Серия
монографий и исследований
по неевклидовой геометрии

№ 3

Э. КАРТАН

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ, ПРОЕКТИВНОЙ И КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1962

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Казанского университета

Перевод с французского *А. П. Заборской, В. Г. Коппа, Б. Л. Лаптева, Е. И. Любимцева* и *П. А. Широкова* под редакцией проф. *П. А. Широкова*.

Настоящий перевод был подготовлен к печати еще в 1940 году, но в связи с трудностями военного времени его опубликование было отложено.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

В настоящем выпуске серии монографий и исследований по неевклидовой геометрии печатается перевод трех основных работ Картана по теории обобщенных пространств:

1) Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée[1] (Ann. de l'Ecole Normale, t. 40, 1923, p. 325—412; t. 41, 1924, p. 1—25; t. 42, 1925 p. 17—88),

2) Sur les variétés à connexion projective[2] (Bull. Soc. math de France, t. 52, 1924, p. 205—241),

3) Sur les espaces à connexion conforme[2] (Ann. Soc. polon. math., t. 2, 1923, p. 171—221).

Несмотря на то, что в настоящее время имеется ряд монографий, посвященных теории обобщенных пространств[3], классические работы Картана до сих пор являются одним из лучших изложений наиболее серьезных вопросов этой теории. Работая одновременно со Схоутеном и американской школой (Веблен, Томас, Эйзенхарт и др.) над созданием теории обобщенных пространств, Картан дал наиболее яркое и глубокое развитие гениальных идей Вейля, являющихся основой современной дифференциальной геометрии[4].

---

[1] В переводе этой работы опущены те главы, которые посвящены теории относительности.

[2] Эти работы Картана вместе с другими исследованиями по неевклидовой геометрии были премированы на VIII международном конкурсе имени Лобачевского (1937 г.). Отзыв Леви-Чивита о работах Картана помещен в книге „VIII-ой международный конкурс на соискание премии имени Н. И. Лобачевского". Казань, 1940, стр. 16—22.

[3] Наиболее обстоятельной из них является книга T. Y. Thomas'a: Differential invariants of generalized spaces, Cambridge, 1934, объединяющая результаты исследований американской школы геометров.

[4] Основные идеи Вейля по современной дифференциальной геометрии изложены им в работах:

H. Weyl. Reine Infinitesimalgeometrie. Math. Zeitschr. 1918, B. 2, s. 384—411.

H. Weyl. Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projectiven und der konformen Affassung. Götting. Nachr. 1921, s. 99—112.

H. Weyl. Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin, Springer, 1923.

H. Weyl. Raum, Zeit, Materie. 5-te Aufl. Berlin, Springer, 1923.

Работы Вейля были премированы на VII международном конкурсе имени Лобачевского (1926 г.). Отзыв Гильберта о работах Вейля помещен в Известиях Казанского Ф.-М. Об-ва (Сер. 3, т. 2, 1927, стр. 66—70).

Глубокий знаток теории непрерывных групп и проблемы Пфаффа, давший в этих областях ряд фундаментальных, классических работ, Картан в своих исследованиях останавливается преимущественно на наиболее интересных вопросах современной дифференциальной геометрии, тесно связанных с теорией групп Ли и теорией инвариантов, облекая свое изложение в интуитивную форму, богатую геометрическим содержанием. Вот почему работы Картана так выделяются своей оригинальностью и глубиной на фоне многочисленных исследований по теории обобщенных пространств.

Изучение основных вопросов, содержащихся в работах Картана, помещенных в настоящем выпуске, не требует особой математической подготовки, — оно вполне доступно для аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, специализировавшихся по геометрии. Конечно, желательно знакомство с основами теории внешних (знакопеременных) форм [1], а для некоторых отделов — некоторые элементарные сведения в теории групп Ли. Изучение же ряда других вопросов (напр., гл. V—VIII работы „Пространства аффинной связности") предполагает более специальную подготовку, именно знание теории линейных представлений групп Ли. Из области тензорного анализа (теории инвариантов) Картан пользуется только алгебраической частью и тензорным анализом общей дифференциальной геометрии (процессом образования объектов при помощи альтернированного дифференцирования). Применения ковариантного дифференцирования Картан старается избегать; там же, где применение ковариантных производных неизбежно (п. 15—18 работы „Пространства аффинной связности"), автор сам дает подробный вывод соответствующих формул.

Как уже было отмечено выше, при переводе первой работы Картана были опущены те места, которые посвящены теории относительности (главы I, V и п. 152–155 главы X); в связи с этим изменена нумерация глав и пунктов оригинала; введение составлено из частей введений к первой и второй частям этой работы, относящимся к теории пространств аффинной связности. При переводе математических терминов учитывались и дальнейшие работы Картана. Ошибки и опечатки оригинала исправлялись при переводе без соответствующих оговорок. Перевод работы „Пространства аффинной связности" принадлежит А. П. Заборской (гл. I), В. Г. Коппу (гл. V), Е. И. Любимцеву (гл. VI и VII), П. А. Широкову (гл. II, III, IV, VIII); перевод работы „Пространства проективной связности" — П. А. Широкову, работы „Пространства конформной связности" — Б. Л. Лаптеву. В конце книги приложен список работ Картана по теории обобщенных пространств.

24/V 1940 г.

П. ШИРОКОВ

---

[1] См., напр., Картан, Интегральные инварианты. ГТТИ, 1940 (гл. VI, VII); Картан, Геометрия римановых пространств. ОНТИ, 1936 (гл. VIII). Для более подробного ознакомления можно рекомендовать книгу Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff. Paris, Hermann, 1922. См. также книги С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана. ГТТИ, 1948; П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными. ГТТИ, 1947.

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Настоящее исследование посвящено теории *пространств аффинной связности*, которые содержат в себе как частный случай пространства *метрической* и *евклидовой* связности. Термин „аффинная связность“ заимствован у Вейля[1], но он употребляется здесь в более общем значении. Как мною было указано в общих чертах в сообщениях, опубликованных в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences[2], пространство аффинной связности является многообразием, которое в *непосредственной* близости каждой точки имеет все свойства аффинного пространства, и для которого установлен закон соответствия областей, окружающих две *бесконечно близкие точки*: это значит, что если в каждой точке задана декартова система координат с началом в этой точке, то известны формулы преобразования (той же природы, что и в аффинном пространстве), позволяющие переходить от одной системы отнесения к любой другой, имеющей начало в бесконечно близкой точке. В теории Вейля это соответствие ограничено a priori требованием, чтобы в окрестности каждой точки существовала система координат, которую он называет *геодезической*, хотя логическая необходимость этого требования не является очевидной. Мною было указано в упомянутых выше сообщениях, что разница, существующая между многообразием аффинной связности и собственно аффинным пространством, выражается в аффинном перемещении, соответствующем бесконечно-малому замкнутому контуру; это перемещение можно разложить на трансляцию и вращение; трансляция определяет *кручение*, вращение — *кривизну* многообразия. В теории Вейля *кручение* равно нулю. Все эти понятия переносятся на пространства метрической и евклидовой связности; классическая теория римановых пространств является не чем иным, как теорией многообразий евклидовой связности и нулевого кручения; эта теория служит основой общей теории относительности, созданной Эйнштейном.

---

[1] В его прекрасной книге: Raum, Zeit, Materie.

[2] C. R., t. 174, p. 437, 593, 734, 857, 1104.

Основные свойства пространств аффинной связности исследуются в первой главе, пространства метрической и евклидовой связности — во второй. В третьей главе даны основы теории кривых и поверхностей, в частности, прямых линий пространств евклидовой связности. В четвертой главе изучается группа голономии пространства аффинной связности*; каждому замкнутому контуру, выходящему из данной точки и возвращающемуся в нее, соответствует перемещение; все эти перемещения образуют группу. Группы, соответствующие различным точкам многообразия, гомологичны между собой: в этом заключается теорема однородности. Я показываю, как можно определить природу этой группы для данного многообразия. Я отмечаю результат, с первого взгляда парадоксальный: если пространство не имеет кручения, то перемещение, соответствующее *бесконечно-малому* контуру, выходящему из данной точки и возвращающемуся в нее, оставляет эту точку неподвижной; *это перестает быть верным* (по крайней мере, если пространство не является собственно аффинным) для произвольного *конечного* контура.

Остальные главы посвящены детальному изучению тензоров кручения и кривизны. Я показываю, каким образом их можно разложить на *неприводимые* тензоры. Изучается метод, эффективно прилагаемый при $n=3$, образования всех *интегральных инвариантов* (скалярных и векторных), связанных с многообразием, по крайней мере, тех, коэффициенты которых зависят *линейно* от составляющих тензоров кривизны и кручения. Некоторые из этих интегральных инвариантов встречались и в первых главах. Я привожу все интегральные инварианты этого типа в четырехмерном пространстве метрической и евклидовой связности и нулевого кручения.

Чтение настоящего исследования не требует знания абсолютного дифференциального исчисления, но зато оно предполагает известными основные правила исчисления кратных интегралов, в частности, те формулы, при помощи которых интегралы, распространенные на замкнутую область, преобразуются в интегралы, взятые по области, ограниченной первой и имеющей число измерений большее на единицу[1].

---

* В настоящем исследовании Картан называет эту группу le groupe des déplacements associé à un point de la variété. Термин „группа голономии“ заимствован из дальнейших работ Картана. См., напр., работу: Группы голономии обобщенных пространств (вып. 1 настоящей серии). (Прим. ред.)

[1] См. Э. Картан. Интегральные инварианты. ГТТИ, 1940.

Хотя я не пользовался абсолютным дифференциальным исчислением, все же я употребляю некоторые его обозначения, например, верхние и нижние индексы. Несмотря на могущие встретиться затруднения, я опускаю также знак суммирования, когда это не может привести к недоразумению. Быть может, это побудит тех, которые привыкли к абсолютному дифференциальному исчислению (которое в действительности, возможно, не является таковым), отнестись с меньшим предубеждением к чтению настоящего исследования.

Глава I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Аффинное пространство

1. В геометрии Евклида существуют свойства фигур, которые называются аффинными: это те свойства, которые сохраняются при применении любых проективных преобразований, оставляющих инвариантной бесконечно удаленную плоскость. Аффинными являются понятия *вектора*, *равенства (эквиполентности) двух векторов*, *геометрической суммы двух векторов*; но понятие *длины вектора* уже является метрическим. В аффинной геометрии можно сравнивать только длины параллельных векторов. Теория систем скользящих векторов, их эквивалентности, приведения их к вектору и паре является также чисто аффинной, несмотря на метрическую форму, в которой ее обычно излагают.

В аффинной геометрии нормальной координатной системой является декартова система координат; взяв начало $\mathbf{O}$ и три вектора (не компланарных) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, приложенных к точке $\mathbf{O}$, мы можем каждый вектор записать в виде:

$$x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

а каждую точку $\mathbf{m}$ в виде:

$$\mathbf{m} = \mathbf{O} + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

обозначая через $\mathbf{m}' - \mathbf{m}$ свободный вектор, с началом в точке $\mathbf{m}$ и концом в $\mathbf{m}'$ (или любой другой, ему эквиполентный).

Предположим, что каждой точке $\mathbf{m}$ пространства отнесена декартова координатная система с началом в $\mathbf{m}$; пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — три вектора, которые определяют с $\mathbf{m}$ эту систему отнесения. Мы могли бы даже вообразить, что каждой точке $\mathbf{m}$ соответствует бесчисленное множество таких систем. Мы получили бы таким образом совокупность систем отнесения, зависящих от некоторого числа ($\leqslant 12$) параметров; обозначим эти параметры через u^i.

При бесконечно-малых изменениях параметров точка $\mathbf{m}$ и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ получают также бесконечно-малые приращения, которые являются векторами; следовательно, их можно линейно выразить при помощи $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пусть

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\mathbf{e}_2 + \omega_2^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 + \omega_3^3\mathbf{e}_3. \end{aligned}\right.$$

ω^i и ω_j^i являются линейными формами дифференциалов du^i; эти двенадцать форм Пфаффа позволяют ориентировать систему отнесения с началом в $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$ относительно системы в $\mathbf{m}$. Можно также сказать, что они определяют бесконечно-малое аффинное перемещение, переводящее один триэдр в другой.

Формы ω^i и ω_j^i не произвольны. Интегралы

$$\int d\mathbf{m},\quad \int d\mathbf{e}_1,\quad \int d\mathbf{e}_2,\quad \int d\mathbf{e}_3,$$

взятые по любому замкнутому контуру, очевидно, равны нулю. Преобразуя эти интегралы в интегралы по поверхности, мы получим:

$$\int d\mathbf{m} = \int\int (\omega^1)'\mathbf{e}_1 + (\omega^2)'\mathbf{e}_2 + (\omega^3)'\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_1\omega^1 + d\mathbf{e}_2\omega^2 + d\mathbf{e}_3\omega^3,$$

или, учитывая формулы (1) и приводя подобные члены,

$$\int d\mathbf{m} = \int\int [(\omega^1)' - \omega^1\omega_1^1 - \omega^2\omega_2^1 - \omega^3\omega_3^1]\,\mathbf{e}_1 +$$
$$+ [(\omega^2)' - \omega^1\omega_1^2 - \omega^2\omega_2^2 - \omega^3\omega_3^2]\,\mathbf{e}_2 + [(\omega^3)' - \omega^1\omega_1^3 - \omega^2\omega_2^3 - \omega^3\omega_3^3]\,\mathbf{e}_3.$$

Аналогично имеем:

$$\int d\mathbf{e}_1 = \int\int [(\omega_1^1)' - \sum \omega_1^i\,\omega_i^1]\,\mathbf{e}_1 + [(\omega_1^2)' - \sum \omega_1^i\,\omega_i^2]\,\mathbf{e}_2 + + [(\omega_1^3)' - \sum \omega_1^i\,\omega_i^3]\,\mathbf{e}_3,$$

$$\int d\mathbf{e}_2 = \int\int [(\omega_2^1)' - \sum \omega_2^i\,\omega_i^1]\,\mathbf{e}_1 + [(\omega_2^2)' - \sum \omega_2^i\,\omega_i^2]\,\mathbf{e}_2 + + [(\omega_2^3)' - \sum \omega_2^i\,\omega_i^3]\,\mathbf{e}_3,$$

$$\int d\mathbf{e}_3 = \int\int [(\omega_3^1)' - \sum \omega_3^i\,\omega_i^1]\,\mathbf{e}_1 + [(\omega_3^2)' - \sum \omega_3^i\,\omega_i^2]\,\mathbf{e}_2 + + [(\omega_3^3)' - \sum \omega_3^i\omega_i^3]\,\mathbf{e}_3.$$

Приравнивая правые части нулю и замечая, что они, будучи векторами, должны иметь составляющие, равные нулю, мы получим формулы:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (\omega^i)' &= \sum_{k=1}^{3} [\omega^k\omega_k^i] \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),\\ (\omega_j^i)' &= \sum_{k=1}^{3} [\omega_j^k\,\omega_k^i] \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}$$

определяющие то, что называется *структурой* аффинного пространства; они заключают в себе *все* его свойства.

2. Эти формулы можно получить и несколько иным путем, хотя, по существу, он будет тождественен с первым. Рассмотрим неподвижную точку $\mathbf{a}$; пусть ее координатами относительно системы отнесения, связанной с точкой $\mathbf{m}$, будут x^1, x^2, x^3; можно положить

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

откуда, дифференцируя и принимая во внимание (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} = (dx^1 + \omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_3^1)\,\mathbf{e}_1 &+\\ + (dx^2 + \omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 + x^3\omega_3^2)\,\mathbf{e}_2 &+\\ + (dx^3 + \omega^3 + x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + x^3\omega_3^3)\,\mathbf{e}_3&. \end{aligned}$$

Так как точка $\mathbf{a}$ неподвижна, то

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} dx^1 + \omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_3^1 &= 0,\\ dx^2 + \omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 + x^3\omega_3^2 &= 0,\\ dx^3 + \omega^3 + x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + x^3\omega_3^3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Расписывая условия, что уравнения (3) вполне интегрируемы, мы снова придем к структурным формулам (2).

Понятие пространства аффинной связности

3. Рассмотрим теперь числовое многообразие 3 измерений, каждая точка $\mathbf{m}$ которого определяется тремя числами u^1, u^2, u^3. Отнесем мысленно каждой точке $\mathbf{m}$ аффинное пространство, содержащее эту точку, и обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ три вектора, образующие с $\mathbf{m}$ систему отнесения для этого пространства. Будем называть такое многообразие „пространством аффинной связности", если определен, и при том произвольным путем, закон, позволяющий ориентировать одно по отношению к другому аффинные простран-

ства, связанные с двумя бесконечно близкими произвольными точками $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ этого многообразия; этот закон позволит сказать, что такая-то точка аффинного пространства, связанного с $\mathfrak{m}$, соответствует такой-то точке аффинного пространства, связанного с точкой $\mathfrak{m}'$, что такой-то вектор первого пространства параллелен или эквиполентен такому-то вектору второго пространства. В частности, точка $\mathfrak{m}'$ сама должна быть ориентирована относительно аффинного пространства точки $\mathfrak{m}$, причем мы примем закон непрерывности, согласно которому координаты точки $\mathfrak{m}'$ в аффинной системе отнесения с началом $\mathfrak{m}$ бесконечно малы; все это позволяет говорить в некотором смысле, что аффинное пространство, связанное с $\mathfrak{m}$, является касательным аффинным пространством к рассматриваемому многообразию [1].

Согласно этому, если связать с каждой точкой $\mathfrak{m}$ в ее аффинном касательном пространстве три координатных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (они могут зависеть от произвольных параметров), то аффинная связность пространства выразится формулами, тождественными по форме с указанными выше:

$$
(1) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{m} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_i^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_i^3\,\mathbf{e}_3, \end{cases}
$$

где ω^i и ω_i^j — формы, линейные относительно дифференциалов параметров, от которых зависит координатная система пространства, причем ω^i зависят только от дифференциалов du^1, du^2, du^3. Эти формулы можно интерпретировать, говоря, что каждая точка $\mathfrak{m}'$ пространства, бесконечно близкая к $\mathfrak{m}$, должна рассматриваться как точка

$$
\mathfrak{m} + \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3
$$

[1] Следует отметить, как это обычно и делается, что в окрестности точки $\mathfrak{m}$ существует аффинная координатная система для точек пространства,— та самая в которой произвольная точка с координатами $u^i + du^i$ имеет декартовы координаты du^i; в этом смысле аффинное пространство, связанное с точкой $\mathfrak{m}$, является действительно касательным к многообразию аффинной связности. Можно было бы также предположить, что многообразие аффинной связности погружено в аффинное пространство более или менее высокого числа измерений и что аффинное пространство, связанное с $\mathfrak{m}$, есть действительно плоское касательное пространство к рассматриваемому многообразию аффинной связности. Можно было бы, наконец, рассматривать аффинное пространство, связанное с точкой $\mathfrak{m}$, как пространство само по себе (не имеющее непосредственного отношения к основному), но воспринимаемое наблюдателем, находящимся в точке $\mathfrak{m}$, как аффинное. Все эти точки зрения совместимы с точкой зрения, указанной в тексте, которая мне кажется логически более приемлемой.

аффинного пространства, касательного в $\mathfrak{m}$ [1]; аналогично этому вектор $\mathbf{e}'_i$, связанный с $\mathfrak{m}'$, эквиполентен вектору

$$
\mathbf{e}_i + \omega_i^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_i^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_i^3\,\mathbf{e}_3
$$

касательного в $\mathfrak{m}$ аффинного пространства. Конечно, эта эквиполентность должна рассматриваться как имеющая смысл только до величин второго порядка малости.

К формулам (1) можно присоединить еще те, которые позволяют перейти от координат x^i точки аффинного пространства, связанного с точкой $\mathfrak{m}$, к координатам $x^i + dx^i$ соответствующей точки аффинного пространства точки $\mathfrak{m}'$. Эти формулы тождественны формулам (3) и получаются тем же путем:

$$
(3) \qquad dx^i + \omega^i + x^1\omega_1^i + x^2\omega_2^i + x^3\omega_3^i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).
$$

Присоединим сюда также формулы, которые устанавливают аналогичный переход для вектора с составляющими ξ^i:

$$
(4) \qquad d\xi^i + \xi^1\omega_1^i + \xi^2\omega_2^i + \xi^3\omega_3^i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).
$$

4. Законы аффинной связности определяют некоторым образом *соответствие* (*связь*) между аффинными касательными пространствами двух бесконечно близких точек $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$. Возникает вопрос,— как установить эту связь для любых двух точек пространства?

На этот вопрос можно ответить, если задан определенный путь, соединяющий точки $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_1$; тогда можно последовательно, шаг за шагом, установить соответствие между этими двумя касательными пространствами. В самом деле, если в каждой точке пути выбрать аффинную систему отнесения, то ω^i и ω_j^i выразятся в виде $p^i dt$ и $p_j^i dt$, где t — параметр, определяющий положение точки пространства на пути, а p^i и p_j^i — являются некоторыми определенными функциями от t. Уравнения (1) тогда могут быть рассматриваемы как обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие в каждой точке пути векторы $\mathfrak{m}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в функции их начальных значений. Таким образом, при помощи интегрирования этих уравнений реализуется вполне точно ориентация аффинного пространства точки $\mathfrak{m}_1$ в аффинном пространстве точки $\mathfrak{m}_0$.

Мы придем к тому же (и этот путь, быть может, более понятен для тех, кто не имеет навыка в счете с векто-

[1] Нетрудно видеть, что преобразованием координат в аффинном пространстве, касательном в точке $\mathfrak{m}$, можно достичь того, что точка $\mathfrak{m} + d\mathfrak{m}$ будет иметь декартовы координаты du^1, du^2, du^3, так как ω^i являются линейными комбинациями дифференциалов du^i.

рами), если будем интегрировать дифференциальные уравнения (3), которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$\frac{dx^i}{dt}+p^i+p_1^i x^1+p_2^i x^2+p_3^i x^3=0.$$

Если за постоянные интегрирования принять значения $(x^i)_0$, которые x^i имеют при начальном значении t, то формулы

(5) $$x^i=a^i+a_1^i(x^1)_0+a_2^i(x^2)_0+a_3^i(x^3)_0$$

определяют преобразование декартовых координат, которое ориентирует аффинное пространство переменной точки $\mathfrak{m}$ относительно аффинного пространства начальной точки пути $\mathfrak{m}_0$. Это преобразование координат, примененное к векторам, дает

$$\xi^i=a_1^i(\xi^1)_0+a_2^i(\xi^2)_0+a_3^i(\xi^3)_0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

откуда

(6) $$(\mathbf{e}_i)_0=a_i^1\mathbf{e}_1+a_i^2\mathbf{e}_2+a_i^3\mathbf{e}_3 \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Последние формулы показывают, как выражается вектор $(\mathbf{e}_i)_0$, когда он переносится шаг за шагом, оставаясь эквиполентным самому себе.

Нетрудно также видеть, что точка $\mathfrak{m}_0$ имеет в аффинном касательном пространстве точки $\mathfrak{m}$ координаты a^1, a^2, a^3:

(6′) $$\mathfrak{m}_0=\mathfrak{m}+a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3.$$

Формулы (6) и (6′) определяют общее решение дифференциальных уравнений (1), как формулы (5) определяют его для уравнений (3).

5. Может ли быть определена связь между аффинными касательными пространствами двух каких угодно точек независимо от пути, их соединяющего? Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальные уравнения (1) или (3) были вполне интегрируемы. Счет уже был нами произведен, когда мы занимались аффинным пространством в собственном смысле; он дает необходимые и достаточные условия (2):

$$(\omega^i)'=[\omega^k\omega_k^i],$$

$$(\omega_j^i)'=[\omega_j^k\,\omega_k^i];$$

мы отбросили во вторых членах знак суммирования по k, следуя принятой системе обозначения в абсолютном дифференциальном исчислении.

Если условия (2) соблюдены и если в некоторой точке $\mathfrak{m}_0$ выбрана система координатных векторов $(\mathbf{e}_i)_0$, то ничто не мешает нам выбрать в любой другой точке $\mathfrak{m}$ векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ соответственно равными $(\mathbf{e}_1)_0$, $(\mathbf{e}_2)_0$, $(\mathbf{e}_3)_0$, так как свойство равенства (эквиполентности) теперь имеет

абсолютное значение. При этом выборе координатных векторов, имеем

$$d\mathbf{e}_i=0$$

и, следовательно, все формы ω_j^i тождественно равны нулю; формулы (2) тогда показывают, что билинейные коварианты форм ω^i тождественно обращаются в нуль; следовательно, ω^i являются полными дифференциалами и, не сужая общности, можно предполагать $\omega^i=du^i$. Тогда формулы

$$d\mathfrak{m}=du^i\mathbf{e}_i$$

показывают, что u^1, u^2, u^3 могут быть приняты за аффинные координаты точки $\mathfrak{m}$ для системы отнесения, применимой во всем пространстве. Другими словами, *пространство само по себе является аффинным.*

Структура пространства аффинной связности

6. Вернемся к общему случаю. Можно ли найти формулы, играющие в рассматриваемом многообразии аффинной связности ту же роль, что и формулы в собственно аффинном пространстве? Их можно получить, следуя рассуждению, аналогичному тому, которое мы привели в начале этой главы при выводе формул (2).

Возьмем в пространстве замкнутый контур, выходящий из точки $\mathfrak{m}$ и возвращающийся в нее, и рассмотрим $\int d\mathfrak{m}$, распространенный по этому контуру. Этому интегралу можно придать смысл при условии, что все бесконечно-малые векторы, геометрическую сумму которых он дает, отнесены к одному и тому же аффинному пространству. Исследования, приведенные в предыдущих параграфах, позволяют отнести их шаг за шагом к аффинному касательному пространству точки $\mathfrak{m}_0$. К этому процессу, который, если быть строгим, затруднителен в применении, мы возвратимся позднее.

Применим лучше второй процесс, который имеет то преимущество, что может быть распространен на кратные интегралы, взятые от векторов, *но который существенно предполагает контур бесконечно-малым.* Будем считать точку $\mathbf{a}$ раз навсегда фиксированной и допустим, что она бесконечно близка ко всем точкам контура; *отнесем все бесконечно-малые векторы $d\mathfrak{m}$ к аффинному касательному пространству в точке* $\mathbf{a}$, что можно сделать с точностью до величин второго порядка малости; это обстоятельство, как известно, не оказывает никакого влияния на вычисление определенных интегралов.

Обозначим через u_0^i координаты (криволинейные) точки **a**, через u^i — координаты точки **m** контура. Положим, кроме того,

$$\omega^i = \gamma^i_k du^k, \quad \omega^j_i = \gamma^j_{ik} du^k.$$

Обозначая через $(\mathbf{e}_i)_0$ координатные векторы в точке **a**, имеем

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i)_0 + \omega_i^j (\mathbf{e}_j)_0 = (\mathbf{e}_i)_0 + (\gamma^j_{ik})_0 (u^k - u^k_0) (\mathbf{e}_j)_0,$$

откуда

$$d\mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i = [\omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\, \omega^j]\, (\mathbf{e}_i)_0.$$

Следовательно, составляющие вектора $d\mathbf{m}$ в аффинном пространстве, касательном в точке **a**, будут

$$\omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\, \omega^j,$$

где $(\gamma^i_{jk})_0$ — значение γ^i_{jk} в точке **a**.

Интеграл от $d\mathbf{m}$ вдоль замкнутого контура будет иметь для i-ой составляющей в аффинном касательном пространстве точки **a** следующий вид:

$$\int \omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\, \omega^j = \int\int (\omega^i)' + (\gamma^i_{jk})_0\, du^k \omega^j + \\ + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0) (\omega^j)'.$$

Отбрасывая в правой части этого равенства третий член как бесконечно-малую более высокого порядка по сравнению с первыми двумя и заменяя во втором члене постоянные коэффициенты $(\gamma^i_{jk})_0$ через переменные значения γ^i_{jk}, мы не изменим этого выражения. В результате мы приходим к следующей формуле *для замкнутого бесконечно-малого контура*:

$$\int d\mathbf{m} = \int\int [(\omega^i)' - \omega^j \omega^i_j]\, \mathbf{e}_i,$$

совпадающей с формулой, установленной в случае собственно аффинного пространства. Здесь векторы $\mathbf{e}_i$ в правой части относятся к произвольной точке **a**, лишь бы она была бесконечно близка к контуру; замена точки **a** другой приводит к изменению результата только на величину бесконечно-малую по сравнению с ним самим.

Коэффициенты при $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в правой части являются двойными интегральными элементами, которые согласно самой природе вопроса содержат только du^1, du^2, du^3 даже в том случае, если система отнесения зависит от произвольных параметров, отличных от u^1, u^2, u^3. Мы положим

$$\Omega^i = (\omega^i)' - [\omega^k \omega^i_k] = A^i_{jk} [\omega^j \omega^k],$$

причем последнее выражение рассматривается как сумма, распространенная по всем комбинациям (jk) из индексов 1, 2, 3.

Согласно этому обозначению имеем

$$\int d\mathbf{m} = \int\int \Omega^1 \mathbf{e}_1 + \Omega^2 \mathbf{e}_2 + \Omega^3 \mathbf{e}_3,$$

что можно записать и так

$$(d\mathbf{m})' = \Omega^1 \mathbf{e}_1 + \Omega^2 \mathbf{e}_2 + \Omega^3 \mathbf{e}_3,$$

где через $(d\mathbf{m})'$ обозначен билинейный ковариант выражения Пфаффа $d\mathbf{m}$; *это выражение нельзя, следовательно, рассматривать в общем случае как полный дифференциал.*

Вектор $\Omega^1 \mathbf{e}_1 + \Omega^2 \mathbf{e}_2 + \Omega^3 \mathbf{e}_3$ определяет то, что можно назвать *кручением* пространства данной аффинной связности. Это кручение равно нулю, если геометрическая сумма $\int d\mathbf{m}$, соответствующая замкнутому бесконечно-малому контуру, равна нулю.

7. Можно вычислить тем же самым способом интеграл $\int d\mathbf{e}_i$, распространенный вдоль бесконечно-малого замкнутого контура, и найти

$$\int d\mathbf{e}_i = \int\int [(\omega^1_i)' - \omega^k_i \omega^1_k]\, \mathbf{e}_1 + [(\omega^2_i)' - \omega^k_i \omega^2_k]\, \mathbf{e}_2 + \\ + [(\omega^3_i)' - \omega^k_i \omega^3_k]\, \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следуют формулы

$$(\omega^i_j)' - [\omega^k_j \omega^i_k] = \Omega^i_j = A^i_{jkl} [\omega^k \omega^l],$$

эквивалентные формулам

$$(d\mathbf{e}_i)' = \Omega^1_i \mathbf{e}_1 + \Omega^2_i \mathbf{e}_2 + \Omega^3_i \mathbf{e}_3.$$

Формы Ω^i_j определяют *кривизну* пространства данной аффинной связности. Кривизна равна нулю, как это видно непосредственно, если уравнения в полных дифференциалах (4) вполне интегрируемы, другими словами, если эквиполентность двух векторов имеет абсолютный смысл, не завися от пути, соединяющего начала этих векторов. В пространстве нулевой кривизны можно связать с различными точками эквиполентные системы отнесения; составляющие ω^i_j тогда будут нулями и остаются только уравнения

$$\Omega^i = (\omega^i)';$$

мы видим, что в случае существования кручения составляющие ω^i вектора $d\mathbf{m}$ относительно фиксированных осей не будут точными дифференциалами.

8. Итак, уравнения структуры (2) в случае пространства произвольной аффинной связности должны быть замеиены формулами

$$(2') \qquad \begin{cases} (\omega^i)' = [\omega^k \omega^i_k] + \Omega^i = [\omega^k \omega^i_k] + A^i_{jk} [\omega^j \omega^k], \\ (\omega^i_j)' = [\omega^k_j \, \omega^i_k] + \Omega^i_j = [\omega^k_j \, \omega^i_k] + A^i_{jkl} [\omega^k \omega^l]. \end{cases}$$

Если выбрать в каждой точке $\mathbf{m}$ наиболее общую систему отнесения, которая кроме u^1, u^2, u^3 содержит еще 9 параметров, эти формулы останутся справедливыми; только A^i_{jk} и A^i_{jkl} будут зависеть от 12 параметров.

Аффинное перемещение, соответствующее замкнутому контуру

9. Метод, которым мы пользовались при выводе формул структуры и построении понятий кривизны и кручения, не может быть распространен на пространства более сложных связностей, например, проективной, конформной и т. д. Более приемлем тот метод, которым мы пользовались ранее, именно, перенесение точек и векторов вдоль заданного пути.

Рассмотрим бесконечно-малый замкнутый контур, выходящий нз точки $\mathbf{m}_0$ и возвращающийся в нее. Последовательная ориентация касательных аффинных пространств в различных точках контура относительно аффинного пространства, касательного в точке $\mathbf{m}_0$, производится, как это мы видели выше, при помощи интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (3), что дает формулы (5). Но уравнения (3) можно рассматривать как определяющие в аффинном пространстве точки $\mathbf{m}$ некоторое *аффинное перемещение*, а именно, то, которое позволяет перевести систему отнесения, связанную с $\mathbf{m}$, в систему отнесения, связанную с бесконечно близкой точкой $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$; величины ω^i и ω^i_j являются в некотором смысле составляющими этого аффинного перемещения в системе отнесения, связанной с точкой $\mathbf{m}$. *Таким образом, интегрирование уравнений* (3) *является в сущности суммированием в аффинном пространстве исходной точки* $\mathbf{m}_0$ *бесконечно-малых последовательных аффинных перемещений, которые переводят систему отнесения, связанную с некоторой точкой контура, в систему отнесения, связанную с бесконечно-близкой точкой.* Когда мы обойдем полностью замкнутый контур, мы получим конечное аффинное перемещение, которое, конечно, будет очень мало, если очень мал замкнутый коитур. Это и есть искомое перемещение, соответствующее замкнутому контуру.

Вообразим себе поверхность S, содержащую рассматриваемый контур; мы можем предполагать, не нарушая общности исследования, что на этой поверхности координата u^3 остается постоянной, так что изменяются только независимые переменные u^1 и u^2, которые мы обозначим через u и v. Координаты u и v можно также рассматривать как прямоугольные координаты точек некоторой вспомогательной плоскости; в этой плоскости замкнутый контур будет иметь в качестве своего образа замкнутую кривую, ограничивающую некоторую площадь A. Мы будем предполагать, *и это уже, конечно, нарушит общность исследования*, что замкнутая кривая (образ) спрямляема, что ее длина l бесконечно мала и что, наконец, площадь квадрата со стороной l конечна по сравнению с площадью A[1].

Если теперь в каждой точке поверхности S мы выберем определенную систему отнесения, то ω^i и ω^i_j дадут определенные выражения Пфаффа, линейные относительно du и dv:

$$\omega^i = \alpha^i \, du + \beta^i dv, \quad \omega^i_j = \alpha^i_j \, du + \beta^i_j \, dv,$$

причем коэффициенты являются определенными функциями, о которых мы будем предполагать, что они дифференцируемы по u и v. Уравнения (3) дадут

$$dx^i + \alpha^i du + \beta^i dv + x^1 (\alpha^i_1 \, du + \beta^i_1 \, dv) + \\ + x^2 (\alpha^i_2 \, du + \beta^i_2 \, dv) + x^3 (\alpha^i_3 \, du + \beta^i_3 \, dv) = 0.$$

Если мы перемещаемся по замкнутой кривой C, то u и v можно выразить в функциях от дуги s кривой-образа $(0 \leqslant s \leqslant l)$.

Обозначим через $(\alpha^i)_0$, $(\beta^i)_0$, $(\alpha^i_j)_0$, $(\beta^i_j)_0$ численные значения функций α^i, β^i, α^i_j, β^i_j в начальной точке кривой C $(s=0)$; положим:

$$(\omega^i)_0 = (\alpha^i)_0 du + (\beta^i)_0 dv, \quad (\omega^i_j)_0 = (\alpha^i_j)_0 du + (\beta^i_j)_0 dv;$$

это — формы Пфаффа с постоянными коэффициентами.

---

1) Этого ие будет, например, если замкиутый контур имеет в качестве образа прямоугольиик со сторонами ε и ε^2. Все указаиные ограничеиия, не соответствующие, конечно, природе вопроса, имеют целью облегчить получение результата, который мы имеем в виду. Строгое доказательство, конечно, необходимо, хотя нет никакого основания сомневаться в общиости получаемого результата. Можно сравнить изложение здесь доказательство с доказательством, данным J. Pérès в его работе „Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemanienne (Rend. Acad. Lincei, (5a) 281, p. 425—428).

Пусть теперь ε — заданное сколь угодно малое положительное число; можно предполагать контур настолько малым, что в каждой его точке разности

$$\alpha^i-(\alpha^i)_0,\quad \beta^i-(\beta^i)_0,\quad \alpha_j^i-(\alpha_j^i)_0,\quad \beta_j^i-(\beta_j^i)_0$$

будут меньше ε по абсолютной величине.

Далее, дифференциальные уравнения, которые определяют x^i, показывают, что

$$|x^i-(x^i)_0|<As,$$

где A — положительное фиксированное число.

Введем вспомогательные функции $\overline{x}^i$ от u и v, принимающие в начальной точке контура значения $(x^i)_0$ и удовлетворяющие вполне интегрируемым уравнениям

$$d\overline{x}^i+(\omega^i)_0+(x^k)_0(\omega_k^i)_0=0;$$

это — линейные функции от u и v. Оценим верхний предел разности $x^i-\overline{x}^i$ в некоторой точке контура.

Имеем

$$dx^i-d\overline{x}^i+\omega^i-(\omega^i)_0+x^k[\omega_k^i-(\omega_k^i)_0]+[x^k-(x^k)_0](\omega_k^i)_0=0,$$

что дает, если проинтегрировать от 0 до s и учесть установленные выше неравенства,

$$|x^i-\overline{x}^i|<B\varepsilon s+Cs^2,$$

где B и C обозначают постоянные положительные числа.

Наконец, можно записать

$$dx^i+\omega^i+\overline{x}^k\omega_k^i+(x^k-\overline{x}^k)\omega_k^i=0,$$

откуда, интегрируя от 0 до l, получаем

$$\left|(x^i)_1-(x^i)_0+\int(\omega^i+\overline{x}^k\omega_k^i)\right|<H\left(\frac{1}{2}B\varepsilon l^2+\frac{1}{3}Cl^3\right),$$

причем H обозначает новое фиксированное число. Правая часть этого неравенства согласно сделанной гипотезе *бесконечно-мала по сравнению с площадью A.*

Ограничиваясь главной частью приращения

$$(x^i)_1-(x^i)_0=\Delta(x^i)_0,$$

имеем, таким образом,

$$\Delta(x^i)_0+\int\int[(\omega^i)'+\overline{x}^k(\omega_k^i)'+d\overline{x}^k\omega_k^i]=0$$

или, заменяя $d\overline{x}^k$ их значениями, а двойной интеграл — его элементом,

$$\Delta(x^i)_0+(\omega^i)'-(\omega^k)_0\,\omega_k^i+\overline{x}^k(\omega_k^i)'-(x^k)_0(\omega_k^h)_0\,\omega_h^i=0.$$

Мы можем, наконец, не изменяя главной части, заменить $\overline{x}^k$ через $(x^k)_0$, затем $(\omega^k)_0$ и $(\omega_k^h)_0$ через ω^k и ω_k^h; опуская в последнем выражении значок 0, мы получим окончательную формулу

$$\Delta x^i+(\omega^i)'-[\omega^k\,\omega_k^i]+x^k\{(\omega_k^i)'-[\omega_k^h\,\omega_h^i]\}=0 \tag{5}$$

или, наконец, учитывая введенные выше обозначения,

$$\Delta x^i+\Omega^i+\Omega_k^i\,x^k=0. \tag{5'}$$

10. Рассмотрим тот частный случай, когда вектор с составляющими ξ^i переносится шаг за шагом, оставаясь эквиполентным самому себе; *когда начало вектора опишет замкнутый контур, его первоначальные составляющие получат бесконечно-малые приращения $\Delta\xi^i$, определяемые формулами*

$$\Delta\xi^i=-\xi^k\Omega_k^i. \tag{6}$$

Например, вектор, выбранный в начальной точке $\mathbf{m}$ в качестве i-ого координатного вектора системы отнесения *после параллельного переноса вдоль замкнутого контура* дает вектор

$$\mathbf{e}_i-\Omega_i^k\,\mathbf{e}_k;$$

он получает *геометрическое приращение* $-\Omega_i^k\,\mathbf{e}_k$. Этот результат не противоречит ранее установленной формуле

$$\int_c d\mathbf{e}_i=\int\int\Omega_i^k\,\mathbf{e}_k,$$

так как $\int d\mathbf{e}_i$ в этой последней относится не к изменению параллельно переносимого вектора, а к изменению вектора, который *в каждой точке* $\mathbf{m}$ *контура принимается за i-ый координатный вектор системы отнесения.*

11. Итак, каждому бесконечно-малому контуру, выходящему из точки $\mathbf{m}$ и возвращающемуся в нее, соответствует бесконечно-малое аффинное перемещение (второго порядка), составляющие которого в системе отнесения, связанной с исходной точкой $\mathbf{m}$, являются элементами двукратных интегралов Ω^i и Ω_j^i. Первые составляющие Ω^i определяют *трансляцию*, вторые Ω_j^i — *аффинное вращение* около точки $\mathbf{m}$.

Трансляция определяет *кручение*, вращение — *кривизну* данного пространства.

12. Возвратимая к формулам (2′)

$$(2') \qquad (\omega^i)' = [\omega^k \omega_k^i] + \Omega^i, \quad (\omega_j^i)' = [\omega_j^k \omega_k^i] + \Omega_j^i,$$

которые определяют структуру пространства аффинной связности. Дифференциальные формы Ω^i и Ω_j^i удовлетворяют примечательным тождествам, которые легко получаются, если выразить, что внешние производные от правых частей уравнения (2′) обращаются тождественно в нуль. Можно упростить вычисление, если заметить, что внешние производные обращаются в нуль вместе с Ω^i и Ω_j^i. Получаем формулы

$$(7) \qquad (\Omega^i)' + [\Omega^k \omega_k^i] - [\omega^k \Omega_k^i] = 0, \quad (\Omega_j^i)' + [\Omega_j^k \omega_k^i] - [\omega_j^k \Omega_k^i] = 0.$$

Дадим геометрическую интерпретацию этим формулам.

Для этого рассмотрим в пространстве некоторый объем, ограниченный замкнутой поверхностью. Каждому элементу этой поверхности, окружающему точку **m** поверхности, соответствует бесконечно-малое аффинное перемещение, определяемое формулой

$$(5') \qquad \Delta x^i + \Omega^i + x^k \Omega_k^i = 0;$$

составляющие Ω^i, Ω_k^i этого перемещения взяты в системе отнесения точки **m**. Мы не можем ввести закона *композиции* этих бесконечно-малых преобразований, так как композиция зависит от *порядка*, в котором преобразования выполняются и, кроме того, нельзя последовательно расположить элементы поверхности, как элементы линии. Но можно *складывать* эти бесконечно-малые преобразования в том смысле, в каком в кинематике складываются два мгновенных вращения; более точно, мы определим сумму двух бесконечно-малых аффинных перемещений

$$\delta x^i + a^i + a_k^i x^k = 0,$$

$$\delta x^i + b^i + b_k^i x^k = 0$$

как аффинное перемещение

$$\delta x^i + (a^i + b^i) + (a_k^i + b_k^i) x^k = 0.$$

Но имеется еще одна трудность, состоящая в том, что различные перемещения относятся к совершенно различным аффинным пространствам: необходимо, следовательно, перенести их все в одно аффинное пространство. *Это возможно только в том случае, если замкнутая поверхность бесконечно-мала.*

В самом деле, в этом случае, следуя процессу, которым мы уже пользовались, мы выбираем фиксированную точку **a** внутри малого объема. Так как аффинное пространство, связанное с точкой **m**, может быть ориентировано в касательном аффинном пространстве точки **a**, то мы сможем определить относительно этого последнего пространства и составляющие аффинного перемещения (5). Обозначим через u_0^k постоянные координаты точки **a**, через u^k — координаты точки **m**; положим далее

$$\omega^i = \gamma_k^i du^k, \quad \omega_j^i = \gamma_{jk}^i du^k$$

и обозначим через

$$(\gamma_k^i)_0, \quad (\gamma_{jk}^i)_0$$

числовые значения в точке **a** коэффициентов этих форм. Обозначая через $\overline{x}^i$ координаты точки в аффинном касательном пространстве в **a**, соответствующей точке (x^i) в аффинном касательном пространстве в **m**, имеем уравнения

$$x^i - \overline{x}^i + (\gamma_k^i)_0 (u^k - u_0^k) + \overline{x}^k (\gamma_{kh}^i)_0 (u^h - u_0^h) = 0,$$

которые можно разрешить относительно $\overline{x}^i$

$$\overline{x}^i = x^i + (\gamma_k^i)_0 (u^k - u_0^k) + x^k (\gamma_{k\,h}^i)_0 (u^h - u_0^h).$$

Формулы (5′), если в них заменить значения x^i через $\overline{x}^i$ согласно предыдущим соотношениям, дадут

$$\Delta \overline{x}^i + \Omega^i + (\gamma_{jk}^i)_0 (u^k - u_0^k) \Omega^j - (\gamma_h^k)_0 (u^h - u_0^h) \Omega_k^i + \\ + \overline{x}^k [\Omega_k^i + (\gamma_{jh}^i)_0 (u^h - u_0^h) \Omega_k^j - (\gamma_{kh}^{\,j})_0 (u^k - u_0^h) \Omega_j^i] = 0.$$

Отсюда следует, что составляющие бесконечно-малого перемещения (5′), *вычисленные в системе отнесения, связанной с точкой* **a**, имеют вид

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i + (\gamma_{jk}^i)_0 (u^k - u_0^k) \Omega^j - (\gamma_h^k)_0 (u^h - u_0^h) \Omega_k^i,$$

$$\overline{\Omega}_k^i = \Omega_k^i + (\gamma_{jh}^i)_0 (u^h - u_0^h) \Omega_k^j - (\gamma_{kh}^j)_0 (u^h - u_0^h) \Omega_j^i.$$

Сумма всех бесконечно-малых перемещений, соответствующих различным элементам замкнутой поверхности, имеет, следовательно, составляющими интегралы по поверхности от $\overline{\Omega}^i$ и $\overline{\Omega}_k^i$, что дает следующие объемные интегральные элементы

$$(\overline{\Omega}^i)' = (\Omega^i)' + (\gamma_{jk}^i)_0 [du^k \Omega^j] - (\gamma_h^k)_0 [du^h \Omega_k^i],$$

$$(\overline{\Omega}_k^i)' = (\Omega_k^i)' + (\gamma_{jk}^i) [du^k \Omega_k^j] - (\gamma_{kh}^i)_0 [du^h \Omega_j^i];$$

не изменяя главной части, имеем

$$(\overline{\Omega}^i)' = (\Omega^i)' + [\omega^i_j \Omega^j] - [\omega^k \Omega^i_k],$$

$$(\overline{\Omega}^i_k)' = (\Omega^i_k)' + [\omega^i_j \Omega^j_k] - [\omega^j_k \Omega^i_j].$$

Мы получаем, таким образом, левые части формул (7), равные тождественно нулю.

Таким образом, *получаем теорему сохранения кривизны и кручения*:

Геометрическая сумма бесконечно-малых перемещений, соответствующих различным элементам замкнутой поверхности, равна нулю, если замкнутая поверхность бесконечно-мала.

Интегральные инварианты, связанные с пространством

13. В предыдущем исследовании мы предполагали, что пространство трех измерений; но очевидно, что полученные результаты справедливы и для пространств любого числа измерений.

Мы рассматривали выше простые и кратные интегралы, элементами которых является вектор ($d\mathbf{m}$ или $d\mathbf{e}_i$). Теперь мы сделаем более общее предположение, что каждому элементу поверхности отнесен внутренним образом вектор

$$\mathbf{e}_i \Pi^i;$$

определим интеграл от этого вектора, распространенный по бесконечно-малой замкнутой поверхности, отнеся каждый элемент интеграла к аффинному касательному пространству точки a, лежащей внутри поверхности; это позволит рассматривать сумму различных составляющих. Можно показать тем же путем, что и выше, что искомый интеграл равен объемному интегралу с элементом

$$[d\mathbf{e}_i \Pi^i] + \mathbf{e}_i (\Pi^i)',$$

где $d\mathbf{e}_i$ заменены через $\omega^k_i \mathbf{e}_k$. Мы получили бы то же самое, если бы Π^i были интегральными элементами трехкратными, четырехкратными и т. д., а интегралы распространялись на *замкнутую* поверхность 3, 4 и т. д. измерений.

Можно рассматривать также геометрические формы второго, третьего и т. д. порядков. Формой второго порядка является

$$[\mathbf{m}\mathbf{e}_i] \Pi^i + [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] \Pi^{ij};$$

она определяет систему векторов (скользящих). Внешняя производная от этой формы, которая позволяет преобразовать интеграл, взятый по замкнутому многообразию p измерений, в интеграл, распространенный по многообразию $p+1$ измерений, равна

$$[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\{(\Pi^i)' + [\omega^i_k \Pi^k]\} +$$
$$+ [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\{(\Pi^{ij})' + [\omega^i \Pi^j] - [\omega^j \Pi^i] + [\omega^i_k \Pi^{kj}] + [\omega^j_k \Pi^{ik}]\}.$$

14. Рассмотрим в качестве примера форму

$$[\mathbf{m} d\mathbf{m}] = \omega^i [\mathbf{m}\mathbf{e}_i],$$

которая определяет скользящий вектор с началом в $\mathbf{m}$ и концом в $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$. Интеграл от этого вектора, распространенный по бесконечно-малому замкнутому контуру, равен

$$\int [\mathbf{m}\, d\mathbf{m}] = \int\int [\mathbf{m}\, d\mathbf{m}]' = \int\int [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\, \Omega^i + 2\, [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, [\omega^i\omega^j].$$

В случае $n = 3$ мы получаем, таким образом, вектор с составляющими Ω^i и *пару*, момент которой равен удвоенной площади, ограниченной контуром; имеем обобщение классической теоремы.

Точно так же

$$\int\int [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, [\omega^i\omega^j] = \int\int\int [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, \{[\Omega^i\omega^j] - [\omega^i\Omega^j]\};$$

эта формула в случае собственно аффинного пространства объединяет формулы

$$\int\int dx^i dx^j = 0,$$

причем интегралы распространены по замкнутой поверхности; пространства аффинной связности, на которые эти формулы распространяются без изменения, характеризуются соотношениями

$$[\omega^i\Omega^j] - [\omega^j\Omega^i] = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Нетрудно показать, что при $n \geqslant 4$ из этих соотношений следует, что $\Omega^i = 0$.

Отметим также формулы

$$\int\int \mathbf{e}_i \Omega^i = \int\int\int \mathbf{e}_i\, [\omega^k \Omega^i_k],$$

$$\int\int [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\, \Omega^i = \int\int\int [\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\, [\omega^k\Omega^i_k] + [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, \{[\omega^i\Omega^j] - [\omega^j\Omega^i]\},$$

$$\int\int\int \mathbf{e}_i\, [\omega^k \Omega^i_k] = \int\int\int\int \mathbf{e}_i\, [\Omega^k\Omega^i_k],$$

$$\int\int\int [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, \{[\Omega^i\omega^j] - [\omega^i\, \Omega^j]\} =$$

$$= \int\int\int\int [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\, \{[\omega^j\omega^k\Omega^i_k] - [\omega^i\omega^k\Omega^j_k]\}.$$

эти формулы представляют интерес тем, что они естественно приводят к образованию *интегральных инвариантов*, связанных с пространством все более и более высоких порядков.

Изоморфизм пространств аффинной связности [1]

15. Мы будем говорить, что два пространства аффинной связности n измерений *изоморфны*, если между ними можно установить точечное соответствие, при котором каждому выбору систем отнесения, связанных с точками первого пространства, можно сопоставить такой выбор систем отнесения, связанных с точками второго пространства, что составляющие ω^i и ω^i_j первого пространства в этом точечном соответствии равны составляющим ω^i и ω^i_j второго пространства. Мы будем говорить также, что оба пространства *наложимы* одно на другое.

Рассмотрим два изоморфных пространства и отнесем произвольной точке $\mathbf{m}$ каждого из них наиболее общую систему отнесения; в каждом пространстве эта система отнесения будет зависеть от $n(n+1)$ параметров, из которых n являются координатами начала $\mathbf{m}$. Между $n(n+1)$ параметрами первого пространства и $n(n+1)$ параметрами второго существует соответствие, при котором имеют место тождества

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}^i_j = \omega^i_j, \tag{8}$$

где $\overline{\omega}^i$ и $\overline{\omega}^i_j$ обозначают составляющие второго пространства. Обратное также верно, так как n первых из предыдущих уравнений необходимо приводят к соответствию между точечными координатами обоих пространств.

Из соотношений (8) при помощи внешнего дифференцирования выводим

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i, \quad \overline{\Omega}^i_j = \Omega^i_j,$$

то есть

$$\overline{A}^i_{jk} = A^i_{jk}, \quad \overline{A}^i_{jkl} = A^i_{jkl},$$
$$d\overline{A}^i_{jk} = dA^i_{jk}, \quad d\overline{A}^i_{jkl} = dA^i_{jkl},$$

а также равенство соответствующих коэффициентов в обеих частях последних соотношений, разложенных в виде линейных функций от ω^i и ω^i_j, и так далее.

16. Развернутую форму дифференциалов dA^i_{jk} и dA^i_{jkl} можно получить при помощи следующего геометрического процесса.

[1] П. 15—18 могут быть пропущены без ущерба в понимании последующих глав.

Рассмотрим в первом пространстве точку $\mathbf{m}$ и проходящий через нее двумерный элемент; этому элементу соответствует бесконечно-малое перемещение с составляющими Ω^i и Ω^i_j. В частности, трансляция, соответствующая этому элементу, может быть интерпретирована вектором $\mathbf{e}_i\Omega^i$. Рассмотрим теперь точку $\mathbf{m}'$, бесконечно близкую к $\mathbf{m}$, и двумерный элемент, проходящий через $\mathbf{m}'$ и *эквиполентный* элементу, проходящему через $\mathbf{m}$; этому элементу соответствует также определенный вектор, связанный с точкой $\mathbf{m}'$. Геометрическая разность между этим и первым вектором, имеющая смысл, так как аффинное пространство, касательное в $\mathbf{m}'$, можно ориентировать в аффинном пространстве точки $\mathbf{m}$, является вектором, приложенным в точке $\mathbf{m}$, причем его геометрический смысл не зависит от выбора систем отнесения.

Чтобы получить его аналитическое выражение, предположим, что двумерный элемент, проходящий через $\mathbf{m}$, является параллелограммом, построенным на двух бесконечно-малых векторах (ξ^i) и (η^i), выходящих из $\mathbf{m}$; обозначим через $\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)$ первый вектор, интерпретирующий трансляцию, соответствующую этому параллелограмму. Обозначим далее через d символ дифференцирования, соответствующий перемещению из точки $\mathbf{m}$ в $\mathbf{m}'$. Вектор, который интерпретирует трансляцию, соответствующую эквиполентному элементу, проходящему через $\mathbf{m}'$, можно записать в виде:

$$\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta) + d[\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)],$$

если условиться при дифференцировании применять следующие формулы, выражающие аналитически отмеченные выше геометрические условия:

$$d\mathbf{e}_i = \omega^k_i \mathbf{e}_k,$$
$$d\xi^i = -\xi^k\omega^i_k,$$
$$d\eta^i = -\eta^k\omega^i_k.$$

Таким образом, разность трансляций определяется следующим вектором, связанным с точкой $\mathbf{m}$, или, лучше сказать, *с тремя векторами* (ξ^i), (η^i), $d\mathbf{m}$, выходящими из $\mathbf{m}$:

$$d[\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)];$$

его составляющие, очевидно, являются трилинейными формами от составляющих трех векторов, то есть от ξ^i, η^i и ω^i:

$$d[\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)] = A^i_{jk|h}(\xi^j\eta^k - \xi^k\eta^j)\omega^h \mathbf{e}_i.$$

Выполняя вычисления и приравнивая члены при

$$\mathbf{e}_i(\xi^j\eta^k - \xi^k\eta^j),$$

найдем

$$dA^i_{jk} + A^\rho_{jk}\omega^i_\rho - A^i_{\rho k}\omega^\rho_j - A^i_{j\rho}\omega^\rho_k = A^i_{jk|\rho}\omega^\rho; \tag{9}$$

эта формула показывает, какую форму имеет дифференциал dA^i_{jk}.

Все то, что мы проделали для составляющих трансляции, можно сделать и для составляющих вращения. Рассмотрим в точке $\mathbf{m}$ элементарный параллелограмм, построенный на двух векторах (ξ^i) и (η^i), и произвольный вектор (u^i). Вектор $\mathbf{e}_i u^j \Omega^i_j(\xi, \eta)$ определяет с точностью до знака геометрическое приращение, которое получает вектор (u^i) при эквиполентном переносе его вдоль контура параллелограмма. Пусть $\mathbf{m}'$ — точка, бесконечно близкая к $\mathbf{m}$; рассмотрим в этой точке параллелограмм, *эквиполентный* первому и вектор $(\overline{u^i})$, эквиполентный вектору (u^i); приращение последнего вектора при эквиполентном его перенесении вдоль контура второго параллелограмма определяется вторым вектором

$$\overline{\mathbf{e}}_i \overline{u}^j \overline{\Omega}^i_j(\overline{\xi}, \overline{\eta});$$

геометрическая разность между этим и первым вектором, которую можно обозначить через

$$d(\mathbf{e}_i u^j \Omega^i_j(\xi, \eta)),$$

есть вектор, связанный с точкой $\mathbf{m}$ и зависящий внутренним образом от (u^i) и трех векторов (ξ^i), (η^i), $d\mathbf{m}$. Этот вектор имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_i u^j A^i_{jkl|h}(\xi^k\eta^l - \xi^l\eta^k)\,\omega^h.$$

Проводя вычисления, найдем, что

$$dA^i_{jkl} + A^\rho_{jkl}\,\omega^i_\rho - A^i_{\rho kl}\,\omega^\rho_j - A^i_{j\rho l}\,\omega^\rho_k - A^i_{jk\rho}\,\omega^\rho_l = A^i_{jkl|\rho}\,\omega^\rho. \tag{10}$$

17. Из предыдущего следует, что дифференциалы составляющих A^i_{jk} и A^i_{jkl} вводят в качестве новых коэффициентов только коэффициенты $A^i_{jk|\rho}$ и $A^i_{jkl|\rho}$ форм

$$d(\mathbf{e}_i \Omega^i(\xi, \eta)), \quad d(\mathbf{e}_i u^j \Omega^i_j(\xi, \eta)).$$

Если теперь в этих развернутых формах заменить ω^i через составляющие ζ^i произвольного вектора, мы получим формы

$$\mathbf{e}_i \Pi^i(\xi, \eta, \zeta), \quad \mathbf{e}_i u^j \Pi^i_j(\xi, \eta, \zeta),$$

которые определяют перемещение, соответствующее элементарному параллелепипеду, одна из вершин которого лежит в точке $\mathbf{m}$[1]; *только ребра параллелепипеда не играют все одинаковой роли.* При помощи указанного выше процесса можно вывести из полученных форм новые:

$$d(\mathbf{e}_i \Pi^i(\xi, \eta, \zeta)), \quad d(\mathbf{e}_i u^j \Pi^i_j(\xi, \eta, \zeta)),$$

[1] Или, скорее, параллелограмму и вектору.

которые, будучи развернуты, имеют вид

$$\mathbf{e}_i A^i_{jk|hl}\xi^j\eta^k\zeta^h\omega^l, \quad \mathbf{e}_i u^j A^i_{jkl|hm}\xi^k\eta^l\zeta^h\omega^m.$$

Новые коэффициенты, введенные таким образом, позволяют записать полное выражение дифференциалов от $A^i_{jk|h}$ и $A^i_{jkl|h}$:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & dA^i_{jk|h} + A^\rho_{jk|h}\,\omega^i_\rho - A^i_{\rho k|h}\,\omega^\rho_j - A^i_{j\rho|h}\,\omega^\rho_k - \\ & \qquad - A^i_{jk|\rho}\,\omega^\rho_h = A^i_{jk|h\rho}\,\omega^\rho, \\ & dA^i_{jkl|h} + A^\rho_{jkl|h}\,\omega^i_\rho - A^i_{\rho kl|h}\,\omega^\rho_j - \\ & - A^i_{j\rho l|h}\,\omega^\rho_k - A^i_{jk\rho|h}\,\omega^\rho_l - A^i_{jkl|\rho}\,\omega^\rho_h = A^i_{jkl|h\rho}\,\omega^\rho. \end{aligned} \right.$$

Очевидно, что эти операции можно продолжать до бесконечности; новые коэффициенты, которые будут вводиться с каждым дифференцированием, являются коэффициентами форм, имеющих геометрический смысл и определяющих перемещения, связанные с произвольными векторами, число которых все возрастает.

18. Если два пространства изоморфны, то соответствие, которое реализует этот изоморфизм, устанавливает равенство между всеми коэффициентами A^i_{jk}, A^i_{jkl} и их производными любого порядка. Я не буду продолжать далее исследование этой проблемы, которую я изложил, пользуясь методом, примененным мной в предыдущем мемуаре[1]. Я укажу лишь соотношения, которые необходимо существуют между только что рассмотренными величинами, опуская доказательство того, что эти соотношения единственные, которые могут существовать в общем случае.

Прежде всего формулам, которые выражают теорему сохранения кривизны и кручения

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & (\Omega^i)' + [\Omega^k\omega^i_k] - [\omega^k\Omega^i_k] = 0, \\ & (\Omega^i_j)' + [\Omega^k_j\,\omega^i_k] - [\omega^k_j\,\Omega^i_k] = 0, \end{aligned} \right.$$

мы придадим, развертывая их и отбрасывая все члены, содержащие ω^l_j *, следующий вид:

$$A^i_{jk|h}[\omega^h\omega^j\omega^k] + A^i_{jk}[\Omega^j\omega^k - \omega^j\Omega^k] - A^i_{k\rho\sigma}[\omega^k\omega^\rho\omega^\sigma] = 0,$$
$$A^i_{jkl|h}[\omega^h\omega^k\omega^l] + A^i_{jkl}[\Omega^k\omega^l - \omega^k\Omega^l] = 0,$$

[1] Sur les équations de la gravitation d'Einstein (Journal de Math. 1922, p. 141—203).

* Отбрасывание членов с ω^i_j соответствует переходу от обыкновенных к ковариантным производным, то есть от dA^i_{jk} и dA^i_{jkl} к $A^i_{jk|h}\omega^h$ и $A^i_{jkl|h}\omega^h$. (Прим. ред.)

откуда, объединяя члены при $[\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma]$, имеем

$$(12)\qquad \begin{cases} A^i_{\alpha\beta|\gamma} + A^i_{\beta\gamma|\alpha} + A^i_{\gamma\alpha|\beta} + A^i_{\rho\gamma} A^\rho_{\alpha\beta} + A^i_{\rho\alpha} A^\rho_{\beta\gamma} + \\ \quad + A^i_{\rho\beta} A^\rho_{\gamma\alpha} - A^i_{\alpha\beta\gamma} - A^i_{\beta\gamma\alpha} - A^i_{\gamma\alpha\beta} = 0, \\ A^i_{j\alpha\beta|\gamma} + A^i_{j\ \gamma|} + A^i_{j\gamma\alpha|\beta} + A^i_{j\rho\gamma} A^\rho_{\alpha\beta} + \\ \quad + A^i_{j\rho\alpha} A^\rho_{\beta\gamma} + A^i_{j\rho\beta} A^\rho_{\gamma\alpha} = 0. \end{cases}$$

Что касается $A^i_{jk|lh}$ и $A^i_{jkl|hm}$, то между этими величинами и предыдущими существуют дифференциальные соотношения двух видов. Первые получаются от дифференцирования соотношений (12), причем сохраняются лишь члены при ω^δ; они имеют следующий вид

$$(13)\qquad \begin{aligned} &A^i_{\alpha\beta|\gamma\delta} + A^i_{\beta\gamma|\alpha\delta} + A^i_{\gamma\alpha|\beta\delta} = \ldots, \\ &A^i_{j\alpha\beta|\gamma\delta} + A^i_{j\beta\gamma|\alpha\delta} + A^i_{j\gamma\alpha|\beta\delta} = \ldots; \end{aligned}$$

не выписанные члены зависят только от ранее рассмотренных величин. Соотношения второго вида получаются при приравнивании билинейных ковариантов первых членов соотношений (9) и (10); сохраняя в получаемых равенствах только члены при $[\omega^\alpha\omega^\beta]$ *, найдем

$$(14)\qquad \begin{aligned} &A^i_{jk|\beta\alpha} - A^i_{jk|\alpha\beta} = A^\rho_{jk} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho k} A^\rho_{j\alpha\beta} - A^i_{j\rho} A^\rho_{k\alpha\beta} - A^i_{jk|\rho} A^\rho_{\alpha\beta}, \\ &A^i_{jkl|\alpha\beta} - A^i_{jkl|\alpha\beta} = A^\rho_{jkl} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho kl} A^\rho_{i\alpha\beta} - A^i_{j\rho l} A^\rho_{k\alpha\beta} - \\ &\qquad - A^i_{jk\rho} A^\rho_{i\alpha\beta} - A^i_{ikl|\rho} A^\rho_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Соотношения, существующие между $A^i_{jk|lhm}$ и $A^i_{jklh|mn}$ выводятся так же: 1) из соотношений (13) и (14) дифференцированием, если сохранить только члены с ω^ε; 2) из оотношений (14) внешним дифференцированием, если сохранить только члены с $[\omega^\alpha\omega^\beta]$.

Можно продолжать таким образом и далее.

Нетрудно видеть, что число составляющих тензора кривизны и кручения равно $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$, число составляющих их производных первого порядка — $\frac{n^2(n^2-1)(n+1)}{3}$.

* Это соответствует переходу к ковариантным производным. (Прим. ред.)

Случай пространства нулевого кручения. — Если пространство не имеет кручения, то предыдущие соотношения упрощаются; они приводятся к следующим

$$\begin{gathered} A^i_{j\alpha\beta|\gamma} + A^i_{j\beta\gamma|\alpha} + A^i_{j\gamma\alpha|\beta} = 0, \\ A^i_{j\alpha\beta|\gamma\delta} + A^i_{j\beta\gamma|\alpha\delta} + A^i_{j\gamma\alpha|\beta\delta} = 0, \\ A^i_{jkl|\beta\alpha} - A^i_{jkl|\alpha\beta} = A^\rho_{jkl} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho kl} A^\rho_{j\alpha\beta} - A^i_{j\rho l} A^\rho_{k\alpha\beta} - A^i_{jk\rho} A^\rho_{l\alpha\beta}. \end{gathered}$$

Обобщение[1]

19. Уравнения (3) и (5′) определяют бесконечно-малые преобразования группы аффинных перемещений. Нетрудно обобщить изложенное в предыдущих параграфах, что позволит лучше уяснить общую идею.

Рассмотрим некоторую конечную непрерывную группу G преобразований n переменных $x_1, x_2, \ldots; x_n$; пусть эта группа определяется r бесконечно-малыми независимыми преобразованиями

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots,\ X_r f.$$

Мы можем рассматривать x_i, как координаты точки в некотором пространстве E. Если в этом пространстве мы будем обращать внимание лишь на те свойства фигур, которые не изменяются при преобразованиях группы G, то можно сказать, что эта группа является фундаментальной группой пространства E. При этом первоначальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ можно заменить теми, в которые они переходят при преобразовании T группы; в этой новой системе координат свойства фигур выражаются аналитически так же, как и в старой; обе системы координат эквивалентны. Переход от одной системы координат к эквивалентной производится, таким образом, при помощи преобразования фундаментальной группы.

Вообразим теперь, что в каждой точке некоторого многообразия находится наблюдатель, который имеет систему координат для изучения пространства E, причем эти системы, конечно, все эквивалентны между собой. Пусть это многообразие имеет p измерений, причем каждая точка определяется p координатами $u_1, \ldots, u_p$. Если мы переходим из точки $\mathbf{m}$ пространства в бесконечно близкую точку $\mathbf{m}'$, то в пространстве E мы перейдем от некоторой системы координат к другой, которую мы будем предполагать бесконечно близкой к первой; другими словами,

[1] Конец этой главы предполагает у читателя некоторое знакомство с теорией групп; он может быть пропущен без ущерба для понимания последующих глав.

мы перейдем от координат x_i в системе наблюдателя $\mathbf{m}$ к координатам x'_i в системе наблюдателя $\mathbf{m}'$, произведя некоторое бесконечно-малое преобразование группы G, например,

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f,$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_r$ являются выражениями линейными относительно $du_1, \ldots, du_p$ и с коэффициентами, зависящими от $u_1, \ldots, u_p$. Другими словами, если (x_i) и $(x_i + dx_i)$ являются координатами *одной и той же* точки пространства E, взятыми соответственно в координатных системах наблюдателей $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$, то

(15) $$dx_i = \omega_1 X_1(x_i) + \omega_2 X_2(x_i) + \ldots + \omega_r X_r(x_i);$$

или, если f — *определенная* функция координат, то

(15′) $$df = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f.$$

Предположим, например, что G есть группа преобразований одной переменной и с одним параметром

$$x' = x + a;$$

имеем

$$dx = \omega,$$

где ω — выражение Пфаффа от $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

20. Установив это, представим себе, что в пространстве V наблюдателей некоторая точка $\mathbf{m}_0$ переведена в точку $\mathbf{m}_1$ по определенному пути. При переходе от некоторой точки $\mathbf{m}$, лежащей на этом пути, в бесконечно близкую $\mathbf{m}'$, мы производим в пространстве E некоторое бесконечно-малое преобразование, составляющими которого *в координатной системе наблюдателя* $\mathbf{m}$ являются $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Последовательное выполнение всех этих бесконечно-малых преобразований переведет координаты, установленные наблюдателем $\mathbf{m}_0$, в координаты наблюдателя $\mathbf{m}_1$; это будет некоторое конечное преобразование группы G. Оно, очевидно, определяется интегрированием дифференциальных уравнений (15), в которых формы ω_i имеют теперь вид: $p_i(t)\,dt$, где t — параметр, в функции от которого выражаются координаты $u_1, \ldots, u_p$ переменной точки пути.

Если описать *замкнутый* контур в пространстве V, то мы можем по возвращении в точку $\mathbf{m}_0$ не получить той же системы координат, с которой мы вышли из этой точки. Для того, чтобы при возвращении в $\mathbf{m}_0$ мы получили ту же самую систему координат, необходимо (и достаточно), чтобы уравнения (15) были вполне интегрируемы. Возьмем эти уравнения в сжатой форме (15′). Условие того, что они вполне интегрируемы, если обозначить через ω'_i билинейный ковариант формы ω_i, запишется следующим образом:

$$X_i f \omega'_i + [d(X_i f)\omega_i] \equiv X_i f \omega'_i + [X_h(X_k f) - X_k(X_h f)]\,[\omega_h \omega_k] = 0.$$

Но согласно классической теореме С. Ли имеем

$$(X_h X_k) \equiv X_h(X_k f) - X_k(X_k f) = c_{hks} X_s f,$$

где коэффициенты c_{hks} постоянны. Итак, имеем

$$X_s f \{\omega'_s + c_{hks}[\omega_h \omega_k]\} = 0$$

и, следовательно,

(16) $$\omega'_s + c_{hks}[\omega_h \omega_k] = 0.$$

21. Тот частный случай, который только что был изучен, представляется, между прочим, тогда, когда в качестве многообразия V взять *параметрическое пространство* группы. Если

$$x'_i = f_i \quad (x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)$$

конечные уравнения общего преобразования T_a группы G, то $a_1, \ldots, a_r$ можно рассматривать как координаты точки $\mathbf{m}$ пространства V r измерений. Если $a_1^0, \ldots, a_r^0$ являются параметрами тождественного преобразования, $\mathbf{m}_0$ — точка, определяемая ими в пространстве V, то мы примем, что система координат наблюдателя $\mathbf{m}$ получается из системы координат наблюдателя $\mathbf{m}_0$ при помощи преобразования T_a. Тогда система координат точки $\mathbf{m}$ будет переводиться в систему координат бесконечно близкой точки $\mathbf{m}'$ бесконечно-малым преобразованием $T_a^{-1}\,T_{a+da}$. Вполне очевидно, что, *каков бы ни был путь*, соединяющий точку $\mathbf{m}$ (с координатами $a_1, \ldots, a_r$) с точкой $\mathbf{m}'$ (с координатами $b_1, \ldots, b_r$), результирующее преобразование координат в пространстве E будет $T_a^{-1} T_b$.

Обратно, если соотношения (16) удовлетворяются для некоторого пространства наблюдателей V, и если мы выберем произвольно в этом пространстве точку $\mathbf{m}_0$, то каждая точка $\mathbf{m}$ будет соответствовать определенному преобразованию T_a группы G, именно тому, которое позволит перевести координаты, выбранные в точке $\mathbf{m}_0$, в координаты, выбранные в $\mathbf{m}$; следовательно, u_i будут определенными функциями от a_i. Может, конечно, случиться, что одному и тому же преобразованию T_a соответствует бесчисленное множество точек $\mathbf{m}$; может также представиться случай, в частности, если $p < r$, когда те преобразования, которые могут соответствовать различным точкам пространства, образуют только часть группы.

22. Возвратимся к общему случаю. До сих пор мы интерпретировали преобразование группы как определяющее изменение координат в пространстве E, причем первоначальные координаты x_i и преобразованные x'_i относились *к одной и той же* точке пространства E. Можно встать на другую точку зрения, более образную, и рассматривать x_i и x'_i как координаты *двух различных точек в одной и той же системе координат*. Обозначим через S преобразование, соответствующее этой точке зрения: это преобразование, очевидно, имеет смысл только тогда, когда раз иавсегда сделан предварительно определенный выбор системы координат. Мы будем говорить, что S является *перемещением* пространства E.

Если мы примем эту точку зрения, то бесконечно-малое преобразование $\omega_1 X_1 f + \ldots + \omega_r X_r f$, которое ранее мы связывали с двумя бесконечно-близкими точками $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ пространства V, можно рассматривать как *бесконечно-малое перемещение* пространства E. Таким образом, выражения Пфаффа $\omega_1, \ldots, \omega_r$ определят непрерывное (воображаемое) движение пространства E, зависящее от p параметров. Пользуясь выражением, заимствованным из теории связей в механике, мы можем сказать, что в общем случае *это движение не голономное*; оно будет голономным, если удовлетворяется условие (16). Например, в случае группы

$$x' = x + a$$

мы имеем непрерывную трансляцию на прямой; эта трансляция голономна, если составляющая ω бесконечно-малой трансляции есть полный дифференциал; в противном случае это не имеет места.

23. Возвратимся к замкнутому *бесконечно-малому* контуру в пространстве V. Для приближенного интегрирования уравнений (15) можно применить процесс, аналогичный тому, который мы использовали при изучении пространства аффинной связности. Обозначим через Δx_i бесконечно-малое приращение координаты x_i; можно показать, что мы получим это приращение, если возьмем от правых частей билинейный ковариант и заменим дифференциалы dx_k их выражениями из уравнений (15). Получаем следующий результат (мы пользуемся сжатой формой записи):

$$\Delta f = \Omega_1 X_1 f + \Omega_2 X_2 f + \ldots + \Omega_r X_r f, \tag{17}$$

где

$$\Omega_s = \omega'_s + c_{hks} [\omega_h \omega_k]. \tag{18}$$

Каждому замкнутому контуру соответствует, таким образом, бесконечно-малое перемещение пространства E, составляющие которого $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ являются элементами двойных интегралов. Это перемещение оценивает до некоторой степени *неголономность* движения пространства E.

Если к формулам (18) применить внешнее дифференцирование и учесть состношения, существующие между постоянными c_{hks} [1], имеем

$$\Omega'_s = c_{khs} \{[\Omega_h \omega_k] - [\omega_h \Omega_k]\}. \tag{19}$$

Интерпретация этих формул аналогична той, которую мы уже получили в теории пространств аффинной связности.

24. Для этого возвратимся к первоначальной точке зрения. Рассмотрим в пространстве V объем, ограниченный бесконечно-малой замкнутой поверхностью. Каждому элементу этой поверхности, окружающему некоторую точку $\mathfrak{m}$, соответствует бесконечно-малое преобразование Θ, определяемое символом

$$\Omega_1 X_1 f + \ldots + \Omega_r X_r f,$$

который можно интерпретировать как определяющий *перемещение* S пространства E, выражаемое аналитически при помощи координат, которыми пользуется наблюдатель $\mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathfrak{a}$ фиксированную точку, лежащую внутри рассматриваемого объема. *То же самое* перемещение пространства E можно было бы аналитически выразить при помощи координат, отнесенных к наблюдателю $\mathfrak{a}$, так как от одной из этих систем можно перейти к другой, когда наблюдатели бесконечно близки. Пусть соответственно

$$x_1, \ldots, x_n \text{ и } \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$$

координаты, отнесенные к наблюдателям $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{a}$. Пусть переход от координат $\bar{x}_i$ к координатам x_i производится при помощи бесконечно-малого преобразования T.

Обозначим, наконец, буквами с ударениями координаты точки, получающейся в результате перемещения S. Нетрудно видеть, что переход от координат $\bar{x}$ к $\bar{x}'$ получается в результате последовательного применения преобразований T, Θ и T^{-1}. Другими словами, если принять координаты фиксированного наблюдателя $\mathfrak{a}$, то перемещение S определяется преобразованием $T\Theta T^{-1}$.

[1] Эти соотиошения вытекают из того, что для пространства V параметров имеют место формулы (16), а, следовательно, и те, которые из иих выводятся внешним дифференцированием. Другими словами, при внешнем дифференпировании формул (18), можно откинуть все члены, не содержащие ни Ω_i ни Ω'_i.

Тогда нетрудно показать, что если Uf, Vf — символы бесконечно-малых преобразований T и Θ, то символом для $T\Theta T^{-1}$ является

$$Vf + (UV)f = Vf + U(Vf) - V(Uf).$$

Если через u_h и $\overline{u}_h$ обозначим координаты соответственно точек **m** и **a** пространства V и если положим

$$\omega_i = \gamma_{ih}\, du_h,$$

то получим

$$Uf = \gamma_{ih}(u_h - \overline{u}_h) X_i f,$$
$$Vf = \Omega_i X_i f$$

и, следовательно,

$$Vf + (UV)f =$$
$$= \{\Omega_s + c_{iks}[\gamma_{ih}(u_h - \overline{u}_h)\Omega_k - \gamma_{kh}(u_h - \overline{u}_h)\Omega_i]\} X_s f.$$

Это — аналитическое выражение перемещения S, которое взято в системе отнесения точки **a**.

Если взять *сумму* составляющих этого перемещения, распространенную по всем элементам рассматриваемой замкнутой поверхности в пространстве V, то для s-ой суммы найдем

$$\Omega'_s + c_{iks}([\omega_i\Omega_k] - [\omega_k\Omega_i]),$$

что равно нулю согласно формуле (19).

Иными словами, *сумма бесконечно-малых перемещений, соответствующих различным элементам поверхности, которая ограничивает бесконечно-малый объем, равна нулю.*

25. В частном случае, когда группой G является

$$x' = x + a,$$

общая теорема сохранения приводит к классическому результату. Если ω — некоторое выражение Пфаффа в пространстве V, и если обозначить через ω' элемент двойного интеграла, который получается при применении теоремы Стокса, то интеграл $\iint \omega'$, распространенный по замкнутой поверхности, равен нулю. Здесь нет необходимости относить бесконечно-малую трансляцию ω' к системе наблюдателя **a**, так как величина трансляции на прямой не зависит от выбора начала абсцисс, причем группа преобразований *G коммутативна.* Кроме того, в этом частном случае, как нетрудно видеть, трансляция, соответствующая любому замкнутому контуру, даже конечному, всегда определяется интегралом $\iint \omega'$, распространенным по площади, ограниченной контуром.

Возвратимся теперь к понятию пространства аффинной связности. Пространство E в этом случае является аффинным в собственном смысле, фундаментальная группа — группой аффинных преобразований, определяемой бесконечно-малыми преобразованиями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Однако, не имеется полного тождества между понятием пространства аффинной связности и понятием пространства V наблюдателей, введенного выше, так как каждой точке **m** пространства аффинной связности можно сопоставить бесчисленное множество наблюдателей с различными координатными системами, *имеющими одно и то же начало* **m**.

Глава II

ПРОСТРАНСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

26. Рассмотрим евклидово пространство, каждой точке $\mathbf{m}$ которого отнесена система прямоугольных координат с единицей длины, выбранной в каждой точке и изменяющейся в общем случае от точки к точке. Если мы обозначим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ векторы единичной длины, отложенные по осям, то при переходе от точки $\mathbf{m}$ к бесконечно близкой $\mathbf{m}+d\mathbf{m}$ мы получим общие формулы (1) (гл. 1)

$$(1)\qquad \begin{cases} dm = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_2^3\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_3^3\,\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Если определить скалярное произведение двух векторов, пользуясь определенной *абсолютной* единицей длины, получим соотношения

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,\ \ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0,\ \ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0,\ \ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0.$$

Дифференцируя эти соотношения, получаем формулы

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3,\ \ \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0,\ \ \omega_3^1 + \omega_1^3 = 0,\ \ \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0.$$

Мы будем обозначать ω_i^i просто через ω. Таким образом, формулы (1) принимают следующий вид:

$$(1')\qquad \begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega^k\mathbf{e}_k, \\ d\mathbf{e}_i &= \omega\mathbf{e}_i + \omega_i^k\,\mathbf{e}_k \quad (\omega_i^j + \omega_j^i = 0), \end{aligned}$$

где во втором соотношении суммирование производится по значениям k, отличным от i.

27. Эти формулы позволяют нам определить *пространства метрической связности*. Эти пространства являются многообразиями аффинной связности, для каждой точки $\mathbf{m}$ которых касательное аффинное пространство является евклидовым. Взаимная ориентация двух евклидовых пространств,

касательных в двух бесконечно близких точках, определяется при помощи форм Пфаффа

$$\omega^i,\ \omega,\ \omega_i^j = -\omega_j^i;$$

формы ω^i являются составляющими *переноса*, ω — составляющей *гомотетии* (лучистого расширения) [1], ω_j^i — составляющими *вращения* — тех преобразований, которые приводят систему отнесения, связанную с точкой $\mathbf{m}$, в совмещение с системой отнесения в точке $\mathbf{m}'$.

Можно было бы также предположить, что существует абсолютная единица длины, общая для всех евклидовых касательных пространств; тогда единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, построенные в каждой точке, равны между собой по длине. В этом случае форма ω равна нулю. Мы будем говорить, что в этом случае имеем пространство *евклидовой связности*.

28. Все изложенное может быть обобщено на случай пространств любого числа измерений. Можно также выбрать координатные системы не прямоугольными или прямоугольные системы с векторами $\mathbf{e}_i$, не равными по длине. Мы не будем излагать исследование в общем виде, а ограничимся только тем случаем, когда при выборе единицы длины в каждой точке $\mathbf{m}$ векторы $\mathbf{e}_i$ будут удовлетворять условиям

$$(\mathbf{e}_i)^2 = g_{ii},\ \ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n),$$

причем g_{ii} являются фиксированными навсегда *постоянными*, одними и теми же во всех точках пространства [2]. Так как единица длины меняется от точки к точке пространства, мы имеем право дифференцировать только соотношения

$$\frac{(\mathbf{e}_1)^2}{g_{11}} = \frac{(\mathbf{e}_2)^2}{g_{22}} = \dots = \frac{(\mathbf{e}_n)^2}{g_{nn}},\ \ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0,$$

что даст нам, если учесть формулы (1), следующие уравнения

$$(2)\qquad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \dots = \omega_n^n = \omega,\ \ g_{ii}\omega_j^i + g_{jj}\omega_i^j = 0.$$

Квадрат длины вектора ξ^i, приложенного к точке $\mathbf{m}$, равен при этих условиях

$$g_{ii}(\xi^i)^2;$$

---

[1] Коэффициент расширения равен $1+\omega$.

[2] Очевидно, что это условие не влияет совершенно на общность исследования; можно даже предполагать, что эти коэффициенты равны ± 1.

он изменяется с единицей длины, выбранной в **m**. Скалярное произведение двух векторов ξ^i, η^i равно

$$g_{ii}\xi^i\eta^i.$$

29. Обозначим через ξ_i скалярное произведение вектора ξ на вектор $\mathbf{e}_i$:

$$\xi_i = \xi\mathbf{e}_i = g_{ii}\xi^i;$$

величины ξ_i будем называть *ковариантными* составляющими вектора [1]; ξ^i называются его контравариантными составляющими. В этих обозначениях квадрат длины вектора выражается формулой $\xi_i\xi^i$, скалярное произведение — формулой $\xi_i\eta^i$ или $\xi^i\eta_i$. Дифференциальная форма пространства ds^2 (квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками) равна $\omega_i\omega^i$, где

$$\omega_i = g_{ii}\omega^i.$$

Соответственно этому мы будем обозначать через Ω_i ковариантные составляющие вектора Ω^i.

Форма ω_j^i может быть рассматриваема как i-ая контравариантная составляющая вектора $d\mathbf{e}_j$; положим

$$\omega_{ij} = d\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = g_{jj}\,\omega_i^j\,,$$

$$\omega_{ji} = d\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i = g_{ii}\,\omega_j^i\,;$$

соотношения (2) показывают, что

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{2'}$$

Аналогично обозначим

$$\Omega_{ij} = g_{jj}\Omega_i^j = (d\mathbf{e}_i)'\,\mathbf{e}_j, \quad \Omega_{ji} = g_{ii}\,\Omega_j^i = (d\mathbf{e}_j)'\,\mathbf{e}_i;$$

$$\Omega^{ij} = \frac{1}{g_{ii}}\,\Omega_i^j\,, \quad \Omega^{ji} = \frac{1}{g_{jj}}\,\Omega_j^i\,.$$

30. *Уравнения структуры*. Они выводятся непосредственно из общих уравнений гл. 1 и имеют вид

$$\begin{cases} (\omega^i)' = [\omega^i\omega] + [\omega^k\omega_k^i] + \Omega^i, \\ \omega' = \Omega, \\ (\omega_j^i)' = [\omega_j^k\,\omega_k^i] + \Omega_j^i; \end{cases} \tag{3}$$

между Ω_j^i существуют, конечно, соотношения

$$g_{ii}\Omega_j^i + g_{jj}\Omega_i^j = 0,$$

или

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0. \tag{4}$$

---

[1] Существенно отметить, что, так как g_{ii} являются фиксированными раз навсегда постоянными, то ковариантные составляющие вектора связаны с его контравариантными составляющими независимо от выбора системы отнесения.

Уравнения (3) могут быть записаны также в следующем виде

$$\begin{gathered} (\omega_i)' = [\omega_i\omega] + [\omega_i^k\,\omega_k] + \Omega_i, \\ \omega' = \Omega, \\ (\omega_{ij})' = [\omega_i^k\,\omega_{kj}] + \Omega_{ij} = [\omega_{kl}\omega_j^k] + \Omega_{ij}. \end{gathered} \tag{3'}$$

Наконец, уравнения, выражающие теорему сохранения, имеют вид

$$\begin{cases} (\Omega^i)' + [\omega\Omega^i] - [\omega^i\Omega] + [\omega_k^i\,\Omega^k] - [\omega^k\Omega_k^i] = 0, \\ \Omega' = 0, \\ (\Omega_j^i)' + [\omega_k^i\,\Omega_j^k] - [\omega_j^k\,\Omega_k^i] = 0 \end{cases} \tag{5}$$

или

$$\begin{cases} (\Omega_i)' + [\omega\Omega_i] - [\omega_i\Omega] - [\omega_i^k\,\Omega_k] + [\omega_k\Omega_i^k] = 0, \\ \Omega' = 0, \\ (\Omega_{ij})' - [\omega_j^k\,\Omega_{ik}] - [\omega_i^k\,\Omega_{kj}] = 0. \end{cases} \tag{5'}$$

31. *Кручение и кривизны.*—Каждому замкнутому бесконечно-малому контуру соответствуют

1) трансляция $\mathbf{e}_i\Omega^i$;

2) гомотетия (лучистое расширение) с отношением $1+\Omega$;

3) вращение с составляющими Ω_j^i.

Трансляция определяет ***кручение***, гомотетия — ***кривизну гомотетии*** (расширения), вращение — ***кривизну вращения пространства***.

Если кривизна гомотетии равна нулю, то пространство — евклидовой связности. Можно воспользоваться произволом в выборе координатной системы, чтобы удовлетворить уравнению

$$\omega = 0;$$

в самом деле, это уравнение полностью интегрируемо, так как билинейный ковариант ω' левой части равен нулю, и она, следовательно, является полным дифференциалом. Поэтому можно выбрать в точках **m** пространства системы отнесения таким образом, чтобы связность была евклидовой: это можно сделать бесконечным множеством способов, так как выбор единицы длины (которая теперь является абсолютной) произволен [1].

---

[1] Если заменить $\mathbf{e}_i$ на $u\mathbf{e}_i$, где u — произвольный параметр, то ω заменится на $\omega + \dfrac{du}{u}$. Чтобы получить евклидову связиость, достаточно положнть

$$u = Ce^{-\int\omega}$$

32. *Геометрическая интерпретация вращения, соответствующего замкнутому бесконечно-малому контуру.*— Можно интерпретировать геометрически вращение с составляющими Ω^i_j. Для этого мы будем исходить из формул, определяющих геометрическое приращение $\Delta\xi$, получаемое вектором ξ при этом вращении; имеем

$$\Delta\xi^i = \xi^k\Omega^i_k$$

или, что приводится к тому же,

$$\Delta\xi^i = \xi_k\Omega^{ki}.$$

Это приращение является геометрической суммой $\frac{n(n-1)}{2}$ приращений, соответствующих составляющим Ω^{ij} полного вращения, что позволяет рассматривать полное вращение как сумму $\frac{n(n-1)}{2}$ составляющих вращений. Возьмем, например, составляющее вращение Ω^{12}; имеем

$$\Delta\xi^1 = \xi_2\Omega^{21},$$
$$\Delta\xi^2 = \xi_1\Omega^{12},$$
$$\Delta\xi^3 = \cdots = \Delta\xi^n = 0;$$

это составляющее вращение не меняет векторы, перпендикулярные к плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; что касается вектора, не перпендикулярного этой плоскости, то его нормальная составляющая не меняется, так как вращение преобразует только проекцию этого вектора на плоскость.

Рассмотрим, в частности, вектор $\mathbf{e}_1$ с составляющими (1,0); после вращения он переходит в вектор с составляющими $(1,\ g_{11}\Omega^{12})$:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + g_{11}\Omega^{12}\mathbf{e}_2;$$

обозначим через θ угол, на который этот вектор повернулся, отсчитываемый в направлении поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$; имеем

$$\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\theta = g_{11}\Omega^{12}|\mathbf{e}_2|^2,$$

откуда

$$\theta = g_{11}\Omega^{12}\frac{|\mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}_1|}.$$

Рассмотрим, наконец, бивектор, расположенный в плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, алгебраическая мера которого равна θ; этот бивектор равен [1])

$$\frac{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\,\theta}{|[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]|} = g_{11}\frac{\Omega^{12}}{|\mathbf{e}_1|^2}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\,\Omega^{12}.$$

Отсюда следует, что *вращение Ω^i_j можно представить системой бивекторов*

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega^{ij}, \tag{6}$$

у которой каждый член определяет одно из $\frac{n(n-1)}{2}$ составляющих вращений.

Существенно отметить, что эта интерпретация имеет внутреннее значение, если пространство имеет *евклидову* связность; если же пространство — метрической связности, то рассматриваемая система бивекторов зависит от выбора единицы длины, принятой в точке $\mathbf{m}$.

Можно сказать, что в случае пространств евклидовой связности выражение (6) является *бивекторным интегральным инвариантом*, связанным с каждым двумерным элементом пространства.

33. *Интегральные инварианты, связанные с пространством евклидовой связности.*— Составляющие Ω^i и Ω^{ij} кручения и кривизны пространства евклидовой связности дают на основании сказанного выше два двумерных интегральных инварианта:

$$\mathbf{e}_i\Omega^i, \tag{7}$$
$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega^{ij}, \tag{6}$$

один векторный, другой бивекторный. Отсюда легко вывести другие инварианты 3 измерений.

Рассмотрим сначала вектор ξ^i; скалярное произведение и векторное произведение этого вектора на вектор $\mathbf{e}_i\Omega^i$ имеют вид соответственно

$$\xi_i\Omega^i,$$
$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j](\xi^i\Omega^j - \xi^j\Omega^i);$$

это приводит нас к рассмотрению двух форм, скалярной и бивекторной

$$[\omega_i\Omega^i], \tag{8}$$
$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j](\omega^i\Omega^j - \omega^j\Omega^i), \tag{9}$$

которые можно интерпретировать следующим образом.

[1]) Если мы рассмотрим, в частности, бесконечно-малую площадь $d\sigma$ в плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, причем контур обходится в положительном направлении, то отношение $\frac{\Omega^{12}}{d\sigma}$ определяет *кривизну* плоского элемента $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

Рассмотрим объем (трехмерный), ограниченный замкнутой бесконечно-малой поверхностью, и возьмем внутри объема точку $\mathbf{a}$. Разложим замкнутую поверхность на бесконечное множество элементов и пусть $\mathbf{m}$ — точка, лежащая внутри одного из этих элементов. Первая форма дает сумму скалярных произведений вектора $\mathbf{m}-\mathbf{a}$ на перенос, соответствующий элементу поверхности, окружающему $\mathbf{m}$[1]; вторая форма равна геометрической сумме векторных произведений этих двух векторов.

Можно также, беря снова произвольный вектор ξ^i, рассматривать поворот этого вектора при вращении Ω^{ij}, то есть

$$\mathbf{e}_i\xi^k\Omega^i_k,$$

и сумму внешних произведений этого вектора на различные бивекторы, определяющие вращение Ω^{ij}, то есть

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k](\xi^i\Omega^{jk}+\xi^j\Omega^{ki}+\xi^k\Omega^{ij}).$$

Это приводит нас к двум новым формам,— элементам тройных интегралов:

$$\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k] \tag{10}$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k][\omega^i\Omega^{jk}+\omega^j\Omega^{ki}+\omega^k\Omega^{ij}], \tag{11}$$

которым можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Возьмем снова замкнутую поверхность, которую мы рассматривали выше, и точку $\mathbf{a}$ внутри нее; первая форма дает геометрическую сумму поворотов векторов $\mathbf{m}-\mathbf{a}$ при вращении, соответствующем элементу поверхности, окружающему $\mathbf{m}$; вторая форма изображает геометрическую сумму тривекторов, получающихся при внешнем перемножении вектора $\mathbf{m}-\mathbf{a}$ и системы бивекторов, интерпретирующей вращение, соответствующее элементу поверхности, который окружает $\mathbf{m}$.

Можно пойти дальше и получить интегральные инварианты 4 измерений. Вектору ξ^i можно отнести:

1) его произведение на скаляр (8)

$$\mathbf{e}_i\xi^i[\omega_k\Omega^k];$$

2) его поворот при вращении, определяемом бивекторной формой (9)

$$\mathbf{e}_i\xi^k[\omega_k\Omega^i-\omega^i\Omega_k];$$

3) его внешнее произведение на систему бивекторов (9)

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k]\{\xi^i[\omega^j\Omega^k-\omega^k\Omega^j]+\xi^j[\omega^k\Omega^i-\omega^i\Omega^k]+\xi^k[\omega^i\Omega^j-\omega^j\Omega^i]\};$$

4) его скалярное произведение на вектор (10)

$$\xi_i[\omega^k\Omega^i_k];$$

[1] Полученное таким образом число, деленное на объем рассматриваемого трехмерного элемента, может быть названо *скалярным кручением* этого элемента.

5) его векторное произведение на вектор (10)

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j][\xi^i\omega^k\Omega^j_k-\xi^j\omega^k\Omega^i_k];$$

6) его внешнее 4-векторное произведение на тривекторы (11)

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l]\{\xi^i[\omega^j\Omega^{kl}+\omega^k\Omega^{lj}+\omega^l\Omega^{jk}]-\xi^j[\omega^i\Omega^{kl}+\omega^k\Omega^{li}+\omega^l\Omega^{ik}]+$$
$$+\xi^k[\omega^i\Omega^{jl}+\omega^j\Omega^{li}+\omega^l\Omega^{ij}]-\xi^l[\omega^i\Omega^{jk}+\omega^j\Omega^{ki}+\omega^k\Omega^{ij}]\}.$$

Отсюда мы выводим непосредственно новые интегральные инварианты[1]

$$\mathbf{e}_i[\omega^i\omega^k\Omega_k],$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k][\omega^j\omega^k\Omega^i+\omega^k\omega^i\Omega^j+\omega^i\omega^j\Omega^k],$$

$$[\omega^i\omega^j\Omega_{ij}],$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j][\omega^i\omega^k\Omega^j_k-\omega^j\omega^k\Omega^i_k]$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l][\omega^i\omega^j\Omega^{kl}+\omega^i\omega^k\Omega^{lj}+\omega^i\omega^l\Omega^{jk}+\omega^k\omega^l\Omega^{ij}+\omega^l\omega^j\Omega^{ik}+\omega^j\omega^k\Omega^{il}].$$

Геометрическая интерпретация этих форм аналогична интерпретации предыдущих форм.

Можно было бы продолжать дальше и получать интегральные инварианты все более высокого числа измерений.

34. Нетрудно вычислить *внешние производные* от этих интегральных инвариантов; это — новые интегральные инварианты, имеющие значение, не зависящее от выбора системы отнесения. Отсюда следует, что при их вычислении *все члены с ω^i_j должны выпасть*. Это сразу вытекает из того, что, если в каждой точке $\mathbf{m}$ построить наиболее общую систему отнесения, $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольных параметров, здесь появляющихся, не войдут в действительности в дифференцируемую инвариантную форму; следовательно, их дифференциалы, фигурирующие в ω^i_j, также не войдут во внешнюю производную.

Мы получим, таким образом, внешние производные от различных рассматриваемых форм, считая $\mathbf{e}_i$ *и* Ω_{ij} *за постоянные и заменяя* $(\omega^i)'$ *и* $(\Omega^i)'$ *соответственно через*

$$\Omega^i \text{ и } [\omega^k\Omega^i_k].$$

Таким образом, можно составить следующую таблицу (в ней мы приводим только формы двух и трех измерений).

[1] Первая и вторая формы, соответствующие вектору ξ^i, приводят к одному и тому же интегральному инварианту.

Инвариантные формы	*Производные формы*
$\mathbf{e}_i\Omega^i$	$\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k]$
$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\Omega^{ij}$	0
$[\omega_i\Omega^i]$	$[\Omega_i\Omega^i]+2[\omega^i\omega^j\Omega_{ij}]$
$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j][\omega^i\Omega^j-\omega^j\Omega^i]$	$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j][\omega^i\omega^k\Omega^j_k-\omega^j\omega^k\Omega^i_k]$
$\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k]$	$\mathbf{e}_i[\Omega^k\Omega^i_k]$
$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k][\omega^i\Omega^{jk}+\omega^j\Omega^{ki}+\omega^k\Omega^{ij}]$	$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k][\Omega^i\Omega^{jk}+\Omega^j\Omega^{ki}+\Omega^k\Omega^{ij}]$.

Можно заметить, что некоторые из форм 3 измерений могут быть получены дифференцированием из форм 2 измерений.

35. *Интегральные инварианты пространств евклидовой связности без кручения.*— Если пространство не имеет кручения (риманово пространство), Ω^i равны нулю и, следовательно, на основании (5) форма

$$\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k]$$

тождественно превращается в нуль. Из определенных выше интегральных инвариантов *единственными не равными нулю являются*

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\Omega^{ij},$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k][\omega^i\Omega^{jk}+\omega^j\Omega^{ki}+\omega^k\Omega^{ij}],$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l][\omega^i\omega^j\Omega^{kl}+\omega^i\omega^k\Omega^{lj}+\omega^i\omega^l\Omega^{jk}+\omega^k\omega^l\Omega^{ij}+\omega^l\omega^j\Omega^{ik}+\omega^j\omega^k\Omega^{il}];$$

их внешние производные равны тождественно нулю. Отсюда выводим теоремы сохранения, которые нетрудно было бы формулировать геометрически [1].

Случай трехмерных пространств — В случае пространств 3 измерений интегральные инварианты 4 измерений отсутствуют. Отметим, что с каждым вектором

$$\xi^i\mathbf{e}_i$$

инвариантно связан бивектор

$$\xi_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]+\xi_2[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]+\xi_3[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$$

и обратно; аналогично с тривектором связан скаляр — его объем.

[1] Эти формы могут быть рассматриваемы как определяющие *кривизну* (бивекторную, тривекторную, 4-векторную) элемента двух, трех, четырех измерений. Вместо того, чтобы брать *свободные* мультивекторы, можно было бы рассматривать *приложенные* мультивекторы $[\mathbf{m}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\Omega^{ij}$ и т. д. Тогда мы получаем интересную теорему, что *свободная p-векторная кривизна p-мерной малой области равна геометрической сумме приложенных $(p-1)$-векторных кривизн $(p-1)$-мерных элементов, ограничивающих область.* Эта теорема позволяет просто получать указанные формы рекуррентным методом.

На основании этого *в случае пространства нулевого кручения* мы получаем новые интегральные инварианты

$$[\omega^1\Omega^{23}]+[\omega^2\Omega^{31}]+[\omega^3\Omega^{12}],$$
$$\mathbf{e}_1\Omega_{23}+\mathbf{e}_2\Omega_{31}+\mathbf{e}_3\Omega_{12};$$

второй из них (двумерный) имеет внешнюю производную, равную нулю; он является вектором, интерпретирующим вращение, соответствующее элементу поверхности [1].

Случай четырехмерного пространства.— Здесь мы имеем инвариантное соответствие

1) между вектором

$$\xi^i\mathbf{e}_i$$

и *полярным* тривектором

$$\xi_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4]-\xi_2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4]+\xi_3[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4]-\xi_4[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3];$$

2) между системой бивекторов

$$\xi^{ij}[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$$

и *полярной* системой бивекторов

$$\xi_{12}[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4]+\xi_{13}[\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2[+\xi_{14}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]+\xi_{34}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]+\xi_{42}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3]+\xi_{23}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4].$$

Если рассматривать ξ^i как однородные координаты точки в трехмерном пространстве, то полярный тривектор вектора ξ^i можно рассматривать как плоскость, полярную относительно квадрики $x^ix_i=0$. Аналогично, если ξ^{ij} являются плюкеровыми координатами прямой, то координаты полярного бивектора определяют поляру относительно этой квадрики.

Мы имеем, следовательно, *в случае пространств нулевого кручения новые интегральные инварианты*

$$[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Omega_{14}+[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Omega_{24}+[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega_{34}+[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4]\Omega_{23}+$$
$$+[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4]\Omega_{31}+[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4]\Omega_{12},$$

$$\sum(ijkl)\,\mathbf{e}_i[\omega_j\Omega_{kl}+\omega_k\Omega_{lj}+\omega_l\Omega_{jk}],$$

$$[\omega_2\omega_3\Omega_{14}]+[\omega_3\omega_1\Omega_{24}]+[\omega_1\omega_2\Omega_{34}]+[\omega_1\omega_4\Omega_{23}]+[\omega_2\omega_4\Omega_{31}]+$$
$$+[\omega_3\omega_4\Omega_{12}].$$

[1] Система векторов и пар

$$[\mathbf{m}\mathbf{e}_1]\Omega_{23}+[\mathbf{m}\mathbf{e}_2]\Omega_{31}+[\mathbf{m}\mathbf{e}_3]\Omega_{12}+[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Omega_1+[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Omega_2+[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega_3$$

определяет аналогично перемещение, соответствующее элементу поверхности. Ее внешняя производная равна нулю.

Если рассматривать эту систему как определяющую напряжения, действующие в материальной среде (напряжения состоящие из пар), то эта среда находилась бы н равновесии. Здесь мы имеем одну из многочисленных аналогий (более или менее обманчивых) между геометрией и механикой. В действительности это лишь аналогия.

Второй из них не зависит от выбора единицы длины; он играет, также как и третий, важную роль в теории Эйнштейна [1].

В седьмой и восьмой главах этого мемуара будет дан общий метод образований интегральных инвариантов, связанных с пространством.

Основная теорема для пространств нулевого кручения

36. Вейлю принадлежит важная теорема, согласно которой метрическая связность пространства *нулевого кручения* вполне определяется заданием дифференциальной квадратичной формы ds^2 пространства и формы ω, которая позволяет сравнивать единицы длины, выбранные в бесконечно близких точках [2].

В самом деле, тогда мы можем считать известными в каждой точке формы ω^i и ω, то есть *перенос и лучистое расширение*, которые приводят в совпадение бесконечно близкие системы отнесения. Составляющие ω_{ij} *вращения* определяются уравнениями

$$(\omega^i)' = [\omega^i \omega] + [\omega^k \omega_k^i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Достаточно показать, что существует одна и только одна система форм $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$, такая, что n форм

$$[\omega^k \omega_{ki}] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

равны n данным формам от $\omega^1, \ldots, \omega^n$

$$h_{i\alpha\beta} [\omega^\alpha \omega^\beta] \qquad (h_{i\alpha\beta} = -h_{i\beta\alpha}).$$

Если мы положим

$$\omega_{ij} = a_{ij\alpha} \omega^\alpha \qquad (a_{ij\alpha} = -a_{ji\alpha}),$$

то коэффициенты $a_{ij\alpha}$ определятся из соотношений

$$a_{\alpha i\beta} - a_{\beta i\alpha} = h_{i\alpha\beta};$$

---

1) Эти инварианты дают в форме свободного бивектора, свободного вектора и скаляра новую интерпретацию кривизны элемента двух, трех и четырех измерений пространства евклидовой связности. Разница между этой второй интерпретацией и первой заключается в том, что здесь геометрическая сумма *приложенных* кривизн $(p-1)$-мерных элементов, ограничивающих малый объем p измерений, равна *нулю*.

2) *H. Weyl*. Temps, Espace, Matjere, стр. 108.— Ср. *E. Cartan*. Sur les èquations de la gravitation d'Einstein (Journ. de Math., 1922, стр. 150—151).

они допускают единственное решение

$$a_{ijk} = \frac{1}{2} (h_{ikj} - h_{ijk} - h_{jki}).$$

В частности, если мы имеем пространство евклидовой связности без кручения (пространство Римана), то *его аффинная связность полностью определяется дифференциальной квадратичной формой ds^2; эта связность является параллелизмом Леви-Чивита. Вот почему гравитационная теория Эйнштейна эквивалентна теории риманова пространства.*

Глава III

ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ И МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

37. Исследование кривых и поверхностей при помощи метода подвижного репера в пространстве аффинной связности производится так же, как и в собственно аффинном пространстве.

С каждой точкой **m** кривой аффинного пространства можно связать (бесконечным множеством способов) такую систему отнесения, что вектор $\mathbf{e}_1$ будет касаться кривой. Прямую линию характеризует то свойство, что этот вектор $\mathbf{e}_1$ остается все время параллельным самому себе. Таким образом, *прямой* (или *геодезической*) в пространстве аффинной связности мы назовем такую линию, у которой касательный вектор переносится *параллельно самому себе* вдоль кривой. Для определения прямых пространства аффинной связности мы отнесем каждой точке пространства наиболее общую систему отнесения и выразим,

1) что вектор $\mathbf{e}_1$ касается направления перемещения, то есть

$$\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0; \tag{1}$$

2) что $d\mathbf{e}_1$ параллелен $\mathbf{e}_1$, то есть

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0. \tag{2}$$

$2n-2$ уравнений (1) и (2) определяют прямые линии пространства; неизвестными в этих уравнениях являются $n-1$ координат точки пространства и n^2 произвольных параметров, от которых зависит выбор координатной системы.

Если же системы отнесения, связанные с точками пространства, фиксированы, то мы введем n вспомогательных неизвестных ξ^i при помощи уравнений

$$\frac{\omega^1}{\xi^1} = \frac{\omega^2}{\xi^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{\xi^n}$$

и выразим, что вектор $\xi^i \mathbf{e}_i$ остается параллельным самому себе, то есть

$$d\xi^i + \xi^k \omega_k^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводя вспомогательный параметр t, получим уравнения

$$\xi^i = \frac{\omega^i}{dt}, \quad \frac{d\xi^i}{dt} + \gamma_{kh}^i \xi^k \xi^h = 0,$$

где

$$\omega_k^i = \gamma_{kh}^i \omega^h.$$

Кривые, являющиеся аналогами плоских кривых, определяются, если в каждой точке **m** пространства ввести наиболее общую систему отнесения, уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0,$$
$$\omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0,$$
$$\omega_2^3 = \ldots = \omega_2^n = 0;$$

они зависят, как нетрудно видеть, от одной произвольной функции одного аргумента.

38. Определение аффинных инвариантов кривой не представляет затруднений. Ради простоты мы рассмотрим случай трехмерного пространства. Как и в аффинном пространстве, можно связать с каждой точкой систему отнесения и определить параметр s таким образом, что получаются формулы, обобщающие формулы Серре-Френе

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \mathbf{e}_1,$$
$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \alpha \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$
$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \mathbf{e}_1 + 2\alpha \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$
$$\frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \beta \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\alpha \mathbf{e}_3.$$

Основными аффинными инвариантами являются α и β. Соприкасающейся плоскостью к кривой является $[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$.

39. Основные свойства поверхностей исследуются аналогично. Мы ограничимся случаем $n=3$. С каждой точкой **m** поверхности свяжем систему отнесения так, чтобы векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ были касательными к поверхности. Таким образом, если перемещаться по поверхности, будем иметь

$$\omega^3 = 0,$$

откуда, взявши билинейный ковариант, получаем

$$[\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] + \Omega^3 \equiv [\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] + A_{12}^3 [\omega^1 \omega^2] = 0.$$

Из этого равенства вытекает, что формы ω_1^3 и ω_2^3 линейно выражаются через ω^1 и ω^2:

$$\omega_1^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2,$$
$$\omega_2^3 = \alpha'\omega^1 + \beta'\omega^2,$$

причем

$$\beta - \alpha' + A_{12}^3 = 0.$$

Поверхность является обобщением *плоскости (геодезической поверхностью)* аффинного пространства, если

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0,$$

то есть $A_{12}^3 = 0$. *В общем случае таких плоскостей (геодезических поверхностей) не существует.* Для их определения в том случае, когда они существуют, следует интегрировать систему

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0, \ A_{12}^3 = 0.$$

Внешнее дифференцирование первых двух уравнений дает

$$A_{112}^3 = 0, \quad A_{212}^3 = 0.$$

Мы приходим, таким образом, к трем конечным уравнениям для девяти произвольных параметров, от которых зависит выбор систем отнесения. Интересным представляется тот частный случай, когда эти три уравнения удовлетворяются тождественно. Из них можно вывести, что если выбрать в каждой точке определенную систему отнесения, то существует шесть линейных соотношений между составляющими тензора кручения и пятнадцать соотношений между составляющими тензора кривизны. В этом случае *существует одна и только одна плоскость, проходящая через данную точку и касательная в этой точке к двум заданным векторам.* Таким образом, эти пространства, как и аффинные, имеют ∞^3 плоскостей.

Можно доказать, что они зависят от трех произвольных функций трех аргументов.

Рассмотрим теперь любую поверхность. Можно ввести для нее понятие о направлении δ', *сопряженном* с направлением δ, рассматривая касательный плоский элемент $[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ и беря его характеристику, когда точка $\mathbf{m}$ перемещается в направлении δ. Имеем

$$\delta[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = \omega_1^3[\mathbf{m}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2] + \omega_2^3[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3] =$$
$$= [\alpha\omega^1(\delta) + \beta\omega^2(\delta)][\mathbf{m}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2] + [\alpha'\omega^1(\delta) + \beta'\omega^2(\delta)][\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3].$$

Выражая условие, что вектор $\omega^1(\delta')\mathbf{e}_1 + \omega^2(\delta')\mathbf{e}_2$ находится в этой плоскости, получим

$$\alpha\omega^1(\delta)\omega^1(\delta') + \beta\omega^2(\delta)\omega^1(\delta') + \alpha'\omega^1(\delta)\omega^2(\delta') + \beta'\omega^2(\delta)\omega^2(\delta') = 0.$$

Это соотношение не инволюторно, если $\beta - \alpha'$ не равно нулю. Другими словами, если направление δ' сопряжено с δ, то направление δ не является сопряжениым с δ'. Исключением является только случай, когда A_{12}^3 равно нулю. *Взаимность между сопряженными направлениями имеет место для пространств, у которых первый тензор кручения*[1] *равен нулю.*

40. Можно определить асимптотическую линию поверхности как линию, у которой соприкасающаяся плоскость касается поверхности; отсюда вытекает, что касательная к линии является сама себе сопряженной. Асимптотические линии определяются, таким образом, уравнением

$$\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 0.$$

Поверхности, у которых асимптотические линии являются неопределенными, определяются условиями

$$\alpha = 0, \quad \beta + \alpha' = 0, \quad \beta' = 0,$$

то есть

$$\omega_1^3 = -\frac{1}{2}A_{12}^3\omega^2, \quad \omega_2^3 = \frac{1}{2}A_{12}^3\omega^1;$$

они совпадают с плоскостями, если первый тензор кручения равен нулю.

Поверхности, для которых оба семейства асимптотических линий совпадают, определяются уравнениями

$$\beta + \alpha' = \beta' = 0$$

или уравнением

$$\omega_2^3 = \frac{1}{2}A_{12}^3\omega^1.$$

Нетрудно доказать, что, каково бы ни было пространство, они зависят от одной произвольной функции одного аргумента.

Сделанные указания в достаточной мере показывают, что нет существенной разницы между методом исследования кривых и поверхностей в пространстве аффинной связности и методом исследования их в обычном аффинном пространстве; но в некоторых случаях теоремы аффинного пространства должны быть подвергнуты глубоким изменениям.

[1] Исследование тензоров кручения дано дальше (гл. V—VIII).

Прямые в пространствах евклидовой связности

41. Прямые в пространствах евклидовой связности вводятся так же, как и в пространствах аффинной связности.

Особенно интересным является тот случай, когда *прямая линия является кратчайшим расстоянием между двумя точками.* Можно показать при помощи вычисления, что *условием этого является то, чтобы трансляция, соответствующая любому плоскому элементу пространства, была нормальна к этому элементу.* Можно также дать и наглядное геометрическое доказательство этого предложения.

Рассмотрим очень малый отрезок прямой $\mathbf{mm}'$ пространства евклидовой связности; если мы развернем шаг за шагом евклидовы пространства, касательные в различных точках прямой, на евклидово пространство, касательное в $\mathbf{m}$, то отрезок прямой изобразится в этом евклидовом пространстве прямолинейным отрезком $\mathbf{mm}'_1$. Рассмотрим другой какой-нибудь путь, соединяющий точки $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$; если мы развернем постепенно касательные евклидовы пространства вдоль этой кривой на евклидово пространство, касательное в $\mathbf{m}$, то этот путь изобразится некоторой кривой, выходящей из точки $\mathbf{m}$ и оканчивающейся в некоторой точке $\mathbf{m}'_2$. Очевидно, что фигура, полученная нами в плоскости, касательной в точке $\mathbf{m}$, и состоящая из прямолинейного отрезка $\mathbf{mm}'_1$ и кривой $\mathbf{mm}'_2$, может быть получена в плоскости, касательной в $\mathbf{m}'$, если развертывание произвести вдоль замкнутого контура, состоящего из отрезка $\mathbf{m}'\mathbf{m}$ прямой и отрезка $\mathbf{mm}'$ второй кривой. Таким образом, можно рассматривать евклидов вектор $\mathbf{m}'_2 - \mathbf{m}'_1$ как определяющий *трансляцию*, соответствующую этому малому замкнутому контуру. *Если пространство не имеет кручения,* эта трансляция равна нулю, то есть $\mathbf{m}'_2$ совпадает с $\mathbf{m}'_1$, и первая вариация, получающаяся при переходе от длины прямой $\mathbf{mm}'_1$ к длине криволинейной дуги $\mathbf{mm}'_2$, равна нулю. Таким образом, прямая является линией стационарной длины. Но условие равенства нулю кручения не является необходимым: если трансляция $\mathbf{m}'_2 - \mathbf{m}'_1$ *нормальна* к элементу прямой $\mathbf{mm}'$, то этого достаточно, чтобы первая вариация длины была равна нулю. Другими словами, *прямая дает стационарное значение длины тогда и только тогда, если трансляция, соответствующая любому плоскому элементу, содержащему некоторый элемент прямой, нормальна к этому элементу прямой.*

Для того, чтобы *все прямые* являлись кратчайшими расстояниями, необходимо и достаточно, чтобы трансляция, соответствующая любому плоскому элементу, была нормальна к этому элементу. Если n больше 2, это условие может быть реализовано и в пространстве с кручением. Например, для $n=3$ условие приводится к тождеству относительно ξ^i, η^i

$$\sum_i \xi^i \left[A_{i23}(\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2) + A_{i31}(\xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3) + A_{i12}(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)\right] = 0;$$

отсюда получаем

$$\Omega_1 = a\,[\omega^2\omega^3], \quad \Omega_2 = a\,[\omega^3\omega^1], \quad \Omega_3 = a\,[\omega^1\omega^2],$$

где через a обозначен произвольный коэффициент.

42. Если $n=2$, прямые являются кратчайшими расстояниями только в том случае, если пространство не имеет кручения. В качестве примера пространства с кручением рассмотрим сферу, на которой условимся считать параллельными два вектора, приложенных в бесконечно близких точках, в том случае, если они образуют равные углы с меридианами[1], проходящими через их точки приложения. Если мы выберем в каждой точке единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, касательные соответственно к параллели и меридиану, проходящим через эту точку, то

$$d\mathbf{e}_1 = 0, \quad d\mathbf{e}_2 = 0,$$

то есть

$$\omega_{12} = 0.$$

Принимая за координаты долготу φ и азимут θ, имеем

$$\omega^1 = \omega_1 = R\sin\theta\, d\varphi, \qquad \omega^2 = \omega_2 = R\,d\theta;$$

следовательно,

$$\Omega_1 = \omega'_1 = R\cos\theta\,[d\theta d\varphi] = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}[\omega_1\omega_2],$$

$$\Omega_2 = \omega'_2 = 0,$$

$$\Omega_{12} = \omega'_{12} = 0.$$

Определенное нами многообразие — нулевой кривизны; но оно имеет кручение, определяемое трансляцией, направленной *вдоль параллели.* Если назвать кручением в точке вектор, определяющий трансляцию, соответствующий элементу поверхности при положительном его обходе (который переводит $\mathbf{e}_1$ в $\mathbf{e}_2$ вращением на угол $\frac{\pi}{2}$), деленный на площадь $d\delta$ этого элемента, то *кручение в каждой точке*

[1] Предполагается, что на сфере задана определенная система меридианов и параллелей.

сферы изображается вектором, касательным к параллели и равным по длине $\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}$. Оно равно бесконечности в полюсах и нулю на экваторе.

В рассматриваемом пространстве прямыми являются *локсодромии*, образующие постоянный угол с меридианами. Единственными прямыми, реализующими кратчайшие пути, являются те локсодромии, которые в каждой точке ортогональны к вектору кручения, то есть *меридианы*.

43. *Прямолинейные треугольники в пространствах двух измерений.* — Рассмотрим в двумерном пространстве евклидовой связности бесконечно-малый треугольник, образованный тремя отрезками прямых. Обозначим через a, b, c стороны этого треугольника, через A, B, C — его углы. Кривизна этого треугольника, очевидно, равна отношению $A+B+C-\pi$ к его площади [1]. Главная часть проекции кручения в точке A на сторону AB равна отношению длины

$$c - a\cos B - b\cos A$$

к его площади; главная часть его проекции на перпендикуляр к AB равна длине

$$a\sin B - b\sin A,$$

деленной на площадь треугольника.

Таким образом, *в пространстве нулевого кручения* имеют место формулы обычной тригонометрии

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}$$

с точностью до величин, бесконечно-малых относительно площади треугольника. Это — классический результат теории поверхностей; мы знаем согласно исследованиям Гаусса, что, если дан геодезический очень малый треугольник, то прямолинейный треугольник (евклидов) с теми же сторонами, имеет те же самые углы (с точностью до величин, бесконечно-малых относительно площади треугольника) [2].

44. *Интегрирование дифференциальных уравнений, определяющих прямые линии.* — Если кручение, соответствующее любому плоскому элементу n-мерного пространства евклидовой связности, нормально к этому элементу, то прямые являются экстремалями вариационной задачи; определяющие их дифференциальные уравнения имеют линейный инвариантный интеграл. Если системы отнесения, связанные с каждой точкой пространства, выбраны *наиболее общим образом*, то эти дифференциальные уравнения имеют вид

$$\omega^2 = \ldots = \omega^n = 0,$$
$$\omega_1^2 = \ldots = \omega_1^n = 0,$$

причем интегральным инвариантом является $\int \omega^1 = \int ds$.

Если же система отнесения в каждой точке выбрана определенным образом, то интегральным инвариантом является

$$\int u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + \ldots + u_n\omega^n,$$

где через u_i обозначена система n вспомогательных неизвестных, связанных соотношением

$$u_i u^i = 1.$$

Определение *прямых линий нулевой длины* дает место аналогичным замечаниям. Здесь можно рассматривать случай пространства *метрической* связности. Предположим для определенности, что

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = g_{33} = \ldots = g_{nn} = -1;$$

искомые линии определяются, как нетрудно показать, интегрированием $2n-3$ уравнений

$$(1) \qquad \omega^1 - \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \ \ldots, \omega^n = 0,$$
$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = 0, \ldots, \omega_1^n + \omega_2^n = 0,$$

причем предполагается, что в каждой точке система отнесения выбрана наиболее общим образом. Если образовать билинейный ковариант формы $\omega^1 - \omega^2$, то, *учитывая соотношение* $\omega^1 - \omega^2 = 0$, получим

$$(\omega^1)' - (\omega^2)' = [\omega^3(\omega_1^3 + \omega_2^3)] + \ldots + [\omega^n(\omega_1^n + \omega_2^n)] +$$
$$+ \sum_{i,j}^{3,\ldots,n} (A_{ij}^1 - A_{ij}^2)[\omega^i\omega^j] + \sum_{i=3}^{n} (A_{1i}^1 + A_{2i}^1 - A_{1i}^2 - A_{2i}^2)[\omega^1\omega^i].$$

Отсюда вытекает, что, если

$$(2) \qquad A_{1i}^1 - A_{2i}^2 + A_{2i}^1 - A_{1i}^2 = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n),$$

уравнения (1) определяют *характеристики* уравнения Пфаффа

$$\omega^1 - \omega^2 = 0.$$

Следовательно, *прямые линии нулевой длины являются характеристиками некоторого уравнения в частных*

[1] Мы называем кривизной отношение вращения, соответствующего контуру треугольника, к его площади.

[2] См. например, G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, Gauthier-Villars, 1894; том III, гл. VIII, стр. 157.

производных первого порядка. Если в каждой точке m мы выберем определенную систему отнесения, то они получаются приведением к каноническому виду уравнения Пфаффа

$$u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + \ldots + u_n\omega^n = 0.$$

где вспомогательные неизвестные u_i удовлетворяют соотношению

$$u_i u^i = 0.$$

Соотношения (2) нетрудно интерпретировать геометрически. Если мы рассмотрим вектор ξ^i нулевой длины и к нему перпендикулярный вектор η^i, то эти соотношення выражают, что кручение плоского элемента, определяемого этими векторами, перпендикулярно к вектору ξ^i. Выражая, что соотиошение [1]

$$A^i_{jk}\xi_i(\xi^j\eta^k - \eta^j\xi^k) = 0$$

является следствием соотношений

$$\xi_i\xi^i = 0,\ \ \xi_i\eta^i = 0,$$

мы получим систему $\frac{n(n^2-4)}{3}$ линейных уравнений между составляющими кручения; они выражают, что некоторый тензор, образованный из составляющих тензора кручения, равен нулю. Если $n = 3$, получаем следующие наиболее общие выражения для кручения, совместные с соотношениями (2):

$$\Omega_1 = a[\omega^2\omega^3] + [\omega_1\overline{\omega}],$$
$$\Omega_2 = a[\omega^3\omega^1] + [\omega_2\overline{\omega}],$$
$$\Omega_3 = a[\omega^1\omega^2] + [\omega_3\overline{\omega}],$$

где через $\overline{\omega}$ обозначена некоторая произвольная линейная комбинация форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, через a — произвольный коэффициент.

---

[1] Мы встретим это соотношение и аналогичные ему в дальнейшем,— когда будем изучать тензор кручения.

Глава IV

ГРУППА ГОЛОНОМИИ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

45. В первой главе мы видели, что в пространстве аффинной связности каждому бесконечно-малому контуру, выходящему из точки m и возвращающемуся в нее, соответствует бесконечно-малое аффинное перемещение с составляющими

$$\Omega^i = A^i_{\alpha\beta}[\omega^\alpha\omega^\beta],\quad \Omega^i_j = A^i_{j\alpha\beta}[\omega^\alpha\omega^\beta].$$

При изменении замкнутого контура мы получаем линейное семейство перемещений

$$\Omega^i = e^{\alpha\beta}A^i_{\alpha\beta},\quad \Omega^i_j = e^{\alpha\beta}A^i_{j\alpha\beta},$$

зависящее от произвольных параметров $e^{\alpha\beta} = -e^{\beta\alpha}$. *В общем случае эти бесконечно-малые перемещения не порождают группу*[1].

Если же мы будем рассматривать все замкнутые контуры (конечные) выходящие из точки m и возвращающиеся в нее, мы получим уже иное. Каждому из них соответствует, как было указано в § 9, конечное аффинное перемещение в аффинном пространстве, касательном в точке *m*. Очевидно, что все эти перемещения образуют группу (непрерывную); в самом деле, если контурам C и C' соответствуют перемещения D и D', то контуру C'', получающемуся в результате обхода сначала C, а затем C', соответствует перемещение D'', являющееся произведением перемещений D и D'; таким образом, мы получаем снова одно из перемещений, соответствующих точке m.

Отсюда следует, что *каждой точке* m *пространства соответствует группа g аффинных перемещений—группа голономии.* Если мы выберем координатную систему в

---

[1] То есть скобки, образованные из двух бесконечно-малых преобразований

$$X_{\alpha\beta}f = (A^i_{\alpha\beta} + A^i_{k\alpha\beta}x^k)\frac{\partial f}{\partial x^i},$$

не выражаются обязательно линейно через $X_{\alpha\beta}f$.

аффинном пространстве, касательном в точке $\mathbf{m}$, эта группа может быть выражена в определенной аналитической форме; она определяется, в частности, определенной совокупностью бесконечно-малых преобразований.

46. Рассмотрим теперь две различных точки $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ пространства. Этим точкам соответствуют две группы голономии g и g'. Докажем следующую теорему:

Теорема однородности. — Группы голономии, соответствующие различным точкам пространства, являются гомологичными подгруппами аффинной группы G.

Напомним, что две подгруппы g и g' группы G называются гомологичными, если уравнения, определяющие одну из них, могут быть приведены к уравнениям другой подгруппы при помощи замены переменных, определяемой преобразованием группы G, то есть если существует такое преобразование T группы G, что подгруппа g' совпадает с подгруппой $T^{-1}gT$.

Для доказательства теоремы однородности обозначим через S' некоторое преобразование группы g', соответствующее контуру C', выходящему из точки $\mathbf{m}'$ и возвращающемуся в нее. Рассмотрим замкнутый контур C, состоящий из пути γ, соединяющего $\mathbf{m}$ с $\mathbf{m}'$, контура C' и пути γ, проходимого в обратном направлении. Пусть T — аффинное перемещение, которое преобразует аффинное пространство, касательное в $\mathbf{m}$, когда мы переходим по пути γ из точки $\mathbf{m}$ в точку $\mathbf{m}'$. Контуру C соответствует перемещение, являющееся произведением перемещений T, S' и T^{-1}. Другими словами, каждое перемещение вида $TS'T^{-1}$ принадлежит к g, если S' принадлежит к g'. Очевидно и обратное. Таким образом, имеем

$$g = Tg'T^{-1}. \tag{1}$$

Что и требовалось доказать.

47. Эту теорему мы применим к решению следующего важного вопроса. *Может ли группа голономии g, соответствующая произвольной точке $\mathbf{m}$ пространства, оставлять эту точку неподвижной?*

Прежде всего очевидно, что, если это имеет место, бесконечно-малое перемещение, соответствующее бесконечно-малому контуру, должно оставлять точку $\mathbf{m}$ в покое. Таким образом,

$$\Omega^i = 0;$$

другими словами, *пространство имеет нулевое кручение.*

Но этого еще не достаточно. В самом деле, рассмотрим бесконечно близкие точки $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ и отнесем аффинное пространство E', касательное в $\mathbf{m}'$, к аффинному пространству E, касательному в $\mathbf{m}$. На основании формулы (1) преобразования группы g (в пространстве E) *те же самые*, что и операции группы g' (отнесенные к тому же пространству). Но эти последние оставляют неподвижной точку $\mathbf{m}'$ (или вернее точку пространства E, соответствующую точке $\mathbf{m}'$). Таким образом, *группа g должна оставлять неподвижными не только точку $\mathbf{m}$ пространства E, но и все бесконечно близкие точки.* Другими словами, группа g приводится к тождественному преобразованию. Следовательно, все Ω_j^i равны нулю, и пространство является аффинным в собственном смысле слова. Итак:

Только в аффинном пространстве группа голономии g, соответствующая любой точке $\mathbf{m}$, оставляет эту точку неподвижной.

Отсюда мы видим, что пространство аффинной связности нулевого кручения оставляет *неподвижной* точку $\mathbf{m}$ только для замкнутых *бесконечно-малых* контуров, проходящих через эту точку.

Исследуем теперь, может ли группа g, соответствующая произвольной точке $\mathbf{m}$, состоять только из *переносов*, то есть может ли она оставлять инвариантными все векторы. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы все формы Ω_j^i были равны нулю, то есть чтобы *кривизна пространства была равна нулю.* Это условие и достаточно, так как тогда уравнения

$$d\xi^i + \xi^k\omega_k^i = 0,$$

определяющие параллельный перенос вектора, *полностью интегрируемы*; поэтому можно во всех точках $\mathbf{m}$ выбрать эквиполентные системы отнесения, то есть группа g будет содержать только переносы. Таким образом, *группа голономии g содержит только переносы тогда и только тогда, если пространство нулевой кривизны.* В этом случае, как мы уже отмечали, можно считать составляющие ω_j^i вращения аффинного пространства равными нулю.

Группа γ

48. Прежде, чем приступить к определению группы голономии g, соответствующей точке пространства аффинной связности, изучим, как преобразует эта группа *векторы* пространства; эти преобразования выражаются аналитически линейными однородными подстановками составляющих ξ^i того вектора, к которому применена группа g. Эти подстановки образуют, очевидно, группу γ, причем все группы γ, соответствующие различным точкам пространства, гомологичны между собой относительно общей группы линейных и однородных преобразований. Отсюда

вытекает, что можно выбрать системы отнесения в каждой точке $\mathbf{m}$ таким образом, что все группы γ будут определены аналитически одними и теми же уравнениями. Это можно сделать теоретически следующим образом.

Выберем по произволу систему отнесения в некоторой точке $\mathbf{m}_0$. Чтобы фиксировать систему отнесения в любой точке $\mathbf{m}$, выберем по произволу путь C, соединяющий $\mathbf{m}_0$ с $\mathbf{m}$, и за систему отнесения в $\mathbf{m}$ примем ту, которая получается в результате эквиполентного переноса *вдоль этого пути* системы, построенной в точке $\mathbf{m}_0$.

Тогда, рассматривая аналитические выражения групп γ и γ_0, имеем

$$\gamma_0 = \gamma.$$

Теперь перейдем из точки $\mathbf{m}_0$ в $\mathbf{m}$ по какому-нибудь другому пути C_1 и пусть T — преобразование векторов аффинного пространства, которое получается в результате этого перехода; описывая замкнутый контур, выходящий из точки $\mathbf{m}_0$ и состоящий из пути C_1, замкнутого контура, проходящего через точку $\mathbf{m}$, и пути C в обратном направлении, мы получим

$$\gamma_0 = T\gamma.$$

Отсюда вытекает, что T является преобразованием группы γ.

Можно аналогично показать, что при переходе из некоторой точки $\mathbf{m}$ в произвольную точку $\mathbf{m}'$ по произвольному пути векторы подвергаются преобразованию, принадлежащему определенной группе γ.

Отсюда вытекает, что, *если группа γ определена r бесконечно-малыми преобразованиями*

$$X_s f = (a_i^j)_s \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

то составляющие ω_j^i вращения аффинного пространства имеют вид

$$\omega_j^i = (a_j^i)_s \overline{\omega}^s, \tag{3}$$

где $\overline{\omega}^s$ — *произвольно выбранные формы Пфаффа.*

49. Обратно, предположим, что при соответствующем выборе систем отнесения в различных точках пространства составляющие ω_j^i можно представить в виде (3), причем постоянные $(a_j^i)_s$ являются коэффициентами бесконечно-малых преобразований некоторой линейной однородной группы γ. Я утверждаю, что *группа, определяющая преобразования векторов при применении группы голономии g, соответствующей точке $\mathbf{m}$, является группой γ или одной из ее подгрупп.*

В самом деле, преобразование векторов, когда мы производим развертывание по данному пути, определяется интегрированием системы дифференциальных уравнений

$$d\xi^i + \xi^k (a_k^i)_s \overline{\omega}^s = 0;$$

это интегрирование приводится к сложению бесконечного числа бесконечно-малых преобразований, *которые все принадлежат к группе* γ; оно дает, таким образом, преобразование группы γ.

50. Отсюда можно получить способ для выяснения вопроса, преобразует ли группа голономии g векторы операциями, принадлежащими к данной линейной однородной группе γ *или к одному из ее гомологов.* Для этого в каждой точке $\mathbf{m}$ строим *наиболее общую* систему отнесения (это вводит n^2 параметров) и стараемся определить эти параметры таким образом, чтобы имели место формулы (3) с соответственно выбранными формами $\overline{\omega}^s$. Для этого можно поступить следующим образом: выразить, что формы ω_j^i удовлетворяют $n^2 - r$ линейным однородным соотношениям с постоянными коэффициентами

$$\alpha_j^i \omega_i^j = 0, \quad \beta_j^i \omega_i^j = 0, \ldots, \quad \lambda_j^i \omega_i^j = 0. \tag{4}$$

Мы должны интегрировать систему Пфаффа с n^2 неизвестными функциями. Для исследования этой системы возьмем внешние производные от нее; для первой системы, например, получим

$$\alpha_j^i \{ [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j \} = 0.$$

Но сумма $\alpha_j^i [\omega_i^k \omega_k^j]$ *равна нулю* на основании уравнений (4) или, что приводится к тому же, эквивалентных уравнений (3); в самом деле, имеем

$$\alpha_j^i [\omega_i^k \omega_k^j] = \alpha_j^i [(a_i^k)_s (a_k^j)_t - (a_i^k)_t (a_k^j)_s] [\overline{\omega}^s \overline{\omega}^t].$$

Но преобразования (2) образуют по предположению группу; таким образом,

$$(X_s X_t) = [(a_i^k)_s (a_k^j)_t - (a_i^k)_t (a_k^j)_s] \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = c_{st\rho} X_\rho f =$$

$$= c_{st\rho} (a_i^j)_\rho \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^j},$$

откуда

$$\alpha_j^i [\omega_i^k \omega_k^j] = \alpha_j^i c_{st\rho} (a_i^j)_\rho [\overline{\omega}^s \overline{\omega}^t] = 0.$$

Итак, внешнее дифференцирование уравнений (4) приводит к соотношениям

$$\alpha_j^i \Omega_i^j = 0, \quad \beta_j^i \Omega_i^j = 0, \ldots, \quad \lambda_j^i \Omega_i^j = 0. \tag{5}$$

Они выражают, что преобразование векторов, соответствующее бесконечно-малому замкнутому контуру, принадлежит к группе γ.

Если в соотношениях (5) приравнять нулю в левых частях коэффициенты при произведениях $[\omega^\alpha\omega^\beta]$, мы получим некоторое число [1] конечных уравнений для неизвестных параметров. *Необходимо, чтобы эти уравнения были совместны.* В этом случае мы разрешим их относительно возможно большего числа неизвестных; подставляя в уравнения (4), мы получаем новые уравнения Пфаффа. Может случиться, что имеются линейные комбинации этих уравнений, не содержащие более дифференциалов от неизвестных параметров; тогда мы выразим условие, чтобы эти комбинации обращались тождественно в нуль, что даст новые конечные соотношения между параметрами. Необходимо, чтобы они были совместны. Если это имеет место, мы получим, учитывая эти соотношения, новую систему (4) и так далее, пока мы не придем к невозможности или к системе, у которой первые члены линейно независимы относительно дифференциалов неизвестных функций. В последнем случае система будет полностью интегрируема, так как внешняя производная приводит к соотношениям (5), которые, по предположению, удовлетворяются.

В результате мы получаем регулярный метод для определения *группы* γ, *соответствующей произвольной точке пространства.* Для этого достаточно последовательно исследовать все линейные однородные группы γ различных типов.

В частности, группа γ приведется к тождественному преобразованию, если все формы Ω^i_j равны нулю, так как тогда уравнения с n^2 неизвестными

$$\omega^i_j = 0$$

полностью интегрируемы. Мы приходим снова к доказанному выше результату.

Пример 1. — Исследуем случай, когда группа g оставляет инвариантными n направлений, не параллельных одной $(n-1)$-мерной плоскости. Если мы примем эти направления за координаты оси, то коэффициенты $(a^i_j)_s$ в формулах (2) равны нулю для $j \neq i$. Система Пфаффа (4) имеет, таким образом, следующий вид:

$$\omega^i_j = 0 \quad (i \neq j)$$

[1] В общем случае $\frac{n(n-1)}{2}(n^2 - r)$.

и приводит к $n(n-1)$ соотношениям

$$\Omega^i_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Следовательно, если система Пфаффа совместна, то формулы структуры пространства можно привести к следующему виду

$$(\omega^i)' = [\omega^i\omega^i_i] + \Omega^i,$$
$$(\omega^i_i)' = \Omega^i_i.$$

Если пространство, кроме того, имеет нулевое кручение, то каждое из уравнений $\omega^i = 0$ полностью интегрируемо; *таким образом, в пространстве существует* n *семейств* $(n-1)$-*мерных гиперповерхностей, зависящих от одного параметра и обладающих тем свойством, что гиперповерхности каждого семейства в каждой из их точек касаются* $n-1$ *определенных направлений, связанных с этой точкой.* Имеем, например,

$$\omega^i = P_i du^i, \ \omega^i_i = -\frac{dP_i}{P_i} + Q_i du^i, \ \Omega^i_i = [dQ_i du^i].$$

Пример II. — Исследуем, в каком случае группа g *сохраняет объемы.* Коэффициенты $(a^i_j)_s$ бесконечно-малых преобразований группы γ должны удовлетворять соотношению

$$(a^1_1)_s + (a^2_2)_s + \ldots + (a^n_n)_s = 0.$$

Таким образом, необходимо рассмотреть систему Пфаффа

$$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \ldots + \omega^n_n = 0;$$

внешнее дифференцирование дает

$$\Omega^1_1 + \Omega^2_2 + \ldots + \Omega^n_n = 0.$$

Это соотношение не содержит n^2 произвольных неизвестных параметров, которые входят при выборе наиболее общей системы отнесения, связанной с точкой $\mathfrak{m}$. В самом деле, это зависит от того, что согласно формулам (7) гл. 1

$$(\Omega^1_1)' + (\Omega^2_2)' + \ldots + (\Omega^n_n)' = 0 \ ^{1)} .$$

[1] Если бы коэффициенты формы Ω^i_i зависели эффективно от одного из n^2 параметров, то дифференциал от этого параметра не мог бы исключиться из трилинейного коварианта $(\Omega^i_i)'$. Имеющаяся здесь особенность зависит от того, что подгруппа γ *инвариантна* в общей группе вращений.

Таким образом, искомым условием является просто

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \ldots + \Omega_n^n = 0,$$

что дает $\frac{n(n-1)}{2}$ условий: $A^i_{i\alpha\beta} = 0$.

Пример III. — Рассмотрим, наконец, случай, когда группа γ оставляет инвариантной совокупность направлений, параллельных образующим невыродившегося конуса второго порядка; пусть этот конус мнимый, то есть его уравнение приводимо к виду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0.$$

В этом случае системы отнесения можно выбрать таким образом, чтобы имели место соотношения

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \ (i \neq j), \ \omega_1^1 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_n^n.$$

Уравнения структуры будут тогда иметь следующий вид:

$$(\omega^i)' = [\omega^i \omega] + [\omega^k \omega_k^i] + \Omega^i,$$

$$(\omega_j^i)' = [\omega_j^k \omega_k^i] + \Omega_j^i,$$

$$\omega' = \Omega.$$

Пространство имеет *метрическую связность*. Если, кроме того, группа γ сохраняет объемы, то $\omega = 0$; пространство становится многообразием *евклидовой связности*.

Определение группы голономии g

51. Группа голономии g может быть определена методом, аналогичным тому, который был дан при изучении группы γ. Но для этого необходимо немного обобщить принятые нами системы отнесения. До сих пор мы предполагали, что аффинное пространство, касательное в точке $\mathbf{m}$, задано координатной системой, имеющей начало в самой точке $\mathbf{m}$. Теперь мы применим наиболее общую систему, имеющую начало в любой точке аффинного пространства; обозначим через

$$a^1, a^2, \ldots, a^n$$

координаты точки $\mathbf{m}$ в этой системе. Соответствие между точками (x^i) аффинного пространства, связанного с точкой $\mathbf{m}$, и точками $(x^i + dx^i)$ аффинного пространства, связанного с бесконечно близкой точкой $\mathbf{m}'$, определяется аналитически при помощи $n + n^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}^i$, ω_j^i следующими уравнениями

$$dx^i + \overline{\omega}^i + x^k \omega_k^i = 0. \tag{6}$$

Мы получим соотношения между новыми формами $\overline{\omega}^i$ и старыми ω^i, если выразим, что точке $\mathbf{m}$ первого пространства с координатами a^i соответствует точка $\mathbf{m} - \omega^i \mathbf{e}_i$ второго пространства с координатами $a^i + da^i - \omega^i$. Таким образом, имеем

$$da^i - \omega^i + \overline{\omega}^i + a^k \omega_k^i = 0. \tag{7}$$

Предполагая группу g известной, мы можем всегда выбрать системы отнесения в различных точках пространства таким образом, что в каждой из этих координатных систем группа выразится одними и теми же уравнениями и, кроме того, что бесконечно-малое преобразование координат, ориентирующее одно относительно другого аффинные пространства, касательные в двух бесконечно-близких точках, выражается аналитически преобразованием группы g. Другими словами, *мы можем всегда предполагать, что бесконечно-малое преобразование, определяемое уравнениями (6), принадлежит группе g.*

Обратное вполне очевидно; в самом деле, интегрирование уравнений (6) вдоль некоторого пути даст преобразование группы g, так как оно приводится к сложению бесконечного множества бесконечно-малых преобразований этой группы.

52. Можно следующим образом определить, является ли группа голономии заданной группой g (или ее гомологом или, скорее, гомологом одной из ее подгрупп). Если уравнения

$$\delta x^i + e^i + x^k e_k^i = 0$$

определяют наиболее общее бесконечно-малое преобразование этой группы, то между составляющими e^i, e_k^i этого преобразования существует определенное число линейных однородных соотношений с постоянными коэффициентами

$$\alpha_i e^i + \alpha_i^k e_k^i = 0, \quad \beta_i e^i + \beta_i^k e_k^i = 0, \ldots, \quad \lambda_i e^i + \lambda_i^k e_k^i = 0.$$

Теперь свяжем с каждой точкой $\mathbf{m}$ пространства наиболее общую систему отнесения (это введет $n^2 + n$ произвольных параметров) и попытаемся определить эти параметры из соотношений

$$\alpha_i \overline{\omega}^i + \alpha_i^k \omega_k^i = 0, \quad \beta_i \overline{\omega}^i + \beta_i^k \omega_k^i = 0, \ldots, \quad \lambda_i \overline{\omega}^i + \lambda_i^k \omega_k^i = 0. \tag{8}$$

В частности, возьмем внешнюю производную от этих уравнений, что даст

$$\alpha_i \Pi^i + \alpha_i^k \Omega_k^i = 0, \ \beta_i \Pi^i + \beta_i^k \Omega_k^i = 0, \ \ldots, \ \lambda_i \Pi^i + \lambda_i^k \Omega_k^i = 0, \tag{9}$$

где

$$\Pi^i = \Omega^i - a^k \Omega_k^i.$$

Уравнения (9) дают определенное число конечных уравнений между неизвестными параметрами. Необходимо, чтобы они были совместны. Разрешим эти уравнения и подставим в уравнения (8) и так далее.

53. *Пример I.* — Исследуем, в каком случае группа g является наиболее общей группой вращений около неподвижной точки. Если мы выберем эту точку за начало координат, составляющие e^i наиболее общего бесконечно-малого преобразования группы равны нулю. Уравнения (8) приводятся, таким образом, к следующим

$$\overline{\omega}^1=0,\quad \overline{\omega}^2=0,\ldots,\overline{\omega}^n=0,$$

то есть на основании (7)

$$da^i-\omega^i+a^k\omega_k^i=0.$$

Эта система n уравнений Пфаффа относительно $a^1,\ldots,a^n$ должна иметь решение.

Если это имеет место, можно всегда предположить, что система отнесения выбрана таким образом, что все координаты точки $\mathfrak{m}$ равны нулю за исключением $a^1=1$. Тогда

$$\omega^i=\omega_1^i.$$

Эти соотношения характеризуют исследуемые пространства.

Пример II. — Исследуем, в каком случае группа g является группой *переносов* с r параметрами. Можно всегда предположить, что группа определяется бесконечно-малыми переносами

$$\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad \frac{\partial f}{\partial x^2},\ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

что соответствует соотношениям

$$\overline{\omega}^{r+1}=\ldots=\overline{\omega}^n=0,\quad \omega_j^i=0,$$

или

$$\omega_j^i=0,\quad da^{r+1}-\omega^{r+1}=\ldots=da^n-\omega^n=0.$$

Следовательно, составляющие вращения ω_j^i равны все нулю, и формы $\omega^{r+1},\ldots,\omega^n$ являются полными дифференциалами.

Пример III. — Рассмотрим, наконец, при $n=3$ случай, когда группа g является однопараметрической группой геликоидальных движений. Можно, таким образом, предположить, что группа определяется бесконечно-малым преобразованием

$$x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}+k\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

В этом случае уравнения (6) приводятся к

$$dx^1-x^2\overline{\omega}=0,$$
$$dx^2+x^1\overline{\omega}=0,$$
$$dx^3+k\overline{\omega}=0.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\omega_1^2+\omega_2^1=0,\quad \omega_1^1=\omega_1^3=\omega_2^2=\omega_2^3=\omega_3^1=\omega_3^2=\omega_3^3=0,$$

$$da^1-\omega^1+a^2\omega_2^1=0,$$
$$da^2-\omega^2+a^1\omega_1^2=0,$$
$$da^3-\omega^3+k\omega_1^2=0.$$

Отметим, что в этом случае соотношения

$$\Omega^1-a^2\Omega_2^1=\Omega^2-a^1\Omega_1^2=\Omega^3-k\Omega_1^2=0$$

исключают пространства нулевого кручения; в самом деле, в противном случае все Ω_j^i были бы равны нулю, и группа g сводилась бы к тождественному преобразованию [1].

---

[1]) Вопрос, изложенный в этой главе, имеет отношение к очень важным исследованиям, обзор которых можно найти в докладе: La théorie des groupes et les récherches récentes de Géométrie differentielle, сделанном на математическом интернациональном конгрессе в Торонто (август 1924) и опубликованном в l'Enseignement mathématique (1925)*.

*) Систематическое изложение этих исследований Картана содержится в его работе: Группы голономии обобщенных пространств (вып. I настоящей серии). (Прим. ред.).

Глава V

ТЕНЗОРЫ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

54. Рассмотрим в аффинном пространстве[1] геометрический объект или, скорее, — совокупность геометрических объектов, преобразующнхся между собой при аффинном преобразовании. Если выбрать аффинную систему координат, этот геометрический объект аналитически задается при помощи некоторого числа (мы предположим конечного) величин $y_1, y_2, \ldots, y_p$, которые мы будем называть его координатами. При изменении системы координат эти величины преобразуются, причем совокупность преобразований, соответствующих различным преобразованиям координат, очевидно, образует группу. Мы будем говорить, что совокупность величин y_i образует тензор с p составляющими. Мы будем употреблять термин „тензор“ специально в том случае, когда группа преобразований величин y_i — *линейная*. Координаты точки, составляющие вектора, коэффициенты уравнения поверхности 2-го порядка и т. д. определяют тензоры.

Рассмотрим теперь пространство аффинной связности n измерений. Мы будем называть тензором, связанным с точкой **m** этого многообразия, совокупность величин, которые подвергаются линейному преобразованию при изменении системы отнесения (с началом **m**), связанной с касательным аффинным пространством в **m**. Существуют два примечательных тензора, связанных с точкой **m** многообразия, — *тензор кручения*, у которого составляющими являются коэффициенты $A^i_{\alpha\beta}$, и *тензор кривизны*, составляющие которого суть коэффициенты $A^i_{j\alpha\beta}$.

Когда мы производим преобразование системы отнесения с началом в точке **m**, очевидно, что $A^i_{\alpha\beta}$ и $A^i_{j\alpha\beta}$ преобразуются линейной подстановкой. Коэффициенты $A^i_{\alpha\beta}$ позволяют, как мы видели, определить *трансляцию*, соответствующую замкнутому бесконечно-малому контуру, выходящему из точки **m** и возвращающемуся в нее, коэффициенты $A^i_{j\alpha\beta}$ определяют при тех же обстоятельствах *вращение*.

[1] Излагаемая ниже теория применяется mutatis mutandis к пространству с любой фундаментальной группой.

Исследование тензора кручения

55. Составляющие каждого тензора, связанного с точкой **m**, преобразуются линейной (и однородной) подстановкой при изменении системы отнесения в точке **m**. Мы будем называть тензор *неприводимым*, если нельзя найти такие лииейные комбинации (с постоянными коэффициентами) составляющих рассматриваемого тензора, которые образовывали бы сами тензор.

Мы попытаемся разложить тензор кручения на неприводимые тензоры[1].

Будем основываться на том, что вектор

$$\mathbf{e}_1\Omega^1 + \mathbf{e}_2\Omega^2 + \ldots + \mathbf{e}_n\Omega^n = \mathbf{e}_i A^i_{jk}\,[\omega^j\omega^k]$$

имеет внутренне-геометрический смысл (не зависящий от системы отнесения), так как он определяет трансляцию, соответствующую двумерному элементу многообразия. Возьмем произвольный вектор x^i и две системы переменных u_i и v_i и рассмотрим вектор

$$\mathbf{e}_i x^i (u_j v_k - u_k v_j)\,[\omega^j\omega^k].$$

Преобразуем систему отнесения, причем условимся над u и v_i производить такую линейную подстановку, чтобы суммы $u_i\omega^i$ и $v_i\omega^i$ не изменялись[2]. Тогда A^i_{jk} при изменении координат преобразуются такой же линейной подстановкой, что и величины $x^i(u_j v_k - u_k v_j)$.

Мною было доказано, что $x^1(u_2 v_3 - u_3 v_2)$ и все те величины, которые из нее получаются при произвольном

[1] Во время редактирования этого мемуара (декабрь 1922) я рассматривал как очеиь вероятную, ие зная ее доказательства, теорему, согласио которой каждый тензор, соответствующий линейной *простой* или *полупростой* группе, разлагается на неприводимые тензоры. Г. Вейлю удалось совсем иедавио доказать эту теорему (Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung (Gött. Nachr.. 1924); см. также Zur Theorie der Darstellung der einfachen continuierlichen Gruppen (Sitzungsb., Berlin, 1924, стр. 338—345). Применение метода Hurwitz'a (Gött. Nach., 1897, стр. 71) позволило ему распространить на непрерывные простые и полупростые группы классическую теорему, согласно которой каждая группа, образованная из конечного числа подстановок, оставляет инвариантной форму Эрмита. Вейль опубликовал доказательство только для четырех больших классов простых групп.

[2] Мы будем говорить, следуя терминологии, ставшей теперь классической, что u_i — переменные ковариантные, а ω^i — контравариантные.

преобразовании координат, образуют неприводимый тензор Отметим, что уравнения

$$x^1=0,\ u_2=0,\ u_3=0$$

определяют: первое — гиперплоскость $n-1$ измерений, а каждое из двух последних точку, причем *каждая из этих двух точек лежит в гиперплоскости*. Следовательно, неприводимый тензор, о котором шла речь выше, содержит все комбинации величин $x^i(u_jv_k-u_kv_j)$, имеющие следующий вид:

$$a_ix^i(b^ju_jc^kv_k-b^jv_jc^ku_k)=a_ix^i(b^jc^k-b^kc^j)(u_jv_k-u_kv_j),$$

причем коэффициенты a_i, b^j, c^k удовлетворяют двум соотношениям

(1) $$a_ib^i=0,\quad a_ic^i=0.$$

Возвращаясь к коэффициентам A^i_{jk}, мы видим, что мы получим первый неприводимый тензор $\mathfrak{T}$, образованный из этих коэффициентов, рассматривая все линейные комбинации вида

(2) $$a_i(b^jc^k-b^kc^j)A^i_{jk},$$

где a_i, b^j, c^k удовлетворяют только соотношениям (1). Форма (2) с переменными a_i, b^j, c^k, связанными соотношениями (1), является *производящей формой* тензора $\mathfrak{T}$.

Каждая возможная составляющая тензора $\mathfrak{T}$ имеет вид

$$\alpha^{jk}_iA^i_{jk}$$

с постоянными коэффициентами α^{jk}_i. Определим все линейные тождественные соотношения, которые существуют между этими коэффициентами. Пусть

$$h^i_{jk}\alpha^{jk}_i=0$$

— одно из них. *Мы получим, принимая во внимание только соотношения* (1),

$$h^i_{jk}a_i(b^jc^k-b^kc^j)=0;$$

следовательно, мы имеем *тождество* относительно a_i, b^j, c^k вида

$$h^i_{jk}a_i(b^jc^k-b^kc^j)\equiv\lambda_ic^ia_kb^k+\mu_ib^ia_kc^k$$

с *постоянными* коэффициентами λ_i, μ_i. Отождествляя члены с $a_ib^ic^i$, имеем $\lambda_i=-\mu_i$; следовательно,

$$h^i_{jk}a_i(b^jc^k-b^kc^j)\equiv\mu_ia_k(b^ic^k-b^kc^i).$$

Так как первый член может быть равен нулю только в том случае, если все $h^k_{ij}=0$, то единственные возможные не нулевые значения постоянных h^i_{jk} даются равенством

$$h^k_{ik}=\mu_i,$$

что дает n соотношений между α^{ik}_j вида

$$\alpha^{1k}_k=0,\ \alpha^{2k}_k=0,\dots,\ \alpha^{nk}_k=0.$$

Итак, *мы получили первый неприводимый тензор кручения, имеющий* $\frac{n(n+1)(n-2)}{2}$ *составляющих*

$$\alpha^{jk}_iA^i_{jk},$$

причем

$$\alpha^{ik}_k=0\ (i=1,\ 2,\dots,\ n).$$

56. Докажем теперь существование второго неприводимого тензора. Будем исходить для этого из произвольного вектора a^i и рассмотрим выражение

$$a^iu_ix^kv_k-a^iv_ix^ku_k;$$

коэффициенты при a^i составляют, очевидно, неприводимый тензор, у которого i-ая составляющая имеет вид

$$x^k(u_iv_k-v_iu_k);$$

это приводит к новому неприводимому тензору с n составляющими

$$A^k_{1k},\quad A^k_{2k},\dots,\ A^k_{nk}.$$

Итак, *мы разложили тензор кручения с* $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *составляющими на два неприводимых тензора* $\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}'$, *имеющих соответственно* $\frac{n(\ +1)(n-2)}{2}$ *и* n *составляющих.* Можно, наконец, доказать, *что не существует других неприводимых тензоров, образованных при помощи линейных комбинаций составляющих* A^i_{jk}.

57. Можно дать более прямое определение тензора $\mathfrak{T}'$, замечая, что выражение Пфаффа

$$A^k_{ki}\omega^i,$$

у которого коэффициенты с обратным знаком являются составляющими тензора $\mathfrak{T}'$, равно

$$\frac{\partial\Omega^1}{\partial\omega^1}+\frac{\partial\Omega^2}{\partial\omega^2}+\dots+\frac{\partial\Omega^n}{\partial\omega^n}.$$

Этой форме Пфаффа можно дать более конкретную геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим для этого бесконечно-малый вектор ω^i, выходящий из точки $\mathbf{m}$; это — вектор $\mathbf{m}'-\mathbf{m}=d\mathbf{m}$. Рассмотрим теперь некоторый бесконечно-малый вектор x^i, выходящий из $\mathbf{m}$, и параллелограмм, построенный на векторах x^i и ω^i. Контуру этого параллелограмма, обходимому из точки **m** в направлении **mm'**, соответствует бесконечно-малая трансляция, составляющие которой зависят, очевидно, от вектора **x** и равны

$$\Omega^i = A^i_{jk}(\omega^j x^k - \omega^k x^j);$$

если мы применим к концу вектора **x** эту трансляцию, мы получим вектор **x'**, бесконечно-мало отличающийся от x, с составляющими

$$x^{i'} = x^i + A^i_{jk}(\omega^j x^k - \omega^k x^j).$$

Эта формула определяет, *когда задана точка* **m'**, бесконечно-малое аффинное преобразование, примененное к переменному вектору x^i. Если мы применим это преобразование к n векторам x, не лежащим в одной $(n-1)$-мерной плоскости, мы получим n новых векторов x', причем объем параллелепипеда, образованного векторами x, получит приращение с коэффициентом расширения, равным как раз форме Пфаффа

$$A^i_{ji}\omega^j.$$

Другими словами, *эта форма Пфаффа дает коэффициент расширения объема при аффинном преобразовании, которое мы определили при помощи вектора* ω^i.

В частности, из предыдущего следует, что в многообразии аффинной связности, для которого тензор $\mathfrak{T}'$ не равен нулю, *существует форма Пфаффа, имеющая внутренне-геометрический смысл* (не зависящий от выбора системы отнесения) *и связанная с каждым бесконечно-малым перемещением в многообразии*; иными словами, *многообразие допускает интегральный линейный инвариант (скалярный)*

$$\int A^i_{ji}\omega^j.$$

58. Попытаемся теперь охарактеризовать многообразия, для которых неприводимый тензор $\mathfrak{T}$ равен нулю. В этом случае единственными отличными от нуля коэффициентами кручения являются A^i_{ij}; положим

$$A^i_{ij} = a_i.$$

Обозначая [1])

$$a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + \ldots + a_n\omega^n = \bar{\omega},$$

мы получим

$$\Omega^i = [\bar{\omega}\omega^i].$$

[1]) Нетрудно видеть, что рассмотренный выше интегральный инвариант равен $\int\bar{\omega}$.

Трансляция, соответствующая замкнутому бесконечно-малому контуру, равна

$$\mathbf{e}_i[\bar{\omega}\omega^i] = [\bar{\omega}d\mathbf{m}].$$

Установив это, рассмотрим бесконечно-малый параллелограмм, имеющий одну из вершин в точке **m**; мы можем всегда, не изменяя трансляции, которая соответствует этому параллелограмму, предположить, что одна из его сторон y^i лежит в гиперплоскости P, определяемой уравнением $a_i x^i = 0$; пусть x^i — другая сторона; соответствующая трансляция определяется вектором

$$a_k x^k (y^1\mathbf{e}_1 + \ldots + y^n\mathbf{e}_n);$$

таким образом, эта трансляция происходит вдоль прямой пересечения y^i *плоскости параллелограмма с гиперплоскостью* P, *то есть вдоль направления, принадлежащего плоскости параллелограмма.*

Мы можем снова прийти к этому результату и в то же время доказать обратное предложение, исходя из производящей формы

$$a_i(b^j c^k - b^k c^j) A^i_{jk}$$

тензора $\mathfrak{T}$, в которой параметры a_i, b^i, c^i подчинены единственным соотношениям

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0.$$

Говоря, что, для данного многообразия тензор $\mathfrak{T}$ равен нулю, мы утверждаем, что производящая форма тождественно равна нулю, если при этом учитывать соотношения, существующие между параметрами, которые она содержит. Но это выражает то, что, если мы рассмотрим в точке параллелограмм, построенный из двух произвольных бесконечно-малых векторах b^i, c^i, *трансляция, соответствующая этому параллелограмму, определяется вектором*

$$\mathbf{e}_i A^i_{jk}(b^j c^k - b^k c^j),$$

лежащим в плоскости параллелограмма.

59. Рассмотрим, в частности, многообразие *нулевой кривизны*, для которого тензор $\mathfrak{T}$ равен нулю; оно имеет уравнения структуры вида

$$(\omega^i)' = [\bar{\omega}\omega^i], \quad \omega^i_j = 0.$$

Отсюда выводим

$$[\bar{\omega}'\omega^1] = [\bar{\omega}'\omega^2] = \ldots = [\bar{\omega}'\omega^n] = 0;$$

следовательно, если $n > 2$, билинейный ковариант $\bar{\omega}'$ формы $\bar{\omega}$ равен нулю и $\bar{\omega}$ есть полный дифференциал $\frac{dV}{V}$. Нетрудно видеть, что формы $\frac{1}{V}\omega^i$ также являются полными дифференциалами, так что можно положить

$$\omega^i = V du^i.$$

Гиперповерхности $V = \text{const.}$ касаются в каждой из своих точек гиперплоскости $\overline{\omega} = 0$, так что трансляция, соответствующая бесконечно-малому параллелограмму, происходит по прямой пересечения плоскости этого параллелограмма с гиперплоскостью, касающейся гиперповерхности $V = \text{const.}$, проходящей через $\mathbf{m}$. Очевидно, что группа голономии g, соответствующая точке $\mathbf{m}$, содержит $n-1$ параметров и образована из трансляций, параллельных гиперплоскости, которая касается гиперповерхности $V = \text{const.}$, проходящей через $\mathbf{m}$.

Исследование тензора кривизны

60. Разложим теперь тензор кривизны, имеющий $\frac{n^3(n-1)}{2}$ составляющих, на неприводимые тензоры. Легко заметить, что эти составляющие A^i_{jkl} преобразуются при замене координат, как выражения

$$x^i u_j (v_k w_l - v_l w_k),$$

где x^i — составляющие произвольного вектора, u_i, v_i и w_i — три системы ковариантных переменных (преобразующихся, как $\mathbf{e}_i$). Можно показать, что выражение

$$x^1 u_2 (v_2 w_3 - v_3 w_2)$$

и все те, которые из него получаются при произвольном преобразовании координат, образуют неприводимый тензор. Следовательно, величины

$$a_i x^i b^j u_j (b^k c^l - b^l c^k)(v_k w_l - v_l w_k),$$

где произвольные параметры a_i, b^i, c^i подчинены двум соотношениям

(1) $$a_i b^j = 0, \quad a_i c^i = 0,$$

дают все составляющие этого неприводимого тензора. Другими словами,

$$a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) A^i_{jkl}$$

является приводящей формой одного неприводимого тензора кривизны. Каждая составляющая этого тензора имеет вид

$$\alpha_i^{jkl} A^i_{jkl}$$

с постоянными коэффициентами α_i^{jkl}. Определим те линейные соотношения с постоянными коэффициентами

$$h^i_{jkl}\alpha_i^{jkl} = 0,$$

которые существуют между этими коэффициентами. Они характеризуются условием, что соотношение

$$h^i_{jkl} a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) = 0$$

имеет место каждый раз, когда

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0;$$

другими словами, мы должны иметь тождество относительно a_i, b^i, c^i:

$$h^i_{jkl} a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) \equiv \lambda(b, c) a_i b^i - \mu(b) a_i c^i,$$

где $\lambda(b, c)$ обозначает билинейную форму от b^i и c^i, а $\mu(b)$ — квадратичную форму от b^i:

$$\lambda(b, c) = \lambda_{jk} b^j c^k, \quad \mu(b) = \mu_{jk} b^j b^k \quad (\mu_{jk} = \mu_{kj}).$$

Отождествляя, имеем

$$\mu_{ii} = \lambda_{ii}, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}),$$

так что второй член тождества принимает вид

$$\lambda_{ii} a_k b^i (b^k c^i - b^i c^k) + \lambda_{ij} a_k b^i (b^k c^j - b^j c^k).$$

Непосредственно видно, что среди соотношений, которые существуют между коэффициентами α_i^{jkl}, имеется n^2 следующих

(3) $$\alpha_k^{ijk} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Но имеются и другие соотношения, относящиеся к случаю, когда полиномы $\lambda(b, c)$ и $\mu(b)$ тождественно равны нулю. Эти соотношения, число которых равно $\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$, следующие

(3 bis) $$\alpha_i^{jkl} + \alpha_i^{klj} + \alpha_i^{ljk} = 0 \quad (i = 1, \dots n;\ j \neq k \neq l = 1, 2, \dots, n).$$

Нетрудно показать, что соотношения (3) и (3 bis) независимы; таким образом, *они определяют неприводимый тензор с числом составляющих, равным*

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - n^2 - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-4)}{3}.$$

61. Форма соотношений (3) и (3 bis) приводит нас к мысли, что величины

(4) $$A^k_{ijk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

с одной стороны, и величины

(5) $$B^i_{jkl} = A^i_{jkl} + A^i_{klj} + A^i_{ljk} \quad (i = 1, \dots, n;\ j \neq k \neq l = 1, \dots, n),$$

с другой, образуют два новых тензора.

В самом деле, величины A^k_{ijk} преобразуются, как

$$x^k u_l (v_j w_k - v_k w_j) = u_l v_j x^k w_k - u_l w_j x^k v_k,$$

то есть, как величины $u_i v_j$. Они образуют, таким образом, тензор, но он не является неприводимым. Его можно разложить на два неприводимых тензора, один симметрический, изоморфный с тензором $u_i u_j$, другой антисимметрический, изоморфный с тензором $u_i v_j - u_j v_i$. Первый имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ составляющих вида

(6) $$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(A^k_{ijk} + A^k_{jik}),$$

второй $\frac{n(n-1)}{2}$ составляющих

(7) $$b_{ij} = -b_{ji} = A^k_{ijk} - A^k_{jik}.$$

Первый образован из коэффициентов дифференциальной квадратичной формы

(6′) $$a_{ij}\omega^i\omega^j = A^k_{ijk}\omega^i\omega^j = -\omega^i \frac{\partial\Omega^k_i}{\partial\omega^k},$$

второй — из коэффициентов внешней формы.

(7′) $$b_{ij}[\omega^i\omega^j] = A^k_{ijk}[\omega^i\omega^j] = -\left[\omega^i \frac{\partial\Omega^k_i}{\partial\omega^k}\right].$$

62. Перейдем теперь к величинам (5). Они преобразуются, как

$$x^i \begin{vmatrix} u_j & u_k & u_l \\ v_j & v_k & v_l \\ w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что величина

$$x^1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

и те, которые из нее получаются при произвольном преобразовании координат, образуют неприводимый тензор. Составляющие этого тензора могут быть получены заменой x^1 на $a_i x^i$, u_2 на $b^i u_i$, u_3 на $c^i u_i$ и u_4 на $d^i u_i$, где a_i, b^i, c^i, d^i — произвольные постоянные, удовлетворяющие соотношениям

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0, \quad a_i d^i = 0.$$

Мы получаем, таким образом, тензор, определяемый производящей формой

$$a_i x^i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_j & u_k & u_l \\ v_j & v_k & v_l \\ w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}.$$

Возвращаясь к величинам (5), мы получим производящую форму

$$a_i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} B^i_{jkl}.$$

В результате мы получаем, таким образом, неприводимый тензор, у которого все составляющие имеют вид

$$\beta^{jkl}_i B^i_{jkl}.$$

Найдем линейные соотношения

$$h^i_{jkl}\beta^{jkl}_i = 0,$$

существующие между коэффициентами этих составляющих. Мы получим их из тождества

$$h^i_{jkl} a_i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(c, d) a_i b^i + \mu(d, b) a_i c^i + \nu(b, c) a_i d^i,$$

где $\lambda(c, d)$ — билинейная форма от b^i и c^i, а $\mu(d, b)$ и $\nu(b, c)$ — две другие билинейные формы.

Предыдущее тождество приводит к $h^i_{jkl} = 0$, если второй член тождественно равен нулю. Отождествление в общем случае показывает, что второй член имеет вид

$$\lambda_{ij} a_k \begin{vmatrix} b^k & b^i & b^j \\ c^k & c^i & c^j \\ a^k & d^i & d^j \end{vmatrix} \qquad (\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0).$$

Единственными соотношениями, которые существуют между коэффициентами h^{jkl}_i, будут, следовательно, $\frac{n(n-1)}{2}$ следующих:

$$\beta^{kij}_k = 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, \dots, n).$$

Мы получаем, таким образом, четвертый неприводимый тензор с $\frac{n(n^2-1)(n-3)}{6}$ *составляющими, образованными при помощи комбинаций*

$$\beta^{jkl}_i B^i_{jkl} = \beta^{jkl}_i (A^i_{jkl} + A^i_{klj} + A^i_{ljk}),$$

для которых имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ *соотношений*

$$\beta_k^{kij}=0 \quad (i\neq j=1,\ldots,n).$$

62 *bis*. В заключение мы рассмотрим $\frac{n(n-1)}{2}$ комбинаций

$$B_{kij}^k \qquad (i\neq j=1,\ldots,n);$$

они преобразуются между собой, как величины

$$x^k\begin{vmatrix} u_k & u_i & u_j\\ v_k & v_i & v_j\\ w_k & w_i & w_j\end{vmatrix}=x^k u_k(v_i w_j-v_j w_i)+x^k v_k(w_i u_j-w_j u_i)+$$
$$+x^k w_k(u_i v_j-u_j v_i),$$

то есть, как

$$u_i v_j-u_j v_i.$$

Таким образом, они образуют последний неприводимый тензор, антисимметрический, с $\frac{n(n-1)}{2}$ *составляющими.* Нетрудно видеть, что эти составляющие являются коэффициентами внешней дифференциальной формы

$$\Omega_i^i-\left[\omega^i\frac{\partial\Omega_i^k}{\partial\omega^k}\right].$$

63. Итак, *мы доказали существование пяти неприводимых тензоров, образованных из коэффициентов общего тензора кривизны.*

Первый тензор, с $\frac{n^2(n^2-4)}{3}$ *составляющими, определяется линейными комбинациями*

$$\alpha_i^{jkl}A_{jkl}^i,$$

для которых имеют место соотношения

$$\alpha_k^{ijk}=0,\quad \alpha_i^{jkl}+\alpha_i^{klj}+\alpha_i^{ljk}=0.$$

Второй, с $\frac{n(n^2-1)(n-3)}{6}$ *составляющими, определяется линейными комбинациями*

$$\beta_i^{jkl}(A_{jkl}^i+A_{klj}^i+A_{ljk}^i)$$

с соотношениями

$$\beta_k^{kij}=0.$$

Третий, с $\frac{n(n+1)}{2}$ *составляющими, образован коэффициентами дифференциальной квадратичной формы*

$$\omega^i\frac{\partial\Omega_i^k}{\partial\omega^k}.$$

Четвертый, с $\frac{n(n-1)}{2}$ *составляющими, определяется коэффициентами внешней дифференциальной квадратичной формы*

$$\left[\omega^i\frac{\partial\Omega_i^k}{\partial\omega^k}\right].$$

Наконец, пятый, с $\frac{n(n-1)}{2}$ *составляющими, образован коэффициентами внешней дифференциальной квадратичной формы*

$$\Omega_i^i-\left[\omega^i\frac{\partial\Omega_i^k}{\partial\omega^k}\right].$$

Нетрудно проверить, что каждая линейная комбинация составляющих A_{jkl}^i разложима одним и только одним способом на пять других линейных комбинаций, принадлежащих соответственно пяти неприводимым тензорам. Следует также заметить, что разложение полного тензора кривизны на неприводимые тензоры возможно бесконечным множеством способов, так как два последних тензора изоморфны, и к двум внешним формам, которые их определяют, можно применить линейную подстановку с произвольными постоянными коэффициентами. В частности, можно заменить последний тензор тензором также неприводимым, определяемым формой Ω_i^i.

В остальном, как можно показать, разложение неприводимого тензора возможно только одним способом (исключая случай $n=4$, когда второй и третий тензоры изоморфны).

Геометрическая интерпретация неприводимых тензоров кривизны

64. Можно охарактеризовать геометрически многообразия, для которых первый тензор кривизны равен нулю. Действительно, рассмотрим бесконечно-малый параллелограмм, построенный на двух векторах $x^1\mathbf{e}_1$ и $y^2\mathbf{e}_2$. Этому параллелограмму соответствует бесконечно-малое аффинное вращение, которое дает, в частности, для векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ приращения

$$\Delta\mathbf{e}_1=\Omega_1^i\,\mathbf{e}_i=A_{112}^i x^1 y^2\mathbf{e}_i,$$
$$\Delta\mathbf{e}_2=\Omega_2^i\,\mathbf{e}_i=A_{212}^i x^1 y^2\mathbf{e}_i.$$

Но для $i>2$ коэффициенты A_{112}^i, A_{212}^i равны нулю; значит, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ остаются после поворота параллельными плоскости параллелограмма. Другими словами, *каждая двумерная плоскость, проходящая через* $\mathbf{m}$, *в результате параллельного переноса вдоль замкнутого бесконечно-малого контура, расположенного в этой плоскости, принимает положение, параллельное исходному.*

Обратно, предположим, что это свойство имеет место. Рассмотрим бесконечно-малый параллелограмм, построенный на двух векторах

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i; \qquad \mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i.$$

Каждый вектор $\mathbf{z}$ получает после параллельного переноса вдоль контура этого параллелограмма приращение

$$\Delta\mathbf{z} = z^i A^k_{i\alpha\beta}(x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha)\,\mathbf{e}_k.$$

Согласно предположению, приращение вектора $\mathbf{x}$ параллельно плоскости параллелограмма. Мы получаем, таким образом, n тождеств вида

$$x^i A^k_{i\alpha\beta}(x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \equiv \lambda(x, y)\,x^k - \mu(x)\,y^k,$$

где $\lambda(x, y)$ обозначает билинейную форму, а μ — квадратичную форму, не зависящие от k, или, что приводится к тому же, имеет место тождество

$$x^i u_k A^k_{i\alpha\beta}(x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \equiv \lambda(x, y)\,x^k u_k - \mu(x)\,y^k u_k.$$

Это тождество выражает, что производящая форма первого тензора кривизны равна тождественно нулю, то есть что *этот первый тензор равен нулю.*

65. Прежде, чем приступать к геометрической характеристике многообразий, для которых второй неприводимый тензор кривизны равен нулю, дадим интерпретацию тензору B^i_{jkl}. Для этого рассмотрим параллелепипед, построенный на трех бесконечно-малых векторах

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{z} = z^i \mathbf{e}_i,$$

приложенных к точке $\mathbf{m}$. Если мы перенесем вектор $\mathbf{x}$ параллельно самому себе вдоль контура параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, он получит бесконечно-малое приращение $\Delta\mathbf{x}$; аналогично, вектор $\mathbf{y}$ в результате параллельного переноса вдоль контура параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$, получит приращение $\Delta\mathbf{y}$; аналогично имеем приращение $\Delta\mathbf{z}$. Геометрическая сумма $\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{y} + \Delta\mathbf{z}$ есть вектор, связанный с параллелепипедом и имеющий, как нетрудно вычислить, следующий вид

$$-\mathbf{e}_k B^k_{\alpha\beta\gamma} \begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta & x^\gamma \\ y^\alpha & y^\beta & y^\gamma \\ z^\alpha & z^\beta & z^\gamma \end{vmatrix}.$$

Итак, мы можем отнести каждому трехмерному элементу многообразия вектор с составляющими, которые являются элементами тройных интегралов:

$$B^k_{\alpha\beta\gamma}[\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma] \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Можно также определить этот вектор другим способом. Рассмотрим трехмерный объем, ограниченный замкнутой бесконечно-малой поверхностью, и возьмем некоторую точку $\mathbf{a}$ внутри объема. Каждому элементу поверхности, ограничивающей объем, соответствует бесконечно-малое перемещение, которое, будучи приложено к вектору $\mathbf{a} - \mathbf{m}$, дает этому вектору некоторое приращение; сумма всех этих приращений выражается внешней кубической векторной формой

$$\mathbf{e}_k B^k_{\alpha\beta\gamma}[\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma].$$

Установив это, рассмотрим, в частности, параллелепипед, построенный на трех бесконечно-малых векторах $x^1\mathbf{e}_1$, $y^2\mathbf{e}_2$, $z^3\mathbf{e}_3$; вектор, соответствующий этому параллелепипеду, равен

$$\mathbf{e}_k B^k_{123}\, x^1 y^2 z^3.$$

Если второй тензор кривизны равен нулю, коэффициенты B^k_{123} равны все нулю для $k > 3$; другими словами, *вектор, соответствующий параллелепипеду, лежит в той же трехмерной плоскости, что и сам параллелепипед.*

Обратно, предположим, что это свойство имеет место для каждого элементарного параллелепипеда. Каковы бы ни были величины x^i, y^i, z^i, имеем тождества

$$B^l_{jkl} \begin{vmatrix} x^j & x^k & x^l \\ y^j & y^k & y^l \\ z^j & z^k & z^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(y, z)\,x^i + \mu(z, x)\,y^i + \nu(x, y)\,z^i$$

с тремя билинейными формами λ, μ, ν, не зависящими от индекса i. Другими словами, имеем тождество

$$B^i_{jkl} u_i \begin{vmatrix} x^j & x^k & x^l \\ y^j & y^k & y^l \\ z^j & z^k & z^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(y, z)\,x^i u_i + \mu(z, x)\,y^i u_i + \nu(x, y)\,z^i u_i.$$

Но это тождество именно и выражает, что производящая форма второго неприводимого тензора кривизны равна нулю, то есть, что сам этот тензор равен нулю.

66. Для интерпретации третьего неприводимого тензора, определяемого квадратичной формой

$$A^k_{ijk}\,\omega^i \omega^j,$$

рассмотрим бесконечно-малый вектор $\mathbf{m}'-\mathbf{m}=\omega^i\mathbf{e}_i$ и в то же время другой бесконечно-малый переменный вектор $x^i\mathbf{e}_i$; когда мы перенесем первый вектор параллельно самому себе вдоль контура параллелограмма, построенного на этих двух векторах, он получит приращение

$$-\omega^i\mathbf{e}_k A^k_{i\alpha\beta}(\omega^\alpha x^\beta-\omega^\beta x^\alpha);$$

сложим геометрически этот малый вектор с вектором $\mathbf{x}$; мы определим, таким образом, аффинное бесконечно-малое преобразование переменного вектора $\mathbf{x}$; оно определяется формулами

$$\delta x^k = -A^k_{i\alpha\beta}\omega^i\omega^\alpha x^\beta.$$

Коэффициент расширения, соответствующий этому преобразованию, равен

$$-A^k_{i\alpha k}\omega^i\omega^\alpha,$$

то есть квадратичной форме, для которой мы ищем интерпретацию.

Отметим, что, если эта квадратичная форма не равна нулю, она определяет *внутреннюю метрику* многообразия.

67. Четвертый неприводимый тензор, определенный внешней формой

$$A^k_{ijk}[\omega^i\omega^j],$$

интерпретируется аналогичным образом. Рассмотрим в многообразии два бесконечно-малых фиксированных вектора $\omega^i\mathbf{e}_i$ и $\bar{\omega}^i\mathbf{e}_i$ и третий вектор переменный $x^i\mathbf{e}_i$. Первый вектор, перенесенный параллельно вдоль контура параллелограмма, образованного двумя другими, получает определенное приращение; аналогично второй вектор, перенесенный параллельно самому себе вдоль контура параллелограмма, образованного первым и третьим вектором, получает другое приращение. Прибавляя к вектору $\mathbf{x}$ первое приращение и отнимая второе, получаем вектор $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$, причем

$$\delta x^k = A^k_{i\alpha\beta}\omega^i(\bar{\omega}^\alpha x^\beta-\bar{\omega}^\beta x^\alpha) - A^k_{i\alpha\beta}\bar{\omega}^i(\omega^\alpha x^\beta-\omega^\beta x^\alpha) = A^k_{ij\beta}(\omega^i\bar{\omega}^j-\omega^j\bar{\omega}^i)\,x^\beta.$$

Мы имеем, таким образом, аффинное бесконечно-малое преобразование векторов, дающее коэффициент расширения

$$A^k_{ijk}(\omega^i\bar{\omega}^j-\omega^j\bar{\omega}^i),$$

или, что то же самое,

$$A^k_{ijk}[\omega^i\omega^j].$$

Можно поступить иначе и ограничиться рассмотрением приращения, получаемого вектором $\mathbf{x}$, когда мы переносим

его параллельно вдоль данного замкнутого контура; в результате вращения, соответствующего контуру, он получает приращение

$$\Delta\mathbf{x} = -x^i A^k_{i\alpha\beta}[\omega^\alpha\omega^\beta]\,\mathbf{e}_k;$$

коэффициент соответствующего расширения равен

$$-A^k_{kij}[\omega^i\omega^j] = -\Omega^k_k;$$

мы приходим, таким образом, к четвертому неприводимому тензору, для которого получаем геометрическую интерпретацию.

Отметим, что мы пришли к дифференциальным скалярным или векторным формам, имеющим внутренний геометрический смысл; можно также сказать, что мы имеем *интегральные инварианты* скалярные или векторные:

$$\int\sqrt{A^k_{ijk}\omega^i\omega^j},$$

$$\iint A^k_{ijk}[\omega^i\omega^j] = -\iint\left[\omega^i\frac{\partial\Omega^j_i}{\partial\omega^j}\right],$$

$$\iint\Omega^i_i.$$

Наконец, мы имеем интегральный кубический *векторный* инвариант, отмеченный уже выше (п. 14):

$$\iiint\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k] = \iiint\mathbf{e}_i B^i_{\alpha\beta\gamma}[\omega^\alpha\omega^\beta\omega^\gamma].$$

Можно заметить, что интегральный инвариант $\iint\Omega^i_i$ подчиняется сам закону сохранения, то есть, что интеграл, распространенный на замкнутую поверхность, равен иулю; в самом деле, это вытекает из формулы

$$(\Omega^i_i)'+[\Omega^k_i\,\omega^i_k]-[\omega^k_i\,\Omega^i_k]=0 \quad \text{или} \quad (\Omega^i_i)'=0.$$

Это привело Эддингтона в случае $n=4$ к отождествлению его с электромагнитным полем.

Частный случай многообразий нулевого кручения

68. В частном случае многообразий нулевого кручения число тензоров кривизны уменьшается. В самом деле, общая теорема сохранения дает (формула (7) п. 11)

$$[\omega^k\Omega^i_k]=0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Отсюда вытекает, что все B^i_{jkl} также равны нулю. Следовательно, второй неприводимый тензор кривизны, а также и пятый равны нулю. Таким образом, остается первый, с $\frac{n^2(n^2-4)}{3}$ составляющими, третий, определяемый квадратичной формой $\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k}$, и четвертый, определяемый или внешней формой $\left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k}\right]$, или внешней формой Ω_i^i [1].

Мы видим, что в этом случае вектор, соответствующий трехмерному элементу многообразия, всегда равен нулю, но *это свойство не характеризует многообразия нулевого кручения.*

---

[1] В случае нулевого кручения Эддингтон определил эти два последних тензора, которые ему позволили ввести метрику и электромагнитное поле в четырехмерном пространственно-временном континууме аффинной связности.

Глава VI

ТЕНЗОРЫ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

69. Мы укажем здесь кратко основные свойства тензоров кручения и кривизны в общем случае, оставляя исключительные случаи для более подробного изучения в дальнейшем.

Мы будем пользоваться следующими теоремами, которые нетрудно получить из результатов моего исследования о проективных группах, не имеющих инвариантных плоскостей [1].

Если обозначить через x^i, y^i, z^i, t^i составляющие четырех произвольных векторов, то каждый из тензоров

$$\begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k \\ y^i & y^j & y^k \\ z^i & z^j & z^k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k & x^l \\ y^i & y^j & y^k & y^l \\ z^i & z^j & z^k & z^l \\ t^i & t^j & t^k & t^l \end{vmatrix}$$

неприводим. Имеются следующие исключения:

при $n=4$ тензор $|x^i y^j|$ разлагается на два неприводимых тензора с 3 составляющими:

$$|x_i y_j| + \varepsilon\sqrt{g}\,|x^k y^4| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

где (i, j, k) обозначает любую четную перестановку индексов 1, 2, 3;

при $n=6$ тензор $|x^i y^j z^k|$ разлагается на два неприводимых тензора с 10 составляющими

$$|x_i y_j z_k| + \varepsilon\sqrt{-g}\,|x^l y^m z^6| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

где $(ijklm)$ обозначает любую четную перестановку индексов 1, 2, 3, 4, 5;

при $n=8$ тензор $|x^i y^j z^k t^l|$ разлагается на два неприводимых тензора с 35 составляющими

$$|x_i y_j z_k t_l| + \varepsilon\sqrt{g}\,|x^\alpha y^\beta z^\gamma t^8| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

---

[1] E. Cartan. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. math. de France, t. 41, 1913, стр. 53—96.

где $(ijkl\alpha\beta\gamma)$ обозначает любую четную перестановку индексов 1, 2, ..., 7.

Мы будем пользоваться также следующей теоремой, которая может быть выведена из указанного выше исследования:

Каждая из форм $(n \neq 4)$

$$a_l(a_jb_k - b_ja_k)x^i(y^jz^k - z^jy^k),$$
$$(a_lb_j - b_la_j)(a_kb_l - b_ka_l)(x^iy^j - x^jy^i)(z^kt^l - z^lt^k),$$

где a_l и b_l являются параметрами, связанными единственными соотношениями

$$a_la^l = 0, \quad a_lb^l = 0, \quad b_lb^l = 0,$$

определяет неприводимый тензор, составляющие которого являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами величин

$$x^i(y^jz^k - z^jy^k),$$
$$(x^iy^j - x^jy^i)(z^kt^l - z^lt^k).$$

Аналогичный результат имеем при $n \neq 6$ для формы

$$a_l|a_jb_kc_l|x^i|y^jz^kt^l|,$$

где параметры a_l, b_l, c_l удовлетворяют соотношениям

$$a_la^l = b_lb^l = c_lc^l = a_lb^l = a_lc^l = b_lc^l = 0.$$

Наконец, нетрудно также доказать, что форма

$$(a_lx^i)^2,$$

где параметры a_l связаны единственным соотношением

$$a_la^l = 0,$$

определяет неприводимый тензор с $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ составляющими

$$x_1x^1 - x_nx^n, \ldots, x_{n-1}x^{n-1} - x_nx^n, \quad x^ix^j \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots, n).$$

70. *Первый неприводимый тензор кручения.* — Составляющие A^i_{jk} тензора кручения преобразуются, как величины

$$x^i(y_jz_k - z_jy_k).$$

На основании указанного выше форма

$$a_l(a^jb^k - b^ja^k)x^i(y_jz_k - z_jy_k),$$

где a_l и b_l являются параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$a_la^l = 0, \quad a_lb^l = 0, \quad b_lb^l = 0,$$

определяет неприводимый тензор. То же имеет место, таким образом, для формы

$$a_i(a^jb^k - b^ja^k)A^i_{jk}.$$

Найдем линейные соотношения, существующие между коэффициентами α_i^{jk} составляющих

$$\alpha_i^{jk}A^i_{jk}$$

этого тензора. Пусть

$$h^i_{jk}\alpha_i^{jk} = 0$$

одно из этих соотношений. Уравнение

$$h^i_{jk}a_i(a^jb^k - b^ja^k) = 0$$

справедливо для каждой системы значений a^i и b^i, удовлетворяющих соотношениям:

$$a_la^l = 0, \quad a_lb^l = 0, \quad b_lb^l = 0.$$

Отсюда нетрудно установить существование *тождества* вида

$$h^i_{jk}a_i(a^jb^k - b^ja^k) \equiv \lambda(b)\,a_la^l - \mu(a)\,a_lb^l,$$

где $\lambda(b)$ обозначает линейную форму относительно b^i, $\mu(a)$ — линейную форму относительно a^l. Нетрудно видеть, что коэффициенты этих двух форм должны быть одинаковыми, так что тождество запишется в следующем виде:

$$h^i_{jk}a_i(a^jb^k - b^ja^k) \equiv \lambda_ka_i(a^ib^k - b^ia^k).$$

Мы получаем первую систему допустимых постоянных h^i_{jk}, выбирая

$$h^1_{1k} = h^2_{2k} = \ldots = h^n_{nk} = \lambda_k, \quad h^i_{jk} = 0 \quad (i \neq j \neq k),$$

где λ_k обозначают произвольные постоянные. Остается только к полученному решению прибавить наиболее общее решение, удовлетворяющее тождеству

$$h_{ijk}a^i(a^jb^k - b^ja^k) = 0 \quad (h_{ijk} = g_{il}h^l_{jk}).$$

Это решение мы получим, полагая

$$h_{ijk} = h_{jki} = h_{kij} \quad (i \neq j \neq k = 1, \ldots, n).$$

Итак, *первый неприводимый тензор кручения образован из величин $\alpha_i^{jk}A^i_{jk}$, причем коэффициенты α_i^{jk} удовлетворяют соотношениям:*

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_k^{ki} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \alpha^{ijk} + \alpha^{jki} + \alpha^{kij} = 0 \quad (i \neq j \neq k = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Число различных составляющих тензора равно $\frac{n(n^2-4)}{3}$.

Мы уже имели случай (п. 44) говорить об этом тензоре и дали ему геометрическую интерпретацию. *Этот тензор разложим при* $n=4$.

71. *Второй неприводимый тензор кручения.* — Форма последних уравнений (1) приводит нас к рассмотрению величин

$$B_{ijk}=A_{ijk}+A_{jki}+A_{kij} \quad (i\neq j\neq k=1, \ldots, n).$$

Они преобразуются, как величины $|x_i y_j z_k|$; они определяют, таким образом, неприводимый тензор ($n\neq 6$) с $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ составляющими.

Эти составляющие являются коэффициентами внешней кубической формы

$$[\omega^1\Omega_1]+[\omega^2\Omega_2]+\ldots+[\omega^n\Omega_n]$$

веса 2. В случае $n=6$ этот тензор разлагается на два неприводимых сопряженных тензора, вещественных, если $g<0$. Каждый из них имеет в качестве составляющих коэффициенты формы

$$[\omega^1\Omega_1]+[\omega^2\Omega_2]+\ldots+[\omega^6\Omega^6]+\varepsilon\sqrt{-g}\{(ijklmn)A^{ijk}[\omega^l\omega^m\omega^n]\}.$$

Третий неприводимый тензор кручения. — Он имеет составляющими n величин

$$A^k_{ki} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

являющихся коэффициентами формы Пфаффа

$$\frac{\partial\Omega^1}{\partial\omega^1}+\frac{\partial\Omega^2}{\partial\omega^2}+\ldots+\frac{\partial\Omega^n}{\partial\omega^n};$$

эта форма является абсолютным инвариантом, независимым от выбора единицы измерения.

72. *Тензор кривизны гомотетии.* — Он имеет составляющими коэффициенты A_{ij} формы Ω; следовательно, на основании указанной выше теоремы он неприводим, если только n не равно 4; число его составляющих равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

73. *Первый неприводимый тензор кривизны вращения.* — Так как

$$\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0,$$

коэффициенты A_{ijkl} формы Ω_{ij} преобразуются, как величины

$$(x_i y_j - y_i x_j)(z_k t_l - z_l t_k).$$

Мы видели, что форма

$$(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)(x_i y_j - y_i x_j)(z_k t_l - t_k z_l)$$

определяет ($n\neq 4$) неприводимый тензор, если a^i и b^i рассматривать в ней как параметры, удовлетворяющие трем соотношениям

$$(2) \qquad a_i a^i=0, \quad a_i b^i=0, \quad b_i b^i=0.$$

То же самое, следовательно, имеем для формы

$$(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)A_{ijkl}.$$

Пусть

$$\alpha^{ijkl}A_{ijkl}$$

— одна из составляющих этого тензора. Этот тензор будет определен, если мы будем знать полную систему линейных соотношений, которые существуют между α^{ijkl}. Если

$$h_{ijkl}\alpha^{ijkl}=0$$

является одним из этих соотношений, то мы должны иметь

$$h_{ijkl}(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)=0$$

для каждой системы значений a^i и b^i, удовлетворяющих соотношениям (2). Отсюда нетрудно сделать вывод о существовании *тождества* вида

$$(3) \qquad h_{ijkl}(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)\equiv\lambda(b)a_i a^i + \mu(a)b_i b^i - \rho(a, b)a_i b^i,$$

где $\lambda(b)$ обозначает квадратичную форму от b^i, $\mu(a)$ — квадратичную форму от a^i и $\rho(a, b)$ — билинейную форму от a^i, b^i. Всегда можно предположить, учитывая, что первый член не изменяется при перестановке a^i и b^i, что λ и μ являются одной и той же квадратичной формой их аргументов и, следовательно, ρ — симметрическая билинейная форма. Из того, что первый член не изменяется при замене b^i на b^i+ka^i, где k обозначает произвольную постоянную, следует, что ρ есть удвоенная полярная форма от λ. Второй член этого тождества может быть, следовательно, записан в следующем виде

$$\lambda_{ij}(a^i b_k - b^i a_k)(a^j b^k - b^j a^k) \quad (\lambda_{ij}=\lambda_{ji}).$$

Первый способ удовлетворить тождеству (3) заключается, таким образом, в том, что мы полагаем

$$h^1_{ij1}=h^2_{ij2}=\ldots=h^n_{ijn}=h^1_{ji1}=\ldots=h^n_{jin}=\lambda_{ij}.$$

Чтобы получить наиболее общее решение, следует прибавить к указанному решению решение, удовлетворяющее тождеству

$$h_{ijkl}(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)\equiv 0;$$

это решение получается, если величинам h_{ijkl} придавать значения, удовлетворяющие соотношениям

$$h_{ijkl}=h_{iklj}=h_{iljk} \quad (j\neq k\neq l).$$

Следовательно, *соотношениями между* α^{ijkl}, *определяющими искомый тензор, являются следующие*:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &\alpha^{i}{}_{k}{}^{jk}+\alpha^{j}{}_{k}{}^{ik}=0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n), \\ &\alpha^{ijkl}+\alpha^{iklj}+\alpha^{iljk}=0 \quad (i\neq j\neq k). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения независимы. *Они определяют, таким образом, первый неприводимый тензор кривизны, имеющий*

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$$

составляющих. Этот тензор разложим при $n=4$.

74. *Второй неприводимый тензор кривизны.* — Величины

$$A_{i}{}^{k}{}_{jk}+A_{j}{}^{k}{}_{ik}$$

преобразуются между собой, как x_ix_j; следовательно, на основании указанного выше *они образуют второй неприводимый тензор с* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *составляющими*

$$A^{1i}_{1i}-A^{ni}_{ni},\ \dots,\ A^{n-1,\,i}_{n-1,\,i}-A^{ni}_{ni},\ A^{k}_{ijk}+A^{k}_{jik} \quad (i\neq j=1,\ \dots,\ n).$$

Эти составляющие являются коэффициентами квадратичной абсолютной инвариантной формы

$$A^{k}_{ijk}\omega^i\omega^j-\frac{1}{n}A^{ij}_{ij}\omega_k\omega^k.$$

75. *Скалярный тензор кривизны.* — Сумма

$$A^{ij}_{ij}$$

дает скалярный тензор, равный *полной кривизне*, взятой с обратным знаком.

76. *Третий неприводимый тензор кривизны.* — Последние из соотношений (4) приводят нас к рассмотрению величин

$$B_{ijkl}=A_{ijkl}+A_{iklj}+A_{iljk} \quad (j\neq k\neq l),$$

которые обладают тем свойством, что они не меняются при любой четной перестановке индексов $j,\ k,\ l$ и изменяют знак при нечетной перестановке. Эти величины преобразуются между собой, как величины

$$x_i\,|\,y_jz_kt_l\,|.$$

Форма

$$a^i\,|\,a^jb^kc^l\,|\,x_i\,|\,y_jz_kt_l\,|$$

определяет неприводимый тензор, если параметры $a^i,\ b^i,\ c^i$ подчинить следующим соотношениям:

$$\text{(5)} \qquad a_ia^i=b_ib^i=c_ic^i=a_ib^i=a_ic^i=b_ic^i=0.$$

То же самое имеем для формы

$$a^i\,|\,a^jb^kc^l\,|\,B_{ijkl}.$$

Пусть

$$\beta^{ijkl}B_{ijkl}$$

— наиболее общая составляющая этого тензора; коэффициенты β^{ijkl} связаны некоторым числом соотношений

$$h_{ijkl}\beta^{ijkl}=0,$$

которые мы сейчас определим.

Коэффициенты h_{ijkl} этих соотношений определятся из условий, что уравнение

$$h_{ijkl}a^i\,|a^jb^kc^l\,|=0$$

есть следствие уравнений (5). Нетрудно доказать, что это приводит к тождеству вида

$$h_{ijkl}a^i\,|\,a^jb^kc^l\,|\equiv\lambda(b,\ c)\,a_ia^i+\mu(a,\ c)\,a_ib^i+\rho(a,\ b)\,a_ic^i$$

с тремя билинейными формами $\lambda,\ \mu,\ \rho$. Нетрудно видеть, что второй член имеет вид

$$\lambda_{ij}a_k\,|\,a^kb^ic^j\,|;$$

таким образом, первый возможный выбор постоянных h следующий:

$$h^1_{1ij}=h^2_{2ij}=\dots=h^n_{nij}.$$

Достаточно затем найти наиболее общее решение, удовлетворяющее тождеству

$$h_{ijkl}a^i\,|\,a^jb^kc^l\,|=0;$$

это приводит к соотношениям:

$$h_{ijkl}=-h_{jikl}=h_{kijl}=-h_{lijk} \quad (i\neq j\neq k\neq l).$$

Таким образом, мы получаем третий неприводимый тензор кривизны, рассматривая величины

$$\beta^{ijkl}B_{ijkl},$$

для которых коэффициенты β^{ijkl} *удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{kij}_{k}=0, \quad \beta^{ijkl}-\beta^{jikl}+\beta^{kijl}-\beta^{lijk}=0 \quad (i\neq j\neq k\neq l).$$

Этот тензор имеет $\frac{n(n-1)(n+2)(n-3)}{8}$ *составляющих.*

Имеем исключительный случай при $n=6$, когда указанный тензор разлагается на два неприводимых тензора с 45 составляющими.

77. *Четвертый неприводимый тензор кривизны.* — Рассмотрим теперь величины

$$B^k_{kij} = A^k_{ijk} - A^k_{jki};$$

они образуют неприводимый тензор с $\frac{n(n-1)}{2}$ *составляющими*, изоморфный тензору $|x_i y_j|$, составляющие которого являются коэффициентами формы

$$A^k_{ikj}[\omega^i \omega^j].$$

Тензор этот разложим при $n=4$.

78. *Пятый неприводимый тензор кривизны* определяется величинами

$$B_{ijkl} - B_{jikl} + B_{kijl} - B_{lijk} = 2(A_{ijkl} + A_{klij} + A_{jkli} + \\ + A_{lijk} + A_{kijl} + A_{jlkl}),$$

которые преобразуются между собой, как величины $|x_i y_j z_k t_l|$.

Они образуют, следовательно, при $n \neq 8$ *новый и последний неприводимый тензор, имеющий* $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ *составляющих*. Этот тензор разлагается на два других в случае $n=8$. Составляющие являются коэффициентами скалярной формы

$$[\omega^i \omega^j \Omega_{ij}].$$

Итак, мы разложили общий тензор кривизны вращения на шесть неприводимых тензоров, из которых один является скалярным тензором; число составляющих этих тензоров соответственно равно

$$1,\ \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12},\ \frac{(n-1)(n+2)}{2},\ \frac{n(n-1)(n+2)(n-3)}{8},\\ \frac{n(n-1)}{2},\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Число неприводимых тензоров достигает семи при $n=6$ и $n=8$ и восьми при $n=4$.

Я оставляю в стороне геометрическую интерпретацию полученных тензоров и перехожу к исследованию частного случая пространств нулевого кручения (пространств Вейля и Римана).

79. *Случай пространств Вейля**). — В этом случае имеем тождества

$$[\omega^i \Omega] + [\omega^k \Omega^i_k] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

которые дают соотношения

$$A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq l),$$
$$A^1_{i1j} - A^1_{j1i} = A^2_{i2j} - A^2_{j2i} = \ldots = A_{ij}.$$

Следовательно, *третий и пятый неприводимые тензоры кривизны вращения равны нулю, четвертый совпадает с тензором кривизны гомотетии. Таким образом, остаются следующие тензоры:*

1) *тензор с* $\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$ *составляющими;*

2) *тензор с* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *составляющими;*

3) *тензор с* $\frac{n(n-1)}{2}$ *составляющими;*

4) *скалярный тензор.*

80. *Случай пространств Римана**). — В этом случае тензор кривизны гомотетии в свою очередь равен нулю и *остаются:*

1) *тензор с* $\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$ *составляющими,*

2) *тензор с* $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ *составляющими,*

3) *скалярный тензор.*

*) Пространством Вейля называется пространство метрической связности и нулевого кручения. (Прим. ред.)

*) Пространством Римана называется пространство евклидовой связности и нулевого кручения. (Прим. ред.)

Глава VII

ТРЕХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

Тензор кручения

81. Результаты, полученные в общем случае, применимы и при $n=3$. Тензор кручения разлагается на три неприводимых тензора:

1) *тензор с пятью составляющими*:

$$A_{21}^2 - A_{31}^3,\ A_{32}^3 - A_{12}^1,\ A_{13}^1 - A_{23}^2,\ A_{123} - A_{312},\ A_{231} - A_{312};$$

2) *скалярный тензор*:

$$A_{123} + A_{231} + A_{312};$$

3) *тензор с тремя составляющими*:

$$A_{21}^2 + A_{31}^3,\ A_{32}^3 + A_{12}^1,\ A_{13}^1 + A_{23}^2.$$

Мы дадим для этих тензоров геометрическую интерпретацию.

82. *Геометрическая интерпретация тензоров с пятью составляющими.* — Рассмотрим в точке $\mathfrak{m}$ пространства элементарную плоскую ориентированную площадку; мы будем называть кручением плоскости этой площадки в точке $\mathfrak{m}$ частное от деления на $d\sigma$ трансляции, соответствующей контуру, ограничивающему эту площадку и обходимому в заданном направлении. Этот вектор вполне определен, *как только выбрана единица длины в* $\mathfrak{m}$ [1]. Теперь нетрудно охарактеризовать пространства, для которых первый неприводимый тензор кручения равен нулю. В самом деле, равенство

$$A_{123} - A_{312} = 0$$

показывает, что, если взять в $\mathfrak{m}$ три плоские взаимно-ортогональные площадки (23), (31), (12), определенные тремя ортогональными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, взятыми в определенном порядке, то проекция кручения площадки (23) на противолежащее ребро (1) триэдра равна проекции

[1] Он имеет размерность, обратную длине.

кручения площадки (12) на ребро (3), а также проекции кручения площадки (31) на ребро (2). Между прочим, эта проекция не зависит от выбранных ортогональных векторов, другими словами, *нормальная составляющая кручения произвольного плоского элемента в каждой точке не зависит от этого плоского элемента*.

Обратное предложение тоже верно и доказывается вычислением.

83. *Геометрическая интерпретация тензора с тремя составляющими.* — Составляющие этого тензора являются коэффициентами инвариантной формы Пфаффа

$$\frac{\partial\Omega^1}{\partial\omega^1} + \frac{\partial\Omega^2}{\partial\omega^2} + \frac{\partial\Omega^3}{\partial\omega^3}.$$

Эта форма не зависит от выбора единицы длины. Ее значение в точке $\mathfrak{m}'$, бесконечно близкой к $\mathfrak{m}$, может быть интерпретировано геометрически, если положить в частном случае $\omega^2 = \omega^3 = 0$; тогда получим

$$(A_{21}^2 + A_{31}^3)\,\omega^1.$$

Рассмотрим кроме вектора $\mathbf{e}_1$, проходящего через $\mathfrak{m}'$, два других ортогональных вектора $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$; эти три вектора определяют три плоские взаимно ортогональные площадки. *Рассматриваемая величина тогда равна произведению на расстояние* $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ *суммы проекции на ось* (2) *кручения площадки* (21) *и проекции на ось* (3) *кручения площадки* (31).

Этот тензор можно также интерпретировать как вектор, связанный с каждой точкой пространства; но при этой точке зрения рассматриваемый вектор изменяется при изменении единицы длины. Плоский элемент, перпендикулярный к этому вектору, легко характеризуется сказанным выше.

84. *Геометрическая интерпретация скалярного тензора кручения.* — Этот тензор можно назвать скалярным кручением, и он интерпретируется непосредственно как сумма проекций на три ортогональные оси, проходящие через точку $\mathfrak{m}$, кручений ориентированных плоскостных элементов, соответственно ортогональных этим осям. Скалярное кручение служит коэффициентом уже встречавшейся формы

$$[\omega^1\Omega_1] + [\omega^2\Omega_2] + [\omega^3\Omega_3],$$

связанной с элементом объема многообразия; эта форма не является независимой от выбора единицы длины; она имеет вес 2, тогда как скалярное кручение имеет вес -1 (обратно длине).

Добавим, как это следует из п. 41, что *пространства, в которых прямые линии дают стационарное значение* *длине, имеют неприводимые нескалярные тензоры кручения, равные нулю.* В каждой точке этих многообразий кручение не зависит от элемента поверхности, по отношению к которому оно определено. Имеем

$$\Omega_1 = a\,[\omega^2\omega^3], \quad \Omega_2 = a\,[\omega^3\omega^1], \quad \Omega_3 = a\,[\omega^1\omega^2].$$

Тензор кривизны

85. Тензор кривизны гомотетии неприводим.

Что касается тензора кривизны вращения, то он разлагается на три неприводимых тензора:

1) *тензор с пятью составляющими*

$$A^{23}_{23} - A^{12}_{12},\ A^{31}_{31} - A^{12}_{12},\ A_{31,12} + A_{21,13},\ A_{12,23} + A_{32,21},$$
$$A_{23,31} + A_{13,32};$$

2) *тензор с тремя составляющими*

$$A_{31,12} - A_{21,13}, \quad A_{12,23} - A_{32,21}, \quad A_{23,31} - A_{13,32};$$

3) *скалярный тензор*

$$A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12}.$$

86. *Интерпретация тензора с пятью составляющими.* — Назовем *кривизной* плоского элемента, проходящего через точку $\mathfrak{m}$, отношение (с надлежащим знаком) к площади элемента угла, на который повернется проекция вектора, лежащего вначале в плоскости элемента, на плоскость этого элемента после параллельного переноса этого вектора вдоль контура элемента.

Тогда нетрудно доказать, как и в случае пространств двух измерений, что кривизна плоского элемента, образованного двумя ортогональными векторами $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, равна A^{ij}_{ij}.

Отсюда следует, что *если для некоторого пространства тензор кривизны с пятью составляющими равен нулю, то кривизна в произвольной точке остается одной и той же для всех плоских элементов, проходящих через* $\mathfrak{m}$; она не зависит от направления плоскости в $\mathfrak{m}$. Легко доказать и обратное предложение.

87. *Интерпретация тензора с тремя составляющими.* Составляющие этого тензора являются коэффициентами векторной формы

$$[\omega^i (d\mathbf{e}_i)'] = \mathbf{e}_k\,[\omega^i \Omega^k_i],$$

которая, очевидно, имеет внутренний смысл, независимый от выбора единицы длины. Это — вектор, связанный с элементом объема пространства и определяемый следующей формулой

$$[(A^1_{312} - A^1_{213})\,\mathbf{e}_1 + (A^2_{123} - A^2_{321})\,\mathbf{e}_2 + (A^3_{231} - A^3_{132})\,\mathbf{e}_3]\,[\omega^1\omega^2\omega^3].$$

Для геометрической интерпретации этого выражения введем понятие *кривизны ориентированного плоского элемента относительно другого плоского ориентированного элемента.* Если определить положительное направление вращения в каждом плоском элементе и если взять в первом бесконечно-малый замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, то вектор, лежащий вначале в плоскости второго элемента, после параллельного переноса вдоль первого контура займет некоторое конечное положение и его проекция на плоскость второго элемента образует некоторый угол ε с начальным вектором; частное (алгебраическое) от деления этого угла ε на площадь, ограниченную описанным контуром, и является рассматриваемой относительной кривизной. Если оба плоских элемента совпадают, то мы получаем снова кривизну в первоначальном определении.

Построим теперь в точке $\mathfrak{m}$ три ортогональных вектора, которые определяют три положительных направления (1), (2), (3) и три ориентированных плоских элемента (23), (31), (12), которые мы можем также перенумеровать (1), (2), (3). Форма, соответствующая элементу объема, равна тогда вектору, проекция которого на направление (i) есть произведение объема элемента на разность между кривизной плоского элемента (j) относительно плоского элемента (k), причем индексы i, j, k образуют четную перестановку.

Частное от деления этого вектора на элемент объема $d\tau$ определяет *косую* кривизну многообразия в $\mathfrak{m}$, причем выражение „косая“ отмечает отсутствие взаимности у относительных кривизн двух плоских элементов.

Пространства, для которых второй неприводимый тензор кривизны равен нулю, характеризуются тем свойством, что относительная кривизна двух плоских элементов взаимна.

88. *Склярный тензор кривизны.* — Взятый с обратным знаком, он определяет так называемую полную кривизну пространства в точке $\mathfrak{m}$, которая равна сумме кривизн трех произвольных ортогональных плоских элементов, проходящих через $\mathfrak{m}$.

Пространства нулевого кручения

89. В случае пространств нулевого кручения *тензор кривизны вращения с тремя составляющими совпадает,* как мы видели выше, *с тензором кривизны гомотетии.* Точнее говоря, имеем формулы

$$A^1_{213} - A^1_{312} = A_{23},$$
$$A^2_{321} - A^2_{123} = A_{31},$$
$$A^3_{132} - A^3_{231} = A_{12},$$

которым можно дать геометрическую интерпретацию. *Отсутствие взаимности у относительной кривизны двух плоских элементов приводит при отсутствии кручения к несохранению длины вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура.*

Если кривизна гомотетии равна нулю, то есть если пространство евклидовой связности (и нулевого кручения), другими словами, *если мы имеем дело с пространством Римана, то имеет место взаимность для относительной кривизны двух плоских элементов.*

90. *Примечательный случай пространства метрической связности.* — Исследуем, может ли пространство метрической (или евклидовой) связности обладать такой же степенью однородности, как евклидово пространство. В этом случае ни с одной точкой многообразия нельзя связать *никакого привилегированного направления,* вследствие чего кривизна гомотетии и тензоры (кручения и кривизны) с тремя составляющими равны нулю. Аналогично равны нулю и тензоры с пятью составляющими, так как каждому из них соответствует конус второго порядка, содержащий вписанный прямоугольный триэдр, а оси этого конуса дают привилегированные направления. Итак, остается лишь скалярное кручение и скалярная кривизна, причем формулы структуры приводятся к

$$(\omega^1)' = [\omega^2\omega_2^1] + [\omega^3\omega_3^1] + a\,[\omega^2\omega^3],$$

$$(\omega^2)' = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega_3^2] + a\,[\omega^3\omega^1],$$

$$(\omega^3)' = [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + a\,[\omega^1\omega^2],$$

$$(\omega_{23})' = [\omega_2^1\omega_{13}] + b\,[\omega^2\omega^3],$$

$$(\omega_{31})' = [\omega_3^2\omega_{21}] + b\,[\omega^3\omega^1],$$

$$(\omega_{12})' = [\omega_1^3\omega_{32}] + b\,[\omega^1\omega^2].$$

Внешнее дифференцирование приводит к соотношениям

$$[da\omega^2\omega^3] = [da\omega^3\omega^1] = [da\omega^1\omega^2] = 0,$$
$$[db\omega^2\omega^3] = [db\,\omega^3\omega^1] = [db\,\omega^1\omega^2] = 0;$$

они показывают, что a и b являются постоянными. Таким образом, *пространство имеет постоянные кривизну и кручение,* и притом кратчайшими линиями являются прямые.

Эти пространства, как и евклидово пространство, допускают группу преобразований, зависящую от 6 параметров. *Они получаются из пространства E евклидова или неевклидова постоянной кривизны, в котором условливаются рассматривать два вектора с бесконечно близкими началами* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{m}'$ *как эквиполентные, если можно перейти от одного к другому при помощи винтового перемещения в смысле геометрии пространства E с осью* $\mathbf{mm}'$ *и с заданным параметром винтового перемещения.*

Случай, когда пространство E евклидово, соответствует соотношению $b = \frac{1}{4}a^2$; кривизна пространства равна квадрату половины кручения [1].

Интегральные инварианты

91. *Скалярные интегральные инварианты пространства метрической связности.* — Вернемся к общему случаю и исследуем, можно ли пространственному элементу одного, двух или трех измерений отнести скалярную величину, которая была бы абсолютным инвариантом (независимым от выбора единицы длины) и с коэффициентами зависящими линейно от составляющих тензора кривизны и кручения.

Заметим сначала, что, если приписывать длине вес 1, то ω^i должны рассматриваться имеющими вес 1, $\mathbf{e}_i$ — вес, равный — 1, Ω^i — вес 1, Ω и Ω_{ij} — вес 0 и, следовательно, $A_{i,jk}$ — вес $= -1$ и $A_{ij,kl}$ — вес $= -2$.

Рассмотрим сначала инвариант, относящийся к элементу объема; так как его коэффициенты должны быть веса -3, то этот случай не может представиться.

Коэффициенты инварианта, относящегося к элементу поверхности, должны быть линейны относительно A_{jk} и $A_{ij,kl}$. Пусть

$$B_{ij}[\omega^i\omega^j]$$

— такой инвариант; три величины

$$B_{23},\ B_{31},\ B_{12}$$

составляют тогда неприводимый тензор. Отсюда следует, что рассматриваемый инвариант наиболее общего вида имеет следующий вид:

$$\alpha\Omega + \beta\{(A_{213}^1 - A_{312}^1)[\omega^2\omega^3] + (A_{321}^3 - A_{123}^2)[\omega^3\omega^1] + (A_{132}^3 - A_{231}^3)[\omega^1\omega^2]\}$$

и содержит произвольные постоянные α и β. Мы уже встречали в теории пространств аффинной связности форму,

---

[1] См. об этих пространствах: E. Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace (Bull. des Sc. math. 2-e série, t. 48, 1924, p. 294—320).

заключенную в фигурные скобки; она может быть записана так:

$$\left[\omega^{l}\frac{\partial\Omega_{l}^{k}}{\partial\omega^{k}}\right].$$

Оба найденные инварианта приводятся к одному для пространств нулевого кручения.

Наконец, абсолютный скалярный инвариант, являющийся формой Пфаффа, приводит аналогично к тензору с тремя составляющими, образованному из составляющих тензора кручения; итак, снова приходим к форме

$$\frac{\partial\Omega^{1}}{\partial\omega^{1}}+\frac{\partial\Omega^{2}}{\partial\omega^{2}}+\frac{\partial\Omega^{3}}{\partial\omega^{3}}.$$

92. *Векторные интегральные инварианты пространства метрической связности.* — Мы будем здесь рассматривать вектор вида

$$\mathbf{e}_1\Pi^1+\mathbf{e}_2\Pi^2+\mathbf{e}_3\Pi^3,$$

причем коэффициенты дифференциальных форм линейны относительно составляющих тензоров кручения и кривизны. Вес каждой формы Π^i должен быть равен 1; следовательно, вес каждого коэффициента равен

— 2 если Π^i являются формой 3-ей степени;

— 1 если Π^i „ „ 2-ой „ ;

случай линейных форм, таким образом, исключается.

Если Π^i являются элементами тройных интегралов, то векторной форме соответствует вектор

$$\mathbf{e}_1B^1+\mathbf{e}_2B^2+\mathbf{e}_3B^3;$$

коэффициенты B^i образуют, следовательно, неприводимый тензор с тремя составляющими (вектор). Итак, получаем общее решение

$$\alpha(\mathbf{e}_1A_{23}+\mathbf{e}_2A_{31}+\mathbf{e}_3A_{12})[\omega^1\omega^2\omega^3]+\beta\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega_k^i].$$

Вторая форма уже была отмечена; что касается первой, то она может быть записана сжато $[d\mathbf{m}\Omega]$.

Если Π^i являются элементами двойных интегралов, то мы получим вектор вида

$$\mathbf{e}_i B_{jk}^i[\omega^j\omega^k];$$

следовательно, коэффициенты B_{jk}^i преобразуются, как составляющие тензора кручения. *Из этого не следует, что они будут им пропорциональны.* Можно лишь сказать, что каждый из неприводимых тензоров, на которые можно разложить тензор B_{jk}^i, имеет составляющие, пропорцио-

нальные составляющим соответствующего неприводимого тензора, построевного из A_{jk}^i. Другими словами, имеем

$$B_{1,23}-B_{3,12}=\alpha(A_{1,23}-A_{3,12}),\quad B_{2,31}-B_{3,12}=\alpha(A_{2,31}-A_{3,12}),$$

$$B_{12}^2-B_{13}^3=\alpha(A_{12}^2-A_{13}^3),\ldots,$$

$$B_{12}^2+B_{13}^3=\beta(A_{12}^2+A_{13}^3),\ldots,$$

$$B_{123}+B_{231}+B_{312}=\gamma(A_{123}+A_{231}+A_{312}).$$

Проблема, таким образом, полностью решена, и решение зависит от трех произвольных постоянных. Оно образовано из трех частных решений:

$$\mathbf{e}_i\Omega^i,\quad \mathbf{e}_i\left[\omega^l\frac{\partial\Omega^k}{\partial\omega^k}\right],$$

$$(A_{123}+A_{231}+A_{312})\{\mathbf{e}_1[\omega_2\omega_3]+\mathbf{e}_2[\omega_3\omega_1]+\mathbf{e}_3[\omega_1\omega_2]\}.$$

Наконец, можно рассмотреть инвариант вида

$$[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Pi_1+[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Pi_2+[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Pi_3,$$

являющийся в сущности *парой*, составляющие которой являются элементами простых или кратных интегралов. Если такой инвариант не зависит от выбора единицы длины, то Π_i являются элементами тройных интегралов, а коэффициенты линейными комбинациями от A_{jk}^i, образующими тензор с тремя составляющими. Таким образом, получаем единственное решение

$$\left[d\mathbf{m}\,d\mathbf{m}\frac{\partial\Omega^i}{\partial\omega^i}\right],$$

где произведение должно рассматриваться как внешнее и по отношению к дифференциалам переменных и по отношению к $\mathbf{e}_i$.

93. *Интегральные инварианты пространств евклидовой связности.* — Для этих пространств можно добавить к предыдущим интегральным инвариантам те, которые обладают весом, отличным от нуля. Их легко получить применением предыдущего метода. Находим:

1) линейный скалярный инвариант веса — 1

$$(A_{2113}-A_{3112})\omega^1+(A_{3221}-A_{1223})\omega^2+(A_{1332}-A_{2331})\omega^3;$$

2) скалярный инвариант двух измерений веса 1

$$(A_{12}^2+A_{13}^3)[\omega_2\omega_3]+(A_{23}^3+A_{21}^1)[\omega_3\omega_1]+(A_{31}^1+A_{32}^2)[\omega_1\omega_2];$$

3) два скалярных инварианта трех измерений веса соответственно 2 и 1

$$(A_{123}+A_{231}+A_{312})[\omega^1\omega^2\omega^3]=[\omega^1\Omega_1]+[\omega^2\Omega_2]+[\omega^3\Omega_3];$$

$$(A_{23}^{23}+A_{31}^{31}+A_{12}^{12})[\omega^1\omega^2\omega^3]=[\omega^1\Omega^{23}]+[\omega^2\Omega^{31}]+[\omega^3\Omega^{12}];$$

4) шесть линейных векторных инвариантов, из которых три имеют вес, равный -1, и три — вес, равный -2,

$$\sum (\alpha\beta\gamma)\, \mathbf{e}_i A^i_{\alpha\beta}\, \omega_\gamma\ ;$$

$$\sum (ijk)\, A^\alpha_{i\alpha} (\mathbf{e}_j \omega_k - \mathbf{e}_k \omega_j);$$

$$(A_{123} + A_{231} + A_{312})\ (\mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2 + \mathbf{e}_3\omega^3)$$

$$\sum (ijk)\, (\alpha\beta\gamma)\, \mathbf{e}_i\, A_{jk\alpha\beta}\omega_\gamma\ ;$$

$$(A_{2113} - A_{3112})\ (\mathbf{e}_2\omega_3 - \mathbf{e}_3\omega_2) + (A_{3221} - A_{1223})\ (\mathbf{e}_3\omega_1 - \mathbf{e}_1\omega_3) + \\ + (A_{1332} - A_{2331})\ (\mathbf{e}_1\omega_2 - \mathbf{e}_2\omega_1);$$

$$(A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12})\ (\mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2 + \mathbf{e}_3\omega^3)$$

5) три векторных инварианта двух измерений веса -1

$$\sum (ijk)\, \mathbf{e}_i\, \Omega_{jk};$$

$$[(A_{2113} - A_{3112})\,\omega^1 + (A_{3221} - A_{1223})\,\omega^2 + (A_{1332} - A_{2331})\,\omega^3] \times \\ \times [\mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2 + \mathbf{e}_3\omega^3];$$

$$(A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12})\ (\mathbf{e}_1 [\omega_2\omega_3] + \mathbf{e}_2 [\omega_3\omega_1] + \mathbf{e}_3 [\omega_1\omega_2]);$$

6) векторный инвариант трех измерений веса 1

$$\mathbf{e}_i A^k_{ik} [\omega^1\omega^2\omega^3]\ ;$$

7) наконец бивекторные инварианты, которые выводятся из векторных инвариантов заменой соответственно $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на $[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$.

Заметим, что из каждого линейного интегрального инварианта можно получить интегральный инвариант двух измерений, изменяя соответственно ω^1, ω^2, ω^3 на $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$ и обратно. Заметим также, что некоторые из полученных интегральных инвариантов имеют внутренний смысл лишь в том случае, если пространство *ориентировано*; таковы те инварианты, у которых знак каждого коэффициента зависит от четности некоторой перестановки трех индексов 1, 2, 3.

Глава VIII

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

94. Существенная разница между случаем $n = 4$ и общим случаем заключается в том, что группа линейных преобразований квадратичной формы 4 переменных *полупростая*, между тем как в общем случае она *простая*. Она изоморфна в случае $n = 4$ группе с шестью параметрами

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}.$$

Этот факт, между прочим, может быть просто интерпретирован геометрически. Если мы будем рассматривать 4 переменных x^i квадратичной формы как однородные координаты точки пространства, то линейным преобразованиям, не изменяющим эту форму, соответствуют коллинеации, оставляющие инвариантной соответствующую квадрику (*фундаментальную* квадрику); каждая из этих коллинеаций преобразует между собой как прямолинейные образующие первой системы (проективным преобразованием одной переменной), так и образующие второй системы (при помощи другого проективного преобразования одной переменной).

95. Рассмотрим 2 вектора x^i и y^i и 6 величин

$$x^i y^j - x^j y^i = p^{ij}.$$

Если x^i и y^i считать за однородные координаты двух точек в трехмерном пространстве, то p^{ij} являются плюккеровыми координатами прямой, соединяющей эти две точки. Прямая q, сопряженная с этой прямой относительно фундаментальной квадрики, является пересечением двух плоскостей

$$x_i X^i = 0, \quad y_i X^i = 0;$$

следовательно, ее плюккеровы координаты определяются соотношениями:

$$\frac{q^{23}}{p_{14}} = \frac{q^{31}}{p_{24}} = \frac{q^{12}}{p_{34}} = \frac{q^{14}}{p_{23}} = \frac{q^{24}}{p_{31}} = \frac{q^{34}}{p_{12}}.$$

Исследуем, в частности, вопрос, — когда прямая q совпадает с p, то есть является образующей квадрики. Для этого необходимо, чтобы

$$p_{ij} = \lambda (ijkl) p^{kl},$$

где через $(ijkl)$ обозначено число, равное $+1$ или -1, смотря по тому, четной или нечетной является перестановка четырех индексов i, j, k, l. Аналогично имеем

$$p_{kl} = \lambda (ijkl) p^{ij},$$

откуда

$$p_{ij} p_{kl} = \lambda^2 p^{ij} p^{kl},$$

то есть

$$\lambda^2 = g_{ii} g_{jj} g_{kk} g_{ll} = g.$$

Образующие первой системы удовлетворяют, например, соотношениям

$$p_{ij} = \sqrt{g} (ijkl) p^{kl},$$

образующие второй системы — соотношениям

$$p_{ij} = -\sqrt{g} (ijkl) p^{kl}.$$

Исследование тензора кручения

96. В общем случае мы определили первый неприводимый тензор кручения при помощи производящей формы

$$a^i (a^j b^k - b^j a^k) A_{ijk},$$

в которой параметры a^i и b^i удовлетворяют соотношениям:

$$a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0.$$

Применение этого приема дало бы нам здесь тензор с 16 составляющими. Но этот тензор не является неприводимым.

Чтобы получить неприводимый тензор, необходимо исходить из этой же производящей формы, но предполагать, что *точки* (a^i) *и* (b^i) *лежат на одной и той же образующей одной из двух систем*, например, первой. Тензор с 16 составляющими разложится таким образом на 2 неприводимых сопряженных тензора с 8 составляющими.

Чтобы определить первый из них, найдем, например, соотношения, получающиеся при приравнивании нулю всех его составляющих. Эти соотношения выразят условие, что равенство

$$A_{ijk} a^i (a^j b^k - b^j a^k) = 0 \tag{1}$$

имеет место каждый раз, когда две точки (a^i) и (b^i) лежат на одной образующей первой системы. Преобразуем коэффициенты при A_{ijk}, для которых 3 индекса i, j, k различны, заменяя величину $a^j b^k - b^j a^k$ равной ей величиной

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (jkil) (a_i b_l - b_i a_l)$$

и объединим два члена

$$A_{ill} a^i (a^i b^l - b^i a^l) + \frac{1}{\sqrt{g}} A_{ijk} (jkil) a^i (a_i b_l - b_i a_l) =$$

$$= \left[A^i_{il} + (jkil) \frac{g_{ll}}{\sqrt{g}} A_{ijk} \right] a_l (a^i b^l - b^i a^l).$$

Равенство, которому мы должны удовлетворить, имеет тогда следующий вид:

$$B_{il} a_l (a^i b^l - b^i a^l) = 0,$$

причем

$$B_{il} = A^i_{il} + (jkil) \frac{g_{ll}}{\sqrt{g}} A_{ijk}.$$

Этому равенству можно удовлетворить, полагая

$$B_{il} = \lambda_l,$$

где λ_l обозначают четыре произвольных величины. Это дает 12 соотношений между A^i_{jk} и λ_l, то есть 8 соотношений между A^i_{jk}, другими словами, как раз число искомых соотношений.

Следовательно, *первые два сопряженных неприводимых тензора кручения имеют составляющими восемь величин*

$$A^i_{il} - A^k_{kl} + (ijkl) \frac{g_{ll}}{\varepsilon \sqrt{g}} (A_{ijk} - A_{klj}),$$

$$A^j_{jl} - A^k_{kl} + (ijkl) \frac{g_{ll}}{\varepsilon \sqrt{g}} (A_{jkl} - A_{klj}) \quad (l = 1, 2, 3, 4).$$

Мы снова получаем составляющие тензора, образованного из этих двух сопряженных тензоров, — величины

$$A^i_{il} - A^k_{kl}, \quad A_{ijk} - A_{jki}.$$

97. *Интерпретация первых двух неприводимых тензоров кручения.* — Из самого метода вычисления тензора мы видим, что пространства, для которых первый сопряженный тензор равен нулю, характеризуются следующим свойством, которое выражает геометрический смысл уравнения (1).

Рассмотрим в некоторой точке $\mathbf{m}$ пространства плоский изотропный элемент первой системы, то есть такой элемент, у которого все направления имеют ds^2, равное нулю;

трансляция, соответствующая замкнутому контуру этого плоского элемента, происходит вдоль направления, принадлежащего этому элементу.

Пространства, для которых оба тензора обращаются в нуль, характеризуются, как и в случае $n=3$, следующим свойством: если заданы 3 взаимно перпендикулярных направления (1), (2), (3), выходящих из точек $\mathbf{m}$, то *проекция на направление (1) кручения плоского элемента (23) равна проекции на направление (2) кручения плоского элемента (31).*

98. *Два последних неприводимых тензора кручения.*— Они — те же самые, что и в общем случае. Один — с 4 составляющими

$$A^i_{i1},\ A^i_{i2},\ A^i_{i3},\ A^i_{i4};$$

он соответствует инвариантной форме Пфаффа

$$\frac{\partial\Omega^1}{\partial\omega^1}+\frac{\partial\Omega^2}{\partial\omega^2}+\frac{\partial\Omega^3}{\partial\omega^3}+\frac{\partial\Omega^4}{\partial\omega^4} \tag{2}$$

и имеет природу вектора.

Другой, также с 4 составляющими,

$$B_{ijk}=A_{ijk}+A_{jki}+A_{kij}\quad (i\neq j\neq k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

соответствует форме

$$[\omega^1\Omega_1]+[\omega^2\Omega_2]+[\omega^3\Omega_3]+[\omega^4\Omega_4]$$

а также форме Пфаффа

$$B_{234}\,\omega_1-B_{134}\,\omega_2+B_{124}\,\omega_3-B_{123}\,\omega_4; \tag{3}$$

эта последняя форма не зависит от выбора единицы длины.

Геометрическая интерпретация формы (2) заключается в следующем. Пусть $\mathbf{m}'$ — точка бесконечно близкая с $\mathbf{m}$; можно всегда предположить, что она лежит на векторе $\mathbf{e}_1$. Построим в $\mathbf{m}$ три других ортогональных вектора $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$. *Значение формы в точке $\mathbf{m}'$ равно произведению расстояния $\mathbf{mm}'$ на сумму проекций кручений плоских элементов (21), (31), (41) соответственно на ребра (2), (3), (4).*

Геометрическая интерпретапия формы (3) дается аналогичным образом. *Следует умножить расстояние $\mathbf{mm}'$ на сумму проекций кручений плоских элементов (34), (42), (23), соответственно на ребра (2), (3), (4).*

Полученные формы Пфаффа дают два линейных интегральных инварианта, связанных с пространством

$$\int\frac{\partial\Omega^i}{\partial\omega^i}\ \text{и}\ \int B_{234}\,\omega_1-B_{134}\,\omega_2+B_{124}\,\omega_3-B_{123}\,\omega_4.$$

Тензор кривизны гомотетии

99. Составляющие A_{ij} формы Ω преобразуются, как величины

$$x_i y_j - x_j y_i;$$

они образуют, таким образом, два сопряженных неприводимых тензора

$$A_{23}+\sqrt{g}\,A^{14},\quad A_{31}+\sqrt{g}\,A^{24},\quad A_{12}+\sqrt{g}\,A^{34};$$
$$A_{23}-\sqrt{g}\,A^{14},\quad A_{31}-\sqrt{g}\,A^{24},\quad A_{12}-\sqrt{g}\,A^{34}.$$

Составляющие первого тензора являются коэффициентами формы

$$(A_{23}+\sqrt{g}\,A^{14})\left([\omega^2\omega^3]+\frac{1}{\sqrt{g}}[\omega_1\omega_4]\right)+$$
$$+(A_{31}+\sqrt{g}\,A^{24})\left([\omega^3\omega^1]+\frac{1}{\sqrt{g}}[\omega_2\omega_4]\right)+$$
$$+(A_{12}+\sqrt{g}\,A^{34})\left([\omega^1\omega^2]+\frac{1}{\sqrt{g}}[\omega_3\omega_4]\right),$$

которая может быть также записана в следующем виде:

$$A_{23}[\omega^2\omega^3]+A_{31}[\omega^3\omega^1]+A_{12}[\omega^1\omega^2]+A_{14}[\omega^1\omega^4]+A_{24}[\omega^2\omega^4]+$$
$$+A_{34}[\omega^3\omega^4]+\sqrt{g}\{A^{23}[\omega^1\omega^4]+A^{31}[\omega^2\omega^4]+A^{12}[\omega^3\omega^4]+$$
$$+A^{14}[\omega^2\omega^3]+A^{24}[\omega^3\omega^1]+A^{34}[\omega^1\omega^2]\}.$$

Второй тензор соответствует сопряженной форме.

Мы видим, таким образом, что кроме самой формы Ω, которая является абсолютным инвариантом, существует вторая форма, абсолютно инвариантная

$$\sum(ijkl)\,A^{ij}[\omega^k\omega^l].$$

В теории Вейля первая определяет электромагнитное поле; что касается второй, то ее внешняя производная определяет элементарный *4-мерный вектор тока*.

Тензор кривизны вращения

100. Составляющие A_{ijkl} этого тензора преобразуются между собой, как величины

$$(x_i y_j - x_j y_i)(z_k t_l - z_l t_k)=p_{ij}q_{kl}.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_{23}+\sqrt{g}\,p^{14}=2\xi^1,\quad p_{31}+\sqrt{g}\,p^{24}=2\xi^2,\quad p_{12}+\sqrt{g}\,p^{34}=2\xi^3,$$
$$p_{23}-\sqrt{g}\,p^{14}=2\bar{\xi}^1,\quad p_{31}-\sqrt{g}\,p^{24}=2\bar{\xi}^2,\quad p_{12}-\sqrt{g}\,p^{34}=2\bar{\xi}^3.$$

Имеем

$$p_{23}=\xi^1+\overline{\xi}^1,\qquad p_{31}=\xi^2+\overline{\xi}^2,\qquad p_{12}=\xi^3+\overline{\xi}^3,$$

$$p^{14}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi^1-\overline{\xi}^1),\quad p^{24}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi^2-\overline{\xi}^2),\quad p^{34}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi^3-\overline{\xi}^3).$$

Чтобы выяснить, как преобразуются величины ξ^i и $\overline{\xi}^i$, заметим, что каждое из соотношений

$$p_{23}p^{23}+p_{31}p^{31}+p_{12}p^{12}+p_{14}p^{14}+p_{24}p^{24}+p_{34}p^{34}=0,$$
$$p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0$$

остается инвариантным. Они могут быть записаны в следующем виде:

$$g_{11}g_{44}(\xi^1)^2+g_{22}g_{44}(\xi^2)^2+g_{33}g_{44}(\xi^3)^2+$$
$$+g_{11}g_{44}(\overline{\xi}^1)^2+g_{22}g_{44}(\overline{\xi}^2)^2+g_{33}g_{44}(\overline{\xi}^3)^2=0,$$
$$g_{11}g_{44}(\xi^1)^2+g_{22}g_{44}(\xi^2)^2+g_{33}g_{44}(\xi^3)^2-$$
$$-g_{11}g_{44}(\overline{\xi}^1)^2-g_{22}g_{44}(\overline{\xi}^2)^2-g_{33}g_{44}(\overline{\xi}^3)^2=0.$$

Следовательно, ξ^1, ξ^2, ξ^3 преобразуются линейной подстановкой, оставляющей инвариантным уравнение

$$\sum g_{ii}g_{44}(\xi^i)^2=0.$$

Величины $\overline{\xi}^i$ преобразуются аналогичной подстановкой, но *не зависимой* от первой.

Полагая

$$\xi_i=g_{ii}g_{44}\xi^i,$$

получим

$$p^{23}=\frac{1}{g}(\xi_1+\overline{\xi}_1),\qquad p^{31}=\frac{1}{g}(\xi_2+\overline{\xi}_2),\qquad p^{12}=\frac{1}{g}(\xi_3+\overline{\xi}_3),$$

$$p_{14}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_1-\overline{\xi}_1),\quad p_{24}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_2-\overline{\xi}_2),\quad p_{34}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_3-\overline{\xi}_3).$$

Установив это, обозначим через η^i и $\overline{\eta}^i$ величины, которые относительно q_{kl} играют ту же самую роль, что ξ^i и $\overline{\xi}^i$ относительно p_{kl}. Мы получим, таким образом, соответствие между A_{ijkl} и определенными линейными формами от ξ^i, $\overline{\xi}^i$ с одной стороны и η^i, $\overline{\eta}^i$ — с другой. Обозначим через i, j, k три индекса 1, 2, 3, упорядоченные таким образом, чтобы получалась четная перестановка, и положим

$$A_{ij,\,i'j'}=a_{kk'},\quad A_{ij,\,k'4}=b_{kk'},$$
$$A_{k4,\,i'j'}=c_{kk'},\quad A_{k4,\,k'4}=d_{kk'}.$$

Мы получим тогда следующие формулы соответствия:

$$\xi^i\eta^{i'}=a_{ii'}+gd^{ii'}+\sqrt{g}\,(c^i_{i'}+b^{i'}_i)=\alpha^{ii'},$$
$$\overline{\xi}^i\overline{\eta}^{i'}=a_{ii'}+gd^{ii'}-\sqrt{g}\,(c^i_{i'}+b^{i'}_i)=\beta^{ii'},$$
$$\xi^i\overline{\eta}^{i'}=a_{ii'}-gd^{ii'}+\sqrt{g}\,(c^i_{i'}-b^{i'}_i)=\gamma^{ii'},$$
$$\overline{\xi}^i\eta^{i'}=a_{ii'}-gd^{ii'}-\sqrt{g}\,(c^i_{i'}-b^{i'}_i)=\delta^{ii'}.$$

Мы разложили уже, таким образом, общий тензор кривизны на четыре тензора, из которых каждый имеет по 9 составляющих. Два последних, конечно, неприводимы. Исследуем первый. Это исследование тождественно с тем, которое мы проводили в случае $n=3$. Тензор $\xi^i\eta^{i'}$ разлагается:

1) на неприводимый тензор с 5 составляющими

$$\xi_1\eta^1-\xi_3\eta^3,\ \xi_2\eta^2-\xi_3\eta^3,\ \xi^2\eta^3+\xi^3\eta^2,\ \xi^3\eta^1+\xi^1\eta^3,\ \xi^1\eta^2+\xi^2\eta^1;$$

2) неприводимый тензор с 3 составляющими

$$\xi^2\eta^3-\xi^3\eta^2,\quad \xi^3\eta^1-\xi^1\eta^3,\quad \xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1:$$

3) скалярный тензор

$$\xi_1\eta^1+\xi_2\eta^2+\xi_3\eta^3.$$

Следовательно, *тензор кривизны разлагается на 8 неприводимых тензоров:*

1) *два тензора с 5 составляющими*

$$\alpha^1_1-\alpha^3_3,\quad \alpha^2_2-\alpha^3_3,\quad \alpha^{23}+\alpha^{32},\quad \alpha^{31}+\alpha^{13},\quad \alpha^{12}+\alpha^{21};$$
$$\beta^1_1-\beta^3_3,\quad \beta^2_2-\beta^3_3,\quad \beta^{23}+\beta^{32},\quad \beta^{31}+\beta^{13},\quad \beta^{12}+\beta^{21};$$

2) *два тензора с 9 составляющими*

$$\gamma^{ii'}\quad (i,\ i'=1,\ 2,\ 3);$$
$$\delta^{ii'}\quad (i,\ i'=1,\ 2,\ 3);$$

3) *два тензора с 3 составляющими*

$$\alpha^{23}-\alpha^{32},\quad \alpha^{31}-\alpha^{13},\quad \alpha^{12}-\alpha^{21},$$
$$\beta^{23}-\beta^{32},\quad \beta^{31}-\beta^{13},\quad \beta^{12}-\beta^{21};$$

4) *два скалярных тензора*

$$\alpha^1_1+\alpha^2_2+\alpha^3_3;$$
$$\beta^1_1+\beta^2_2+\beta^3_3.$$

Два тензора с 9 составляющими изоморфны в том смысле, что $\delta^{i'i}$ преобразуются так же, как и $\gamma^{ii'}$. Таким образом, вместо них можно взять 2 тензора, также неприводимых и имеющих составляющие

$$\gamma^{ii'} + \delta^{i'i}.$$
$$\gamma^{ii'} - \delta^{i'i}.$$

Можно также взять вместо двух скалярных тензоров их сумму и их разность. Выполняя полностью вычисления, получаем для составляющих 8 неприводимых тензоров следующие выражения:

1) и 2) *два тензора с 5 составляющими* ($\varepsilon = \pm 1$)

$$A_{23}^{23} + A_{14}^{14} - A_{12}^{12} - A_{34}^{34} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} (A_{23,14} + A_{14,23} - A_{12,34} - A_{34,12}),$$

$$A_{31}^{31} + A_{24}^{24} - A_{12}^{12} - A_{34}^{34} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} (A_{31,24} + A_{24,31} - A_{12,34} - A_{34,12}),$$

$$g_{ii} g_{jj} (A_{i\ kj}^{\ k} + A_{j\ ki}^{\ k} - A_{l\ lj}^{\ l} - A_{j\ li}^{\ l} + \varepsilon \sqrt{g} (A_{k\ il}^{\ i} - A_{l\ ik}^{\ l} - A_{k\ jl}^{\ j} - A_{l\ jk}^{\ j})$$
$$(ijkl) = 1;$$

3) *первый тензор с 9 составляющими*

$$A_{23}^{23} - A_{14}^{14}, \quad A_{31}^{31} - A_{24}^{24}, \quad A_{12}^{12} - A_{34}^{34},$$
$$A_{i\ kj}^{\ k} + A_{j\ ki}^{\ k} + A_{i\ lj}^{\ l} + A_{j\ li}^{\ l} \qquad (i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4);$$

4) *второй тензор с 9 составляющими*

$$A_{23,14} - A_{14,23}, \quad A_{31,24} - A_{24,31}, \quad A_{12,34} - A_{34,12},$$
$$A_{i\ kj}^{\ k} - A_{j\ ki}^{\ k} - A_{i\ lj}^{\ l} + A_{j\ li}^{\ l} \qquad (i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4);$$

5) и 6) *два тензора с 3 составляющими*

$$g_{kk} g_{ll} (A_{i\ kj}^{\ k} + A_{i\ lj}^{\ l} - A_{j\ ki}^{\ k} - A_{j\ li}^{\ l}) +$$
$$+ \varepsilon \sqrt{g} (A_{k\ il}^{\ i} + A_{k\ jl}^{\ j} - A_{l\ ik}^{\ i} - A_{l\ jk}^{\ j}) \qquad (ijkl) = 1;$$

7) *первый скалярный тензор*

$$A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34};$$

8) *второй скалярный тензор*

$$A_{23,14} + A_{31,24} + A_{12,34} + A_{14,23} + A_{24,31} + A_{34,12}.$$

101. *Два тензора с 5 составляющими.* — Нетрудно доказать, что пространства, для которых оба тензора с 5 составляющими равны нулю, характеризуются следующим свойством. Рассмотрим в точке **m** четыре взаимно перпендикулярных направления 1, 2, 3, 4; шесть плоских элементов, определяемых этими направлениями, образуют 3 пары

противоположных элементов; *сумма кривизн двух плоских противоположных элементов одна и та же для каждой из этих трех пар.*

102. *Первый тензор с 9 составляющими.* — При изучении тензора кривизны пространства аффинной связности мы обнаружили существование инвариантной дифференциальной квадратичной формы

$$A_{ijk}^{k} \omega^i \omega^j;$$

нетрудно показать, что составляющие изучаемого тензора являются коэффициентами квадратичной формы

$$A_{i\ jk}^{\ k} \omega^i \omega^j - \frac{1}{2} (A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34}) \omega_i \omega^i.$$

Эта квадратичная форма — нулевого веса: она не зависит от выбора единицы длины.

Этой форме можно дать геометрическую интерпретацию; рассмотрим для этого член при $\omega_1 \omega^1$; он равен

$$\frac{1}{2} (A_{12}^{12} + A_{13}^{13} + A_{14}^{14} - A_{23}^{23} - A_{24}^{24} - A_{34}^{34}).$$

Пусть $\mathbf{m}'$ — точка, бесконечно близкая к $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}' = \mathbf{m} + d\mathbf{m}$); рассмотрим четыре взаимно перпендикулярных оси, выходящих из **m**, причем первая ось пусть направлена из точки **m** в точку $\mathbf{m}'$. Образуем при помощи этих четырех осей шесть плоских взаимно перпендикулярных элементов. *Численное значение квадратичной формы для точки* $\mathbf{m}'$ *равно квадрату расстояния* $\mathbf{mm}'$, *умноженному на разность полусуммы кривизн трех плоских элементов, перпендикулярных к первой оси, и полусуммы кривизн трех плоских элементов, содержащих эту ось.* Это значение не зависит от выбора единицы длины.

Пространства, для которых первый тензор с 9 составляющими равен нулю, характеризуются тем свойством, что *два плоских взаимно перпендикулярных элемента*[1] *имеют одинаковую кривизну.*

103. *Второй тензор с 9 составляющими.* — Аналогично можно доказать, что составляющие этого тензора являются коэффициентами абсолютной инвариантной квадратичной дифференциальной формы:

$$\frac{1}{2} \sum_i (A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} - A_{klij} - A_{ljik} - A_{jkil}) \omega_i \omega^i +$$
$$+ \sum (ijkl) (A_{kji}^{j} + A_{kil}^{l} - A_{kil}^{l} - A_{ljk}^{j}) \omega_i \omega_j.$$

[1] То есть таких, что каждая прямая одного перпендикулярна к любой прямой другого.

Интерпретация этой формы получается очень просто, если рассмотреть член при $\omega_1\omega^1$. Пусть $\mathbf{m}'$ — точка, бесконечно близкая к $\mathbf{m}$; через $\mathbf{m}$ проводим четыре взаимно перпендикулярных оси, причем первая пусть проходит через $\mathbf{m}'$; *значение формы для* $\mathbf{m}'$ *равно квадрату расстояния* $\mathbf{mm}'$, *умноженному на полуразность кривизн плоских элементов, перпендикулярных к первой оси, относительно противоположных плоских элементов и кривизн плоских элементов, содержащих первую ось, относительно противоположных элементов.*

Отсюда нетрудно вывести характеристическое свойство пространств, у которых второй тензор с 9 составляющими равен нулю: *если взять два взаимно перпендикулярных плоских элемента, то кривизна первого относительно второго равна кривизне второго относительно первого.*

104. *Тензоры с тремя составляющими.* — Они изоморфны двум тензорам кривизны гомотетии; следовательно, каждый из них соответствует внешней квадратичной форме; эти формы имеют вид

$$A^{\alpha}_{ij\alpha}[\omega^i\omega^j] + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\left\{\sum(ijkl)\,A^{\alpha}_{ij\alpha}[\omega_k\omega_l]\right\}.$$

Первый член каждой из этих форм уже встречался в теории пространств аффинной связности. Второй появляется впервые.

105. *Первый скалярный тензор.* — Взятый с обратным знаком, он дает полную *скалярную кривизну* пространства, равную сумме кривизн шести плоских элементов, построенных на четырех взаимно перпендикулярных направлениях. Он является коэффициентом при $[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4]$ в форме

$$\sum(ijkl)\,[\omega_i\omega_j\Omega_{kl}].$$

106. *Второй скалярный тензор.* — Он дает *вторую полную кривизну*. Она равна сумме относительных кривизн каждого из шести плоских элементов, определяемых 4 взаимно перпендикулярными осями, относительно противоположного элемента (эти элементы должны быть соответственно ориентированы). Рассматриваемый тензор является также коэффициентом при $[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4]$ в форме

$$[\omega^i\omega^j\Omega_{ij}].$$

Скалярные и векторные интегральные инварианты

107. Применяя тот же самый метод, что и в случае $n=3$, можно определить все скалярные и векторные интегральные инварианты, в которых составляющие тензоров кручения и кривизны входят линейно. Мы ограничимся только тем, что для пространств *евклидовой* связности укажем векторные и бивекторные инварианты трех измерений: только они и могут играть роль в приложениях к принципу относительности.

Коэффициенты *векторного* интегрального инварианта

$$\mathbf{e}_i\,\overline{A}^{i}_{jkl}[\omega^j\omega^k\omega^l]$$

преобразуются между собой, как величины

$$x^i\,|y_jz_kt_l|,$$

то есть, как величины

$$(i'jkl)\,x^iy^{i'}.$$

Но тензор $x^iy^{i'}$ разлагается на четыре неприводимых тензора: первый имеет девять составляющих

$$x_iy^i - x_4y^4,\quad x^iy^j + x^jy^i;$$

второй и третий имеют по три составляющих

$$x_2y_3 - x_3y_2 + \varepsilon\sqrt{g}\,(x^1y^4 - x^4y^1),$$
$$x_3y_1 - x_1y_3 + \varepsilon\sqrt{g}\,(x^2y^4 - x^4y^2),$$
$$x_1y_2 - x_2y_1 + \varepsilon\sqrt{g}\,(x^3y^4 - x^4y^3);$$

четвертый является скаляром

$$x_iy^i.$$

Но мы установили существование двух неприводимых тензоров кривизны с 9 составляющими, двух сопряженных тензоров с 3 составляющими и двух скалярных тензоров. Отсюда вытекает, что общее решение проблемы зависит от шести произвольных постоянных. Вычисление дает

1) два отмеченных выше (гл. II) интегральных инварианта

$$\sum(ijkl)\,\mathbf{e}_i[\omega_j\Omega_{kl}],$$

$$\mathbf{e}_i[\omega^k\Omega^i_k];$$

2) два интегральных инварианта

$$\left[d\mathbf{m}\,\omega^i\,\frac{\partial\Omega^k_i}{\partial\omega^k}\right] = \mathbf{e}_iA^{\ \alpha}_{j\ k\alpha}[\omega^i\omega^j\omega^k],$$

$$\mathbf{e}_{\alpha}\sum(ijkl)\,A_{i\ j\beta}^{\ \beta}[\omega^{\alpha}\omega_k\omega_l];$$

3) два следующих интегральных инварианта (в них входят только скалярные кривизны)

$$A^{ij}_{ij} \sum (\alpha\beta\gamma\delta)\, e_\alpha [\omega_\beta \omega_\gamma \omega_\delta],$$

$$\sum (ijkl)\, A_{ijkl} \sum (\alpha\beta\gamma\delta)\, e_\alpha [\omega_\beta \omega_\gamma \omega_\delta].$$

108. Коэффициенты бивекторного тензора

$$[e_i e_j]\, \overline{A}^{ij}_{klm} [\omega^k \omega^l \omega^m]$$

преобразуются между собой, как величины

$$(x^i y^j - x^j y^i)\, |z_k t_l u_m| \text{ или } (x^i y^j - x^j y^i)\, z^{i'},$$

то есть в основном, как коэффициенты общего тензора кручения. Они образуют, таким образом, четыре неприводимых тензора, два сопряженных с восемью составляющими и два сопряженных с 4 составляющими. Следовательно, существует 6 линейно независимых бивекторных интегральных инвариантов. Вычисление дает следующие:

$$[e_i e_j]\, [\omega^i \Omega^j - \omega^j \Omega^i],$$

$$\sum (ijkl)\, [e_i e_j]\, [\omega_k \Omega_l - \omega_l \Omega_k],$$

$$[e_i e_j] \left[\omega^i \omega^j \frac{\partial \Omega^\alpha}{\partial \omega^\alpha} \right] = [e_i e_j]\, A^\alpha_{\alpha k} [\omega^i \omega^j \omega^k],$$

$$[e_i e_j] \left[\omega^i \omega^j \sum (\alpha\beta\gamma\delta)\, B_{\alpha\beta\gamma}\, \omega^\delta \right] = \sum (ijkl)\, [e_i e_j]\, B_{ijk} [\omega^i \omega^j \omega_l],$$

$$\sum (ijkl)\, A^\alpha_{\alpha_i} [e_i e_j]\, [\omega^i \omega_k \omega_l],$$

$$\sum (ijkl)\, B_{jkl}\, [e_i e_j]\, [\omega_i \omega_k \omega_l].$$

Как и выше, здесь введено обозначение

$$B_{ijk} = A_{i,\,jk} + A_{j,\,ki} + A_{k,\,ij}.$$

Если все тензоры кручения равны нулю, за исключением последнего (с составляющими B_{ijk}), то 6 бивекторных интегральных инвариантов приводятся тогда к первым двум.

Пространства Вейля

109. Это — пространства *метрической связности* нулевого кручения. Для этих пространств

1) второй тензор кривизны с 9 составляющими тождественно обращается в нуль;

2) два сопряженных тензора кривизны вращения с 3 составляющими тождественно равны сопряженным тензорам кривизны подобия;

3) второй скалярный тензор кривизны (вторая полная кривизна) равен нулю.

Остается, таким образом, 26 составляющих для общего тензора кривизны.

Применяя метод, указанный для случая $n = 3$, можно определить интегральные инварианты пространств Вейля, для которых коэффициенты зависят линейно от составляющих тензоров кривизны. Находим

1) *два скалярных интегральных инварианта двух измерений*

$$\Omega = A_{ij} [\omega^i \omega^j],$$

$$\sum (ijkl)\, A_{ij} (\omega_k \omega_l);$$

2) *четыре векторных интегральных инварианта трех измерений*

$$\sum (ijkl)\, e_i [\omega_j \Omega_{kl}],$$

$$[d\mathbf{m}\Omega] = A_{jk} e_i [\omega^i \omega^j \omega^k],$$

$$\sum (ijkl)\, e_\alpha A_{ij} [\omega^\alpha \omega_k \omega_l],$$

$$A^{ij}_{ij} \sum (\alpha\beta\gamma\delta)\, e_\alpha [\omega_\beta \omega_\gamma \omega_\delta];$$

3) *два бивекторных интегральных инварианта четырех измерений*

$$[e_i e_j]\, [\omega^i \omega^j \Omega] = \sum (ijkl)\, [e_i e_j]\, A_{kl} [\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4],$$

$$\sum (ijkl)\, [e_i e_j]\, [\omega_k \omega_l \Omega] = [e_i e_j]\, A^{ij} [\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4].$$

Внешние производные от форм Ω, $e_i [\omega^i \Omega]$, $\sum (ijkl)\, e_i [\omega_j \Omega_{kl}]$ равны нулю.

Римановы пространства

110. Римановы пространства являются многообразиями евклидовой связности и нулевого кручения. Они имеют только два сопряженных тензора с пятью составляющими, один тензор с 9 составляющими и один скалярный тензор.

Кроме интегральных инвариантов, отмеченных для пространств Вейля, они имеют свои собственные инварианты, присущие только им. Предполагая коэффициенты линейными относительно составляющих A_{ijkl}, имеем следующие инварианты:

1) *конечный скалярный инвариант — полную кривизну,*

2) *два векторных линейных инварианта*

$$A^{ik}_{ik} e_j \omega^j,$$

$$A^{ij}_{ij} e_k \omega^k;$$

3) *шесть бивекторных двумерных инвариантов*

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega^{ij},$$

$$\sum (ijkl)\,[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega_{kl},$$

$$\sum (\alpha\beta\gamma\delta)\,[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,A^{ij}_{\alpha\beta}\,[\omega_\gamma\omega_\delta],$$

$$\sum (ijkl)\,(\alpha\beta\gamma\delta)\,[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,A_{kl\alpha\beta}\,[\omega_\gamma\omega_\delta],$$

$$A^{ij}_{ij}\,[\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta]\,[\omega^\alpha\omega^\beta],$$

$$A^{ij}_{ij}\sum (\alpha\beta\gamma\delta)\,[\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta]\,[\omega_\gamma\omega_\delta];$$

4) *скалярный инвариант четырех измерений*

$$A^{ij}_{ij}\,[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4] = \sum (ijkl)\,[\omega^i\omega^j\Omega^{kl}].$$

Формы $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega^{ij}$ и $\sum (ijkl)\,[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\,\Omega_{kl}$ подчиняются закону сохраиения.

ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

В ряде сообщений, помещенных в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [1] более чем два года тому назад, мною был установлен один общий принцип, при помощи которого можно развить теорию метрических пространств и их различных обобщений. Основная его идея тесно связана с глубоким понятием *параллельного переноса*, введенного Леаи-Чивита [2]. Если мы рассмотрим, например, поверхность в обычном евклидовом пространстве, то можно сказать, что небольшая область этой поверхности, окружающая некоторую точку, обладает всеми свойствами двумерного евклидова пространства (плоскости); но только пользуясь понятием параллелизма, можно в одной и той же евклидовой плоскости *ориентировать* один относительно другого два небольших куска поверхности, окружающих две бесконечно близкие точки; по терминологии Г. Вейля поверхность обладает евклидовой *связностью*.

Все многочисленные исследователи, обобщавшие теорию метрических пространств, исходили из основной идеи Леви-Чивита, но они не могли, по-видимому, освободиться от идеи *вектора*. Последнее не представляет никакого неудобства, если речь идет о пространствах *аффинной* связности, теория которых играет ту же роль относительно метрических пространств, какую играет аффинная геометрия по отношению евклидовой; но в то же время этот путь не дает, по-видимому, никакой надежды на создание *самостоятельной* теории пространств конформной или проективной связности. В самом деле, существенным в идее Леви-Чивита является именно то, что она дает возможность взаимной ориентации двух небольших бесконечно близких областей пространства, и как раз эта идея *ориентации* и является наиболее глубокой. Развивая эту идею, мы приходим к возможности построения общей теории пространств *аффинной*, *конформной*, *проективной* связностей и т. д.

---

[1] C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922, p. 437, 593, 734, 857, 1104.
[2] Rendiconti del Circ. matem. di Palermo, t. 42, 1917, p. 173—205.

В исследовании, помещенном в Annales de l'École Normale supérieure [1], я развил общую теорию пространств аффинной связности, а в работе, опубликованной в Annales de la Société polonaise de Mathématiques [2], — теорию пространств конформной связности [3]. В настоящем исследовании я намереваюсь указать в общих чертах основные пункты теории пространств *проективной* связности. Наиболее интересным, быть может, в этой теории является следующее.

Геодезические линии пространства проективной связности определяются дифференциальными уравнениями второго порядка специальной формы; класс этих уравнений *совпадает* с классом уравнений, определяющих геодезические линии пространств *аффинной* связности. Но между тем как среди всех *аффинных* связностей, соответствующих данному многообразию геодезических линий, невозможно выделить одну какую-нибудь при помощи ее внутренних свойств, в теории *проективных* связностей это сделать можно; я называю эту привилегированную связность *нормальной*. Таким образом, существует однозначное соответствие между дифференциальной системой рассматриваемого вида и пространством нормальной проективной связности, так что именно понятие *проективной* связности дает возможность придать геометрическую форму теории рассматриваемых дифференциальных систем и, в частности, теории геодезического отображения. Другими словами, пространства нормальной проективной связности играют для этих дифференциальных систем ту же роль, какую играют пространства Римана (с параллелизмом Леви-Чивита) для теории дифференциальных квадратичных форм.

В случае $n=2$ класс дифференциальных уравнений, определяющих геодезические линии пространств аффинной связности, образован из уравнений, в которых $\frac{d^2y}{dx^2}$ является полиномом не выше третьего порядка относительно $\frac{dy}{dx}$. Возникает вопрос, — нельзя ли так обобщить теорию, чтобы интегральные кривые *любого* дифференциального уравнения второго порядка можно было рассматривать как геодезические. Во второй части работы (§§ VII, VIII) я показываю, что это можно сделать, вводя новое понятие *многообразия элементов* проективной связности (рассматриваемые выше многообразия являются *точечными*). Каждому дифференциальному уравнению второго порядка соответствует внутренним образом (независимо от точечных преобразований) многообразие элементов проективной нормальной связности, причем точечные пространства проективной нормальной связности входят как частный случай в эти новые многообразия. Таким образом, понятие проективной связности дает совершенно новое геометрическое освещение теории дифференциальных инвариантов уравнения второго порядка относительно группы точечных преобразований [1]. Несомненно, что геометрическая интерпретация могла бы быть дана во многих аналогичных вопросах; укажу, например, теорию характеристик систем в инволюции уравнений с частными производными второго порядка с одной неизвестной функцией двух независимых переменных; в этой теории общая проективная группа плоскости была бы заменена некоторой простой группой с 14 параметрами [2].

[1] Ann. Éc. Norm, 3-e série, t. 40, 1923, p. 325—412; t. 41, 1924, p. 1—25.

[2] Ann. Soc. pol Math., t. 11, 1923, p. 171—221.

[3] Это исследование является развитием цитированной выше заметки (C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922, стр. 857—860).

I. Понятие пространства проективной связности

1. Многообразие (или пространство) проективной связности является числовым многообразием, которое вблизи каждой точки обладает всеми свойствами проективного пространства [3] и в котором задан закон, позволяющий устанавливать в одном и том же проективном пространстве соответствие между двумя малыми окрестностями двух бесконечно близких точек. Чтобы придать этому определению точный смысл, достаточно вообразить, что с каждой точкой многообразия связано проективное пространство, к которому принадлежит эта точка, и что существует закон, позволяющий установить в одном из этих пространств соответствие между проективными пространствами, связанными с двумя бесконечно близкими точками многообразия этот закон соответствия и определяет проективную связность пространства. Для аналитического выражения этого закона выбираем по произволу в проективном пространстве, связанном с каждой точкой а

[1] Эта теория является объектом важного исследования A. Tresse: Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y''=\omega(x, y, y')$; мемуар, премированный Академией Jablonowski (S. Hirkei, Leipzig, 1896).

[2] Метод исследования и вычисления были указаны в моем мемуаре: Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux derivées partielles du second ordre (Ann. Éc. Norm., 3-e série, t. 27, 1910, p. 109—192).

[3] Я называю проективным такое пространство, в котором существенными считаются свойства фигур, сохраняющиеся при наиболее общем проективном преобразовании.

многообразия, *репер*, определяющий систему проективных координат (трилинейных в случае двумерного пространства, тетраэдральных в случае трех измерений и т. д.). Соответствие между проективными пространствами, связанными с двумя бесконечно близкими точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, выразится аналитически при помощи проективного преобразования, позволяющего переходить от координат точки $\mathbf{m}'$ проективного пространства, соответствующего точке $\mathbf{a}'$, к координатам той точки $\mathbf{m}$ проективного пространства, связанного с точкой $\mathbf{a}$, которая совпадает с $\mathbf{m}'$ при установлении соответствия между этими двумя пространствами. Это проективное преобразование, конечно, является бесконечно-малым. Коэффициенты, входящие в формулы этого преобразования, определяют проективную связность пространства.

Можно также встать на несколько иную точку зрения, интерпретируя указанное выше проективное преобразование как аналитическое выражение *проективного перемещения*, позволяющего переходить в том проективном пространстве, которое получается при установлении соответствия между проективными пространствами, связанными с точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, от репера, соответствующего точке $\mathbf{a}$, к реперу, отнесенному точке $\mathbf{a}'$. Это проективное перемещение определяет проективную связность многообразия (предполагается, что реперы, отнесенные различным точкам, выбраны определенным образом).

Из сказанного выше следует, что проективная связность пространства может быть определена аналитически бесконечным множеством различных способов — соответственно выбору реперов, связанных с различными точками пространства; можно даже — и это часто дает преимущество — выбрать в каждой точке репер, зависящий от произвольных параметров; аналитические составляющие проективной связности зависят тогда от этих параметров. Если репер выбран наиболее общим образом, *внутреннее* аналитическое определение проективной связности дают те функции от составляющих этой связности, которые не зависят от параметров [1].

2. Прежде, чем идти дальше, следует точно указать, что мы будем понимать под проективным *репером*. Рассмотрим в n-мерном пространстве систему однородных координат (например, декартовых); условимся обозначать одной буквой $\mathbf{m}$ совокупность $n+1$ координат $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, так что геометрическая точка одинаково определяется и символом $\mathbf{m}$, и символом $t\mathbf{m}$, где t — произвольный численный коэффициент; мы условимся все же говорить о точке $\mathbf{m}$, которую мы будем считать отличной от точек $2\mathbf{m}$, $3\mathbf{m}$ и т. д. [1].

[1] Аналогично тому, как евклидова связность пространства Римана, введенная на основании понятия параллелизма Леви-Чивита, вполне определяется квадратичной формой ds^2 пространства.

[1] Символом $\mathbf{m}$ обозначается как бы точка, снабженная массой.

Установив это, рассмотрим такую совокупность $n+1$ точек

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n+1},$$

чтобы определитель, составленный из их координат, не был равен нулю. Каждая точка $\mathbf{m}$ может быть одним и только одним способом представлена в следующем виде (смысл обозначения здесь ясен):

$$\mathbf{m} = y^1\mathbf{a}_1 + y^2\mathbf{a}_2 + \dots + y^n\mathbf{a}_n + y^{n+1}\mathbf{a}_{n+1};$$

численные коэффициенты $y^1, y^2, \dots, y^{n+1}$ дают координаты точки $\mathbf{m}$ относительно *репера*, определяемого точками $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$. Проективным репером является, таким образом, совокупность $n+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости $n-1$ измерений; мы назовем эти точки вершинами координатного $(n+1)$-эдра.

Если выбрать различные реперы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n+1},$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n+1},$$

то мы получим формулы

$$\mathbf{b}_i = \alpha_i^1\mathbf{a}_1 + \alpha_i^2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_i^{n+1}\mathbf{a}_{n+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \tag{1}$$

определяющие аналитически положение второго репера относительно первого, то есть проективное перемещение, переводящее первый репер во второй. Формулы

$$x^i = \alpha_1^i y^1 + \alpha_2^i y^2 + \dots + \alpha_{n+1}^i y^{n+1}, \quad (i = 1, 2, \dots n+1), \tag{2}$$

выражающие аналитически геометрическое равенство

$$x^1\mathbf{a}_1 + x^2\mathbf{a}_2 + \dots + x^{n+1}\mathbf{a}_{n+1} = y^1\mathbf{b}_1 + y^2\mathbf{b}_2 + \dots + y^{n+1}\mathbf{b}_{n+1},$$

определяют переход от координат y^i точки, отнесенной ко второму реперу, к координатам x^i той же точки в первом репере. Коэффициенты α_i^j в формуле (1) и (2) одни и те же.

Важно отметить, что проективное преобразование (2) *не изменится*, если умножить все коэффициенты α_i^j на один и тот же множитель; таким образом, геометрически существенными являются только отношения коэффициентов α_i^j или также отношения коэффициентов α_i^j к корню $(n+1)$-ой степени из их определителя [2].

[2] Можно также сказать, что по существу мы получим тот же репер, если умножим вершины на один и тот же числовой множитель.

3. Вернемся к пространствам проективной связности. Естественно каждую точку $\mathbf{a}$ пространства принимать за одну из вершин репера, связанного с этой точкой; так всегда мы и будем делать. Обозначим через $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ n других вершин. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ — бесконечно близкие точки пространства; через $\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_n'$ обозначим n остальных вершин репера, связанного с точкой $\mathbf{a}'$. *При установлении соответствия* между проективными пространствами, связанными с точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, мы получим формулы, аналогичные (1), но в которых коэффициенты α_i^i очень мало отличаются от единицы, а коэффициенты $\alpha_i^j (i \neq j)$ от нуля. Имеем

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathbf{a}' = (1 + \omega_0^0)\mathbf{a} + \omega^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n, \\ \mathbf{a}_1' = \omega_1^0 \mathbf{a} + (1 + \omega_1^1)\mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_1^n \mathbf{a}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_n' = \omega_n^0 \mathbf{a} + \omega_n^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + (1 + \omega_n^n)\mathbf{a}_n, \end{cases}$$

или символически

$$(3') \qquad \begin{cases} d\mathbf{a} = \omega_0^0 \mathbf{a} + \omega^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n, \\ d\mathbf{a}_1 = \omega_1^0 \mathbf{a} + \omega_1^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_1^n \mathbf{a}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\mathbf{a}_n = \omega_n^0 \mathbf{a} + \omega_n^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_n^n \mathbf{a}_n. \end{cases}$$

Бесконечно-малые величины ω_0^0, ω_i^0, ω^i, ω_i^j определяют бесконечно-малое проективное перемещение, переводящее репер, связанный с точкой $\mathbf{a}$, в репер, связанный с точкой $\mathbf{a}'$, когда мы устанавливаем соответствие между проективными пространствами, связанными с этими двумя точками. В действительности соответствие между этими двумя пространствами аналитически определяется отношением коэффициентов уравнений (3), то есть величинами

$$\omega^i, \ \omega_i^0, \ \omega_i^i - \omega_0^0, \ \omega_i^j \quad (i \neq j, \ i, \ j = 1, \ 2, \ldots, \ n),$$

которые и являются составляющими проективной связности пространства.

Если выбрать в рассматриваемом пространстве некоторую систему координат $u^1, u^2, \ldots, u^n$ и если репер, связанный с каждой точкой пространства, зависит от параметров $v^1, v^2, \ldots, v^r$, то составляющие проективной связности являются линейными формами от du^i и dv^i, причем коэффициенты суть функции от u^i, v^i (мы будем считать их дифференцируемыми).

Важно отметить, что n составляющих $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ зависят линейно только от $du^1, du^2, \ldots, du^n$, так как, если фиксировать координаты u^i, *геометрическая* точка $\mathbf{a}$ не меняется, $\mathbf{a}'$ имеет вид $(1 + \varepsilon)\mathbf{a}$, и n форм ω^i превращаются в нуль. Обратно, $du^1, du^2, \ldots, du^n$ могут быть линейно выражены через $\omega^1, \ldots, \omega^n$, так как, если эти n форм равны нулю, мы остаемся в одной геометрической точке пространства, то есть du^i равны нулю.

4. Можно всегда выбрать реперы, связанные с различными точками пространства, таким образом, чтобы сумма n составляющих $\omega_i^i - \omega_0^0$ была равна нулю. В самом деле, выберем каким-нибудь определенным образом репер, связанный с некоторой точкой пространства (таким образом, мы не имеем параметров v^i); пусть

$$\omega^i, \ \omega_i^0, \ \omega_i^i - \omega_0^0, \ \omega_i^j$$

— соответствующие составляющие проективной связности. Заменим теперь вершины

$$\mathbf{a}, \ \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$$

вершинами

$$\mathbf{a}, \ \mathbf{a}_1 + m_1 \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}_n + m_n \mathbf{a},$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — некоторые функции от u^i. Новые составляющие $\bar{\omega}_i^i - \bar{\omega}_0^0$ проективной связности равны, как нетрудно видеть,

$$\omega_i^i - \omega_0^0 + m_i \omega_i + \sum_{k=1}^{n} m_k \omega^k.$$

Чтобы удовлетворить выставленному требованию, достаточно определить функции m_i из тождества

$$\sum_{i=1}^{n} (\omega_i^i - \omega_0^0) + (n+1) \sum_{k=1}^{n} m_k \omega^k = 0;$$

сделать это возможно, так как форма Пфаффа $\sum (\omega_i^i - \omega_0^0)$, выражающаяся линейно через $du^1, \ldots, du^n$, может быть выражена линейно через $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

Отметим, с другой стороны, что можно также всегда выбрать реперы таким образом, чтобы

$$\omega^1 = du^1, \ \omega^2 = du^2, \ldots, \ \omega^n = du^n;$$

для этого достаточно, не меняя вершины $\mathbf{a}$ (которая, как мы знаем, зависит от произвольного множителя) представить выражение

$$\omega^1 \mathbf{a}_1 + \omega^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n$$

в виде

$$du^1 \mathbf{a}_1 + du^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + du^n \mathbf{a}_n.$$

Наконец, оба указанных требования могут быть выполнены одновременно. В самом деле, мы можем сначала реализовать второе, то есть предполагать в дальнейшем, что

$$\omega^i = du^i;$$

затем мы удовлетворим первому требованию, заменяя $\mathbf{a}_i$ на $\mathbf{a}_i + m_i\mathbf{a}$ с соответственно подобранными коэффициентами m_i, что не меняет значений форм ω^i.

Если оба условия:

$$\omega^i = du^i, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i = n\omega_0^0$$

выполнены, то составляющие ω_i^0, $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_i^j *проективной связности вполне определены.* В самом деле, предположим, что мы произвели выбор реперов, удовлетворяющий указанным условиям; при любом другом выборе будем иметь:

$$\bar{\mathbf{a}} = m\mathbf{a},$$

$$d\bar{\mathbf{a}} = (m\omega_0^0 + dm)\,\mathbf{a} + m\,du^1\mathbf{a}_1 + \ldots + m\,du^n\mathbf{a}_n;$$

отсюда вытекает, что необходимо принять

$$\bar{\mathbf{a}}_i = m\mathbf{a}_i + m_i\mathbf{a} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Простое вычисление показывает, что тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\omega}_i^i - \bar{\omega}_0^0) = (n+1) \sum_{i=1}^{n} m_i du^i;$$

таким образом, необходимо, чтобы коэффициенты $m_1, \ldots, m_n$ были равны нулю, и новые составляющие проективной связности совпадают с прежними.

Отсюда вытекает, что при выбранной системе координат $(u^1, \ldots, u^n)$ *пространства проективная связность однозначно определяется формами Пфаффа*

$$\omega_i^0, \ \omega_i^i - \omega_0^0, \ \omega_i^j,$$

если формы ω^i *приведены к* du^i *и сумма* n *форм* $\omega_i^i - \omega_0^0$ *равна нулю.* Проективная связность зависит, таким образом, от $n^2 + n - 1$ произвольных форм Пфаффа, то есть от $n(n^2 + n - 1)$ произвольных функций от $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

В дальнейшем, если не сделано противоположной оговорки, мы будем предполагать реперы выбранными произвольно, так что составляющие ω^i, ω_i^0, $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_i^j будут любыми формами Пфаффа.

II. Структура пространства проективной связности

5. Мы приходим к понятию структуры пространства проективной связности, изучая результат постепенного установления соответствия между проективными пространствами, связанными с различными точками замкнутой кривой пространства. Рассмотрим сначала две бесконечно близкие точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$, каждой из которых отнесен репер; точка (x^i) проективного пространства, связанного с точкой $\mathbf{a}$, при установлении соответствия совпадает с точкой $x^i + dx^i$ проективного пространства, связанного с точкой $\mathbf{a}'$, в том случае, если, учитывая уравнения (3′), будем иметь

$$d(x\mathbf{a} + x^1\mathbf{a}_1 + \ldots + x^n\mathbf{a}_n) = 0.$$

Это уравнение дает $n+1$ соотношений

$$(4) \qquad \begin{cases} dx + \omega_0^0 x + \omega_1^0 x^1 + \ldots + \omega_n^0 x^n = 0, \\ dx^1 + \omega^1 x + \omega_1^1 x^1 + \ldots + \omega_n^1 x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx^n + \omega^n x + \omega_1^n x^1 + \ldots + \omega_n^n x^n = 0. \end{cases}$$

Если точка $\mathbf{a}$ описывает в пространстве некоторую кривую, то координаты $u^1, \ldots, u^n$ могут быть выражены в функции одного параметра t; формы ω_i^j принимают вид $p_i^j dt$, и уравнения (4) становятся линейными дифференциальными уравнениями с $n+1$ неизвестными функциями $x, x^1, \ldots, x^n$ от независимой переменной t. Интегрирование их позволит определить аналитически шаг за шагом соответствие вдоль рассматриваемой кривой между проективными пространствами, связанными с конечной и начальной точкой.

Предположим, в частности, что кривая замкнутая. Проективное пространство, связанное с начальной точкой, не совпадет, вообще говоря, в результате процесса постепенного установления соответствия с пространством, связанным с конечной точкой, как это имело бы место, если бы многообразие было обычным проективным пространством. В результате процесса постепенного установления соответствия точка $(x, x^1, \ldots, x^n)$ проективного пространства, связанного с начальной точкой, совпадет с точкой $(y, y^1, \ldots, y^n)$ того же пространства, причем выражения для y^i получатся интегрированием уравнений (4) с начальными значениями (x^i) неизвестных.

Если замкнутый контур является бесконечно-малым, то y^i будут бесконечно-мало отличаться от x^i, и если положить

$$y^i = x^i + \Delta x^i,$$

получим следующие формулы

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta x + \Omega_0^0 x + \Omega_1^0 x^1 + \ldots + \Omega_n^0 x^n = 0, \\ \Delta x^1 + \Omega^1 x + \Omega_1^1 x^1 + \ldots + \Omega_n^1 x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta x^n + \Omega^n x + \Omega_1^n x^1 + \ldots + \Omega_n^n x^n = 0, \end{cases}$$

где Ω_i^j являются элементами двукратных интегралов, распространенных на часть поверхности (ориентированной), ограниченную контуром. Можно показать [1]), что

$$(6)\quad \begin{cases} \Omega^i = (\omega^i)' - [\omega_0^0 \omega^i] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega^k \omega_k^i], \\ \Omega_0^0 = (\omega_0^0)' - \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega^k \omega_k^0], \\ \Omega_i^0 = (\omega_i^0)' - [\omega_i^0 \omega_0^0] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \omega_k^0], \\ \Omega_i^j = (\omega_i^j)' - [\omega_i^0 \omega^j] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \omega_k^j]. \end{cases}$$

6. Формулы (5) определяют бесконечно-малое проективное перемещение с составляющими

$$\Omega^i, \ \Omega_i^0, \ \Omega_i^i - \Omega_0^0, \ \Omega_i^j$$

так же, как формулы (4) определяют бесконечно-малое проективное перемещение с составляющими

$$\omega^i, \ \omega_i^0, \ \omega_i^i - \omega_0^0, \ \omega_i^j.$$

Отметим, что первые составляющие образованы при помощи вторых и их билинейных ковариантов.

Каждому замкнутому бесконечно-малому контуру, проведенному в пространстве, соответствует, таким образом, бесконечно-малое проективное перемещение, составляющие которого являются элементами двукратных интегралов вида $\sum a_{ik} du^i du^k$. Эти составляющие определяют аналитически *структуру* пространства; они обобщают тензор Римана-Кристоффеля. Можно сказать также, что они определяют *кривизну* пространства в том смысле, что они выявляют разницу, существующую между рассматриваемым многообразием и проективным пространством в собственном смысле слова (плоским), когда мы описываем бесконечно-малый замкнутый контур в этом многообразии.

[1]) Доказательство аналогично тому, которое дано мною в случае пространств аффинной связности (стр. 17).

Как и в случае пространств аффинной связности, существует *теорема сохранения кривизны*, получаемая аналитически при помощи внешнего дифференцирования формул (6) и преобразования получающихся соотношений при помощи тех же формул

$$(7)\quad \begin{cases} (\Omega^i)' = -[\Omega_0^0 \omega^i] + [\omega_0^0 \Omega^i] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\Omega^k \omega_k^i] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega^k \Omega_k^i], \\ (\Omega_0^0)' = -\sum\limits_{k=1}^{n} [\Omega^k \omega_k^0] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega^k \Omega_k^0], \\ (\Omega_i^0)' = -[\Omega_i^0 \omega_0^0] + [\omega_i^0 \Omega_0^0] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\Omega_i^k \omega_k^0] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \Omega_k^0], \\ (\Omega_i^j)' = -[\Omega_i^0 \omega^j] + [\omega_i^0 \Omega^j] - \sum\limits_{k=1}^{n} [\Omega_i^k \omega_k^j] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \Omega_k^j]. \end{cases}$$

Этой теореме можно дать геометрическую формулировку, если воспользоваться бесконечно-малой трехмерной областью; приводить ее здесь мы не будем [1]).

III. Пространства проективной связности нулевого кручения

7. Мы будем говорить, что пространство проективной связности не имеет кручения, если бесконечно-малое проективное перемещение, соответствующее любому бесконечно-малому замкнутому контуру, выходящему из произвольной точки **a** этого пространства и возвращающемуся в нее, оставляет неподвижной эту точку **a** (геометрическую). Для этого необходимо и достаточно, чтобы формулы (5) давали для $\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n$ нулевые значения, если координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ равны нулю: другими словами, *пространства нулевого кручения характеризуются равенствами*

$$(8)\quad \Omega^1 = 0, \ \Omega^2 = 0, \ldots, \ \Omega^n = 0.$$

Составляющие проективной связности удовлетворяют, таким образом, тождествам

$$(9)\quad (\omega^i)' = [\omega^i(\omega_i^i - \omega_0^0)] + \sum_{k \neq i} [\omega^k \omega_k^i].$$

[1]) См. „Пространства аффинной связности", стр. 22.

Формулы (7) показывают, кроме того, что составляющие Ω_i^0, $\Omega_i^i - \Omega_0^0$, Ω_i^j кривизны, не равные нулю, не произвольны, так как они связаны n соотношениями

$$(10)\qquad [\omega^i(\Omega_i^i-\Omega_0^0)]+\sum_{k\neq i}[\omega^k\Omega_k^i]=0\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В частности, если принять $\omega^i = du^i$ и если положить

$$\omega_i^i-\omega_0^0=\sum_{r=1}^n \Gamma_{ir}^i\, du^r,\quad \omega_i^j=\sum_{r=1}^n \Gamma_{ir}^j\, du^r,$$

то коэффициенты Γ_{ij}^k удовлетворяют соотношению симметрии

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k.$$

Можно также сказать, что существует n квадратичных форм $\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n$ от $du^1, \ldots, du^n$, обладающих тем свойством, что

$$\omega_i^i-\omega_0^0=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^i}{\partial(du^i)},\quad \omega_i^j=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^j}{\partial(du^i)}.$$

Что касается соотношений (10), то они показывают, что, если положить

$$\Omega_i^i-\Omega_0^0=\sum_{h,k}^{1,\ldots n} A_{ihk}^i[\omega^h\omega^k],\quad \Omega_i^j=\sum_{h,k}^{1,\ldots n} A_{ihk}^j[\omega^h\omega^k],$$

то мы получим тождества

$$(11)\qquad A_{\alpha\beta\gamma}^i+A_{\beta\gamma\alpha}^i+A_{\gamma\alpha\beta}^i=0.$$

8. Мы получим важную категорию пространств нулевого кручения, замечая, что проективная группа, оставляющая инвариантной точку, имеет инвариантную подгруппу: эта группа дуальна группе, оставляющей неподвижной гиперплоскость, то есть *аффинной* группе, которая имеет инвариантную подгруппу, не изменяющую объемов (группу Мебиуса). Но преобразованием, дуальным проективному преобразованию (5), является

$$\Delta\xi=\Omega_0^0\xi,$$
$$\Delta\xi_1=\Omega_1^0\xi+\Omega_1^1\xi_1+\ldots+\Omega_1^n\xi_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta\xi_n=\Omega_n^0\xi+\Omega_n^1\xi_1+\ldots+\Omega_n^n\xi_n;$$

если ввести *неоднородные* координаты, оно становится аффинным преобразованием

$$\Delta\xi_i=\Omega_i^0+(\Omega_i^i-\Omega_0^0)\xi_i+\sum_{k\neq i}\Omega_i^k\xi_k\quad (i=1, 2, \ldots, n);$$

оно принадлежит к группе Мебиуса, если

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^n(\Omega_i^i-\Omega_0^0)=0.$$

Это тождество вместе с (8) определяет рассматриваемую категорию пространств. На основании (6) оно может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^n(\omega_i^i-\omega_0^0)'=-(n+1)\sum_{i=1}^n[\omega^i\omega_i^0].$$

В частности, если мы имеем

$$\omega^i=du^i,\quad \sum_{i=1}^n(\omega_i^i-\omega_0^0)=0,$$

что можно всегда реализовать (п. 4), то

$$\omega_i^0=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial(du^i)},$$

где Φ — квадратичная форма от $du^1, du^2, \ldots, du^n$.

На основании (7) имеем также

$$\sum_{i=1}^n[\omega^i\Omega_i^0]=0,$$

или, употребляя обозначение, понятное само по себе,

$$A_{\alpha\beta\gamma}^0+A_{\beta\gamma\alpha}^0+A_{\gamma\alpha\beta}^0=0\qquad (\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \ldots, n).$$

9. Последнюю категорию, еще более ограниченную, пространств нулевого кручения образуют многообразия, у которых бесконечно-малое проективное перемещение, соответствующее бесконечно-малому замкнутому контуру, выходящему из точки a и возвращающемуся в нее, оставляет инвариантной не только точку a, но и все прямые, проходящие через a. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в формулах (5) $\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n$ были пропорциональны $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то есть чтобы имели место тождества

$$\Omega_1^1=\Omega_2^2=\ldots=\Omega_n^n,\quad \Omega_i^j=0\quad (i\neq j).$$

В этом случае формулы (10) показывают, что при $n>2$

$$\Omega_i^i-\Omega_0^0=0;$$

формулы (7) дают

$$[\Omega_i^0\omega^j]=0\qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$\Omega_i^0=0.$$

Таким образом, все составляющие кривизны равны нулю, и многообразие является обычным проективным пространством.

Следовательно, *при $n>2$ только в собственно проективном пространстве бесконечно-малое проективное перемещение, соответствующее замкнутому контуру, выходящему из точки* **a**, *оставляет инвариантными эту точку и проходящие через нее прямые.*

Этот выход не применим, если $n=2$ [1].

IV. Геодезические линии пространств проективной связности

10. Линия (C) в пространстве проективной связности называется *геодезической*, если при установлении соответствия между проективными пространствами, связанными с различными точками этой линии, она дает прямую. Мы выразим условие, что линия является геодезической, если, принимая во внимание формулы (3), определяющие проективную связность пространства, запишем, что точка $d^2\mathbf{a}$ лежит на прямой, соединяющей точки **a** и $d\mathbf{a}$. Мы получаем, таким образом, дифференциальные уравнения второго порядка

$$\frac{d\omega^1-\omega^1\omega_0^0+\sum\limits_{i=0}^{n}\omega^i\omega_i^1}{\omega^1}=\frac{d\omega^2-\omega^2\omega_0^0+\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i\omega_i^2}{\omega^2}=\ldots=$$
$$=\frac{d\omega^n-\omega^n\omega_0^0+\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i\omega_i^n}{\omega^n}.$$

Предположим, в частности, что репер выбран так, что формы ω^i приводятся к du^i. Уравнения тогда имеют вид

$$\frac{d^2u^1+P^1(du)}{du^1}=\frac{d^2u^2+P^2(du)}{du^2}=\ldots=\frac{d^2u^n+P^n(du)}{du^n},$$

где $P^i(du)$ являются квадратичными формами от $du^1, du^2, \ldots, du^n$. Если выразить $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$ в функции от u^n, мы получим уравнения:

$$\text{(13)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u^1}{(du^n)^2}=-P^1\left(\dfrac{du^i}{du^n}\right)+\dfrac{du^1}{du^n}P^n\left(\dfrac{du^i}{du^n}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^2u^{n-1}}{(du^n)^2}=-P^{n-1}\left(\dfrac{du^i}{du^n}\right)+\dfrac{du^{n-1}}{du^n}P^n\left(\dfrac{du^i}{du^n}\right), \end{cases}$$

[1] В теории пространств конформной связности существует аналогичная теорема, но тогда n должно быть больше 3; см. „Пространства конформной связности", стр. 168.

где P^i теперь являются полиномами второго порядка (не обязательно однородными) от $\frac{du^1}{du^n}, \ldots, \frac{du^{n-1}}{du^n}$, коэффициенты которых представляют из себя данные функции от $u^1, u^2, \ldots, u^n$ [1].

Таким образом, если в числовом многообразии n измерений дано семейство кривых, определяемое системой $n-1$ дифференциальных уравнений второго порядка, то *в общем случае невозможно задать в этом многообразии такую проективную связность, чтобы данные кривые являлись геодезическими для этой связности.* Для этого необходимо, чтобы дифференциальные уравнения можно было привести к форме (13).

Обратно, если дана система дифференциальных уравнений вида (13), можно рассматривать их как уравнения геодезических линий пространства с соответственно выбранной проективной связностью. В самом деле, можно всегда предположить, что $\omega^i=du^i$; тогда достаточно выбрать составляющие $\omega_i^i-\omega_0^0$, ω_i^j таким образом, чтобы

$$du^i(\omega_i^i-\omega_0^0)+\sum_{k\neq i}du^k\omega_k^i=P^i(du)$$

или, более общим образом,

$$\text{(14)}\qquad du^i(\omega_i^i-\omega_0^0)+\sum_{k\neq i}du^k\omega_k^i=P^i(du)+du^i\sum_{k=1}^{n}c_k du^k,$$

где c_k — произвольные функции.

11. Исследуем, в частности, все проективные связности *без кручения*, удовлетворяющие этим тождествам. Как мы видели выше, можно, не нарушая общности исследования, предположить

$$\text{(15)}\qquad \sum_{i=1}^{n}(\omega_i^i-\omega_0^0)=0.$$

Но так как пространство не имеет кручения, то формы $\omega_i^i-\omega_0^0$, ω_k^i равны половинам частных производных от

[1] В случае $n=2$ эти уравнения приводятся к одному, которое, если изменить обозначения, имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2}=A+3B\frac{du}{dx}+3C\left(\frac{du}{dx}\right)^2+D\left(\frac{du}{dx}\right)^3,$$

причем коэффициенты A, B, C, D являются функциями от x и u.

правой части тождества (14), рассматриваемой как квадратичная форма от $du^1, du^2, \ldots, du^n$. Таким образом,

$$\omega_i^i - \omega_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial P^i}{\partial (du^i)} + \frac{1}{2}\sum c_k du^k + \frac{1}{2} c_i du^i,$$

$$\omega_k^i = \frac{1}{2}\frac{\partial P^i}{\partial (du^k)} + \frac{1}{2} c_k du^i.$$

Условие (15) дает

$$\sum_{i=1}^{n} c_i du^i = -\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P^i}{\partial (du^i)};$$

оно полностью определяет коэффициенты c_i, то есть и составляющие $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_k^i искомой проективной связности. Мы видим, таким образом, что *кривые* (C), *определяемые интегралами системы* (13), *всегда могут быть рассматриваемы как геодезические линии пространства нулевого кручения, причем проективная связность этого пространства зависит от n произвольных форм Пфаффа* $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_n^0$.

V. Пространства нормальной проективной связности

12. Интересно поставить вопрос, — существует ли между проективными связностями, определяющими в числовом многообразии одни и те же геодезические линии, связность, обладающая наиболее простыми внутренне-геометрическими свойствами. Естественно предположить, что проективная связность не имеет кручения; мы видели, что в этом случае остаются произвольными n форм Пфаффа ω_i^0. Мы можем теперь условиться, что

$$\sum_{i=1}^{n}(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i^i - \omega_0^0)' + (n+1)\sum_{i=1}^{n}[\omega^i\omega_i^0] = 0;$$

если выбор реперов предварительно произведен, то этому условию можно удовлетворить, полагая ω_i^0 равными половинам частных производных квадратичной формы Φ от $du^1, du^2, \ldots, du^n$:

$$\omega_i^0 = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ik}du^k \quad (\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}).$$

Остаются произвольными еще $\frac{n(n+1)}{2}$ коэффициентов Γ_{ij}.

Имеем

$$\Omega_i^i - \Omega_0^0 = (\omega_i^i - \omega_0^0)' - \sum_{k=1}^{n}[\omega_i^k\omega_k^i] + [\omega^i\omega_i^0] + \sum_{k=1}^{n}[\omega^k\omega_k^0],$$

$$\Omega_j^i = (\omega_j^i)' - \sum_{k=1}^{n}[\omega_j^k\omega_k^i] + [\omega^i\omega_j^0].$$

Обозначим через a_{ikl}^i, a_{jkl}^i коэффициенты форм $\Omega_i^i - \Omega_0^0$, Ω_j^i, когда мы приравниваем ω_i^0 нулю; в общем случае эти коэффициенты будут иметь следующий вид:

$$A_{ill}^i = a_{ill}^i + \Gamma_{il},$$

$$A_{ikl}^i = a_{ikl}^i \quad (k, l \neq i)$$

$$A_{jil}^i = a_{jil}^i + \Gamma_{jl}.$$

$$A_{jkl}^i = a_{jkl}^i \quad (k, l \neq i)$$

Можно одним и только одним способом выбрать коэффициенты Γ_{ij} так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jik}^k = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

достаточно положить

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}^k;$$

оба значения, полученные для Γ_{ij}, равны (п. 7) на основании формулы (11), в которой индекс i следует заменить на γ и просуммировать по γ.

Итак, *при выборе реперов, приводящих* ω^i *к* du^i и $\sum(\omega_i^i - \omega_0^0)$ *к нулю (который осуществляется единственным образом), существует одна и только одна проективная связность, имеющая геодезическими линиями кривые, определяемые уравнениями* (13), *и удовлетворяющая условиям*

(16) $$\Omega^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^k = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

13. Покажем теперь, что условия (16) ***не зависят от выбора реперов***. Это является очевидным относительно соотношений

$$\Omega^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = 0,$$

которые, как мы видели выше (п. 8), имеют инвариантное значение. Предполагая в дальнейшем, что эти соотношения имеют место, мы имеем, что величины

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^{k} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

симметричны: $B_{ij} = B_{ji}$. Мы покажем, что при бесконечно-малом преобразовании реперов эти величины преобразуются линейной однородной подстановкой.

В самом деле, вообразим, что реперы зависят в каждой точке от переменного параметра v; символом δ будем обозначать вариацию этого параметра при постоянных u^i; символ d будет обозначать любую вариацию u^i и v. Формулы (7)

$$(\Omega_i^i - \Omega_0^0)' = -\sum_{k=1}^{n} [\Omega_i^k \omega_k^i] + \sum_{k=1}^{n} [\omega_i^k \Omega_k^i] + [\omega^i \Omega_i^0] - \sum_{k=1}^{n} [\omega^k \Omega_k^0],$$

$$(\Omega_j^i)' = -\sum_{k=1}^{n} [\Omega_j^k \omega_k^i] + \sum_{k=1}^{n} [\omega_j^k \Omega_k^i] + [\omega^i \Omega_j^0]$$

показывают, что для бесконечно-малой вариации параметра v имеем

$$\delta (\Omega_i^i - \Omega_0^0) = \sum_{k \neq i} (e_i^k \Omega_k^i - e_k^i \Omega_i^k),$$

$$\delta \Omega_j^i = \sum_{k=1}^{n} (e_j^k \Omega_k^i - e_k^i \Omega_j^k),$$

где через e_i^i, e_j^i обозначен результат применения дифференцирования δ к формам $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_j^i.

Формулы

$$(\omega^i)' = [\omega^i (\omega_i^i - \omega_0^0)] + \sum_{k \neq i} [\omega^k \omega_k^i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

дают, с другой стороны,

$$\delta \omega^i = -\sum_{k=1}^{n} e_k^i \omega^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда нетрудно вывести, что

$$\delta A_{ikl}^{j} = \sum_{\rho=1}^{n} (e_i^\rho A_{\rho kl}^{j} - e_\rho^j A_{ikl}^{\rho} + e_k^\rho A_{i\rho l}^{j} + e_l^\rho A_{ik\rho}^{j})$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\delta B_{ij} = \sum_{\rho=1}^{n} (e_i^\rho B_{\rho j} + e_j^\rho B_{i\rho}),$$

что и требовалось доказать [1].

Отсюда вытекает, что если коэффициенты B_{ij} равны нулю при каком-нибудь частном выборе реперов, они равны нулю и при любом другом выборе.

Проективную связность, удовлетворяющую условиям (16), мы будем называть *нормальной*. Мы видим, таким образом, что *если в числовом многообразии задано семейство кривых, определяемое системой дифференциальных уравнений* (13), *в этом многообразии можно построить одну и только одну проективную нормальную связность, для которой рассматриваемые кривые являются геодезическими линиями пространства.*

Важное следствие из этой теоремы заключается в следующем: *аналитическое исследование инвариантов системы* (13) *относительно любых преобразований переменных совпадает с исследованием геометрических свойств пространств нормальной проективной связности* [2]. Таким образом, с точки зрения и анализа и геометрии понятие о нормальной проективной связности имеет большое значение.

Отметим, что двумерные пространства нормальной проективной связности характеризуются тем свойством, что бесконечно-малое проективное перемещение, соответствующее бесконечно-малому контуру, выходящему из точки **a**, оставляет инвариантными и точку **a**, и *все* прямые, проходящие через **a**.

Примечание. — Нетрудно видеть, что, если дана система дифференциальных уравнений вида (13), то в пространстве можно ввести бесчисленное множество *аффинных* связ-

[1] Можно показать (и это дало бы более красивый путь доказательства), что квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \omega^k \frac{\partial \Omega_k^i}{\partial \omega^i} = \sum B_{ij} \omega^i \omega^j$$

(где вместо $\Omega_i^i - \Omega_0^0$ мы пишем Ω_i^i) *инвариантна* при любом преобразовании реперов.

[2] Пространства нормальной проективной связности играют для систем дифференциальных уравнений (13) ту же роль, какую играют римановы пространства для дифференциальных квадратичных форм и пространства нормальной связности для квадратичных уравнений Монжа (см. цитированную заметку в Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. 174, p. 857). [а также помещенную в настоящей книге работу Картана: „Пространства конформной связности“, п. 16].

ностей, для которых интегральные кривые системы (13) являются геодезическими линиями; можно даже достигнуть того, чтобы в пространстве существовала *абсолютная единица объема*; но даже и при этом дополнительном условии, мы получаем бесчисленное множество решений (зависящее от произвольной функции переменных u^i) и ни одно из них не выделяется простыми внутренними свойствами [1]. Таким образом, только понятие нормальной проективной связности позволяет создать удовлетворительную *геометрическую* теорию уравнений вида (13).

VI. Нормальная проективная связность, соответствующая геодезическим линиям данной дифференциальной квадратичной формы ds^2

14. Проблема *геодезического отображения* двух римановых пространств освещается с новой точки зрения, если воспользоваться построенной выше теорией. Каждой дифференциальной квадратичной форме ds^2 соответствует вполне определенное пространство нормальной проективной связности; две формы допускают геодезическое отображение одна на другую, если соответствующие пространства нормальной проективной связности *изоморфны*, то есть если между ними можно установить точечное соответствие, сохраняющее инвариантными составляющие проективной связности. Мы не будем заниматься этой общей проблемой, которая может быть решена теми же самыми методами, как проблема изоморфизма (наложимости) двух римановых многообразий [2]. Мы ограничимся только указанием, как определить нормальную проективную связность, соответствующую данной дифференциальной квадратичной форме ds^2, и в каком случае эта форма может быть геодезически отображена на евклидову форму.

Рассмотрим форму ds^2; ее всегда можно привести к сумме n квадратов

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2;$$

пространство Римана, определенное этой формой, имеет евклидову связность (без кручения), составляющими которой являются ω^i и формы Пфаффа $\omega_i^j=-\omega_j^i$; эту связность

---

[1] Указанное дополнительное условие приводится к требованию симметрии у тензора $B_{ij}=\sum\limits_k A_{ijk}^k$. См. L.-P. Eisenhart, Spaces with correspondent Paths (Proc. Nat. Acad. of Sciences, t. 8, 1922, p. 336). В работе Geometry of the Paths L.-P. Eisenhart'a и O. Veblen'a (Proc. Nat. Acad. of Sciences, t. 8, 1922, p. 19) геодезические линии положены в основу исследования аффинной связности.

[2] См. мой мемуар: Sur les équations de la gravitation d'Einstein (J. de Math., fasc. 1, 1922).

можно рассматривать как проективную, придавая формам ω_i^0 нулевое значение.

Будем обозначать буквами $\bar\omega$ составляющие *нормальной* проективной связности, дающей те же геодезические линии. Мы имеем право положить

$$\bar\omega^i=\omega^i,\quad \bar\omega_i^i-\bar\omega_0^0=\omega_i^i=0,\quad \bar\omega_i^j=\omega_i^j.$$

Так как $\sum(\bar\omega_i^i-\bar\omega_0^0)=0$, то на основании предыдущего формы $\bar\omega_i^0$ имеют вид

$$\bar\omega_i^0=\sum_{k=1}^n\Gamma_{ik}\omega^k\quad(\Gamma_{ij}=\Gamma_{ji}).$$

Положим

$$\Omega_i^j=\sum_{k,\,l}a_{i\,kl}^j[\omega^k\omega^l];$$

имеем

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n a_{i\,jk}^k=\frac{b_{ij}}{n-1}.$$

Таким образом, первая проблема решена, и мы имеем:

$$\Pi_i^i-\Pi_0^0=[\omega^i\bar\omega_i^0]=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n b_{ik}[\omega^i\omega^k]\qquad(i=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

$$\Pi_i^j=\Omega_i^j+[\omega^j\bar\omega_i^0]=\sum_{k,\,l}a_{ikl}^j[\omega^k\omega^l]+$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n b_{ik}[\omega^j\omega^k]\qquad(i,\ j=1,\,2,\ldots,\,n).$$

15. Для того, чтобы данную дифференциальную квадратичную форму ds^2 можно было геодезически отобразить на форму Евклида, необходимо и достаточно, чтобы составляющие $\Pi_i^i-\Pi_0^0$, Π_i^j, Π_i^0 кривизны пространства нормальной проективной связности, которая была определена выше, были равны тождественно нулю. Если мы

рассмотрим сначала случай $n>2$, то, как мы знаем (п. 9), для этого достаточно, чтобы составляющие $\Pi_i^i-\Pi_0^0$ и Π_i^j были равны нулю. Тогда b_{ij} равны нулю для $i\neq j$; затем

$$\Omega_i^j=-b_{ii}[\omega^i\omega^j];$$

но из соотношения $\Omega_i^j+\Omega_j^i=0$ следует, что n коэффициентов b_{ii} равны между собой, так что

$$\Omega_i^j=-c[\omega^i\omega^j].$$

На основании одной классической теоремы, которую можно было бы легко доказать, c является постоянной, так что *рассматриваемое риманово пространство — постоянной кривизны*.

Этот вывод справедлив и в случае $n=2$, но, чтобы прийти к нему, необходимо учесть выражения для Π_1^0 и Π_2^0

$$\Pi_1^0=(\omega_1^0)'-[\omega_1^2\,\omega_2^0]=c\{(\omega^1)'-[\omega_1^2\omega^2]\}+[dc\omega^1]=[dc\omega^1],$$

$$\Pi_2^0=(\omega_2^0)'-[\omega_2^1\,\omega_1^0]=c\{(\omega^2)'-[\omega_2^1\omega^1]\}+[dc\omega^2]=[dc\omega^2].$$

Эти выражения равны нулю только в том случае, если $dc=0$.

Таким образом, мы получаем классическую теорему, согласно которой *единственными римановыми пространствами, допускающими геодезическое отображение на пространство Евклида, являются пространства постоянной кривизны.*

16. Предыдущее исследование приводит нас естественно к проективному определению пространств постоянной кривизны, данному Кели. Наиболее простой *аналитический* способ в построении этого понятия заключается в том, что мы берем в проективном пространстве невырождившуюся квадрику (*абсолют*); пусть

$$\Phi(X, X^1,\ldots, X^n)=0$$

— его уравнение. Если мы условимся относить каждой точке пространства координаты, удовлетворяющие соотношению $\Phi=k$, где k — заданная постоянная, то искомая форма ds^2 определяется следующим образом

$$ds^2=\Phi(dX,\ dX^1,\ldots,\ dX^n).$$

Рассмотрим в римановом пространстве постоянной кривизны нормальную проективную связность, которая

превращает его в собственно проективное пространство и составляющие которой суть

$$\overline{\omega}^i=\omega^i,\quad \overline{\omega}_i^i-\overline{\omega}_0^0=0,\quad \overline{\omega}_i^j=\omega_i^j,\quad \overline{\omega}_i^0=c\omega^i;$$

мы предположим также (это всегда допустимо), что $\overline{\omega}_0^0=0$. Нетрудно показать, что, если мы рассмотрим координаты $(x, x^1,\ldots, x^n)$ определенной точки проективного пространства, отнесенные различным реперам, то величина

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2-\frac{1}{c}(x)^2$$

имеет постоянное значение; это вытекает из формул (4), дающих вариацию координат x^i при переходе от одного репера к бесконечно близкому (в этих формулах надо заменить, конечно, буквы ω на $\overline{\omega}$). Таким образом, если выбрать один из реперов в качестве *фиксированного* (с координатами X^i), мы получим для координат (x^i) некоторой точки, соответствующих реперу, связанному с точкой **а**,

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(x)^2=(X^1)^2+(X^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(X)^2; \tag{17}$$

в частности, координаты (X^i) самой точки **а** удовлетворяют соотношению

$$(X^1)^2+(X^2)^2+\ldots+(X^n)^2-\frac{1}{c}(X)^2=-\frac{1}{c}.$$

С другой стороны, из соотношения (17) вытекает для двух бесконечно близких точек пространства соотношение

$$(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dx)^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dX)^2;$$

применим его к точке **а** и бесконечно близкой точке **а'**; имеем

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dX)^2.$$

Мы получаем проективное мероопределение Кели с уравнением

$$\Phi(X,\ X^1,\ldots,\ X^n)=(X^1)^2+\ldots+(X^n)^2-\frac{1}{c}(X)^2=0$$

для абсолюта и значением $\frac{1}{c}$ для постоянной k, которая соответствует постоянной кривизне пространства.

VII. Понятие о многообразии элементов проективной связности

17. Система дифференциальных уравнений (13) не является общей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $n-1$ неизвестными функциями. Кривые числового многообразия n измерений, определяемые системой уравнений, отличной от (13), не могут быть рассматриваемы как геодезические линии пространства проективной связности. Возникает вопрос, — не существует ли обобщения, позволяющего рассматривать их как геодезические линии. Мы не будем заниматься этой проблемой в общем виде, а исследуем только наиболее простой случай $n=2$, то есть случай интегральных кривых дифференциального уравнения второго порядка

$$F\left(x,\ y, \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,$$

которые мы всегда можем предполагать написанным в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right). \tag{18}$$

Теория дифференциальных инвариантов этого уравнения относительно группы точечных преобразований переменных $(x,\ y)$ была предметом важного исследования Tresse [1]. Мы увидим, что понятие проективной связности позволяет придать этой теории простую геометрическую форму.

Мы будем исходить из понятия *элемента*, — совокупности точки и проходящего через нее направления, — определяемого аналитически координатами $(x,\ y)$ точки и значением y', которое принимает $\dfrac{dy}{dx}$, когда мы перемещаемся в заданном напранлении. Совокупность всех элементов $(x,\ y,\ y')$ образует *многообразие элементов* трех измерений.

Вообразим теперь, что с каждым элементом $(x,\ y,\ y')$ связана проективная плоскость, содержащая этот элемент. Рассматриваемое многообразие элементов будет обладать проективной связностью, если мы зададим закон, позволяющий устанавливать соответствие между двумя проективными плоскостями, связанными с двумя бесконечно близкими точками. Этот закон произволен, но он должен все же удовлетворять двум следующим условиям:

a. Если мы возьмем в многообразии элементов интегральное многообразие (multiplicité) в смысле С. Ли, то есть непрерывный однопараметрический ряд элементов, удовлетворяющий уравнению

$$dy-y'dx=0,$$

то это интегральное многообразие остается также интегральным многообразием, когда мы устанавливаем постепенно соответствие между проективными плоскостями, связанными с различными элементами данного интегрального многообразия [1].

b. Каждое интегральное многообразие — точка (совокупность элементов, проходящих через неподвижную точку) данного многообразия при указанном процессе дает также интегральное многообразие — точку.

18. Выберем репер, связанный с элементом $\mathbf{e}$ многообразия следующим образом. Так как элемент $\mathbf{e}$ принадлежит к проективной плоскости, которая ему соответствует, то мы выберем за вершину $\mathbf{a}$ репера *точку* элемента $\mathbf{e}$, вершину $\mathbf{a}_1$ — на прямой, которая с точкой $\mathbf{a}$ образует рассматриваемый элемент проективной плоскости. Пусть уравнения

$$\begin{aligned}
d\mathbf{a}&=\omega_0^0\mathbf{a}+\omega^1\mathbf{a}_1+\omega^2\mathbf{a}_2,\\
d\mathbf{a}_1&=\omega_1^0\mathbf{a}+\omega_1^1\mathbf{a}_1+\omega_1^2\mathbf{a}_2,\\
d\mathbf{a}_2&=\omega_2^0\mathbf{a}+\omega_2^1\mathbf{a}_1+\omega_2^2\mathbf{a}_2
\end{aligned}$$

определяют проективную связность многообразия. Составляющие ω_k^j линейны относительно $dx,\ dy,\ dy'$ (и содержат также дифференциалы параметров, от которых может зависеть репер, связанный с каждым элементом многообразия).

Выразим теперь, что имеют место условия a и b. Если мы перемещаемся вдоль какого-нибудь интегрального многообразия, то точка $d\mathbf{a}$ должна лежать на прямой $\mathbf{a}\mathbf{a}_1$, то есть форма ω^2 должна быть равна нулю. Следовательно, ω^2 *превращается в нуль вместе с* $dy-y'dx$.

Если точка $\mathbf{a}$ многообразия остается неподвижной, необходимо, чтобы точка $d\mathbf{a}$ совпадала геометрически с $\mathbf{a}$; другими словами, ω^1 и ω^2 являются линейными комбинациями dx и dy. Таким образам, *форма* ω^1 *зависит линейно только от* dx *и* dy.

Добавим еще следующее замечание. Если элемент $\mathbf{e}$ остается неподвижным, точка $\mathbf{a}$ и прямая $\mathbf{a}\mathbf{a}_1$ должны быть

1) См. введение.

1) Это можно выразить более образно, говоря, что каждое интегральное многообразие, принадлежащее многообразию проективной связности, *развертывается* в интегральное многообразие проективной плоскости. Конечно, нельзя было бы говорить о развертывании фигуры многообразия, зависящей от двух параметров.

также неподвижными; другими словами, ω^1, ω^2 и ω_1^2 обращаются в нуль вместе с dx, dy, dy', то есть *форма* ω_1^2 *зависит линейно только от* dx, dy, dy'. Это замечание представляет, впрочем, интерес только в том случае, если репер, связанный с элементом многообразия, зависит от переменных параметров. Если это не имеет места, формы ω_i^j линейны относительно dx, dy, dy', причем формы ω^1 и ω^2 удовлетворяют указанным выше условиям и три формы ω^1, ω^2, ω_1^2 линейно независимы.

VIII. Многообразия элементов нормальной проективной связности

19. Мы будем называть в определенном нами многообразии элементов проективной связности *геодезическими* такие линии, которые *развертываются* на проективной плоскости в прямые. Эти линии рассматриваются, конечно, как точечные носители интегральных многообразий. Если $\mathbf{a}$ — некоторая точка линии, $\mathbf{aa}_1$ — ее касательная, то эта линия будет геодезической, если $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{a}_1$ лежат на прямой $\mathbf{aa}_1$, откуда

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_1^2 = 0;$$

эти уравнения приводятся к следующим:

$$dy - y'dx = 0, \quad dy' - f(x, y, y')\, dx = 0,$$

таким образом, геодезические линии являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{18}$$

Обратно, интегральные кривые любого дифференциального уравнения второго порядка могут быть рассматриваемы как геодезические многообразия с надлежаще выбранной проективной связностью; в самом деле, достаточно положить

$$\omega^1 = \alpha dx + \beta dy, \quad \omega^2 = \gamma(dy - y'dx),$$

$$\omega_1^2 = \lambda(dy - y'dx) + \mu(dy' - fdx),$$

причем остальные формы ω могут быть выбраны произвольно.

Нельзя ли среди всех проективных связностей, для которых данное двупараметрическое семейство кривых (C) является семейством геодезических линий многообразия, выделить одну при помощи внутренних ее свойств? Мы покажем, что это можно сделать, причем это нас приведет

к понятию *многообразия элементов нормальной проективной связности.*

Предварительно сделаем одно замечание. Какова бы ни была проективная связность многообразия, можно всегда предполагать, что

$$\omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy - y'dx, \quad \omega_1^2 = k(dy' - fdx). \tag{19}$$

В самом деле, так как умножение точек $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ на общий множитель не изменяет составляющих проективной связности, то при каждом преобразовании репера можно сохранить $\mathbf{a}$ неизменной. Разлагая $d\mathbf{a}$ по dy', dx, $dy - y'dx$, достаточно принять за $\mathbf{a}_1$ коэффициент при dx, за $\mathbf{a}_2$ — коэффициент при $dy - y'dx$; таким образом, мы приводим ω^1 к dx, ω^2 — к $dy - y'dx$. Нетрудно видеть, что можно даже прибавить к $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ произвольные кратные $\mathbf{a}$.

Теперь можно, очевидно, выбрать λ таким образом, чтобы коэффициент при $\mathbf{a}_2$ в $d(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a})$, равный

$$\omega_1^2 + \lambda\omega^2,$$

был пропорционален $dy' - fdx$. Предположение, таким образом, доказано.

Нетрудно видеть, что репер еще не определен полностью, так как можно заменить $\mathbf{a}_2$ на $\mathbf{a}_2 + h\mathbf{a}$ с произвольным коэффициентом h. Этот коэффициент h не влияет на форму ω_1^1, но изменяет ω_0^0 на величину $h\omega^2$; таким образом, *можно располагать им для изменения составляющей* $\omega_1^1 - \omega_0^0$ *на величину вида* $h\omega^2$.

20. Для того, чтобы *нормировать* проективную связность пространства, поступим теперь следующим образом. Вычислим сначала составляющую Ω^2 кривизны

$$\Omega^2 = (\omega^2)' - [\omega^1\omega_1^2] - [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] =$$
$$= (1 - k)[dxdy'] - [(dy - y'dx)(\omega_2^2 - \omega_0^0)].$$

Можно всегда выбрать проективную связность таким образом, чтобы Ω^2 была равна нулю; для этого достаточно положить $k = 1$ и

$$\omega_2^2 - \omega_0^0 = u(dy - y'dx).$$

Мы можем обратить в нуль также Ω^1:

$$\Omega^1 = (\omega^1)' - [\omega^2\omega_2^1] - [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)] =$$
$$= -[dx(\omega_1^1 - \omega_0^0)] - [(dy - y'dx)\omega_2^1].$$

Как мы видели выше, можно изменить $\omega_1^1 - \omega_0^0$ на величину, кратную $dy - y'dx$; поэтому можно предполагать, что

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = v dx.$$
$$\omega_2^1 = w(dy - y'dx).$$

Теперь репер полностью определен (при условии, что задается проективная связность с Ω^2 и Ω^1, равными нулю). Имеем

$$\Omega_1^2 = (\omega_1^2)' + [\omega^2\omega_1^0] - [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)] =$$
$$= [dxdf] - u[(dy' - f\,dx)(dy - y'dx)] -$$
$$- v[dxdy'] + [(dy - y'dx)\,\omega_1^0].$$

Можно еще превратить в нуль составляющую Ω_1^2 кривизны, если принять

$$v = \frac{\partial f}{\partial y'},$$

$$\omega_1^0 = \frac{\partial f}{\partial y}dx - u(dy' - fdx) + \lambda(dy - y'dx).$$

Имеем также

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 - 2\Omega_0^0 = (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0)' + 3[\omega^1\omega_1^0] + 3[\omega^2\omega_2^0] =$$
$$= \left[d\frac{\partial f}{\partial y'}dx\right] + [du(dy - y'dx)] - 2u[dxdy'] +$$
$$+ 3\lambda[dx(dy - y'dx)] + 3[(dy - y'dx)\,\omega_2^0],$$

причем можно обратить в нуль правую часть, принимая

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},$$

$$\omega_2^0 = \lambda dx - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}dx - \frac{1}{6}d\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \mu(dy - y'dx).$$

Наконец, имеем

$$\Omega_1^1 - \Omega_0^0 = (\omega_1^1 - \omega_0^0)' - [\omega_1^2\omega_2^1] + 2[\omega^1\omega_1^0] + [\omega^2\omega_2^0] =$$
$$= \left[d\frac{\partial f}{\partial y'}dx\right] - w[(dy' - f\,dx)(dy - y'dx)] +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}[dxdy'] + \lambda[dx(dy - y'dx)] +$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}[dx(dy - y'dx)] + \frac{1}{6}\left[d\frac{d^2 f}{dy'^2}(dy - y'dx)\right].$$

Можно превратить в нуль также это выражение, принимая

$$w = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}.$$

$$\lambda = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} - \frac{1}{6}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right);$$

здесь мы пользуемся следующим сокращенным обозначением

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Итак, мы получили следующие составляющие проективной связности:

$$(20)\quad \begin{cases} \omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy - y'dx, \\ \omega_1^1 - \omega_0^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y'}dx, \quad \omega_2^2 - \omega_0^0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy - y'dx), \\ \omega_1^2 = dy' - f\,dx, \quad \omega_2^1 = \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 f}{\partial y'^3}(dy - y'dx), \\ \omega_1^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy' - f\,dx) + \\ \qquad + \left(\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} - \dfrac{1}{6}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)(dy - y'dx), \\ \omega_2^0 = \left(\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} - \dfrac{1}{6}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)dx - \dfrac{1}{6}d\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \\ \qquad + \mu(dy - y'dx) \end{cases}$$

с произвольным коэффициентом μ, исходя из условий

$$(21)\quad \Omega^2 = 0, \quad \Omega^1 = 0, \quad \Omega_1^2 = 0, \quad \Omega_1^1 - \Omega_0^0 = 0, \quad \Omega_2^2 - \Omega_0^0 = 0.$$

21. Прежде чем приступать к дальнейшему исследованию, заметим, что соотношения (21) позволяют нам найти выражения для остальных составляющих Ω_2^1, Ω_1^0, Ω_2^0 кривизны многообразия. Из тождеств (7) вытекают непосредственно соотношения

$$[\omega^2\Omega_2^1] = 0, \qquad [\omega^2\Omega_1^0] = 0,$$
$$[\omega^1\Omega_1^0] + [\omega^2\Omega_2^0] = 0, \qquad [\omega_1^2\Omega_2^1] - [\omega^1\Omega_1^0] = 0,$$

откуда выводим общие выражения

$$\Omega_2^1 = d[\omega^2\omega_1^2] + r[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_1^0 = b[\omega^1\omega^2] + r[\omega^2\omega_1^2],$$
$$\Omega_2^0 = h[\omega^1\omega^2] + k[\omega^2\omega_1^2] + r[\omega^1\omega_1^2].$$

Мы покажем, что произвольный коэффициент μ можно выбрать таким образом, чтобы r было равно нулю. В самом деле, имеем

$$\Omega_2^1 = (\omega_2^1)' + [\omega^1\omega_2^0] + [\omega_2^1(\omega_2^2 - \omega_1^1)] =$$
$$= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}[dxdy'] + \frac{1}{6}\left[d\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}(dy - y'dx)\right] - \frac{1}{6}\left[dxd\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right] +$$
$$+ \mu[dx(dy - y'dx)] + \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}[dx(dy - y'dx)].$$

Прежде всего мы видим, что правая часть обращается в нуль вместе с $dy - y'dx$, то есть с ω^2. Что касается коэффициента r, то он является коэффициентом при $[dxdy]$ в правой части, когда мы в ней заменим dy' на fdx:

$$r = \mu - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y'^2} + \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3} + \frac{1}{6}\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}.$$

Таким образом, в качестве μ мы выберем следующую величину

$$\mu = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y'^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3} - \frac{1}{6}\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}. \tag{22}$$

Проективная связность многообразия определена, таким образом, однозначно, причем Ω_2^1, Ω_1^0, Ω_2^0 выражаются следующим образом:

$$\Omega_2^1 = a[\omega^2\omega_1^2], \quad \Omega_1^0 = b[\omega^1\omega^2], \quad \Omega_2^0 = h[\omega^1\omega^2] + k[\omega^2\omega_1^2].$$

Между прочим, для a находим непосредственно следующее выражение:

$$a = -\frac{1}{6}\frac{\partial^4 f}{\partial y'^4}; \tag{23}$$

для коэффициентов b, h, k мы не будем подсчитывать явных выражений.

22. Остается разрешить один важный вопрос. Мы специализировали проективную связность многообразия, исходя из частного выбора репера; возникает вопрос,— зависит ли полученный результат от этого выбора? Другими словами, *имеют ли инвариантный характер* (относительно каждого преобразования координат x, y) *свойства проективной связности, выражаемые соотношениями* (21) *и условием* $r = 0$.

Отметим прежде всего, что свойство $\Omega^2 = 0$, как нетрудно видеть, выражает то, что при бесконечно-малом проективном перемещении, соответствующем бесконечно-малому замкнутому контуру элементов, выходящему из элемента $\mathbf{e}$, элемент $\mathbf{e}'$, получающийся из $\mathbf{e}$, *объединен* с $\mathbf{e}$; очевидно, это — *инвариантное* свойство.

Далее, условия

$$\Omega^1 = 0, \ \Omega^2 = 0, \ \Omega_1^2 = 0$$

выражают, что при указанном бесконечно-малом перемещении элемент $\mathbf{e}$ остается инвариантным (отсутствие *кручения*); это — также инвариантное свойство. Условие $\Omega_1^1 - \Omega_0^0 = 0$ выражает, что на прямой $\mathbf{aa}_1$ не существует *изолированной* инвариантной точки, отличной от $\mathbf{a}$; затем условие $\Omega_2^2 - \Omega_0^0 = 0$ выражает, что вне прямой $\mathbf{aa}_1$ не существует *изолированной* инвариантной точки.

Таким образом, соотношения (21) имеют инвариантный характер, не зависящий от выбора реперов.

Аналогично обстоит дело с соотношением $r = 0$; нетрудно дать ему следующую геометрическую интерпретацию: если мы рассмотрим бесконечно-малую линейную последовательность (не замкнутую) элементов и если мы замкнем ее, заставив точку (x, y) описать *тот же* путь в обратном направлении, причем направление y' приходит снова от своего конечного значения к начальному, *не проходя прежних промежуточных значений*, то этому замкнутому контуру элементов соответствует бесконечно-малое проективное перемещение (в проективном пространстве, связанном с начальным элементом). Соотношение $r = 0$ обозначает, что все точки прямой $\mathbf{aa}_1$ инвариантны при этом перемещении. Следовательно, оно имеет инвариантный смысл.

Таким образом, в результате мы получаем, что *каждому обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ *соответствует инвариантным образом многообразие элементов проективной связности, для которого интегральные кривые дифференциального уравнения являются геодезическими*. Полученную таким образом проективную связность, мы будем называть *нормальной*. Мы указали выше те геометрические свойства, которые характеризуют нормальные проективные связности.

Проблема, исследованная Tresse, может быть формулирована геометрически следующим образом: *исследовать геометрические свойства многообразий элементов нормальной проективной связности*.

23. Понятие об *элементе* в проективной геометрии дуально самому себе, как и понятие об интегральном многообразии. Следовательно, каждое многообразие элементов проективной связности преобразуется по принципу двойственности в другое многообразие элементов проективной связности, причем *точки* первого соответствуют *геодезическим линиям* второго и обратно. Если мы обозначим через $\bar{\omega}$ составляющие проективной связности второго многообразия, то, как нетрудно видеть,

$$\bar{\omega}_0^0 = \omega_2^2, \ \bar{\omega}^1 = \omega_1^2, \ \bar{\omega}^2 = \omega^2,$$

$$\bar{\omega}_1^0 = \omega_2^1, \ \bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1, \ \bar{\omega}_1^2 = \omega^1,$$

$$\bar{\omega}_2^0 = \omega_2^0, \ \bar{\omega}_2^1 = \omega_1^0, \ \bar{\omega}_2^2 = \omega_0^0.$$

Соотношения (21), относящиеся к нормальной проективной связности, преобразуются по принципу двойственности в следующие:

$$\Pi^2=0,\quad \Pi_1^2=0,\quad \Pi^1=0,\quad \Pi_1^1-\Pi_2^2=0,\quad \Pi_0^0-\Pi_2^2=0;$$

они сохраняют свой вид. Что касается условия того, чтобы коэффициент r при $[\omega^1\omega^2]$ в форме Ω_2^1 был равен нулю, то оно переходит в условие,— чтобы коэффициент при $[\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2]$ в Π_1^0 был равен нулю. Другими словами, ***многообразие, двойственное многообразию элементов нормальной проективной связности, является также многообразием элементов нормальной проективной связности.***

Соотношение, существующее между семействами геодезических линий двух взаимно дуальных нормальных многообразий, заключается в следующем. Если

$$F(x, y, a, b)=0$$

— общее уравнение геодезических первого многообразия, когда мы рассматриваем x и y как координаты точек, a и b как произвольные постоянные, то это уравнение является также уравнением геодезических второго многообразия, если в нем рассматривать a и b как координаты точек, x и y — как произвольные постоянные. Соотношение между двойственными нормальными многообразиями выражается, следовательно, аналитически определенным соотношением между двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка (или скорее — между двумя классами дифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании каждого из них произвольным точечным преобразованием). Это соответствие было уже изучено A. Koppisch'ем[1] с точки зрения чисто аналитической.

24. Интересным частным случаем является тот, когда коэффициент a формы Ω_2^1 равен тождественно нулю. Тождества (7) дают в этом случае

$$[\omega^1\Omega_2^0]=k[\omega^1\omega^2\omega_1^2]=0;$$

другими словами, единственные ненулевые составляющие Ω_1^0, Ω_2^0 кривизны многообразия имеют вид:

$$\Omega_1^0=b[\omega^1\omega^2],\quad \Omega_2^0=h[\omega^1\omega^2];$$

в них не входит ω_1^2; они пропорциональны $[dxdy]$. Этот результат можно интерпретировать геометрически, говоря, что соответствие двух проективных плоскостей, отнесенных двум данным элементам **e** и **e**$'$ многообразия, зависит

[1] A. Koppisch. Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Inaugural Dissertation Leipzig. Teubner, 1905). См. также Inaugural Dissertation A. Kaiser'a (Leipzig, Teubner, 1913).

только от начального элемента, конечного элемента и пути, по которому движется *точка* элемента, и не зависит от закона, по которому изменяется *направление* этого элемента. Другими словами, многообразие элементов является по сути *точечным* многообразием проективной связности в смысле первой части этого мемуара (дополнительным обстоятельством является то, что в каждой точке (x, y) взят репер, зависящий от параметра y'). Геодезические линии рассматриваемого многообразия являются геодезическими точечного многообразия проективной связности: в самом деле, это вытекает также непосредственно из найденного выше выражения для коэффициента a; если этот коэффициент равен нулю, уравнение геодезических линий имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A+3B\frac{dy}{dx}+3C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+D\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

характеризующий кривые, которые могут быть приняты за геодезические точечного многообразия проективной связности. Можно добавить еще, что найденная проективная связность является также ***нормальной*** в прежнем смысле слова, так как форма Ω^i, $\Omega_i^i-\Omega_0^0$ и Ω_i^j равны нулю. Другими словами, ***в случае $a=0$ многообразие элементов нормальной проективной связности приводится к точечному многообразию нормальной проективной связности.***

Если одновременно $a=0$, $b=0$, то есть

$$\Omega_2^1=0,\quad \Omega_1^0=0,$$

тождества (7) показывают, что коэффициенты h и k равны нулю, и многообразие приводится к проективной плоскости; другими словами, дифференциальное уравнение геодезических (а также дуальное уравнение) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Формулы (20) и (22), определяющие составляющие проективной связности, позволяют вычислить b, причем в том частном случае, когда $a=0$, мы получаем

$$\begin{aligned}b=&\left(2\frac{\partial^2C}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2B}{\partial y^2}-\frac{\partial^2D}{\partial x^2}+2D\frac{\partial A}{\partial y}+A\frac{\partial D}{\partial y}-\right.\\&\left.-3D\frac{\partial B}{\partial x}-3B\frac{\partial D}{\partial x}-3C\frac{\partial B}{\partial y}+6C\frac{\partial C}{\partial x}\right)y'+\\&+\left(2\frac{\partial^2B}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2C}{\partial x^2}-\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-2A\frac{\partial D}{\partial x}-D\frac{\partial A}{\partial x}+\right.\\&\left.+3A\frac{\partial C}{\partial y}+3C\frac{\partial A}{\partial y}+3B\frac{\partial C}{\partial y}-6B\frac{\partial B}{\partial y}\right)x.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно выводим *два* условия, которым должны удовлетворять коэффициенты A, B, C, D данного дифференциального уравнения для того, чтобы оно было приводимо к виду $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ [1].

25. Вернемся к общему случаю. Мы предоставим читателю проверить существование *интегральных инвариантов*

$$\int\sqrt{ab}\,\omega^2,\quad \iiint\sqrt{ab}\,\omega^1\omega^2\omega_1^2,$$

$$\iint a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{5}{8}}\omega^1\omega^2,\quad \iint a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{1}{8}}\omega^2\omega_1^2.$$

Мы ограничимся также указанием, что в многообразии элементов нормальной проективной связности можно, как и в проективной плоскости, развить теорию дифференциальных инвариантов (проективных) кривых, вывести дифференциальное уравнение 5 го порядка кривых, которые *развертываются* на проективной плоскости по коническим сечениям, то есть которые играют по отношению к данному двупараметрическому семейству кривых ту же роль, какую играют конические сечения по отношению к прямым и т. д. Мы ограничимся также указанием на возможность обобщения построенной выше теории на пространства любого числа измерений.

---

[1] Эти условия выведены A. Tresse на стр. 56 его исследования, цитированного выше. См. также A. Koppisch., loc. cit.. стр. 17.

ПРОСТРАНСТВА КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

В настоящем исследовании изучаются основные свойства пространств, названных мною *пространствами конформной связности*. Это исследование составляет продолжение более обширного мемуара, посвященного теории пространств аффинной связности и теории метрических пространств, но оно может быть прочитано и независимо от последнего. Обе работы являются развитием сообщений, опубликованных мною более года тому назад в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [1]. Понятие пространства аффинной связности не является абсолютно новым, так как оно было рассмотрено, по крайней мере, в частном случае пространств без кручения различными авторами, в особенности Вейлем и Эддингтоном, которые пришли к нему в своих замечательных работах по обобщенной теории относительности [2]. Напротив, понятие пространства конформной связности является существенно новым, так как точка зрения, из которой исходили предшествующие авторы при построении понятия пространства аффинной связности, казалось, исключала всякое обобщение такого рода.

Настоящее исследование содержит в себе две главы. В первой изучаются свойства пространств конформной связности, исследуемые с точки зрения внутренней геометрии. Во второй главе рассматриваются свойства многообразий, вмещенных в заданное пространство конформной связности. Здесь возникают проблемы, аналогичные тем, которые мы встречаем при изучении свойств поверхностей относительно группы конформных преобразований пространства; упомяну, в частности, проблему конформного отображения гиперповерхностей или деформации первого порядка, которой я посвятил несколько лет тому назад специальное

---

[1] Comptes Rendus Paris, 174, стр. 437, 593, 734, 857, 1104; специально о пространствах конформной связности, см. стр. 857—860.

[2] H. Weyl. Raum, Zeit, Matherie; A. S. Eddington, Espace, Temps et Gravitation.

исследование, рассматривая случай пространства более четырех измерений[1].

В настоящем мемуаре я показываю, что в четырехмерном пространстве конформной связности гиперповерхности, допускающие конформное отображение на другие отличные от них гиперповерхности, являются исключительными и зависят от трех произвольных функций двух аргументов; этот результат был мною установлен ранее для случая конформного пространства четырех измерений[2]. Я даю также, как приложение полученных результатов, некоторые сведения о поверхностях, которые *в нормальном* пространстве трех измерений допускают деформацию второго порядка; эти поверхности представляют обобщение изотермических поверхностей обычного пространства.

Я пользуюсь в этом мемуаре обозначениями и методами моих предшествующих мемуаров по дифференциальной геометрии[3].

---

1) E. Cartan. La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geqslant 5$ dimensions. Bull. Soc. Math. de France, 45, 57—120 (1917).

2) E. Cartan. Sur le problème général de la déformation. C. R. Congrés de Strasb urg, 397—406 (1921).

3) С этими методами читатель может познакомиться, обратившись к цитированному выше мемуару (сноска 1), а также к моей книге «Интегральные инварианты». ГТТИ, 1940, особенно к главам VI и VII. Краткое изложение используемых здесь свойств систем Пфаффа в инволюции можно найти в мемуаре Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien. Bull. Soc. Math. de France, 48 (1920), глава III, стр. 136 и след.

Глава I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

I

Конформное пространство, конформные преобразования

1. Рассмотрим пространство n измерений, отнесенное к системе прямоугольных координат. Каждая гиперсфера может быть определена уравнением вида

$$x_0(X_1^2+\ldots+X_n^2)-2x_1X_1-2x_2X_2-\ldots-2x_nX_n-2x_{n+1}=0,$$

содержащим систему $n+2$ однородных координат $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Равенство нулю радиуса гиперсферы выразится соотношением

$$\Phi \equiv x_1^2+\ldots+x_n^2+2x_0x_{n+1}=0.$$

Конформные преобразования аналитически могут быть определены как линейные подстановки переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, оставляющие инвариантной форму Φ; таким образом они преобразуют гиперсферы нулевого радиуса в гиперсферы нулевого радиуса и потому могут быть рассматриваемы как точечные преобразования, так как каждой точке пространства можно отнести гиперсферу нулевого радиуса, имеющую данную точку своим центром. *Конформная геометрия* изучает свойства фигур, инвариантные относительно произвольного конформного преобразования; мы будем также говорить, что она изучает теорию *конформного пространства.*

Совокупность $n+2$ произвольных координат $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$, не равных нулю одновременно, определяет гиперсферу в обобщенном смысле; мы будем ее обозначать сжато одной буквой, напр. X. Символы X и mX, где m произвольный численный коэффициент, определяют, следовательно, две различные гиперсферы, хотя с геометрической точки зрения эти гиперсферы тождественны.

Единичная гиперсфера будет определяться требованием, чтобы ее координаты давали форме Φ значение 1.

Мы будем называть *скалярным произведением* двух гиперсфер X и Y выражение

$$XY=\frac{1}{2}\sum y_i\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\sum x_i\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y_i};$$

скалярное произведение инвариантно относительно конформного преобразования. Единичная гиперсфера характеризуется тем, что ее скалярный квадрат равен единице. Две ортогональные гиперсферы характеризуются равенством нулю их скалярного произведения.

Скалярный квадрат гиперсферы-точки, или просто точки, равен нулю; гиперсфера проходит через точку, если скалярное произведение точки и гиперсферы равно нулю.

2. Можно найти бесконечным множеством способов систему $(n+2)$ сферических координат. Достаточно рассмотреть n единичных гиперсфер, ортогональных между собой $A_1, \dots, A_n$, и две точки A_0 и A_{n+1}, общие этим гиперсферам; неопределенные множители, входящие в координаты этих точек, подчиним условию, чтобы скалярное произведение A_0A_{n+1} равнялось единице. Тогда будем иметь

$$A_1^2=\dots=A_n^2=A_0A_{n+1}=1,$$

а все остальные скалярные произведения, относящиеся к парам различных или не различных гиперсфер, будут равны нулю.

Каждая гиперсфера X может теперь единственным способом быть представлена в виде

$$X=\overline{x}_0A_0+\overline{x}_1A_1+\dots+\overline{x}_{n+1}A_{n+1},$$

причем будем иметь

$$X^2=\overline{x}_0^2+\overline{x}_1^2+\dots+\overline{x}_n^2+2\overline{x}_0\,\overline{x}_{n+1};$$

следовательно, формулы, позволяющие переходить от старых координат x_i к новым $\overline{x_i}$, определяют конформное преобразование. Первоначальная система координат может быть рассматриваема как частный случай системы $n+2$ сферических координат, координатными гиперсферами которой являются: A_0 — начало координат, $A_1, \dots A_n$ — n координатных гиперплоскостей, A_{n+1} — бесконечно удаленная гиперплоскость (рассматриваемая как гиперсфера радиуса нуль). Совокупность $n+2$ гиперсфер $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$ будем называть ради краткости *репером*.

3. Рассмотрим подвижной репер, зависящий от одного или нескольких параметров. Очевидно, что мы будем иметь следующие формулы

$$(1)\qquad \begin{cases} dA_0=\omega_0^0A_0+\omega_0^1A_1+\dots+\omega_0^{n+1}A_{n+1},\\ dA_1=\omega_1^0A_0+\omega_1^1A_1+\dots+\omega_1^{n+1}A_{n+1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ dA_{n+1}=\omega_{n+1}^0A_0+\omega_{n+1}^1A_1+\dots+\omega_{n+1}^{n+1}A_{n+1}, \end{cases}$$

где ω_i^j линейны относительно дифференциалов параметров.

Эти $(n+2)^2$ выражений ω_i^j не являются произвольными, так как должны иметь место соотношения

$$A_idA_j+A_jdA_i=0,$$

при любых индексах i, j различных или совпадающих; это вытекает из постоянства скалярных произведений A_iA_j. Отсюда легко выводятся следующие фундаментальные соотношения

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega_0^{n+1}=\omega_{n+1}^0=0, & \omega_{n+1}^{n+1}=-\omega_0^0,\\ \omega_0^i=-\omega_i^{n+1}, & \omega_{n+1}^i=-\omega_i^0,\quad (i=1,2,\dots,n)\\ \omega_i^i=0, & \omega_i^j+\omega_j^i=0\quad (i,j,=1,2,\dots,n). \end{cases}$$

Следовательно, как независимые среди выражений ω_i^j остаются

$$\omega_0^0=-\omega_{n+1}^{n+1},\quad \omega_0^i=-\omega_i^{n+1},\quad \omega_i^0=-\omega_{n+1}^i,\quad \omega_i^j=-\omega_j^i;$$

число их равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Это максимальное число может быть достигнуто, так как наиболее общий репер зависит как раз от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ параметров.

4. Очевидно, что переход от некоторого данного репера к реперу бесконечно близкому может быть получен бесконечно малым конформным преобразованием, и величины ω_i^j могут быть рассматриваемы как составляющие этого конформного преобразования. Представляется интересным изучить геометрические свойства $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ конформных преобразований, соответствующих $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ различным составляющим ω_i^j. Эти преобразования подразделяются на 3 различных типа.

Рассмотрим сначала преобразование, у которого единственной составляющей, отличной от нуля, является $\omega_0^0 = -\omega_{n+1}^{n+1}$. Оно дает

$$dA_0 = eA_0, \quad dA_{n+1} = -eA_{n+1}, \quad dA_i = 0;$$

следовательно, гиперсфера $\sum x_i A_i$ преобразуется в гиперсферу

$$\sum (x_i + dx_i) A_i$$

с

$$dx_0 = ex_0, \quad dx_{n+1} = -ex_{n+1}, \quad dx_i = 0.$$

Если точку A_{n+1} отнести в бесконечность, то из полученных равенств следует, что точка с декартовыми координатами $\frac{x_i}{x_0}$ преобразуется в точку с координатами $(1-e)\frac{x_i}{x_0}$; мы имеем *гомотетию* (лучистое расширение) с центром A_0. В общем случае мы будем иметь *конформную гомотетию* с центрами A_0 и A_{n+1}; все окружности, проходящие через оба центра гомотетии, остаются инвариантными, причем произвольная точка M какой-либо из этих окружностей преобразуется в бесконечно близкую точку M' той же окружности, такую, что ангармоническое отношение четырех (геометрических) точек M, M', A_0, A_{n+1} имеет данное фиксированное значение.

Второй тип бесконечно-малых конформных преобразований мы получим, если придадим одной из составляющих ω_0^i или ω_i^0 значение отличное от нуля, а все остальные составляющие положим равными нулю. Пусть, например,

$$\omega_0^1 = -\omega_1^{n+1} = e.$$

Получим

$$dA_0 = eA_1, \quad dA_{n+1} = 0, \quad dA_1 = -eA_{n+1}, \quad dA_2 = \ldots = dA_n = 0$$

и, следовательно,

$$dx_0 = 0, \quad dx_1 = ex_0, \quad dx_2 = \ldots = dx_n = 0, \quad dx_{n+1} = ex_1.$$

Если точка A_{n+1} отнесена в бесконечность, то точка с декартовыми координатами $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$ преобразуется в точку с координатами $\frac{x_1}{x_0} + e, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$; мы имеем *трансляцию.* В общем случае мы будем говорить, что преобразование представляет собой конформную *трансляцию* (une élation) с центром A_{n+1}. Здесь существует семейство окружностей, проходящих через A_{n+1} и касательных между собой в этой точке таких, что каждая из окружностей этого семейства остается инвариантной относительно преобразования, причем ее точки преобразуются *параболическим* образом; гиперсферы, ортогональные к этим окружностям и проходящие через A_{n+1} (здесь это гиперсферы $A_1 + \rho A_{n+1}$), преобразуются одна в другую.

Мы получим конформную трансляцию с центром A_0, если дадим $\omega_1^0 = -\omega_{n+1}^1$ значение e, отличное от нуля.

Наконец третий тип бесконечно-малых конформных преобразований получается, если дать, например, $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ значение e, отличное от нуля. В этом случае имеем

$$dA_0 = 0, \quad dA_{n+1} = 0, \quad dA_1 = eA_2, \quad dA_2 = -eA_1, \\ dA_3 = \ldots = dA_n = 0$$

и, следовательно,

$$dx_0 = dx_{n+1} = 0, \quad dx_1 = -ex_2, \quad dx_2 = ex_1, \quad dx_3 = \ldots = dx_n = 0.$$

Все точки (включая и A_0 и A_{n+1}), общие гиперсферам A_1 и A_2, остаются фиксированными, гиперсферы пучка $\lambda A_1 + \mu A_2$ переходят одна в другую таким образом, что каждая гиперсфера образует с преобразованной из нее гиперсферой фиксированный (бесконечно-малый) угол. Мы имеем конформное *вращение*, осью которого служит гиперокружность $[A_1A_2]$ пересечения A_1 и A_2. При этом вращении каждая точка M описывает дугу окружности, нормальной к гиперсфере $\lambda A_1 + \mu A_2$, проходящей через эту точку.

Если $n = 3$ и если окружность $[A_1A_2]$ приводится к прямой, получаем обычное вращение около этой прямой как около оси.

5. Резюмируя, отметим, что если взять две точки A и B конформного пространства, то каждое бесконечно-малое конформное преобразование может быть разложено, и притом единственным образом,

1) на *конформную трансляцию* с центром B;
2) на *конформную трансляцию* с центром A;
3) на *конформную гомотетию* с центрами A и B;
4) на *конформное вращение* около некоторой гиперокружности, проходящей через A и B.

Если точка B отнесена в бесконечность, то конформная трансляция с центром B становится обычной трансляцией, а конформная гомотетия с центрами A и B становится обычной гомотетией с центром A. Конформная трансляция с центром A, конформные гомотетия и вращение оставляют точку A инвариантной. Более того, конформная трансляция с центром A и конформная гомотетия преобразуют окружность, проходящую через A, в окружность, касательную к ней, иначе говоря, оставляют инвариантными все направления, проходящие через A. Наконец, конформная гомотетия является единственным преобразованием, оставляющим инвариантными все окружности, проходящие через A и B.

Отметим, что, когда задана точка A, разложение бесконечно-малого конформного преобразования на два других, из которых одно оставляет точку A фиксированной, не может быть выполнено *инвариантным* образом, как это имеет место для перемещений в евклидовом пространстве; в евклидовом пространстве разложение на *трансляцию* и *вращение* около А имеет абсолютное значение: в конформном пространстве дело обстоит иначе, так как обычная трансляция заменяется конформной трансляцией, центр B которой произволен.

Уравнения структуры конформного пространства

6. Уравнения структуры могут быть получены, если выразить, что интегралы

$$\int dA_0, \int dA_1, \dots, \int dA_{n+1},$$

распространенные на произвольный замкнутый контур, равны нулю.

Таким образом получаем соотношение

$$(\omega_i^j)' = [\omega_i^0 \omega_0^j] + [\omega_i^1 \omega_1^j] + \dots + [\omega_i^{n+1} \omega_{n+1}^j],$$

где $(\omega_i^j)'$ обозначает *внешнюю производную* (билинейный ковариант) от ω_i^j.

Сохраняя в этих соотношениях лишь независимые формы ω_0^i, ω_i^0, ω_0^0, ω_i^j, находим искомые уравнения структуры

$$(3)\quad \begin{cases} (\omega_0^0)' = [\omega_0^1 \omega_1^0] + \dots + [\omega_0^n \omega_n^0], \\ (\omega_0^i)' = [\omega_0^0 \omega_0^i] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_0^k \omega_k^i], \\ (\omega_i^j)' = [\omega_0^i \omega_j^0] - [\omega_0^j \omega_i^0] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \omega_k^j], \\ (\omega_i^0)' = [\omega_i^0 \omega_0^0] + \sum\limits_{k=1}^{n} [\omega_i^k \omega_k^0]. \end{cases}$$

Пространства конформной связности

7. Рассмотрим некоторое n-мерное многообразие и свяжем с каждой точкой P этого многообразия n мерное конформное пространство, причем за репер этого пространства выберем систему $n+2$ гиперсфер $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$, из которых первая совпадает (по своему положению) с точкой P.

Полученное многообразие мы будем называть *пространством конформной связности*, если мы зададим некоторый закон, позволяющий установить конформным образом соответствие между конформным пространством, связанным с точкой P, и конформным пространством, связанным с точкой P', бесконечно близкой к P.

Назовем $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n+1}$ репер, связанный с точкой P'; это означает, что гиперсферы $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n+1}$ конформного пространства, связанного с точкой P', отождествляются с гиперсферами

$$\begin{gathered} A_0 + \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \dots + \omega_0^n A_n, \\ A_1 + \omega_1^0 A_0 + \omega_1^2 A_2 + \dots + \omega_1^n A_n - \omega'_0 A_{n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n+1} - \omega_1^0 A_1 - \omega_2^0 A_2 - \dots - \omega_n^0 A_n - \omega_0^0 A_{n+1} \end{gathered}$$

конформного пространства, связанного с точкой. Для краткости мы будем писать

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \sum \omega_0^i A_i, \\ dA_i &= \omega_i^0 A_0 - \omega_0^i A_{n+1} + \sum \omega_i^k A_k, \\ dA_{n+1} &= -\omega_0^0 A_{n+1} - \sum \omega_i^0 A_i, \end{aligned}$$

и будем говорить, что репер, связанный с точкой P', получается из репера, связанного с точкой P, бесконечно-малым конформным преобразованием, составляющие которого ω_0^0, ω_0^i, ω_i^0, ω_i^j являются выражениями, линейными относительно дифференциалов:

1) параметров $u_1, u_2, \dots, u_n$, определяющих положение точки P в данном многообразии,

2) параметров v_l, от которых зависит репер точки P. Если этот репер выбран наиболее общим образом, он зависит от $\frac{n^2+n+2}{2}$ параметров. Следует отметить, что n составляющих $\omega_0^1, \omega_0^2, \dots, \omega_0^n$ зависят лишь от дифференциалов параметров u, так как, если параметры u фиксировать, то точка P остается неизменной, а следовательно, точка A_0 также не меняет *своего положения*, т. е. dA_0 может зависеть лишь от A_0. В дальнейшем мы будем писать A вместо A_0 и ω^i вместо ω_0^i.

Мы будем говорить, что выражения ω_0^0, ω^i, ω_i^0, ω_i^j являются *составляющими конформной связности* пространства; конечно, они зависят от репера, связанного с каждой точкой многообразия; если изменить этот репер, то они преобразуются по формулам, вывод которых не представляет никаких затруднений.

Заметим, что скалярный квадрат $(dA)^2$, равный

$$(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2$$

дает с точностью до множителя квадрат расстояния двух точек P и P' в смысле, определяемом конформной связностью пространства.

Уравнения структуры пространств конформной связности

8. Рассмотрим в пространстве бесконечно-малый замкнутый контур; интегралы $\int dA_i$, распространенные на этот контур, не имеют сами по себе никакого смысла, так как не существует абсолютного конформного пространства, по отношению к которому можно вводить реперы конформных пространств, связанных с различными точками многообразия. Но если реперы конформных пространств, связанных с точками *бесконечно-малого контура*, вводить по отношению к конформному пространству фиксированной точки Q, бесконечно близкой к контуру, то интегралы получат смысл и мы получим:

$$\int dA_i=\iint\sum A_k\left\{(\omega_i^k)'-\sum\left[\omega_i^h\omega_h^k\right]\right\}=\iint\sum_{k=0}^{n+1}\Omega_i^k A_k.$$

Таким образом, мы приходим к системе $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ дифференциальных форм второго порядка Ω_0^0, Ω^i, Ω_i^0, Ω_i^j, определяемых формулами

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}
(\omega_0^0)'&=\sum_{k=1}^{n}[\omega^k\omega_k^0]+\Omega_0^0,\\
(\omega^i)'&=[\omega_0^0\omega^i]+\sum_{k=1}^{n}[\omega^k\omega_k^i]+\Omega^i,\\
(\omega_i^j)'&=[\omega^i\omega_j^0]-[\omega^j\omega_i^0]+\sum_{k=1}^{n}[\omega_i^k\omega_k^j]+\Omega_i^j,\\
(\omega_i^0)'&=[\omega_i^0\omega_0^0]+\sum_{k=1}^{n}[\omega_i^k\omega_k^0]+\Omega_i^0.
\end{aligned}\right.$$

Можно встать на более общую точку зрения. Свяжем с каждой точкой многообразия по произвольному закону гиперсферу

$$X=x^0A_0+x^1A_1+\ldots+x^{n+1}A_{n+1}$$

и вычислим интеграл $\int dX$, распространенный на бесконечно-малый замкнутый контур. Имеем

$$dX=\sum dx^iA_i+\sum x^i dA_i,$$

откуда, взяв внешнюю производную и замечая, что dA_i не является полным дифференциалом, находим

$$(dX)'=-\sum[dx^idA_i]+\sum[dx^idA_i]+\sum x^i(dA_i)'=\sum x^i\Omega_i^k A_k.$$

Таким образом,

$$\int dX=\iint\sum x^i\Omega_i^k A_k.$$

Дифференциальный элемент интеграла, находящегося в правой части, зависит при заданном контуре лишь от составляющих x^i гиперсферы X в точке контура.

Иначе говоря, каждому бесконечно-малому замкнутому контуру, выходящему из точки P данного многообразия и возвращающемуся в нее, соответствует бесконечно-малое конформное перемещение, преобразующее каждую гиперсферу X конформного пространства, связанного с точкой P, в гиперсферу $X+\Delta X$ бесконечно близкую; это перемещение аналитически определяется формулами

$$(5)\qquad \Delta x^k=\sum_{i=0}^{n+1}\Omega_i^k x^i\qquad (k=0,\ 1,\ldots,\ n+1).$$

Составляющие Ω_i^k этого бесконечно-малого перемещения по самому их происхождению являются элементами двойных интегралов, которые вводят лишь дифференциалы du_i параметров, определяющих положение точки в заданном многообразии; они не вводят дифференциалов других параметров, от которых может зависеть репер, связанный с каждой точкой многообразия. Иными словами, мы имеем выражения вида

$$\Omega_i^j=\sum_{k,\,l}^{1\ldots n}A_{ikl}^j[\omega^k\omega^l],$$

причем A_{ikl}^j могут зависеть от всех параметров u_i и v_i.

Бесконечно-малое конформное перемещение, соответствующее любому бесконечно-малому замкнутому контуру, проведенному в заданном пространстве, определяет *кривизну* пространства, и уравнения (4) являются уравнениями структуры данного многообразия конформной связности.

9. Эти вопросы можно изложить более наглядным образом.

Рассмотрим в пространстве некоторый путь, соединяющий две точки P и Q. Можно шаг за шагом относить конформное пространство, связанное с точкой M пути, к конформному пространству, связанному с исходной точкой P. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что, задав в каждой точке M репер, мы при перемещении вдоль рассматриваемого пути можем составляющие ω_i^j представить в виде $p_i^j dt$; здесь t обозначает параметр, определяющий положение точки M на пути, а p_i^j — определенную функцию от t. Тогда при перемещении вдоль пути получим

$$
(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{dt} = p_0^0 A_0 + \sum p^i A_i, \\[2ex] \dfrac{dA_i}{dt} = -p_i^0 A_0 - p^i A_{n+1} + \sum p_i^k A_k, \\[2ex] \dfrac{dA_{n+1}}{dt} = -p_0^0 A_{n+1} - \sum p_i^0 A_i. \end{cases}
$$

Эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные относительно неизвестных $A_0, \ldots, A_{n+1}$. Предполагая, что эти уравнения проинтегрированы, мы заменим в общем интеграле этой системы начальные значения неизвестных функций гиперсферами, определяющими репер, выбранный в точке P, и таким образом репер, связанный с произвольной точкой M, будет отнесен к реперу, связанному с точкой P. Иначе говоря, мы сможем отнести конформное пространство, связанное с M, к конформному пространству, связанному с P.

Можно также рассуждать следующим образом.

Конформная связность позволяет отождествлять гиперсферы конформного пространства, связанного с некоторой точкой многообразия, с гиперсферами пространства, связанного с бесконечно близкой точкой. Это отождествление получается из символического тождества

$$d\left(\sum x^i A_i\right) = 0,$$

или

$$
(7) \qquad dx^i + \sum_{k=0}^{n+1} x^k \omega_k^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1).
$$

Если в этих соотношениях заменить ω_k^i на $p_k^i dt$, мы получим систему линейных дифференциальных уравнений, позволяющую после интегрирования определить, какая из гиперсфер конформного пространства, связанного с точкой M, должна быть отождествляема с заданной гиперсферой конформного пространства, связанного с P. Эти формулы будут иметь вид

$$
(7') \qquad x^i = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^i (x^k)_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1),
$$

где a_k^i — определенные функции от t, $(x^k)_0$ — координаты некоторой гиперсферы конформного пространства, связанного с точкой P, x^i — координаты соответствующей гиперсферы в конформном пространстве, связанном с точкой M.

Линейная подстановка, определенная приведенными выше формулами, не изменяет, очевидно, квадратичной формы

$$\Phi = 2x^0 x^{n+1} + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2;$$

она имеет такое же аналитическое выражение, как и подстановка, определяющая преобразование репера конформного пространства.

Установив это, рассмотрим замкнутый контур, выходящий из точки P и возвращающийся в нее; пусть параметр t, определяющий положение точки на контуре, изменяется от значения 0 до значения l при замыкании контура.

Если относить шаг за шагом конформное пространство, связанное с точкой P, к конформному пространству, связанному с переменной точкой M контура, мы установим соответствие, определяемое формулами (7'), между гиперсферами, связанными с P и с M.

Когда точка M вернется в P *это соответствие не будет, вообще говоря, тождеством*, но оно определит некоторое бесконечно-малое конформное перемещение, относящееся к гиперсферам, связанным с P, и конечно, зависящее от рассматриваемого замкнутого контура.

В частном случае, когда замкнутый контур бесконечно-малый, можно показать, что перемещение определяется формулами

$$
(8) \qquad \Delta x^i + \sum x^k \Omega_k^i = 0 \text{ [1]}.
$$

Можно также сказать, что, если связать с каждой точкой многообразия репер, то переход от репера, связанного

[1] Эти формулы не противоречат формулам (5); так как рассматриваемые проблемы не одинаковы, хотя, конечно, между ними имеется тесная связь.

с точкой M контура, к реперу, связанному с бесконечно-близкой точкой M', осуществляется бесконечно-малым конформным преобразованием. Исходя из определенного начального репера *в конформном пространстве* E и выполнив последовательные бесконечно-малые конформные преобразования, относящиеся к последовательным бесконечно-малым участкам MM' контура, мы уже не получим в конформном пространстве E прежний начальный репер, когда M вернется снова в P.

Точка конформного пространства E, имеющая по отношению к начальному реперу координаты $(x^0, x^1, \dots, x^{n+1})$, по отношению к конечному реперу будет иметь координаты

$$x^i + \Delta x^i = x^i - \sum x^k \Omega^i_k \qquad (i = 0, 1, \dots, n+1).$$

Иными словами, *конечный репер может быть получен из начального бесконечно-малым конформным преобразованием с составляющими* Ω^j_i.

Теорема сохранения кривизны

10. Внешнее дифференцирование формул (4) дает соотношения

$$(9)\quad \begin{cases} (\Omega^0_0)' + \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^0_k \Omega^k] - \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^k \Omega^0_k] = 0, \\ (\Omega^i)' + [\omega^i \Omega^0_0] - [\omega^0_0 \Omega^i] + \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^i_k \Omega^k] - \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^k \Omega^i_k] = 0, \\ (\Omega^j_i)' + [\omega^0_j \Omega^i] - [\omega^0_i \Omega^j] - [\omega^i \Omega^0_j] + [\omega^j \Omega^0_i] + \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^j_k \Omega^k_i - \omega^k_i \Omega^j_k] = 0, \\ (\Omega^0_i)' + [\omega^0_0 \Omega^0_i] - [\omega^0_i \Omega^0_0] + \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^0_k \Omega^k_i] - \sum\limits_{k=1}^{n}[\omega^k_i \Omega^0_k] = 0, \end{cases}$$

которые могут быть интерпретированы геометрически и приводят к теореме сохранения кривизны.

Классификация пространств конформной связности

11. Поскольку кривизна пространств конформной связности выражается для каждого бесконечно-малого контура, выходящего из некоторой точки и возвращающегося в нее, бесконечно-малым конформным перемещением, мы теперь

можем выделить некоторые важные категории многообразий конформной связности.

I. Предположим сначала, что конформное перемещение, соответствующее каждому бесконечно-малому замкнутому контуру, равно нулю. В этом случае для двух произвольных точек P и Q многообразия результат отнесения конформного пространства, связанного с Q, к конформному пространству, связанному с P, не зависит от пути перехода из P в Q. В частности, за координаты u_i переменной точки Q можно принять $n+2$ сферические координаты той гиперсферы — точки конформного пространства, связанного с P, которая соответствует гиперсфере — точке Q, вмещенной в конформное пространство, связанное с Q. Таким образом, многообразие является, в сущности, одним и тем же конформным пространством, но отнесенным к различным реперам, соответствующим рассматриваемым точкам многообразия.

II. Более общую категорию образуют многообразия, в которых бесконечно-малое перемещение, соответствующее произвольному бесконечно-малому замкнутому контуру, выходящему из точки P, *оставляет инвариантной точку* P *и все направления, проходящие через* P. Иначе говоря, это конформное перемещение приводится к конформной трансляции с центром A_0 и гомотетии с центрами A_0 и A_{n+1}. Таким образом,

$$\Omega^i = 0. \quad \Omega^j_i = 0.$$

Формулы (9) дают тогда соотношения

$$(10)\quad \begin{aligned} &[\omega^i \Omega^0_0] = 0, && (i = 1, 2, \dots, n) \\ &[\omega^i \Omega^0_j] - [\omega^j \Omega^0_i] = 0 && (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Предположим $n \geqslant 3$. n первых соотношений показывают, что *форма* Ω^0_0 *тождественно равна нулю*; то есть перемещение, соответствующее бесконечно-малому замкнутому контуру, приводится к трансляции с центром A_0 (или P). Формулы (9) позволяют тогда написать равенство

$$\sum_{i=1}^{n}[\omega^i \Omega^0_i] = 0,$$

из последних соотношений (10) выводим

$$[\omega^j \omega^i \Omega^0_i] = 0,$$

а это показывает, что форма $[\omega^i \Omega^0_i]$ содержит множителем каждую из форм $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$.

Таким образом, *при $n>3$ форма $[\omega^i\Omega_i^0]$ тождественно равна нулю*; иначе говоря,

$$\Omega_i^0=[\omega^i\tilde{\omega}_i],$$

где $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_n$ соответственно выбранные линейные формы.

Подставляя эти выражения в последние соотношения (10), получаем

$$[\omega^i\omega^j(\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}_j)]=0,$$

отсюда выводим, что $\tilde{\omega}_i$ зависит лишь от $\omega^i, \omega^j, \omega^k$, где j и k произвольные индексы из $n-1$ индексов, отличных от i; поскольку мы предполагаем $n\geqslant 4$, это возможно лишь, если $\tilde{\omega}_i$ пропорционально ω^i *; но тогда Ω_i^0 тождественно равно нулю.

Следовательно, *если $n\geqslant 4$, то за исключением собственно конформного пространства не существует многообразия конформной связности, в котором конформное перемещение, соответствующее произвольному замкнутому бесконечно-малому контуру с началом в P, оставляет инвариантными точку P и все направления через нее проходящие.*

Наоборот, если $n=3$, такие многообразия существуют; легко показать, что в развернутых выражениях для Ω_i^0

$$\Omega_1^0=a_{123}[\omega^2\omega^3]+a_{131}[\omega^3\omega^1]+a_{112}[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_2^0=a_{223}[\omega^2\omega^3]+a_{231}[\omega^3\omega^1]+a_{212}[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_3^0=a_{323}[\omega^2\omega^3]+a_{331}[\omega^3\omega^1]+a_{312}[\omega^1\omega^2]$$

* Из равенства нулю внешнего произведения следует

$$\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}_j=\alpha\omega^i+\beta\omega^j,$$
$$\tilde{\omega}_j+\tilde{\omega}_k=\beta'\omega^j+\gamma'\omega^k,$$
$$\tilde{\omega}_k+\tilde{\omega}_i=\alpha''\omega^i+\gamma''\omega^k.$$

Сложив первое и последнее равенство и вычитая второе, находим

$$\tilde{\omega}_i=\lambda\omega^i+\mu\omega^j+\nu\omega^k,$$

где положено

$$\lambda=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha''),$$
$$\mu=\frac{1}{2}(\beta-\beta'),$$
$$\nu=\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma').$$

Форма $\tilde{\omega}_i$ может быть разложена единственным образом по n формам ω^i. Но полученное из нее выражение допускает произвольный выбор 2 индексов j и k из $n-1\geqslant 3$ индексов, отличных от i. Отсюда следует $\mu=\nu=0$.

(Прим. перев.)

таблица коэффициентов в правых частях симметрична и сумма элементов главной диагонали равна нулю.

III. Еще более общую категорию многообразий, чем предшествующие, мы получим, предполагая, что конформное перемещение, соответствующее замкнутому бесконечно-малому контуру, выходящему из точки P, оставляет инвариантной точку P. Такое многообразие будем называть многообразием ***без кручения.***

Это многообразие характеризуется соотношениями

$$\Omega^1=0,\quad \Omega^2=0,\quad \ldots,\quad \Omega^n=0.$$

Таким образом, между Ω_0^0 и Ω_i^j имеем соотношения

$$[\omega^i\Omega_0^0]-\sum_{k=1}^{n}[\omega^k\Omega_k^i]=0\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Мы получим частный случай, положив еще $\Omega_0^0=0$. Это предположение имеет следующее значение: если выполнить инверсию, отнеся точку P в бесконечность, то конформное перемещение, соответствующее замкнутому бесконечно-малому контуру, выходящему из P, приводится к евклидову перемещению (сохраняющему длины). В этом случае имеем соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}[\omega^k\Omega_k^i]=0,\quad (i=1,2,\ldots,n)$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\omega^i\Omega_i^0]=0.$$

Тензор кривизны

12. Коэффициенты форм Ω^i, Ω_0^0, Ω_i^0, Ω_i^j образуют *тензор*, в том смысле, что при преобразовании репера в конформном пространстве, связанном с точкой многообразия, они подвергаются линейному преобразованию (образующему группу).

Коэффициенты форм Ω^i образуют тоже тензор, так как приравнивание нулю всех коэффициентов дает внутреннее (intrinsèque) свойство многообразия, не зависящее от частного выбора репера. Так же обстоит дело и

с коэффициентами $n+1$ форм Ω^i, Ω_0^0;

с коэффициентами $\frac{n(n+1)}{2}$ форм Ω^i, Ω_i^j;

с коэффициентами $\frac{n^2+n+2}{2}$ форм Ω^i, Ω_0^0, Ω_i^j.

Мы увидим в дальнейшем, что существуют еще другие замечательные тензоры, образованные составляющими тензора кривизны. Здесь обнаруживается фундаментальное отличие от пространств аффинной связности, а именно, тензор кривизны не может быть разложен на *неприводимые* тензоры.

Изоморфизм пространств конформной связности

13. Два n-мерных пространства конформной связности называются ***изоморфными***, если между этими пространствами можно установить такое точечное соответствие, в котором для произвольных реперов, связанных с каждой точкой первого пространства можно выбрать реперы, связанные с точками второго пространства таким образом, что все составляющие конформной связности будут соответственно равны в обоих пространствах. Очевидно, что внутренние геометрические свойства двух изоморфных пространств одинаковы; по существу, изоморфные пространства образуют одно и тоже пространство конформной связности.

Можно рассматривать и менее полный изоморфизм, который можно было бы называть ***мериэдрическим изоморфизмом***. Вообразим два n-мерных многообразия конформной связности, между которыми установлено некоторое точечное соответствие; предположим также, что между точками конформных пространств, связанных с соответствующими точками A и B этих многообразий, установлено некоторое (конформное) соответствие, то есть каждому реперу, связанному с A, соответствует некоторый репер, связанный с B. Вообразим, что (R) и (S) соответствующие реперы, связанные с соответствующими точками A и B; чтобы перейти к реперам, связанным с соответствующими точками A' и B', бесконечно близкими к A и B, необходимо реперы (R) и (S) подвергнуть бесконечно-малым конформным перемещениям. В случае голоэдрического изоморфизма эти перемещения тождественны; в случае мериэдрического изоморфизма они не тождественны; причем бесконечно-малое *относительное* перемещение одного из реперов по отношению к другому должно принадлежать к некоторому заданному линейному пучку бесконечно-малых конформных преобразований; но чтобы это условие определяло эффективное геометрическое свойство, необходима инвариантность этого пучка относительно конформных перемещений, оставляющих неизменной точку A. Например, этот пучок может состоять как раз из перемещений, оставляющих точку A неизменной, или же он может быть образован теми из этих перемещений, которые

оставляют инвариантными все направления, проходящие через A и т. д.

Каждому типу линейного пучка, инвариантному относительно подгруппы γ конформных преобразований, оставляющих неизменной точку A, соответствует определенный род мериэдрического изоморфизма. Обозначим ω_i^j и $\overline{\omega}_i^j$ составляющие конформной связности двух многообразий, а символом δ — операцию дифференцирования, применяемую только к произвольным параметрам, определяющим выбор реперов в заданных соответствующих точках. Записав

$$\omega_i^j(\delta) = e_i^j,$$

видим, что

$$e^i = \overline{e}^i = 0.$$

При перемещении в двух многообразиях по соответствующим путям мы получим по предположению определенное число соотношений вида

$$\sum a_i\overline{\omega}^i + a_0^0\overline{\omega}_0^0 + \sum a_i^j\overline{\omega}_i^j + \sum a_0^i\overline{\omega}_0^i = \sum a_i\omega^i + a_0^0\omega_0^0 +$$

$$+ \sum a_i^j\omega_i^j + \sum a_0^i\omega_0^i, \tag{11}$$

с постоянными коэффициентами, и эти соотношения должны оставаться инвариантными относительно любого изменения реперов, лишь бы это изменение было одинаковым в обоих многообразиях. В силу формул (4) имеем:

$$\delta\omega^i = e_0^0\omega^i - \sum_{k=1}^{n} e_k^i\omega^k,$$

$$\delta\omega_0^0 = -\sum_{k=1}^{n} e_i^0\omega^i + de_0^0,$$

$$\delta\omega_i^j = e_i^0\omega^j - e_j^0\omega^i + \sum_{k=1}^{n}[e_i^k\omega_k^j - e_k^j\omega_i^k] + de_i^i,$$

$$\delta\omega_i^0 = e_i^0\omega_0^0 - e_0^0\omega_i^0 + \sum_{k=1}^{n}[e_i^k\omega_k^0 - e_k^0\omega_i^k] + de_i^0.$$

Такие же формулы получим, заменяя ω_i^j на $\overline{\omega}_i^j$. Отсюда выводим

$$\delta(\overline{\omega}^i - \omega^i) = e_0^0(\overline{\omega}^i - \omega^i) - \sum_{k=1}^{n} e_k^i(\overline{\omega}^k - \omega^k),$$

$$\delta(\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0) = -\sum_{k=1}^{n} e_j^0(\overline{\omega}^i - \omega^i),$$

$$\begin{aligned}\delta(\overline{\omega}_i^j - \omega_i^j) &= e_i^0(\overline{\omega}^j - \omega^j) - e_j^0(\overline{\omega}^i - \omega^i) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}[e_i^k(\overline{\omega}_k^j - \omega_k^j) - e_k^j(\overline{\omega}_i^k - \omega_i)],\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\delta(\overline{\omega}_i^0 - \omega_i^0) &= e_i^0(\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0) - e_0^0(\overline{\omega}_i^0 - \omega_i^0) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n}[e_i^k(\overline{\omega}_k^0 - \omega_k^0) - e_k^0(\overline{\omega}_i^k - \omega_i^k)].\end{aligned}$$

Остается выразить, что соотношения (11) будут инвариантны, если величинам $\overline{\omega}_i^j - \omega_i^j$ придать вариации, определенные формулами (12), при каких угодно e_0^0, e_i^j, e_j^0.

Несложный счет показывает, что при $n \geqslant 3$ соотношения (11) могут иметь 5 возможных видов:

1) $\overline{\omega}^i = \omega^i \qquad (i = 1, \ldots, n);$
2) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 \qquad (i = 1, \ldots, n);$
3) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n);$
4) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n);$
5) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \overline{\omega}_i^0 = \omega_i^0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$

Пятый случай соответствует голоэдрическому изоморфизму; первый случай приводится ко второму; иначе говоря, если при заданном точечном соответствии двух пространств можно установить такое соответствие реперов, связанных с соответствующими точками многообразий, в котором $\overline{\omega}^i = \omega^i$, то возможно также осуществить и такое соответствие реперов, в котором кроме того, $\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$. В самом деле, предположим, что в первом пространстве реперы выбраны некоторым определенным образом, а реперы во втором многообразии отыскиваются так, чтобы

$$\overline{\omega}^i = \omega^i;$$

тогда получим соотношение вида

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 + \rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2 + \ldots + \rho_n\omega^n.$$

Обозначим через $\overline{A}, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{n+1}$ гиперсферы, образующие репер, связанный с точкой $\overline{A}$ второго многообразия; выберем новый репер

$$\overline{A}' = \overline{A}, \quad \overline{A}_i' = \overline{A}_i + \rho_i\overline{A},$$

$$\overline{A}_{n+1}' = \overline{A}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\rho_i A_i - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2)\overline{A};$$

получим

$$d\overline{A}' = d\overline{A} = \overline{\omega}_0^0\overline{A} + \sum\overline{\omega}^i\overline{A}_i = \left(\overline{\omega}_0^0 - \sum\rho_i\overline{\omega}^i\right)\overline{A}' + \sum\overline{\omega}^i\overline{A}_i'.$$

Нетрудно видеть, что при этом новом выборе репера соотношения

$$\overline{\omega}^i = \omega^i$$

тоже удовлетворяются, но при этом добавляется новое соотношение

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0.$$

14. Таким образом, *существует три рода мериэдрического изоморфизма двух пространств конформной связности.* Они характеризуются соотношениями

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0,$$

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j,$$

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0.$$

Если точки A и $\overline{A}$ двух пространств, между которыми установлено соответствие, отнесены инверсией в бесконечность, то относительное перемещение реперов (R) и (S) является:

для мериэдрического изоморфизма первого рода — обычным евклидовым перемещением;

для второго рода — произвольной гомотетией (или трансляцией);

для третьего рода — трансляцией.

Мы видим, что во всех трех случаях линейный пучок бесконечно-малых конформных перемещений определяет группу [1]. Условие мериэдрического изоморфизма первого рода может быть выражено в следующей простой геометрической форме:

Между двумя пространствами тогда и только тогда существует мериэдрический изоморфизм первого рода, если между ними можно установить точечное соответ-

---

[1] Это заключение вообще говоря неверно для пространств метрической или евклидовой связности.

ствие с сохранением углов, т. е. соответствие, не нарушающее уравнение

$$ds^2 = 0.$$

Это условие, очевидно, необходимо, так как ds^2 пространства имеет вид

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2;$$

оно также и достаточно, так как при произвольном выборе репера, связанного со вторым пространством, имеем:

$$(\overline{\omega}^1)^2 + (\overline{\omega}^2)^2 + \ldots + (\overline{\omega}^n)^2 = \rho\,[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2],$$

и, очевидно, можно изменить этот репер таким образом, чтобы удовлетворить соотношениям

$$\overline{\omega}^i = \omega^i.$$

Заметим, наконец, что при мериэдрическом изоморфизме третьего рода существует точечное соответствие, дающее не только конформное отображение, но и сохраняющее кручение (для любых двух соответствующих поверхностных элементов). Это вытекает из того, что формулы

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$$

после внешнего дифференцирования дают

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i.$$

15. Для двух пространств конформной связности, не обладающих кручением, все три рода мериэдрического изоморфизма сводятся к одному; действительно, из соотношений

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$$

вытекает

$$\sum_{k=1}^n [\omega^k (\overline{\omega}_k^i - \omega_k^i)] = 0,$$

откуда

$$\overline{\omega}_k^j = \omega_k^j;$$

точно так же из соотношений

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j$$

вытекает

$$[(\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0)\,\omega^i] = 0,$$

откуда

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0.$$

Нормальные пространства конформной связности

16. Среди всех пространств конформной связности мериэдрически изоморфных (изоморфизм первого рода) некоторому данному многообразию, существует одно, отличающееся от всех прочих специфическими особенностями.

Будем исходить из произвольно заданного уравнения Монжа

$$\sum g_{ik}\,du_i du_k = 0$$

и рассмотрим некоторое пространство, в котором это уравнение определяет изотропные направления. Если мы приведем левую часть этого уравнения к сумме n квадратов

$$\sum g_{ik}\,du_i du_k = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2,$$

то мы будем иметь право предположить, не делая этим каких-либо ограничительных предположений о конформной связности многообразия, что именно эти ω^i являются составляющими конформной связности, а также, что $\omega_0^0 = 0$. Тогда репер, связанный с каждой точкой пространства данной конформной связности, будет полностью определен.

Теперь легко показать, что существует одна и только одна система форм ω, удовлетворяющая условиям

$$(\omega^i)' = \sum_{k=1}^n [\omega^k \omega_k^i] \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

выбор этих форм придает пространству кручение, равное нулю.

Если ω_i^j уже выбраны таким образом, то можно Ω_0^0 сделать равным нулю; действительно, формула

$$(\omega_0^0)' = 0 = \sum_{k=1}^n [\omega^i \omega_i^0]$$

может осуществляться при бесконечном множестве различных выборов составляющих ω_i^0. Достаточно положить

$$\omega_i^0 = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}\omega^k \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где λ_{ij} подчинены только условиям симметрии

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Рассмотрим формулы

$$(\omega_i^j)' = [\omega^i \omega_j^0] - [\omega^j \omega_i^0] + \sum_{k=1}^n [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j;$$

из них выводим

$$\Omega_i^j = (\omega_i^j)' - \sum_{k=1}^{n} [\omega_i^k \omega_k^j] - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} [\omega^i \omega^k] + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} [\omega^j \omega^k].$$

Положив

$$\Omega_i^j = \sum_{k,\, l}^{1, \ldots, n} A_{ikl}^j [\omega^k \omega^l],$$

видим, что

$$A_{iik}^j = a_{iik}^j - \lambda_{jk} \qquad \begin{pmatrix} k \neq i, j \\ i \neq j \end{pmatrix},$$

$$A_{ijk}^j = a_{ijk}^j + \lambda_{ik} \qquad \begin{pmatrix} k \neq i, j \\ i \neq j \end{pmatrix},$$

$$A_{iij}^j = a_{iij}^j - \lambda_{ii} - \lambda_{jj} \qquad (i \neq j),$$

$$A_{ikl}^j = a_{ikl}^j \qquad (k, l \neq i, j),$$

$$A_{ijk}^k = a_{ijk}^k - \lambda_{ij} \qquad \begin{pmatrix} i \neq j \\ i \neq k \end{pmatrix},$$

$$A_{iji}^i = a_{iji}^i,$$

где a_{ikl}^j определенные коэффициенты. Далее получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_{iik}^k = \sum_{k=1}^{n} a_{iik}^k - (n-2)\lambda_{ii} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kk} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^k = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk}^k - (n-2)\lambda_{ij} \qquad (i \neq j = 1, \ldots, n).$$

Отсюда выводим, что можно, и притом только единственным способом, выбрать коэффициенты λ_{ij} так, чтобы обратились в нуль левые части предшествующих соотношений. Но так как λ_{ij} симметричны, то еще необходимо доказать равенства

$$A_{ijk}^k = A_{jik}^k \qquad (i \neq j \neq k).$$

Но эти равенства вытекают из тождества

$$\sum_{\rho=1} [\omega^\rho \Omega_\rho^k] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

которое является следствием равенства нулю форм Ω^i и Ω_0^0. Приравнивая нулю в этом тождестве совокупность коэффициентов при $[\omega^i \omega^j \omega^k]$, получаем действительно

$$A_{ijk}^k - A_{jik}^k = 0.$$

17. Итак, исходя из уравнения Монжа, мы можем определить такую конформную связность, которая удовлетворяет условиям

$$\Omega^i = 0, \quad \Omega_0^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^k = 0;$$

но доказательство этого было проведено при определенных предположениях относительно репера, связанного с каждой точкой пространства. Теперь нужно доказать, что предшествующие соотношения сохраняются при всяком другом выборе репера. Равенство Ω^i и Ω_0^0 нулю имеет, очевидно, внутренне-геометрическое значение, как мы это видели ранее.

Чтобы показать, что последние соотношения тоже имеют инвариантное значение, вообразим, что мы в каждой точке выбрали наиболее общий репер, и обозначим символом δ дифференцирование, применяемое лишь к параметрам v_l, определяющим выбор репера, но не распространяющееся на параметры u_l, определяющие положение точки в пространстве. Формулы

$$(\Omega_i^j)' - [\omega^i \Omega_j^0] + [\omega^j \Omega_i^0] + [\Omega_i^k \omega_k^j] - [\omega_i^k \Omega_k^j] = 0$$

показывают, что

$$\delta \Omega_i^j = \sum_{k=1}^{n} (e_i^k \Omega_k^j - e_k^j \Omega_i^k),$$

где e_i^j обозначает $\omega_i^j(\delta)$.

Формулы

$$(\omega^i)' = [\omega_0^0 \omega^i] + \sum_{k=1}^{n} [\omega^k \omega_k^i]$$

показывают, что

$$\delta \omega^i = e_0^0 \omega^i - \sum_{k=1}^{n} e_k^i \omega^k.$$

Полученные выражения дают бесконечно-малые вариации форм ω^i, Ω_i^j при бесконечно-малом изменении репера. Из них без труда получаем

$$\delta A_{ikl}^j = -2e_0^0 A_{ikl}^j + \sum_{\rho=1}^{n} (e_i^\rho A_{\rho kl}^j - e_\rho^j A_{ikl}^\rho + e_k^\rho A_{i\rho l}^j + e_l^\rho A_{ik\rho}^j)$$

и после упрощений находим

$$\delta \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^k = -2e_0^0 \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^k + \sum_{\rho=1}^{n} e_i^\rho \sum_{k=1}^{n} A_{\rho jk}^k + \sum_{\rho=1}^{n} e_j^\rho \sum_{k=1}^{n} A_{i\rho k}^k.$$

Таким образом видим, что соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^{k}=0$$

остаются инвариантными при произвольном изменении репера [1].

Итак, мы доказали, что *в заданном числовом многообразии n измерений среди всех возможных конформных связностей, совместных с данным a priori уравнением Монжа*

$$\sum g_{ik}du_i du_k=0,$$

определяющим в этом многообразии изотропные направления, существует одна и только одна конформная связность, удовлетворяющая соотношениям

$$\Omega^i=0,\quad \Omega_0^0=0,\quad \sum_{k=1}^{n} A_{ijk}^{k}=0.$$

Мы условимся говорить, что в этом случае многообразие обладает *нормальной* конформной связностью; мы будем также говорить, что имеем дело с нормальным пространством конформной связности.

Нормальные пространства конформной связности вполне определяются уравнением, полученным приравниванием нулю ds^2, и потому аналогичны многообразиям Римана в теории пространств метрической связности.

Нормальные пространства трех измерений

18. Случай нормальных пространств трех измерений особенно интересен. Имеем

$$\Omega_2^3=A_{223}^3[\omega^2\omega^3]+A_{231}^3[\omega^3\omega^1]+A_{212}^3[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_3^1=A_{323}^1[\omega^2\omega^3]+A_{331}^1[\omega^3\omega^1]+A_{312}^1[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_1^2=A_{123}^2[\omega^2\omega^3]+A_{131}^2[\omega^3\omega^1]+A_{112}^2[\omega^1\omega^2].$$

Между коэффициентами этих трех форм существуют
1) соотношения

$$[\omega^2\Omega_2^1]+[\omega^3\Omega_3^1]=0,$$
$$[\omega^1\Omega_1^2]+[\omega^3\Omega_3^2]=0,$$
$$[\omega^1\Omega_1^3]+[\omega^2\Omega_2^3]=0,$$

[1] В случае пространственно-временного континуума ($n=4$) с ds^2, равным $(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2+(\omega^4)^2$, тензор Эйнштейна равен нулю.

вытекающие из равенства нулю Ω^1, Ω^2, Ω^3, Ω_0^0; они дают

$$A_{131}^2=A_{312}^1,$$
$$A_{212}^3=A_{123}^2,$$
$$A_{323}^1=A_{231}^3;$$

2) соотношения

$$A_{112}^2+A_{331}^1=0,\quad A_{223}^3+A_{112}^2=0,\quad A_{331}^1+A_{223}^3=0,$$
$$A_{231}^1=0,\quad A_{312}^2=0,\quad A_{123}^3=0,$$

которые вытекают из нормальности многообразия. Из этих соотношений вытекает равенство нулю всех коэффициентов. Следовательно, формы Ω_i^j все равны нулю.

Иначе говоря, *бесконечно-малое конформное перемещение, соответствующее бесконечно-малому замкнутому контуру, выходящему из точки P и возвращающемуся в нее, оставляет инвариантными точку P и все направления, проходящие через P*; следовательно, это — конформная трансляция с центром P.

Из равенства нулю форм Ω^1, Ω^2, Ω^3, Ω_0^0, Ω_2^3, Ω_3^1, Ω_1^2 вытекают следующие соотношения между Ω_1^0, Ω_2^0, Ω_3^0

$$[\omega^1\Omega_1^0]+[\omega^2\Omega_2^0]+[\omega^3\Omega_3^0]=0,$$
$$[\omega^2\Omega_3^0]-[\omega^3\Omega_2^0]=0,$$
$$[\omega^3\Omega_1^0]-[\omega^1\Omega_3^0]=0,$$
$$[\omega^1\Omega_2^0]-[\omega^2\Omega_1^0]=0.$$

Отсюда прямо получаем

$$\Omega_1^0=\alpha_1[\omega^2\omega^3]+\beta_3[\omega^3\omega^1]+\beta_2[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_2^0=\beta_3[\omega^2\omega^3]+\alpha_2[\omega^3\omega^1]+\beta_1[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_3^0=\beta_2[\omega^2\omega^3]+\beta_1[\omega^3\omega^1]+\alpha_3[\omega^1\omega^2],$$

причем сумма коэффициентов α_1, α_2, α_3 равна нулю.

19. Рассмотрим параллелограмм, одна из вершин которого находится в точке P, а две стороны (бесконечно-малые), выходящие из P, имеют проекции

$$(x^1,\ x^2,\ x^3)\ \text{и}\ (y^1,\ y^2,\ y^3).$$

Конформная трансляция с центром P, соответствующая контуру этого параллелограмма (площадке), имеет следующие составляющие

$$\alpha_1(x^2y^3-x^3y^2)+\beta_3(x^3y^1-x^1y^3)+\beta_2(x^1y^2-x^2y^1),$$
$$\beta_3(x^2y^3-x^3y^2)+\alpha_2(x^3y^1-x^1y^3)+\beta_1(x^1y^2-x^2y^1),$$
$$\beta_2(x^2y^3-x^3y^2)+\beta_1(x^3y^1-x^1y^3)+\alpha_3(x^1y^2-x^2y^1).$$

Обозначим для краткости

$$u_1 = x^2y^3 - x^3y^2, \quad u_2 = x^3y^1 - x^1y^3, \quad u_3 = x^1y^2 - x^2y^1;$$

величины u_1, u_2, u_3 можно рассматривать как направляющие параметры плоскости площадки. Конформная трансляция, соответствующая этой площадке, имеет ось [1], направляющие параметры которой теперь выражаются следующим образом

$$\alpha_1u_1 + \beta_3u_2 + \beta_2u_3, \quad \beta_3u_1 + \alpha_2u_2 + \beta_1u_3, \quad \beta_2u_1 + \beta_1u_2 + \alpha_3u_3;$$

но это направление сопряжено плоскости площадки относительно конуса (C), тангенциальное уравнение которого имеет вид

$$\alpha_1u_1^2 + \alpha_2u_2^2 + \alpha_3u_3^2 + 2\beta_1u_2u_3 + 2\beta_2u_3u_1 + 2\beta_3u_1u_2 = 0.$$

Таким образом, этот конус (C) имеет инварнантное значение. Соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

показывает, что около конуса (C) может быть описан триортогональный триэдр.

С точки зрения точечной геометрии этот конус определяет такие проходящие через P направления, что конформная трансляция, ось которой направлена по одному из этих направлений, соответствует площадке, содержащей именно это направление. В частном случае конус (C) может выродиться в две взаимно перпендикулярные прямые, или в одну двойную изотропную прямую. Было бы интересно изучить степень общности тех нормальных пространств, у которых имеется эта последняя особенность. В общем случае конформные трансляции, соответствующие замкнутым контурам, выходящим из точки P и возвращающимся в нее, допускают оси произвольных направлений; если же конус (C) приводится к двум ортогональным прямым, ось конформной трансляции находится всегда в плоскости этих двух прямых; наконец, если конус (C) приводится к двойной прямой (изотропной), ось всех конформных трансляций совпадает с этой прямой.

---

[1] Этим мы хотим выразить то, что конформная трансляция оставляет инвариантными все окружности, проходящие через P и касающиеся в P к этому направлению.

Глава II

МНОГООБРАЗИЯ, ВМЕЩЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВО КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ

20. Мы будем рассматривать в этой главе данное n-мерное многообразие конформной связности, которое мы будем называть пространством E конформной связности, и некоторое p-мерное многообразие $\boldsymbol{v}_p$ $(p<n)$, вмещенное в это пространство. Это многообразие мы рассматриваем сейчас просто как совокупность точек; оно имеет все же фундаментальную форму ds^2, определенную с точностью до произвольного множителя; но мы еще не можем сказать, что оно является многообразием конформной связности.

Мы докажем, что, *если ds^2 многообразия v_p не приводится к сумме менее чем p независимых квадратов* (а это, очевидно, имеет место, когда многообразие вещественно), *то для v_p можно определить внутреннюю конформную связность.*

В каждой точке A многообразия v_p, рассматриваемой как точка, принадлежащая данному пространству E, мы можем выбрать репер так, чтобы гиперсферы $A_{p+1}, \dots, A_n$ касались v_p. Это возможно выполнить даже бесконечным множеством способом, так как определенным является только пучок

$$\lambda_{p+1}A_{p+1} + \dots + \lambda_nA_n + \lambda A.$$

Перемещаясь на v_p, получим

$$\omega^{p+1} = \dots = \omega^n = 0,$$

и, следовательно,

$$[\omega^1\omega_1^\alpha] + \dots + [\omega^p\omega_p^\alpha] + \Omega^\alpha = 0 \qquad (\alpha = p+1, \dots, n).$$

Эти соотношения показывают, что на v_p ω_i^α $(i=1, \dots, p;$ $\alpha = p+1, \dots, n)$ являются линейными комбинациями $\omega^1, \dots, \omega^p$, и это при произвольном выборе репера, удовлетворяющем вышеуказанным условиям.

Гиперсферы $A, A_1, \dots, A_p, A_{n+1}$ можно рассматривать как гиперсферы, образующие репер в многообразии v_p, и в v_p мы имеем

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \dots + \omega^p A_p,$$

$$dA_i = \omega_i^0 A - \omega^i A_{n+1} + \sum_{k=1}^{p} \omega_i^k A_k + \sum_{\alpha=p+1}^{n} \omega_i^\alpha A_\alpha,$$

$$dA_{p+1} = -\omega_0^0 A_{n+1} - \sum_{k=1}^{p} \omega_k^0 A_k - \sum_{\alpha=p+1}^{n} \omega_\alpha^0 A_\alpha.$$

Если бы было возможно выделить специальным инвариантным образом пучок гиперсфер $\sum_{\alpha=p+1}^{n} \lambda_\alpha A_\alpha$, то правые части после выбрасывания членов, содержащих A_α, имели бы инвариантное значение, а коэффициенты

$$\omega_0^0, \quad \omega^i, \quad \omega_i^j, \quad \omega_i^0 \quad (i, j = 1, \dots, p)$$

определяли бы в многообразии v_p внутреннюю конформную связность.

Но выделение инвариантным образом такого специального пучка возможно. Рассмотрим, в самом деле, скалярное произведение

$$dA \cdot d(\lambda_{p+1} A_{p+1} + \dots + \lambda_n A_n + \lambda A);$$

оно определено внутренним образом с точностью до множителя; его можно представить в виде

$$\lambda_{p+1}\varphi_{p+1} + \dots + \lambda_n \varphi_n + \lambda ds^2,$$

где положено

$$\varphi_\alpha = \sum_{i=1}^{p} \omega^i \omega_i^\alpha;$$

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \dots + (\omega^p)^2$$

φ_α являются определенными квадратичными формами относительно $\omega^1, \dots, \omega^p$.

Следовательно, возможно так подобрать λ в виде линейной комбинации от $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, что в рассматриваемом скалярном произведении сумма коэффициентов при квадратах будет равна нулю. А все это вместе приводится к внутреннему определению пучка $\lambda_{p+1}A_{p+1} + \dots + \lambda_n A_n$. Таким образом, теорема доказана и в многообразии v_p действительно существует внутренняя конформная связность.

Эти выводы были бы неверны, если бы фундаментальная форма ds^2 многообразия v_p не приводилась к сумме p независимых квадратов [1].

Легко убедиться, что если в заданном пространстве E формы Ω^i и Ω_0^0 равны нулю, то мы имеем то же самое и в многообразии v_p.

21. В частном случае, когда многообразие v_p имеет одно измерение, т. е. является линией, внутренняя конформная связность этой линии уподобляет ее собственно конформному пространству одного измерения, так как формы второй степени Ω^i, Ω_i^j, определяющие кривизну, здесь необходимо равны нулю (число переменных равно единице).

Таким образом, на произвольной линии, вмещенной в пространство конформной связности, возможно определить геометрию, тождественную геометрии круга; в частности, *можно внутренним образом определить ангармоническое отношение четырех точек этой линии.*

Рассмотрим для определенности случай, когда пространство E является конформным пространством 3 измерений (нулевой кривизны), и возьмем некоторую кривую (c), которую мы будем рассматривать сначала вмещенной в обычное евклидово пространство. Обозначим через T, N, B единичные сферы, представляющие плоскости, проведенные через некоторую точку A кривой перпендикулярно касательной, главной нормали и бинормали. За репер можно принять точку A (координата x_0 которой будет равна 1), сферы T, N, B и бесконечно-удаленную точку I. Тогда имеем:

$$dA = ds\,T,$$

$$dT = \frac{ds}{\rho} N - ds\,I,$$

$$dN = -\frac{ds}{\rho} T - \frac{ds}{\tau} B,$$

$$dB = \frac{ds}{\tau} N, \quad dI = 0,$$

то есть $\omega_0^0 = 0,\ \omega^1 = ds,\ \omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0,\ \omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0$

$$\omega_2^3 = -\frac{ds}{\tau}, \quad \omega_1^2 = \frac{ds}{\rho}.$$

---

[1] Между прочим, так же обстоит дело с многообразиями, вмещенными в пространство метрической связности. Определение параллелизма по Levi-Civita, когда метрическое многообразие рассматривается вмещенным в евклидово пространство достаточно большого числа измерений, оказывается невозможным, если ds^2 этого многообразия приводится к сумме меньшего числа независимых квадратов, чем число измерений этого многообразия.

Здесь имеются две квадратичные формы φ:

$$\varphi_2 = \omega^1\omega_1^2 = \frac{ds^2}{\rho}, \quad \varphi_3 = \omega^1\omega^3 = 0.$$

Согласно общей теории нужно так изменить репер, чтобы обратить в нуль форму φ_2. Для этого достаточно положить

$$A_1 = T, \; A_2 = N + \frac{1}{\rho}A, \; A_3 = B, \; A_4 = I - \frac{1}{\rho}N - \frac{1}{2\rho^2}A,$$

и мы получим

$$dA = dsA_1,$$
$$dA_1 = -\frac{ds}{2\rho^2}A - dsA_4,$$
$$dA_2 = d\left(\frac{1}{\rho}A\right) - \frac{ds}{\tau}A_3,$$
$$dA_3 = -\frac{ds}{\rho\tau}A + \frac{ds}{\tau}A_2,$$
$$dA_4 = \frac{ds}{2\rho^2}A_1 - d\left(\frac{1}{\rho}A_2\right) + \frac{ds}{\rho\tau}A_3,$$
$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0.$$

Мы видим, что сфера A_2 является сферой, касательной к данной линии и имеющей своим центром центр кривизны; сфера A_3 является соприкасающейся плоскостью; сфера-точка A_4 — точкой, симметричной A относительно центра кривизны. Конформная связность, придаваемая линии, определяется теперь соотношениями

$$dA = dsA_1,$$
$$dA_1 = -\frac{ds}{2\rho^2}A - dsA_4,$$
$$dA_4 = \frac{ds}{2\rho^2}A_1$$

которым удовлетворяет репер (A, A_1, A_4), связанный с каждой точкой линии. При таком выборе репера имеем

$$\omega_0^0 = 0, \quad \omega' = ds, \quad \omega_1^0 = \frac{ds}{2\rho^2}.$$

Установив это, выразим, что точка $A + tA_1 - \frac{1}{2}t^2A_4$ остается неподвижной по своему положению, то есть что

$$d\left(A + tA_1 - \frac{1}{2}t^2A_4\right) = \lambda\left(A + tA_1 - \frac{1}{2}t^2A_4\right);$$

мы получаем

$$dt + \left(1 + \frac{t^2}{4\rho^2}\right)ds = 0.$$

Функция t от s, определяемая этим дифференциальным уравнеием, может быть рассматриваема как проективный параметр на кривой; ангармоническое отношение четырех его значений определяет ангармоническое отношение четырех соответствующих точек кривой; оно не зависит от выбираемого частиого решения уравнения Риккати.

22. Вернемся к случаю многообразия v_p, имеющего более одного измерения и вмещенного в пространство E конформной связности. Существует два инвариантных способа, чтобы придать этому многообразию конформную связность: один, рассмотренный в п. 20, оперирует со всей конформной связностью пространства, другой способ учитывает только уравнение $ds^2 = 0$, которое на v_p задается объемлющим пространством, и позволяет ввести в многообразии v_p, исходя из этого уравнения, нормальную связность (п. 17). Полученные, таким образом, две конформные связности будут в общем случае различны, даже если пространство E — собственно конформное. В этом последнем случае, формы Ω^i и Ω_0^0, относящиеся к v_p, равны нулю для *обеих* конформных связностей, но соотношения

$$\sum_{k=1}^{p} A_{ijk}^k = 0$$

не удовлетворяются в нормальной связности v_p.

В теории метрических пространств положение оказывается иным.

Там две точки зрения, аналогичные предшествующим, приводят в случае многообразия, вмещенного в евклидово пространство, к одной и той же метрической связности; первая точка зрения принадлежит Леви-Чивита (Levi-Civita) и развивается в его теории параллельного переноса; вторая — точка зрения Г. Вейля (H. Weyl), который метрическую связность выводит из внутренних свойств заданной дифференциальной квадратичной формы ds^2.

Конформные инварианты многообразия v_p Окружности. Минимальные прямые

23. Если дано многообразие v_p, принадлежащее к пространству E конформной связности, то можно для отыскаиия конформных инвариантов v_p применить метод подвижного репера, *рассматривая v_p как вмещенное в E*. Например, для $n = 3$ и $p = 2$ можно обобщить теорию линий кривизны.

Ограничимся рассмотрением простейшего случая $p = 1$ и предположим сначала, что ds^2 данной линии не равно нулю. Репер, связанный с каждой точкой линии, можно выбрать таким образом, чтобы при перемещении вдоль линии имели место соотношения

$$\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0,$$

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0,$$

причем вторая группа соотношений вытекает из соображений, приведенных в предыдущем пункте.

Дифференцируя внешним образом последние соотношения, получаем

$$[\omega^1 \omega_i^0] = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

откуда

$$\omega_i^0 = \alpha_i \omega^1.$$

Дифференцируя эти выражения, находим

$$\left[\omega^1 \left(d\alpha_i + 2\alpha_i \omega_0^0 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \omega_i^k\right)\right] = 0.$$

Произведя бесконечно-малое изменение репера, удовлетворяющего предшествующим предположениям, получим для бесконечно-малых вариаций коэффициентов α_i следующие выражения

$$\delta\alpha_i = -2e_0^0 \alpha_i + \sum_{k=2}^{n} e_i^k \alpha_k.$$

Отсюда видим, что соотношения

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

имеют инвариантное значение; *они характеризуют окружности.*

Если они не удовлетворяются, то можно, пользуясь произволом в выборе репера, добиться обращения в нуль $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, а α_2 сделать равным 1; соотношения

$$\omega_2^0 = \omega^1, \quad \omega_3^0 = \ldots = \omega_n^0 = 0$$

тогда дают

$$[\omega^1 \omega_0^0] = [\omega^1 \omega_3^2] = \ldots = [\omega^1 \omega_n^2] = 0,$$

откуда

$$\omega_0^0 = \beta\omega^1, \quad \omega_3^2 = \beta_3 \omega^1, \ldots, \omega_n^2 = \beta_n \omega^1.$$

Нетрудно показать, что β можно считать равным нулю; полагая $\beta_3 = \ldots = \beta_n = 0$, мы получим новую инвариантную категорию кривых. В общем же случае можно все коэффициенты кроме одного сделать равными нулю.

Из предшествующего вытекает, в частности, что окружности пространства конформной связности могут быть получены интегрированием системы Пфаффа

$$\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0,$$

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0,$$

$$\omega_2^0 = \omega_3^0 = \ldots = \omega_n^0 = 0,$$

причем здесь предполагается, что *репер в каждой точке пространства E выбран наиболее общим образом.*

24. Другая важная категория линий в пространстве E обобщает *минимальные прямые.*

Если дана линия с ds^2, равным нулю, то для каждой точки этой линии можно выбрать репер, связанный с этой точкой так, чтобы

$$\omega^1 + i\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \ldots, \quad \omega^n = 0.$$

Отсюда внешним дифференцированием получаем

$$[\omega^1 (\omega_1^3 + i\omega_2^3)] = 0, \ldots, \quad [\omega^1 (\omega_1^n + i\omega_2^n)] = 0;$$

следовательно, имеем соотношения вида

$$\omega_1^3 + i\omega_2^3 = \alpha_3 \omega^1, \ldots, \quad \omega_1^n + i\omega_2^n = \alpha_n \omega^1.$$

Дифференцируя внешним образом эти соотношения, находим

$$\left[\omega' \left(d\alpha_k + 2i\alpha_k \omega_1^2 + \alpha_k \omega_0^0 + \sum_{h=3}^{n} \alpha_h \omega_h^k\right)\right] = 0 \quad (k = 3, 4, \ldots, n).$$

Бесконечно-малое изменение репера приводит к следующим бесконечно-малым вариациям α_k:

$$\delta\alpha_k = -2ie_1^2 \alpha_k - e_0^0 \alpha_k - \sum_{h=3}^{n} e_h^k \alpha_h \quad (k = 3, 4, \ldots, n).$$

Отсюда видим, что соотношения

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_n = 0$$

являются инвариантными; они *характеризуют минимальные прямые.*

Итак, минимальные прямые пространства E конформной связности могут быть получены интегрированием системы Пфаффа

$$\omega^1 + i\omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0,$$

$$\omega_1^3 + i\omega_2^3 = \ldots = \omega_1^n + i\omega_2^n = 0.$$

Формула

$$(\omega^1 + i\omega^2)' = [(\omega_0^0 + i\omega_1^2)(\omega^1 + i\omega^2)] - [\omega^3 (\omega_1^3 + i\omega_2^3)] - \ldots -$$
$$- [\omega^n (\omega_1^n + i\omega_2^n)] + \Omega^1 + \Omega^2$$

показывает[1], что если пространство E без кручения, то минимальные прямые являются характеристиками уравнения Пфаффа

$$\omega^1+i\omega^2=0.$$

25. Отыскание линий, обобщающих окружности в нормальном трехмерном многообразии, представляет особенный интерес. Система Пфаффа, определяющая окружности

$$\omega^2=\omega^3=0,$$
$$\omega_1^2=\omega_1^3=0,$$
$$\omega_2^0=\omega_3^0=0;$$

является характеристической системой формы Пфаффа ω_2^3. Действительно, мы имеем

$$(\omega_2^3)'=[\omega^2\omega_3^0]-[\omega^3\omega_2^0]-[\omega_1^2\omega_1^3].$$

Она допускает относительный интегральный инвариант $\int\omega_2^3$ и может быть приведена к канонической системе[2]. Геометрическое значение инварианта $\int\omega_2^3$ почти очевидно; действительно, имеем

$$\omega_2^3=A_3dA_2=A_3(A_2+dA_2),$$

то есть ω_2^3 равно дополнению до $\frac{\pi}{2}$ угла, образованного сферой A_3 со сферой A_2+dA_2. Возьмем некоторую конгруэнцию окружностей и выделим *трубку* окружностей этой конгруэнции. Рассмотрим замкнутую кривую, охватывающую трубку и проведенную на граничной поверхности. Свяжем с каждой точкой A многообразия две взаимно ортогональные сферы, проходящие через A и касательные в ней к окружности, принадлежащей конгруэнции; пусть это будут сферы (S) и (Σ) (они, строго говоря, принадлежат конформному пространству, касательному к пространству E в A).

При перемещении по замкнутой кривой от точки A в точку бесконечно близкую A' сфера (S'), связанная с A', образует со сферой (Σ) угол, дополнение которого

[1] Э. Картан. Интегральные инварианты. ГТТИ. 1940; гл. XIV, стр. 152.
[2] Там же, гл. XII, стр. 131.

$d\varepsilon$ до $\frac{\pi}{2}$ бесконечно мало. (Строго говоря, рассматривается угол между сферой (S') и сферой $(\overline{\Sigma})$, отнесенной к конформному пространству, касательному в A', и отождествляемой со сферой (Σ) конформного пространства, касательного в A). Интеграл $\int d\varepsilon$, распространенный на замкнутый контур, характеризует выделенную трубку, не завися от замкнутой кривой, вдоль которой он был вычислен, а также от выбора сфер (S) и (Σ). Эти свойства, конечно, сохраняются и в собственно конформном пространстве.

Изоморфизм двух многообразий, вмещенных в заданные пространства конформной связности

26. Рассмотрим два многообразия p измерений v_p и $\overline{v}_p$, вмещенные соответственно в пространства E и $\overline{E}$ конформной связности $n>p$ измерений; эти оба пространства могут в частном случае быть одним и тем же пространством. Мы назовем эти многообразия *изоморфными*, если между ними можно установить такое точечное соответствие, что в соответствующих точках они имеют общие конформные инварианты[1]. Более точным образом это означает, что можно в соответствующих точках многообразий выбрать реперы так, что, следуя по произвольным соответственным путям в обоих многообразиях, мы получим у реперов *одинаковые* составляющие мгновенного перемещения.

В случае, когда два пространства E и $\overline{E}$ являются одним и тем же конформным пространством, изоморфизм двух многообразий приводится к обычному *равенству*, то есть к возможности перейти от одного многообразия к другому путем конформного преобразования.

При $p=1$ можно привести вопрос к случаю конформного пространства; действительно, между конформными пространствами, связанными с различными точками линии в пространстве E, можно установить соответствие вдоль этой линии так, что все происходит, как если бы обе линии рассматривались в одном конформном пространстве. Следовательно, условия выражающие, что линия пространства E изоморфна окружности собственно конформного

[1] Здесь, конечно, подразумевается, что инварианты V_p вычислены относительно пространства E, а инварианты $\overline{V}_p$ по отношению к $\overline{E}$.

пространства, аналитически характеризуются соотношениями

$$\omega^2 = \ldots = \omega^n = \omega_1^2 = \ldots = \omega_1^n = \omega_2^0 = \ldots = \omega_n^0 = 0,$$

определяющими окружности в конформном пространстве: они совпадают с уравнениями, рассмотренными в п. 23, что и оправдывает название *окружностей*, данное линиям пространства E, удовлетворяющим предшествующим соотношениям. Итак, в заданном пространстве E имеется ∞^{3n-3} кривых, изоморфных окружностям конформного пространства. Аналогичное замечание может быть сделано и относительно минимальных прямых.

Рассмотрим в заданном конформном пространстве некоторую фиксированную гиперсферу; реперы могут быть выбраны таким образом, чтобы при перемещении по гиперсфере имели место соотношения

$$\omega^n = 0, \quad \omega_0^0 = 0, \quad \omega_i^j = 0, \quad \omega_i^n = 0, \quad \omega_i^0 = \omega_n^0 = 0$$
$$(i, j = 1, \ldots, (n-1)).$$

Поэтому в пространстве E конформной связности гиперповерхности, изоморфные гиперсферам, могут быть охарактеризованы приведенной выше системой Пфаффа, причем реперы предполагаются выбранными наиболее общим образом. Следует отметить, что *вообще эта система не совместна*. Следует также отметить, что в конформном пространстве соотношения

$$\omega^n = 0, \quad \omega_i^n = 0$$

являются достаточными для определения гиперсфер; но в пространстве E конформной связности эти соотношения не являются достаточными в том смысле, что здесь уже не будет возможным, как это было в конформном пространстве, изменить реперы так, чтобы, сохранив эти соотношения, удовлетворить кроме того соотношениям

$$\omega_0^0 = \omega_i^j = \omega_i^0 = \omega_n^0 = 0.$$

27. Можно рассматривать также и мериэдрический изоморфизм. Возьмем в пространстве E заданное многообразие v_p, фундаментальная форма которого ds^2 приводима к сумме p независимых квадратов; рассмотрим далее в этом же или в другом пространстве $\bar{E}$ совокупность многообразий $\bar{v}_p$ p измерений, фундаментальные формы ds^2 которых тоже приводимы к сумме независимых квадратов. В каждой точке v_p можно выбрать репер таким образом, чтобы иметь

$$\omega^{p+1} = \ldots = \omega^n = 0;$$

так же обстоит дело и для других многообразий $\bar{v}_p$. Отметив это, предположим, что можно установить между многообразием v_p и одним из многообразий $\bar{v}_p$ точечное соответствие такого рода, что реперы, связанные с двумя соответствующими точками A и $\bar{A}$, при приведении к совпадению определяют относительное конформное перемещение одного из реперов по отношению к другому, которое вдоль соответствующих путей, взятых в этих многообразиях, принадлежит к заданному линейному пучку бесконечно-малых конформных перемещений.

Чтобы это условие имело геометрический смысл, необходимо, чтобы заданный пучок конформных бесконечно-малых перемещений был инвариантен при конформных перемещениях, оставляющих неподвижной точку A и инвариантными направления, проходящие через A и касательные к v_p. Таким образом, если воспользоваться обозначениями п. 13, соотношения, определяющие рассматриваемый линейный пучок,

$$\sum a_i\bar{\omega}^i + a_0^0\bar{\omega}_0^0 + \sum a_j^i\bar{\omega}_i^j + \sum a_0^i\bar{\omega}_i^0 =$$
$$= \sum a_i\omega^i + a_0^0\,\omega_0^0 + \sum a_j^i\,\omega_i^j + \sum a_0^i\,\omega_i^0 \tag{13}$$

должны быть инвариантными относительно бесконечно-малых преобразований (12) величин $\bar{\omega}_i^j - \omega_i^j$ при условии, что уравнения

$$0 = \delta\omega^\alpha = e_0^0\omega^\alpha - \sum_{k=1}^{p} e_k^\alpha\,\omega^k - \sum_{\lambda=p+1}^{n} e_\lambda^\alpha\omega^\lambda \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n)$$

являются следствиями уравнений $\omega^\alpha = 0$, то есть при условии

$$e_i^\alpha = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n).$$

28. Положим, например, $p = n-1$. Обозначая индексы $1, 2, \ldots, n-1$ буквами i, j, получим

$$\delta(\bar{\omega}^i - \omega^i) = e_0^0(\bar{\omega}^i - \omega^i) + \sum_{k-1}^{n-1} e_i^k(\bar{\omega}^k - \omega^k),$$

$$\delta(\bar{\omega}_0^0 - \omega_0^0) = -\sum_{i=1}^{n-1} e_i^0(\bar{\omega}^i - \omega^i),$$

$$\delta(\bar{\omega}_i^j - \omega_i^j) = e_i^0(\bar{\omega}^j - \omega^j) - e_j^0(\bar{\omega}^i - \omega^i) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}[e_i^k(\bar{\omega}_k^j - \omega_k^j) - e_k^j(\bar{\omega}_i^k - \omega_i^k)],$$

$$\delta(\overline{\omega}_i^n - \omega_i^n) = -e_n^0(\overline{\omega}^i - \omega^i) + \sum_{k=1}^{n-1} e_i^k(\overline{\omega}_k^n - \omega_k^n),$$

$$\delta(\overline{\omega}_i^0 - \omega_i^0) = e_i^0(\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0) - e_0^0(\overline{\omega}_i^0 - \omega_i^0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}[e_i^k(\overline{\omega}_k^0 - \omega_k^0) - e_k^0(\overline{\omega}_i^k - \omega_i^k)] - e_n^0(\overline{\omega}_i^n - \omega_i^n),$$

$$\delta(\overline{\omega}_n^0 - \omega_n^0) = e_n^0(\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0) - e_0^0(\overline{\omega}_n^0 - \omega_n^0) + \sum_{k=1}^{n-1} e_k^0(\overline{\omega}_k^n - \omega_k^n).$$

Если $n \geqslant 4$, то нетрудно показать, что различные виды мериэдрического изоморфизма между многообразиями v_{n-1} и $\overline{v}_{n-1}$ определяются следующими различными системами соотношений:

1) $\overline{\omega}^i = \omega^i$;
2) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$;
3) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n$;
4) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j$;
5) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$;
6) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$;
7) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n$;
8) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0$;
9) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0$;
10) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \omega_i^n = \omega_i^n, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0$;
11) $\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^j = \omega_i^j, \quad \overline{\omega}_i^n = \omega_i^n, \quad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \overline{\omega}_i^0 = \omega_i^0$.

В каждой из этих систем индекс i (или индексы i и j) принимает все значения $1, 2, \ldots, n-1$.

Наконец, можно доказать, что первая система дает тот же род изоморфизма, что и вторая; изоморфизм третьей системы одинаков с изоморфизмом пятой системы. Следовательно, имеется 9 различных родов мериэдрического изоморфизма.

Это число приводится к единице, если пространства E и $\overline{E}$ идентичны собственно конформному пространству. Действительно, в этом случае из системы (2) вытекают равенства (6); так же обстоит дело и с системой (4). Таким образом, системы соотношений (1), (2), (4), (6) дают один и тот же род мериэдрического изоморфизма. Что же касается каждой из систем (5), (7), (8), (9), (10), (11), то из них вытекает равенство нулю всех составляющих ω^i, ω_0^0, ω_i^j, ω_i^n, ω_i^0, ω_n^0, то есть голоэдрический изоморфизм (или равенство) двух многообразий. Таким образом, в случае двух многообразий, вмещенных в конформное пространство, существует только один род мериэдрического изоморфизма, выражающий возможность конформного отображения одного из многообразий на другое.

При $n = 3$ имеется исключение; в этом случае существует второй род мериэдрического изоморфизма, определённый соотношениями (10); этот изоморфизм приводится к тому, что я назвал *наложимостью второго порядка* в конформном пространстве [1]. В нормальном пространстве E трех измерений можно также доказать, что существует только два рода мериэдрического изоморфизма: первый соответствует конформному отображению — наложению первого порядка (соотношения (1) или (2)); второй соответствует наложению второго порядка (соотношения (10)).

В общем случае мериэдрический изоморфизм, определяемый соотношениями (1) (или (2)), приводится к свойству двух многообразий допускать конформное отображение одного многообразия на другое: этот изоморфизм сохраняется, если конформная связность пространства E или пространства $\overline{E}$ изменяется так, что изотропные направления в каждой точке остаются неизменными. Отыскание многообразий $\overline{v}_p$ пространства $\overline{E}$, допускающих конформное отображение на заданное многообразие v_p пространства E, может быть выполнено, например, в предположении, что оба пространства $\overline{E}$ и E являются пространствами нулевого кручения (или даже, что они являются нормальными пространствами).

Конформное отображение гиперповерхностей в четырехмерном пространстве конформной связности

29. Рассмотрим четырехмерное пространство конформной связности; можно предполагать, что оно нулевого кручения. Мы будем исследовать в общем виде вопрос о парах гиперповерхностей v_3 и $\overline{v}_3$, допускающих в этом пространстве конформное отображение одной из них на

[1] E. Cartan. Sur le problème général de la déformation; C. R. Congrès de Strasbourg, p. 397—406 (1921).

другую. Путем надлежащего выбора реперов в соответствующих точках многообразий получим

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1,\ \bar{\omega}^2 = \omega^2,\ \bar{\omega}^3 = \omega^3,\ \omega^4 = 0,\quad \bar{\omega} = 0,\quad \bar{\omega}_0^0 = \omega_0^0. \tag{14}$$

Отсюда находим при помощи внешнего дифференцирования

$$\bar{\omega}_2^3 = \omega_2^3,\quad \bar{\omega}_3^1 = \omega_3^1,\quad \bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2. \tag{15}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (15) с учетом уравнений (14) и (15) дает

$$\left\{\begin{aligned}
&[\omega^1\omega_1^4] + [\omega^2\omega_2^4] + [\omega^3\omega_3^4] = 0,\\
&[\omega^1\bar{\omega}_1^4] + [\omega^2\bar{\omega}_2^4] + [\omega^3\bar{\omega}_3^4] = 0,\\
&[\omega^1(\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] + [\omega^2(\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] + [\omega^3(\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] + \bar{\Omega}_0^0 - \Omega_0^0 = 0,\\
&[\omega^2(\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] - [\omega^3(\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] - [\bar{\omega}_2^4\bar{\omega}_3^4] + [\omega_2^4\omega_3^4] +\\
&\qquad + \bar{\Omega}_2^3 - \Omega_2^3 = 0,\\
&[\omega^3(\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\omega^1(\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] - [\bar{\omega}_3^4\bar{\omega}_1^4] + [\omega_3^4\,\omega_1^4] +\\
&\qquad + \bar{\Omega}_3^1 - \Omega_3^1 = 0,\\
&[\omega^1(\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] - [\omega^2(\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\bar{\omega}_1^4\bar{\omega}_2^4] + [\omega_1^4\,\omega_2^4] +\\
&\qquad + \bar{\Omega}_1^2 - \Omega_1^2 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Эти уравнения показывают, как мы это увидим далее, что система Пфаффа — система в инволюции и ее *общее* решение зависит от трех произвольных функций двух аргументов.

Рассмотрим для этого *произвольный* интегральный линейный элемент; этот элемент, благодаря произволу в выборе реперов, можно предположить определенным следующими соотношениями:

$$\frac{\omega^1}{1} = \frac{\omega^2}{0} = \frac{\omega^3}{0} = \frac{\omega_1^4}{a_1^4} = \frac{\omega_2^4}{a_2^4} = \frac{\omega_3^4}{a_3^4} = \frac{\bar{\omega}_1^4}{\bar{a}_1^4} = \frac{\bar{\omega}_2^4}{\bar{a}_2^4} =$$

$$= \frac{\bar{\omega}_3^4}{\bar{a}_3^4} = \frac{\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0}{a_1^0} = \frac{\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0}{a_2^0} = \frac{\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0}{a_3^0}.$$

Уравнения, выражающие, что некоторый линейный интегральный элемент находится в инволюции с предыдущим, записываются следующим образом

$$\left\{\begin{aligned}
&\omega_1^4 = a_1^4\omega^1 + a_2^4\omega^2 + a_3^4\omega^3,\\
&\bar{\omega}_1^4 = \bar{a}_1^4\omega^1 + \bar{a}_2^4\omega^2 + \bar{a}_3^4\omega^3,\\
&\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0 = a_1^0\omega^1 + a_2^0\omega^2 + a_3^0\omega^3 -\\
&\qquad - (\bar{A}_{0\,12}^0 - A_{0\,12}^0)\,\omega^2 - (\bar{A}_{0\,13}^0 - A_{0\,13}^0)\,\omega^3,\\
&\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0 = a_2^0\omega^1 - a_1^0\omega^2 + \bar{a}_1^4\bar{\omega}_2^4 - \bar{a}_2^4\bar{\omega}_1^4 - a_1^4\,\omega_2^4 +\\
&\qquad + a_2^4\,\omega_1^4 - (\bar{A}_{112}^2 - A_{112}^2)\,\omega^2 - (\bar{A}_{113}^2 - A_{113}^2)\,\omega^3,\\
&\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0 = a_3^0\omega^1 - a_1^0\omega^3 + \bar{a}_1^4\bar{\omega}_3^4 - \bar{a}_3^4\bar{\omega}_1^4 - a_1^4\omega_3^4 +\\
&\qquad + a_3^4\,\omega_1^4 + (\bar{A}_{312}^1 - A_{312}^1)\,\omega^3 + (\bar{A}_{313}^1 - A_{313}^1)\,\omega^3,\\
&0 = a_2^0\omega^3 - a_3^0\omega^2 + \bar{a}_3^4\bar{\omega}_2^4 - \bar{a}_2^4\bar{\omega}_3^4 - a_3^4\,\omega_2^4 +\\
&\qquad + a_2^4\,\omega_3^4 + (\bar{A}_{212}^3 - A_{212}^3)\,\omega^2 + (\bar{A}_{213}^3 - A_{213}^3)\,\omega^3.
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Очевидно, эти соотношения независимы, так что через каждый интегральный элемент проходит бесконечное множество двумерных интегральных элементов, зависящих от 4 произвольных параметров. Возьмем один из этих интегральных двумерных элементов; мы всегда можем предположить, что он определяется первым данным линейным элементом и еще одним новым линейным элементом

$$\frac{\omega^1}{0} = \frac{\omega^2}{1} = \frac{\omega^3}{0} = \frac{\omega_1^4}{b_1^4} = \frac{\omega_2^4}{b_2^4} = \frac{\omega_3^4}{b_3^4} = \frac{\bar{\omega}_1^4}{\bar{b}_1^4} =$$

$$= \frac{\bar{\omega}_2^4}{\bar{b}_2^4} = \frac{\bar{\omega}_3^4}{\bar{b}_3^4} = \frac{\bar{\omega}_1^0 - \omega_1^0}{b_1^0} = \frac{\bar{\omega}_2^0 - \omega_2^0}{b_2^0} = \frac{\bar{\omega}_3^0 - \omega_3^0}{b_3^0}.$$

Условия инволюции этих двух линейных элементов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&b_1^4 = a_2^4,\\
&\bar{b}_1^4 = \bar{a}_2^4,\\
&\bar{b}_1^0 = a_2^0 - (\bar{A}_{0\,12}^0 - A_{0\,12}^0),\\
&\bar{b}_2^0 = -a_1^0 + \bar{a}_1^4\bar{b}_2^4 - \bar{a}_2^4\bar{b}_1^4 - a_1^4\,b_2^4 + a_2^4\,b_1^4 - (\bar{A}_{112}^2 - A_{112}^2),\\
&\bar{b}_3^0 = -\bar{a}_3^4\bar{b}_2^4 + \bar{a}_2^4\bar{b}_3^4 + a_3^4\,b_2^4 - a_2^4\,b_3^4 + (\bar{A}_{312}^1 - A_{312}^1),\\
&a_3^0 = -\bar{a}_2^4\bar{b}_3^4 + \bar{a}_3^4\bar{b}_2^4 + a_2^4\,b_3^4 - a_3^4\,b_2^4 + (\bar{A}_{212}^3 - A_{212}^3).
\end{aligned} \tag{18}$$

Условия, выражающие, что некоторый двумерный интегральный элемент находится в инволюции со вторым данным интегральным элементом, имеют следующий вид:

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\omega_2^4 = b_1^4\omega^1 + b_2^4\omega^2 + b_3^4\omega^3,\\
&\bar\omega_2^4 = \bar b_1^4\omega^1 + \bar b_2^4\omega^2 + \bar b_3^4\omega^3,\\
&\bar\omega_2^0 - \omega_2^0 = b_1^0\omega^1 + b_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 +\\
&\quad + (\bar A^0_{0\,12} - A^0_{0\,12})\,\omega^1 - (\bar A^0_{0\,23} - A^0_{0\,23})\,\omega^3,\\
&\bar\omega_3^0 - \omega_3^0 = b_3^0\omega^2 - b_2^0\omega^3 + \bar b_2^4\bar\omega_3^4 - \bar b_3^4\bar\omega_2^4 -\\
&\quad - b_2^4\,\omega_3^4 + b_3^4\,\omega_2^4 + (\bar A^3_{212} - A^3_{212})\,\omega^1 - (\bar A^3_{223} - A^3_{223})\,\omega^3,\\
&\bar\omega_1^0 - \omega_1^0 = b_1^0\omega^2 - b_2^0\omega^1 - \bar b_1^4\bar\omega_2^4 + \bar b_2^4\bar\omega_1^4 +\\
&\quad + b_1^4\,\omega_2^4 - b_2^4\,\omega_1^4 - (\bar A^1_{112} - A^1_{112})\,\omega^1 + (\bar A^1_{123} - A^1_{123})\,\omega^3,\\
&0 = -b_1^0\omega^3 + b_3^0\omega^1 - \bar b_3^4\bar\omega_1^4 + \bar b_1^4\bar\omega_3^4 +\\
&\quad + b_1^4\,\omega_1^4 - b_1^4\,\omega_3^4 - (\bar A^1_{312} - A^1_{312})\,\omega^1 + (\bar A^1_{323} - A^1_{323})\,\omega^3.
\end{aligned}\right.
$$

Чтобы доказать, что существует трехмерный интегральный элемент, находящийся в инволюции с данным двумерным элементом, достаточно показать, что, если положить $\omega^1 = \omega^2 = 0$, то 12 уравнений (17) и (19) будут совместны.

Обозначая буквой c с индексами отношения ω_i^j к ω^3, получаем

$$
\begin{gathered}
c_1^4 = a_3^4, \qquad \bar c_1^4 = \bar a_3^4,\\
c_2^4 = b_3^4, \qquad \bar c_2^4 = \bar b_3^4,\\
c_1^0 = a_3^0 - \bar A^0_{0\,13} + A^0_{0\,13} = -\bar b_1^4\bar c_2^4 + \bar b_2^4\bar c_1^4 +\\
+ b_1^4\,c_2^4 - b_2^4\,c_1^4 + \bar A^2_{123} - A^2_{123},\\
c_2^0 = b_3^0 - \bar A^0_{0\,23} + A^0_{0\,23} = \bar b_1^4\bar c_2^4 - \bar b_2^4\bar c_1^4 -\\
- a_1^4\,c_2^4 + a_2^4\,c_1^4 - \bar A^2_{113} + A^2_{113},\\
c_3^0 = -a_1^0 - \bar a_3^4\bar c_1^4 + \bar a_1^4\bar c_3^4 + a_3^4\,c_1^4 - a_1^4\,c_3^4 + \bar A^1_{313} - A^1_{313} =\\
= -b_2^0 + \bar b_2^4\bar c_3^4 - \bar b_3^4\bar c_2^4 - b_2^4\,c_3^4 + b_3^4\,c_2^4 - \bar A^3_{223} + A^3_{223},\\
a_2^0 - \bar a_2^4\bar c_3^4 + \bar a_3^4\bar c_2^4 + a_2^4\,c_3^4 - a_3^4\,c_2^4 + \bar A^3_{213} - A^3_{213} = 0,\\
-b_1^0 - \bar b_3^4\bar c_1^4 + \bar b_1^4\bar c_3^4 + b_3^4\,c_1^4 - b_1^4\,c_3^4 + \bar A^1_{323} - A^1_{323} = 0.
\end{gathered}
$$

Учитывая уравнения (18) и упрощая, находим для определения c_3^4 и $\bar c_3^4$ соотношения

$$
(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a_1^4 - b_2^4)\,c_3^4 - (\bar a_1^4 - \bar b_2^4)\,\bar c_3^4 = -2a_1^0 + \bar a_1^4\bar b_2^4 -\\
&\quad - (\bar a_3^4)^2 + (\bar b_3^4)^2 - a_1^4\,b_2^4 + (a_3^4)^2 - (b_3^4)^2,\\
&a_2^4\,c_3^4 - \bar a_2^4\bar c_3^4 = -a_2^0 + a_3^4\,b_3^4 - \bar a_3^4\bar b_3^4 - \bar A^3_{213} + A^3_{213}
\end{aligned}\right.
$$

и условия

$$
\begin{gathered}
\bar A^3_{212} - \bar A^0_{0\,13} - \bar A^2_{123} = A^3_{212} - A^0_{0\,13} - A^2_{123},\\
\bar A^1_{312} - \bar A^0_{0\,23} + \bar A^2_{113} = A^1_{312} - A^0_{0\,23} + A^2_{113},\\
\bar A^1_{012} + \bar A^3_{213} + \bar A^1_{323} = A^1_{012} + A^3_{213} + A^1_{323}.
\end{gathered}
$$

Но последние условия выполняются сами собой, так как отсутствие кручения у пространства влечет соотношения

$$
\begin{gathered}
[\omega^1\Omega_0^0] + [\omega^2\Omega_1^2] + [\omega^3\Omega_1^3] = 0,\\
[\omega^2\Omega_0^0] + [\omega^3\Omega_2^3] + [\omega^1\Omega_2^1] = 0,\\
[\omega^3\Omega_0^0] + [\omega^1\Omega_3^1] + [\omega^2\Omega_3^2] = 0,
\end{gathered}
$$

которые, если их развернуть, показывают, что обе части каждого из условных равенств равны нулю.

Итак, для определения c_3^4 и $\bar c_3^4$ остаются лишь два линейных уравнения, которые в общем случае независимы. Следовательно, через каждый произвольный интегральный двумерный элемент проходит трехмерный интегральный элемент и притом только один. Таким образом, система Пфаффа находится в инволюции *и ее общее решение зависит от трех* $(4-1)$ *произвольных функций двух аргументов* [1]).

30. В предыдущем изложении мы занимались лишь общим решением системы Пфаффа (14). Теперь мы перейдем к изучению особенных решений; у особенных решений все двумерные интегральные элементы особенные, то есть содержат бесконечное множество трехмерных интегральных элементов.

Так как определение трехмерных интегральных элементов, содержащих данный двумерный интегральный элемент, приводится к решению двух линейных относительно c_3^4 и $\bar c_3^4$ уравнений (20), то условие особенности выражается соотношением

$$
(21)\qquad (a_1^4 - b_2^4)\,\bar a_2^4 - (\bar a_1^4 - \bar b_2^4)\,a_2^4 = 0.
$$

---

1) На этот результат, относящийся лишь к гиперповерхностям в конформном пространстве 4 измерений, я указал в докладе на конгрессе математиков в Страсбурге.

Для геометрической интерпретации этого условия рассмотрим в одной из точек гиперповерхности v_3 совокупность касательных к кривым, проведенным на этой гиперповерхности и имеющим соприкосновение второго порядка с гиперсферой A_4, касательной к v_3. Геометрическое место этих касательных мы получим, выразив, что скалярное произведение гиперсферы A_4 на dA равно нулю

$$A_4 d^2 A = 0;$$

но соотношение

$$A_4 dA = 0$$

дает тождество

$$A_4 d^2 A + dA_4 dA = 0;$$

следовательно, искомое геометрическое место определяется соотношением

$$\overline{\Phi} \equiv dA_4 dA \equiv \omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 + \omega^3\omega_3^4 = 0.$$

Φ является квадратичной формой относительно ω^1, ω^2, ω^3.

Если гиперсферу A_4 заменить гиперсферой $A_4 + \lambda A$, где λ произвольный переменный параметр, то форма $\overline{\Phi}$ заменится формой $\overline{\Phi} + \lambda ds^2$. Следовательно, в каждой точке многообразия v_3 существует линейный пучок конусов второго порядка, имеющий внутреннее значение; эти конусы имеют общие оси, дающие *главные касательные* (касательные к линиям кривизны многообразия).

Пересечем теперь конусы двух пучков, связанных с многообразиями v_3 и $\overline{v}_3$ плоскостями $\omega^3 = 0$ и $\overline{\omega}^3 = 0$, определяющими двумерный интегральный элемент, рассмотренный выше; мы получим две инволюции

$$a_1^4(\omega^1)^2 + 2a_2^4\omega^1\omega^2 + b_2^4(\omega^2)^2 + \lambda[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] = 0,$$
$$\overline{a}_1^4(\omega^1)^2 + 2\overline{a}_2^4\omega^1\omega^2 + \overline{b}_2^4(\omega^2)^2 + \overline{\lambda}[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] = 0;$$

соотношение (21) выражает, что сечение одного из конусов первого пучка совпадает с сечением конуса, надлежащим образом выбранного во втором пучке; так как это должно иметь место для произвольной секущей плоскости $u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + u_3\omega = 0$, то это значит, что конус $\Phi = 0$ пересекается каждой плоскостью (проходящей через его вершину) по тем же образующим, что и некоторый определенный конус пучка $\lambda\Phi + \mu ds^2 = 0$. Геометрически очевидно, что этот последний конус должен быть независим от положения секущей плоскости и, следовательно, для произвольных ω^1, ω^2, ω^3 имеем тождество

$$\overline{\Phi} = \lambda\Phi + \mu ds^2.$$

Иначе говоря, ***особенные решения системы Пфаффа определяются парами многообразий v_3 и $\overline{v}_3$, допускающих конформное отображение одного многообразия на другое с сохранением главных касательных.***

31. Когда в точках многообразия v_3 репер уже выбран, в точке $\overline{v}_3$ его можно выбрать (путем надлежащего изменения $\overline{A}_4$) таким образом, чтобы формы Φ и $\overline{\Phi}$ были пропорциональны ($\mu = 0$). Следовательно, особые решения будут найдены путем интегрирования системы Пфаффа, полученной добавлением к начальным уравнениям (14) и (15) уравнений

$$\overline{\omega}_1^4 = \lambda\omega_1^4,\quad \overline{\omega}_2^4 = \lambda\omega_2^4,\quad \overline{\omega}_3^4 = \lambda\omega_3^4 \tag{22}$$

с вспомогательной неизвестной λ. Дифференцируя внешним образом, получаем

$$\begin{aligned}
&[\omega^1(\overline{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0)] + [\omega_1^4 d\lambda] + \overline{\Omega}_1^4 - \lambda\Omega_1^4 = 0,\\
&[\omega^2(\overline{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0)] + [\omega_2^4 d\lambda] + \overline{\Omega}_2^4 - \lambda\Omega_2^4 = 0,\\
&[\omega^3(\overline{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0)] + [\omega_3^4 d\lambda] + \overline{\Omega}_3^4 - \lambda\Omega_3^4 = 0;
\end{aligned} \tag{23}$$

с другой стороны, уравнения (16) приводятся к

$$\left\{\begin{aligned}
&[\omega^1\omega_1^4] + [\omega^2\omega_2^4] + [\omega^3\omega_3^4] = 0,\\
&[\omega^1(\overline{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] + [\omega^2(\overline{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] + [\omega^3(\overline{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] + \overline{\Omega}_0^0 - \Omega_0^0 = 0,\\
&[\omega^2(\overline{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] - [\omega^3(\overline{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] - [\omega_2^4\omega_3^4](\lambda^2 - 1) + \overline{\Omega}_2^3 - \Omega_2^3 = 0,\\
&[\omega^3(\overline{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\omega^1(\overline{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] - [\omega_3^4\omega_1^4](\lambda^2 - 1) + \overline{\Omega}_3^1 - \Omega_3^1 = 0,\\
&[\omega^1(\overline{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] - [\omega^2(\overline{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\omega_1^4\omega_2^4](\lambda^2 - 1) + \overline{\Omega}_1^2 - \Omega_1^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

(16′)

Мы проведем исследование в случае, когда *данное пространство является само конформным.*

Нетрудно видеть, что в этом случае многообразия v_3 и $\overline{v}_3$ всегда наложимы (конформным образом), на гиперсферу, иначе говоря, *если в каждом из многообразий v_3 и $\overline{v}_3$ ввести нормальную конформную связность, то эти многообразия становятся трехмерными конформными пространствами (с кривизной, равной нулю.)*

32. Сначала мы изучим саму по себе нормальную связность гиперповерхности v_3 в четырехмерном конформном пространстве. Мы будем обозначать составляющие этой связности буквой $\hat{\omega}$ с индексами.

Можно всегда предположить, что

$$\hat{\omega}^1 = \omega^1,\quad \hat{\omega}^2 = \omega^2,\quad \hat{\omega}^3 = \omega^3,\quad \hat{\omega}_0^0 = \omega_0^0,$$

откуда выводим

$$\hat{\omega}_2^3 = \omega_2^3,\quad \hat{\omega}_3^1 = \omega_3^1,\quad \hat{\omega}_1^2 = \omega_1^2.$$

Как следствие получаем соотношения

$$
(24)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&(\omega_0^0)' = [\omega^1\tilde{\omega}_1^0] + [\omega^2\tilde{\omega}_2^0] + [\omega^3\tilde{\omega}_3^0] = \\
&= [\omega^1\omega_1^0] + [\omega^2\omega_2^0] + [\omega^3\omega_3^0], \\
&(\omega_2^3)' = [\omega^2\tilde{\omega}_3^0] - [\omega^3\tilde{\omega}_2^0] + [\omega_2^1\,\omega_1^3] = \\
&= [\omega^2\omega_3^0] - [\omega^3\omega_2^0] + [\omega_2^1\,\omega_1^3] - [\omega_2^4\,\omega_3^4], \\
&(\omega_3^1)' = [\omega^3\tilde{\omega}_1^0] - [\omega^1\tilde{\omega}_3^0] + [\omega_3^2\,\omega_2^1] = \\
&= [\omega^3\omega_1^0] - [\omega^1\omega_3^0] + [\omega_3^2\,\omega_2^1] - [\omega_3^4\,\omega_1^4], \\
&(\omega_1^2)' = [\omega^1\tilde{\omega}_2^0] - [\omega^2\tilde{\omega}_1^0] + [\omega_1^3\,\omega_3^2] = \\
&= [\omega^1\omega_2^0] - [\omega^2\omega_1^0] + [\omega_1^3\,\omega_3^2] - [\omega_1^4\,\omega_2^4].
\end{aligned}
\right.
$$

Эти соотношения однозначно определяют $\tilde{\omega}_1^0$, $\tilde{\omega}_2^0$, $\tilde{\omega}_3^0$.

Из (24) легко выводится тождество

$$
(25)\qquad \sum_{i=1}^{3}[\omega_i^4\,\tilde{\omega}_i^0] = \sum_{i=1}^{3}[\omega_i^4\,\omega_i^0].
$$

Действительно, положим

$$
[\omega_1^4(\tilde{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] + [\omega_2^4(\tilde{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] + [\omega_3^4(\tilde{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] =
$$
$$
= A^1[\omega^2\omega^3] + A^2[\omega^3\omega^1] + A^3[\omega^1\omega^2].
$$

Умножая внешним образом на ω^1, получим отсюда

$$
[\omega^1\omega_1^4(\tilde{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] + [\omega^1\omega_2^4(\tilde{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] + [\omega^1\omega_3^4(\tilde{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] = A^1[\omega^1\omega^2\omega^3].
$$

Заменим теперь во втором и третьем члене левой части выражения

$$
[\omega^1(\tilde{\omega}_2^0 - \omega_2^0)], \quad [\omega^1(\omega_3^0 - \omega^{\overset{0}{3}})]
$$

их значениями из формул (24); имеем

$$
[\omega^1(\tilde{\omega}_2^0 - \omega_2^0)] = [\omega^2(\tilde{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\omega_1^4\,\omega_2^4],
$$
$$
[\omega^1(\tilde{\omega}_3^0 - \omega_3^0)] = [\omega^3(\tilde{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] - [\omega_1^4\,\omega_3^4],
$$

откуда

$$
A^1[\omega^1\omega^2\omega^3] = [(\omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 + \omega^3\omega_3^4)(\tilde{\omega}_1^0 - \omega_1^0)] = 0.
$$

Итак, A^1 равно нулю; аналогично получаем, что A^2 и A^3 тоже равны нулю.

33. Прежде чем переходить к дальнейшему, выведем из тождества (25) одно замечательное геометрическое свойство.

Продифференцируем внешним образом это тождество, предполагая, что мы остаемся на гиперповерхности v_3.

Мы получим некоторую форму третьей степени, равную тождественно нулю при произвольном выборе репера, совместимом со сделанными ранее условиями, то есть при произвольных

$$
\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega_0^0,\ \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0,\ \omega_2^3,\ \omega_3^1,\ \omega_1^2,\ \omega_4^0.
$$

Собирая члены, содержащие ω^1, ω^2, ω^3, получаем непосредственно соотношение

$$
(26)\qquad [\omega_1^4\Pi_1^0] + [\omega_2^4\Pi_2^0] + [\omega_3^3\Pi_3^0] = 0.
$$

Далее с каждой точкой многообразия v_3, ***рассматриваемого как нормальное многообразие***, связан (п. 19) конус (c) второго порядка, тангенциальное уравнение которого имеет вид

$$
\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + 2\beta_1 u_2 u_3 + 2\beta_2 u_3 u_1 + 2\beta_3 u_1 u_2 = 0,
$$

причем

$$
\Pi_1^0 = \alpha_1[\omega^2\omega^3] + \beta_3[\omega^3\omega^1] + \beta_2[\omega^1\omega^2],
$$
$$
\Pi_2^0 = \beta_3[\omega^2\omega^3] + \alpha_2[\omega^3\omega^1] + \beta_1[\omega^1\omega^2],
$$
$$
\Pi_3^0 = \beta_2[\omega^2\omega^3] + \beta_1[\omega^3\omega^1] + \alpha_3[\omega^1\omega^2].
$$

С другой стороны, с каждой точкой многообразия v_3, рассматриваемого вмещенным в конформное пространство четырех измерений, связан лежащий в касательной гиперплоскости пучок конусов второго порядка; один из этих конусов имеет точечное уравнение (в переменных ω^1, ω^2, ω^3)

$$
\omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 + \omega^3\omega_3^4 = 0,
$$

или же

$$
a_1(\omega^1)^2 + a_2(\omega^2)^2 + a_3(\omega^3)^2 + 2b_1\omega^2\omega^3 + 2b_2\omega^3\omega^1 + 2b_3\omega^1\omega^2 = 0,
$$

причем

$$
\omega_1^4 = a_1\omega^1 + b_3\omega^2 + b_2\omega^3,
$$
$$
\omega_2^4 = b_3\omega^1 + a_2\omega^2 + b_1\omega^3,
$$
$$
\omega_3^4 = b_2\omega^1 + b_1\omega^2 + a_3\omega^3.
$$

Тождество (26) дает теперь

$$
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + 2b_1\beta_1 + 2b_2\beta_2 + 2b_3\beta_3 = 0.
$$

Иначе говоря, *конус (c) обладает описанным около него триэдром, сопряженным относительно всех конусов пучка $\Phi + \lambda ds^2 = 0$, оси которых являются главными касательными к многообразию.*

Так как изотропный конус принадлежит к этому пучку, то мы находим уже ранее отмеченное свойство конуса (c) — что он имеет прямоугольный описанный триэдр.

Кроме того, мы видим, что, если два многообразия v_3 и $\bar{v}_3$ четырехмерного конформного пространства допускают конформное отображение одного на другое, то при этом отображении конусы (c), связанные с многообразиями, сохраняются, так как многообразия v_3 и $\bar{v}_3$ должны иметь общую нормальную связность.

Наконец, если многообразие v_3 допускает конформное отображение на гиперсферу, то, рассматривая его как нормальное многообразие, находим, что оно будет многообразием *без кривизны*. В другом месте я показал, что гиперповерхности v_3, обладающие этим свойством, зависят от шести произвольных функций одного аргумента[1]. Конус (c) для этих поверхностей является неопределенным, так как его уравнение становится тождеством.

34. Вернемся к исследованию системы Пфаффа, состоящей из уравнений (14), (15) и (22) и определяющей пары гиперповерхностей, допускающих конформное отображение одной на другую с сохранением главных касательных. Уравнения этой системы привели нас к внешним квадратичным уравнениям (16) и (23).

Уравнения (24), определяющие нормальную связность в v_3, дают нам после сравнения с (16′)

$$\tilde{\omega}_i^0 - \omega_i^0 = -\frac{1}{\lambda^2 - 1}(\bar{\omega}_i^0 - \omega_i^0),$$

то есть

$$\tilde{\omega}_i^0 = \frac{\lambda^2\omega_i^0 - \bar{\omega}_i^0}{\lambda^2 - 1};$$

отсюда путем простого счета получаем

$$\Pi_i^0 = (\tilde{\omega}_i^0)' = [\tilde{\omega}_i^0\, \omega_0^0] - \sum_{k=1}^{3}[\omega_i^k\, \tilde{\omega}_k^0] = \tag{27}$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}[\omega_i^4(\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0)] + \frac{2\lambda}{(\lambda^2-1)^2}[d\lambda\,(\bar{\omega}_i^0 - \omega_i^0)].$$

Мы покажем, что правая часть равна нулю. Доказательство требуется лишь в случае, если формы $\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0$ и $d\lambda$, линейные относительно ω^1, ω^2, ω^3, неравны обе нулю.

Заметим сначала, что, если бы они обе были линейно независимы, формы ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^4, ω_2^4, ω_3^4 могли бы быть линейно выражены, согласно (23), через $\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0$ и $d\lambda$, что является абсурдным, так как формы ω^1, ω^2, ω^3 по определению являются независимыми.

Итак, остается единственный случай, когда формы $\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0$ и $d\lambda$ приводятся к одной и той форме, что можно выразить, положив

$$\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0 = u\chi,\qquad d\lambda = v\chi,$$

[1] Bull. Soc. Math. de France, XLV (1917).

где χ обозначает некоторую ненулевую линейную форму.

Уравнения (23) показывают тогда, что три формы

$$u\omega^1 + v\omega_1^4,\quad u\omega^2 + v\omega_2^4,\quad u\omega^3 + v\omega_3^4$$

могут быть также выражены через χ и тоже приводятся таким образом к одной форме. Но это — половины частных производных по ω^1, ω^2, ω^3 от квадратичной формы $u ds^2 + v\Phi$ и, следовательно, эта форма представляет точный квадрат.

Мы можем предполагать, что эта форма совпадает с Φ, так как этого можно добиться надлежащим выбором A_4 (а следовательно, и $\bar{A}_4$); иначе говоря, можно предположить $u = 0$. Так как формы ω_1^4, ω_2^4, ω_3^4 приводятся к одной, то их внешние произведения, взятые попарно, равны нулю и формулы (16′) тогда показывают, что $\bar{\omega}_i^0 - \omega_i^0 = 0$.

Эти соотношения, присоединенные к $\bar{\omega}_4^0 - \lambda\omega_4^0 = 0$, доказывают, что выражения (27) для Π_i^0 равны нулю, что и требовалось доказать.

Следовательно, *если две гиперповерхности четырехмерного конформного пространства допускают конформное отображение одной на другую, с сохранением главных касательных, то обе эти гиперповерхности могут быть конформно отображены на гиперсферу.*

35. Вопрос полностью еще не решен. Нужно исследовать, существуют ли для заданной гиперповерхности v_3, допускающей конформное отображение на гиперсферу, другие гиперповерхности $\bar{v}_3$, допускающие конформное отображение на v_3 с сохранением главных касательных, и как можно получить все эти гиперповерхности $\bar{v}_3$.

Если обозначить через $\tilde{\omega}_i^0$ составляющие *нормальной* конформной связности, которую можно ввести в v_3, то, согласно предшествующему, отыскание многообразий $\bar{v}_3$ приводится к интегрированию системы Пфаффа

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar{\omega}^i = \omega^i \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\bar{\omega}^4 = 0,\\
&\bar{\omega}_0^0 = \omega_0^0,\\
&\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j \quad (i, j = 1, 2, 3),\\
&\bar{\omega}_i^4 = \lambda\omega_i^4 \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\bar{\omega}_i^0 = \lambda^2\omega_i^0 + (1-\lambda^2)\tilde{\omega}_i^0 \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\bar{\omega}_4^0 = \lambda\omega_4^0.
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Квадратичные уравнения, полученые внешним дифференцированием этой системы, приводятся после несложного просчета, если учесть, что v_3 может быть отображено на гиперсферу, к

$$
(29)\quad \begin{cases} [\omega_i^4\, d\lambda] = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \\ \lambda(\lambda^2-1)\sum_{i=1}^{3}[\omega_i^4(\tilde{\omega}_i^0-\omega_i^0)] + [\omega_4^0 d\lambda] = 0, \\ [(\tilde{\omega}_i^0-\omega_i^0)\, d\lambda] = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \end{cases}
$$

но мы видели выше (п. 32, формула 25), что тождественно

$$
\sum_{i=1}^{3}[\omega_i^4(\tilde{\omega}_i^0-\omega_i^0)] = 0.
$$

Поэтому рассматриваемые квадратные уравнения приводятся к

$$
(29')\quad \begin{cases} [\omega_i^4\, d\lambda] = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \\ [(\tilde{\omega}_i^0-\omega_i^0)\, d\lambda] = 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \\ [\omega_4^0 d\lambda] = 0. \end{cases}
$$

Следует различать два случая. Если семь форм ω_i^4, $\omega_i^0-\tilde{\omega}_i^0$, ω_4^0 пропорциональны одной из них (что требует, чтобы форма Φ была точным квадратом), остается лишь одно внешнее квадратичное уравнение, и общее решение рассматриваемой проблемы зависит от *одной произвольной функции одного аргумента*; этим характеризуется степень общности многообразия $\bar{v}_3$, которое может быть конформно отображено на v_3 с сохранением главных касательных. В противоположном случае, то есть если семь форм ω_i^4, $\tilde{\omega}_i^0-\omega_i^0$, ω_4^0 не пропорциональны одной из них, мы должны необходимо иметь $d\lambda=0$, и, следовательно, λ является произвольной постоянной; итак, в этом случае *многообразия $\bar{v}_3$ зависят от произвольного постоянного параметра.*

Легко показать, что первый случай всегда имеет место, если форма Φ может быть приведена к точному квадрату, то есть когда конус асимптотических касательных $\bar{v}_3$ является конусом вращения, или же когда он соприкасается с изотропным конусом.

В проведенном нами исследовании особенных решений системы Пфаффа (14), мы неявно предполагали, что $\lambda^2 \neq 1$. В противоположном случае легко убедиться, что многообразия v_3 и $\bar{v}_3$ получаются одно из другого конформным преобразованием; а это, очевидно, тривиальное решение поставленной проблемы.

Деформация второго порядка поверхностей в трехмерном нормальном пространстве

36. В п. 28 мы отметили, что в трехмерном нормальном пространстве E существует для двух поверхностей, кроме конформного отображения, еще мериэдрический изоморфизм, который в собственно конформном пространстве совпадает с наложимостью второго порядка. Условия наложимости второго порядка для двух поверхностей выражаются соотношениями

$$
(30)\quad \bar{\omega}^1=\omega^1,\ \ \bar{\omega}^2=\omega^2,\ \ \bar{\omega}_1^2=\omega_1^2,\ \ \bar{\omega}_2^3=\omega_2^3,\ \ \bar{\omega}_0^0=\omega_0^0,\ \ \bar{\omega}_3^0=\omega_3^0,
$$

которые следует добавить к соотношениям

$$
(31)\qquad \omega^3=0,\ \ \bar{\omega}^3=0.
$$

Уравнения (30) и (31) дают все пары поверхностей, допускающих наложение второго порядка одной поверхности на другую. Квадратичные уравнения, полученные внешним дифференцированием, имеют вид

$$
(32)\quad \begin{aligned} &[\omega^1\omega_1^3]+[\omega^2\omega_2^3]=0, \\ &[\omega^1(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)]-[\omega^2(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)]=0, \\ &[\omega^1(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)]-[\omega^2(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)]=0, \\ &[\omega_1^3(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)]+[\omega_2^3(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)]=\bar{\Omega}_{30}-\Omega_{30}=(\bar{a}_3-a_3)[\omega^1\omega^2]. \end{aligned}
$$

Будем теперь исходить из произвольного интегрального элемента, который можно предполагать определенным следующими уравнениями

$$
\frac{\omega^1}{a^1}=\frac{\omega^2}{a^2}=\frac{\omega_1^3}{a_1^3}=\frac{\omega_2^3}{a_2^3}=\frac{\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0}{a_1^0}=\frac{\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0}{a_2^0}.
$$

Получим соотношения, выражающие, что другой интегральный элемент находится в инволюции с первым элементом:

$$
(33)\quad \begin{cases} a^1\omega_1^3+a^2\omega_2^3=a_1^3\omega^1+a_2^3\omega^2, \\ a^1(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)+a^2(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)=a_1^0\omega^1+a_2^0\omega^2, \\ a^1(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)-a^2(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)=a_2^0\omega^1-a_1^0\omega^2, \\ a_1^3(\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0)+a_2^3(\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0)-a_1^0\omega_1^3-a_2^0\omega_2^0= \\ \qquad\qquad =(\bar{a}_3-a_3)(a^1\omega^2-a^2\omega^1). \end{cases}
$$

В общем случае эти уравнения разрешимы относительно ω_1^3, ω_2^3, $\bar{\omega}_1^0-\omega_1^0$, $\bar{\omega}_2^0-\omega_2^0$. Следовательно, через каждый произвольный линейный интегральный элемент проходит двумерный интегральный элемент и притом только один; система Пфаффа (30) и (31) является системой в инволюции и ее *общее решение зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.*

Рассматриваемый линейный интегральный элемент будет особенным, если уравнения (33) относительно ω_1^3, ω_2^3, $\overline{\omega}_1^0-\omega_1^0$, $\overline{\omega}_2^0-\omega_2^0$ приводятся менее чем к четырем. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$[(a^1)^2+(a^2)^2]\,(a^1a_2^0-a^2a_1^0)=0.$$

Следовательно, характеристиками системы дифференциальных уравнений, определяющей поверхности, допускающие деформации второго порядка, будут:

1) минимальные линии интегральных поверхностей, определяемые соотношением

$$(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=0;$$

2) линии, определенные соотношением

$$\omega^1(\overline{\omega}_2^0-\omega_2^0)-\omega^2(\overline{\omega}_1^0-\omega_1^0)=0;$$

вдоль этих линий ось конформной трансляции, к которой приводится относительное движение реперов, связанных с рассматриваемыми многообразиями, совпадает с касательной к этой линии. Так как уравнения (32) дают соотношения вида

$$\overline{\omega}_1^0-\omega_1^0=u\omega^1+v\omega^2,$$
$$\overline{\omega}_2^0-\omega_2^0=v\omega^1-u\omega^2,$$

то отсюда следует, что линии, определяемые уравнением

$$v[(\omega^1)^2-(\omega^2)^2]-2u\omega^1\omega^2=0,$$

образуют на каждой из поверхностей ортогональную сеть. В случае, когда пространство E приводится к конформному пространству, эти линии являются линиями кривизны, а искомые поверхности — изотермическими поверхностями.

РАБОТЫ КАРТАНА ПО ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein (C. R., t. 174, 1922, p. 437).

2. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion (C. R., t. 174, 1922, p. 593).

3. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité (C. R., t. 174, 1922, p. 734).

4. Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique (C. R., t. 174, 1922, p. 857).

5. Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein. (C. R., t. 174, 1922, p. 1104).

6. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (Ann. Ec. Norm., t. 40, 1923, p. 325—412; t. 41, 1924, p. 1—25, t. 42, 1925, p. 17—88).

Пространства аффинной связности (сокр. перевод, стр. 6 настоящего издания).

7. Les espaces à connexion conforme (Ann. Soc. pol. math., t. 2, 1923, p. 171—221).

Пространства конформной связности (стр. 153 настоящего издания).

8. Sur les variétés à connexion projective (Bull. Soc. math. de Franse, t. 52, 1924, p. 205—241).

Пространства проективной связности (стр. 119 настоящего издания).

9. Les récentes généralisations de la notion d'espace (Bull. Sc. math., t. 48, 1924, p. 294—300).

10. La théorie de la relativité et les espaces généralisés (Atti V. Congr. int. Filosofia, p. 427—436).

11. La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle (L'enseign. math., t. 24, 1925, p. 1—28).

12. Sur la connexion affine des surfaces (C. R., t. 178, 1924, p. 292).

13. Sur la connexion affine des surfaces développables (C. R., t. 178, 1924, p. 494).

14. Sus la connexion projective des surfaces (C. R., t. 178, 1924, p. 750).

15. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'Analysis situs (Assoc. Avanc. Sciences, 49-e session Grenoble, p. 47—49).

16. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés (Acta math. t. 48, 1926, p. 1—42).

Группы голономии обобщенных пространств (VIII международный конкурс на присуждение премии имени Лобачевского, Казань, 1940, стр. 61—110; или вып. 1 серии моногр. и исслед. по неевклидовой геометрии, Казань, 1940).

17. La théorie des groupes et la géométrie (L'enseign. math., t. 26, 1927, p. 200—225).

Теория групп и геометрия (VIII международный конкурс на присуждение премии имени Н. И. Лобачевского, Казань, 1940, стр. 111—141 или вып. 1 серии моногр. и исслед. по неевклидовой геометрии, Казань, 1940).

18. Rapport sur le mémoire de J. A. Schouten intitulé „Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkt zur Grundlegung der Geometrie" (Известия Казанского Ф. М. Об-ва сер. 3, т. 2, 1927, стр. 71—76).

19. Sur la représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes (Atti Congr. int. Matem., 1928, t. 4, p. 253—261).

20. Notice historique sur la notion de parallélisme absolu (Math. Ann., B. 102, 1930, S. 698—706).

21. Sur un probléme d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (Mathematica, t. 4, 1930, p. 114—136).

22. Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire (Exposés de Géométrie, I, Paris, Hermann, 1933).

Метрические пространства, основанные на понятии площади (VIII международный конкурс на присуждение премии имени Н. И. Лобачевского, Казань, 1940, стр. 143—194; или вып. 1 серии моногр. и исслед. по неевклидовой геометрии, Казань, 1940).

23. Sur les espaces de Finsler (C. R., t. 196, 1933, p. 582—586).

24. Les espaces de Finsler (Exposés de Géométrie, II, Paris, Hermann, 1934).

25. Le calcul tensoriel en géométrie projective (C. R., t. 198, 1934, p. 2033—2037).

26. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés (Exposés de Geometrie. V. Paris, Hermann, 1935).

Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства. ОНТИ, 1933.

27. Le calcul tensoriel projectif (Мат. сб. т. 42, 1935, стр. 131—148).

28. La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')\,dx$ (J. Math. pures et appliquées, t. 15, 1936, p. 42—69).

29. Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne (C. R. Congrès intern. Oslo, I, 1936, p. 92—103).

30. Les espaces de Finsler (Труды Сем. вект., тенз. ан., вып. 4, 1937, стр. 70-81).

Пространства Финслера (там же, стр. 82—94).

31. Les espaces à connexion projective (Труды Сем. вект., тенз. ан., вып. 4, 1937, стр. 147—159).

Пространства проективной связности (там же, стр. 160—173).

32. Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris, G.—V., 1937.

33. L'extension du calcul tensoriel aux géométries non affines (Annals of Math., t. 38, 1937, p. 1—13).

34. La géométrie riemannienne et ses généralisations (Enc. Française, t. 1, 1937).

35. Les espaces généralisés et l'intégration de certaines classes d'équations différentielles (C. R., t. 206, 1938, p. 1689—1693).

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

ПРОСТРАНСТВА КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ