t, равную

$$a^r\bar{\omega}^s(R_{i\,hk}^{\,j}R_{l\,rs}^{\,k}+R_{k\,hl}^{\,j}R_{i\,rs}^{\,k}-R_{i\,hl}^{\,k}R_{k\,rs}^{\,j}+R_{i\,kl}^{\,j}R_{h\,rs}^{\,k}).$$

В силу (28.2) эта производная, а потому и форма (28.7) равны нулю. Имеем, следовательно,

$$\frac{\partial\varepsilon_i^j}{\partial t}=R_{i\,kh}^{\,j}a^k\varepsilon^h\tag{28.8}$$

Уравнения (28.6) и (28.8) линейны и однородны, что и доказывает, что уравнения структуры (28.3) будут удовлетворены.

Полученное пространство будет симметрическим, ибо обращение в нуль формы (28.7) доказывает обращение в нуль абсолютного дифференциала компонента $R_{i\,kl}^{\,j}$ тензора Римана—Кристоффеля.

177. Движение симметрического пространства как твердого тела. Пространства постоянной римановой кривизны, очевидно, симметрические и будут наиболее простыми пространствами этого рода. Рассуждения, которые мы провели, делают очевидными ряд свойств, общих у симметрических пространств и у пространств постоянной кривизны.

Эти свойства вытекают из очень простого замечания, что выражение фундаментальной формы в функциях нормальных координат относительно точки O будет тождественно самому себе всякий раз, когда мы возьмем прямоугольный начальный репер (R_0'), по отношению к которому компоненты $R_i{}^j{}_{kh}$ тензора Римана—Кристоффеля сохраняют ту же постоянную величину. Это может осуществиться двумя способами.

1°. Если заменять прямоугольный репер (R_0) одним из реперов, которые получаются из него параллельным переносом вдоль геодезической, выходящей из точки O.

2°. Сохраняя начало O репера (R_0), сообщить ему подходящее вращение около точки O; но инфинитезимальная вариация, которую испытывает компонент $R_i{}^j{}_{kh}$ в силу инфинитезимального поворота на угол ε параллельно плоскости бивектора $[\vec{e}_r \, \vec{e}_s]$ была получена в пп. 172, 173. Отсюда следует, что инфинитезимальная вариация, которая получается в силу инфинитезимального вращения, определенного бивектором с компонентами a_{ij}, будет

$$R_r{}^j{}_{kh}a_i^r - R_i{}^r{}_{kh}a_r^j + R_i{}^j{}_{rh}a_k^r + R_i{}^j{}_{kr}a_h^r. \tag{28.9}$$

Следовательно, наиболее общее инфинитезимальное вращение (a_{ij}), которое может испытывать репер (R_0) без измеиения компонентов римановой кривизны, дается системой уравнений:

$$R_r{}^j{}_{kh}a_i^r - R_i{}^r{}_{kh}a_r^j + R_i{}^j{}_{rh}a_k^r + R_i{}^j{}_{kr}a_h^r = 0. \tag{28.10}$$

Если эта система относительно $\frac{n(n-1)}{2}$ неизвестных $a_{ij} = -a_{ji}$ содержит $\frac{n(n-1)}{2} - \rho$ независимых уравнений, то симметрическое пространство допускает связную группу вращений около точки O, зависящую от ρ параметров. Эта группа называется *группой изотропии* в точке O.

Отсюда следует, что прямоугольные реперы, которые можно выбирать в качестве начальных реперов системы нормальных координат с одной и той же фундаментальной формой, зависят от $n + \rho$ параметров.

Следовательно, *пространство допускает связную группу с $n + \rho$ параметрами твердых перемещений*. Если пространство постоянной кривизны, то уравнений (28.10) не будет, число $\rho = \frac{n(n-1)}{2}$, и пространство обладает полной свободной подвижностью.

178. Трансвекции Э. Картана. Среди твердых перемещений симметрического пространства отметим те, которые происходят от двух последовательных симметрий относительно двух точек A и B; это — *трансвекции* Э. Картана; в таком перемещении каждая точка геодезической AB испытывает смещение вдоль этой геодезической, равное удвоенному расстоянию AB. Геодезическая AB называется *геодезической базиса* трансвекции. В случае евклидова пространства трансвекции—не что иное, как переносы; они допускают бесконечное множество геодезических базы, параллельных между собой.

В пространстве постоянной, ненулевой кривизны трансвекция допускает только одну геодезическую базы.

179. Топологическое произведение двух произвольных римановых пространств. Понятие неприводимого симметрического пространства основывается на понятии *топологического произведения* двух пространств.

Если заданы два пространства E_1, E_2 размерностей соответственно n_1 и n_2, то *топологическим произведением* E этих пространств называется пространство n_1+n_2 измерений, каждая точка которого определяется как упорядоченное множество (M_1, M_2) точки E_1 и точки E_2.

Если пространства E_1 и E_2— римановы, то пространство E — *по определению* риманово пространство, фундаментальная форма которого будет суммой фундаментальных форм E_1 и E_2. Иначе говоря, если рассматривать две бесконечно близкие точки (M_1, M_2), (M_1', M_2') пространства E, то квадрат расстояния этих двух точек по определению равен сумме квадрата расстояния точек M_1, M_1' пространства E_1 и квадрата расстояния точек M_2, M_2' пространства E_2.

Если выбрать в E_1 систему координат u^i $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$ и в E_2 систему координат $v^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n^2)$, то всякая точка пространства E определяется n_1+n_2 координатами u^i, v^α. Точку M_1 из E_1 можно назвать проекцией точки (M_1, M_2) из E на пространство E_1 и точку M_2 из E_2 — ее проекцией на пространство E_2. Если фундаментальные формы пространств E_1 и E_2 будут соответственно

$$g_{ij}(u)\,du^i\,du^j, \quad \gamma_{\alpha\beta}(v)\,dv^\alpha dv^\beta,$$

то фундаментальная форма пространства E будет суммой

$$g_{ij}(u)\,du^i du^j + \gamma_{\alpha\beta}(v)\,dv^\alpha dv^\beta.$$

180. Приводимые и неприводимые симметрические римановы пространства. Если рассмотреть соприкасающееся евклидово пространство в точке M_1 пространства E_1 и соприкасающееся евклидово пространство в точке M_2 из E_2, то евклидово пространство, являющееся топологическим произведением этих двух евклидовых пространств, будет соприкасающимся к пространству E в точке (M_1, M_2), где M_1 и M_2 — ее проекции на E_1 и E_2. Отсюда следует, что абсолютный дифференциал переменного вектора пространства E допускает проекциями на E_1 и на E_2 абсолютные дифференциалы соответствующих проекций этого вектора.

Если вдоль линии (C) пространства E абсолютный дифференциал единичного касательного вектора равен нулю, т. е. линия (C) — геодезическая, то проекция (C_1) линии (C) на E_1 будет геодезической пространства E_1 и проекция (C_2) на E_2 будет геодезической для E_2. Более того, две равные дуги линии (C) проектируются равными дугами линии (C_1). Отсюда легко получается, что если симметрия относительно точки (O_1, O_2) пространства E является изометрией, то то же будет в пространстве E_1 с симметрией относительно точки O_1 и в пространстве E_2 с симметрией относительно точки O_2 и наоборот.

Теорема. *Чтобы топологическое произведение двух римановых пространств было симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих двух пространств было симметрическим.*

Определение. *Симметрическое пространство называется приводимым или неприводимым в зависимости от того, можно или нельзя рассматривать его как топологическое произведение двух других римановых пространств.*

Пространство постоянной ненулевой кривизны — неприводимое симметрическое пространство. Действительно, предположим, что оно приводимо и выберем в каждом из слагаемых пространств систему нормальных координат, именно:

первые n_1 координат x^i $(i = 1, \ldots, n_1)$,
вторые n_2 координат x^α $(\alpha = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$.

Ясно, что формы ω_i^α равны нулю и, следовательно, также в силу (27.11) формы Ω_i^α, между тем это невозможно, ибо в силу (17.1)

$$\Omega_i^\alpha = -K\,[\omega^i\omega^\alpha] \quad (K \neq 0).$$

181. Постоянная кривизна второго рода неприводимых симметрических пространств. Докажем теперь теорему, которая сводит отыскание симметрических пространств к изысканию симметрических пространств с постоянной римановой кривизной второго рода.

Теорема. *Всякое неприводимое симметрическое пространство имеет постоянную кривизну второго рода.*

Напомним (п. 102), что пространство постоянной кривизны второго рода является пространством, кривизна которого одна и та же во всех направлениях $(n-1)$-мерной размерности, или еще, у которой свернутый тензор Риччи равен произведению постоянной на фундаментальный тензор.

Присоединим к точке O пространства прямоугольный репер (R_0), так чтобы все компоненты тензора Риччи равнялись нулю, кроме R_{11}, R_{22}, ..., R_{nn}.

Потребуем, чтобы абсолютные дифференциалы компонентов тензора были равны нулю; мы получим, например, для R_{12}:

$$R_{i2}\omega_1^i + R_{1i}\omega_2^i = 0,$$

или

$$(R_{22} - R_{11})\,\omega_1^2 = 0.$$

Следовательно, форма ω_1^2 равна нулю, если $R_{11} \neq R_{22}$. Предположим, что n компонент R_{11}, R_{22}, ..., R_{nn} не равны все между собой, например, $R_{11} = R_{22} = \ldots = R_{pp}$, последующие $R_{p+1,\,p+1}$ ..., R_{nn} не равны первым. Обозначая латинскими буквами i, j,... первые p указателей, а греческими α, β, ... — все $n-p$ остальных, получим

$$\omega_i^\alpha = 0 \; (i = 1, \ldots, p; \;\; \alpha = p+1, \ldots, n).$$

Рассмотрим теперь систему нормальных координат, определенных начальным репером (R_0). Основные дифференциальные уравнения (27.11) показывают, что компоненты $R_{i\alpha,\,pq}$ тензора Римана — Кристоффеля все равны нулю, будут ли индексы p, q латинскими или греческими; отсюда легко получается, что только те компоненты этого тензора не равны нулю, у которых все индексы только латинские или только греческие; но тогда уравнения (27.11) можно разбить на две группы: первая, в уравнениях которой встречаются только латинские индексы, и вторая, в уравнениях которой будут только греческие индексы. Квадратичная форма

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^p)^2$$

содержит только переменные x^1, x^2, ..., x^p и их дифференциалы, а квадратичная форма

$$(\omega^{p+1})^2 + \ldots + (\omega^n)^2$$

только переменные x^{p+1}, ..., x^n и их дифференциалы.

Пространство приводимо, что противоречит допущению. Следовательно, надо положить все R_{11}, R_{22},..., R_{nn} равными между собой, а в таком случае пространство будет постоянной кривизны второго рода.

З а м е ч а н и е. Обратная теорема, вообще говоря, не имеет места: симметрическое риманово пространство постоянной кривизны второго рода не обязательно приводимо, что показывает простой пример евклидова пространства.

ГЛАВА XXIX

ГРУППЫ ТВЕРДЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

182. Общие соображения. Мы уже говорили о движениях пространства постоянной кривизны и симметрических пространств. Напомним, что твердое перемещение, или, короче, перемещение в римановом пространстве, является точечным преобразованием, которое сохраняет расстояние двух произвольных инфинитезимально близких точек или которое оставляет инвариантной фундаментальную форму пространства.

Перемещение сохраняет длину дуги произвольной кривой, площадь части поверхности и т. д. Мы знаем также, что оно сохраняет риманову кривизну в точке по заданному плоскому направлению и т. д.

Мы займемся, в частности, непрерывными группами движений. Непрерывное семейство (связное) перемещений образует группу, если вместе с одним перемещением оно содержит перемещение обратное и если вместе с двумя перемещениями оно содержит перемещение результирующее, в каком бы порядке ни выполнялись эти перемещения *. Всякая непрерывная группа перемещений зависит от некоторого числа параметров (порядок группы). Мы видели (п. 177), как можно определить порядок наибольшей группы движений в симметрическом пространстве.

Можно поставить относительно групп движений две главные проблемы, именно:

Проблема 1. *Определить группы преобразований, способные представлять аналитически группу движений риманова пространства и определить для каждой из этих групп соответствующие римановы пространства.*

* Всякое непрерывное семейство перемещений образует группу, если оно не содержится в непрерывном семействе, более обширном.

П р о б л е м а II. *При заданном римановом пространстве определить все его твердые перемещения.*

Мы будем заниматься сейчас только первой проблемой; вторая, интимно связанная с теорией наложения двух римановых пространств, будет рассмотрена ниже.

183. Общие требования регулярности. Группы, которые мы будем рассматривать, будут подчинены некоторым аналитическим условиям, которые характеризуют группы Ли. Эти условия следующие:

координаты $(u^{i'})$ *точки, полученной из точки* (u^i) *преобразованием группы, допускают непрерывные частные производные двух первых порядков по отношению к координатам* u^i *и параметрам* a^k (все $(u^i)'$ суть функции класса C^2 относительно аргументов u^i и a^k).

Мы ограничимся в дальнейшем только теми заменами координат, для которых новые координаты будут функциями класса C^2 относительно старых.

Компоненты g_{ij} фундаментального тензора тоже предполагаются класса C^2; может случиться, что символы Кристоффеля и компоненты римановой кривизны будут предполагаться класса C^p, где $p > 2$.

Это повлечет дополнительные ограничения для g_{ij}.

184. Транзитивные и интранзитивные группы. Траектории. Группа G твердых перемещений называется *транзитивной*, если существует, по крайней мере, одно перемещение, переводящее произвольно заданную точку M в совпадение с другой произвольно заданной точкой M'. В противном случае группа называется *интранзитивной*.

Группа называется *просто транзитивной*, если перемещение, которое переводит точку M в точку M', единственное, в противном случае — *кратно транзитивной*.

Траекторией группы G движений называется многообразие, являющееся геометрическим местом точек, преобразованных движениями группы из одной данной точки. Всякая траектория Σ группы может рассматриваться как происходящая из перемещений группы, приложенных к какой-нибудь одной из ее точек.

Всякая траектория Σ, если ее рассматривать как риманово пространство, фундаментальная форма которого индуцирована наличием этой формы в заданном пространстве, допускает для самой себя группу движений G, которая с этой точки зрения будет транзитивной. Пусть $p < n$ — размерность траекторий. Если группа G порядка p, то она оперирует на Σ как просто транзитивная; если порядок группы больше p, как группа кратно транзитивная. В частности, для $p=1$ траектории будут линиями, группа G необходимо однопараметрическая, ибо наибольшая связная группа твердых перемещений лиинии дается уравнением

$$u' = u + a,$$

где u — криволинейная абсцисса, отсчитываемая от фиксированной точки.

Если группа движений G интранзитивная, то заданное пространство порождается семейством траекторий Σ группы; через каждую точку пространства проходит траектория и только одна, и эти траектории зависят от $n - p$ параметров, если траектории размерности p. Эти $n - p$ параметров можно рассматривать как составляющие $n - p$ координат произвольной точки пространства. Чтобы выделить затем отдельные точки траектории, надо ввести еще p других координат.

185. Реперы, присвоенные группе движений. Мы можем приложить метод подвижного репера, присоединяя к каждой точке пространства декартов репер или *даже целое семейство* декартовых реперов. При заданной траектории Σ мы присоединим к некоторой отдельной точке A траектории Σ частный декартов репер (R_A) и будем рассматривать все реперы, полученные из (R_A) твердыми перемещениями группы. Это имеет смысл, ибо всякое точечное преобразование пространства одновременно с преобразованием точки M в точку M' преобразует определенным образом * всякий вектор, исходящий из точки M, в вектор, исходящий из точки M'. Если преобразование будет твердым перемещением, оно сохраняет длину векторов, скалярное произведение двух векторов и т. д.

Следовательно, преобразование репера (R_M) с вершиной в M дает репер $(R_{M'})$ с вершиной в M', базисные векторы которого имеют те же взаимные скалярные произведения, что и базисные векторы репера (R_M), иначе говоря, *реперы* (R_M) *и* $(R_{M'})$ *равны.*

Все семейство реперов, полученное этим способом, называется *присвоенным* к рассматриваемой группе движений.

Предыдущие замечания приводят непосредственно к теореме.

Теорема I. *Компоненты g_{ij} фундаментального тензора, отнесенные к семейству реперов, присвоенных группе движений G пространства, являются инвариантами относительно этой группы.*

Если эта группа транзитивна, то это будут абсолютные константы; если группа интранзитивна, они зависят только от $n - p$ параметров, которые определяют отдельные траектории в семействе траекторий группы.

---

* Компоненты вектора, отнесенные к натуральным реперам, присоединенным к выбранным координатам, преобразуются как дифференциалы координат в силу рассматриваемого точечного преобразования.

186. Инвариантные формы группы твердых перемещений. Имеется другая аналогичная теорема относительно форм ω^i, ω_i^j, которые определяют относительное положение двух инфинитезимально близких реперов. Действительно, пусть (R_M) и $(R_{M'})$— два инфинитезимально близких репера из семейств присоединенных к двум инфинитезимально близким точкам M, M'; движение группы преобразует их в два других репера (R_N), $(R_{N'})$. Фигура, образованная парой (R_N), $(R_{N'})$, очевидно, равна фигуре, образованной реперами (R_M), $(R_{M'})$*; имеем, следовательно, теорему:

Теорема II. *Формы ω^i, ω_i^j, определяющие структуру пространства, отнесенного к семейству реперов, присвоенных группе перемещений G пространства, инвариантны относительно этой группы.*

Докажем еще последнюю теорему относительно того случая, когда траектории преобразуются группой G просто транзитивно. К каждой точке пространства тогда присоединен только один репер и формы ω_i^j будут определенными линейными комбинациями форм ω^i:

$$\omega_i^j = \gamma_{i\,k}^{\,j}\,\omega^k. \qquad (29.1)$$

Теорема III. *Коэффициенты $\gamma_i{}^j{}_k$ (обобщенные символы Кристоффеля) инвариантны относительно группы перемещений, если порядок этой группы равен размерности траекторий группы.* Эта теорема в действительности—непосредственное следствие соотношений (29.1) и инвариантности форм ω^k и ω_i^j.

Та же теорема прилагается к символам γ_{ijk} так же, как к компонентам тензора римановой кривизны (тензора Римана — Кристоффеля).

В этой главе мы пользовались косоугольным репером. В некоторых задачах бывает удобно пользоваться ортогональными реперами, но бывают другие, где предпочтительно оставить наибольший произвол в выборе реперов, присвоенных группе.

187. Римановы пространства, допускающие просто транзитивную группу движений. В силу соотношений, полученных выше, мы видим, и это будет ниже доказано (п. 197), что отыскание римановых пространств, допускающих группу движений, по существу сводится к отысканию тех пространств, которые пре-

---

* Компоненты ω^i относительно репера (R_M) бесконечно малого вектора $\overrightarrow{MM'}$ равны компонентам $(\omega^i)'$ относительно репера (R_N) бесконечно малого вектора $\overrightarrow{NN'}$; далее, величины ω_i^j, которые определяют компоненты относительно (R_M) векторов базиса $(R_{M'})$ равны аналогичным величинам $(\omega_i^j)'$.

образуются этой группой транзитивно. Поэтому мы будем предполагать сначала группу просто транзитивной.

Используем систему реперов, присвоенную группе G, с инвариантными относительно группы формами ω^i и ω_i^j, из которых первые n линейно независимы. Будем искать, каким условиям должны удовлетворять эти формы, чтобы пространство допускало просто транзитивную группу движений.

Перемещения группы G, если они существуют, будут получаться интегрированием уравнений в полных дифференциалах

$$\omega^i(u';\ du') = \omega^i(u;\ du), \tag{29.2}$$

где $(u^i)'$ — неизвестные функции от u^i. Поскольку должно существовать решение такое, что заданным значениям u^i соответствуют заданные значения $(u^i)'$, система будет вполне интегрируема. Можно прямо найти необходимые условия, чтобы это так было. Образуем внешние дифференциалы $d\omega^i$ форм ω^i, которые мы выразим как внешние квадратичные формы относительно

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^n:$$

$$d\omega^i = c_{[kh]}{}^i\,[\omega^k\omega^h] \quad (c_{kh}{}^i = -c_{hk}{}^i). \tag{29.3}$$

Группа G, оставляющая инвариантными формы ω^i и, следовательно, их внешние дифференциалы $d\omega^i$, оставляет инвариантными и коэффициенты $c_{[kh]}^{\ i}$; поскольку группа G транзитивна, эти коэффициенты будут постоянными.

Теорема I. *Формы ω^i относительно системы реперов, присвоенных просто транзитивной группе движений, удовлетворяют соотношениям* (29.3), *где коэффициенты $c_{[kh]}^{\ i}$ постоянны.*

188. Просто транзитивная группа преобразований как группа движений. Эта теорема имеет важное дополнение.

Теорема II. *Всякая просто транзитивная группа преобразований с n переменными может рассматриваться как просто транзитивная группа движений риманова пространства n измерений *.*

Пусть, действительно,

$$(u^i)' = f^i(u;\ a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{29.4}$$

конечные уравнения преобразований группы, где мы предполагаем функции f^i класса C^2 относительно обеих серий аргументов.

---

* Эта теорема разрешает в той мере, в какой это касается просто транзитивных групп, первую часть проблемы I, или скорее приводит ее к изысканию просто транзитивных групп, что целиком относится к теории групп.

Рассмотрим u^i как координаты точки в пространстве n измерений. Пусть O — фиксированная точка с координатами $(U^i)_0$ и M — произвольная точка с координатами u^i; существует преобразование T_a группы, переводящее точку M в точку O и параметры a^k этого преобразования получаются разрешением уравнений (29.4), где левые части заменены постоянными $(U^i)_0$. Пусть теперь M' — точка с координатами $(u^i)'$ и T_b — преобразование группы G, переводящее точку M' в точку O, с параметрами в b^k, получаемыми аналогично предыдущим. Можно перейти из точки M в точку M', выполняя сначала преобразование T_a, которое переводит точку M в точку O, затем преобразование T_b^{-1}, обратное преобразованию T_b, которое переводит точку O в точку M'; пусть

$$T_c = T_b^{-1} T_a —$$

результирующее преобразование. Пусть теперь $(u^i + du^i)$ — координаты точки M_1, инфинитезимально близкой к точке M, и M_1' — точка, инфинитезимально близкая к M', которая получается из M_1 преобразованием T_c; пусть, наконец, O_1 — точка, инфинитезимально близкая точке O, с координатами $(U^i)_0 + (dU^i)_0$ которая получается из M_1 преобразованием T_a; она должна получиться из M_1' преобразованием T_b. Имеем, следовательно, соотношения

$$(dU^i)_0 = \frac{\partial f^i(u;\, a)}{\partial u^k} du^k = \frac{\partial f^i(u';\, b)}{\partial (u^k)'} d(u^k)'.$$

Заменим в производных $\frac{\partial f^i(u;\, a)}{\partial u^k}$ параметры $a^1, a^2, \ldots, a^n$ их значениями в функциях u^k, проделаем тоже самое с производными $\frac{df^i(u';\, b)}{\partial (u^k)'}$. Приходим таким образом к соотношениям вида

$$\omega^i(u;\, du) = \omega^i(u',\, du'), \tag{29.5}$$

откуда следует следующая лемма, которая является основной теоремой в теории групп.

Лемма. *Всякая просто транзитивная группа может быть определена как множество преобразований, оставляющих инвариантными n линейно независимых дифференциальных форм $\omega^i(u;\, du)$.*

Формы ω^i линейно независимы, потому что определитель из коэффициентов при du^k в этих формах является функциональным определителем функций f^i относительно переменных u^k, и этот определитель равняется единице для тождественного преобразования группы.

Преобразования, оставляющие инвариантными формы ω^i не могут зависеть более чем от n параметров, ибо уравнения (29.5) могут допускать только одно решение, сопоставляющее данным значениям u^i заданные значения $(u^i)'$.

189. Построение риманова пространства, соответствующего данной группе преобразований. Предыдущая лемма доказывает теорему II. Действительно, рассматриваемая группа, оставляющая инвариантными формы ω^i, оставляет инвариантными все квадратичные дифференциальные формы

$$g_{ij}\omega^i\omega^j$$

с постоянными коэффициентами g_{ij}. С другой стороны, форма $g_{ij}\omega^i\omega^j$ определяет n-мерное риманово пространство с единственным условием, чтобы коэффициенты g_{ij} были выбраны так, чтобы форма была положительно определенная.

Важно заметить, что при вариации выбора постоянных значений коэффициентов g_{ij} получаемые римановы пространства, вообще говоря, не будут наложимы друг на друга. Однако существует очень частный случай, когда получается одно и то же риманово пространство, это тот случай, когда все константы c_{kh}^i — нули. Все формы ω^i тогда будут точными дифференциалами, которые можно предположить равными du^i и все соответствующие фундаментальные формы — с постоянными коэффициентами. Все получаемые пространства — локально евклидовы и группа G — группа переносов в них.

190. Постоянные структуры. Уравнения структуры. Постоянные c_{kh}^i называются *постоянными структуры* группы G. Действительно, они определяют *структуру* или *закон композиции* преобразований групп в том смысле, что, если рассматривать две просто транзитивные группы с одними и теми же постоянными структуры, то эти две группы будут *подобны*, т. е. могут рассматриваться как осуществляющие те же самые геометрические преобразования в пространстве, где произведена замена координат. Действительно, пусть n независимых линейных дифференциальных форм $\overline{\omega}^i(v,\ dv)$ удовлетворяют тем же соотношениям (29.3)

$$d\overline{\omega}^i = c_{kh}^i\,[\overline{\omega}^k\overline{\omega}^h].$$

Уравнения

$$\overline{\omega}^i\,(v,\ dv) = \omega^i\,(u,\ du) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{29.6}$$

где переменные v^i рассматриваются как неизвестные функции переменных u^i, образуют вполне интегрируемую систему.

Действительно, полагая

$$\overline{\omega}^i - \omega^i = \theta^i,$$

имеем тождества

$$d\theta^i = c_{kh}^{\ \ i}\{[\overline{\omega}^k\overline{\omega}^h] - [\omega^k\omega^h]\} = c_{kh}^{\ \ i}\{[\theta^k\overline{\omega}^h] - [\theta^h\omega^k]\},$$

или

$$d\theta^i \equiv 0 \ (mod \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n),$$

что показывает полную интегрируемость системы.

Всякое решение уравнений (29.6) можно рассматривать как определяющее замену переменных в пространстве u^i, и этой заменой координат множество преобразований, которые оставляли неизменным формы ω^i, переходит во множество преобразований, сохраняющих формы $\overline{\omega}^i$. Следовательно, имеется одна и та же группа, оперирующая в одном и том же пространстве, но с различными аналитическими представлениями.

191. Пространство группы. Добавим, что всякое риманово пространство, допускающее просто транзитивную группу движений G, может рассматриваться как *пространство, представляющее* группу в том смысле, что всякое преобразование группы может быть представлено точкой M, в которую это преобразование перевело начальную точку O, выбранную раз навсегда. Произведение преобразования, представляемого точкой M, на преобразование, представляемое точкой A (первое преобразование выполняется в первую очередь), представлено точкой M', куда переведена точка M перемещением, которое переводит O в A, что можно выразить символически посредством соотношения

$$T_{M'} = T_A T_M.$$

Это соотношение определяет, следовательно, одновременно, если рассматривать A как фиксированную точку, операцию (перемещение), выполняемую над точками M пространства, и операцию, выполняемую над преобразованиями T_M группы.

192. Замена инвариантных форм просто транзитивной группы. Очевидно возможно, не меняя просто транзитивной группы G, заменить формы ω^i другими n формами, независимыми линейными комбинациями с постоянными коэффициентами из первоначальных: геометрически это сводится к тому, что в каком-то из римановых пространств, допускающих группу G как группу перемещений, надо изменить репер, приложенный к одной из точек O на совершенно другой репер. Рассматриваемая замена меняет значения констант $c_{kh}^{\ \ i}$. Эти константы играют здесь роль компонентов трехиндексного тензора, антисимметрического по двум первым индексам. *Этот тензор определяет структуру группы*, а не отдельные компоненты.

193. Зависимости между структурными константами. Можно поставить вопрос, существуют ли просто транзитивные группы с произвольными постоянными структуры. Таких групп нет. Внешнее дифференцирование уравнений (29.3) дает

$$c_{kh}{}^{i}\,[d\omega^k\omega^h] = 0, \quad \text{или} \quad c_{kh}{}^{m}c_{ml}{}^{i}\,[\omega^k\omega^h\omega^l] = 0.$$

Объединяя члены, содержащие произведения $[\omega^k\omega^h\omega^l]$, получаем квадратичные соотношения

$$c_{kh}^{m}c_{ml}{}^{i} + c_{hl}{}^{m}c_{mk}{}^{i} + c_{lk}{}^{m}c_{mh}{}^{i} = 0 \quad (i, k, h, l = 1, \ldots, n), \tag{29.7}$$

Эти соотношения классические в теории групп. Мы увидим, что если они удовлетворены, то существует система n линейно независимых дифференциальных форм ω^i $(u, \ du)$, удовлетворяющих соотношениям (29.3).

194. Канонические координаты в римановом пространстве, допускающем просто транзитивную группу твердых перемещений. *Канонические координаты*, которые мы сейчас введем, аналогичны нормальным координатам Римана, но отличны от них. Они тесно связаны с каноническими параметрами теории конечных и непрерывных групп Ли.

Предположим, что к различным точкам пространства присоединена система реперов, присвоенных группе. Пусть O — точка пространства и $a^1, \ a^2, \ldots, a^n$ — направляющие параметры относительно репера (R_0) в точке O некоторого направления, исходящего из этой точки. Рассмотрим непрерывное семейство точек M и, следовательно, реперов (R_M), определяемое дифференциальными уравнениями,

$$\omega^i\,(u;\ du) = a^i dt, \tag{29.8}$$

где t — независимая переменная, с начальными условиями $u^i = (u^i)_0$ для $t = 0$ [эти $(u^i)_0$ будут координатами точки O]. Точка M опишет линию (C), выходящую из точки O с касательной, определяемой в каждой точке направляющими параметрами $a^1, \ a^2, \ldots, a^n$ относительно репера (R_M); линейный элемент, касательный в точке M к кривой (C), получается из линейного элемента, касательного в точке O, перемещением группы G, которое переводит O в M. Все эти перемещения, которые переводят точку O в различные точки M кривой (C), образуют группу. Действительно, рассмотрим фигуру, образованную инфинитезимально близкими реперами (R_M), (R_{M_1}), где M и M_1 — две точки линии (C) с параметрами t и $t + \varepsilon$, и фигуру, образованную реперами (R_N), (R_{N_1}), где N и N_1 — две точки кривой (C) с параметрами t', $t' + \varepsilon$ с тем же самым бесконечно малым ε. Эти две фигуры равны между собой в силу попарного равенства форм ω^i, ω_i^j этих двух фигур. Твердое перемещение, переводящее M в N, переводит M_1 в N_1 и, шаг за шагом, точку с параметром $t+h$ в точку с параметром $t'+h$. Это перемещение, впрочем, то самое, которое переводит точку O в точку линии (C) с параметром $t'-t$; оно заставляет линию (C) скользить по самой себе. Уравнение, которое определяет преобразование этой однопараметрической группы, оставляющей фиксированными формы $a^i dt$, т. е. форму dt, будет просто $t'=t+\text{const}$. Мы видим, что вся группа G допускает бесконечное множество однопараметрических подгрупп, каждая из которых соответствует некоторому выбору направляющих параметров a^i. Линии (C) будут *траекториями* этих подгрупп.

Можно добавить, что линии (C) не произвольны; каждая из них имеет постоянными все свои кривизны. Линии (C) развертываются на касательное евклидово пространство в одной из своих точек на прямые или окружности, если $n=2$, и на прямые окружности или винтовые линии круглого цилиндра, если $n=3$.

Ясно, что точка кривой (C), определяемая $n+1$ координатой в излишнем числе $a^1, a^2, \ldots, a^n, t$, зависит в действительности только от n произведений $a^1 t, a^2 t, \ldots, a^n t$, поскольку дифференциальные уравнения (29.5) можно написать в виде:

$$\omega^i(u;\, du) = d(a^i t).$$

Величины $x^i = a^i t$ будут *каноническими параметрами* твердых перемещений, которые переводят точку O в точку M с параметром t на линии (C) с параметрами $a^1, a^2, \ldots, a^n$. Это *канонические координаты* точки M риманова пространства.

Всякая точка пространства, достаточно близкая к точке O, допускает определенные канонические координаты, но нельзя быть уверенным, что так будет для всякой точки пространства *, и можно дать примеры, когда действительно этого нельзя сделать.

195. Инвариантные формы группы в канонических координатах. Можно определить, каковы будут выражения форм ω^i, когда введены канонические координаты; эти выражения, впрочем, не зависят от точки O, выбранной за начальную точку.

Введем снова координаты a^i, t в излишнем числе; перемещаясь вдоль линии (C) $(da^i=0)$, имеем $\omega^i = a^i dt$. Положим

$$\omega^i = a^i dt + \overline{\omega}^i(t, a^i;\, da^i); \qquad (29.9)$$

формы $\overline{\omega}^i$ равны нулю для $t=0$, ибо, если зафиксировать t и

* Иначе говоря, нельзя быть уверенным, что всякую точку пространства можно получить из точки O преобразованием однопараметрической подгруппы всей группы.

фиксированное значение t равно нулю, то репер (R_0) не меняется и формы ω^i обращаются в нуль. Выделим теперь в уравнениях (29.3)

$$d\omega^i = c^i_{kh}[\omega^k\omega^h],$$

где формы ω^i заменены их выражениями (29.9), члены, содержащие dt. Находим

$$[da^i dt] + \left[dt\,\frac{\partial\omega^i}{\partial t}\right] = c^i_{kh}a^k[dt\overline{\omega}^h],$$

откуда

$$\frac{\partial\overline{\omega}^i}{\partial t} = da^i + c^i_{kh}a^k\overline{\omega}^h. \tag{29.10}$$

Имеем, таким образом, для определения форм $\overline{\omega}^i$, обращающихся в нуль для $t = 0$, систему обыкновенных дифференциальных уравнеиий с постоянными коэффициентами (все a^k и da^k следует рассматривать как постоянные параметры).

Формы $\overline{\omega}^i$ будут, следовательно, линейными комбинациями из da^k, коэффициенты которых будут целыми функциями от $a^1, a^2, \ldots, a^n$. Это, между прочим, доказывает теорема п. 190, в силу которой две просто транзитивные группы, имеющие одни и те же структурные константы, подобны.

Если в формах $\overline{\omega}^i$ заменить переменное t на 1 и аргументы $a^1, a^2, \ldots, a^n$ через $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то получим формы $\omega^i(x, dx)$, выраженные в канонических координатах. Коэффициенты при дифференциалах dx^k в этих формах будут *целыми функциями переменных* $x^1, x^2, \ldots, x^n$. *Риманово пространство, допускающее просто транзитивную группу твердых перемещений, становится, следовательно, аналитическим пространством, когда туда введем канонические координаты.* В действительности, это можно утверждать только для достаточно малой области ν_0, охватывающей начальную точку O, ту, в которой определитель из коэффициентов при dx^k в формах ω^i отличен от нуля, но доказывается, что можно покрыть все пространство окрестностями, налагающимися одна на другую, в каждой из которых можно ввести такие координаты, что фундаментальная форма станет аналитической. Чтобы дать понятие о направляющей идее доказательства, достаточно заметить, что если A — точка окрестности ν_0, например близкой к границе ν_0, то надо только приложить к окрестности ν_0 твердое перемещение T, которое переведет точку O в точку A; получится некоторая окрестность ν_A точки A, в которой введется следующая новая система координат: каждой точке M области ν_A присваиваются в качестве новых координат канонические координаты точки ν_0, которую перемещение T переведет в точку M.

196. Канонические и нормальные координаты. Существует большая аналогия между каноническими координатами и нормальными координатами Римана, но нет полного тождества. Можно поставить задачу: определить, в каком случае канонические координаты будут нормальными. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы траектории (C) однопараметрических подгрупп данной группы были геодезическими пространства, но, перемещаясь вдоль траектории с параметрами a^i, имеем:

$$\frac{Da^i\vec{e}_i}{dt} = a^i\gamma_{i\ h}^{\ k}a^h\vec{e}_k;$$

чтобы траектория была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $\gamma_{i\ h}^{\ k}a^i\ a^h$ была тождественным нулем, т. е. коэффициенты $\gamma_{i\ h}^{\ k}$ (а следовательно, γ_{ikh}) были антисимметричны относительно крайних индексов.

Мы имеем

$$\gamma_{k\ h}^{\ i} - \gamma_{h\ k}^{\ i} = c_{k\ h}^{\ i},$$

откуда

$$\gamma_{k\ h}^{\ i} = \frac{1}{2}c_{kh}^{\ \ i}, \quad \gamma_{kih} = \frac{1}{2}c_{khi},$$

поскольку формы ω_i^j антисимметричны по двум индексам.

Ковариантные компоненты c_{khl} тензора структуры $c_{kh}^{\ \ i}$, уже антисимметричные по двум первым индексам, будут антисимметричны и по крайним индексам, откуда легко следует, что тензор $c_{kh}^{\ \ i}$ является тривектором. В этом случае

$$\omega_i^j = \frac{1}{2}c_{ik}^{\ \ j}\omega^k. \tag{29.11}$$

Обратно, если тензор $c_{kh}^{\ \ i}$ — тривектор, то разность

$$\gamma_{kih} - \gamma_{hik} = c_{khi}$$

меняет знак при перестановке индексов k и i, а с другой стороны поскольку γ_{kih} антисимметричен по двум первым индексам, то имеем

$$\gamma_{kih} - \gamma_{hik} + \gamma_{ikh} - \gamma_{hki} = 0$$

и

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{khi} = 0;$$

следовательно, имеем косую симметрию по крайним индексам.

Т е о р е м а. *Чтобы канонические координаты пространства, допускающие просто транзитивную группу движений, были нормальными координатами Римана, необходимо и достаточно, чтобы тензор $c_{kh}^{\ \ i}$ был тривектором.*

197. Общие интранзитивные группы движений. Теперь мы покажем, что изыскание групп преобразований, допускающих интепретацию, как интранзитивные группы движений в римановом пространстве, сводится к такой же задаче для транзитивных групп. Для этого достаточно доказать, что если в N-мерном римановом пространстве траектории интранзитивной группы движений имеют размерность n, то всегда можно выбрать систему координат так, чтобы n первых координат преобразовывались между собой преобразованиями группы, а $h = N - n$ других были инвариантными относительно этой группы.

Обозначим через $u^1, u^2, \ldots, u^h$ параметры, определяющие траекторию внутри их семейства. Отправимся от некоторой траектории Σ_0 и некоторой точки O этой траектории. Рассмотрим геодезическое многообразие в точке O, образованное геодезическими, нормальными к Σ_0 и выходящими из точки O: это многообразие V_h размерности h. Возьмем h касательных векторов в точке O к этому многообразию таких, чтобы координаты точки M, инфинитезимально близкой к точке O в V_h, рассматриваемые по отношению к этим h векторам, взятым как векторы базиса декартова репера, касательного к многообразию V_h, были $du^1, du^2, \ldots, du^h$. При всем перемещении пространства, оставляющем неподвижной точку O, компоненты $du^1, du^2, \ldots, du^h$ остаются фиксированными, следовательно, h векторов базиса все остаются фиксированными, а поскольку они линейно независимы, приходим к теореме.

Т е о р е м а. *Всякий вектор, выходящий из точки O и нормальный к траектории Σ_0 будет инвариантом при всем перемещении группы G, сохраняющем неподвижной точку O.*

198. Выбор репера. Произвольное перемещение, переводящее точку O траектории Σ_0 в точку A той же траектории, переведет многообразие V_h, исходящее из точки O, в другое многообразие V_h, исходящее из точки A, которое будет геометрическим местом геодезических, выходящих из точки A нормально к траектории Σ_0. Все эти многообразия V_h заполняют все пространство, по крайней мере, в достаточно малой окрестности траектории Σ_0, и позволяют выбрать реперы в различных точках пространства. Для этого достаточно ввести на Σ_0 систему координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и присоединить по условию к точкам многообразия V_h, выходящего из точки A траектории Σ_0, сначала координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ точки A, затем координаты $u^1, u^2, \ldots, u^h$ траектории, на которой рассматриваемая точка лежит.

Далее координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ произвольной точки пространства преобразуются между собой группой G в той мере, в какой она оперирует над точками Σ_0.

Т е о р е м а. *Если задано риманово пространство размерности*

$n+h$, преобразуемое группой движений, траектории которой размерности n, то всегда можно выбрать систему координат $x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1 \ldots, u^h$ так, чтобы n первых координат преобразовывались транзитивно между собой, а h последующих оставались инвариантными *.

199. Отыскание групп движений. Из предыдущей теоремы следует, что отыскание групп, которые можно рассматривать как группы движений риманова пространства, сводится к отысканию групп, которые можно рассматривать как транзитивные группы движений. К уравнениям такой группы, допустим с n переменными, достаточно добавить уравнения, в произвольном числе h, выражающие, что h новых переменных будут инвариантами группы.

Первая часть проблемы I, таким образом, будет разрешена, если она будет решена для транзитивных групп движений.

Отыскание римановых пространств, допускающих группу движений, которые могут быть аналитически представлены заданной группой, тоже может быть решена. Действительно, пусть G — транзитивная группа движений n-мерного пространства и g — соответствующая стационарная подгруппа. Группа g, которая оперирует над формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ как ортогональная группа оставляет инвариантными ν линейно независимых комбинаций с постоянными коэффициентами из форм ω_i, например форм $\omega_{n-\nu+1}, \ldots, \omega_n$ и, сверх того, l квадратичных форм $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ относительно независимых $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-\nu}$ с постоянными коэффициентами. Тогда наиболее общее выражение основной формы, инвариантной относительно группы G, будет

$$ds^2 = A_1(u)\,\varphi_1(\omega) + \ldots + A_l(u)\,\varphi_l(\omega) + \\ + \Psi(\omega_{n-\nu+1}, \ldots, \omega_n, du^1, du^2, \ldots du^h)$$

где Ψ — квадратичная форма, коэффициенты которой зависят только от параметров $u^1, u^2, \ldots, u^h$. Конечно, надо предполагать, что $A_1, A_2, \ldots, A_l$ и коэффициенты квадратичной формы Ψ — такие функции $u^1, u^2, \ldots, u^h$, что форма ds^2 является положительно определенной.

200. Геодезические и вполне геодезические многообразия. Многообразия $V_h(x)$, являющиеся геометрическим местом точек, первые n координат x которых фиксированы, будут геодезическими многообразиями в точке, где они ортогонально пересе-

* В теории структуры групп это свойство групп движений римановых пространств выражается, когда говорят, что эти группы не имеют *существенных инвариантов*. Как пример группы, допускающей существенные инварианты, можно привести группу с двумя переменными x, y и двумя параметрами a, b, определяемую уравнениями

$$x' = x + ay + b, \quad y' = y,$$

кают траекторию Σ_0. Но они не будут вообще вполне геодезическими и не пересекают ортогонально остальные траектории Σ.

Если же рассмотреть многообразия $V_{\nu+h}$, порожденные геодезическими, исходящими из точки O траектории Σ_0, касательные векторы которых в точке O будут инвариантами стационарной подгруппы в точке O, т. е. инвариантами подгруппы g вращений твердого тела около точки O, то это многообразие будет вполне геодезическим; оно будет, следовательно, в каждой своей точке порождаться геодезическими, проходящими через эту точку, инвариантными относительно группы вращений твердого тела около этой точки, которая совпадает с группой g; многообразие $V_{\nu+h}$ будет, следовательно, содержать все геодезические, нормальные в этой точке к траектории Σ, которая ее содержит, значит многообразие $V_{\nu+h}$ будет пересекать ортогонально траекторию Σ.

Теорема. *Если через точку пространства провести многообразие $V_{\nu+h}$ порожденное геодезическими, инвариантными относительно группы вращений около этой точки, то это многообразие будет вполне геодезическим и будет ортогонально пересекать все траектории группы движений.*

201. Стационарная подгруппа, не оставляющая инвариантным ни одного касательного направления. В случае, когда траектории преобразуются индивидуально просто транзитивной группой, имеем $\nu = n$, и многообразие $V_{\nu+h}$ совпадает со всем пространством, многообразия V_h вообще не будут вполне геодезическими.

Если же, наоборот, $\nu = 0$, т. е. если подгруппа твердых вращений около точки не оставляет инвариантным ни одного касательного вектора в точке к траектории, которая ее содержит, то $V_{\nu+h}$ совпадает с V_h. Имеем теорему:

Теорема. *Если стационарная подгруппа некоторой точки пространства не оставляет инвариантным ни одного направления, касательного в этой точке к траектории, которая через нее проходит, то многообразия V_n, порожденные геодезическими, нормальными в этой точке к некоторой траектории, будут вполне геодезическими и пересекают ортогонально все траектории.*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ